Fórmulas de la Lógica Proposicional

Semana 1

Edgar Andrade, PhD

Última revisión: Enero de 2022

Departmento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Presentación

En esta sesión estudiaremos:

1. Representación lógica del conocimiento
2. Un poco de historia
3. Estructura y recursión

Contenido

¿Qué es?

Ejemplos:

- ☞ Puzzles

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

¿Qué es?

Ejemplos:

- ☞ Puzzles
- ☞ Micromundos

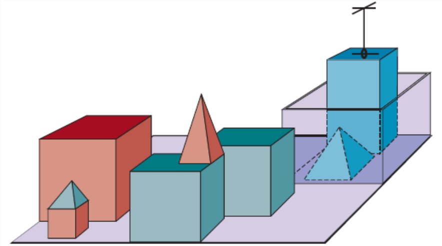


Figure 1.3 A scene from the blocks world. SHRDLU (Winograd, 1972) has just completed the command "Find a block which is taller than the one you are holding and put it in the box."

¿Qué es?

Ejemplos:

- ☞ Puzzles
- ☞ Micromundos
- ☞ Lenguaje natural

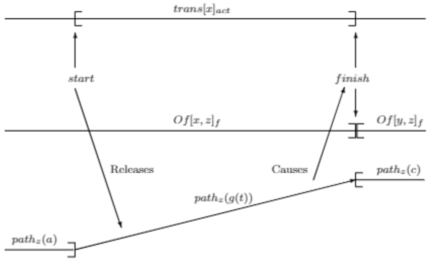


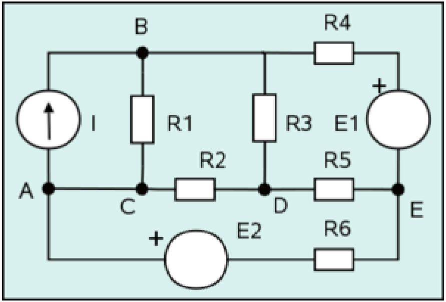
Figure 7.1: This is a visual presentation of the idea behind the formalization of the DITRANSITIVE CONSTRUCTION. The horizontal lines represent the time line. The left square brackets represent the beginning and the right square brackets represent the end of a predicate being true.

"Juan lanzó la bola a Pedro"

¿Qué es?

Ejemplos:

- ☞ Puzzles
- ☞ Micromundos
- ☞ Lenguaje natural
- ☞ Circuitos, software, otros. . .



¿Para qué se usa?

Ejemplos:

☞ Razonamientos

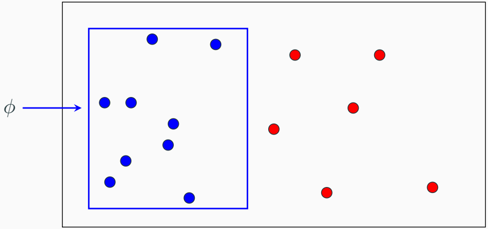
- Supongamos que n es par.
- Entonces $n = 2a$ para algún $a \in \mathbb{Z}$.
- Luego $nn = 2(a2a)$.
- Por lo tanto, n^2 es par.

¿Para qué se usa?

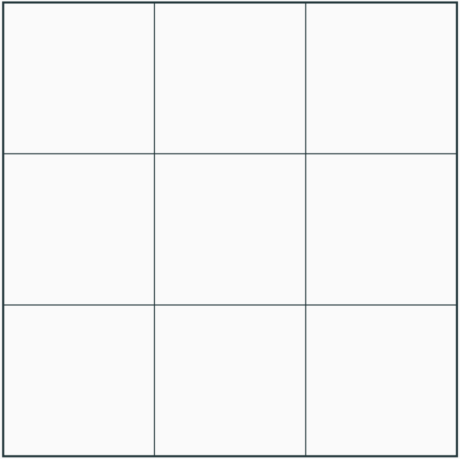
Ejemplos:

Una proposición ϕ puede verse como una colección de situaciones.

- ☞ Razonamientos
- ☞ Solución de restricciones



Caballos (1/5)



Poner tres caballos en un tablero 3x3 sin que se ataquen simultáneamente.

Caballos (2/5)

Enumeramos las casillas

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Caballos (3/5)

c_1: hay un caballo en 1

- c_2: hay un caballo en 2

		
4	5	6
7	8	9

Caballos (3/5)

c_1: hay un caballo en 1

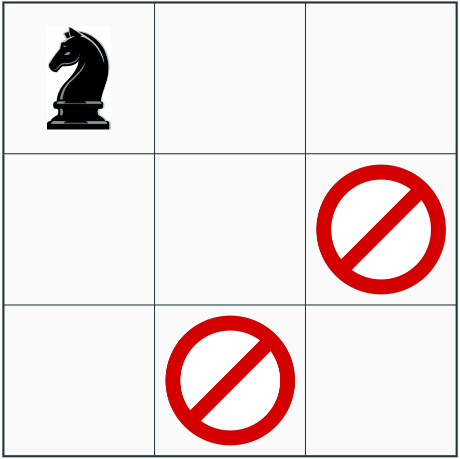
- c_2: hay un caballo en 2
- $\neg c_3$: no hay un caballo en 3

		
4	5	6
7	8	9

Caballos (4/5)

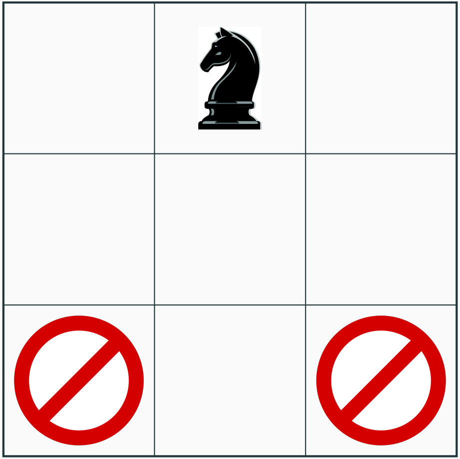
Reglas:

Si hay un caballo en 1, no
debe haber un caballo en 6 ni en 8,
toda vez que se estarían atacando
mútuamente.



Caballos (5/5)

Reglas:
Si hay un caballo en 2, no debe haber un caballo en 7 ni en 9, toda vez que se estarían atacando mútuamente.



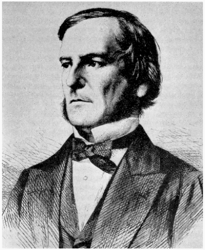
Contenido

Influencias históricas (1/5)

Gottfried Leibniz
(1646–1716)
☞ Calculus Ratiocinator

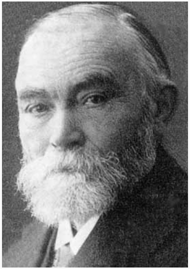
Influencias históricas (1/5)

Gottfried Leibniz
(1646–1716)
☞ Calculus Ratiocinator



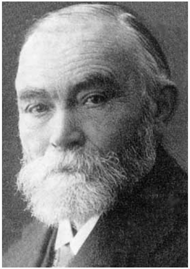
George Boole
(1815–1864)
☞ Las facultades mentales
son operaciones simbólicas

Influencias históricas (2/5)



Gotlob Frege
(1848–1925)
☞ Las matemáticas se fundamentan en la lógica

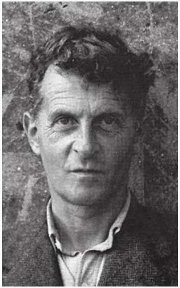
Influencias históricas (2/5)



Gotlob Frege
(1848–1925)
☞ Las matemáticas se fundamentan en la lógica

David Hilbert
(1862–1943)
☞ Las matemáticas se fundamentan en procedimientos mecánicos

Influencias históricas (3/5)

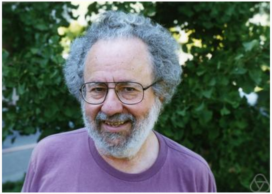


Ludwig Wittgenstein
(1889–1951)

Emile Post
(1897–1954)

☞ Procedimiento de las tablas de verdad

Influencias históricas (4/5)

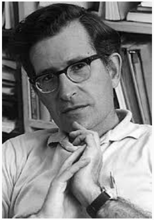


Martin Davis
(1928–)

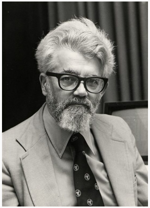
Hilary Putnam
(1926–2016)

☞ Algoritmo eficiente para buscar un modelo

Influencias históricas (5/5)



Noam Chomsky
(1928–)



John McCarthy
(1927–2011)

☞ Formalización del lenguaje y del sentido común

Contenido

Objetos por capas

Números naturales

$$0$$

$$0+1$$

$$0+1+1$$

$$0+1+1+1$$

Objetos por capas

Números naturales

$$0$$

$$0+1$$

$$0+1+1$$

$$0+1+1+1$$

Objetos por capas

Números naturales

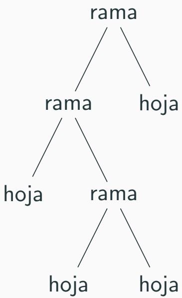
0

0+1

0+1+1

0+1+1+1

Árboles



Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

3+Suma(2)
Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

2+Suma(1)
3+Suma(2)
Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

1+Suma(0)
2+Suma(1)
3+Suma(2)
Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

1+0=1

2+Suma(1)

3+Suma(2)

Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

2+1=3

3+Suma(2)

Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

3+3=6

Suma(3)

Funciones recursivas — Números

$$\text{Suma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n == 0 \\ n + \text{Suma}(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Suma(3)=6

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\mathrm{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

- **Caso base:** Si $n = 0$, entonces $\mathrm{Suma}(0) = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

- **Caso base:** Si $n = 0$, entonces $\text{Suma}(0) = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$
- **Caso inductivo:** Suponemos que $\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Entonces

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\mathrm{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

- **Caso base:** Si $n = 0$, entonces $\mathrm{Suma}(0) = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$
- **Caso inductivo:** Suponemos que $\mathrm{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Suma}(n+1) &= (n+1) + \mathrm{Suma}(n) \quad \text{(por definición de Suma)} \\
&= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(por h.i.)} \\
&= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(2+n)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

- **Caso base:** Si $n = 0$, entonces $\text{Suma}(0) = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$
- **Caso inductivo:** Suponemos que $\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Entonces $\text{Suma}(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Demostración por inducción — Números

Proposición

$\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

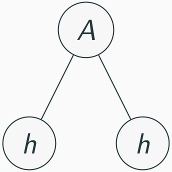
- **Caso base:** Si $n = 0$, entonces $\text{Suma}(0) = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$
- **Caso inductivo:** Suponemos que $\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Entonces $\text{Suma}(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.
- Por lo tanto, para todo n se tiene que $\text{Suma}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Funciones recursivas — Árboles binarios

$$\text{num\_aristas}(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es una hoja} \\ 2+\text{num\_aristas(A.left)} + \text{num\_aristas(A.right)}, & \text{si } A \text{ es una rama} \end{cases}$$

Funciones recursivas — Árboles binarios

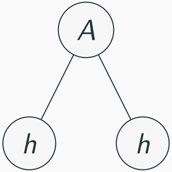
$$\text{num\_aristas}(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es una hoja} \\ 2+\text{num\_aristas(A.left)} + \text{num\_aristas(A.right)}, & \text{si } A \text{ es una rama} \end{cases}$$



$\text{num\_aristas}(A)$

Funciones recursivas — Árboles binarios

$$\text{num\_aristas}(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es una hoja} \\ 2+\text{num\_aristas(A.left)} + \text{num\_aristas(A.right)}, & \text{si } A \text{ es una rama} \end{cases}$$



$2+\text{num\_aristas}(h) + \text{num\_aristas}(h)$

$\text{num\_aristas}(A)$

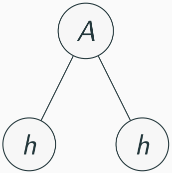
Funciones recursivas — Árboles binarios

$$\text{num\_aristas}(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es una hoja} \\ 2+\text{num\_aristas(A.left)} + \text{num\_aristas(A.right)}, & \text{si } A \text{ es una rama} \end{cases}$$

0

$2+\text{num\_aristas}(h) + \text{num\_aristas}(h)$

$\text{num\_aristas}(A)$

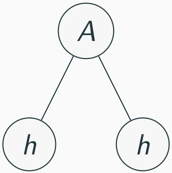


Funciones recursivas — Árboles binarios

$$\text{num\_aristas}(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es una hoja} \\ 2+\text{num\_aristas(A.left)} + \text{num\_aristas(A.right)}, & \text{si } A \text{ es una rama} \end{cases}$$

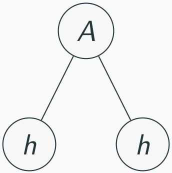
$2+0+0=2$

$\text{num\_aristas}(A)$



Funciones recursivas — Árboles binarios

$$\text{num\_aristas}(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es una hoja} \\ 2+\text{num\_aristas(A.left)} + \text{num\_aristas(A.right)}, & \text{si } A \text{ es una rama} \end{cases}$$



num_aristas(A)=2

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición
num_aristas(A) es par.

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición

num_aristas(A) es par.

Demostración

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición
num_aristas(A) es par.

Demostración

- **Caso base:** Si A es una hoja, entonces num_aristas$(A) = 0$ que es par.

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición
num_aristas(A) es par.

Demostración

- **Caso base:** Si A es una hoja, entonces num_aristas$(A) = 0$ que es par.
- **Caso inductivo:** Suponemos que $A = \mathrm{Tree}(B, C)$ y que num_aristas$(B) = 2a$ y num_aristas$(C) = 2b$ para a, b enteros. Entonces

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición

num_aristas(A) es par.

Demostración

- **Caso base:** Si A es una hoja, entonces num_aristas$(A) = 0$ que es par.
- **Caso inductivo:** Suponemos que $A = \text{Tree}(B, C)$ y que num_aristas$(B) = 2a$ y num_aristas$(C) = 2b$ para a, b enteros. Entonces

$$\begin{aligned} \text{num\_aristas}(A) &= 2 + \text{num\_aristas}(B) + \text{num\_aristas}(C) && \text{(por def. num\_aristas)} \\ &= 2 + 2a + 2b && \text{(por h.i.)} \\ &= 2(1 + a + b) \end{aligned}$$

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición

num_aristas(A) es par.

Demostración

- **Caso base:** Si A es una hoja, entonces num_aristas$(A) = 0$ que es par.
- **Caso inductivo:** Suponemos que $A = \mathrm{Tree}(B, C)$ y que num_aristas$(B) = 2a$ y num_aristas$(C) = 2b$ para a, b enteros. Entonces
  num_aristas(A) es par.

Demostración por inducción — Árboles binarios

Proposición

num_aristas(A) es par.

Demostración

- **Caso base:** Si A es una hoja, entonces num_aristas$(A) = 0$ que es par.
- **Caso inductivo:** Suponemos que $A = \text{Tree}(B, C)$ y que num_aristas$(B) = 2a$ y num_aristas$(C) = 2b$ para a, b enteros. Entonces
  num_aristas(A) es par.
- Por lo tanto, para todo A se tiene que num_aristas(A) es par.

Fin de la sesión 1

En esta sesión usted ha aprendido:

1. Un poco de historia
2. Idea del lenguaje como representación y estructura
3. Estructura basada en recursión