Satisfacibilidad, validez y consecuencia

Semana 5

Edgar Andrade, PhD

Última revisión: Febrero de 2022

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Presentación

En esta sesión estudiaremos:

1. Clasificación de fórmulas
2. Satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas
3. Implicación lógica

Presentación

1. Clasificación de fórmulas

2. Satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas

3. Implicación lógica

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

- A es satisfacible sii existe una interpretación I tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

- A es satisfacible sii existe una interpretación I tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

- A es insatisfacible sii para toda interpretación I, $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 3

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es satisfacible.

Sea I tal que $I(p) = \texttt{True}$ y $I(q) = \texttt{True}$. Luego $(p \wedge q)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego $(p \wedge \neg p).\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego $(p \wedge \neg p)$.valor$(I) = \texttt{False}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $\neg p$.valor$(I) = \texttt{False}$ y entonces $(p \wedge \neg p)$.valor$(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego $(p \wedge \neg p).\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $\neg p.\text{valor}(I) = \texttt{False}$ y entonces $(p \wedge \neg p).\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

En cualquier caso, $(p \wedge \neg p).\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Como I es arbitraria, $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Validez y falseabilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

- A es válida sii para toda interpretación I, A.valor$(I) =$ `True`.

Validez y falseabilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

- A es válida sii para toda interpretación I, $A.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.
- A es falseable sii existe una interpretación I tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $(p \vee \neg p)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $(p \vee \neg p).\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{False}$. Luego $\neg p.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ y entonces $(p \vee \neg p).\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \lor \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $(p \lor \neg p)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{False}$. Luego $\neg p$.valor$(I) = \texttt{True}$ y entonces $(p \lor \neg p)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

En cualquier caso, $(p \lor \neg p)$.valor$(I) = \texttt{True}$. Como I es arbitraria, $p \lor \neg p$ es válida.

Ejemplo 6

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es falseable.

Ejemplo 6

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es falseable.

Sea I tal que $I(p) = \texttt{False}$. Luego $(p \wedge q)$.valor$(I) = \texttt{False}$.

Contingencia

Sea A una fórmula.

A es contingente sii A es satisfacible y falseable.

Ejemplo 7

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es contingente.

Ejemplo 7

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es contingente.

Ver ejemplos 3 y 6.

Clasificación de fórmulas (1/2)

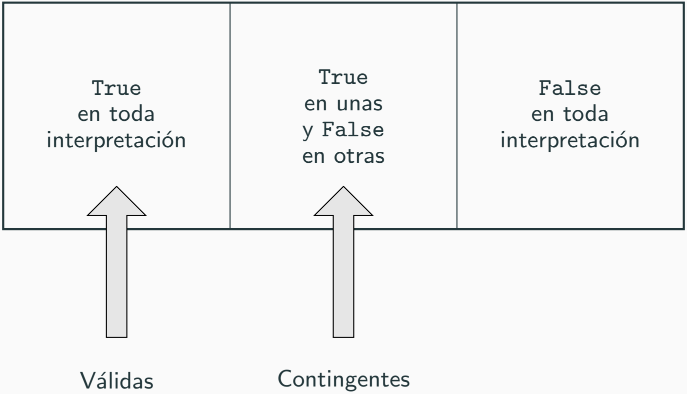
`True` en toda interpretación	`True` en unas y `False` en otras	`False` en toda interpretación

Clasificación de fórmulas (1/2)

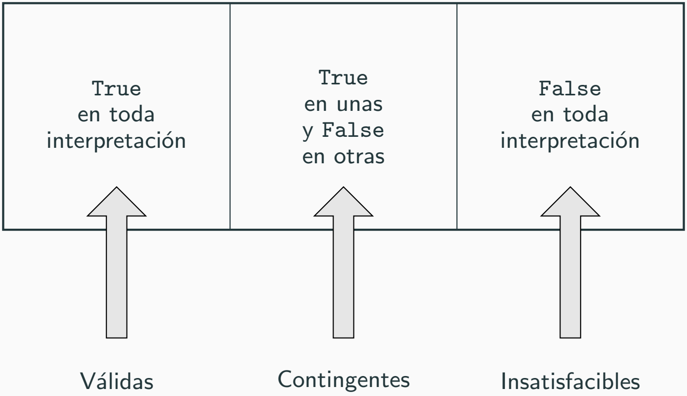
`True` en toda interpretación	`True` en unas y `False` en otras	`False` en toda interpretación

Válidas

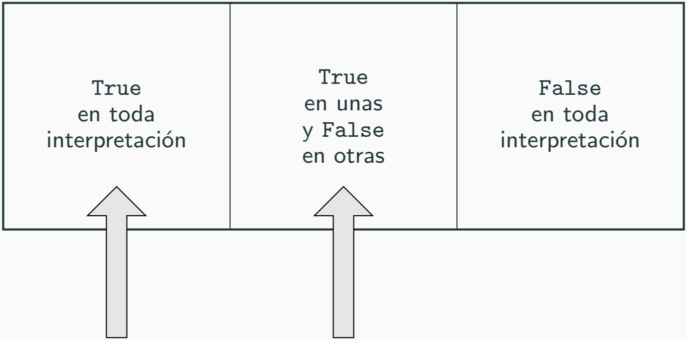
Clasificación de fórmulas (1/2)



Clasificación de fórmulas (1/2)

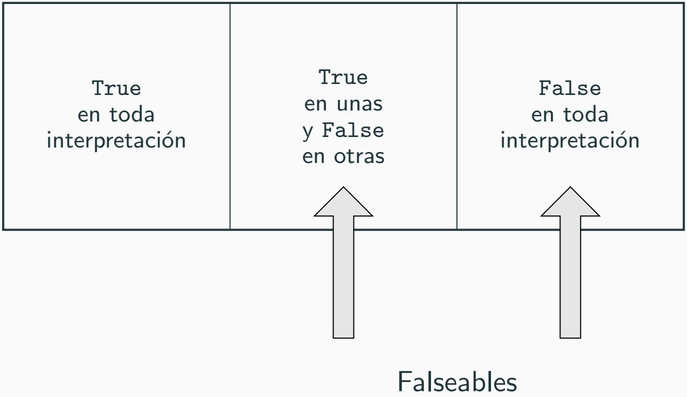


Clasificación de fórmulas (2/2)



Satisfacibles

Clasificación de fórmulas (2/2)



Presentación

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de conjuntos

Sea $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

- U es satisfacible sii existe una interpretación I tal que para toda $A_i \in U$, A_i.valor$(I) = \texttt{True}$.

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de conjuntos

Sea $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

- U es satisfacible sii existe una interpretación I tal que para toda $A_i \in U$, A_i.valor$(I) = \texttt{True}$.

- U es insatisfacible sii para toda interpretación I, existe $A_i \in U$ tal que A_i.valor$(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 8

Proposición: El conjunto $U = \{p \vee r, q \vee r\}$ es satisfacible.

Sea I tal que $I(p) = \texttt{True}$ y $I(q) = \texttt{True}$. Luego $(p \vee r)$.valor$(I) = \texttt{True}$ y $(q \vee r)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 8

Proposición: El conjunto $U = \{p \vee r, q \vee r\}$ es satisfacible.

Sea I tal que $I(p) = \texttt{True}$ y $I(q) = \texttt{True}$. Luego $(p \vee r)$.valor$(I) = \texttt{True}$ y $(q \vee r)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

NB: Observe que cualquiera sea el valor que I le da a r no se altera el hecho de que $(p \vee r)$.valor$(I) = \texttt{True}$ y $(q \vee r)$.valor$(I) = \texttt{True}$. Luego hay más de una tal I.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Tenemos varios casos:

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $\neg p.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Tenemos dos casos:

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que A.valor$(I) = \texttt{False}$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que A.valor$(I) = \texttt{False}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $\neg p$.valor$(I) = \texttt{False}$. Tenemos dos casos:

Caso 2a: $I(q) = \texttt{True}$. Luego sea $A = \neg q$. Observe que $A \in U$ y que A.valor$(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que A.valor$(I) = \texttt{False}$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que A.valor$(I) = \texttt{False}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $\neg p$.valor$(I) = \texttt{False}$. Tenemos dos casos:

Caso 2a: $I(q) = \texttt{True}$. Luego sea $A = \neg q$. Observe que $A \in U$ y que A.valor$(I) = \texttt{False}$.

Caso 2b: $I(q) = \texttt{False}$. Luego sea $A = \neg p \vee q$. Observe que $A \in U$ y que A.valor$(I) = \texttt{False}$, toda vez que $\neg p$.valor$(I) = \texttt{False}$ y que q.valor$(I) = \texttt{False}$.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = \texttt{False}$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

Caso 2: $I(p) = \texttt{True}$. Luego $\neg p.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Tenemos dos casos:

- Caso 2a: $I(q) = \texttt{True}$. Luego sea $A = \neg q$. Observe que $A \in U$ y que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.
- Caso 2b: $I(q) = \texttt{False}$. Luego sea $A = \neg p \vee q$. Observe que $A \in U$ y que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$, toda vez que $\neg p.\text{valor}(I) = \texttt{False}$ y que $q.\text{valor}(I) = \texttt{False}$.

En cualquier caso, existe una fórmula A en U tal que $A.\text{valor}(I) = \texttt{False}$. Como I es arbitraria, U es insatisfacible.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = \texttt{True}, \ldots, n$.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = \texttt{True}, \ldots, n$.
2. Si U es satisfacible y B es válida, entonces $U \cup \{B\}$ es satisfacible.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = \texttt{True}, \ldots, n$.
2. Si U es satisfacible y B es válida, entonces $U \cup \{B\}$ es satisfacible.
3. Si U es insatisfacible, entonces $U \cup \{B\}$ es insatisfacible para cualquier fórmula B.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = \texttt{True}, \ldots, n$.
2. Si U es satisfacible y B es válida, entonces $U \cup \{B\}$ es satisfacible.
3. Si U es insatisfacible, entonces $U \cup \{B\}$ es insatisfacible para cualquier fórmula B.
4. Si U es insatisfacible y A_i es válida para algún i, entonces $U - \{A_i\}$ es insatisfacible.

Presentación

Implicación lógica (1/2)

Sea B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Definimos que B sea una implicación lógica de U:

$U \models B$ sii para toda interpretación I,

si A_i.valor$(I) = \texttt{True}$ para todo $A_i \in U$,

entonces B.valor$(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \rightarrow r, r \rightarrow q\}$. Entonces $U \models B$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$p.\text{valor}(I) = (p \to r).\text{valor}(I) = (r \to q).\text{valor}(I) = \texttt{True}$$

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$p.\text{valor}(I) = (p \to r).\text{valor}(I) = (r \to q).\text{valor}(I) = \texttt{True}$$

Como $p.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ y $(p \to r).\text{valor}(I) = \texttt{True}$, entonces $r.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$p.\text{valor}(I) = (p \to r).\text{valor}(I) = (r \to q).\text{valor}(I) = \texttt{True}$$

Como $p.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ y $(p \to r).\text{valor}(I) = \texttt{True}$, entonces $r.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Como $r.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ y $(r \to q).\text{valor}(I) = \texttt{True}$, entonces $q.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$p.\text{valor}(I) = (p \to r).\text{valor}(I) = (r \to q).\text{valor}(I) = \texttt{True}$$

Como $p.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ y $(p \to r).\text{valor}(I) = \texttt{True}$, entonces $r.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

Como $r.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ y $(r \to q).\text{valor}(I) = \texttt{True}$, entonces $q.\text{valor}(I) = \texttt{True}$.

En consecuencia, si $A_i.\text{valor}(I) = \texttt{True}$ para todo $A_i \in U$, entonces $B.\text{valor}(I) = \texttt{True}$. Por lo tanto $U \models B$.

Implicación lógica (2/2)

Observe que:

$U \not\models B$ sii existe una interpretación I tal que

$$A_i.\text{valor}(I) = \texttt{True} \text{ para todo } A_i,$$

$$\text{pero } B.\text{valor}(I) = \texttt{False}.$$

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Debemos encontrar una I tal que
$(p \to r)$.valor$(I) = (r \to q)$.valor$(I) =$ `True` y q.valor$(I) =$ `False`.

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Debemos encontrar una I tal que
$(p \to r)$.valor$(I) = (r \to q)$.valor$(I) =$ `True` y q.valor$(I) =$ `False`.

Sea $I(p) = I(r) = I(q) =$ `False`.

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Debemos encontrar una I tal que
$(p \to r)$.valor$(I) = (r \to q)$.valor$(I) =$ `True` y q.valor$(I) =$ `False`.

Sea $I(p) = I(r) = I(q) =$ `False`.

Luego $(p \to r)$.valor$(I) =$ `True` y también
$(r \to q)$.valor$(I) =$ `True`. Además, q.valor$(I) =$ `False`.

Teoremas

Sean B, C fórmulas y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si $U \models B$, entonces $U \cup \{C\} \models B$.

Teoremas

Sean B, C fórmulas y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si $U \models B$, entonces $U \cup \{C\} \models B$.
2. Si C es válida y $U \models B$, entonces $U - \{C\} \models B$.

Teorema

Proposición: Sea B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas:

$$U \models B \text{ sii } \big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B \text{ es válida.}$$

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria.
Debemos ver que $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B)$.valor($I$) $=$ `True`.
Tenemos dos casos:

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B)$.valor$(I) =$ `True`.
Tenemos dos casos:

- ☞ Existe $A_i \in U$ tal que A_i.valor$(I) =$ `False`. Luego $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$.valor$(I) =$ `False` y por lo tanto $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B)$.valor$(I) =$ `True`.

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $\big((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$.
Tenemos dos casos:

- ☞ Existe $A_i \in U$ tal que A_i.valor$(I) = \texttt{False}$. Luego $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$.valor$(I) = \texttt{False}$ y por lo tanto $\big((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

- ☞ A_i.valor$(I) = \texttt{True}$ para todo $A_i \in U$. Como $U \models B$, entonces B.valor$(I) = \texttt{True}$ y por lo tanto $\big((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$. Tenemos dos casos:

- ☞ Existe $A_i \in U$ tal que A_i.valor$(I) = \texttt{False}$. Luego $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$.valor$(I) = \texttt{False}$ y por lo tanto $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

- ☞ A_i.valor$(I) = \texttt{True}$ para todo $A_i \in U$. Como $U \models B$, entonces B.valor$(I) = \texttt{True}$ y por lo tanto $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$.

En cualquier caso, $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B)$.valor$(I) = \texttt{True}$. Como I es arbitraria, $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ es válida.

Demostración (2/2)

$\Leftarrow$) Supongamos que $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ es válida y sea I tal que A_i.valor(I) $=$ `True` para todo $A_i \in U$. Debemos ver que B.valor(I) $=$ `True`.

Demostración (2/2)

$\Leftarrow$) Supongamos que $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B$ es válida y sea I tal que A_i.valor$(I) =$ `True` para todo $A_i \in U$. Debemos ver que B.valor$(I) =$ `True`.

Esto es fácil, ya que $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$.valor$(I) =$ `True` y como $(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B)$.valor$(I) =$ `True`, entonces B.valor$(I) =$ `True`.

Demostración (2/2)

$\Leftarrow$) Supongamos que $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B$ es válida y sea I tal que A_i.valor$(I) =$ `True` para todo $A_i \in U$. Debemos ver que B.valor$(I) =$ `True`.

Esto es fácil, ya que $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$.valor$(I) =$ `True` y como $(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B)$.valor$(I) =$ `True`, entonces B.valor$(I) =$ `True`.

Por lo tanto $U \models B$.

Fin de la sesión 3

En esta sesión usted ha aprendido:

1. Comprender las categorías de una fórmula de acuerdo a sus interpretaciones
2. Demostrar relaciones entre conceptos lógicos
3. Comprender una de las posibles formalizaciones de la noción de consecuencia lógica