Tableaux Semánticos de la Lógica Proposicional

Semana 9

Edgar Andrade, PhD

Última revisión: Marzo de 2022

Departmento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Presentación

En esta sesión estudiaremos:

1. Motivación de los tableaux

2. Construcción de los tableaux

3. Usando tableaux para clasificar fórmulas

4. Usando tableaux para verificar la validez de argumentos

Presentación

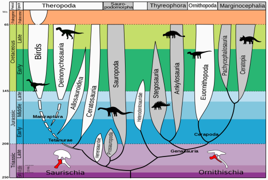
1. Motivación de los tableaux
2. Construcción de los tableaux
3. Usando tableaux para clasificar fórmulas
4. Usando tableaux para verificar la validez de argumentos

Motivación de los tableaux (1/6)

Deseamos un procedimiento mecánico que permita:

Motivación de los tableaux (1/6)

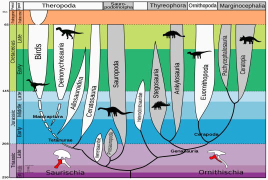
Deseamos un procedimiento mecánico que permita:



Clasificar
fórmulas

Motivación de los tableaux (1/6)

Deseamos un procedimiento mecánico que permita:

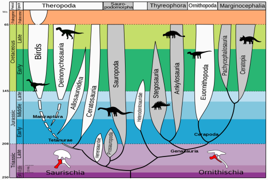


Clasificar fórmulas

Verificar validez de argumentos

Motivación de los tableaux (1/6)

Deseamos un procedimiento mecánico que permita:



Clasificar fórmulas

Verificar validez de argumentos

Resolver problemas

Motivación de los tableaux (2/6)

$A \longrightarrow$ 

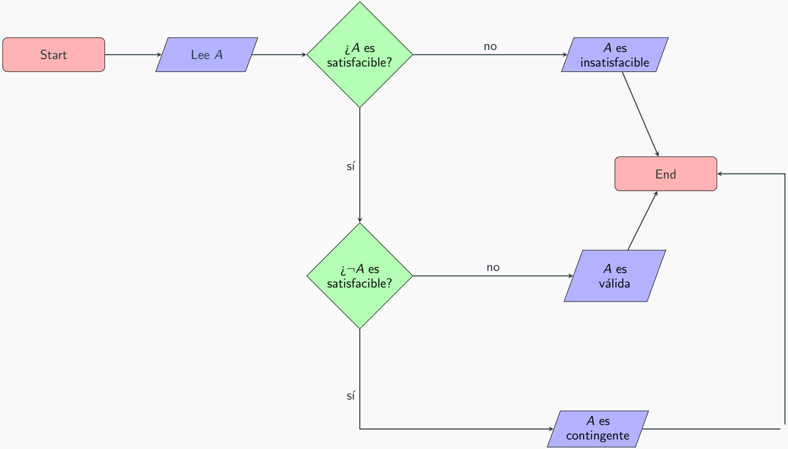
$\rightarrow$ "A es satisfacible"

$\rightarrow$ "A es insatisfacible"

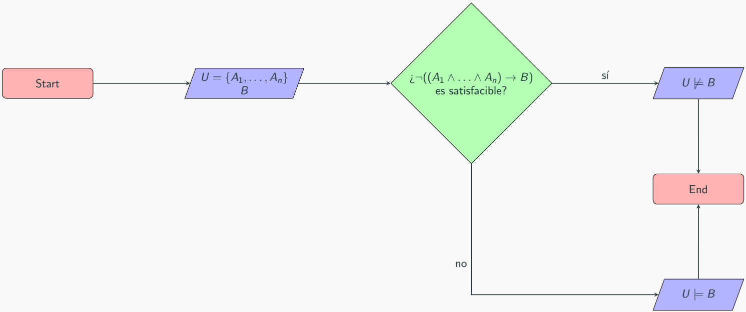
SATsolver

Los algoritmos que, dada una fórmula A, buscan una interpretación I tal que A.valor(I)=`True` se conocen como SATsolvers.

Motivación de los tableaux (4/6)

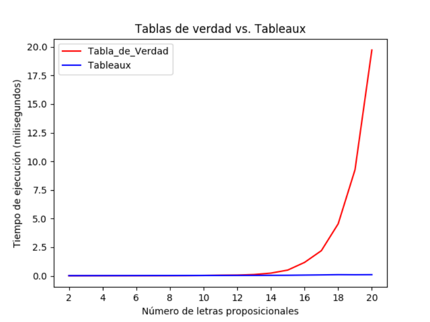


Motivación de los tableaux (5/6)



Motivación de los tableaux (6/6)

Los Tableaux semánticos son un procedimiento mecánico *en algunos casos más eficiente* que las tablas de verdad.



Comparación de tiempos de ejecución para determinar si una fórmula es satisfacible. En el eje horizontal están las fórmulas $p_1 \wedge p_2$, $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$, $\ldots$, ordenadas por el número de letras proposicionales.

Presentación

Literales

Un *literal* es un átomo o la negación de un átomo.

Literales

Un *literal* es un átomo o la negación de un átomo.

Ejemplos: p, $\neg p$, $\neg q$, $\ldots$

Literales

Un *literal* es un átomo o la negación de un átomo.

Ejemplos: p, $\neg p$, $\neg q$, $\ldots$

Si p es un átomo, $\{p, \neg p\}$ es un *par complementario* de literales.

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

$\{p \wedge (\neg q \vee \neg p)\}$	La raíz de A es $\wedge$

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

$$\begin{array}{c} \{p \wedge (\neg q \vee \neg p)\} \\ | \\ \{p, \neg q \vee \neg p\} \end{array}$$

Quitamos A y ponemos p y $\neg q \vee \neg p$

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

$$\begin{array}{c} \{p \wedge (\neg q \vee \neg p)\} \\ | \\ \{p, \neg q \vee \neg p\} \end{array}$$

La raíz de $\neg q \vee \neg p$ es $\vee$

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

$$\{p \wedge (\neg q \vee \neg p)\}$$

$$\{p, \neg q \vee \neg p\}$$

$$\{p, \neg q\} \quad \{p, \neg p\}$$

Quitamos $\neg q \vee \neg p$ y abrimos dos opciones con cada uno de los lados.

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

$$\{p \wedge (\neg q \vee \neg p)\}$$

$$\{p, \neg q \vee \neg p\}$$

$$\{p, \neg q\} \quad \{p, \neg p\}$$

$$\times$$

La rama de la derecha contiene un par complementario de literales.

Descomposición de fórmulas (1/3)

Sea $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$. Descompondremos A en conjuntos de literales.

$$\{p \wedge (\neg q \vee \neg p)\}$$

$$\{p, \neg q \vee \neg p\}$$

$$\{p, \neg q\} \quad \{p, \neg p\}$$

$$\odot \qquad \times$$

La rama de la izquierda NO contiene un par complementario de literales.

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

$\{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\}$ La raíz de A es $\wedge$

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

$$\begin{array}{c} \{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\} \\ | \\ \{p \vee q, \neg p \vee \neg q\} \end{array}$$

Quitamos A y ponemos $p \vee q$ y $\neg p \vee \neg q$

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

$$\{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\}$$

$$\{p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$$

La raíz de $p \vee q$ es $\vee$

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\} \arrow[d, no head] & \\
 & \{p \vee q, \neg p \vee \neg q\} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\{p, \neg p \vee \neg q\} & & \{q, \neg p \vee \neg q\}
\end{tikzcd}
$$

Quitamos $p \vee q$ y abrimos dos ramas

Descomposición de fórmulas (2/3)

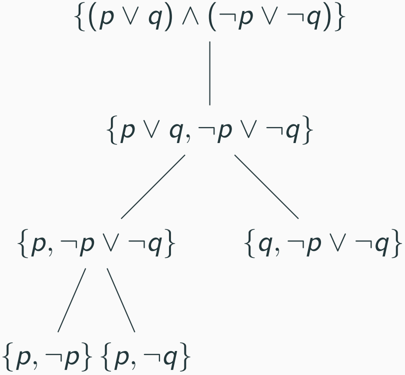
Sea $A = (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \{(p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)\} \arrow[d, no head] & \\
 & \{p \lor q, \neg p \lor \neg q\} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\{p, \neg p \lor \neg q\} & & \{q, \neg p \lor \neg q\}
\end{tikzcd}
$$

La raíz de $\neg p \lor \neg q$ es $\lor$

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$.



Quitamos $\neg p \lor \neg q$ y abrimos dos ramas

Sea $A = (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \{(p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)\} \arrow[d, dash] & & \\
 & & \{p \lor q, \neg p \lor \neg q\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \{p, \neg p \lor \neg q\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \{q, \neg p \lor \neg q\} & \\
\{p, \neg p\} & & \{p, \neg q\} & &
\end{tikzcd}
$$

La raíz de $\neg p \lor \neg q$ es $\lor$

Descomposición de fórmulas (2/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

$$\{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\}$$

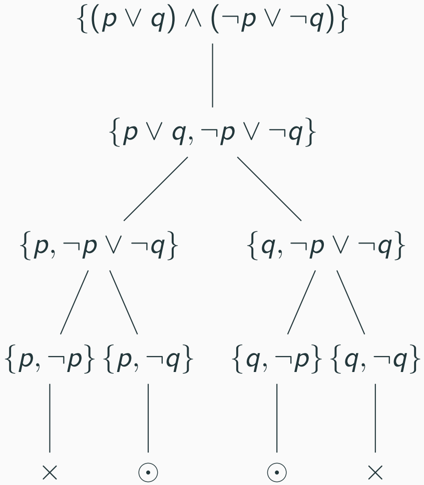
$$\{p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$$

$$\{p, \neg p \vee \neg q\} \qquad \{q, \neg p \vee \neg q\}$$

$$\{p, \neg p\} \; \{p, \neg q\} \qquad \{q, \neg p\} \; \{q, \neg q\}$$

Quitamos $\neg p \vee \neg q$ y abrimos dos ramas

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.



Verificamos pares complementarios

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$.

$\{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)\}$ La raíz de A es $\land$

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.

$$\begin{array}{c} \{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)\} \\ | \\ \{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\} \end{array}$$

Quitamos A y ponemos $p \vee q$ y $\neg p \wedge \neg q$

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.

$$
\begin{array}{c}
\{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)\} \\
| \\
\{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\}
\end{array}
$$

La raíz de $\neg p \wedge \neg q$ es $\wedge$

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.

$$\begin{array}{c}
\{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)\} \\
| \\
\{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\} \\
| \\
\{p \vee q, \neg p, \neg q\}
\end{array}$$

Quitamos $\neg p \wedge \neg q$ y ponemos $\neg p$ y $\neg q$

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$.

$$\{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)\}$$

$$|$$

$$\{p \lor q, \neg p \land \neg q\}$$

La raíz de $p \lor q$ es $\lor$

$$|$$

$$\{p \lor q, \neg p, \neg q\}$$

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)\} \arrow[d, dash] & \\
 & \{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\} \arrow[d, dash] & \\
 & \{p \vee q, \neg p, \neg q\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{p, \neg p, \neg q\} & & \{q, \neg p, \neg q\}
\end{tikzcd}$$

Quitamos $p \vee q$ y abrimos dos ramas

Descomposición de fórmulas (3/3)

Sea $A = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.

$$\{(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)\}$$

$$\{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\}$$

$$\{p \vee q, \neg p, \neg q\}$$

$$\{p, \neg p, \neg q\} \qquad \{q, \neg p, \neg q\}$$

$$\times \qquad \times$$

Verificamos pares complementarios

Tableaux

Definición: Sea A una fórmula sin dobles implicaciones. Un tableau semántico τ para A es un árbol tal que:

- sus nodos están etiquetados con conjuntos de fórmulas
- sus hojas están etiquetadas con conjuntos de literales.

Tableaux

Definición: Sea A una fórmula sin dobles implicaciones. Un tableau semántico τ para A es un árbol tal que:

- sus nodos están etiquetados con conjuntos de fórmulas
- sus hojas están etiquetadas con conjuntos de literales.

Definición: τ es cerrado sii todas sus hojas contienen un par complementario de literales. De lo contrario, τ es abierto.

Definición: Sea A una fórmula sin dobles implicaciones. Un tableau semántico τ para A es un árbol tal que:

- sus nodos están etiquetados con conjuntos de fórmulas
- sus hojas están etiquetadas con conjuntos de literales.

Definición: τ es cerrado sii todas sus hojas contienen un par complementario de literales. De lo contrario, τ es abierto.

Propiedad central de los tableaux:

- τ es cerrado sii A es insatisfacible.
- τ es abierto sii A es satisfacible.

Algoritmo de construcción de tableaux

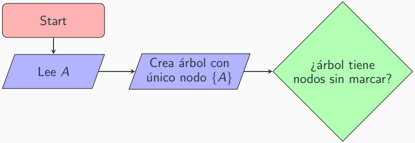
El algoritmo se basa en iteraciones sobre los nodos de un árbol.

El árbol de entrada del algoritmo es un sólo nodo, el cual está etiquetado con el conjunto cuyo único elemento es la fórmula A que queremos examinar.

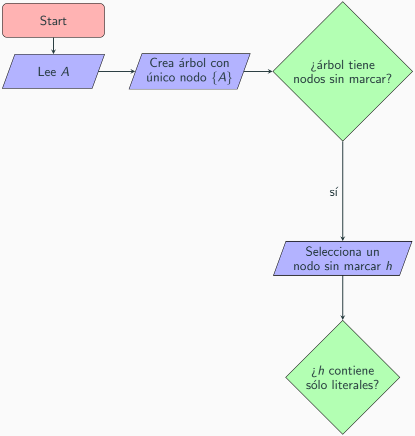
La iteración i-ésima actúa sobre un nodo no marcado, extendiendo el árbol con nuevos nodos.

Cuando el árbol nuevo producido por la iteración sólo contiene hojas marcadas, el algoritmo termina.

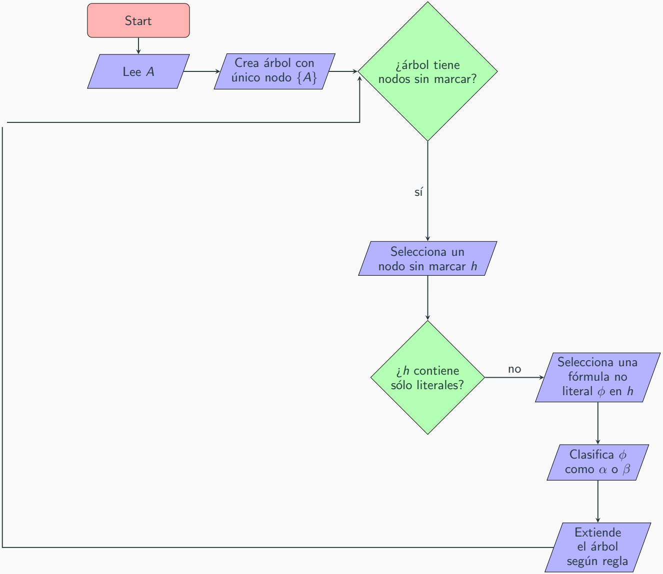
Algoritmo de construcción de tableaux



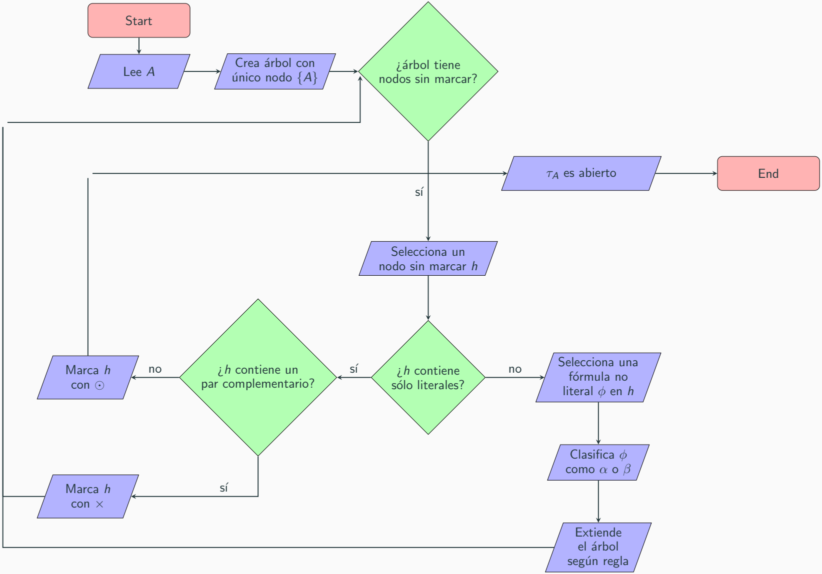
Algoritmo de construcción de tableaux



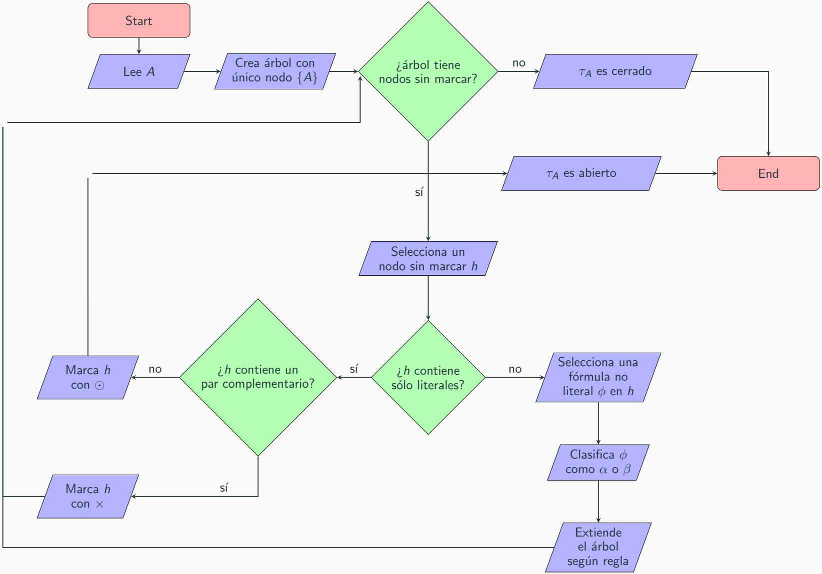
Algoritmo de construcción de tableaux



Algoritmo de construcción de tableaux



Algoritmo de construcción de tableaux



Reglas α

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \land A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \lor A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$

Reglas α

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

Sea n un nodo, S el conjunto de fórmulas que etiqueta a n y $\alpha \in S$.

Reglas α

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

Sea n un nodo, S el conjunto de fórmulas que etiqueta a n y $\alpha \in S$.

Crear un hijo de n, llamémoslo n', con el conjunto de fórmulas $(S - \{\alpha\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s))\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s))\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s))\}$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s)\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s))\}$$

$$|$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s)\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s))\}$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s)\}$$

$$\{\neg(p \vee q), \neg(r \to s)\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s))\}$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s)\}$$

$$\{\neg(p \vee q), \neg(r \to s)\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s))\}$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s)\}$$

$$\{\neg(p \vee q), \neg(r \rightarrow s)\}$$

$$\{\neg p, \neg q, \neg(r \rightarrow s)\}$$

Ejemplo

	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s))\}$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s)\}$$

$$\{\neg(p \vee q), \neg(r \rightarrow s)\}$$

$$\{\neg p, \neg q, \neg(r \rightarrow s)\}$$

Ejemplo

$$\{\neg\neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s))\}$$

$$\{\neg(p \vee q) \wedge \neg(r \to s)\}$$

$$\{\neg(p \vee q), \neg(r \to s)\}$$

$$\{\neg p, \neg q, \neg(r \to s)\}$$

$$\{\neg p, \neg q, r, \neg s\}$$

Reglas β

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

Reglas β

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

Sea n un nodo, S el conjunto de fórmulas que etiqueta a n y $\beta \in S$.

Reglas β

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

Sea n un nodo, S el conjunto de fórmulas que etiqueta a n y $\beta \in S$.

Crear dos hijos de n, llamémoslos n_1 y n_2, con conjuntos de fórmulas $(S - \{\beta\}) \cup \{\beta_1\}$ y $(S - \{\beta\}) \cup \{\beta_2\}$, respectivamente.

Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2

Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

$$\{\neg(p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)\}$$

Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

$$\{\neg(p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)\}$$

Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \land B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \lor B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2

$$\{\neg(p \land q) \lor (r \to s)\}$$

$$\{\neg(p \land q)\} \qquad \{r \to s\}$$

Ejemplo

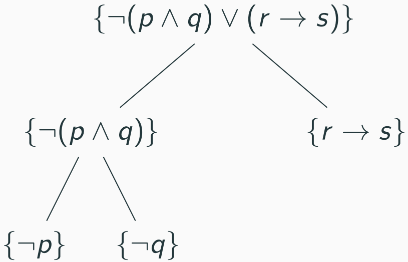
	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

$$\{\neg(p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)\}$$

$$\{\neg(p \wedge q)\} \qquad \{r \rightarrow s\}$$

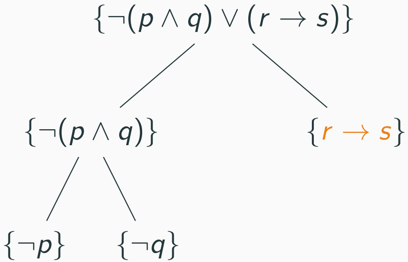
Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2



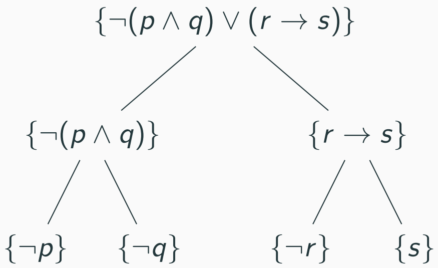
Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2



Ejemplo

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2



Todas las reglas juntas

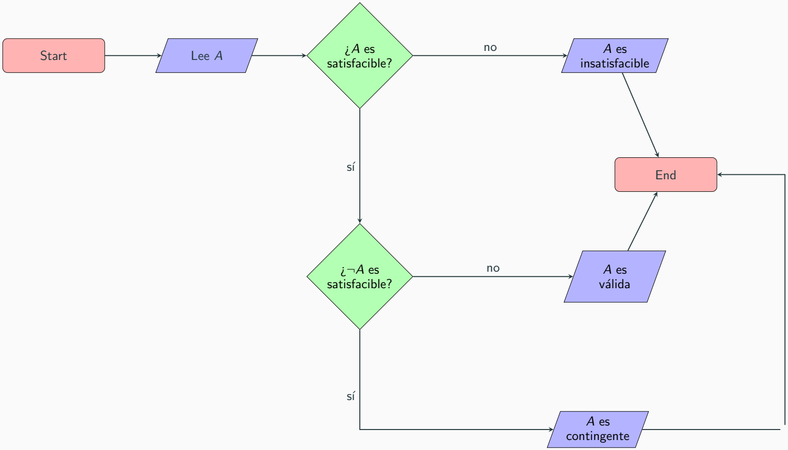
	α	α_1	α_2
1α	$\neg\neg A_1$	A_1	
2α	$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
3α	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
4α	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

	β	β_1	β_2
1β	$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
2β	$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
3β	$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2

Presentación

Clasificando fórmulas

¿A es insatisfacible, válida o contingente?



Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es insatisfacible, válida o contingente?

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)$ es insatisfacible, válida o contingente?

☞ Hacemos un tableau para $p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)$:

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es insatisfacible, válida o contingente?

☞ Hacemos un tableau para $p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$:

$$\{p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)\}$$

$$\{\neg p\} \qquad\qquad \{(\neg p \vee q) \to q\}$$

$$\odot$$

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)$ es insatisfacible, válida o contingente?

- ☞ Hacemos un tableau para $p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)$:
- ☞ Como el tableau para $p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)$ es abierto, entonces no podemos decir que es insatisfacible.

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es insatisfacible, válida o contingente?

- ☞ Hacemos un tableau para $p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$:
- ☞ Como el tableau para $p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es abierto, entonces no podemos decir que es insatisfacible.
- ☞ Seguimos nuestra clasificación con la negación de la fórmula.

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es válida o contingente?

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es válida o contingente?

☞ Hacemos un tableau para $\neg\Big(p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)\Big)$:

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)$ es válida o contingente?

☞ Hacemos un tableau para $\neg\Big(p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)\Big)$:

$$\{\neg\Big(p \to \big((\neg p \lor q) \to q\big)\Big)\}$$

$$\{p, \neg\big((\neg p \lor q) \to q\big)\}$$

$$\{p, \neg p \lor q, \neg q\}$$

$$\{p, \neg p, \neg q\} \qquad\qquad \{p, q, \neg q\}$$

$$\times \qquad\qquad\qquad \times$$

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es válida o contingente?

- ☞ Hacemos un tableau para $\neg\Big(p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)\Big)$:
- ☞ Como el tableau para $\neg\Big(p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)\Big)$ es cerrado, entonces decimos que ella es insatisfacible.

Ejemplo

¿$p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es válida o contingente?

- ☞ Hacemos un tableau para $\neg\Big(p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)\Big)$:
- ☞ Como el tableau para $\neg\Big(p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)\Big)$ es cerrado, entonces decimos que ella es insatisfacible.
- ☞ Se sigue que $p \to \big((\neg p \vee q) \to q\big)$ es válida.

Presentación

Verificando validez de argumentos

Sea B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

Proposición: $U \models B$ sii $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B$ es válida.

Verificando validez de argumentos

Sean $U = \{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\}$ y $B = s$. ¿$U \models s$?

Verificando validez de argumentos

Sean $U = \{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\}$ y $B = s$. ¿$U \models s$?

Sea $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \rightarrow s$.

Verificando validez de argumentos

Sean $U = \{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\}$ y $B = s$. ¿$U \models s$?

Sea $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \rightarrow s$.

$\neg A \longrightarrow$

“$\neg A$ es satisfacible”

“$\neg A$ es insatisfacible”

Verificando validez de argumentos

Sean $U = \{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\}$ y $B = s$. ¿$U \models s$?

Sea $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \rightarrow s$.

$\neg A \longrightarrow$

"$\neg A$ es satisfacible"

"$\neg A$ es insatisfacible"

¡$U \models s$!

Verificando validez de argumentos

Sean $U = \{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\}$ y $B = s$. ¿$U \models s$?

Sea $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s$.

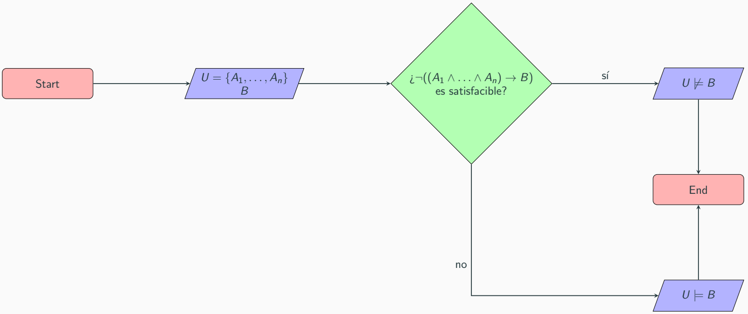
¡$U \not\models s$!

$\neg A \longrightarrow$ 

$\boxed{\text{“}\neg A \text{ es satisfacible”}}$

“$\neg A$ es insatisfacible”

Diagrama de flujo para verificar la validez



Ejemplo

¿$\neg\Big(\big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s\Big)$ es satisfacible?

Ejemplo

$$¿\neg\Big(\big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s\Big) \text{ es satisfacible?}$$

$$\{\neg\Big(\big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s\Big)\}$$

$$\{(\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r), \neg s\}$$

$$\{\neg p \vee s, (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r), \neg s\}$$

$$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r), \neg s\}$$

$$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg q, \neg r, \neg s\}$$

$$\{\neg p, r \vee p, \neg q, \neg r, \neg s\} \qquad \{s, r \vee p, \neg q, \neg r, \neg s\}$$

$$\{\neg p, r, \neg q, \neg r, \neg s\} \qquad \{\neg p, p, \neg q, \neg r, \neg s\} \qquad \times$$

$$\times \qquad \times$$

Ejemplo

$$¿\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s?$$

Ejemplo

¿$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s$?

☞ Hacemos $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s$.

Ejemplo

¿$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s$?

- ☞ Hacemos $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s$.
- ☞ Hacemos un tableau para $\neg A$:

Ejemplo

¿$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s$?

- ☞ Hacemos $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \rightarrow s$.
- ☞ Hacemos un tableau para $\neg A$:
- ☞ Como el tableau para $\neg A$ es cerrado, entonces decimos que ella es insatisfacible.

Ejemplo

¿$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s$?

- ☞ Hacemos $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \rightarrow s$.
- ☞ Hacemos un tableau para $\neg A$:
- ☞ Como el tableau para $\neg A$ es cerrado, entonces decimos que ella es insatisfacible.
- ☞ Se sigue que A es válida.

Ejemplo

¿$\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s$?

- ☞ Hacemos $A = \big((\neg p \vee s) \wedge (r \vee p) \wedge \neg(q \vee r)\big) \to s$.
- ☞ Hacemos un tableau para $\neg A$:
- ☞ Como el tableau para $\neg A$ es cerrado, entonces decimos que ella es insatisfacible.
- ☞ Se sigue que A es válida.
- ☞ Por lo tanto $\{\neg p \vee s, r \vee p, \neg(q \vee r)\} \models s$.

Fin de la sesión

En esta sesión usted ha aprendido a:

1. Construir tableaux semánticos para una fórmula dada.
2. Usar tableaux para clasificar fórmulas y verificar la validez de argumentos.