TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. VANESSA LANDGRAF

Lineare Algebra I für das Lehramt an Gymnasien (Wintersemester 2021/22)
— Aufgabenblatt 2 (25. Oktober 2021) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 8. Lineare Gleichungssysteme.
Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 9 \end{array}$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit WolframAlpha [Link siehe Vorlesungs-Webseite].

Aufgabe 9. Noch mehr lineare Gleichungssysteme.
Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -6x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ -9x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ -15x_1 & + & 14x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit WolframAlpha [Link siehe Vorlesungs-Webseite].

Aufgabe 10. Sortimentskasten.

Ein Baumarkt bietet einen Sortimentskasten mit Einlagekästchen an: Der Koffer ohne Inhalt kostet 8,99 Euro, ein kleines blaues Kästchen kostet 0,39 Euro, ein doppelt so großes rotes Kästchen kostet 0,59 Euro, und ein wiederum doppelt so großes gelbes Kästchen kostet 0,89 Euro.

Im Internet werden dieselben Koffer zu folgenden Komplettpreisen verkauft: Ein Koffer mit 24 blauen Kästchen kostet 10,29 Euro. Derselbe Koffer mit 12 roten Kästchen kostet ebenfalls 10,29 Euro. Derselbe Koffer mit 8 blauen, 4 roten und 2 gelben Kästchen kostet 8,99 Euro.
Offensichtlich ist das Internetangebot günstiger. Trotzdem die Frage: Was kostet ein blaues, ein rotes, ein gelbes Kästchen bei dem Internetangebot?
Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, welches die oben beschriebene Situation beim Internetangebot beschreibt, und bestimmen Sie dessen Lösungsmenge. Was fällt auf?

Aufgabe 11 (ZÜ). Der Gaußalgorithmus, Teil 2.
Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

1.)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

2.)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \end{array}$$

3.)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

4.)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

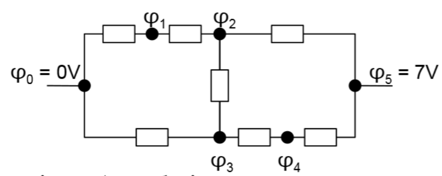
— *Hausaufgaben (4 Punkte)* —

Aufgabe 12 - 1 Punkt. Und noch mehr lineare Gleichungssysteme.
Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

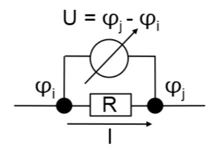
Welchen Einfluss hat die Nullspalte?
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit WolframAlpha [Link siehe Vorlesungs-Webseite].

Aufgabe 13 - 1 Punkt. Widerstandsschaltungen.
Bestimmen Sie in folgendem Schaltplan die Potentiale φ_i an den markierten Knoten. Die eingezeichneten Widerstände (= rechteckige Kästchen) seien dabei jeweils gleich groß. Wie hoch ist der Gesamtwiderstand der Schaltung?



Hinweise:

(i) Wir betrachten und benennen einen Ausschnitt aus dem Schaltplan genauer: Zwischen zwei Knoten φ_i und φ_j liegt ein Wiederstand R. Zwischen zwei Knoten φ_i und φ_j fließt der Strom I:



Die Physik liefert uns nun folgende Formel: Der Spannungsabfall U an einem Widerstand R berechnet sich durch die Potentialdifferenz $\varphi_j - \varphi_i$: $U = \varphi_j - \varphi_i$

(ii) Nach dem Ohm'schen Gesetz gilt $U = R \cdot I$
mit dem Spannungsabfall U, dem Widerstand R und der Stromstärke I.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt somit: $U = \varphi_j - \varphi_i = R \cdot I$

(iv) Das Kirchhoff'sche Gesetz, besagt, dass die Summe aller (gerichteten) Teilströme $I_1, \ldots, I_k$, $k \in \mathbb{N}$, in jedem Knoten φ gleich 0 ist, d.h. für jeden Knoten φ gilt $\sum_{i=1}^{k} I_i = 0$.
Dabei bezeichnet k die Anzahl der am Knoten φ „ankommenden" bzw. „weggehenden" Ströme.

(v) Es gibt mindestens zwei verschiedene Arten, diese Aufgabe zu lösen. Ein „Standardansatz" liefert 13 Gleichungen in 13 Unbekannten. Mit ein wenig Überlegung lässt sich die Aufgabe aber auch weniger aufwändig lösen.

Aufgabe 14 - 1 Punkt. Rundungs-Probleme.
Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b_\varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 15+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \\ 26+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Was fällt auf, wenn Sie die Fälle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{10} = 0,1$ und $\varepsilon = 1$ betrachten?

Aufgabe 15 - 1 Punkt. Einfluss des Pivot-Elements.
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf einem Taschenrechner mit einer Rechengenauigkeit von n Stellen hinter dem Komma (Abschneiden weiterer Stellen ohne Rundung! - zum Beispiel für $n = 9$) für $\varepsilon = 10^{-k}$ für größer werdendes $k \leq n$, und zwar einmal mit dem Pivot ε und einmal mit dem „maximalen Zeilenpivot" 1 der ersten Spalte.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ \varepsilon x & + & y & = & 1 \end{array}$$

Beschreiben Sie den geometrischen Hintergrund dieser Umformungen.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, den 05.11.2021 (20 Uhr) über Upload in Moodle