МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний

Теорія ймовірностей і математична статистика

Частина I
Теорія ймовірностей

Навчально-методичний посібник

У двох частинах

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ 2000

ББК 22.17
Ж 76

Рецензенти:
Н. І. Костіна, д-р техн. наук, проф.
(Київ. нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка);
О. П. Суслов, д-р екон. наук, проф.
(Наук.-дослід. екон. ін-т Мінекономіки України)

Редактор
О. П. Бондаренко

Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.
Ж 76 Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
ISBN 966–574–153–5

У першій частині навчального посібника подаються основи теорії ймовірностей — науки, що вивчає закономірності масових подій. Матеріал поділено на 11 тем, у межах кожної з яких виклад побудовано за однією і тією самою методикою: усі теоретичні відомості ілюструються численними прикладами, зокрема графічними, що розкривають зміст усіх означень, тверджень і висновків; наприкінці наводяться запитання для контролю та самоконтролю (що зосереджують увагу на головних теоретичних положеннях, потрібних для розуміння подальшого матеріалу та розв’язування задач), а також приклади для розв’язування з відповідями до них.

Посібник розрахований на студентів економічних навчальних закладів усіх форм навчання.

ББК 22.17

ISBN 966–574–153–5

Навчальне видання

ЖЛУКТЕНКО Володимир Іванович
НАКОНЕЧНИЙ Степан Ількович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

У двох частинах

Частина I

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Художник обкладинки *Т. Зяблицева*
Технічний редактор *Т. Піхота*
Коректор *Л. Денисенко*
Комп'ютерна верстка *Т. Мальчевської*

Підписано до друку 18.02.2000. Формат 60×84/16. Папір офсетний №1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 17,67.
Умовн. фарбовідб. 18,11. Обл.-вид. арк. 22,4. Наклад 8500 прим. Зам. № 9-1815

Видавництво КНЕУ
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1
тел. (044) 458–00–66; тел./факс (044) 446–64–58
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчально-методичний посібник

У двох частинах

Частина I

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У першій частині навчального посібника подаються основи теорії ймовірностей — науки, що вивчає закономірності масових подій. Матеріал поділено на 11 тем, у межах кожної з яких виклад побудовано за однією і тією самою методикою: усі теоретичні відомості ілюструються численними прикладами, зокрема графічними, що розкривають зміст усіх означень, тверджень і висновків; наприкінці наводяться запитання для контролю та самоконтролю (що зосереджують увагу на головних теоретичних положеннях, потрібних для розуміння подальшого матеріалу та розв'язування задач), а також приклади для розв'язування з відповідями до них.

Посібник розрахований на студентів економічних навчальних закладів усіх форм навчання.

РОЗДІЛ І

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

ТЕМА 1. **ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

Усі процеси, що відбуваються у природі чи людському суспільстві, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Для того щоб вивчити ці процеси і надалі керувати ними, необхідно з’ясувати, яку роль у досліджуваному процесі відіграє кожний фактор окремо. Наприклад, у разі вивчення руху тіла слід з’ясувати, які сили спричинюють його рух, а які гальмують; яким чином саме рухоме тіло впливає на ті сили, що діють на нього. Досліджуючи процес зміни курсу деякої валюти, скажімо гривні, потрібно з’ясувати вплив багатьох економічних і соціальних факторів як внутрішніх, так і зовнішніх, що можуть істотно змінювати курс національної валюти щодо долара, німецької марки і т. ін.

Усі зазначені фактори необхідно подати з допомогою певних кількісних оцінок, а далі — скористатися відповідними математичними методами. Отже, щоб мати змогу застосувати математичні методи з метою вивчення взаємодії тих чи інших факторів, слід уміти виражати дію кожного з них кількісно.

Щоб дістати потрібні числові дані, необхідно провести серію спостережень. Отже, спостереження є найважливішою ланкою будь-якого експерименту. Слід, проте, ураховувати, що жодний найретельніше підготовлений експеримент не дозволяє виокремити саме той фактор, який для нас головний. Адже в здійснюваному експерименті ми не в змозі вилучити численні зайві фактори, які нас не цікавлять. Так, вивчаючи падіння тіла, ми не уникнемо дії на нього сил, зумовлених обертанням Земної кулі. Коли ж ідеться про хімічні реакції, нам ніколи не доведеться стикатися з чистими елементами. А досліджуючи вплив на врожайність тієї чи іншої культури внесеного в ґрунт добрива, ми не можемо знехтувати впливом інших факторів (опади, середня весняна температура, економічний стан регіону і т. ін.), які безпосередньо впливають на остаточний наслідок експерименту — урожайність.

Отже, кожне спостереження дає нам лише наслідок взаємодії основного фактора, який нас цікавить, з багатьма сторонніми, другорядними. Деякі з них потрібно й можна враховувати в дослідженнях. Урахування ж решти факторів або в принципі неможливе, або недоцільне з якихось міркувань. Тому за реальних умов під час дослідження будь-якого процесу застосовують метод його формалізації, беручи до уваги лише ті фактори, які істотно впливають на зазначений процес.

Водночас усі ті фактори, якими експериментатор нехтує, загалом відбиваються на наслідках експерименту, надаючи їм неоднозначності.

Так настають непередбачені наперед події, котрі називають *випадковими*. Випадкові події в масі спостережень підпорядковані, як з'ясували дослідники, певним характерним лише для них невипадковим законам.

Математична наука, що вивчає закономірності масових подій, називається *теорією ймовірностей*.

Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту, називають *математичною статистикою*.

Зауважимо, що нині існує тенденція до появи нових економічних дисциплін, таких як «Економетрія», «Теорія ризику», «Теорія надійності», «Інформатика» і т. ін., котрі тісно пов'язані з теорією ймовірностей. Своїм виникненням ці дисципліни завдячують саме теорії ймовірностей. Отже, теорію ймовірностей можна розглядати як об'єднання певної кількості різнорідних і доволі розвинених дисциплін, кожна з яких зокрема і всі вони разом мають стати науковим багажем кожного економічно освіченого спеціаліста.

Послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов, називають *експериментом* (дослідом, спробою). Наслідок будь-якого експерименту називають *подією*.

Експеримент не обов'язково має виконувати людина. Він може здійснюватися незалежно від неї, скажімо комп'ютером. Людина в такому разі є спостерігачем, котрий фіксує наслідок експерименту — подію.

Класифікація подій. Події поділяються на *вірогідні*, *неможливі* та *випадкові*.

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається *вірогідною*. Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Наведемо приклади вірогідних подій.

Приклад 1

1. У земних умовах вода, нагріта до температури 100 °С, набуває стану кипіння.
2. Якщо в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то кулька, навмання взята із цієї урни, має номер, що міститься в межах від 1 до 10.

Подія називається неможливою, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина).

Приклад 2

1. В урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10. Навмання береться одна кулька. Поява кульки з номером 12 буде подією неможливою.
2. Якщо на дослідній ділянці посіяти 100 зернин ячменю, то подія, котра полягає в тому, що на момент збирання врожаю на цій ділянці з'явиться колосок пшениці, є неможливою.

Подія називається *випадковою*, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі.

Випадкові події позначають символами A, B, C, … або A_1, A_2, A_3,…, A_k; B_1, B_2, …, B_n.

Отже, випадкові події пов'язані експериментами, наслідки яких є неоднозначними.

Приклад 3

1. Монету підкидають один раз. (Тут і далі припускаємо, що падає монета на рівну і тверду підлогу.) Поява герба (цифри) — подія випадкова.
2. Якщо на дослідній ділянці в лабораторних умовах посіяно 100 зернин ячменю, то не можна передбачити наперед, скільки зернин проросте. Отже, подія, яка полягає в тому, що проросте від 1 до 100 зернин, є випадковою.

1. Прості та складені випадкові події. Простір елементарних подій

Теорія ймовірностей як один із розділів математики досліджує певний вид математичних моделей — моделі випадкових подій, а не самі такі події.

Математичні моделі, як відомо, відбивають найістотніші властивості досліджуваних об'єктів, абстрагуючись від неістотних.

Для математичного опису випадкових подій — наслідків експерименту — застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події*, *простір елементарних подій*.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається *простою (елементарною) випадковою подією*.

Елементарні події позначаються ω_i ($i = 1, 2, 3,\ldots$) і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

Приклад 1. Монету підкидають один раз. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Можливі такі елементарні випадкові події:
ω_1 = г (монета випаде гербом);
ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

Приклад 2. Монету підкидають тричі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Триразове підкидання монети — це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть:
ω_1 = ггг (тричі випаде герб);
ω_2 = ццц (тричі випаде цифра);

$$\left.\begin{array}{l}\omega_3 = \text{ггц}\\ \omega_4 = \text{гцг}\\ \omega_5 = \text{цгг}\end{array}\right\}\text{ (герб випаде двічі);}$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_6 = \text{гцц}\\ \omega_7 = \text{цгц}\\ \omega_8 = \text{ццг}\end{array}\right\}\text{ (герб випаде один раз).}$$

Отже, цьому експерименту відповідають вісім елементарних подій.

Приклад 3. Задано дві множини цілих чисел $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$, $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\}$. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Визначити елементарні події цього експерименту — появу пари чисел.

$\omega_1 = 1; 1;$	$\omega_5 = 2; 1;$	$\omega_9 = 3; 1;$
$\omega_2 = 1; 2;$	$\omega_6 = 2; 2;$	$\omega_{10} = 3; 2;$
$\omega_3 = 1; 3;$	$\omega_7 = 2; 3;$	$\omega_{11} = 3; 3;$
$\omega_4 = 1; 4;$	$\omega_8 = 2; 4;$	$\omega_{12} = 3; 4.$

Випадкова подія називається *складеною*, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: $A, B, C, D, \ldots$.

Приклад 4. Задано множину чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання із цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: 1) з'явиться число, кратне 2; 2) число кратне 3; 3) число, кратне 5. Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно A, B, C. Тоді $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $B = \{3, 6, 9, 12\}$; $C = \{5, 10,\}$.

Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, $\omega_j \in B$, $\omega_k \in C$, які належать відповідно складеним випадковим подіям A, B, C, тобто є елементами цих множин, називають *елементарними подіями, які сприяють* *появі* кожної із зазначених подій унаслідок проведення експерименту (ω_i сприяють появі події A, ω_j — події B, ω_k — події C).

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$. Множину називають *простором елементарних подій*.

> **Приклад 5.** Гральний кубик, кожна грань якого позначена певною цифрою від 1 до 6, підкидають один раз. При цьому на грані випадає одна із зазначених цифр. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту (множину Ω) і такі випадкові події: 1) A — випаде число, кратне 2; 2) B — випаде число, кратне 3.

Розв'язання. Оскільки кубик має шість граней, то в результаті експерименту може випасти одна із цифр від 1 до 6.

Отже, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 1) $A = \{2, 4, 6\}$; 2) $B = \{3, 6\}$.

> **Приклад 6.** Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:
> 1) A — герб випаде двічі; 2) B — герб випаде не менш як тричі.

Розв'язання. Шуканий простір елементарних подій:

Ω = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, ццгг, ггцц, гццг, гцгц, цгцг, цццг, цггц, гццц, цгцц, ццгц, цццг, цццц};

1) A = {ггцц, ццгг, гцгц, цгцг, гццг, цггц};

2) B = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг).

Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним. Якщо множина є зчисленною (зліченною), тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і тільки один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел 1, 2, 3, …), то простір елементарних подій називають *дискретним*. Він може бути обмеженим і необмеженим.

У противному разі (тобто коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число) простір елементарних подій називають *неперервним*.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними.

Приклади неперервних (недискретних) просторів елементарних подій дістанемо, розглянувши:

1) розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), що їх виготовляє робітник або верстат-автомат;

2) покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір і т. ін.

Отже, поняття елементарної події, простору елементарних подій є основними в теорії ймовірностей, як точка та пряма в аксіоматично побудованій евклідовій геометрії. Сама природа елементарних подій у теорії ймовірностей при цьому неістотна.

Простір елементарних подій є математичною моделлю певного ідеалізованого експерименту в тому розумінні, що будь-який можливий його наслідок описується однією і лише однією елементарною подією — наслідком експерименту.

Мовою теорії множин випадкова подія А означується як довільна непорожня підмножина множини Ω ($A \subset \Omega$).

2. Операції над подіями

Додавання. *Сумою двох подій A і B* називається така подія $C = A \bigcup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Подію $A \bigcup B$ схематично зображено на рис. 1 заштрихованою областю.

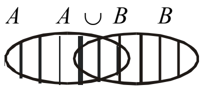

Рис. 1

Операція $A \bigcup B$ називається *об'єднанням* цих подій.

Множення. *Добутком двох подій A і B* називається така подія $C = A \bigcap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Операція $A \bigcap B$ називається *перерізом* цих подій (рис. 2).

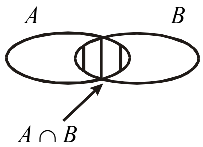

Рис. 2

Віднімання. *Різницею двох подій A і B* називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події А і одночасним ненастанням події В (рис. 3).

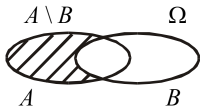

Рис. 3

> **Приклад.** Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: 1) A — узяте число кратне 2; 2) B — кратне 3.
> Визначити $A \bigcup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Розв'язання. 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A \bigcup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \bigcup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*.

Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

Повна група подій. Протилежні події. Якщо $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \ldots \bigcup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то такі випадкові події утворюють *повну групу*, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

> **Приклад.** При одноразовому підкиданні грального кубика обов'язково з'явиться одна із цифр, що є на його гранях, а саме: $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 3, A_4 = 4, A_5 = 5, A_6 = 6$. Отже, випадкові події A_i $(i = \overline{1,6})$ утворюють повну групу: $\bigcup\limits_{i=1}^{6} A_i = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають *протилежними*.

Подія, яка протилежна A, позначається $\overline{A}$. Протилежні події у просторі елементарних подій ілюструє рис. 4. Він унаочнює також співвідношення: $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

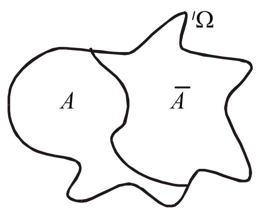

Рис. 4

Випадкові події A, B, C ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \cap B = B \cap A$.

Комутативний закон для операцій додавання та множення.

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Асоціативний закон для операцій додавання та множення.

6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Перший дистрибутивний закон.
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Другий дистрибутивний закон.
8. $A \cup \Omega = \Omega$.
9. $A \cap \Omega = A$.
10. $A \cup \varnothing = A$.
11. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
12. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
13. $\overline{\Omega} = \varnothing$.
14. $\overline{\varnothing} = \Omega$.
15. $A \cup (A \cap \overline{B}) = A$; $B = B \cup (B \cap \overline{A})$.
16. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
17. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так: 1) $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; 2) $\bigcup_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

3. Класичне означення ймовірності

Імовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \leq m \leq n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$);

Для вірогідної події $P(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Отже, для довільної випадкової події

$$0 < P(A) < 1. \qquad (2)$$

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту:

$$n = 15.$$

Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що на грані кубика з'явиться число, кратне 3?

Розв'язання. Число всіх елементарних подій для цього експерименту $n = 6$. Нехай B — поява на грані числа, кратного 3. Число елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює двом ($m = 2$).

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 3. Два гральні кубики підкидають по одному разу. Побудувати простір елементарних подій — множину Ω і такі випадкові події:

A — сума цифр виявиться кратною 4;

B — сума цифр виявиться кратною 3.

Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Простір елементарних подій — множину Ω запишемо у вигляді таблиці:

Кубик 2-й	Кубик 1-й					
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	**1,2**	**1,3**	1,4	**1,5**	1,6
2	**2,1**	**2,2**	2,3	**2,4**	2,5	**2,6**
3	**3,1**	3,2	**3,3**	3,4	**3,5**	**3,6**
4	4,1	**4,2**	4,3	**4,4**	**4,5**	4,6
5	**5,1**	5,2	**5,3**	**5,4**	5,5	5,6
6	6,1	**6,2**	**6,3**	6,4	6,5	**6,6**

Отже, простір елементарних подій Ω містить $n = 36$ пар чисел.

Події A і B визначимо з допомогою побудованої таблиці так: елементарні події, які сприяють появі A (сума цифр кратна 4), заштриховані вертикальними лініями, а для B (сума кратна 3) — горизонтальними лініями. Звідси маємо: число елементарних подій, що сприяють появі A, дорівнює дев'яти ($m_1 = 9$), а число елементарних подій, що сприяють появі B, — дванадцяти ($m_2 = 12$), число елементарних подій, що сприяють появі події $A \cap B$, дорівнює одиниці ($m_3 = 1$) (темні клітинки таблиці).

Остаточно дістаємо:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}; \quad P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{1}{36}.$$

Приклад 4. У кожній із трьох урн містяться червоні та сині кульки. Із кожної урни навмання беруть по одній кульці. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту — множину Ω і такі випадкові події:

A — серед трьох навмання взятих кульок дві виявляються червоного кольору;

B — серед трьох кульок дві виявляються синього кольору. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Позначимо появу кульки червоного кольору як Ч, а синього кольору як С. Тоді простір елементарних подій буде такий: = {ЧЧЧ, ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ, ЧСС, СЧС, ССЧ, ССС}, $n = 8$.

Події: A = {ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ}, $m_1 = 3$;

B = {ССЧ, СЧС, ЧСС}, $m_2 = 3$.

Події A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$).

Обчислюємо: $P(A) = \dfrac{m_1}{n} = \dfrac{3}{8}$; $P(B) = \dfrac{m_2}{n} = \dfrac{3}{8}$; $P(A \cap B) = 0$.

Приклад 5. В електричну мережу увімкнено чотири електролампочки. При проходженні електричного струму в мережі кожна електролампочка із певною ймовірністю може перегоріти або не перегоріти. Побудувати простір елементарних подій (множину Ω) — числа електролампочок, які не перегорять, і такі випадкові події:

A — із чотирьох електролампочок перегорять не більш як дві;

B — не менш як три. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Нехай A_i ($i = \overline{1,4}$) відповідно першу, другу, третю та четверту електролампочку, що не перегорять, а $\overline{A_i}$ — що перегорять. Тоді простір елементарних подій буде:

$$\Omega = \{A_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,$$
$$A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,$$
$$A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\},\quad n = 16.$$

Випадкові події:

$A = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,$
$\overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 A_3 A_4\}$,
$m_1 = 11$.

$B = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,$
$\overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,$
$\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\}$, $m_2 = 11$.

$A \cap B = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,$
$A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\}$, $m_3 = 6$.

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{11}{16};\quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{11}{16};\quad P(A \cap B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

4. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей: переставлення, розміщення та комбінації

При розв'язуванні задач з теорії ймовірностей побудувати простір елементарних подій (множину Ω) можна не завжди.

Для більшості прикладних задач така побудова пов'язана з виконанням великого обсягу робіт, а нерідко й взагалі неможлива. Щоб обчислити ймовірність тієї чи іншої випадкової події для певного класу задач із дискретним і обмеженим простором елементарних подій, необхідно вміти обчислити кількість n усіх елементарних подій (елементів множини Ω) і число m елементарних подій, які сприяють появі випадкової події.

Існує клас задач, в яких для обчислення n і m використовуються елементи комбінаторики: переставлення, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів.

Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані.

Множину називають *упорядкованою*, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів.

У противному разі множину називають *невпорядкованою*.

Переставлення. Переставленням із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\, n, \tag{3}$$

де n набуває лише цілих невід'ємних значень.

Оскільки $n! = n(n-1)!$, то при $n = 1$ маємо

$$1! = 0!$$

Отже, $$0! = 1.$$

Приклад 1. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер

Я, І, Р, Е, О, Т.

Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово

Т	Е	О	Р	І	Я

?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, $m = 1$. Позначивши розглядувану подію через B, дістанемо:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Приклад 2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Її елементи навмання розставляють у рядок. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

A — розставлені в ряд числа утворюють зростаючу послідовність;

B — спадну послідовність;

C — цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 — на останньому;

D — цифри утворять парне п'ятицифрове число.

Розв'язання. Простір елементарних подій для цього експерименту міститиме $n = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ несумісних, рівноймовірних елементарних подій.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі A, дорівнює одиниці ($m_1 = 1$).

Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює одиниці ($m_2 = 1$).

Для випадкової події C $m_3 = 3!$

Для випадкової події D $m_4 = 4!\,2 = 48$.

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{120}$; $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{1}{120}$;

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{3!}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}; \qquad P(D) = \frac{m_4}{n} = \frac{4!\,2}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{15}.$$

Розміщення. Розміщенням із n елементів по m ($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-m+1). \tag{4}$$

Наприклад, $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Приклад 1. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо

1	9	7	3

?

Розв'язання. Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3, дорівнює одиниці (m = 1). Позначимо цю випадкову подію через B. Тоді

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}.$$

Приклад 2. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студентів не мають спільного дня народження?

Розв'язання. Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів — 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо $n = 365^{10}$ елементарних подій множини Ω. Позначимо через B випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не збігаються. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, $m = A_{365}^{10}$.

Остаточно маємо: $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{A_{365}^{10}}{(365)^{10}}$.

Комбінації. Комбінаціями з n елементів по $m(0 \le m \le n)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.

Кількість таких множин

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)}. \tag{5}$$

Приклад 1. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в роботоздатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Розв'язання. Оскільки кожний верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах — роботоздатному або нероботоздатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію — із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}}.$$

Приклад 2. У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта бракованими. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:
A — усі чотири деталі виявляються стандартними;
B — усі чотири деталі виявляються бракованими;
D — із чотирьох деталей виявляються дві стандартними і дві бракованими.

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω

$$n = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 3\cdot 6} = 210;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A:

$$m_1 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі B:

$$m_2 = C_4^4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі D:

$$m_3 = C_6^2\, C_4^2 = 15\cdot 6 = 90.$$

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{630} = \frac{3}{112} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14};$$

$$P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210};$$

$$P(D)=\frac{m_3}{n}=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}.$$

5. Аксіоми теорії ймовірностей та їх наслідки

Загалом функції дійсних змінних бувають визначеними не на всій множині дійсних чисел, а лише на певній її підмножині, яку називають областю визначення функції.

Імовірність також не завжди можна визначити для будь-яких підмножин множини Ω (простору елементарних подій). Тому доводиться обмежуватися певним класом підмножин, до якого висуваються вимоги замкнености відносно операцій додавання, множення та віднімання.

Нехай задано довільний простір елементарних подій — множину Ω і Θ — деяка система випадкових подій.

Система подій називається *алгеброю подій*, якщо:

1. $\Omega \in \Theta$.

2. Із того, що $A \in \Theta$, $B \in \Theta$, випливає: що $A \cap B \in \Theta$, $A \cup B \in \Theta$, $A \setminus B \in \Theta$.

Із тверджень 1 і 2 дістаємо, що $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$, а отже, $\varnothing \subset \Theta$. Найменшою системою, яка буде алгеброю подій, є $\Theta = (\varnothing, \Omega)$. Якщо Ω — обмежена множина, то система Θ також буде обмеженою. Якщо множина містить n елементів, то кількість усіх підмножин буде 2^n.

Якщо Ω є неперервною множиною, то система Θ утворюється квадровними підмножинами множини Ω, які також утворюють алгебру подій.

Числова функція P, що визначена на системі подій Θ, називається ймовірностю, якщо:

1. Θ є алгеброю подій.

2. Для будь-якого $A \subset \Theta$ існує $P(A) \geq 0$.

3. $P(\Omega) = 1$.

4. Якщо A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$), то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{6}$$

Для розв'язування задач з нескінченними послідовностями подій, наведені аксіоми необхідно доповнити аксіомою неперервності.

5. Для будь-якої спадної послідовності $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ подій із Θ, такої, що $\bigcap\limits_{n=1} A_i = \varnothing$, випливає рівність

$$\lim P\left(\bigcap_{n=1} A_n\right) = 0 .$$

Трійка (Θ, Ω, P), де Θ є алгеброю подій і P задовольняє аксіоми 1—5, називається простором імовірностей.

Приклад 1. Задано множину цілих чисел Ω = {1, 2, …, 30}. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно виявиться кратним 5 або 7?

Розв'язання. Простір Ω містить n = 30 елементарних подій.

Позначимо через A подію, що полягає в появі числа, кратного 5, а через B у появі числа, кратного 7. Тоді дістанемо:

$$A = (5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30),\ \ m_1 = 6\ ;$$

$$B = (7,\ 14,\ 21,\ 28),\ \ m_2 = 4\ ;$$

$$A \cap B = \varnothing.$$

Згідно з (6) маємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{6}{30} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3}\ .$$

Приклад 2. Садівник восени посадив 10 саджанців яблуні. Кожний із саджанців може прийнятись або не прийнятись із певною ймовірністю. Яка ймовірність того, що з 10 саджанців навесні наступного року приймуться 6 або 2?

Розв'язання. Множина Ω містить $n = 2^{10}$ елементарних подій. Нехай A — випадкова подія, яка полягає в тому, що число саджанців, котрі проросли, дорівнює 6; B — число саджанців, що проросли, дорівнює 2.

Кількість елементарних подій, які сприяють появі A:

$$m_1 = C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!} = 210\ .$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі B:

$$m_2 = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45\ .$$

Оскільки $A \cap B = \varnothing$, маємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{210}{2^{10}} + \frac{45}{2^{10}} = \frac{255}{2^{10}}\ .$$

Приклад 3. У ящику міститься 13 однакових деталей, серед яких 5 є бракованими, а решта — стандартними. Навмання з ящика беруть чотири деталі. Яка ймовірність того, що всі чотири деталі виявляться стандартними або бракованими?

Розв'язання. Множина Ω містить $n = C_{13}^4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 715$ елементарних подій. Позначимо через A появу чотирьох стандартних деталей. Кількість елементарних подій, що сприяють появі A: $m_1 = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$. Позначимо через B появу чотирьох бракованих деталей. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, $m_2 = C_5^4 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$.

Згідно з (6) дістанемо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{C_8^4}{C_{13}^4} + \frac{C_5^4}{C_{13}^4} = \frac{70}{715} + \frac{5}{715} = \frac{75}{715} = \frac{15}{143}.$$

Наслідки аксіом

1. Якщо випадкові події $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ є несумісними попарно, то

$$P\left(\bigcup_{i-1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{7}$$

2. Якщо випадкові події $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ утворюють повну групу, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1. \tag{8}$$

Із рівності $A \cup \overline{A} = \Omega$ і аксіом 3, 4 випливає, що

$$P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1 \to$$
$$\to P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \to P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A). \tag{9}$$

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{10}$$

Справді:

$A \cup B = A \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$, то $P(A \cup B) = P\left(A \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right) = P(A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$

$$(A \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing). \tag{11}$$

Оскільки

$B = \left(B \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B)$ і при цьому $\left(B \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \varnothing$, то

$$P(B) = P(A \cap B) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = P(A \cap B) + P\left(B \cap \overline{A}\right) \to$$
$$\to P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B).$$

Отже,

$$P\left(A\bigcup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\bigcap B\right).$$

3. Формула додавання для n сумісних випадкових подій має такий вигляд:

$$P\left(\bigcup_{i-1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(A_i\right)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i-1}^{n}P\left(A_i\bigcap A_j\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i-1}^{n-1}\sum_{k=j-1}^{n-1}P\left(A_i\bigcap A_j\bigcap A_k\right)=...=\left(-1\right)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).\tag{12}$$

Наприклад, для трьох сумісних випадкових подій формулу (12) можна записати так:

$$P\left(A\bigcup B\bigcup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(A\bigcap B\right)-P\left(A\bigcap C\right)-P\left(B\bigcap C\right)+$$
$$+P\left(A\bigcap B\bigcap C\right).\tag{13}$$

4. Якщо випадкова подія A сприяє появі $B\left(A\subset B\right)$, то

$$P\left(A\right)\le P\left(B\right).\tag{14}$$

Приклад 1. В урні містяться 30 однакових кульок, які пронумеровані від 1 до 30. Навмання із урни беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться кратним 3 або 5?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω $n = 30$.

Позначимо через $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ $(m_1 = 10)$ — появу кульки з номером, кратним 3, а через $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ $(m_2 = 6)$ — появу кульки із номером, кратним 5.

$A\bigcap B=\left(15, 30\right)\left(m_3=2\right)$ є подіями сумісними.

Згідно з (10) дістанемо

$$P\left(A\bigcup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\bigcap B\right)=$$
$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{m_3}{n}=\frac{10}{30}+\frac{6}{30}-\frac{2}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}\cdot$$

Приклад 2. Чотири спортсмени мають виконати норму майстра спорту. Кожний із них може виконати її із певною ймовірністю. Яка ймовірність того, що із чотирьох спортсменів норму майстра спорту виконують не менш як два спортсмени; не більш як три?

Розв'язання. Позначим через $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ випадкові події, що відповідно перший, другий, третій та четвертий спортсмени виконають норму майстра, а через $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}$ — відповідно випадкові події, що перший, другий, третій та четвертий спортсмени не виконають норму. Тоді простір елементарних подій для цього експерименту буде:

$\Omega = \{A_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,$ $A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,$ $A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\}$, $n = 16$.

Випадкові події:

$A = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,$ $\overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 A_3 A_4\}$, $m_1 = 11$;

$B = \{A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,$ $\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,$ $\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\}$, $m_2 = 15$;

$A \cap B = \{A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,$ $\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\}$, $m_3 = 10$.

Шукана ймовірність:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = \frac{11}{16} + \frac{15}{16} - \frac{10}{16} = 1.$$

Приклад 3. Випадкові події A_1, A_2, A_3, A_4 є попарно несумісними і утворюють повну групу. Знайти $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$, коли відомо, що $P(A_1) = 0{,}2\, P(A_2)$, $P(A_2) = 0{,}8\, P(A_3)$, $P(A_3) = 0{,}5\, P(A_4)$.

Розв'язання. Оскільки випадкові події A_1, A_2, A_3, A_4 є попарно несумісними і утворюють повну групу, то згідно з (8) дістаємо:

$$P\left(\bigcup_{i-1}^{4} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1.$$

За умовою задачі знаходимо:

$$P(A_2) = 0{,}8\, P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}5\, P(A_4) = 0{,}4\, P(A_4).$$

$$P(A_1) = 0{,}2\, P(A_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4\, (A_4) = 0{,}08\, P(A_4).$$

Отже,

$0{,}08\, P(A_4) + 0{,}4\, P(A_4) + 0{,}5\, P(A_4) + P(A_4) = 1$;

$$P(A_4) = \frac{1}{0{,}08 + 0{,}4 + 0{,}5 + 1} = \frac{1}{1{,}98} = \frac{100}{198};$$

$$P(A_3) = 0{,}5\, P(A_4) = 0{,}5 \frac{100}{198} = \frac{50}{198};$$

$$P(A_2) = 0{,}4\, P(A_4) = 0{,}4 \frac{100}{198} = \frac{40}{198};$$

$$P(A_1) = 0{,}08\, P(A_4) = 0{,}08 \frac{100}{198} = \frac{8}{198}.$$

6. Геометрична ймовірність

Класичне означення ймовірності придатне лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли множина Ω (простір елементарних подій) обмежена.

Якщо множина Ω є неперервною і квадровною, то для обчислення ймовірності A ($A \subset \Omega$) використовується геометрична ймовірність

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{15}$$

Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню довжини, якщо Ω вимірюється у квадратних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню площ, і т. ін.

Приклад 1. По трубопроводу між пунктами A і B перекачують нафту. Яка ймовірність того, що пошкодження через певний час роботи трубопроводу станеться на ділянці довжиною 100 м.

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega = \{0 \le l \le 2\,км\}$, тоді $A = \{0 \le l \le 0{,}1 \text{ км}\}$ ($A \subset \Omega$).

Згідно з (12) маємо:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l_1}{l} = \frac{0{,}1}{2} = \frac{1}{20}.$$

Приклад 2. Задана множина $\Omega = (0 \le x \le e,\ 0 \le y \le 1)$. Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа (x, y) утворять координати точки, яка влучить в область $A = (1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x)$?

Розв'язання. Множини Ω і A зображені на рис. 5.

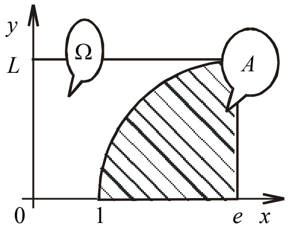

Рис. 5

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_1^e \ln x dx}{e} = \frac{x\ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e dx}{e} = \frac{x\ln x\,\Big|_1^e - x\,\Big|_1^e}{e} = \frac{e - e + 1}{e} = \frac{1}{e}.$$

7. Статистична ймовірність

На практиці обчислити ймовірності випадкових подій можна лише для обмеженого класу задач як для дискретних, так і для неперервних просторів елементарних подій (множини Ω). Для більшості задач, особливо економічних, обчислити ймовірності практично неможливо. У цьому разі використовується статистична ймовірність.

Насамперед уводиться поняття відносної частоти випадкової події $W(A)$.

Відносною частотою випадкової події A $W(A)$ називається відношення кількості експериментів m, при яких подія A спостерігалася, до загальної кількості n проведених експериментів:

$$W(A) = \frac{m}{n}. \tag{16}$$

Як і для ймовірності випадкової події, для відносної частоти виконується нерівність

$$0 \le W(A) \le 1.$$

Теорія ймовірностей вивчає лише такі випадкові події, в яких спостерігається стабільність відносних частот, а саме: у разі проведення k серій експериментів існує така константа $P(A)$, навколо якої групуватимуться відносні частоти досліджуваної випадкової події A, тобто $W_i(A)$. І це групування буде тим ближчим до цієї константи, чим більшим буде число n експериментів.

На рис. 6 показано, як $W_i(A)$ змінюється зі збільшенням n експериментів.

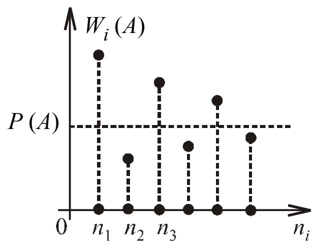

Рис. 6

Імовірність випадкової події визначається так: упевнившись, що існує стабільність відносних частот випадкової події $W_i(A)$, задаємось малим додатним числом ε і проводимо серії експериментів, збільшуючи їх число n. Якщо на якомусь кроці серії експериментів виконуватиметься нерівність $|W_i - W_{i-1}| < \varepsilon$, то за ймовірність випадкової події береться одне з чисел W_i або W_{i-1}. Ця ймовірність називається *статистичною*.

Теоретичні запитання до теми ?

1. Що називається вірогідною; неможливою подією? Навести приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Яка подія називається елементарною; складеною випадковою подією? Навести приклади.
4. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.
5. Сумою двох випадкових подій A і B називається ...
6. Добутком двох випадкових подій A і B називається ...
7. Різницею двох випадкових подій A і B називається ...
8. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.
9. Переставленням із n елементів називається ...
10. Розміщенням із n елементів по m називається ...
11. Комбінацією із n елементів по m називається ...
12. Що таке алгебра подій?
13. Аксіоми теорії ймовірностей.
14. Відомо, що A_i ($i = 1, \ldots, n$) утворюють повну групу. Чому дорівнює $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$?
15. Відомо, що $A \cap B \neq \varnothing$. Чому дорівнює $P(A \cup B)$? Довести.
16. Відомо, що випадкові події A, B, C є попарно сумісними і сумісними в сукупності. Довести, що $P(A \cup B \cup C) = \ldots$
17. Відомо, що випадкові події A, B, C, D є попарно і в сукупності сумісними. Довести, що $P(A \cup B \cup C \cup D) = \ldots$
18. Що називається відносною частотою випадкової події?
19. Що називається геометричною ймовірністю?
20. Що таке статистична ймовірність?

Приклади до теми

1. Маємо 10 лотерейних білетів. На кожний із них може випасти виграш із певною ймовірністю.

Побудувати простір елементарних подій (множину Ώ) — числа білетів, на які випаде виграш, а також такі випадкові події: A — із 10 білетів виграють не більш як три; B — із 10 білетів виграють не менш як п’ять. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Відповідь. $$P(A) = \frac{C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + C_{10}^{3}}{2^{10}};$$

$$P(B) = \frac{\sum_{m=5}^{10} C_{10}^{m}}{2^{10}}; \qquad P(A \cap B) = 0.$$

2. Задано дві множини цілих чисел: $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події: A — сума цифр буде кратною 3; B — сума цифр буде кратною 7.

Обчислити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Відповідь. $P(A) = \frac{7}{48}$; $P(B) = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$; $P(A \cap B) = 0$.

3. Гральний кубик підкидається один раз, а монета чотири рази. Побудувати простір таких елементарних подій — поява числа на гральному кубику і поява герба на монеті, а також випадкові події:

A — на гральному кубику з'явиться число, кратне двом, і герб при цьому випаде не менш як двічі;

B — на гральному кубику з'явиться число, кратне трьом, і герб при цьому випаде не більш як тричі. Обчислити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Відповідь. $P(A) = \frac{33}{96} = \frac{11}{32}$; $P(B) = \frac{15}{96} = \frac{5}{32}$; $P(A \cap B) = \frac{30}{96} = \frac{5}{16}$.

4. В електромережу ввімкнено 15 електролампочок. Кожна з них може перегоріти із певною ймовірністю. Визначити простір елементарних подій (множину Ω) — числа електролампочок, що не вийдуть із ладу, і такі випадкові події:

A — число електролампочок, що не вийдуть із ладу, буде не більшим від чотирьох;

B — від трьох до шести. Обчислити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Відповідь. $P(A) = \frac{\sum_{m=0}^{4} C_{15}^m}{2^{15}}$; $P(B) = \frac{\sum_{m=3}^{6} C_{15}^m}{2^{15}}$; $P(A \cap B) = \frac{C_{15}^3 + C_{15}^4}{2^{15}}$.

5. Відомо, що $P(A) = 0{,}9$. Чому дорівнює $P(A \cup (A \cap B))$, якщо $A \subset \Omega$, $A \cap B \neq \varnothing$.

6. В якому разі $A \cup \overline{A} = A$, $A \cap \overline{A} = A$?

7. Відомо, що $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$. Чому дорівнює

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)?$$

8. В якому разі $A \cap \overline{B} = A$, $B \cap \overline{A} = B$?

9. Відомі значення $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}1$, $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$, $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}4$. Знайти $P(A \cap B)$.

10. Відомі значення $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2$, $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$, $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}4$. З'ясувати, чи сумісні випадкові події A і B? Чому дорівнює $P(A \cap B)$?

11. В якому разі $A \setminus B = A$?

12. В якому разі $A \bigcup B = B$?

13. В якому разі $A \bigcap B = B$?

14. Відомо, що $A_i \subset \Omega$ ($i = 1, \ldots, n$). Чому дорівнює $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcup \overline{A_2}\right)$?

15. Відомо, що $A_i \subset \Omega$ ($i = 1, n$). Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \bigcap \overline{A_2}\right)$?

16. Відомі значення $P\left(A \bigcap \overline{B}\right) = 0{,}3$; $P\left(B \bigcap \overline{A}\right) = 0{,}4$; $P\left(\overline{A} \bigcap \overline{B}\right) = 0{,}8$. Знайти $P\left(A \bigcup B\right)$.

17. Відомо, що A_1, A_4, A_3, A_4 є між собою несумісними і утворюють повну групу. Знайти значення $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$, якщо:

$$P(A_1) = 0{,}5P(A_2) + 0{,}8P(A_3);$$
$$P(A_2) = 0{,}8P(A_3) + 0{,}2P(A_4);$$
$$P(A_3) = 0{,}8P(A_4).$$

18. Монета підкидається 20 раз. Яка ймовірність того, що при цьому герб з'явиться 7 або 17 раз?

Відповідь. $\dfrac{C_{20}^{7} + C_{20}^{17}}{2^{20}}$.

19. На кожній із п'яти однакових карток написана одна із цифр 1, 2, 3, 4, 5. Навмання картки розкладають в один рядок. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) A — цифри на картках утворюють зростаючу послідовність;

2) B — спадну послідовність;

3) C — цифри 1, 2 розміщуватимуться в такій послідовності на початку рядка;

4) D — цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 — на останньому.

Відповідь. $P\left(A\right) = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$; $P\left(B\right) = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$; $P\left(C\right) = \dfrac{3!}{5!} = \dfrac{1}{20}$;

$$P\left(D\right) = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}.$$

20. Виконується переставлення чисел 1, 2, 3 ... 10. Знайти ймовірність того, що числа 1) 1, 2; 2) 1, 2, 3, 4 будуть розміщені в наведеному порядку.

Відповідь. 1) $\dfrac{8!}{10!} = \dfrac{1}{90}$; 2) $\dfrac{6!}{10!} = \dfrac{1}{504}$.

21. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Числа навмання розміщують у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому утвориться парне п’ятицифрове число?

Відповідь. $\frac{4!\ 2}{5} = \frac{2}{5}$.

22. Маємо тринадцять однакових карток:

| Е | Е | А | А | Е | І | П | Л | Л | Д | Р | П | П |,

які навмання розкладають у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо слово «паралелепіпед».

Відповідь. $\frac{3!\ 2!\ 3!}{3!}$.

23. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Яка ймовірність того, що навмання взяті чотири числа, розміщені в рядок, утворять число 1936?

Відповідь. $\frac{1}{A_9^4}$.

24. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п’яти однакових картках. Навмання послідовно по одній вибирають три картки й розкладають їх у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому утвориться парне трицифрове число?

Відповідь. $\frac{A_4^2 \cdot 2}{A_5^3} = \frac{24}{60} = 0{,}4$.

25. Дев’ять пасажирів навмання розміщуються у трьох вагонах. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) A — у кожному вагоні виявиться по три пасажири; 2) B — у першому вагоні виявиться 4 пасажири, у другому — 3 і в третьому — 2 пасажири.

Відповідь. $P(A) = \frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{9^3} = \frac{9!}{6!\ 3!}\ \frac{6!}{3!\ 3!}\ \frac{1}{9^3} = \frac{9!}{(3!)^2\, 9^3}$;

$$P(B) = \frac{C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2}{9^3} = \frac{9!}{4!\ 3!\ 2!\ 9^3}.$$

26. В урні міститься 4 червоних, 5 синіх і 6 зелених кульок. Навмання із урни беруть три кульки. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору або всі три будуть мати різні кольори?

Відповідь. $\frac{C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1}{C_{15}^3}$.

27. В урні міститься 20 кульок, пронумерованих відповідно від 1 до 20. Кульки із урни виймають по одній із поверненням. Таким способом кульки виймалися 10 раз. Яка ймовірність того, що номери кульок утворять зростаючу послідовність?

Відповідь. $\frac{C_{20}^{10}}{20^{10}}$.

28. Підкидається n штук гральних кубиків. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) A — сума випадкових цифр дорівнюватиме n ; 2) B — сума цифр, що випали, дорівнюватиме $n+1$.

Відповідь. 1) $P(A)=\frac{1}{6^n}$; 2) $P(B)=\frac{n}{6^n}$.

29. 20 студентів, серед яких 10 чоловічої статі, а решта — жіночої, навмання групуються в пари. Яка ймовірність того, що кожна пара складається зі студентів різної статі?

Відповідь. $\frac{C_{10}^1C_{10}^1C_9^1C_9^1C_8^1C_8^1\cdot C_7^1C_7^1C_6^1C_6^1C_5^1C_5^1C_4^1C_4^1C_3^1C_3^1C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1}{20}=$

$=\frac{10!}{9!\,1!}\;\frac{9!}{8!\,1!}\;\frac{8!}{7!\,1!}\;\frac{7!}{6!\,1!}\;\frac{6!}{5!\,1!}\;\frac{5!}{4!\,1!}\;\frac{4!}{3!\,1!}\;\frac{3!}{2!\,1!}\;\frac{2!}{1!\,1!}\;\frac{1}{20!}=\frac{10!}{20!}$.

30. У бригаді робітників 5 чоловіків і 10 жінок. Яка ймовірність того, що навмання розбиваючи їх на 5 груп по три чоловіки, у кожній із них виявиться один чоловік.

Відповідь. 15 робітників можна розбити на 5 трійок так: $C_{15}^3\cdot C_{12}^3\cdot C_9^3\cdot C_{6.}^3\cdot C_3^3=\frac{15!}{(3!)^5}$; 10 жінок можна розбити на 5 груп, по дві жінки в кожній групі так: $C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2=\frac{10!}{(2!)^5}$; 5 чоловіків можна розмістити в 5 групах 5! способами.

Отже, $P=\frac{10!\;5!}{(2!)^5\;\frac{15!}{(3!)^3}}=\frac{10!\;5!(3!)^5}{(2!)^5\;\;15!}$.

31. Задано множину $\Omega=\{0\le x\le\pi,\ 0\le y\le 1\}$. Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа $x,\ y$ утворять координати точки, яка належить області $A=\{0\le x\le\pi,\ 0\le y\ \ 0\le\sin^2 x\}$.

Відповідь. $P(A)=0{,}5$.

32. У мішень, яка має вигляд кола, вписано квадрат. По ній здійснюється один постріл. Вважається при цьому, що влучення в коло мішені є подією вірогідною. Яка ймовірність того, що куля влучить у квадрат.

Відповідь. $\frac{2}{\pi}$.

33. У партії однотипних деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?

Відповідь. $\frac{15}{16}$.

34. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,85. Знайти число влучень, якщо було здійснено 20 пострілів.

Відповідь. 17.

ТЕМА 2. **ЗАЛЕЖНІ ТА НЕЗАЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ, ФОРМУЛИ МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

1. Залежні та незалежні випадкові події

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У противному разі випадкові події A і B називаються *незалежними*.

Приклад 1. В урні міститься 10 однакових кульок, із них 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться чорною і друга також.

Розв'язання. Позначимо через A появу чорної кульки при першому вийманні, а через B — при другому. Випадкові події A і B будуть залежними, оскільки поява чорної кульки при першому її вийманні з урни (випадкова подія A) впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (випадкова подія B) при другому вийманні.

Приклад 2. З урни, де шість білих і чотири чорні кульки, вийняли дві кульки по одній, при цьому перша кулька в урну повертається.
З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша виявиться чорною, друга також.

Розв'язання. Нехай A — поява чорної кульки при першому вийманні, а B — при другому. Поява чорної кульки при першому вийманні (здійснилась подія A) не впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (подія B) при другому вийманні, оскільки співвідношення між чорними та білими кульками в цьому разі не змінюється.

2. Умовна ймовірність та її властивість

Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P\left(A\ \ /\ B\right)=\frac{P\left(A\bigcap B\right)}{P\left(B\right)},\quad P\left(B\right)\neq 0\,. \tag{17}$$

Аналогічно

$$P\left(B\ \ /\ A\right)=\frac{P\left(A\bigcap B\right)}{P\left(A\right)},\quad P\left(A\right)\neq 0\,. \tag{18}$$

1. $P\ (A\ /\ B) = 0$, якщо $A \cap B = \varnothing$.
2. $P\ (A\ /\ B) = 1$, якщо $A \cap B = B$.
3. У решті випадків $0 < P(A\ /\ B) < 1$.

Приклад 1. Задана множина цілих чисел. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2. Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$;
$B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$;
$A \cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$;

$$P\left(A\right)=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\ P\left(B\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ P\left(A\bigcap B\right)=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};$$

$$P\ (A\ /\ B) =\ P\left(A\ /\ B\right)=\frac{P\left(A\bigcap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $P\left(A\right)\neq P\left(A\ /\ B\right)$, то події A і B є залежними.

Умовну ймовірність $P\ (A\ /\ B)$ для цієї задачі можна обчислити й інакше. За умовою задачі відомо, що взяте навмання число, є непарним, тобто в цьому разі ми дістали додаткову інформацію: із множини Ω беруться лише непарні числа. Отже, простір елементарних подій тепер має вигляд

$$`\Omega'=\left\{1,2,5,7,9,11\right\},\ n'=6\,.$$

Елементарні події, що сприяють появі A, — появі числа, кратного 3, утворюють множину $A=\{3,9\}$, $m'=2$.

Отже,

$$P\left(A\ /\ B\right)=\frac{m'}{n'}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Відомі значення:

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3;\ P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4\ ;\ P(\overline{A \cap B}) = 0{,}9.$

З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B.

Розв'язання.

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4;$

$P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5;$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ .$$

Оскільки $P(A / B) \neq P(A),\ P(B) \neq P(B / A),$ то випадкові події A і B є залежними.

3. Формули множення ймовірностей для залежних випадкових подій

Згідно із (17) і (18) маємо:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A / B) = P(A)\, P(B / A). \qquad (19)$$

Формула множення для n залежних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots A_4$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1 A_2) \ldots P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \quad (20)$$

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:
1) A — три деталі виявляться стандартними;
2) B — усі три виявляться бракованими;
3) C — дві стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i — поява стандартної, $\overline{A_i}$ — бракованої деталі при i-му вийманні.

Подія $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$,

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\ .$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{9}{15}\,\frac{8}{14}\,\frac{7}{13} = \frac{12}{65}\,;$$

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\ P(\overline{A_2}/\overline{A_1})\ P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\ \overline{A_2}) = \frac{6}{15}\ \frac{5}{14}\ \frac{4}{13} = \frac{6}{91}.$$

$$P\ (C) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\right) =$$

$$= P\ (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P\ (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P\ (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P\ (A_1)\ P\ (A_2\ /\ A_1)\ P\ (\overline{A_3}\ /\ A_1 A_2) + P\ (A_1)\ P\ (\overline{A_2}\ /\ A_1)\ P\ (A_3\ /\ A_1 \overline{A_2}) +$$

$$+ P\ (\overline{A_1})\ P\ (A_2\ /\ \overline{A_1})\ P\ (A_3\ /\ \overline{A_1} A_2) = \frac{9}{15}\ \frac{8}{14}\ \frac{6}{13} + \frac{9}{15}\ \frac{6}{14}\ \frac{8}{13} + \frac{6}{15}\ \frac{9}{14}\ \frac{8}{13} = \frac{216}{455}.$$

Приклад 2. Із множини чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти — друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?

Розв'язання. Позначимо через A_1 — поява непарної цифри при першому вийманні, через B_1 — поява парної цифри при першому, а через B_2 — появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай C — випадкова подія: поява парного двоцифрового числа.

Тоді $C = (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

$$P\ (C) = P\ (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2) = P(A_1 \cap B_2) + P\ (B_1 \cap B_2) =$$

$$= P\ (A_1)\ P\ (B_2\ /\ A_1) + P\ (B_1)\ P\ (B_2\ /\ B_1) = \frac{5}{9}\ \frac{4}{8} + \frac{4}{9}\ \frac{3}{8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

4. Формули множення ймовірностей для незалежних випадкових подій

Якщо випадкові події A і B є незалежними, то $P(A\ /\ B) = P(A)$, $P(B\ /\ A) = P(B)$.

Формули (19), (20) наберуть такого вигляду:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B); \qquad (21)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (22)$$

Приклад 1. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

Розв'язання. Нехай поява числа, кратного трьом — подія A, а поява герба — подія B. Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \qquad P(B) = \frac{1}{2}; \qquad P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 2. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Імовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7.

Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A — три студенти складуть екзамен;
2) B — три студенти не складуть екзамену;
3) C — два студенти складуть екзамен.

Розв'язання. Позначимо A_1, A_2, A_3 — випадкові події, які полягають у тому, що перший, другий і третій студенти складуть екзамен з математики. Тоді $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ — відповідно не складуть. За умовою задачі маємо:

$$P(A_1) = 0{,}9,\ P(A_2) = 0{,}8,\ P(A_3) = 0{,}7.$$

Тоді ймовірності протилежних подій такі:

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Позначимо події: $A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$, $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$,

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cup A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ ($i = 1, 2, 3$) є між собою незалежними, то

$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504;$

$P(B) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\, P(\overline{A_2})\, P(\overline{A_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006;$

$$P(C) = P\left(\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)\right) =$$

$$= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) =$$

$$= P(A_1)\, P(A_2)\, P\left(\overline{A_3}\right) + P(A_1)\, P\left(\overline{A_2}\right) P(A_3) + P\left(\overline{A_1}\right) P(A_2)\, P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398.$$

5. Імовірність появи випадкової події принаймні один раз при *n* незалежних спробах

Нехай проводиться n незалежних спроб, у кожній з яких може відбутися подія A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) з імовірністю $P(A_i) = p_i$ або подія $\overline{A_i}$ $\left(A_i \cup \overline{A_i} = \Omega,\ A_i \cap \overline{A_i} = \varnothing\right)$ з імовірністю $P\left(\overline{A_i}\right) = q_i$, $\left(p_i + q_i = 1\right)$.

Нехай C — поява події A_i хоча б один раз при n незалежних спробах, тобто ця подія може з'явитися або один раз, або двічі, тричі і так далі, включаючи всі n раз. Тоді подія C і подія, яка полягає в тому, що при n спробах A_i не з'явиться жодного разу $\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_4 = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)$, утворюють повну групу, а саме: $C \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = \grave{}\Omega$. При цьому $C \cap \left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}\right) = \varnothing$.

Тоді $P\left(C \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)\right) = P\left(C\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = P\left(\grave{}\Omega\right) = 1$;

$$P(C) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A}_i\right).$$

Отже,

$$P\left(C\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \ . \qquad (23)$$

Якщо $P(A_i) = p_i = p = \text{const}$, то $q_i = q = \text{const}$.
Тоді

$$P(C) = 1 - q^n. \qquad (24)$$

Приклад 1. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8.
Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай p_1 = 0,95 — імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно p_2 = 0,9; p_3 = 0,85; p_4 = 0,8. Імовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$$
$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

На підставі (23) маємо:

$$P(C) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985.$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв’язання. Імовірність того, що при одному підкиданні з’явиться цифра 3, дорівнює $\frac{1}{6}$. Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Згідно з (24) дістанемо:

$$P(C) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

6. Використання формул теорії ймовірностей для оцінювання надійності роботи простих систем

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з’єднані за схемою, наведеною на рис. 7.

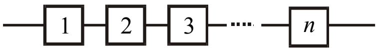

Рис. 7

При цьому відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i $(i = 1,\ldots, n)$.

Позначивши надійність системи через R, дістанемо

$$R = \prod_{i=1}^{n} p_i\,. \tag{25}$$

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з’єднані за схемою, наведеною на рис. 8.

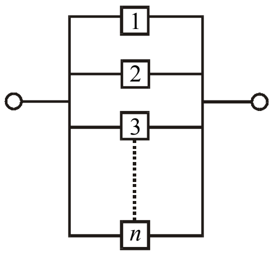

Рис. 8

При цьому відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i $(i = 1,\ldots, n)$:

$$R = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i\,, \quad q_i = 1 - p\,. \tag{26}$$

Приклад. Електричні лампочки з'єднані за схемами, наведеними на рис. 9 і 10.

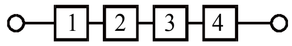

Рис. 9

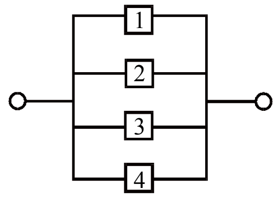

Рис. 10

Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу наведених схем, є величиною сталою і дорівнює $p_i = 0{,}8$.

Яка ймовірність того, що при ввімкненні в електромережу наведених схем у них буде електрострум?

Розв'язання. За відомим значенням p_i знаходимо $q_i = 1 - p_i = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

а) $R = \mathrm{R} = \prod_{i=1}^{4} p_i = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$;

б) $R = 1 - \prod_{i=1}^{4} q_i = 1 - (0{,}2)^4 = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$.

7. Формула повної ймовірності

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними $\left(B_i \bigcap B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \ i, j = 1, \ldots, n, \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \grave{}\Omega\right)$, імовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A / B_i),$$

яка називається *формулою повної ймовірності*.

Випадкові події B_1, B_2, ... B_n називають *гіпотезами*.

Приклад 1. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого — 35% і від третього — 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий — 2% і третій — 8%.

Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

Розв’язання. Позначимо через A появу стандартної деталі, B_1 — деталь надійде від першого цеху, B_2 — від другого, B_3 — від третього. За умовою задачі:

$$P(B_1) = 0{,}45, \quad P(A / B_1) = 0{,}94;$$
$$P(B_2) = 0{,}35, \quad P(A / B_2) = 0{,}98;$$
$$P(B_3) = 0{,}2, \quad P(A / B_3) = 0{,}92.$$

Згідно з (27) маємо:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A / B_1) + P(B_2)\,P(A / B_2) + P(B_3)\,P(A / B_3) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}423 + 0{,}343 + 0{,}184 = 0{,}95.$$

Приклад 2. У ящику міститься 11 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта браковані. Із ящика навмання беруть три деталі й назад не повертають. Яка ймовірність після цього вийняти навмання з ящика стандартну деталь?

Розв’язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що з ящика вийнято навмання одну стандартну деталь після того, як з нього було взято три. Розглянемо такі події:

B_1 — було взято три стандартні деталі;
B_2 — дві стандартні і одну браковану;
B_3 — одну стандартну і дві браковані;
B_4 — три браковані.

Обчислимо ймовірності гіпотез, а також відповідні їм умовні ймовірності $P(A / B_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

$$P(B_1) = P(B_1) = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{35}{165}, \quad P(A / B_1) = \frac{4}{8};$$

$$P(B_2) = \frac{C_7^2 C_4^1}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}, \quad P(A / B_2) = \frac{5}{8};$$

$$P(B_3) = \frac{C_7^1 C_4^2}{C_{11}^3} = \frac{42}{165}, \quad P(A / B_3) = \frac{6}{8};$$

$$P(B_4) = \frac{C_7^0 C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}, \quad P(A / B_4) = \frac{7}{8}.$$

Згідно з (27) дістанемо:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A / B_1) + P(B_2)\,P(A / B_2) + P(B_3)\,P(A / B_3) + P(B_4)\,P(A / B_4) =$$
$$= \frac{35}{165}\;\frac{4}{8} + \frac{84}{165}\;\frac{5}{8} + \frac{42}{165}\;\frac{6}{8} + \frac{4}{165}\;\frac{7}{8} = \frac{840}{1320} = \frac{7}{11}.$$

Оскільки
$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \grave{}\Omega,$$

то
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_1) = 1.$$

8. Формула Байєса

Застосовуючи формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i ($i = \overline{1, n}$), дістаємо

$$P(A)\,P(B_i / A) = P\,(B_i)\,P(A / B_i) \to$$

$$\to P\left(B_i / A\right) = \frac{P\,(B_i)\,P\,(A / B_i)}{P\,(A)} = \frac{P\,(B_i)\;P\,(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(B_i)\;P\,(A / B_i)}. \qquad (28)$$

Залежність (28) називається *формулою Байєса*. Її використовують для переоцінювання ймовірностей гіпотез B_i за умови, що випадкова подія A здійсниться.

Після переоцінювання всіх гіпотез B_i маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(B_i)\,P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1\,.$$

Згідно з формулою Байєса можна прийняти рішення, провівши експеримент. Але для цього необхідно, аби вибір тієї чи іншої гіпотези мав ґрунтовні підстави, тобто щоб унаслідок проведення експерименту ймовірність $P(B_i / A)$ була близька до одиниці.

Приклад 1. Маємо три групи ящиків. До першої групи належить 5 ящиків, у кожному з яких 7 стандартних і 3 браковані однотипні вироби, до другої групи — 9 ящиків, у кожному з яких 5 стандартних і 5 бракованих виробів, а до третьої — 3 ящики, у кожному з яких 3 стандартні й 7 бракованих виробів. Із довільно вибраного ящика три навмання взяті вироби виявилися стандартними.
Яка ймовірність того, що вони були взяті з ящика, який належить третій групі?

Розв'язання. Позначимо B_1, B_2, B_3 гіпотези про те, що навмання вибраний ящик належить відповідно першій, другій або третій групі. Обчислимо ймовірності цих гіпотез. Оскільки всього за умовою задачі 17 ящиків, то

$$P\left(B_1\right) = \frac{5}{17};\; P\left(B_2\right) = \frac{9}{17};\; P(B_3) = P\left(B_3\right) = \frac{3}{17}.$$

Позначимо через A появу трьох стандартних виробів. Тоді відповідні умовні ймовірності:

$$P\left(A / B_1\right) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120};$$

$$P\left(A/B_2\right)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10}{120};$$

$$P\left(A/B_3\right)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}.$$

За умовою задачі необхідно переоцінити ймовірність гіпотези B_3. Використовуючи формулу (28), маємо:

$$P\left(B_3/A\right)=\frac{P(B_3)\ P(A/B_3)}{P(B_1)\ P(A/B_1)+P(B_2)\ P(A/B_2)+P(B_3)\ P(A/B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{17}\ \frac{1}{120}}{\frac{5}{17}\ \frac{21}{120}+\frac{9}{17}\ \frac{10}{120}+\frac{3}{17}\ \frac{1}{120}}=\frac{3}{105+90+3}=\frac{3}{198}=\frac{1}{66}.$$

Приклад 2. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% — із заводу № 1, 25% — із заводу № 2; 40% — із заводу № 3 і 20% — із заводу № 4.
Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 — 3%, заводу № 2 — 5%, заводу № 3 — 8% і заводу № 4 — 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

Розв'язання. Позначимо B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, B_2 — заводом № 2, B_3 — заводом № 3 і B_4 — заводом № 4. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай A — випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$P(B_1) = 0{,}15$, $P(B_2) = 0{,}25$, $P(B_3) = 0{,}4$, $P(B_4) = 0{,}2$, $P(A/B_1) = 0{,}03$, $P(A/B_2) = 0{,}05$, $P(A/B_3) = 0{,}08$, $P(A/B_4) = 0{,}01$.

За формулою Байєса (28) переоцінюємо першу гіпотезу B_1:

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{P(B_1)\,P(A/B_1)+P(B_2)\,P(A/B_2)+P(B_3)\,P(A/B_3)+P(B_4)\,P(A/B_4)}=$$

$$=\frac{0{,}15\cdot 0{,}03}{0{,}15\cdot 0{,}03+0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}4\cdot 0{,}08+0{,}2\cdot 0{,}01}=\frac{0{,}0045}{0{,}051}=\frac{45}{510}=\frac{3}{34}.$$

Теоретичні запитання до теми ?

1. Випадкові події A і B називають залежними ...
2. Визначення умовної ймовірності.
3. В якому разі $P(A/B) = 0$?

4. В якому разі $P(A/B) = 1$?

5. Формула множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій A і B має вигляд ...

6. Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A_i є залежними?

7. Чому дорівнює $P(A \cap B)$, якщо A і B є незалежними?

8. В якому разі $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$?

9. Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A і B є незалежними?

10. Формула для обчислення появи випадкової події хоча б один раз при n незалежних експериментах має вигляд ...

11. Гіпотези у формулі повної ймовірності та їх властивості.

12. Формула повної ймовірності випадкової події A за наявності n гіпотез B_i має вигляд ...

13. В якому разі використовується формула Байєса?

14. Для переоцінювання ймовірності B_i гіпотези формула Байєса має вигляд ...

15. В якому разі обирається гіпотеза B_i для прийняття рішення при проведенні експерименту?

16. Чому дорівнює $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$, де B_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?

Приклади до теми

1. Чому дорівнює $P(A / A)$?

2. Чому дорівнює $P\left(A / A \cap \overline{B}\right)$?

3. Довести, що коли $P(A / B) = P(A)$, то і $P(B / A) = P(B)$.

4. Довести, що коли $P(A / B) = P(A)$, то і $P\left(A / \overline{B}\right) = P(A)$.

5. Довести, що $P\left(\overline{A} / B\right) = 1 - P(A / B)$.

6. Коли $A \subset B$, то довести, що $P(A / B) = P(A) / P(B)$.

7. Коли $B \subset A$, то довести, що $P(A / B) = 1$.

8. В урні міститься 9 червоних і 5 синіх кульок. Кульки з неї виймаються по одній без повернення. Таким способом вийняли чотири кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A — з'явиться чотири червоні кульки; 2) B — чотири сині; 3) C — дві червоні й дві сині кульки.

Відповідь. $P(A) = \frac{126}{1001}$; $P(B) = \frac{5}{1001}$; $P(C) = \frac{360}{1001}$.

9. Задано множину цілих одноцифрових чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Навмання береться одне число, а потім друге, при цьому перше не повертається. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A — здобуте двоцифрове число виявиться непарним; 2) B — здобуте двоцифрове число ділиться на 5 або на 2.

Відповідь. $P(A)=\frac{35}{72}$; $P(B)=\frac{8}{9}\ \frac{1}{8}+\frac{5}{9}\ \frac{4}{8}+\frac{4}{9}\ \frac{3}{8}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9}$.

10. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що перший елемент не вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює $p_1 = 0{,}9$. Для другого і третього елементів ця ймовірність відповідно така: $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$. Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийде: 1) A — три елементи; 2) B — два елементи; 3) C — один елемент; 4) D — всі три елементи не вийдуть із ладу. З'ясувати, чи утворюють випадкові події A, B, C, D повну групу.

Відповідь. $P(A) = 0{,}006$; $P(B) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}398$;
$P(C) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0{,}092$;
$P(D) = 0{,}504$. Випадкові події A, B, C, D утворюють повну групу.

11. Імовірність безвідказної роботи блока, що входить у систему впродовж певного часу дорівнює 0,9. Для надійності роботи системи встановлюється такий же блок, що буде знаходитись у резерві. Яка ймовірність безвідмовної роботи системи, коли при цьому враховувати резервний блок?

Відповідь. $p = 0{,}99$.

12. Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, що працюють самостійно, виконує деяке завдання з виявлення літака-порушника повітряного простору України на певній ділянці кордону. Для виконання цього завдання необхідно, щоб у справному стані була хоча б одна радіолокаційна станція. Імовірність безвідказної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої 0,85. Система працюватиме надійно, якщо буде справною хоча б одна радіолокаційна станція. Знайти ймовірність цієї події.

Відповідь. $p = 0{,}9925$.

13. Робітник обслуговує три верстати-автомати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом години перший верстат потребує уваги робітника дорівнює 0,9, для другого та третього верстатів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85 і 0,8. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребують: 1) A — два верстати; 2) B — хоча б один із трьох?

Відповідь. $P(A) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}329$;
$P(B) = 0{,}997$.

14. Радіоприймач із імовірностями $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}1$ може належати до однієї з двох партій. Імовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу без ремонту для цих партій відповідно дорівнює 0,8 і 0,6. Яка ймовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу?

Відповідь. $p = 0{,}78$.

15. На складання агрегату надходять деталі, які виготовляються двома верстатами-автоматами. Перший верстат виготовляє в середньому 0,2% бракованих деталей, а другий 0,1%. Знайти ймовірність надходження бракованої деталі на складання, якщо від першого верстата надійшло 2000 деталей, а від другого — 3000.

Відповідь. $p = \frac{2000}{5000} 0{,}002 + \frac{3000}{5000} 0{,}001 = 0{,}0014.$

16. В ящику міститься 20 тенісних м'ячів, із них 12 нових і 8, які були в користувані. Із ящика навмання беруть два м'яча і після закінчення гри повертають у ящик. Після цього із ящика навмання вибирають знову два м'яча для наступної гри. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A — два м'ячі, що вийняли із ящика, ще не були в користуванні; 2) B — два м'ячі вже були в користуванні.

Відповідь. $P\left(A\right) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} + \frac{C_{12}^1 \, C_8^1}{C_{20}^2} \frac{C_{11}^2}{C_{20}^2} + \frac{C_8^2 \, C_{12}^2}{C_{20}^2 \, C_{20}^2}$;

$$P\left(B\right) = \frac{C_{12}^2 \, C_8^2}{C_{20}^2 \, C_{20}^2} + \frac{C_{12}^1 \, C_8^1 \, C_7^2}{C_{20}^2 \, C_{20}^2} + \frac{C_8^2 \, C_6^2}{C_{20}^2 \, C_{20}^2}.$$

17. У першому ящику міститься 6 стандартних і 5 бракованих деталей. Із першого ящика навмання беруть чотири деталі й перекладають у другий, в якому до цього містилося дві стандартні й одна бракована деталі. Яка ймовірність після цього із другого ящика вийняти одну стандартну деталь?

Відповідь. $p = \frac{C_6^4}{C_{11}^4} \frac{6}{7} + \frac{C_6^3 C_5^1}{C_{11}^4} \frac{5}{7} + \frac{C_6^2 C_5^2}{C_{11}^4} \frac{4}{7} + \frac{C_6^1 C_5^3}{C_{11}^4} \frac{3}{7} + \frac{C_6^0 C_5^4}{C_{11}^4} \frac{2}{7}.$

18. Відомі значення: $P(A) = 0{,}3$, $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}6$, $P(A / B) = 0{,}32$.

Знайти: $P(A \cap B)$, $P(A \cap B)$, $P(B / A)$, $P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

Відповідь. $P(A \cap B) = 0{,}128$; $P(A \cup B) = 0{,}572$; $P\left(B / A\right) = \frac{32}{75}$;

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}172.$$

19. В урні міститься 4 зелених і 8 червоних кульок. Кульки із урни виймають по одній без повернення. Таким способом було вийнято три кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A — перша

кулька буде червоною, друга — зеленою, третя — червоною; 2) B — перша кулька буде зеленою, друга — червоною, третя — зеленою.

Відповідь. 1) $P(A)=\frac{8}{12}\ \frac{4}{11}\ \frac{7}{10}=\frac{56}{165}$; 2) $P(B)=\frac{4}{12}\ \frac{8}{11}\ \frac{3}{10}=\frac{4}{55}$.

20. Електролампочки з'єднані за схемою, зображеною на рис. 11.

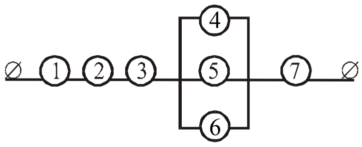

Рис. 11

Імовірність того, що електролампочка не вийде з ладу при ввімкненні схеми в електричну мережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що в електричній схемі, наведеної на рис. 11, при ввімкненні її в електричну мережу потече електричний струм?

Відповідь. $P = p^4 (1 - q^4) = 0{,}65633436$.

21. Електролампочки з'єднані за схемою, зображеною на рис. 12.

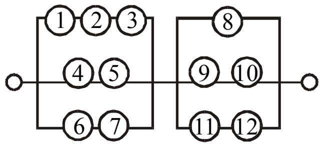

Рис. 12

Імовірність того, що лампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що в схемі, якщо вона ввімкнено в електромережу, потече електричний струм?

Відповідь. $P = (1 - (1 - p_1 p_2 p_3)\,(1 - p_4 p_5)\,(1 - p_6 p_7)) \times$
$\times\, ((1 - q_8\,(1 - p_9 p_{10})\,(1 - p_{11} p_{12}))$.

22. Маємо три урни. У першій міститься 8 білих і 2 чорних кульки, у другій — 5 білих і 5 чорних, у третій — 2 білих і 8 чорних. Навмання підкидають гральний кубик. Якщо випаде на грані число кратне 2, то навмання беруть дві кульки з першої урни, якщо випаде число кратне 5 — дві кульки з другої урни, і якщо випаде число, яке не буде кратним ні 2, ні 3 — дві кульки з третьої урни. Знайти ймовірність появи двох білих кульок у такому експерименті.

Відповідь. $\mathrm{p}=\frac{3}{6}\ \frac{C_8^2}{C_{10}^2}+\frac{2}{6}\ \frac{C_5^2}{C_{10}^2}+\frac{2}{6}\ \frac{C_2^2}{C_{10}^2}$.

23. Прилад складається із двох вузлів № 1, і № 2, що дублюють один одного, і може працювати у двох режимах: сприятливому і несприятливому. У сприятливому режимі надійність кожного із узлів $q_1 = 0,8$, а в неспрятливому $q_2 = 0,5$. Імовірність того, що прилад працюватиме в сприятливому режимі $P_1 = 0,6$, а в несприятливому режимі $1 - P_1$. Знайти надійність приладу R.

Відповідь. $R = P_1 (1 - q_1^2) + (1 - P_1)(1 - q_2^2)$.

24. Деталь може надійти для обробки на перший верстат із імовірністю 0,2, на другий верстат — із імовірністю 0,3 і на третій — із імовірностю 0,5. При обробці деталі на першому верстаті ймовірність допустити брак дорівнює 0,01, на другому і третьому верстатах ця ймовірність відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Оброблені деталі вміщують в одну шухляду. Навмання взята звідти деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її обробляв перший верстат?

Відповідь. $p = \dfrac{20}{57}$.

25. Клапани, виготовлені цехом заводу, перевіряють три контролери. Імовірність того, що клапан потрапить на перевірку до першого контролера дорівнює 0,3, до другого — 0,5 і до третього — 0,2. Імовірність того, що бракована деталь буде виявлена для першого, другого і третього контролерів відповідно дорівнює 0,95, 0,9, 0,85. Під час повторної перевірки відбракованої деталі вона виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що цю деталь перевіряв третій контролер?

Відповідь. $p = \dfrac{34}{181}$.

26. Прилад складається із двох вузлів, що працюють незалежно один від одного. Робота кожного вузла необхідна для роботи приладу в цілому. Надійність (імовірність безвідказної роботи протягом часу t) першого вузла $P_1 = 0,9$; другого $P_2 = 0,8$. Прилад випробовувався протягом часу t, і при цьому один з вузлів вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що відказав у роботі лише перший вузол, а другий був справним.

Відповідь. $p = \dfrac{P_2 q_1}{p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_1 q_2} = \dfrac{0,8 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2} = \dfrac{8}{13}$.

27. Відомо, що $A \cap B \neq \varnothing$. Довести, що

$$p\left(B \,/\, A\right) \geq 1 - \frac{p(\overline{B})}{p(A)}.$$

28. В урні міститься 3 червоних, 1 синя і 2 зелених кульок. Із урни кульки виймають по одній без повернення. Кульки виймають до першої появи червоної. Обчислити ймовірність цієї події.

Відповідь.

$$p=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\ \frac{3}{5}+\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{4}+\frac{2}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{3}{4}+\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{4}\ 1+\frac{2}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ 1 .$$

29. На вхід радіолокаційного пристрою із імовірністю $P = 0{,}9$ надходить корисний сигнал із завадами, і з імовірністю $1 - P = 0{,}1$ — самі лише завади. Коли надходить корисний сигнал із завадами, то пристрій реєструє цей сигнал із імовірністю $P_1 = 0{,}8$, якщо надходять лише завади, то із імовірністю $P_2 = 0{,}9$. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність якогось сигналу. Яка ймовірність того, що це корисний сигнал?

Відповідь. $p = \dfrac{pP_1}{Pp_1 + p_2q} = \dfrac{8}{9}$.

30. Пасажир для придбання квитка може звернутись до однієї з чотирьох кас. Відповідні ймовірності дорівнюють $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}1$. Імовірність того, що до моменту появи пасажира в касі буде квиток, дорівнює відповідно $P_1 = 0{,}6$, $P_2 = 0{,}3$, $P_3 = 0{,}8$, $P_4 = 0{,}5$. Пасажир звернувся до однієї із кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав у першій касі?

Відповідь. $p = \dfrac{p_1P_1}{p_1P_1 + p_2P_2 + p_3P_3 + p_4P_4} = \dfrac{6}{29}$.

31. Для виготовлення деталі необхідно провести чотири незалежні технологічні операції. Імовірність допустити брак при виконанні першої технологічної операції $q_1 = 0{,}1$, і для другої, третьої і четвертої ці ймовірності дорівнюють відповідно $q_2 = 0{,}05$, $q_3 = 0{,}15$, $q_4 = 0{,}2$. Яка ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться стандартною?

Відповідь. $p = p_1\,p_2\,p_3\,p_4 = 0{,}5814$.

32. Маємо k радіолокаційних станцій, кожна із них за один оберт антени може виявити літаючий об'єкт у повітрі із імовірністю P (незалежно від інших обертів антени й інших станцій). За час t кожна станція здійснить m обертів антени. Знайти ймовірності таких випадкових подій:

1) A — літаючий об'єкт буде виявлено хоча б один раз;

2) B — об'єкт буде виявлено кожною станцією.

Відповідь. $P(A) = 1 - q^{km}$; $P\,(B) = \left[1 - q^m\right]^k$.

33. Імовірність появи випадкової події в кожному з незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p. Скільки необхідно провести експериментів, щоб імовірність появи випадкової події хоча б один раз дорівнювала $P(c)$?

Відповідь. $n = \dfrac{\ln(1 - p(c))}{\ln(1 - p)}$.

34. Імовірність відказу в роботі кожного приладу при випробовуванні дорівнює 0,3. Скільки таких приладів необхідно взяти, щоб із імовірністю 0,99 дістати хоча б один відказ у роботі приладу?

Відповідь. $n \geq 13$.

35. Троє робітників виготовляють однотипні деталі. Причому за зміну перший робітник виготовив у 1,5 раза більше, ніж другий, а другий в 1,8 раза менше, ніж третій. У середньому брак становить для першого робітника 4%, для другого і третього — 1 і 8%. Виготовлені деталі розміщують в одному ящику. Навмання взята одна деталь із ящика виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовив другий робітник?

Відповідь. $p = \frac{5}{107}$.

36. Чотири робітники виготовляють однотипні вироби. При цьому продуктивність праці цих робітників задовольняє таке відношення: 2 : 1,5 : 4 : 2,5. Відомо, що частка браку, % для першого, другого, третього та четвертого робітників дорівнює відповідно 1,5, 2,8, 2, 4,5. Після робочої зміни всі виготовлені робітниками вироби вміщують в один бункер. Навмання взятий виріб із бункера виявився стандартним. Яка ймовірність, що його виготував перший або третій робітник?

Відповідь. $p = \frac{5910}{1508}$.

37. При вмиканні запалення мотор автомашини починає працювати із імовірностю $P = 0{,}9$. Знайти ймовірності таких випадкових подій: 1) A — мотор почне працювати при другому вмиканні запалення; 2) для роботи мотора необхідно ввімкнути мотор не більше двох раз.

Відповідь. $P(A) = q\,p = 0{,}09$; $P(B) = 1 - q^2 = 0{,}99$.

38. В урні чотири білі й три чорні кульки. Два гравці почергово виймають із урни по кульці, не повертаючи їх до урни. Виграє той гравець, який раніше витягне білу кульку. Знайти ймовірність того, що виграє перший гравець.

Відповідь. $\mathrm{p} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\ \frac{2}{6}\ \frac{1}{5}\ 1$.

39. Маємо три урни. У першій міститься 6 білих і 4 чорних кульки, у другій — 8 білих і 2 чорних і в третій — 1 біла й 1 чорна. Із першої урни навмання беруть 3 кульки, а із другої дві і перекладають у третю урну. Яка ймовірність після цього вийняти із третьої урни одну білу кульку?

Відповідь.

$$p=\frac{C_6^3C_8^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{6}{7}+\frac{C_6^3C_8^1C_2^1}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{5}{7}+\frac{C_6^3C_2^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{4}{7}+\frac{C_6^2C_4^1C_8^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{5}{7}+$$

$$+\frac{C_6^2C_4^1C_8^1C_2^1}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{4}{7}+\frac{C_6^2C_4^1C_2^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{3}{7}+\frac{C_6^1C_7^2C_8^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{4}{7}+\frac{C_6^1C_4^2C_2^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{2}{7}+$$

$$+\frac{C_4^3C_8^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{3}{7}+\frac{C_4^3C_8^1C_2^1}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{2}{7}+\frac{C_4^3C_2^2}{C_{10}^3C_{10}^2}\ \frac{1}{7}.$$

40. Завод виготовляє вироби, кожний із яких з імовірністю $p = 0{,}01$ має дефект. Вироби можуть потрапити на перевірку першому або другому контролерові. Імовірність того, що перший контролер виявить дефект у виробі, дорівнює $p_1 = 0{,}85$, для другого контролера ця ймовірність $p_2 = 0{,}95$. Якщо виріб не був забракований контролерами, то він надходить до ВТК заводу. Дефект, якщо він існує, може бути виявлений з імовірністю $p_0 = 0{,}99$. Яка ймовірність того, що після всієї процедури виріб було забраковано: 1) першим контролером; 2) ВТК?

Відповідь. 1) $\dfrac{p_1}{2p_0+(p_1+p_2)\,q_0}=\dfrac{0{,}85}{2\cdot 0{,}99+(0{,}85+0{,}95)\ 0{,}01}=\dfrac{850}{1999}$;

2) $\dfrac{p_0(2-(p_1+p_2)}{2p_o+(p_1+p_2)\,q_0}=\dfrac{99}{1999}$.

41. В академічній групі 25 студентів, які складають екзамен з математики, із них 5 підготовлені відмінно, 10 — добре, 9 — задовільно і 6 — незадовільно. В екзаменаційних тестах міститься 10 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 10 запитань, добре підготовлений — на 7 запитань, задовільно підготовлений — на 5 запитань і незадовільно підготовлений — на 3 запитання. Навмання викликаний студент відповів на всі три запитання. Знайти ймовірність того, що це був студент: 1) відмінно підготовлений; 2) незадовільно підготовлений.

Відповідь. 1) $\dfrac{\frac{5}{25}\ 1}{\frac{5}{25}\ 1+\frac{10}{25}\ \frac{7}{10}\ \frac{6}{9}\ \frac{5}{8}+\frac{9}{25}\ \frac{5}{10}\ \frac{4}{9}\ \frac{3}{8}+\frac{6}{25}\ \frac{3}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{1}{8}}$;

2) $\dfrac{\frac{6}{25}\ \frac{3}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{1}{8}}{\frac{5}{25}\ 1+\frac{10}{25}\ \frac{7}{10}\ \frac{6}{8}\ \frac{5}{8}+\frac{9}{25}\ \frac{5}{10}\ \frac{4}{9}\ \frac{3}{8}+\frac{6}{25}\ \frac{3}{10}\ \frac{2}{9}\ \frac{1}{8}}$.

42. У мікроавтобусі їде 8 пасажирів. На черговій зупинці кожний із них може вийти з автобуса із імовірностю p = 0,4; крім цього, в автобус із імовірністю p_0 = 0,6 не ввійде ні один новий пасажир, і з імовірністю $1 - p_0 = 0{,}4$ один пасажир увійде. Знайти ймовірність того, що коли автобус знову почне рухатись до наступної зупинки, у ньому буде 8 пасажирів.

Відповідь. $p = p_0\,(1 - p)^8 + (1 - p_0)\; n\, p\, (1 - p)^7$.

43. Для підвищення надійності роботи приладу він дублюється чотирма такими самими приладами (рис. 13).

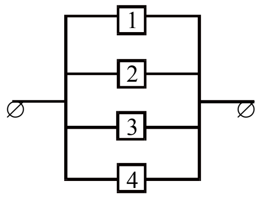

Рис. 13

Надійність кожного приладу дорівнює p = 0,9. Знайти надійність R цієї системи. Скільки необхідно взяти приладів, щоб збільшити надійність до заданого значення $R_1 = 0{,}99999$?

Відповідь. $R = 1 - q^4 = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

$$R_1 = 1 - q^n \to n \ge \frac{lq\,(1 - R)}{lq\; q} = \frac{lq\,0{,}00001}{lq\,0{,}1} = 5\,.$$

44. Оцінити надійність системи, елементи якої з’єднані за схемою рис. 14.

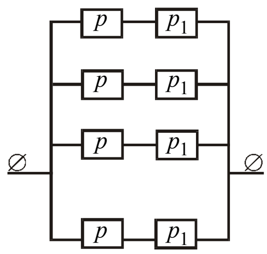

Рис. 14

Скільки необхідно взяти елементів, щоб надійність системи дорівнювала R_1?

Відповідь. $R = 1 - (1 - pp_1)^n\,,\; n = \dfrac{lq\,(1 - R_1)}{lq\,(1 - pp_1)}\,.$

ТЕМА 3. **ПОВТОРЮВАНІ НЕЗАЛЕЖНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ЗА СХЕМОЮ БЕРНУЛЛІ**

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p і q, то їх називають експериментами за схемою Бернуллі. У кожному експерименті випадкова подія з імовірністю p відбувається, а з імовірністю q — не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі — 2^n елементарних подій.

1. Формула Бернуллі

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} . \tag{29}$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} . \tag{30}$$

Оскільки

$$P_n(0 \le m \le n) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1 , \tag{31}$$

дістанемо

$$P(0 \le m \le m_i) = 1 - \sum_{m=m_i+1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} ; \tag{32}$$

$$P(m_i \le m \le n) = 1 - \sum_{m=0}^{m_i-1} C_n^m p^m q^{n-m} . \tag{33}$$

Приклад 1. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9.
Обчислити ймовірність того, що з п'яти електролампочок, увімкнених у електромережу за схемою, наведеною на рис. 14, не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

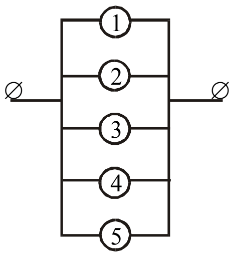

Рис. 14

Розв'язання. За умовою задачі маємо: p = 0,9; q = 0,1; n = 5; m = 2. Згідно з (29), (32), (33) дістанемо:

1) $P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \dfrac{5!}{2!\ 3!}(0{,}9)^2\ (0{,}1)^3 = 10 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}001 = 0{,}0081$;

2) $P_5\ (0 \le m \le 2) = \sum\limits_{m=0}^{2} C_5^m p^m q^{5-m} = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p\ q^4 + C_5^2 p^2 q^3 =$

$= q^5 + 5p\ q^4 + 10p^2\ q^3 = (0{,}1)^5 + 5\ 0{,}9\ (0{,}1)^4 + 10\ (0{,}9)^2\ (0{,}1)^3 =$

$= 0{,}00001 + 5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}0001 + 10 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}001 =$

$= 0{,}00001 + 0{,}00045 + 0{,}0081 = 0{,}00856$;

3) $P_5\ (2 \le m \le 5) = \sum\limits_{m=2}^{5} C_5^m p^m q^{5-m} = 1 - \sum\limits_{m=0}^{1} C_5^m p^m q^{5-m} =$

$= 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p\ q^4 = 1 - (0{,}00001 + 0{,}00045) = 1 - 0{,}00046 = 0{,}99954$.

Приклад 2. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Імовірність того, що протягом години верстат-автомат потребує уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за годину уваги робітника потребують: 1) три верстати; 2) від двох до п'яти верстатів; 3) принаймні один.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: p = 0,6; q = 0,4; n = 6; m = 3; $2 \le m \le 5$; $1 \le m \le 6$.

Згідно з (29), (30), (33), дістаємо:

1) $P_6\ (3) = C_6^3 p^3 q^3 = \dfrac{6!}{3!\ 3!}(0{,}6)^3 (0{,}4)^3 = 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 = 0{,}27648$;

2) $P_6\ (2 \le m \le 5) = \sum\limits_{m=2}^{5} C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^2 p^2 q^4 + C_6^3 p^3 q^3 + C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q =$

$= 15\ (0{,}6)^2\ (0{,}4)^4 + 20\ (0{,}6)^3\ (0{,}4)^3 + 15\ (0{,}6)^4\ (0{,}4)^2 + 6\ (0{,}6)^5\ 0{,}4 =$

$= 15 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}0256 + 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 + 15 \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 + 6 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}4 =$

$= 0{,}13824 + 0{,}27648 + 0{,}31104 + 0{,}186624 = 0{,}902384$;

3) $P_6(1 \le m \le 6) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 p^0 q^6 = 1 - q_6 = 1 - (0{,}4)^6 =$
$= 1 - 0{,}04096 = 0{,}995904$.

2. Найімовірніше число появи випадкової події (мода)

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ перевищує або в усякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Приклад. Імовірність появи випадкової події A в кожному з $n = 8$ незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p = 0{,}5$ ($q = 1 - p = 0{,}5$). Обчислити ймовірності подій для $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Значення обчислених імовірностей наведено в таблиці:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_8(m) = \frac{C_8^m}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Із таблиці бачимо, що при $m = 4$ імовірність набуває найбільшого значення, а саме $P_8(4) = \frac{70}{256}$. Отже, найімовірніше число появи події є $m_0 = 4$.

Зауважимо, що для визначення найімовірнішого числа появи події немає потреби обчислювати ймовірності для різних можливих значень m $(0 \le m \le n)$.

Справді, запишемо формули для обчислення ймовірностей при значеннях $m = m_0$; $m = m_0 - 1$; $m = m_0 + 1$ і розглянемо їх відношення:

$$\frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0 - 1)} \ge 1 \to \frac{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}}{C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{nmo}}{\frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} P^{m_0-1} q^{n-m_0+1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\frac{p}{m_0}}{\frac{q}{n - m_0 + 1}} \ge 1 \to m_0 \le n\ p + p\ ; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0+1)} \ge 1 \to \frac{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}}{C_n^{m_0+1} \ p^{m_0+1} \ q^{n-m_0-1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\dfrac{q}{n-m_0}}{\dfrac{p}{m_0+1}} \ge 1 \to m_0 \ge n\ p - q\,. \qquad (б)$$

Об'єднавши нерівності (а) і (б), дістанемо:

$$n\ p - q \le m_0 \le n\ p + p\,. \qquad (34)$$

Число m_0 називають також *модою*.

> **Приклад 1.** У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 200$; $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$. Використовуючи подвійну нерівність (34), дістаємо:

$$n\ p - q \le m_0 \le n\ p + p \to$$

$$\to 200 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 200 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \to$$

$$\to 179{,}9 \le m_0 \le 180{,}9\,.$$

Отже, найімовірніше число виробів першого сорту серед 200 дорівнює 180.

> **Приклад 2.** Імовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 8$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}8$.

$$np - q \le m_0 \le np + p \to$$

$$\to 8 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le m_0 \le 8 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \to$$

$$\to 6{,}2 \le m_0 \le 7{,}2\,.$$

Отже, $m_0 = 7$; $P_8(7) = C_8^7\ p^7\ q = 8\,(0{,}8)^7\ 0{,}2 = 1{,}6\,(0{,}8)^7 = 0{,}524288$.

Доходимо висновку: найімовірніша кількість студентів, які складуть екзамен, $m_0 = 7$. Відповідна ймовірність дорівнює 0,524288.

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m пов'язане з певними труднощами. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули, що випливають з локальної та інтегральної теорем Муавра—Лапласа.

3. Локальна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\,(0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m раз, подається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\,, \tag{35}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гаусса*. Функція Гаусса протабульована, і її значення наведено в дод. 1, де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}\,. \tag{36}$$

Тут x є рівномірно обмеженою величиною відносно n і m.

! **Доведення.** Із (36) випливає, що

$$m = np + x\sqrt{npq}\,; \tag{37}$$

$$n - m = np - x\sqrt{npq}\,. \tag{38}$$

Очевидно, що при $n \to \infty$ вирази (37), (38) прямують до нескінченності.

Із (37), (38) маємо:

$$\frac{m}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\,; \tag{39}$$

$$\frac{n-m}{nq} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\,. \tag{40}$$

Із (39), (40) випливає, що за досить великих значень n

$$m \approx np, \qquad n - m \approx nq. \tag{41}$$

Для доведення теореми скористаємося формулою Стірлінга:

$$K! \approx \sqrt{2\pi\,k}\;k^k\,e^{-k}\,. \tag{42}$$

Використовуючи (42) для формули Бернуллі, дістаємо:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,p^m q^{n-m} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\;n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m e^{-m}\sqrt{2\pi(n-m)}\;(n-m)^{n-m}\,e^{-n+m}}\,p^m q^{m-m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^{m} \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \left(\frac{m}{np}\right)^{-m} \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{-(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \left(1 + x\sqrt{\frac{2}{np}}\right)^{-m} \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-(n-m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\, A,$$

де $A = \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-m} \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-(n-m)}.$ (43)

Коли $n \to \infty$, маємо:

$$\sqrt{\frac{n}{m\ (n-m)}} = \sqrt{\frac{n}{np\ nq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Для дослідження поводження A при $n \to \infty$ прологарифмуємо (43)

$$\ln A = -m\ \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-m)\ \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \qquad (44)$$

Розклавши логарифмічні функції у виразі (44) у ряд Тейлора і обмежившись двома членами ряду, скористаємося (37) і (38):

$$\ln A = -(np + x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np}\right) - \left(nq - x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq}\right) =$$

$$= -x\sqrt{npq} + \frac{x^2}{2}q - x^2 q + \frac{1}{2}\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}x^3 + x\sqrt{npq} + \frac{x^2}{2}p - x^2 p - \frac{1}{2}\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}x^3 =$$

$$= \frac{x^2}{2}(p+q) - x^2(p+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}x^3 - \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}x^3\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}} - \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)x^3.$$

При $n \to \infty$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \ln A = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}} - \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)x^3\right) = -\frac{x^2}{2} \to A = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

а для великих, хоча й обмежених значень n

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

що й потрібно було довести.

Властивості функції Гаусса:

1) $\varphi(x)$ визначена на всій осі абсцис; $\varphi(x) > 0$;

2) $\varphi(x)$ є функцією парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$;

4) $\varphi'(x) = -x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; $\varphi'(0) = 0$;

$\varphi'(x)\big|_{x<0} > 0$; $\varphi'(x)\big|_{x>0} < 0$; отже, $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ — максимум функції Гаусса;

5) $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ $\varphi''(x)\big|_{x=\pm 1} = 0$.

Таким чином, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ будуть точками перегину. При цьому $\varphi''(x)\big|_{x<-1} > 0$; $\varphi''(x)\big|_{-1<x<1} < 0$; $\varphi''(x)\big|_{x>1} > 0$.

Графік функції Гаусса зображено на рис. 15.

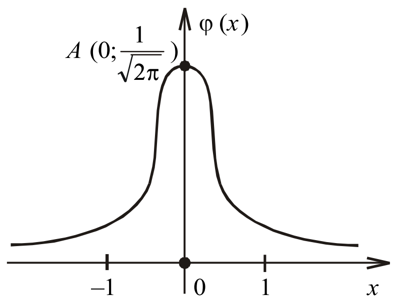

Рис. 15

Зауважимо, що розв’язуючи задачі, додержують такого правила:

$$\varphi(x)\big|_{x\ge 4} \approx 0;\ \varphi(x)\big|_{x\le -4} \approx 0.$$

Отже, практично використовуються значення функції Гаусса для $x \in [-4;\ 4]$, що показано на графіку функції Гаусса (рис. 16).

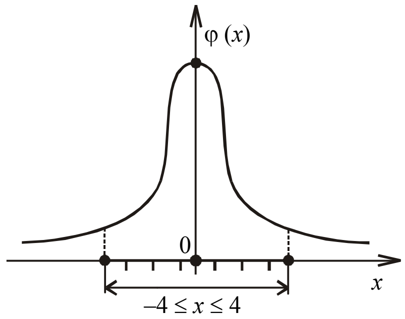

Рис. 16

Приклад 1. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:
1) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.;
2) 300 шт.;
3) 320 шт.

Розв'язання. За умовою задачі маємо:
$n = 400$; $p = 0{,}75$; $q = 0{,}25$; $m = 290$; 300; 320.

1) $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{75} \approx 8{,}7$; $np = 400 \cdot 0{,}75 = 300$;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{290 - 300}{8{,}7} = -1{,}15;$$

$$P_{400}(290) \approx \frac{\varphi(-1{,}15)}{8{,}7} = \frac{\varphi(1{,}15)}{8{,}7} = \frac{0{,}2059}{8{,}7} \approx 0{,}0237;$$

2) $$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 300}{8{,}7} = 0;$$

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(0)}{8{,}7} = \frac{0{,}3989}{8{,}7} \approx 0{,}046;$$

3) $$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{320 - 300}{8{,}7} = \frac{20}{8{,}7} \approx 2{,}3;$$

$$P_{400}(320) \approx \frac{\varphi(2{,}3)}{8{,}7} \approx \frac{0{,}0283}{8{,}7} \approx 0{,}0033.$$

Приклад 2. Імовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

Розв'язання. За умовою задачі:

$$n = 700\,,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1;$$

$$np - q \le m_0 \le np + p \to 700 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 700 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \to$$

$$\to 729{,}9 \le m_0 \le 630{,}9 \to m_0 = 630.$$

Отже, шукане число $m_0 = 630$.
Відповідна ймовірність буде така:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{63} \approx 7{,}94\,;$$

$$np = 700 \cdot 0{,}9 = 630\,;$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{630 - 630}{7{,}94} = 0\,;$$

$$P_{700}(630) \approx \frac{\varphi(0)}{7{,}94} = \frac{0{,}3989}{7{,}94} \approx 0{,}05\,.$$

4. Інтегральна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\,(0 < p < 1)$, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_i до m_j раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_n \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i)\,, \tag{45}$$

де $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}},\quad x_i = \dfrac{m_i - mp}{\sqrt{npq}}$,

а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}$ є функцією Лапласа, значення якої наведено в дод. 2.

! **Доведення.** Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія відбудеться від m_i до m_j раз, обчислюється за формулою

$$P_n(m_j \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} P_n(m)\,.$$

Згідно з (35) для досить великого числа спроб n маємо наближену рівність:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \sum_{x_m = x_i}^{x_i} \varphi(x_m)\,\Delta x_m,$$

де

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}};$$

$$\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}.$$

Отже, можна записати:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x_m = x_i}^{x_j} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}. \qquad (46)$$

Тут (46) є інтегральною сумою, а тому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_i \le m \le m_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \sum_{x_m = x_i}^{x_j} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_i}^{x_j} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_i}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_j} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \Phi(x_j) - \Phi(x_i).$$

Для великих, але обмежених значень n дістанемо:

$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i)$, що й потрібно було довести.

Властивості функції Лапласа

1. $\Phi(x)$ визначена на всій осі абсцис.
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отже, $\Phi(x)$ є непарною функцією.
3. $\Phi(0) = 0$.
4. $\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0{,}5$, оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона.
5. $\Phi(-\Phi(-\infty) = -0{,}5$, як непарна функція.
6. $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, отже, $\Phi(x)$ є функцією неспадною.
7. $\Phi''(0) = 0$; $\Phi''(x)\big|_{x<0} > 0$; $\Phi''(x)\big|_{x<0} < 0$.

Таким чином, $x = 0$ є точкою перегину.

Графік функції $\Phi(x)$ зображено на рис. 17

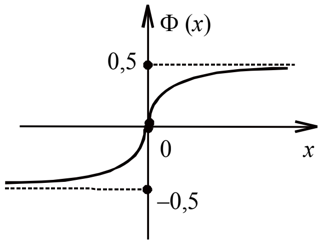

Рис. 17

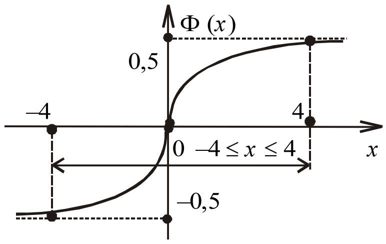

Рис. 18

Розв'язуючи задачі, додержують такого правила:

$\Phi(x)\big|_{x\geq 4} \approx 0{,}5$, $\qquad \Phi(x)\big|_{x\leq -4} \approx 0{,}5$.

Отже, практично функція Лапласа застосовується для значень $x \in [-4; 4]$, що ілюструє рис. 18.

Приклад 1. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Імовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде: 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

Розв'язання. За умовою задачі:

$n = 800$; $p = 0{,}95$; $q = 0{,}05$; $720 \leq m \leq 780$; $740 \leq m \leq 780$;

$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} = \sqrt{38} \approx 6{,}2, \quad np = 800 \cdot 0{,}95 = 760$.

1) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{780-760}{6{,}2} = \dfrac{20}{6{,}2} \approx 3{,}23$;

$x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{720-760}{6{,}2} = -\dfrac{40}{6{,}2} \approx -6{,}5$;

$P_{800}(720 \leq m \leq 780) \approx \Phi(3{,}23) - \Phi(-6{,}5) = \Phi(3{,}23) + \Phi(6{,}5) =$

$= 0{,}49931 + 0{,}5 = 0{,}99931;$

2) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{790-760}{6{,}2} \approx 4{,}84$;

$x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{740-760}{6{,}2} = -\dfrac{20}{6{,}2} \approx -3{,}23$;

$P_{800} = (740 \leq m \leq 790) \approx \Phi(4{,}84) - \Phi(-3{,}23) = \Phi(4{,}84) + \Phi(3{,}23) =$

$= 0{,}5 + 0{,}499 \cdot 31 = 0{,}99931.$

Приклад 2. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Імовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить:
1) не більш як 380 шт.;
2) не менш як 390 шт.

Розв'язання. За умовою задачі:
$n = 500$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $0 \le m \le 380$; $390 \le m \le 500$;
$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9,\ \ np = 500 \cdot 0{,}8 = 400$.

1) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{3809 - 400}{8{,}9} = -\dfrac{380 - 400}{8{,}9} = -\dfrac{20}{8{,}9} \approx -2{,}25$;

$x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0 - 400}{8{,}9} \approx -45$;

$P_{500} = (0 \le m \le 380) \approx \Phi(-2{,}25) - \Phi(-45) = \Phi(4{,}5) - \Phi(2{,}25) =$
$= 0{,}5 - 0{,}4881 = 0{,}0119$.

2) $x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{390 - 400}{8{,}9} = -\dfrac{10}{8{,}9} \approx -1{,}12$;

$x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{500 - 400}{8{,}9} = \dfrac{100}{8{,}9} \approx 11{,}23$;

$P_{500}(390 \le m \le 400) \approx \Phi(11{,}23) - \Phi(-1; 1{,}12) = \Phi(11{,}23) + \Phi(1{,}12) =$
$= 0{,}5 + 0{,}3686 = 0{,}8686$.

5. Використання інтегральної теореми

За допомогою (45) можна оцінити близькість відносної частоти $W(A)$ до ймовірності p випадкової події A. Нехай p — імовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі й $W(A)$ — відносна частота появи цієї події при n експериментах.

Необхідно оцінити ймовірність події $|W(A) - p| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ і є малою величиною). Якщо n набуває великих значень, то можна за формулою (45) дістати:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) =$$

$$= P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon < \frac{m - np}{n} < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{hq}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{m}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int\limits_{0}^{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$= \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{nq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$

$$= 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отже,

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (46а)$$

Приклад 1. Імовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту, який має на меті виявити надійність виробу в роботі, дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Чому дорівнює ймовірність такої події: абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу із ладу виробів від імовірності $p = 0,2$ становить $\varepsilon = 0,01$?

Розв'язання. За умовою задачі: $n = 400$; $p = 0,2$; $q = 0,8$; $\varepsilon = 0,01$. Підставивши ці значення в (46), дістанемо:

$$P(|W(A) - 0,2| < 0,01) \approx 2\,\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{400}{0,2 \cdot 0,8}}\right) = 2\,\Phi(0,5) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383.$$

Приклад 2. У разі автоматичного виготовлення втулок брак становить у середньому 10%. Скільки втулок має взяти контролер, аби ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи стандартної втулки $W(A)$ (A — випадкова подія, що полягає в появі стандартної втулки) від імовірності p виготовлення такої втулки не перевищує $\varepsilon = 0,001$, дорівнювала 0,999:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) \approx 0,999\,.$$

Розв'язання. За умовою задачі: $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$, $p = 1 - q = 1 - 0,1 = 0,9$;

$$P(|W(A) - 0,9| < 0,001) \approx 0,999\,.$$

Далі маємо:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\,\Phi(x) = 0,999,$$

де $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \to n = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 pq$.

Оскільки $2\Phi(x) = 0{,}999$, то $\Phi(x) = 0{,}4995 \to x \approx 3{,}4$ (див. дод. 2).

Отже, $n = \left(\frac{3{,}4}{0{,}001}\right)^2 0{,}9 \cdot 0{,}1 = (3400)^2\, 0{,}09 = 1040400$.

Тобто контролер має перевірити 1 040 400 втулок.

Приклад 3. Імовірність появи випадкової події в кожному з 900 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,75. Яким має бути значення $\varepsilon > 0$, щоб $P(|W(A) - p| < \varepsilon) =$ $= 0{,}99$?

Розв'язання. За умовою задачі: $n = 900$; $p = 0{,}75$; $q = 0{,}25$; $2\Phi(x) = 0{,}99$.

Далі маємо $\Phi(x) = 0{,}495$; $x = 2{,}74$ і

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \to \quad \varepsilon = x\bigg/\sqrt{\frac{n}{pq}} = \frac{2{,}74}{\sqrt{\frac{900}{0{,}75\cdot 0{,}25}}} = \frac{2{,}74\sqrt{0{,}75\cdot 0{,}25}}{30} \approx 0{,}04.$$

Отже, умову задачі задовольняє значення $\varepsilon \approx 0{,}04$.

6. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність асимптотичних формул для великих значень n — числа повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі — знижується з наближенням p до нуля. Тому при $n \to \infty$, $p \to 0$ за умови $np = a = \text{const}$ імовірність появи випадкової події m раз $(0 \le m \le n)$ обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{47}$$

яка називається *формулою Пуассона*.

! **Доведення.** Оскільки $a = np$, то $p = \frac{a}{n}$, $\quad q = 1 - p = 1 - \frac{a}{n}$.

Запишемо формулу Бернуллі у такому вигляді:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{A_n^m}{P_m}\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-m+1)}{n^m} \quad \left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \; \frac{n}{n} \; \frac{n-1}{n} \; \frac{n-2}{n} \; ... \; \frac{n-m+1}{n} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) ... \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} .$$

Коли $n \to \infty$, дістаємо:

$$\lim_{n\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^m}{m!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) ... \left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) ... \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a} .$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) ... \left(1-\frac{m-1}{n}\right) = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} = 1 .$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} ,$$

а для великих, але обмежених значень *n* маємо:

$P_n(m) \approx \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$, що й потрібно було довести.

Із (47) випливає:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} P_n(m) = \sum_{m=m_s}^{m_j} \frac{a^m}{m!} e^{-a} ; \qquad (48)$$

$$P_n(0 \le m \le n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \; e^{a} = 1 .$$

І справді, це підтверджується ще й тим, що події $0 \le m \le n$ утворюють повну групу.

Функція $P_n(m)$ визначається за таблицею, наведеною в дод. 3, за заданим *m* і обчисленим значенням $a = np$.

Приклад 1. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю $p = 0{,}002$. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи;
2) від трьох до шести.

Розв'язання. За умовою задачі маємо n = 1000; p = 0,002; m = 3; $3 \le m \le 6$. Оскільки n велике, а p мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формули (47) і (48). Для цього обчислимо значення параметра $a = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$.

1) $P_{1000}(3) \approx 0{,}18044$.

2) $P_{1000}(3 \le m \le 6) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) + P_{1000}(6) =$
$= 0{,}180447 + 0{,}168031 + 0{,}100819 + 0{,}050409 + 0{,}021604 = 0{,}52131$.

Приклад 2. Імовірність того, що під час епідемії грипу мешканець міста захворіє на цю хворобу, становить у середньому 0,03%. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних 300 мешканців міста хворих на грип виявиться:
1) 5 осіб; 2) не більш як 3 особи.

Розв'язання. За умовою: p = 0,003; n = 300; m = 5; $0 \le m \le 3$.
Обчислюємо значення параметра $a = np = 300 \cdot 0{,}003 = 0{,}9$.

1) $P_{800}(5) \approx 0{,}002001$.

2) $P_{300}(0 \le m \le 3) = P_{300}(0) + P_{300}(1) + P_{300}(2) + P_{300}(3) =$
$= 0{,}40657 + 0{,}365913 + 0{,}164661 + 0{,}049398 = 0{,}996542$.

Теоретичні запитання до теми ?

1. Які експерименти називають експериментами за схемою Бернуллі?
2. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?
3. Що називають найімовірнішим числом (модою)?
4. Довести, що $np - q \le m_0 \le np + p$.
5. Чому дорівнює $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$?
6. Сформулювати локальну теорему Муавра—Лапласа.
7. Сформулювати інтегральну теорему Муавра—Лапласа.
8. Чому дорівнює $P(|W(A) - p| < \varepsilon)$?
9. Функція Гаусса та її властивості.
10. Функція Лапласа та її властивості.
11. За якої умови використовується формула Пуассона?
12. Чому дорівнює $\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$?

13. Записати формулу Пуассона для малоймовірних випадкових подій.
14. Асимптотичні формули для обчислення ймовірностей випадкових подій для n незалежних експериментів за схемою Бернуллі.
15. Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$?
16. Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x)$?
17. Чому дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$?
18. Застосовуючи формулу Стірлінга, записати, чому дорівнює $k!$.
19. Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x)$?
20. Довести, що $P\left(\left|W(A) - p\right| < \varepsilon\right) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.
21. Довести, що $P_n(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$.
22. Довести, що $P_n(m_i \le m \le m_J) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i)$.

Приклади до теми

1. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Імовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.
Відповідь. 0,84208.

2. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Імовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому складає 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть: 1) три саджанці; 2) не менш як три. Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.
Відповідь. 1) 0,0416745; 2) 0,0693983; $m_0 = 5$; $P_7(5) = 0,3176523$.

3. Імовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених деталей робітником хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа.
Відповідь. 0,9997559; $m_0 = 5$; $P_6(5) \approx 0,3559569$.

4. Робітник обслуговує 10 верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат потребує уваги робітника протягом однієї години в середньому складає 0,6. Знайти ймовірність того, що за 1 годину уваги робітника потребують: 1) 4 верстати; 2) від 4 до 6 верстатів (ураховуючи межі). Знайти найімовірніше число m_0 верстатів, які потребують уваги робітника за 1 год і обчислити ймовірність цього числа.

Відповідь. 1) 0,1114767; 2) 0,5619574; $m_0 = 6$; $P_{10}(6) \approx 0{,}2508226$.

5. На автобазі є 12 пасажирських автобусів. Імовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус, у середньому дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби на маршрутну лінію виїхало не менш як 9 автобусів.

Відповідь. 0,6871141.

6. У разі ввімкнення запалювання мотор автомобіля почне працювати з імовірністю 0,99. Яка ймовірність того, що: 1) мотор почне працювати при двох увімкненнях запалювання; 2) не більш як двох.

Відповідь. 1) 0,9801; 2) 0,9999.

7. По військовому кораблю здійснюють три постріли з ракетної батареї системи «земля—земля». Імовірність влучити в корабель дорівнює 0,95, а ймовірність того, що військовий корабель буде знешкоджений, дорівнює $1 - q^k$, де k — число влучень ракет у корабель. Обчислити ймовірність того, що корабель буде знешкоджений.

Відповідь. $P = C_3^3 p^3(1-q^3) + C_3^2 p^2 q(1-q^2) + C_3^1 pq^2(1-q) + C_3^0 q^3(1-q^0) =$ $= 0{,}9991799$.

8. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. Із партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед них телевізорів вищої якості буде: 1) 4; 2) не менш як 4.

Відповідь. 1) 0,0178821; 2) 0,8509384.

9. У партії однотипних деталей кількості стандартних і бракованих деталей відносяться, як 5 : 2. Навмання з партії беруть 8 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних виявиться 6? Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей серед семи навмання взятих і обчислити відповідну ймовірність.

Відповідь. $\frac{500000}{823543}$; $m_0 = 6$; $P_8(6) \approx \frac{500000}{823543}$.

10. У кожному із семи ящиків міститься по 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі. Навмання з кожного ящика беруть по одній деталі. Обчислити ймовірність того, що серед семи взятих деталей стандартних буде: 1) 3; 2) не менш як 3; 3) не більш як 3.

Відповідь. 1) 0,193536; 2) 0,9811584; 3) 0,096256.

11. Імовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює $\frac{3}{11}$. Навмання беруть 10 конденсаторів і вмикають паралельно в електричну мережу. Знайти найімовірніше число m_0 конденсаторів, які вийдуть із ладу, і обчислити відповідну ймовірність.

Відповідь. $m_0 = 2; \quad P_{10}(2) \approx 0{,}3019897$.

12. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб $m_0 = 65$?

Відповідь. $\frac{m_0 - p}{n} \le n \le \frac{m_0 + q}{p} n = 76$.

13. Імовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку: 1) 90 покупців; 2) від 100 до 180 покупців?

Відповідь. 1) 0,0443222, 2) 0,1335.

14. В яких межах має перебувати ймовірність появи випадкової події в одному експерименті, коли відомо, що в результаті проведення $n = 600$ незалежних експериментів за схемою Бернуллі $m_0 = 60$?

Відповідь. $\frac{m_0}{n+1} \le P \le \frac{m_0+1}{n+1} \to \frac{60}{601} \le P \le \frac{61}{601}$.

15. У партії однотипних деталей стандартні становить 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде: 1) 355; 2) від 355 до 300. Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей m_0 і обчислити відповідну ймовірність.

Відповідь. 1) $\approx 0{,}0001041$; 2) $\approx 0{,}000071$; $m_0 = 328$; $P_{400}(328) \approx 0{,}052$.

16. Імовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробувань 900 виробів із ладу вийдуть: 1) 30; 2) не більш як 30.

Відповідь. 1) 0,0044; 2) 0,0113.

17. Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів за схемою Бернуллі є величиною сталою і дорівнює $p = 0{,}8$. Скільки необхідно провести таких експериментів, щоб імовірність появи випадкової події $m \ge 900$ дорівнювала 0,99?

Відповідь. $n \approx 484416 \to \Phi\left(\frac{n - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{900 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0{,}99$.

18. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Імовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює

в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону: 1) 5 абонентів; 2) не більш як 5?

Відповідь. 1) 0,036089; 2) 0,983437.

19. Імовірність появи випадкової події в кожній зі 100 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота появи випадкової події при цих спробах міститься в межах [0,2; 0,4]?

Відповідь. 0,98.

20. Імовірність того, що виготовлена на заводі електролампочка при вмиканні її в електромережу перегорить через певний відтинок часу є величиною сталою і дорівнює 0,02. Скільки необхідно взяти таких електролампочок, щоб імовірність відхилення відносної частоти електролампочок, що перегорить, від імовірності 0,02, взяте по абсолютному значенню, не перевищувала величини 0,001, дорівнювала б 0,999.

Відповідь. $n \approx 226576$.

21. Імовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,999.

Відповідь. $0{,}804 < W(A) < 0{,}896$.

22. Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p. Яка ймовірність того, що при цьому виконуватиметься нерівність $n - 1{,}5\sqrt{npq} \leq m \leq np + {}$ $+ 1{,}5\sqrt{npq}$?

Відповідь. 0,8664.

23. Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) не більш як 3.

Відповідь. 1) 0,49398 2) 0,986642.

24. Частка діабетиків у певній місцевості становить у середньому 0,2%. Навмання було обстежено 4000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них діабетиків буде: 1) 4 особи; 2) від 3 до 6 осіб; 3) не більш як 4 особи.

Відповідь. 1) 0,133737; 2) 0,300548; 3) 0,154963.

25. Імовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність у результаті перевірки книжки на 1000 сторінок виявити помилку: 1) на 5 сторінках; 2) не більш як на 5 сторінках?

Відповідь. 1) 0,003066; 2) 0,999405.

26. У водойму випустили 100 помічених риб. Згодом із неї було виловлено 400 рибин, серед яких виявилося 5 мічених. Визначити з імовірністю 0,9 кількість рибин у цій водоймі.

Відповідь. $P(|W(A)-p|<\varepsilon)=2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)\rightarrow P\left(\left|\dfrac{5}{400}-\dfrac{100}{N}\right|<\varepsilon\right)\approx$

$$\approx 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{\frac{100}{N}\quad\frac{N-100}{N}}}\right)\approx 0{,}9\rightarrow -66\sqrt{N-100}<N-8000<66\sqrt{N-10}\rightarrow$$

$$\rightarrow P(3919\le N\le 16432)\approx 0{,}9\,.$$

27. Візуально спостерігати в заданому пункті штучний супутник Землі можна з імовірністю p = 0,1 (хмарність відсутня) щоразу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів має пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з імовірністю, не меншою за 0,9975, удалося здійснити принаймні 5 спостережень?

Відповідь. $P(m\ge 5)\approx\Phi\,(3\sqrt{n})+\Phi\left(\dfrac{n-50}{3\sqrt{n}}\right)\approx 0{,}9975\,;\quad n>144\,.$

ТЕМА 4. **НАЙПРОСТІШИЙ ПОТІК ПОДІЙ**

1. Означення потоку подій

Послідовність подій, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу, називається *потоком подій*.

Прикладами можуть бути потік викликів медичної швидкої допомоги, потік викликів на телефонну станцію, потік відказів у роботі певної системи і т. ін.

2. Найпростіший потік подій (пуассонівський)

Потік подій називається *найпростішим*, якщо для нього виконуються такі умови: стаціонарність, відсутність післядії і ординарність.

Потік подій називають *стаціонарним*, коли ймовірність того, що за проміжок часу ΔT відбудеться те чи інше число подій, залежить лише від довжини цього проміжку і не залежить від того, де міститься ΔT щодо початку відліку часу.

Якщо зазначена ймовірність не залежить від того, яке число подій відбулося до початку інтервалу ΔT, такий потік називають *потоком із відсутністю післядії*.

Потік подій називають *ординарним* у разі, коли за малий проміжок часу Δt імовірність того, що здійсниться одна подія, наближено пропорційна до довжини цього проміжку:

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + O(\Delta t) . \tag{49}$$

При цьому $P_1(0) = 0$, а ймовірність того, що за цей проміжок відбудеться $m > 1$ подій, така:

$$P_m(\Delta t) = O(\Delta t), \quad m > 1 ,$$

де

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0 . \tag{50}$$

Згідно із (49) маємо:

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t) , \tag{51}$$

зокрема $P_0(0) = 1$.

3. Формула Пуассона

Імовірність того, що за проміжок часу $t + \Delta t$ не відбудеться жодна подія, подається у вигляді:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) P_0(\Delta t) = P_0(t)\ (1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)) \to$$

$$\to P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - \lambda\ \Delta t\, P_0(t) + O(\Delta t) P_0(t) . \tag{52}$$

Імовірність того, що за цей самий проміжок часу здійсниться m подій, визначається так:

$$P_m(t + \Delta t) =$$

$$= P_m(t)\ P_0(\Delta t) + P_{m-1}(t) P_1(\Delta t) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)\, P_i(\Delta t) \to$$

$$\to P_m(t + \Delta t) = P_m(t)(1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)) +$$

$$+ P_{m-1}(t)(\lambda\, \Delta t + O(\Delta t)) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)\, P_i(\Delta t),$$

$$\text{якщо} \quad m > 1;$$

$$P_m(t+\Delta t) =$$
$$= P_m(t) - \lambda\ \Delta t P_m(t) + O(\Delta t) P_m(t) + \lambda\ \Delta t\ P_{m-1}(t) +$$
$$+ O(\Delta t)\ P_{m-1}(t) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)\, P_i(\Delta t) \to \tag{53}$$
$$\to P_m(t+\Delta t) = P_m(t) - \lambda\ \Delta t\ P_m(t) + \lambda\ \Delta t P_{m-1}(t) + O(\Delta t),$$

оскільки $O(\Delta t) P_m(t) + O(\Delta t)\, P_{m-1}(t) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)\ P_1(\Delta t) = O(\Delta t)$.

Перенісши $P_0(t)$ і $P_m(t)$ в рівняннях (52), (53) у ліву частину, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda \Delta t P_0(t) + O(\Delta t)\, P_0(t); \\ &P_m(t+\Delta t) - P_m(t) = -\lambda\ \Delta t P_m(t) + \lambda\ \Delta t P_{m-1}(t) + O(\Delta t). \end{aligned} \tag{54}$$

Поділимо ліву і праву частини системи рівнянь (54) на Δt і виконаємо граничний перехід при $\Delta t \to 0$. У результаті дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$P_0'(t) = -\lambda\ P_0(t);$$
$$P_m'(t) = -\lambda\ P_m(t) + \lambda\ P_{m-1}(t). \tag{55}$$

Для розв'язування системи (55) використаємо твірну функцію

$$A(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m(t) = P_0(t) + x P_1(t) + x^2 P_2(t) + \ldots + x^k P_k(t) + \ldots. \tag{56}$$

Розглянемо властивості функції $A(x,\ t)$. При $x = 1$ $A(1,\ t) = 1$.

При $x = 0$ $A(0,\ t) = p_0(t)$, $A(x, 0) = p_0(0) = 1$,

$$A^{(m)}(0,t) = m!; \quad P_m(t) \to P_m(t) = \frac{A^{(m)}(0,t)}{m!}. \tag{57}$$

Помножимо друге рівняння системи (55) на x^m і підсумуємо ліву та праву частини рівняння:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m'(t) = \lambda x \sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m(t) + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} x^m\ P_m(t).$$

або з урахуванням (56)

$$A'(x,t) = \lambda (x-1)\ A(x,t). \tag{58}$$

Розв'язавши диференціальне рівняння, дістанемо:

$$\frac{dA(x,\,t)}{dt} = \lambda(x-1)\,A(x,\,t) \to \frac{dA(x,\,t)}{A(x,\,t)} = \lambda(x-1)dt \to$$
$$\to \int_0^t \frac{dA(x,\,t)}{A(x,\,t)} = \lambda(x-1)\int_0^t dt \to$$
$$\to \ln A(x,\,t)\,|_0^t = \lambda(x-1)t\,|_0^t \to$$
$$\to \ln A(x,\,t) - \ln A(x,\,0) = \lambda(x-1)t \to$$
$$\to A(x,t) = e^{\lambda(x-1)t}\,, \tag{59}$$

оскільки $A(x,\,0) = p_0\,(0) = 1$.

Згідно з властивістю $A(x,\,t)$ маємо:

$$P_0(t) = A(0,t) = e^{-\lambda t}\,;$$

$$P_m(t) = \left.\frac{A^{(m)}(x,\,t)}{dt^m}\right|_{x=0} = \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}\,.$$

Отже, імовірність того, що за час t відбудеться m випадкових подій, які утворюють найпростіший потік, обчислюється за формулою

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \tag{60}$$

де λ — це інтенсивність найпростішого потоку, тобто: середнє число подій, які відбудуться за одиницю часу [с, хв, год].

Приклад. Автомобілі, що рухаються по шосе в одному напрямку, утворюють найпростіший потік із параметром $\lambda = 3c^{-1}$ (тобто, через умовну лінію, яка проведена перпендикулярно до шосе в певному місці, у середньому проїжджає 3 автомобілі за 1 с. Обчислити ймовірність того, що за 2 с через умовну лінію проїде: 1) 4 автомобілі; 2) не більш як 4.

Розв'язання. Із умови задачі: $\lambda = 3\left[\frac{1}{\text{сек.}}\right]$ $\lambda t = 3\left[\frac{1}{\text{сек.}}\right]$ $2\text{ сек.} = 6$.

За таблицею (дод. 3), коли $a = \lambda t = 6$ знаходять:

1) $P_4(2) \approx 0{,}133853$;

2) $P_{0\le m\le 4}(2) = P_0(2) + P_1`(2) + P_2(2) + P_3(2) + P_4(2) =$
$= 0{,}002479 + 0{,}014873 + 0{,}044618 + 0{,}089235 + 0{,}133853 = 0{,}285058$.

Теоретичні запитання до теми ?

1. Дати означення потоку подій.
2. Що називається найпростішим потоком подій?
3. Дати означення стаціонарності потоку.
4. Дати означення відсутності післядії для найпростішого потоку.
5. Дати означення інтенсивності потоку.
6. Формула Пуассона для найпростішого потоку.
7. Що називається твірною функцією?
8. Властивості твірної функції.
9. Чому дорівнює $P_1(\Delta t)$?
10. Чому дорівнює $P_0(\Delta t)$?
11. Чому дорівнює $P_1(0)$, $P_0(0)$?
12. Чому дорівнює $P_m(0)$?
13. Записати систему диференціальних рівнянь для найпростішого потоку.
14. Записати диференціальне рівняння з твірними функціями.
15. Чому дорівнює $P_m(t)$?

Приклади до теми

1. У середньому до авіакаси звертаються з приводу придбання квитків 60 осіб за 1 год. Ураховуючи, що такі особи утворюють найпростіший потік, обчислити ймовірність того, що за 3 хв до каси надійдуть: 1) 3 пасажири; 2) не більш як 3.

Відповідь. 1) 0,224042; 2) 0,647232.

2. Інтенсивність поломки ЕОМ, год$^{-1}$: $\lambda = 10^{-2}\dfrac{1}{24}$. Поломки розглядають як випадкові події, що утворюють найпростіший потік подій. Яка ймовірність того, що за 200 робочих днів поломок ЕОМ буде: 1) дві; 2) від однієї до трьох?

Відповідь. 1) 0,27067; 2) 0,721789.

3. ЕОМ, що працює в реальному масштабі часу, обробляє інформацію, яка до неї надходить. Протягом 1 с на обробку надходять 4 умовні одиниці інформації. Беручи до уваги, що потік інформації є

найпростішим, обчислити ймовірності таких подій: 1) за 2 с на ЕОМ надійдуть 5 одиниць; 2) від двох до шести одиниць.

Відповідь. 1) 0,091604; 2) 0,313374.

4. У години «пік» через пропускний автомат станції метро за 1 с проходить у середньому один пасажир. Потік пасажирів уважають найпростішим. Яка ймовірність того, що за 5 с через пропускний автомат станції метро пройдуть: 1) 4 пасажири; 2) від одного до п’яти пасажирів?

Відповідь. 1) 0,175467; 2) 0,409222.

5. На АЗС за кожну хвилину надходять у середньому два автомобілі для заправляння пальним. Потік автомобілів для заправляння вважають найпростішим. Яка ймовірність того, що за 3 хв на АЗС для заправляння надійде: 1) один автомобіль; 2) не більш як три автомобілі?

Відповідь. 1) 0,0144873; 2) 0,151305.

РОЗДІЛ II

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

ТЕМА 5. ОДНОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Поняття події в теорії ймовірностей являє собою абстрактну модель певної якісної ознаки, що відбиває лише два альтернативні судження: є подія (відбулася) або немає (не відбулася). Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уведення такого нового поняття, як випадкова величина — абстрактної моделі кількісної ознаки.

1. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу їх імовірностей

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ відповідає одне і лише одне число x або набір чисел $(x_1, x_2, ..., x_k)$, тобто на множині Ω визначена певна функція $\alpha(\omega_i)$, яка кожній елементарній події ω_i ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору R_1 або n-вимірного простору R_n.

Цю функцію називають *випадковою величиною*. У разі, коли $\alpha(\omega_i)$ відображає множину Ω на одновимірний простір R_1, випадкову величину називають *одновимірною*. Якщо відображення здійснюється на R_n, то випадкову величину називають n-вимірною (системою n випадкових величин або n-вимірним випадковим вектором).

Схематично одновимірну випадкову величину унаочнює рис. 19.

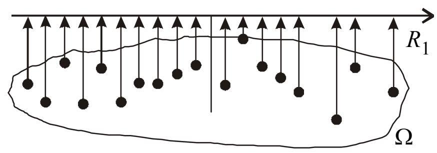

Рис. 19

Отже, величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У противному разі її називають *неперервною*.

> **Приклад 1.** Задано множину цілих чисел $'\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Навмання беруть одне число. Елементарними подіями будуть такі: поява одного з чисел $\alpha(\omega_i) = 1, 2, 3, \ldots, 10$ з певною ймовірністю. Множина можливих значень $\alpha(\omega_i)$ є дискретною, а тому й випадкова величина — поява одного з чисел множини $'\Omega$ — буде дискретною.

> **Приклад 2.** Вимірюється сила струму за допомогою амперметра. Результати вимірювання, як правило, округлюють до найближчої поділки на шкалі для вимірювання сили струму. Похибка вимірювання, що виникає внаслідок округлення, являє собою неперервну випадкову величину.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення — малими $x; y; z, \ldots$.

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини X, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм імовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	......	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	.....	p_k

Оскільки випадкові події $(X = x_j)$ і $(X = x_m)$ є між собою несумісними $((X = x_i) \cap (X = x_m) = \varnothing,\ i \neq m;\ i, m = 1, 2, \ldots, k)$ і утворюють повну групу $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k}(X = x_j) = {'\Omega}\right)$, то необхідною є така умова:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1. \qquad (61)$$

Рівність (61) називають *умовою нормування* для дискретної випадкової величини X. Наведену таблицю називають *рядом розподілу*.

Приклад 3. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = x_i$	–4	1	2	5	9
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,1	0,5	p_4	0,2

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

Розв'язання. Згідно з умовою нормування (61) маємо:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \to 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + p_4 + 0{,}2 = 1 \to p_4 = 0{,}1.$$

Приклад 4. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = x_i$	2,5	3	4,5	5	5,5	6
$P(X = x_i) = p_i$	a	$2a$	a	$3a$	a	$2a$

Знайти ймовірності можливих значень випадкової величини X: $x_1 = 2{,}5$; $x_3 = 4{,}5$; $x_4 = 5$; $x_5 = 5{,}5$; $x_6 = 6$. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) $X < 3$; 2) $X \le 3$; 3) $X < 5$; 4) $X \le 5$; 5) $2{,}5 \le X < 5{,}5$; 6) $X \ge 5{,}5$.

Розв'язання. За умовою нормування (61) дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = a + 2a + a + 3a + a + 2a = 1 \to$$

$$\to 10a = 1 \to a = 0{,}1$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової набуває такого вигляду:

$X = x_i$	2,5	3	4,5	5	5,5	6
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Обчислимо ймовірності подій:

1) $P(X < 3) = P(X = 2{,}5) = 0{,}1;$
2) $P(X \le 3) = P(X = 2{,}5) + P(X = 3) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$
3) $P(X < 5) = P(X = 2{,}5) + P(X = 3) + P(X = 4{,}5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4;$
4) $P(X \le 5) = P(X = 2{,}5) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7;$
5) $P(2{,}5 \le X \le 5{,}5) = P(X = 2{,}5) + P(X = 4{,}5) + P(X = 5) + P(X = 5{,}5) =$
$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8;$
6) $P(X \ge 5{,}5) = P(X = 5{,}5) + P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$

Закон розподілу ймовірностей можна унаочнити графічно.

Для цього візьмемо систему координат $p_i\,O\,x_i$, відклавши на осі абсцис можливі значення випадкової величини x_i, а на осі ординат — імовірності p_i цих можливих значень. Точки з координатами $(x_i; p_i)$ послідовно сполучимо відрізками прямої. Утворену при цьому фігуру називають імовірнісним многокутником.

Приклад 5. За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	–2,5	1	3,5	5	6,5	8
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

побудувати ймовірнісний многокутник.

Розв'язання. Імовірнісний многокутник зображено на рис. 20

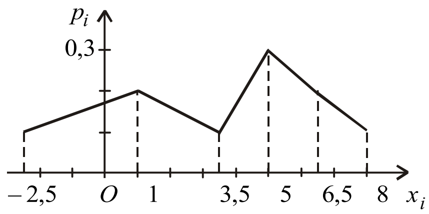

Рис. 20

Сума ординат імовірнісного многокутника завжди дорівнює одиниці.

2. Функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) та її властивості

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x) \qquad (62)$$

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за x .

Наприклад, $F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту випадкова величина X (дискретна чи неперервна) може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рис. 21.

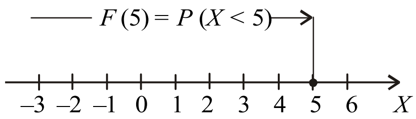

Рис. 21

Розглянемо властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

! **Доведення.** Позначимо відповідно A, B, C події $(X < x_2)$, $(X < x_1)$ і $(x_1 \le X \le x_2)$. Випадкові події B і C є несумісними ($A \cap C = \varnothing$) (рис. 22).

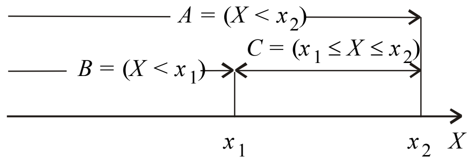

Рис. 22

Тоді подію A можна записати так:

$$A = B \cup C \; (A = B + C).$$

За формулою додавання для несумісних випадкових подій (6) маємо:

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

або

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X \le x_2). \qquad (63)$$

Звідси на підставі означення інтегральної функції $F(x)$, дістаємо

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X \le x_2)$$

або

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X \le x_2) \ge 0. \qquad (64)$$

Отже,

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0 \rightarrow F(x_2) \ge F(x_1).$$

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (65)$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

І справді, поклавши в (65) $\alpha = x_i$, $\beta = x_i + \Delta x$, дістанемо

$$P(x_1 < X < x_i + \Delta x) = F(x_i + \Delta x) - F(x_i) .$$

Коли $\Delta x \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_i < X < x_i + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(F(x_i + \Delta x) - F(x_i)\right). \qquad (66)$$

Оскільки при $\Delta x \to 0$ $X = x_i$, то

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Отже, для неперервної випадкової величини X справджуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta). \qquad (67)$$

3. Якщо $X \in \left]-\infty; \infty\right[$, виконуються два подані далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

Оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$. А така подія є неможливою ($\varnothing$).

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Подія $X < \infty$ полягає в тому, що випадкова величина X набуває числового значення, яке міститься ліворуч від $+\infty$. Ця подія є вірогідною (Ω), оскільки будь-яке число $X = x < \infty$.

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку $[a; b]$, то

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \le a;$$
$$F(x) = 1 \quad \text{для} \quad x > b. \qquad (68)$$

Приклад 6. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;
2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1$;
3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;
4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$;
5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;
6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;
7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) + P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 23.

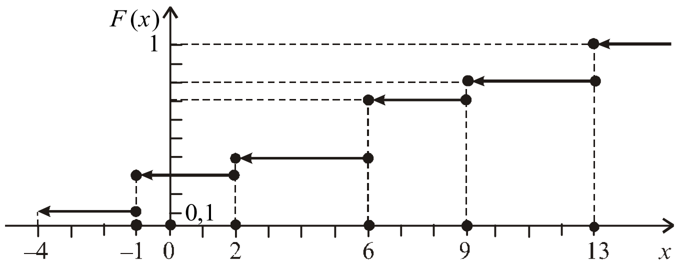

Рис. 23

Приклад 7. Маємо три ящики. У першому містяться 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому — 8 стандартних і 2 браковані деталі, а в третьому — 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих; визначити $F(x)$ та побудувати графік цієї функції.

Розв'язання. Серед трьох навмання взятих деталей число стандартних може бути 0; 1; 2; 3.

У табличній формі закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	p_4

Обчислимо ймовірності p_1, p_2, p_3, p_4. Із цією метою позначимо $A_{с1}$ і $A_{б1}$ випадкову подію, що полягає відповідно в появі стандартної деталі з першого ящика і появі бракованої деталі з першого ящика. Тоді випадкові події $A_{с2}$, $A_{б2}$, $A_{с3}$, $A_{б3}$ означають появу відповідно стандартної та бракованої деталей із другого і третього ящиків. Імовірності цих подій такі:

$$P(A_{с1}) = \frac{6}{10};\ \ P(A_{б1}) = \frac{4}{10};$$

$$P(A_{с2}) = \frac{8}{10};\ \ P(A_{б2}) = \frac{2}{10};$$

$$P(A_{с3}) = \frac{5}{10};\ \ P(A_{б3}) = \frac{5}{10}.$$

Оскільки випадкові події $A_{с1}$, $A_{с2}$, $A_{с3}$, $A_{б1}$, $A_{б2}$, $A_{б3}$ є незалежними, маємо:

$$P_1 = P(A_{б1})\,P(A_{б2})\,P(A_{б3}) = \frac{4}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{40}{1000} = 0{,}04;$$

$$P_2 = P(A_{с1})P(A_{б2})P(A_{б3}) + P(A_{б1})P(A_{с2})P(A_{б3}) + P(A_{б1})P(A_{б2})P(A_{с3}) =$$

$$= \frac{6}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{60+160+40}{1000} = \frac{260}{1000} = 0{,}26;$$

$$P_3 = P(A_{с1})P(A_{с2})P(A_{б3}) + P(A_{с1})P(A_{б2})P(A_{с3}) + P(A_{б1})P(A_{с2})P(A_{с3}) =$$

$$= \frac{6}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10} + \frac{6}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{240+60+160}{1000} = \frac{460}{1000} = 0{,}46;$$

$$P_4 = P(A_{с1})\,P(A_{с2})\,P(A_{с3}) = \frac{6}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{240}{1000} = 0{,}24.$$

Перевіримо виконання умови нормування:

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}46 + 0{,}24 = 1.$$

Умова нормування виконується. Отже, закон розподілу ймовірностей побудовано правильно. Запишемо його в табличній формі:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,04	0,26	0,46	0,24

Інтегральна функція має вигляд:

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}04, & 0<x\le 1;\\ 0{,}30, & 1<x\le 2;\\ 0{,}76, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 24.

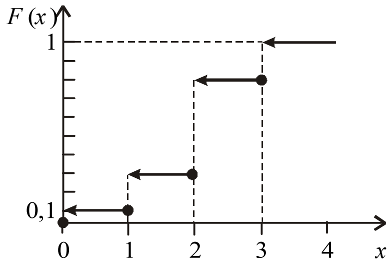

Рис. 24

Приклад 8. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & -3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$ і обчислити $P(-1<X<2)$.

Розв'язання. $F(x)$ графічно зображено на рис. 25.

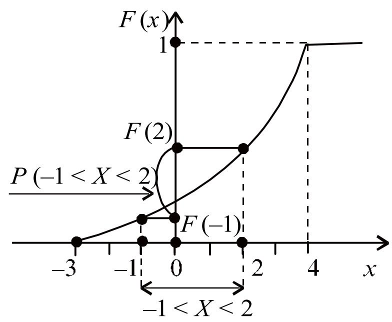

Рис. 25

Використовуючи (65), обчислимо

$$P(-1 < X < 2) = F(2) - F(-1) = \left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=2} - \left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=-1} =$$

$$= \frac{25}{49} - \frac{4}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

Приклад 9. Функція розподілу ймовірностей має такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ ax + b, & -2 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Знайти значення сталих a і b і накреслити графік $F(x)$. Обчислити $P(1 < X < 4)$.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$ (68) маємо:

$$\begin{cases} -2a + b = 0 \\ 5a + b = 1 \end{cases} \to a = \frac{1}{7}, \quad b = \frac{2}{7}.$$

Коли $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{2}{7}$ функція розподілу ймовірностей набирає вигляду

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{x+2}{7}, & -2 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 26.

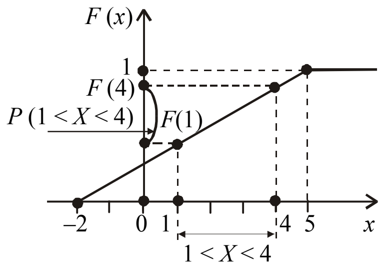

Рис. 26

Обчислюємо ймовірність події $1 < X < 4$:

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}.$$

3. Щільність імовірностей (диференціальна функція) *f*(*x*) і її властивості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{69}$$

звідки $dF(x) = f(x)dx$.

Оскільки

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x) = f(x)dx,$$

то добуток $f(x)dx$ — ймовірність того, що випадкова величина X міститиметься у проміжку $[x, x + dx]$, де $dx = \Delta x$.

Геометрично на графіку щільності ймовірності $f(x)dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $f(x)$ (рис. 27а).

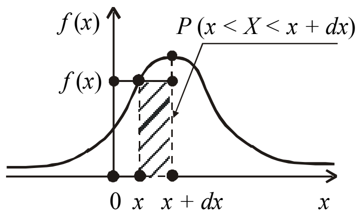

Рис. 27а

Властивості *f*(*x*)

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1. \tag{70}$$

! **Доведення.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку [a; b], то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_a^в f(x)dx = 1. \tag{71}$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx. \tag{72}$$

! **Доведення.** За властивістю функції розподілу ймовірностей (67)

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Залежність (72) можна подати так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta dF(x) = F(x)\,|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha).$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \tag{73}$$

! **Доведення.**

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x dF(x) = F(x)\,|_{-\infty}^x = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу [a; b], то

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx. \tag{74}$$

Приклад 1. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0 < X < 2)$, скориставшись (65) і (72).

Розв'язання.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \le 3; \\ 0, & x < 3. \end{cases}$$

Графіки функцій $F(x), f(x)$ зображено відповідно на рис. 27б і 28.

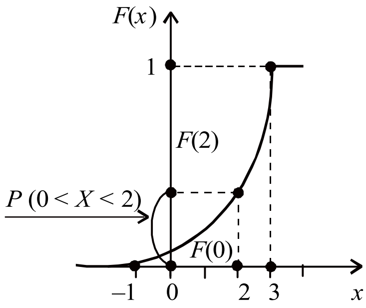

Рис. 27б

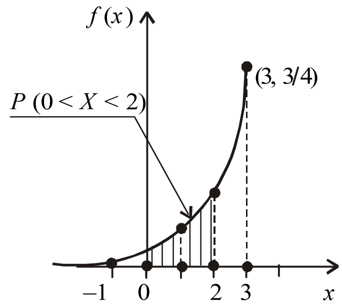

Рис. 28

Імовірність події $0 < X < 2$ обчислимо за (65):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32};$$

далі згідно із (72) маємо

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{64}(x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\int_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_0^2 =$$

$$= \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Приклад 2. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\dfrac{\pi}{6} < X < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно із (74) маємо:

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x \frac{1}{2}\ \sin dx=\frac{1}{2}\int_0^x \sin dx=\frac{1}{2}(-\cos x\,|_0^x)=\frac{1}{2}(-\cos x+1)=$$

$$=\frac{1-\cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 29 і 30.

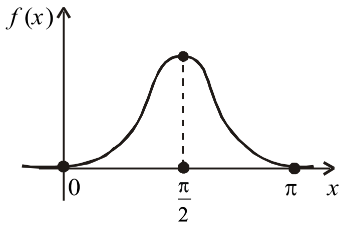

Рис. 29

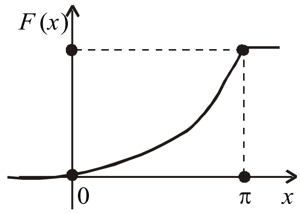

Рис. 30

Імовірність події $\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2}$ можна обчислити згідно з (65) або (72). Застосуємо формулу (72):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 3. За заданою щільністю ймовірностей маємо:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ a\sqrt{x+2}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Знайти значення сталої a та функцію $F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

Розв'язання. Значення сталої a визначаємо з умови нормування (71):

$$\int_{-2}^{7} f(x)dx=1\to\int_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}\,dx=1\to a\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx=1\to a=\frac{1}{\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx}.$$

Тут $\int\limits_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{7} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{0}\right) = \frac{2}{3}27 = 18.$

Отже,

$$a = \frac{1}{18}.$$

При знайденому значенні a щільність імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей визначається так:

$$F(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{x} \frac{1}{18}\sqrt{x+2}\ \ dx = \frac{1}{18}\int\limits_{-2}^{x}\sqrt{x+2}\ \ dx = \frac{1}{18}\left.\frac{(x+2)^3}{\frac{3}{2}}\right|_{-2}^{x} =$$

$$= \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 31 і 32.

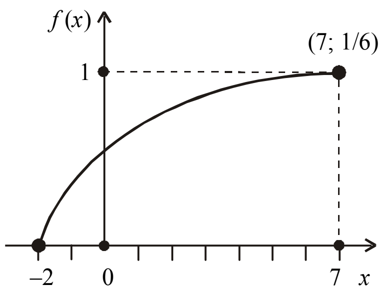

Рис. 31

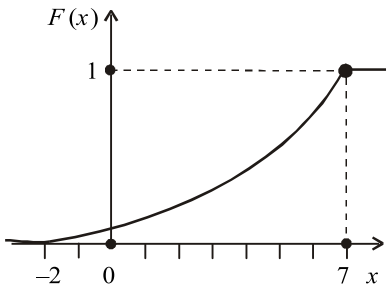

Рис. 32

Приклад 4. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей у вигляді трикутника, зображеного на рис. 33.

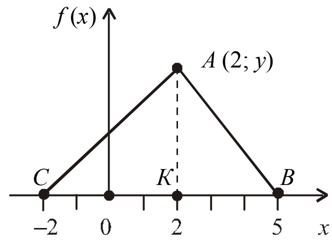

Рис. 33

Записати вирази для щільності ймовірностей і функції розподілу ймовірностей. Побудувати графік $F(x)$ і обчислити $P(0 < X < 4)$.

Розв'язання. На проміжку [–2; 2] щільність імовірностей змінюється за законом прямої пропорційної залежності $f(x) = k_1x + b_1$ ($k_1 > 0$), а на проміжку [2; 5] за аналогічним законом $f(x) = k_2x + b_2$ ($k_2 < 0$). Для знаходження значень параметрів k_1, b_1, k_2, b_2 обчислимо координати вершини цього трикутника $A(x, y)$. Абсциса цієї точки відома за умовою задачі: $x = 2$; ординату знаходимо за умовою нормування, згідно з якою площа цього трикутника ABC має дорівнювати одиниці:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\, CB \cdot AK = \frac{1}{2}\, 7y = 1 \to y = \frac{2}{7}.$$

Отже, шукані координати:

$$x = 2; \quad y = \frac{2}{7}.$$

Знаходимо рівняння прямої, яка проходить через точки C (–2; 0) і $A\left(2; \frac{2}{7}\right)$:

$$\frac{y-0}{x+2} = \frac{\frac{2}{7}-0}{2+2} \to \frac{y}{x+2} = \frac{1}{14} \to y = \frac{x+2}{14}.$$

Отже, на проміжку [–2; 2] маємо:

$$f(x) = \frac{1}{14}(x+2).$$

Рівняння прямої, що проходить через точки $A\left(2; \frac{2}{7}\right), B(2; 0)$:

$$\frac{y-0}{x-5}=\frac{\frac{2}{7}-0}{2-5}\to\frac{y}{x-5}=-\frac{2}{21}\to y=-\frac{2}{21}(x-5).$$

Звідси на проміжку [2; 5] дістаємо:

$$f(x)=-\frac{2}{21}(x-5)=\frac{2}{21}(5-x).$$

Отже, на проміжку [–2; 5] щільність імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{14}(x+2), & -2<x\le 2;\\ \frac{2}{21}(5-x), & 2<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Згідно із (74) знаходимо $F(x)$ на обох розглядуваних проміжках:

1) на проміжку [–2; 2]:

$$F(x)=\int_{-2}^{x}f(x)dx=\int_{-2}^{x}\frac{1}{14}(x+2)dx=\frac{1}{14}\int_{-2}^{x}(x+2)dx=\left.\frac{(x+2)^2}{28}\right|_{-2}^{x}=\frac{(x+2)^2}{28};$$

2) на проміжку [–2; 5]:

$$F(x)=F(2)+\int_{2}^{x}f(x)dx=\frac{16}{28}+\frac{2}{21}\int_{2}^{x}(5-x)\,dx=\frac{16}{28}+\frac{1}{21}\left(-\left.\frac{(5-x)^2}{2}\right|_{-2}^{x}\right)=$$

$$=\frac{16}{28}-\frac{1}{21}(x-5)^2\Big|_2^x=\frac{16}{28}-\frac{(x-5)^2}{21}+\frac{9}{21}=\frac{4}{7}-\frac{(x-5)^2}{21}-\frac{3}{7}=1-\frac{(x-5)^2}{21}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{(x+2)^2}{28}, & -2<x\le 2;\\ 1-\frac{(x-5)^2}{21}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 34.

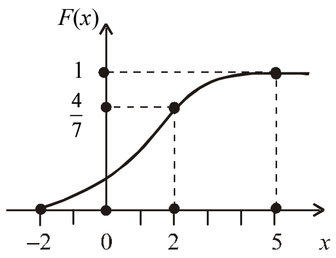

Рис. 34

Обчислюємо ймовірність події $0 < X < 4$ згідно з (65) і (72).
На інтервалі [0; 4] діють два закони розподілу:

$$P(0 < X < 4) = P(0 < X < 2) + P(2 < X < 4).$$

1) $F(2) - F(0) + F(4) - F(2) = F(4) - F(0) = \left(1 - \frac{1}{21}\right) - \frac{4}{28} =$

$$= \frac{21-1}{21} - \frac{4}{28} = \frac{20}{21} - \frac{1}{7} = \frac{20-3}{21} = \frac{17}{21}.$$

2) $P(0 < X < 4) = P(0 < X < 2) + P(2 < X < 4) = \int\limits_0^2 \frac{1}{14}(x+2)\,dx +$

$$+\int\limits_2^4 \frac{2}{21}(5-x)\,dx = \left.\frac{(x+2)^2}{28}\right|_0^2 + \frac{2}{21}\left(-\left.\frac{(5-x)^2}{2}\right|_2^4\right) = \frac{16}{28} - \frac{4}{28} + \frac{1}{21}(-1+9) =$$

$$= \frac{12}{28} + \frac{8}{21} = \frac{3}{7} + \frac{8}{21} = \frac{17}{21}.$$

Отже, $P(0 < X < 4) = \frac{17}{21}$.

Теоретичні запитання до теми ?

1. Означення випадкової величини.
2. Означення дискретної і неперервної випадкової величини.
3. Умова нормування для дискретної випадкової величини.
4. Закон розподілу випадкової величини.
5. Що називається функцією розподілу випадкової величини?
6. Довести, що $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
7. Чому дорівнює $F(-\infty)$, $F(\infty)$?
8. Чому дорівнює $P(\alpha < X < \beta)$?
9. Довести, що для неперервної випадкової величини $P\,(X = x) = \ldots$

10. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини X.

11. Чому дорівнює $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$?

12. Чому дорівнює $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$?

13. Чому дорівнює $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$?

14. Якщо $X \in [a; b]$, то чому дорівнює $\int_{a}^{b} f(x)dx$?

15. Якщо $X \in [a; b]$, то чому дорівнює $\int_{a}^{x} f(x)dx$?

16. Властивості $F(x)$.

17. Властивості $f(x)$.

18. Довести, що $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$.

Приклади до теми

1. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X маємо:

$X = x_i$	-4	-1	2	5	8	10
$P(X = x_i) = p_i$	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

Знайти a. Обчислити: $P(X < 2)$, $P(-4 < X \leq 8)$.

Побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

Відповідь. $a = 0{,}1$; 0,25; 0,8.

2. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \leq -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \leq 2; \\ 0{,}5, & 2 < x \leq 5; \\ 0{,}8, & 5 < x \leq 8; \\ 1, & x > 8 \end{cases}$$

обчислити: $P(-4 < X \leq 2)$; $P(X > 2)$; $P(X \geq 5)$; $P(X \leq 2)$.

Відповідь: 0,5; 0,5; 0,5; 0,5.

3. Дано функцію розподілу ймовірностей (рис. 35).

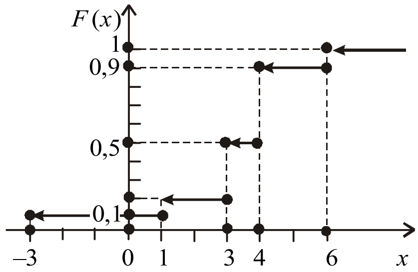

Рис. 35

Обчислити: $P(X \le 3)$; $P(1 \le X < 6)$; $P(X \ge 3)$.

Відповідь: 0,5; 0,4; 0,7.

4. Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,003	0,056	0,329	0,612

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0;\\ 0{,}003, & 0 < x \le 1;\\ 0{,}059, & 0 < x \le 2;\\ 0{,}398, & 2 < x \le 3;\\ 1, & x > 3.\end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 36

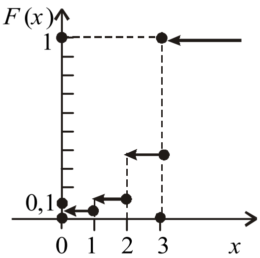

Рис. 36

5. У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому — 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть чотири деталі, а з другого — одну. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед чотирьох навмання взятих — і побудувати $F(x)$.

Відповідь.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{28}{2100}$	$\frac{294}{2100}$	$\frac{798}{2100}$	$\frac{770}{2100}$	$\frac{210}{2100}$

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \frac{28}{2100}, & 1 < x \le 2; \\ \frac{322}{2100}, & 2 < x \le 3; \\ \frac{1120}{2100}, & 3 < x \le 4; \\ \frac{1890}{2100}, & 4 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

6. Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати чотири незалежні між собою технологічні операції. Імовірність того, що при виконанні першої операції робітник не припуститься дефекту, дорівнює 0,95; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа операції, під час виконання яких робітник не припуститься браку.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,00015	0,00565	0,06965	0,34315	0,5814

7. На шляху руху автомобіля стоять п'ять світлофорів, кожний із яких з імовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової X — числа світлофорів, що їх автомобіль промине без затримки.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

8. Імовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0,9. Футболіст виконав три такі удари.

Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа реалізованих штрафних.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

9. П'ять приладів потрібно перевірити на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці лише в тому разі, якщо перевірений прилад перед цим виявляється надійним. Імовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, для кожного з них дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа приладів, які пройшли випробування.

Відповідь.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

10. У лотереї розігруються мотоцикл, велосипед і годинник. Усього є 100 лотерейних білетів. Навмання покупець придбав один з них. Побудувати закон розподілу ймовірностей X — поява виграшного білета.

Відповідь.

x_i	0	1	1	1
p_i	0,97	0,01	0,01	0,01

11. За заданою функцією розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{\sqrt{x+3}}{2}, & -3<x\le 1;\\ 1, & x>1\end{cases}$$

побудувати її графік і обчислити $P(-2<X<0)$.

Відповідь. Шуканий графік наведено на рис. 37.

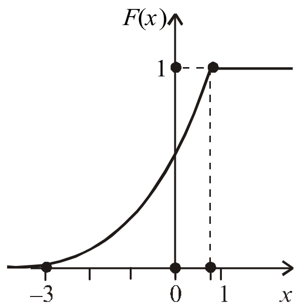

Рис. 37

$$P(-2 < X < 0) + F(0) - F(-2) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

12. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$, $f(x)$ і обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \cos x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

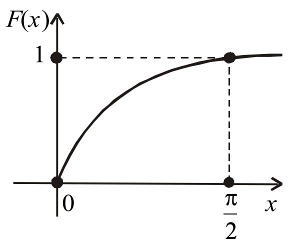

Рис. 38

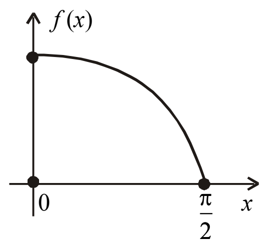

Рис. 39

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

13. Функція розподілу ймовірностей є лінійною (рис. 40).

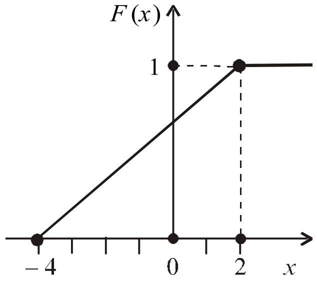

Рис. 40

Знайти вирази для $F(x)$ і $f(x)$.
Побудувати графік $f(x)$.
Відповідь.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ \dfrac{x+4}{6}, & -4 < x \le 2; \\ 1, & x > 2; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ \dfrac{1}{6}, & -4 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

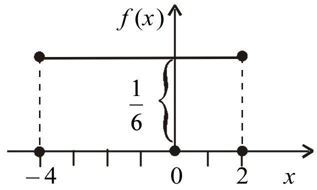

Рис. 41

14. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Знайти a і $F(x)$.

Відповідь. $a = \dfrac{1}{\pi}$; $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}$.

15. Випадкова величина X має ймовірнісний трикутник, зображений на рис. 42 .

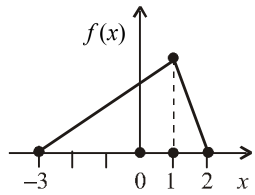

Рис. 42

Записати вирази для $f(x)$ і $F(x)$ і побудувати графік функції $F(x)$.
Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{1}{10}(x+3), & -3 < x \le 1; \\ \dfrac{2}{5}(2-x), & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{(x+3)^2}{20}, & -3 < x \le 1; \\ 1-\dfrac{(x-2)^2}{5}, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 43.

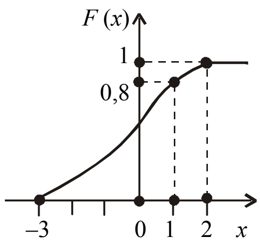

Рис. 43

16. Крива щільності ймовірності — півеліпс із півосями $a = 4$; $b = 2$.
Записати вираз для $f(x)$ і $F(x)$.
Побудувати графік функції $F(x)$.
Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -4; \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}, & -4 < x \le 4; \\ 0, & x > 4; \end{cases}$$

$$F(x)=\int\limits_{-a}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{1}{16\pi}\left[x\sqrt{16-x^2}+16\ \arcsin\dfrac{x}{4}+8\pi\right], & -4<x\le 4\,.\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 44.

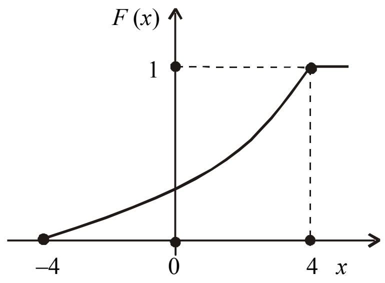

Рис. 44

17. За заданими функціями

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 5\sqrt{x}, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1;\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{3}{5}\sqrt[5]{x}, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1;\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1\end{cases}$$

визначити, яка з них є щільністю випадкової величини X, визначеної на проміжку [0; 1].

18. Дано щільність імовірності

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ a\ln x, & 1<x\le e;\\ 0, & x>e.\end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$. Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

Відповідь. $a=1$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 1+x\ln x-x, & 1<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$$

Шукані графіки зображено на рис. 45 і 46.

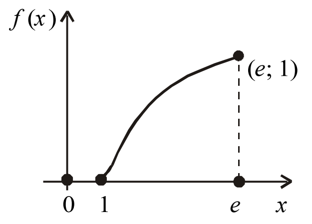

Рис. 45

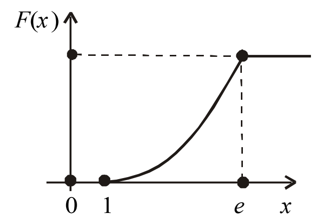

Рис. 46

19. Дано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{3}, & -2<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$.
Відповідь.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<-2;\\ \dfrac{1}{6\sqrt{x+2}}, & 1-2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Шукані графіки наведено на рис. 47 і 48.

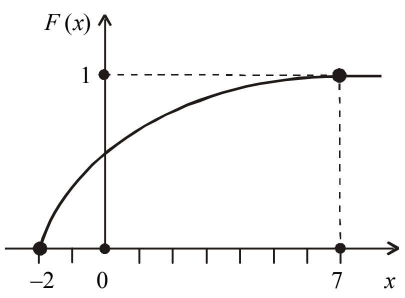

Рис. 47

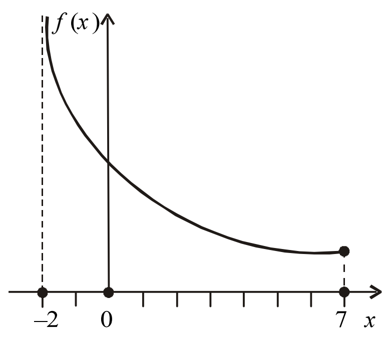

Рис. 48

20. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a \cos \frac{2}{7} x, & 0 < x \le \frac{7}{4}\pi; \\ 1, & x > \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(0 < x < \frac{7}{6}\pi\right)$.

Відповідь. Графіки зазначених функцій подано на рис. 49 і 50.

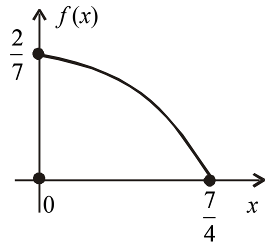

Рис. 49

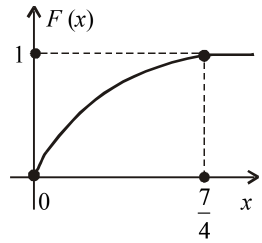

Рис. 50

$$P\left(0 < X < \frac{7}{6}\pi\right) = F\left(\frac{7}{6}\pi\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

21. Графік заданої щільності ймовірностей зображено на рис. 51.

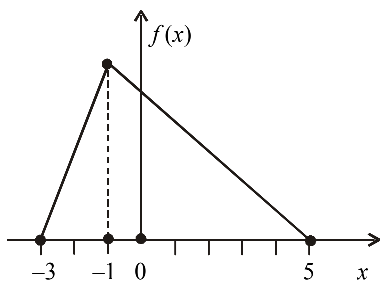

Рис. 51

Записати вирази для $f(x)$, і $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$.

Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{x+3}{8}, & -3<x\le -1;\\ \dfrac{5-x}{24}, & -1<x\le 5;\\ 0, & x>5;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{(x+3)^2}{16}, & -3<x\le -1;\\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{48}, & -1<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Шуканий графік зображено на рис. 52.

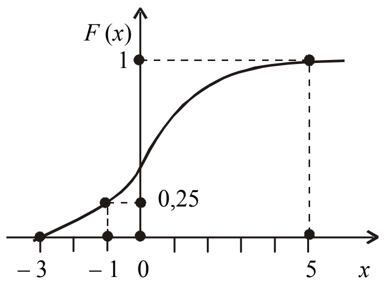

Рис. 52

ТЕМА 6. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Закон розподілу ймовірностей як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри і називають *числовими характеристиками випадкових величин*.

1. Математичне сподівання

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є *математичне сподівання*.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i\ . \qquad (75)$$

Якщо Ω — обмежена множина, то

$$M(X)=\sum_{s=1}^{n}x_i p_i\ . \qquad (76)$$

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X)=\int_{\Omega}x\,f(x)dx\ . \qquad (77)$$

Якщо Ω = (– ∞; ∞), то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx\ . \qquad (78)$$

Якщо Ω = [$a; b$], то

$$M(X)=\int_{a}^{в}x\,f(x)dx. \qquad (79)$$

2. Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C. \qquad (80)$$

Справді, сталу C можна розглядати як випадкову величину, що з імовірністю, яка дорівнює одиниці, набуває значення C, а тому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. $$M(CX) = CM(X). \qquad (81)$$

Для дискретної випадкової величини згідно із (75) маємо

$$M(CX)=\sum_{i=1}^{k}Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{k}x_i p_i = CM(X)\ .$$

Для неперервної:

$$M(CX)=\int_{-\infty}^{\infty}Cxf(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx = CM(X).$$

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(AX+B)=AM(X)+B\ . \qquad (82)$$

Для дискретної випадкової величини:

$$M(AX+B)=\sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B)p_i = A\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + B\sum_{i=1}^{n}p_i = AM(X)+B\ .$$

Для неперервної випадкової величини:

$$M(AX+B)=\int_{-\infty}^{\infty}(Ax+B)f(x)dx=A\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx+B\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=AM(X)+B.$$

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

x_i	– 6	– 4	2	4	6	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Скориставшись (76), дістанемо

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=$$
$$=-6\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2=$$
$$=-0{,}6-0{,}4+0{,}4+1{,}2+0{,}6+1{,}6=2{,}8.$$

Приклад 2. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}, & -1<x\le 7;\\ 0, & x>7\end{cases}$$

обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Згідно із (79) маємо:

$$M(X)=\int_{-1}^{7}x\,f(x)dx=\int_{-1}^{7}x\frac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}\;dx=\frac{1}{12}\int_{-1}^{7}x\sqrt[3]{x+1}\;dx=$$
$$=\left|\begin{matrix}x+1=z^3 & \\ x=z^3-1 & \to\ -1\le x\le 7\\ dx=3z^2dz & \quad 0\le z\le 2\end{matrix}\right|=\frac{1}{12}\int_0^2(z^3-1)\,z\,3z^2dz=$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^2(z^6-z^3)dz=\frac{1}{4}\left(\int_0^2 z^6dz-\int_0^2 z^3dz\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left.\frac{z^7}{7}\right|_0^2-\left.\frac{z^4}{4}\right|_0^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{128}{7}-4\right)=\frac{1}{4}\,\frac{128-28}{7}=\frac{100}{28}=\frac{25}{7};$$

$$M(X)=\frac{25}{7}.$$

Приклад 3. Дано щільність імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{3}\ \sin\frac{2}{3}x, & 0<x\le\frac{3}{2}\pi;\\ 0, & x>\frac{3}{2}\pi.\end{cases}$$

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання.

$$M(X)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\ f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\ \frac{1}{3}\ \sin\frac{2}{3}xdx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\sin\ \frac{2}{3}xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x, \quad du=dx \\ \sin\frac{2}{3}xdx=dv\rightarrow \\ \rightarrow v=-\frac{3}{2}\cos\ \frac{2}{3}x \end{array}\right|=\frac{1}{3}\left(-x\ \frac{3}{2}\ \cos\ \frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos\ \frac{2}{3}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}x\ \cos\ \frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}+\frac{9}{4}\ \sin\ \frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}\right)=\frac{3}{4}\pi.$$

$$M(X)=\frac{3}{4}\pi.$$

Приклад 4. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \frac{\sqrt{x+4}}{3}, & -4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Для обчислення $M(X)$ необхідно знайти щільність імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-4;\\ \frac{1}{6\sqrt{x+4}}, & -4<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Тоді:

$$M(X) = \int_{-4}^{6} x\ f(x)dx = \int_{-4}^{6} x \frac{1}{6\sqrt{x+3}} dx = \frac{1}{6}\int_{-4}^{6} \frac{x}{\sqrt{x+3}}\ dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x+3 = z^2 \\ x = z^2 - 3 \\ dx = 2zdz \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -3 \le x \le 6 \\ 0 \le z \le 3 \end{matrix} \right| = \frac{1}{6}\int_{0}^{3} \frac{z^2 - 3}{z} 2zdz =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{3} (z^2 - 3)dz = \frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3} z^2 dz - 3\int_{0}^{3} dz \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{0}^{3} - 3z\Big|_{0}^{3} \right) = \frac{1}{3}(9 - 9) = 0;$$

$$M(X) = 0.$$

Якщо випадкова величина $X \in [a; b]$, то $M(X) \in [a; b]$, а саме: математичне сподівання випадкової величини має обов'язково міститься всередині інтервалу $[a; b]$, являючи собою центр розподілу цієї величини.

3. Мода та медіана випадкової величини

Модою (Мо) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$$f(\text{Mo}) = \max.$$

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:

$$P(-\infty < X < \text{Me}) = P(\text{Me} < X < \infty) \rightarrow F(\text{Me}) - F(-\infty) = F(\infty) - F(\text{Me}) \rightarrow$$

$$\rightarrow F(\text{Me}) = 1 - F(\text{Me}) \rightarrow 2F(\text{Me}) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow F(\text{Me}) = 0{,}5. \qquad (83)$$

Отже, медіану визначають із рівняння (83).

Приклад 5. Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Імовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8.

Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти Mo.

Розв'язання.

Можливі значення випадкової величини:

$X = 0, 1, 2, 3.$

Імовірності цих можливих значень такі:

$p_1 = (0{,}2)^3 = 0{,}008;$

$p_2 = 3p\,q^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 = 0{,}096;$

$p_3 = 3p^2q = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384;$

$p_4 = p^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512.$

Запишемо закон таблицею:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Із таблиці визначаємо Mo = 3.

Отже, дістаємо одномодальний розподіл.

Приклад 6. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ a\ (x+2)(x-4), & -2 < x \le 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$, Mo.

Розв'язання.

За умовою нормування маємо:

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx} \to \int\limits_{-2}^{4} x^2 dx - 2\int\limits_{-2}^{4} x dx - 8\int\limits_{-2}^{4} dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{4} - x^2\Big|_{-2}^{4} - 8x\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= \frac{64+8}{3} - (16-4) - 8(4+2) = 24 - 12 - 48 = -36 \to a = -\frac{1}{36}.$$

Щільність імовірностей зі знайденим a матиме вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{(4-x)(x+2)}{36}, & -2 < x < 4; \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 53.

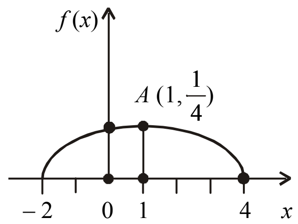

Рис. 53

Згідно з рис. 53 маємо $f(1) = \max$. Отже, Mo = 1.
Визначаємо Me:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(x)dx = \frac{1}{36}\int_{-2}^{x}(4-x)(x+2)dx =$$
$$= \frac{1}{36}\int_{-2}^{x}(8+2x-x^2)dx = \frac{1}{36}\left(\int_{-2}^{x}8dx + \int_{-2}^{x}2xdx - \int_{-2}^{x}x^2dx\right) =$$
$$= \frac{1}{36}\left(8x\Big|_{-2}^{x} + x^2\Big|_{-2}^{x} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{x}\right) = \frac{1}{36}\left(8x+16+x^2-4-\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{36}\left(\frac{24x+36+3x^2-x^3-8}{3}\right) = \frac{28+24x+3x^2-x^3}{108}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{28+24x+3x^2-x^3}{108}, & -2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Для визначення Me застосовуємо рівняння (83):

$$F(\text{Me}) = \frac{1}{2} \quad \to \frac{28+24\text{Me}+3\text{Me}^2-\text{Me}^3}{108} = \frac{1}{2} \quad \to$$
$$\to \text{Me}^3 - 3\text{Me}^2 - 24\text{Me} + 26 = 0 \to \text{Me} = 1.$$

Me можна знайти, скориставшись щільністю ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\text{Me}} f(x)dx = \int_{\text{Me}}^{\infty} f(x)dx, \tag{84}$$

або при $X \in [a;\, b]$:

$$\int_{a}^{\text{Me}} f(x)dx = \int_{\text{Me}}^{e} f(x)dx\,. \tag{85}$$

Отже, Me — можливе значення випадкової величини X, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині X = Me, поділяє площу фігури, яка обмежена функцією $f(x)$, на дві рівні частини.

4. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Приклад 7. Закони розподілу випадкових величин X і Y задані таблицями:

x_i	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}5$
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	-100	-80	-10	10	10	80
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$ і $M(Y)$.

Розв'язання.

$$M(X)=\sum_{s=1}^{4}x_i p_i=-0{,}5\cdot 0{,}4-0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}4=$$

$$=-0{,}2-0{,}01+0{,}01+0{,}2=0;$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{6}y_j p_j=-100\cdot 0{,}1-80\cdot 0{,}2-10\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}2+80\cdot 0{,}2+100\cdot 0{,}1=$$

$$=-10-16-2+2+16+10=0.$$

Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин X і Y істотно різні. Із наведеного прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань ($M(X)=M(Y)=0$) випадкові величини X і Y мають тенденцію до коливань відносно $M(X)$ та $M(Y)$, причому Y має більший розмах розсіювання відносно $M(Y)$, ніж випадкова величина X відносно $M(X)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання*. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання $(X-M(X))$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини X завжди дорівнює нулю. Справді,

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0\,.$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2 . \tag{86}$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i ; \tag{87}$$

для неперервної

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx . \tag{88}$$

Якщо $X \in [a; b]$,

то
$$D(X) = \int_{a}^{ъ}(x - M(X))^2 f(x)dx . \tag{89}$$

5. Властивості дисперсії

1. Якщо C — стала величина, то

$$D(C) = 0 . \tag{90}$$

Справді

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0 .$$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$. (91)

Маємо:

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = M(C(X - M(X))^2 =$$
$$= C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X)$$

3. Якщо A і B — сталі величини, то

$$D(AX + B) = A^2 D\left(X\right). \tag{92}$$

Адже

$$D(AX + B) = M(AX + B - M(AX + B))^2 = M(AX + B - AM(X) - B)^2 =$$
$$= M(AX - AM(X))^2 = A^2 M(X - M(X))^2 = A^2 D(X).$$

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{93}$$

! **Доведення**. Згідно з (86) дістаємо:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M(M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для дискретної випадкової величини X

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X); \tag{94}$$

для неперервної

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \tag{95}$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - M^2(X).$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною $(D(X \geq 0))$.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{97}$$

Приклад 8. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Згідно з (94) маємо:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i\right)^2;$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 =$$

$$= -0{,}4 - 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7;$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$

Приклад 9. Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з імовірністю $q = 0{,}1$ ($p = 1 - q = 0{,}9$ — імовірність того, що в лампочці дефект відсутній). Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — число лампочок, які будуть випробувані. Обчислити $\sigma(X)$.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X — число лампочок, які будуть випробувані — набуває таких можливих значень:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 4.$$

Обчислимо відповідні ймовірності:

$$P(X=1) = p_1 = 0{,}9; \quad P(X=2) = p_2 = pq = 0{,}09; \quad P(X=3) = p_3 = pq^2 = 0{,}009;$$

$$P(X=4) = p_4 = pq^3 + q^4 = 0{,}0009 + 0{,}0001 = 0{,}001.$$

Адже четверта лампочка буде випробувана, коли третя перегорить, а четверта — ні, або коли й четверта перегорить.

У табличній формі закон розподілу X матиме такий вигляд:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,9	0,09	0,009	0,001

Далі виконуємо такі обчислення:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}009 + 4 \cdot 0{,}001 =$$

$$= 0{,}9 + 0{,}18 + 0{,}027 + 0{,}004 = 1{,}111;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0{,}9 + 4 \cdot 0{,}09 + 9 \cdot 0{,}009 + 16 \cdot 0{,}001 =$$

$$= 0{,}9 + 0{,}36 + 0{,}081 + 0{,}016 = 1{,}357;$$

$$D(X) = M(X^2) - M_2(X) = 1{,}357 - (1{,}111)^2 = 1{,}357 - 1{,}234321 = 0{,}122679;$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}122679} \approx 0{,}35.$$

Приклад 10. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X задано функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -6; \\ 0{,}1, & -6 < x \le -4; \\ 0{,}3, & -4 < x \le 1; \\ 0{,}4, & 1 < x \le 3; \\ 0{,}6, & 3 < x \le 5; \\ 0{,}8, & 5 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Обчислити D (X); σ (X).

Розв'язання. За заданою функцією розподілу ймовірностей подамо закон розподілу таблицею

x_i	-6	-4	1	3	5	8
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -6 \cdot 0{,}1 - 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}2 =$$
$$= -0{,}6 - 0{,}8 + 0{,}1 + 0{,}6 + 1 + 1{,}6 = 1{,}9;$$
$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 36 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 3{,}6 + 3{,}2 + 0{,}1 + 1{,}8 + 5 + 12{,}8 = 26{,}25;$$
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 26{,}5 - (1{,}9)^2 = 26{,}5 - 3{,}61 = 22{,}89;$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{22{,}89} \approx 4{,}78.$$

Приклад 11. Задано щільність імовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Обчислити D (X); σ (X). Знайти Mo; Me.

Розв'язання.

$$M(X) = \int_0^\pi xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ \sin dx = dv \rightarrow & \\ \rightarrow v = -\cos x & \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos x dx = \frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2}\sin x\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{-\pi\cos\pi + 0\cos 0}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X^2) = \int_0^\pi x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ \sin xdx = dv \rightarrow & \\ \rightarrow v = -\cos x & \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x dx\right) = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ \cos dx = dv & \\ v = \sin x & \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^\pi + 2\left(x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Bigg|_0^\pi + 2\left(x\sin x\Bigg|_0^\pi + \cos x\Bigg|_0^\pi\right)\right] = \frac{1}{2}(\pi^2 - 2) = \frac{\pi^2 - 2}{2};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\pi^2 - 2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi^2 - 4 - \pi^2}{4} = \frac{\pi^2 - 4}{4};$$

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 4}{4};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{2}.$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 54.

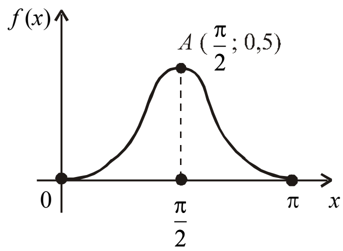

Рис. 54

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0{,}5$ є максимальним значенням, то $\text{Mo}=\frac{\pi}{2}$.

Знаходимо $F(x)=\int_0^x \frac{1}{2}\sin dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^x=\frac{1-\cos x}{2}$.

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0<x\ge\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

$$F(Me)=\frac{1-\cos Me}{2}=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad cos\,Me=0\rightarrow Me=\frac{\pi}{2}$$

Приклад 12. Задано щільність імовірностей (рис 55).

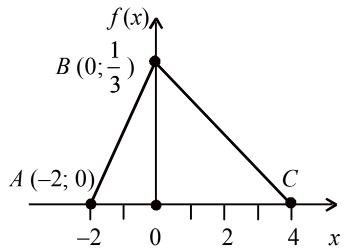

Рис. 55

Обчислити $D(X)$; $\sigma(X)$; Me. Знайти Mo.

Розв'язання. За умовою нормування знайти ординату точки B:

$$\frac{AB\cdot OB}{2}=1\rightarrow\frac{6\cdot 7}{2}=1\rightarrow y=\frac{1}{3}.$$

На проміжку [–2; 0] $f(x)=\frac{x+2}{6}$.

На [0; 4] $f(x)=-\frac{(x-4)}{12}=\frac{4-x}{12}$.

Отже, щільність імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x+2}{6}, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{4-x}{12}, & 0,\ x>4.\end{cases}$$

Знаходимо функцію розподілу ймовірностей:

На проміжку [–2; 0] $F(x)=\int\limits_{-2}^{x}\frac{x+2}{6}=\frac{(x+2)^2}{12}$.

На [–2; 4] $F(x)=F(0)+\int\limits_{0}^{x}\frac{4-x}{12}dx=\frac{4}{12}-\frac{(4-x)^2}{24}\Bigg|_0^x=$

$$=\frac{4}{12}-\frac{(x-4)^2}{24}+\frac{16}{24}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{(x-4)^2}{24}=1-\frac{(x-4)^2}{24}.$$

Отже, функцію розподілу ймовірностей можна подати у вигляді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{(x+2)^2}{12}, & -2<x\le 0;\\ 1-\dfrac{(x-4)^2}{24}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 56.

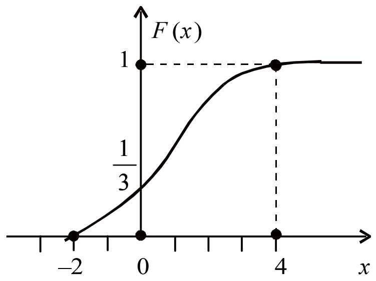

Рис. 56

Далі обчислюємо $D(X)$:

$$M(X)=\int\limits_{-2}^{0}xf(x)dx+\int\limits_{0}^{4}xf(x)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}x\frac{x+2}{6}dx+\int\limits_{0}^{4}x\frac{4-x}{12}dx=\frac{1}{6}\int\limits_{-2}^{0}(x^2+2x)dx+\frac{1}{12}\int\limits_{0}^{4}(4x-x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\int\limits_{-2}^{0}x^2dx+2\int\limits_{-2}^{0}xdx\right)+\frac{1}{12}\left(4\int\limits_{0}^{4}xdx-\int\limits_{0}^{4}x^2dx\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+x^2\Bigg|_{-2}^{0}\right)+\frac{1}{12}\left(2x^2\Bigg|_0^4-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4\right)=$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{8}{3} - 4\right) + \frac{1}{12}\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{8-12}{3}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{96-64}{3}\right) =$$

$$= -\frac{4}{18} + \frac{32}{36} = \frac{-8+32}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

$$M(X^2) = \int_{-2}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{4} x^2 f(x)dx = \frac{1}{6}\int_{-2}^{0} x^2 (x+2)dx + \frac{1}{12}\int_{0}^{4} x^2 (4-x)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{0} x^3 dx + 2\int_{-2}^{0} x^2 dx\right) + \frac{1}{12}\left(4\int_{0}^{4} x^2 dx - \int_{0}^{4} x^3 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-4 + \frac{16}{3}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{256}{3} - 64\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{-12+16}{3}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{256-192}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{18} + \frac{64}{36} = \frac{8+64}{36} = \frac{72}{36} = 2;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(x) = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 - \frac{4}{9} = \frac{18-4}{9} = \frac{14}{9};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Для визначення Me необхідно знайти проміжок, в якому вона міститься. Оскільки $F(0) = \frac{1}{3} < 0{,}5,$ то медіана належить проміжку [0; 4].

Далі маємо:

$$1 - \frac{(\text{Me}-4)^2}{24} = \frac{1}{2} \to \frac{(\text{Me}-4)^2}{24} = \frac{1}{2} \to (\text{Me}-4)^2 = 12 \to$$

$$\to \text{Me} - 4 = \pm 2\sqrt{3} \to \text{Me} = 4 \pm 2\sqrt{3} \to \text{Me} = 4 + 2\sqrt{3} \in [-2;\ 4];$$

$$\text{Me} = 4 - 2\sqrt{3} \in [-2; 4].$$

Отже, Me = $4 - 2\sqrt{3}$; Mo = 0.

6. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ ....). \tag{98}$$

Коли $k = 1$, $\nu_1 = M(X)$; коли $k = 2$, $\nu_2 = M(X^2)$ і т. д.

Для дискретної випадкової величини X

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i ; \qquad (99)$$

для неперервної

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx . \qquad (100)$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$\nu_k = \int_{0}^{d} x^k f(x) dx . \qquad (101)$$

Центральним моментом k-го порядку називається математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \quad (k = 1, 2, 3, ...). \qquad (102)$$

Коли $k = 1$, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$;

коли $k = 2$, $\mu_2 = M(X - M(X)^2 = D(X)$;

коли $k = 3$, $\mu_3 = M(X - M(X))^3$;

коли $k = 4$, $\mu_4 = M(X - M(X))^4$.

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i ; \qquad (103)$$

для неперервної

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x) dx. \qquad (104)$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$\mu_k = \int_{a}^{b} (x - M(X))^k f(x) dx . \qquad (105)$$

7. Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно $M(X)$. Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину — коефіцієнт асиметрії:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} . \qquad (106)$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність, або гостровершинність щільності ймовірності $f(x)$. Ексцес обчислюється за формулою

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{107}$$

Зауважимо, що число 3 віднімається ось чому. Для центрального закону розподілу, так званого нормального закону, виконується рівність:

$\frac{\mu_4}{\sigma_4} = 3.$ Отже, $Es = 0$.

Для наочності при різних значеннях As, Es графіки $f(x)$ зображені на рис. 57 і 58.

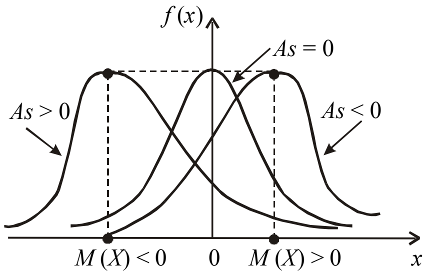

Рис. 57

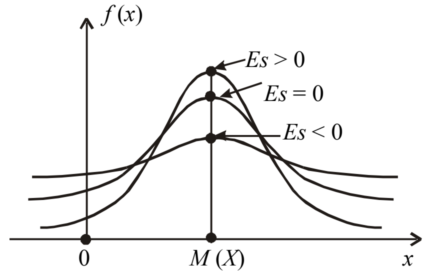

Рис. 58

Приклад 13. Задано щільність імовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{3}{4}x(2-x), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Обчислити As, Es.

Розв'язання.

$$M(X) = \int_0^2 x\, f(x)\, dx = \int_0^2 x \frac{3}{4} x(2-x)\, dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{3}{4}\left(2\int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x^3 dx\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{3}{4}\ \frac{16-12}{3} = 1.$$

$$\mu_3 = \int_0^2 (x - M(X))^3 f(x)\,dx = \int_0^2 (x-1)^3 \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (x-1)^3 (2x - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(2x - x^2\right)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 \left(5x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 2x - x^5\right)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(5\int_0^2 x^4 dx - 9\int_0^2 x^3 dx + 7\int_0^2 x^2 dx - 2\int_0^2 x dx - \int_0^2 x^5 dx\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(5\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 - \frac{9}{4}x^4\Big|_0^2 + \frac{7}{3}x^3\Big|_0^2 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^6}{6}\Big|_0^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^5\Big|_0^2 - \frac{9}{4}x^4\Big|_0^2 + \frac{7}{3}x^3\Big|_0^2 - x^2\Big|_0^2 - \frac{x^6}{6}\Big|_0^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(32 - 36 + \frac{56}{3} - 4 - \frac{32}{3}\right) = \frac{3}{4}(-8 + 8) = 0.$$

Оскільки $\mu_3 = 0$, то і $As = 0$. Отже, можливі значення випадкової величини X симетрично розподілені відносно $M(X) = 1$. Для обчислення Es необхідно знайти μ_4 і σ.

$$\mu_4 = \int_0^2 (x - M(X))^4 f(x)dx = \int_0^2 (x-1)^4 \frac{3}{4}(2x - x^2)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)(2x - x^2)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (6x^5 - 14x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 2x - x^6)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(6\int_0^2 x^5 dx - 14\int_0^2 x^4 dx + 16\int_0^2 x^3 dx + 16\int_0^2 x^3 dx - 9\int_0^2 x^2 dx + 2\int_0^2 x dx - \int_0^2 x^6 dx\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^6\Big|_0^2 - \frac{14}{5}x^5\Big|_0^2 + 4x^4\Big|_0^2 - 3x^3\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 - \frac{x^7}{7}\Big|_0^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(64 - \frac{448}{5} + 64 - 24 + 4 - \frac{128}{7}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(108 - \frac{448}{5} - \frac{128}{7}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3780 - 3776}{35}\right) = \frac{3}{35};$$

$$M(X^2)=\int_0^2 x^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\int_0^2\left(2x^3-x^4dx\right)=$$
$$=\frac{3}{4}\left(2\int_0^2 x^3\,dx-\int_0^2 x^4\,dx\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x^4\Big|_0^2-\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right)=\frac{3}{4}\left(8-\frac{32}{5}\right)=$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{40-32}{5}\right)=\frac{6}{5};$$
$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5};$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$
$$Es=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{25}}-3=30-3=27.$$

Приклад 14. За заданим законом розподілу ймовірностей

x_i	– 8	– 4	–1	1	4	8
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

обчислити As, Es.

Розв'язання. Скориставшись (103), (106) і (107), дістанемо:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=-8\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}2-1\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}1=$$
$$=-0{,}8-0{,}8-0{,}2+0{,}2+0{,}8+0{,}8=0;$$
$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i=64\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2+64\cdot 0{,}1=$$
$$=6{,}4+3{,}2+0{,}2+0{,}2+3{,}2+6{,}4=19{,}6;$$
$$\mu_3=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^3=\sum_{i=1}^{6}x_i^3 p_i=-512\cdot 0{,}1-64\cdot 0{,}2-1\cdot 0{,}2+$$
$$+1{,}0\cdot 2+64\cdot 0{,}2+512\cdot 0{,}1=-512-12{,}8-0{,}2+0{,}2+12{,}8+51{,}2=0.$$

Оскільки $\mu_3 = 0$, то й $As = 0$;

$$\mu_4=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^4 p_i=\sum_{i=1}^{6}x_i^4\ p_i=$$
$$=4096\cdot 0{,}1+256\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+256\cdot 0{,}2+4096\cdot 0{,}1=$$
$$=409{,}6+51{,}2+0{,}2+0{,}2+51{,}2+409{,}6=922;$$
$$Es=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{922}{384{,}6}-3=2{,}397-3=-0{,}603.$$

Теоретичні запитання до теми ?

1. Що називається математичним сподіванням випадкової величини?
2. Чому дорівнює $M(C)$, де C — стала величина?
3. Якщо A і B — сталі величини, то чому дорівнює $M(AX+B)$? Довести.
4. Що характеризує математичне сподівання випадкової величини?
5. Що називають відхиленням випадкової величини?
6. Чому дорівнює $M(X - M(X))$?
7. Що називають дисперсією випадкової величини?
8. Що характеризує дисперсія випадкової величини?
9. Чому дорівнює $D(C)$, де C — стала величина?
10. Чому дорівнює $D(CX)$, де C — стала величина?
11. Якщо A і B — сталі, то чому дорівнює $D(AX+B)$?
12. Що називають середнім квадратичним відхиленям випадкової величини?
13. При яких значенях сталої C виконуються співвідношення: $D(CX) = D(X)$; $D(CX) > D(X)$, $D(CX) < D(X)$?
14. Що називають модою (Mo) випадкової величини X, якщо вона є дискретною?
15. Що називається модою (Mo) неперервної випадкової величини X?
16. Який розподіл імовірностей називають антимодальним?
17. Який розподіл імовірностей називають одномодальним, двомодальним?
18. Що називають медіаною (Me) випадкової величини?
19. Чому дорівнює F (Me)?
20. При якому значенні x виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{\infty} f(x)dx?$$

21. Довести, що випадкова величина X має лише одну медіану.
22. Дати означення початкового моменту k-го порядку.
23. Дати означення центрального моменту k-го порядку.
24. Де використовується μ_3?
25. Де використовується μ_4?
26. Що характеризує ексцес?
27. Що характеризує асиметрія?

Приклади до теми

1. За заданим законом розподілу ймовірностей

x_i	–2	2	4	8	10
p_i	0,1	$2a$	0,3	0,1	3а

обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Знайти Mo.

Відповідь. $M(X)=5{,}2;\quad D(X)=15{,}36;\quad \sigma(X)=3{,}92;\quad \text{Mo}=4;\quad 10.$

2. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8, а для четвертого — 0,7. Побудувати закон розподілу величини X — числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити $M(X)$; $\sigma(X)$; As. Знайти моду.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0012	0,0232	0,1532	0,4192	0,4032

$M(X) = 3{,}2$; $\sigma(X) \approx 0{,}79;\quad As \approx -0{,}746;\quad \text{Mo} = 3.$

3. Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому — 8 стандартних і 2 браковані й у третьому — 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі.

Обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$, As для дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих. Знайти Mo.

Відповідь. $M(X) = 1{,}9$; $\sigma(X) \approx 0{,}8;\quad As \approx -0{,}038;\quad \text{Mo} = 2.$

4. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -8; \\ 0{,}1, & -8 < x \le -6; \\ 0{,}3, & -6 < x \le -4; \\ 0{,}4, & -4 < x \le -2; \\ 0{,}7, & -2 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Обчислити $M(X)$; $\sigma(X)$. Знайти Mo.

Відповідь. $M(X) = -2{,}2$; $\sigma(X) \approx 2{,}27$; Mo $= -2$; 0.

5. П’ять приладів перевіряють на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці лише в тому разі, якщо перед цим перевірений прилад виявиться надійним. Імовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, дорівнює 0,8 для кожного із них.

Обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа приладів, що пройшли перевірку. Знайти Mo.

Відповідь. $M(X) = 3{,}27968$; $\sigma(X) \approx 1{,}67$; Mo = 5.

6. У лотереї розігрується один мотоцикл вартістю 500 грн. і годинник вартістю 40 грн.

Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення виграшу.

Відповідь. $M(X) = 30{,}4$ грн.; $\sigma(X) \approx 290$ грн.

7. При підкиданні трьох гральних кубиків гравець може виграти 18 грн., якщо на трьох кубиках випаде цифра 6; 1 грн. 40 коп., якщо на двох гральних кубиках випаде цифра 6, і 20 коп., якщо лише на одному кубику з трьох випаде цифра 6. Який у середньому буде виграш гравця? Яка має бути ставка за участь у грі, щоб вона була принаймні безкоштовною?

Відповідь. $M(Y) = 25$ коп.

y_i, коп.	x	$20 - x$	$140 - x$	$1800 - x$
p_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$M(Y - X) = (1800 - x)\frac{1}{216} + (140 - x)\frac{15}{216} + (20 - x)\frac{75}{216} - x\frac{125}{126} \neq 0,$$

де x — початкова ставка, $x = 25$ коп.

8. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості очків, що з’являться в результаті одного підкидання грального кубика.

Відповідь. $M(X) = 3{,}5$; $\sigma(y) = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}$.

9. Відомі значення:

$M(X) = -2$; $D(X) = 4$.

Знайти $M(-4X + 5)$, $D(-4X + 5)$.

Відповідь. 13; 64.

10. Монета підкидається до першої появи герба. Знайти середню кількість підкидань.

Відповідь. 2.

11. Знайти $M(X^2)$, якщо $D(X) = 4$, $M(X) = 1$.

Відповідь. 5.

12. Садівник восени посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Імовірність того, що саджанець яблуні весною прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. Обчислити математичне споді-

вання та дисперсію числа саджанців, які приймуться весною. Чому дорівнює Mo?

Відповідь. $M(X) = 2{,}388$; $D(X) \approx 0{,}493$; Mo = 3.

13. Статистична обробка інформації службою автодорожніх пригод дала такі наслідки: в інтервалі часу від 16 год 30 хв до 18 год 30 хв у робочі дні може відбутися 0, одна, дві або 3 автомобільні катастрофи з імовірністю відповідно 0,92; 0,04; 0,03; 0,01.

Обчислити математичне сподівання числа катастроф у зазначений проміжок часу.

Відповідь. $M(X) = 0{,}13$.

14. Фермер очікує, що в наступному році кури на його фермі нанесуть 10000 яєць. Беручи до уваги різні витрати й коливання цін, фермер розраховує виручити не більш як 160 коп. за десяток яєць і витратити на них не більш як 80 коп. Імовірність можливих виграшів і витрати такі:

Ціна за 10 яєць, коп.	160	140	120	0	– 80
p_i	0,2	0,5	0,2	0,04	0,06

Визначити очікуваний прибуток від продажу одного десятка яєць і всіх 10000.

Відповідь. $M_1(X) = 125{,}52$ коп., $M_2(X) = 12552$ грн.

15. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа дільників випадкової величини X — навмання вибраного натурального числа з множини $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Відповідь. Закон розподілу числа дільників матиме такий вигляд:

Число дільників	1	2	3	4
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

$M = 2{,}6$; $D(X) = 0{,}54$.

16. Чотири однакові електролампочки тимчасово викрутили з відповідних патронів і поклали в ящик. Потім із ящика навмання взяли по одній лампочці і навмання вкрутили в патрони. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X — числа лампочок, які вкручені в ті патрони, з яких вони були викручені.

Відповідь.

X= k	0	1	2	3	4
$P_k = \frac{C_4^k}{2^4} = \frac{C_4^k}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$M(X) = 2$.

17. Серед п’яти однотипних телевізорів є лише один справний. Щоб на нього натрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відставляють його окремо від решти. Перевірка триває до появи справного телевізора. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X — кількості перевірених телевізорів. Знайти Мо.

Відповідь. $M(X) = 3$; $D(X) = 2$; Mo = 1; 2; 3; 4; 5.

18. Задано закон розподілу ймовірностей:

x_i	–5	–2	1	2	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Знайти $M(2X-3)$; $D(2X-3)$.

Відповідь. –2,6; 3,36.

19. За заданим імовірнісним многокутником (рис. 59) обчислити $M(-4X+1)$; $D(-4X+1)$.

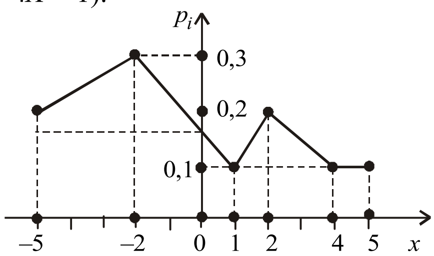

Рис. 59

Відповідь. 1,8; 165,76.

20. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$; Me.

Відповідь. 2; 2,59; Me $= 2\sqrt[3]{4} - 1$

21. Задано

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $D(X)$; Me; Mo.

Відповідь. $M(X)=\frac{\pi}{2}$; $D(X)=\frac{\pi^2-4}{4}$, $\text{Mo}=\text{Me}=\frac{\pi}{2}$.

22. Знаючи

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7,\end{cases}$$

знайти σ (*X*); Me.

Відповідь. $\sigma(X)\approx 2{,}36$; $\text{Me}=\sqrt[3]{182{,}25}-2$.

23. Закон розподілу ймовірностей зображено на рис. 60.

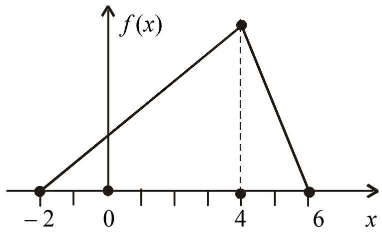

Рис. 60

Знайти *M* (*X*); σ (*X*); Mo; Me.

Відповідь. $M(X)=\frac{8}{3}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{26}}{3}$, $\text{Mo}=4$, $\text{Me}=\sqrt{24}-2$.

24. Задано закон розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3;\\ \frac{1}{4\sqrt{x+3}}, & -3<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти *D* (*X*); σ (*X*); Me.

Відповідь. $D(X)=\frac{64}{45}$, $\sigma(X)=\frac{8}{3\sqrt{5}}$, $\text{Me}=2$.

25. Задано

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 1+x\ (\ln x-1), & 1<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$$

Знайти *M* (*X*); σ (*X*).

Відповідь. $M(X) = \dfrac{e^2+1}{4}$; $\sigma(X) = \dfrac{1}{12}\sqrt{32e^3 - 9e^4 - 18e^2 + 7}$.

26. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{2}{7}\cos\dfrac{2}{7}x, & 0 < x \le \dfrac{7}{4}\pi; \\ 0, & x > \dfrac{7}{4}\pi. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь. $M(X) = \dfrac{7}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$, $D(X) = \dfrac{98\pi - 224}{16}$.

27. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ae^{-x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$. Обчислити $M(X)$ і $\sigma(X)$.

Відповідь. $a = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2\Phi\ (x\sqrt{2}), & x > 0; \end{cases}$

$M(X) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{\pi - 2}{2\pi}}$.

28. Задано

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти As; Es.

Відповідь. $As = 2$, $Es = 6$.

29. Задано

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}}, -\infty < x < \infty.$$

Знайти Mo; Me; As; Es.

Відповідь. Mo = Me = – 4; $As = 0$, $Es = 0$.

30. Випадкова величина X має щільність

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ a(1 - x^2)^a, & -1 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти a; $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь.

$$a=\frac{\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)};\ M\left(X\right)=0;\ D\left(X\right)=\frac{1}{2a+3}.$$

Тут $\Gamma\left(a\right)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx.$

31. За заданою щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ axe^{-x^2}, & x>0\end{cases}$$

знайти a; $M(X)$; $\sigma(X)$; Ме.

Відповідь. $a=2$; $M(X)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{4-\pi}}{2}$; $\text{Me}=\sqrt{\ln 2}$.

32. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ a(x+1)(x-5), & -1<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайти a, Ме, Мо, As.

Відповідь. $a=-\frac{1}{36}$; $\text{Me}=\text{Mo}=2$; $As=0$.

33. Нехай

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $D(X)$; μ_3.

34. Випадкова величина X має закон розподілу щільності ймовірностей рівнобедреного трикутника (рис. 61).

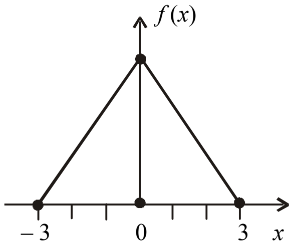

Рис. 61

Знайти $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; μ_3

Відповідь. $M(X)=0$; $D(X)=\frac{3}{2}$; $\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\mu_3=0$.

35. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2e^{-x^2}, & x>0.\end{cases}$$

Знайти a; $F(x)$; $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь. $a=\frac{4}{\sqrt{\pi}}$; $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2}dx-\frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}, & x>0.\end{cases}$

$M(X)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$; $D(X)=\frac{3\pi-8}{2\pi}$.

36. Задано

$f(x)=ae^{-\lambda|x|}$; $-\infty<x<\infty$; $\lambda>0$.

Знайти a; $F(x)$; $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь.

$$a=\frac{\lambda}{2},\quad F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x<0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

$$M(X)=0;\quad D(X)=\frac{2}{\lambda^2}.$$

37. Задано

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty.$$

Знайти a; $F(x)$; $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь. $a=\frac{1}{\pi}$; $F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}$.

38. За заданою функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ a+b\arcsin x, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1\end{cases}$$

визначити a; b; $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь. $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{\pi}$; $M(X)=0$; $D(X)=\frac{1}{2}$.

39. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{1}{m!} x^m e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

знайти $M(X)$, $D(X)$.

Відповідь. $M(X) = D(X) = m + 1$.

40. Задано щільність імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{1}{4} x\, e^{-\frac{1}{8}x^2}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X) = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; $\quad D(X) = 4\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

41. Випадкова величина X має щільність імовірностей

$$f(x) = a(1 + x^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти a; $M(X)$.

Відповідь. $a = \dfrac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$; $\quad M(X) = \dfrac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)}$.

ТЕМА 7. БАГАТОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. СИСТЕМА ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба постає, наприклад, коли досліджуваний об'єкт характеризується кількома випадковими параметрами. Так, у разі виготовлення валів такі їх параметри, як діаметр, довжина, овальність є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. Або, скажімо, структура витрат випадково взятої окремої сім'ї на їжу, одяг, взуття, транспорт, задоволення духовних потреб також є випадковими величинами, визначеними на одному й тому самому просторі елементарних подій.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини.

✓**Означення.** Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n) з певною ймовірністю являє собою n-вимірну випадкову величину, яку називають також *системою n випадкових величин*, або *n-вимірним випадковим вектором*.

1. Система двох дискретних випадкових величин (*X, Y*) та їх числові характеристики

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм імовірностей спільної появи.

У табличній формі цей закон має такий вигляд:

$X = x_j$ / $Y = y_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_m	p_{yi}
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}		p_{1m}	p_{y1}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}		p_{2m}	p_{y2}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}		p_{3m}	p_{y3}
…	…	…	…	…	…	…
y_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	…	p_{km}	p_{ym}
p_{xj}	p_{x1}	p_{x2}	p_{x3}	…	p_{xm}	

Тут використано такі позначення

$$p_{ij} = p((Y = y_i) \bigcap (X = x_j)); \quad p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}; \quad p_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}.$$

Умова нормування має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{x_j} = 1. \qquad (108)$$

2. Основні числові характеристики для випадкових величин *X, Y*, що утворюють систему (*X, Y*)

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_j p_{x_j}. \qquad (109)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_{x_j} - M^2(X). \qquad (110)$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}. \qquad (111)$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} y_i p_{y_i}. \qquad (112)$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i^2 p_{ij} - M^2(Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i^2 p_{y_i} - M^2(Y). \qquad (113)$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}. \qquad (114)$$

3. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. З відповідною метою застосовують так званий *кореляційний момент:*

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y). \qquad (115)$$

У разі $K_{xy} = 0$ зв'язок між величинами X та Y, що належать системі (X, Y), відсутній. Коли $K_{xy} \neq 0$, то між відповідними X і Y кореляційний зв'язок існує.

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (116)$$

$|r_{xy}| \leq 1$, або $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Отже, якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $K_{xy} = 0$ і $r_{xy} = 0$. Рівність нулеві r_{xy} є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин.

Справді, може існувати система залежних випадкових величин, в якої коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин (X, Y), яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом R із центром у початку координат. Дві випадкові величини X і Y називають *некорельованими*, якщо $r_{xy} = 0$, і *корельованими*, якщо $r_{xy} \neq 0$.

Отже, якщо X і Y незалежні, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

Приклад 1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y):

$Y = y_i$ \ $X = x_j$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	$0{,}1a$	$2a$	$0{,}9a$	
4,4	$2a$	$0{,}2a$	$1{,}8a$	
6,4	$1{,}9a$	$0{,}8a$	$0{,}3a$	
P_{xj}				

Знайти a. Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy}; $P(2{,}4 \le Y < 6{,}4;\ 5{,}2 < X \le 15{,}2)$.

Розв'язання.

Скориставшись умовою нормування (108), дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{ij} = 0{,}1a + 2a + 0{,}9a + 2a + 0{,}2a + 1{,}8a + 1{,}9a + 0{,}8a + 0{,}3a = 1 \Rightarrow a = 0{,}1.$$

Зі знайденим a закон системи набирає такого вигляду:

$Y = y_i$ \ $X = x_j$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{xj}	0,4	0,3	0,3	

Основні числові характеристики обчислюємо за формулами (109) — (116):

$$M(X) = \sum_{j=1}^{3} x_j p_{x_j} = 5{,}2 \cdot 0{,}4 + 10{,}2 \cdot 0{,}3 + 15{,}2 \cdot 0{,}3 = 2{,}08 + 3{,}06 + 4{,}56 = 9{,}7;$$

$$M(X^2) = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 p_{x_j} = (5{,}2)^2\ 0{,}4 + (10{,}2)^2\ 0{,}3 + (15{,}2)^2\ 0{,}3 =$$

$$= 10{,}816 + 31{,}212 + 69{,}312 = 111{,}34;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 111{,}34 - 94{,}09 = 17{,}25;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 4{,}15;$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i p_{y_i} = 2{,}4 \cdot 0{,}3 + 4{,}4 \cdot 0{,}4 + 6{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}72 + 1{,}76 + 1{,}92 = 4{,}4;$$

$$M(Y^2) = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 p_{y_i} = (2{,}4)^2\ 0{,}3 + (4{,}4)^2\ 0{,}4 + (6{,}4)^2\ 0{,}3 =$$

$$= 1{,}728 + 7{,}744 + 12{,}288 = 21{,}76;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 21{,}76 - (4{,}4)^2 = 21{,}76 - 19{,}36 = 2{,}4;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 1{,}55;$$

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} y_i x_j p_{ij} = 2{,}4 \cdot 5{,}2 \cdot 0{,}01 + 2{,}4 \cdot 10{,}2 \cdot 0{,}2 + 2{,}4 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}09 +$$

$$+ 4{,}4 \cdot 5{,}2 \cdot 0{,}2 + 4{,}4 \cdot 10{,}2 \cdot 0{,}02 + 4{,}4 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}18 + 6{,}4 \cdot 5{,}2 \cdot 0{,}19 +$$

$$+ 6{,}4 \cdot 10{,}2 \cdot 0{,}08 + 6{,}4 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}1248 + 4{,}896 + 3{,}2832 + 4{,}576 +$$

$$+ 0{,}8976 + 12{,}0384 + 6{,}3232 + 5{,}2224 + 2{,}9184 = 40{,}28;$$

$$K_{xy} = M(XY) — M(X)\, M(Y) = 40{,}28 - 9{,}7 \cdot 4{,}4 = 40{,}28 - 42{,}68 = 1{,}4.$$

Оскільки $K_{xy} > 0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв'язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-2{,}4}{4{,}15 \cdot 1{,}55} \approx 0{,}37.$$

Остаточно маємо:

$$p(2{,}4 \le Y < 6{,}4;\ \ 5{,}2 < X \le 15{,}2) = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}31.$$

4. Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $X = x_i$ та відповідних їм умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_i$.

У табличній формі запису умовний закон $X\ /\ Y = y_i$ має такий вигляд:

$X = x_j$	x_1	x_2	x_3	…	x_m
$P(X = x_j / Y = y_i) = \dfrac{P((X = x_j) \bigcap (Y = y_i))}{P(Y = y_i)} = \dfrac{P_{ij}}{P_{y_i}}$	P_{i1} / P_{y1}	P_{i2} / P_{y2}	P_{i3} / P_{y3}	…	P_{im} / P_{ym}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{j=1}^{m} P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \frac{P_{y_i}}{P_{y_i}} = 1. \quad (\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = P_{y_i}).$$

Числові характеристики для цього закону називають умовними.

Умовне математичне сподівання

$$M(X/Y=y_i)=\sum_{j=1}^{m}x_jP(X=x_j/Y=y_i)=\sum_{j=1}^{m}x_j\frac{P_{ij}}{P_{y_i}}=\frac{1}{P_{y_i}}\sum_{j=1}^{m}x_jP_{ij}. \qquad (117)$$

Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення обчислюються відповідно за формулами

$$D(X/Y=y_i)=\frac{1}{P_{y_i}}\sum_{j=1}^{m}x_j^2P_{ij}-M^2(X/Y=y_i); \qquad (118)$$

$$\sigma(X/Y=y_i)=\sqrt{D(X/Y=y_i)}. \qquad (119)$$

Умовним законом розподілу випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $Y = y_j$ і відповідних їм умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X = x_i$.

У табличній формі запису умовний закон має такий вигляд:

$Y=y_j$	y_1	y_2	y_3	…	y_m
$P(Y=y_j/X=x_i)=\dfrac{P((Y=y_j)\cap(X=x_i))}{P(X=x_i)}=\dfrac{P_{ij}}{P_{x_i}}$	P_{1j}/P_{x1}	P_{2j}/P_{x2}	P_{3j}/P_{x3}	…	P_{mj}/P_{xm}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{i=1}^{k}P(Y=y_i/X=x_j)=\sum_{j=1}^{m}\frac{P_{ij}}{P_{x_i}}=\frac{1}{P_{x_i}}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}=\frac{P_{x_i}}{P_{x_i}}=1. \quad (\sum_{j=1}^{m}P_{ij}=P_{x_i}).$$

Умовне математичне сподівання

$$M(Y/X=x_i)=\sum_{i=1}^{m}y_jP(Y=y_j/X=x_i)=\sum_{i=1}^{k}y_j\frac{P_{ij}}{P_{x_i}}=\frac{1}{P_{x_i}}\sum_{i=1}^{k}y_jP_{ij}. \qquad (120)$$

Умовна дисперсія

$$D(Y/X=x_i)=\frac{1}{P_{x_i}}\sum_{i=1}^{k}y_j^2P_{ij}-M^2(Y/X=x_i). \qquad (121)$$

Умовне середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y/X=x_i)=\sqrt{D(Y/X=x_i}. \qquad (122)$$

Приклад 2. Задано двовимірний закон розподілу:

$Y=y_i$ \ $X=x_j$	10	20	30	P_{yi}
– 6	0,02	0,05	0,03	0,1
– 4	0,08	0,15	0,07	0,3
– 2	0,2	0,3	0,1	0,6
P_{xj}	0,3	0,5	0,2	

Обчислити $M(X/Y=-4)$; $M(X/Y=30)$; $\sigma(Y/X=-4)$; $\sigma(Y/X=30)$.

Розв'язання. Для обчислення $M(X/Y=-4)$, $M(X/Y=30)$ необхідно побудувати відповідні умовні закони розподілу.

Умовний закон розподілу $X / Y = -4$:

$X = x_j$	10	20	30
$P(X = x_j / Y = -4) = \dfrac{P((X = x_j) \bigcap (Y = y_i))}{P(Y = -4)} = \dfrac{P_{ij}}{0,3}$	0,08/0,3	0,15/0,3	0,07/0,3

$$\sum P(X / Y = -4) = 0,8 / 0,3 + 0,15 / 0,3 + 0,07 / 0,3 = 1$$

$$M(X / Y = -4) = 1 / 0,3\ (10 \cdot 0,08 + 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,07) =$$

$$= \frac{1}{0,3}\ (0,8 + 3 + 2,1) = 3,2 / 0,3 = 10,7;$$

$$M(X^2 / Y = -4) = 1 / 0,3\ (100 \cdot 0,08 + 400 \cdot 0,15 + 900 \cdot 0,07) =$$

$$= \frac{1}{0,3}\ (8 + 60 + 63) = 131 / 0,3 = 1310 / 3;$$

$$D\,(X / Y = -4) = 1310 / 3 - (32 / 3)^2 = 1310 / 3 - 3481 / 9 = (3930 - 3481) / 9 = 449 / 9;$$

$$\sigma(X / Y = -4) = (449 / 9)^{0,5} = 1 / 3(2906)^{0,5} = 7,1.$$

Умовний закон розподілу $Y / X = 30$:

$Y = y_j$	-6	-4	-2
$P(Y = y_j / X = 30) = \dfrac{P((Y = y_j) \bigcap (X = x_i))}{P(X = 30)} = \dfrac{P_{ij}}{0,2}$	0,03 / 0,2	0,07 / 0,2	0,1 / 0,2

$$\sum P\,(Y / X = 30) = 0,03 / 0,2 + 0,07 / 0,2 + 0,1 / 0,2 = 1;$$

$$M\,(Y / X = 30) = \frac{1}{0,2}\ 1 / 0,2\ (-6 \cdot 0,03 - 4 \cdot 0,07 - 2 \cdot 0,1) =$$

$$= 1 / 0,2\ (-0,18 - 0,28 - 0,2) = -0,66 / 0,2 = -3,3;$$

$$M\,(Y^2 / X = 30) = \frac{1}{0,2}\ (36 \cdot 0,03 + 16 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,1)\ 1 / 0,2\ (1,08 +$$

$$+ 1,12 + 0,4) = 2,6 / 0,2 = 13;$$

$$D\,(Y / X = 30) = 13 - (-3,3)^2 = 13 - 10,89 = 2,11;$$

$$\sigma\,(X / Y = -4) = (2,11)^{0,5} = 1,45.$$

Приклад 3. Ймовірність того, що при перевірці деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,8. Перевірці підлягають 3 деталі. Побудувати закон системи двох дискретних випадкових величин X — появи числа бракованих деталей і Y — появи числа стандартних деталей. Обчислити r_{xy}.

Розв'язання. Запишемо закон у табличній формі:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	Py_i
0	0	0	0	$C_3^0 p^0 q^3$	
1	0	0	$C_3^1 p^1 q^2$	0	
2	0	$C_3^2 p^2 q^1$	0	0	
3	$C_3^3 p^3 q^0$	0	0	0	
Px_j					

Обчисливши ймовірності, дістанемо:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	P_{yi}
0	0	0	0	0,008	0,008
1	0	0	0,096	0	0,096
2	0	0,384	0	0	0,384
3	0,512	0	0	0	0,512
P_{xj}	0,512	0,384	0,096	0,008	

$M(X) = \sum x_i\, px_i = 0 \cdot 0{,}512 + 1 \cdot 0{,}384 + 2 \cdot 0{,}096 + 3 \cdot 0{,}008 = 0{,}6;$
$M(X^2) = \Sigma x_j^2 px_j = 0 \cdot 0{,}512 + 1 \cdot 0{,}384 + 4 \cdot 0{,}096 + 9 \cdot 0{,}008 =$
$= 0{,}384 + 0{,}384 + 0{,}072 = 0{,}84;$
$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0{,}84 - 0{,}36 = 0{,}48;$
$\sigma_x = (0{,}48)^{0,5};$
$M(Y) = \Sigma y_i py_i = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 0{,}096 +$
$+ 0{,}768 + 0{,}536 = 2{,}4;$
$M(Y^2) = \Sigma y_i^2 py_i = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 4 \cdot 0{,}384 + 9 \cdot 0{,}512 = 0{,}096 +$
$+ 1{,}536 + 4{,}608 = 6{,}24;$
$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 6{,}24 - (2{,}4)^2 = 6{,}24 - 5{,}76 = 0{,}48;$
$\sigma_y = (0{,}48)^{0,5};$
$M(XY) = \Sigma y_i x_j p_{ij} = 2 \cdot 0{,}384 + 2 \cdot 0{,}096 = 0{,}96;$
$K_{xy} = M(XY) - M(X)\, M(Y) = 0{,}96 - 2{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}96 - 1{,}44 = -0{,}48;$
$r_{xy} = K_{xy} / \sigma_x \sigma_y = -0{,}48 / 0{,}48 = -1.$

5. Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин та її властивості

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x, y, яка визначає ймовірність спільної появи подій $(X < x) \cap (Y < y)$:

$$F(x,y) = P((X < x) \cap (Y < y)). \qquad (123)$$

Геометрично ця функція зображена на рис. 62

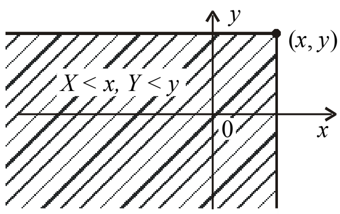

Рис. 62

Властивості $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$, оскільки $0 \le P((X < x) \cap (y < y)) \le 1$.

2. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F(x,\infty) = F(x); \tag{124}$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F(\infty,y) = F(y). \tag{125}$$

3. $\lim\limits_{\substack{y\to\infty,\\ x\to\infty}} F(x,y) = F(\infty,\infty) = P(x<\infty, y<\infty) = 1$. (126)

4. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0.$ (127)

5. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів x і y.

! **Доведення.**

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y),\ x_2 > x_1.$$

Нехай $A = (X < x_2,\ Y < y)$, $B = (X < x_1,\ Y < y)$, $C = (x_1 < X < x_2,\ Y < y)$ (рис. 63 а).

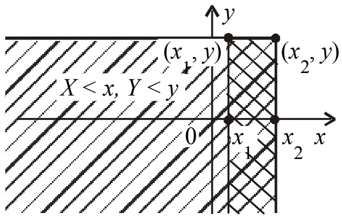

Рис. 63 а

Оскільки $B \cap C \neq \varnothing$, то $A = B \cup C$ ($A = B + C$).

Тоді $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

Узявши до уваги, що

$P(A) = P(X < x_2, Y < y) = F(x_2, y);$

$P(B) = P(X < x_1, Y < y) = F(x_1, y);$

$P(C) = P(x_1 < X < x_2, Y < y),$

дістанемо:

$F(x_2, y) = F(x_1, y) + P(x_1 < X < x_2, Y < y_1) \to$

$\to F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 < X < x_2, Y < y) \ge 0 \to$

$\to F(x_2, y) - F(x_1, y) \ge 0 \to F(x_2, y) \ge F(x_1, y).$

Аналогічно доведемо, що

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1),\ y_2 > y_1.$

Позначимо тепер $A = (X < x,\ Y < y_2)$, $B = (X < x,\ Y < y_1)$, $C = (X < x,\ y_1 < У < y_2)$ (рис 63 б).

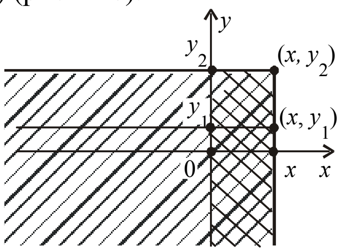

Рис. 63 б

Оскільки $B \cap C = \varnothing$, то $A = B \cup C \to P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

$P(X < x, Y < y_2) = P(X < x, Y < y_1) + P(X < x, y_1 < Y < y_2) \to$
$\to F(x, y_2) = F(x, y_1) + P(X < x, y_1 < Y < y_2) \to$
$\to F(x, y_2) - F(x, y_1) = P(X < x, y_1 < Y < y_2) \geq 0 \to$
$\to F(x, y_2) - F(x, y_1) \geq 0 \to F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

Скориставшись властивістю (5), можна обчислити ймовірності

$$P(a < X < b,\ Y < y) = F(b, y) - F(a, y);$$
$$P(X < x,\ c < Y < d) = F(x, d) - F(x, c). \qquad (128)$$

6. Імовірність влучення точки (X, Y) в довільний прямокутник $(a < X < b,\ c < Y < d)$ обчислюємо так:

$$P(a < x < b,\ c < y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c). \qquad (129)$$

! **Доведення.**

Розглянемо такі випадкові події:

$A = (X < b,\ Y < d)$; $B = (X < a,\ Y < c)$; $C = (a < X < b,\ Y < c)$; $D = (X < a,\ c < Y < d)$; $E = (a < X < b,\ c < Y < d)$ (рис. 64).

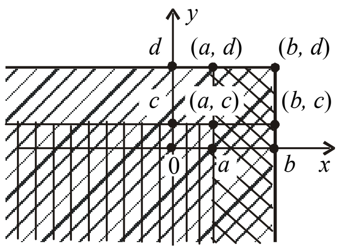

Рис. 64

Оскільки випадкові події B, C, D, E несумісні, маємо:

$A = B \cup C \cup D \cup E$.
$P(A) = P(B \cup C \cup D \cup E) = P(B) + P(C) + P(D) + P(E)$.

$P(x < b, y < d) = P(x < a, y < c) + P(a < x < b, y < c) +$
$+ P(x < a, c < y < d) + P(a < x < b, c < y < d).$

Згідно із (128) дістанемо:

$F(b, d) = F(a, c) + F(b, c) - F(a, c) + F(a, d) - F(a, c) +$
$+ P(a < X < b, c < Y < d);$

$P(a < X < b, c < Y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c)$, що й треба було довести

Приклад 4. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & x \le 0, y \le 0; \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Обчислити $P(0 < x < 4, 0 < y < 2)$.

Розв'язання. Відповідну графічну схему зображено на рис. 65.

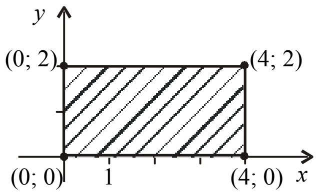

Рис. 65

Далі згідно зі (129) маємо:

$$P(0 < x < 4; 0 < y < 2) = F(4; 2) + F(0; 0) - F(0; 2) - F(4; 0) = 1 - e^{-8} - e^{-6} + e^{-14}.$$

6. Щільність імовірностей системи двох неперервних випадкових величин (*X, Y*), *f*(*x, y*) та її властивості

Характеристикою системи неперервних випадкових величин є щільність імовірностей.

Для визначення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) застосовується формула (129).

Розглянемо прямокутник зі сторонами Δx та Δy (рис. 66).

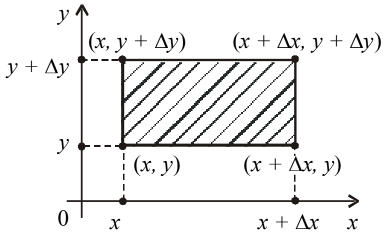

Рис. 66

Імовірність розміщення системи (X, Y) у прямокутній області ($x < X < x + \Delta x$, $y < Y < y + \Delta y$) обчислюється за формулою

$$P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) =$$
$$= F(x + \Delta x, y + \Delta y) + F(x, y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y).$$

Поділивши цю ймовірність на площу прямокутника Δx, Δy і спрямувавши $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, дістанемо ймовірність у точці, тобто щільність:

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} =$$
$$= \lim \frac{(F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)) - (F(x + \Delta x, y) - F(x, y))}{\Delta x \Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \Big(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} -$$
$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \Big) =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F'_x(x, y + \Delta y) - F'_x(x, y)}{\Delta y} = F''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial_x \partial_y} = f(x, y).$$

Отже,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial_x \partial_y}. \tag{130}$$

Функція $f(x, y)$ може існувати лише за умови, що $F(x, y)$ є неперервною за аргументами x і y та двічі диференційовною.

Функції $f(x, y)$ у тривимірному просторі відповідає певна поверхня — так звана *поверхня розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин* (X, Y).

Тоді $f(x, y)\,dxdy$ — імовірність розміщення системи двох випадкових величин у прямокутнику зі сторонами dx, dy.

Властивості $f(x, y)$

1. Функція $f(x, y) \geq 0$, оскільки $F(x, y)$ є неспадною відносно аргументів x і y.

2. Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) така:

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = 1. \tag{131}$$

Якщо $\Omega = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$, то (131) набирає такого вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1. \tag{132}$$

3. Імовірність розміщення системи змінних (x, y) в області $D \subset \Omega$ обчислюється так:

$$P((x,y) \in D) = \iint_D f(x,y)dx\,dy. \qquad (133)$$

Імовірність розміщення системи змінних (x, y) у прямокутній області $D = (a < x < b,\ c < y < d)$

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dx\,dy. \qquad (134)$$

4. Функція розподілу ймовірностей системи двох змінних визначається з рівняння

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx\,dy. \qquad (135)$$

5. Якщо $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$, то $F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(x,y)dx\,dy. \qquad (136)$

Приклад 5. Задано
$f(x, y) = a$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $a = \text{const}$;
$f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$,
де $\Omega = (-2 \le x \le 4, -3 \le y \le 5)$.
Знайти a і $F(x, y)$. Обчислити $P(-1 < x < 2, -2 < y < 3)$.

Розв'язання. Множина Ω зображена на рис. 67.

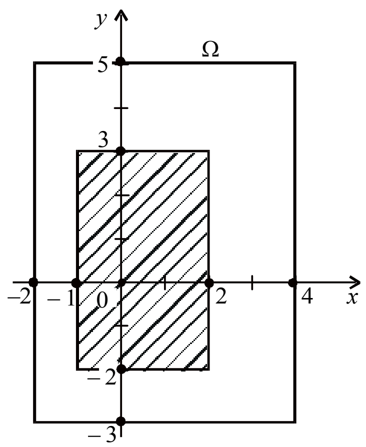

Рис. 67

Для визначення a застосовуємо умову нормування (131):

$$\iint_\Omega f(x,y)dx\,dy = 1 \to \int_{-2}^{4} \int_{-3}^{5} a\,dx\,dy = 1 \to a = \frac{1}{\int_{-2}^{4} \int_{-3}^{5} dx\,dy} = \frac{1}{48},$$

де $\int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-3}^{5} dx\, dy = \int\limits_{-2}^{4} dx \int\limits_{-3}^{5} dy = (x\big|_{-2}^{4})\,(y\big|_{-3}^{5}) = 6\cdot 8 = 48$.

Отже, маємо

$f(x, y) = 1/48$, якщо $(x, y) \in \Omega$,

$f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$.

Згідно зі (136) при $-2 < x < 4$, $-3 < y < 5$ дістанемо:

$$F(x, y) = \int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-3}^{y} f(x, y)dx\, dy = \int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-3}^{y} \frac{1}{48} dx\, dy = \frac{1}{48}\int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-3}^{y} dx\, dy = \frac{1}{48}(x\big|_{-2}^{x})\,(y\big|_{-3}^{y}) =$$
$$= \frac{(x+2)(y+3)}{48}.$$

Якщо $-2 < x < 4$, $y > 5$, то

$$F(x, 5) = \frac{(x+2)(5+3)}{48} = \frac{x+2}{6}.$$

Якщо $x > 4$, $-3 < y < 5$, то

$$F(x, 5) = \frac{(4+2)(y+3)}{48} = \frac{y+3}{8}.$$

Звідси

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le -2,\ y \le -3; \\ \dfrac{x+2}{6}, & -2 < x \le 4,\ y > 5; \\ \dfrac{(x+2)(y+3)}{48}, & -2 < x \le 4,\ -3 < y \le 5; \\ \dfrac{y+3}{8}, & x > 4,\ -3 < y \le 5; \\ 1, & x > 4,\ y > 5. \end{cases}$$

$$P(-1 < x < 2,\ -2 < y < 3) = \int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{-2}^{3} f(x, y)dx\ dy = \int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{-2}^{3} \frac{1}{48} dx\ dy =$$
$$= \frac{1}{48}\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{-2}^{3} dy = \frac{1}{48}(x\big|_{-1}^{2})(y\big|_{-2}^{3}) = \frac{1}{48}3\cdot 5 = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}.$$

7. Основні числові характеристики для системи двох неперервних випадкових величин (*X, Y*)

$$M(X) = \iint\limits_{\Omega} xf(x, y)dx\, dy; \qquad (137)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \iint\limits_{\Omega} x^2 f(x, y)dx\, dy - M^2(X); \qquad (138)$$

$$M(Y)=\iint_{\Omega} yf(x,y)dx\,dy; \qquad (139)$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\iint_{\Omega} y^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(Y); \qquad (140)$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}; \qquad (141)$$

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=\iint_{\Omega} xy\ f(x,y)dx\,dy-M(X)M(Y); \qquad (142)$$

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \quad \left|r_{xy}\right|\le 1;$$

Якщо $\Omega=\{-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$, то виконуються співвідношення:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dx\,dy; \qquad (143)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(X); \qquad (144)$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dx\,dy; \qquad (145)$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(Y); \qquad (146)$$

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f(x,y)dx\,dy-M(X)M(Y). \qquad (147)$$

Якщо $\Omega=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, то маємо:

$$M(X)=\int_{b}^{a}\int_{c}^{d} xf(x,y)dx\,dy; \qquad (148)$$

$$D(X)=\int_{b}^{a}\int_{c}^{d} x^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(X); \qquad (149)$$

$$M(Y)=\int_{b}^{a}\int_{c}^{d} yf(x,y)dx\,dy; \qquad (150)$$

$$D(Y)=\int_{b}^{a}\int_{c}^{d} y^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(Y); \qquad (151)$$

$$K_{xy}=\int_{b}^{a}\int_{c}^{d} xy\ f(x,y)dx\,dy-M(X)M(Y). \qquad (152)$$

8. Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин *X* і *Y*, які утворюють систему (*X*, *Y*)

Як і в системі двох дискретних випадкових величин, у системі двох неперервних випадкових величин розглядаються умовні закони розподілу.

Ураховуючи (124), можна записати

$$F(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy;$$

$$F(y) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy. \qquad (153)$$

Звідси

$$f(x) = F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx\right)'_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad (154)$$

$$f(y) = F'(y) = \left(\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy\right)'_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (155)$$

Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин X, Y, що утворюють систему (X, Y), визначаються умовними щільностями ймовірностей $f(x/y)$, $f(y/x)$:

$$f(y/x) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(y < Y < y+\Delta y / X = x)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(y < Y < y+\Delta y / x < X < x+\Delta x)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(y < Y < y+\Delta y,\ x < X < x+\Delta x)\Delta x}{\Delta y\ \Delta x\ P(x < X < x+\Delta x)} =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{Тут застосовується формула умовної ймовірності}\\ P(y < Y < y+\Delta y / x < X < x+\Delta x) = \dfrac{P(y < Y < y+\Delta y, x < X < x+\Delta x)}{P(x < X < x+\Delta x)}\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{P(y < Y < y+\Delta y,\ x < X < x+\Delta x)}{\Delta x\ \Delta y}}{\dfrac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\dfrac{F(y+\Delta y,\, x+\Delta x) + F(x,y) - F(x+\Delta x) - F(x,\, y+\Delta y)}{\Delta x\ \Delta y}}{\dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{F(y+\Delta y,\, x+\Delta x) + F(x,\, y) - F(x+\Delta x) - F(x,\, y+\Delta y)}{\Delta x\ \Delta y}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}} =$$

$=\Big|$ використовуючи доведення (130), (69) для $f(x,y)$ і $f(x)$, маємо $\Big| =$

$$= \frac{f(x,\, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\, y)dy}. \qquad (156)$$

Аналогічно доводимо співвідношення

$$f(x/y) = \frac{f(x,\, y)}{f(y)} = \frac{f(x,\, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\, y)dx}. \qquad (157)$$

Із (156), (157) дістаємо

$$f(x,\, y) = f(x) f(y/x) = f(y) f(x/y). \qquad (158)$$

Для умовних законів розподілу неперервних випадкових величин умова нормування має такий вигляд:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x/y)dx = 1, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y/x)dy = 1. \qquad (159)$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то

$$f(x/y) = f(x), f(y/x) = f(y). \qquad (160)$$

У цьому разі (158) набирає вигляду

$$f(x,\, y) = f(x) f(y). \qquad (161)$$

Для незалежних випадкових величин X та Y виконується рівність

$$F(x,\, y) = F(x)\ F(y). \qquad (162)$$

Числові характеристики для умовних законів розподілу ймовірностей:

$$M(X/y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf\,(x/y)dx; \qquad (163)$$

$$M(Y/x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy; \qquad (164)$$

$$D(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x/y)dx - M^2(X/y); \qquad (165)$$

$$D(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y/x)dy - M^2(Y/x). \qquad (166)$$

9. Стохастична залежність

Дві випадкові події називаються *незалежними*, якщо $P((X < x \bigcap (Y < y)) = P(X < x)P(Y < y)$, або $F(x, y) = F(x)\,F(y)$.

Для неперервних випадкових величин X і Y умову незалежності можна подати через щільності ймовірностей:

$$f(x, y) = f(x) f(y).$$

Умову незалежності можна записати і так:

$$f(x/y) = f(x), f(y/x) = f(y).$$

Залежність випадкових величин у певному розумінні є узагальненням поняття функціональної залежності. Якщо в разі функціональної залежності між величинами X та Y кожному значенню $X = x$ відповідає певне значення $Y = y$, то в разі залежності між випадковими величинами Y і X кожному можливому значенню $X = x$ відповідає множина значень Y, які характеризуються умовними щільностями ймовірності $f(y/x)$.

Отже, залежність між випадковими величинами означає аналітичну залежність щільності умовного розподілу однієї з них від значень, яких набуває друга величина. Таку залежність називають *стохастичною* або ймовірнісною. Виявляється вона не лише у зміні умовних законів розподілу, а й у зміні умовних числових характеристик: $M(X/y)$, $M(Y/x)$, $D(X/y)$, $D(Y/x)$, тобто умовних математичних сподівань та умовних дисперсій (рис. *A*—*F*).

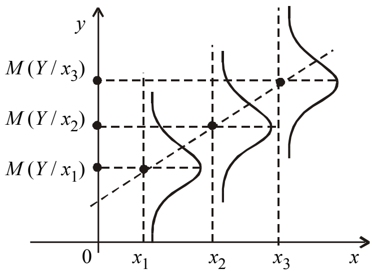

Рис. *A*. Стохастична і кореляційна залежність між Y та X, $M(Y/x) = \alpha(x)$

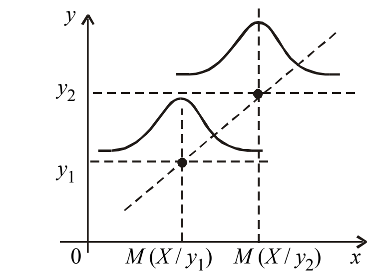

Рис. *B*. Стохастична і кореляційна залежність між X та Y, $M(X/y) = \beta(y)$

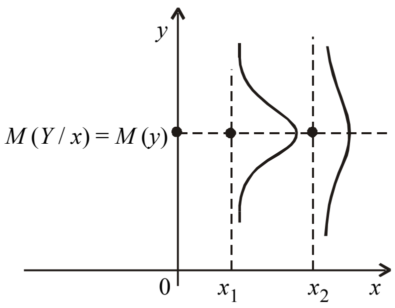

Рис. *C*. Стохастична залежність між Y та X, $D\,(Y / x) = \alpha(x)$; кореляційний зв'язок відсутній

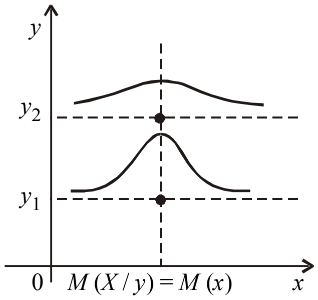

Рис. *D*. Стохастична залежність між X і Y, $D\,(X / y) = \beta(y)$; кореляційний зв'язок відсутній

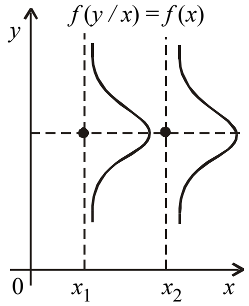

Рис. *E*. Незалежні випадкові величини

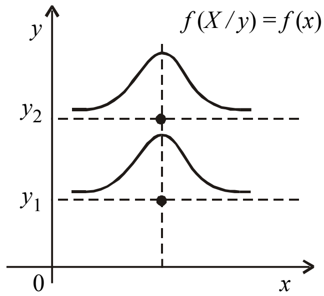

Рис. *F*. Незалежні випадкові величини

Отже, рис. *A*, *B* ілюструють те, що кореляційною залежністю між випадковими величинами Y і X є функціональна залежність умовних математичних сподівань $M\,(X / y)$, $M\,(Y / x)$ від аргументів y та x:

$$M\,(X / y) = \alpha(y). \tag{167}$$

$$M\,(Y / x) = \beta(x). \tag{168}$$

Рівняння (167) та (168) називають *рівняннями регресії*. Якщо $M\,(Y / x) = M\,(y)$, $M\,(X / y) = M\,(x)$, то кореляційна залежність відсутня, але існує стохастична залежність (див. рис. *C* і *D*), оскільки змінюються умовні дисперсії. Випадок, коли між X і Y відсутня стохастична, а отже, і кореляційна залежність, ілюструють рис. *E* і *F*.

Отже, якщо між випадковими величинами Y і X існує кореляційна залежність, то між ними обов'язково існує й стохастична залежність. Але за наявності стохастичної залежності між випадковими величинами X і Y кореляційної залежності між ними може й не бути.

Приклад 6.

Задано $f(x, y) = 1/48$, якщо $(x, y) \in \Omega$; $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$.

Де $\Omega = \{-4 \le x \le 2,\ -3 \le y \le 5\}$.

Знайти K_{xy}, r_{xy}.

Розв'язання. Застосовуючи (148) — (152), дістаємо:

$$M(X) = \int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} xf(x,y)dx\,dy = \int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} x\frac{1}{48}dx\,dy = \frac{1}{48}\int_{-4}^{2} x\,dx\int_{-3}^{5} dy =$$

$$= \frac{1}{48}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{2}\right)\left(y\Big|_{-3}^{5}\right) = \frac{1}{96}(4-16)\,(5+3) = \frac{-12\cdot 8}{96} = -1;$$

$$M(Y) = \int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} yf(x,y)dx\,dy = \int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} y\frac{1}{48}dy\,dx = \frac{1}{48}\int_{-4}^{2} dx\int_{-3}^{5} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{48}x\Big|_{-4}^{2}\frac{y^2}{2}\Big|_{-3}^{5} = \frac{1}{96}(2+4)(25-9) = \frac{6\cdot 16}{96} = 1;$$

$$M(XY) = \int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} xy\ f(x,y)dx\,dy = \int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} xy\frac{1}{48}dx\,dy = \frac{1}{48}\int_{-4}^{2} x\,dx\int_{-3}^{5} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{48}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{2}\right)\left(y^2\Big|_{-3}^{5}\right) = \frac{1}{192}(4-16)(25-9) =$$

$$= \frac{1}{192}(-12)\,16 = -\frac{192}{192} = -1;$$

$K_{xy} = M(XY) - M(X)\,M(Y) = -1 - (-1)1 = -1+1 = 0.$

Отже, $K_{xy} = 0$, що говорить нам про відсутність кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y.

Оскільки $K_{xy} = 0$, то й $r_{xy} = 0$.

При знайдених $f(x)$, $f(y)$ числові характеристики можна обчислити і за такими формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx; \tag{169}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X); \tag{170}$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy; \tag{171}$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy - M^2(Y). \tag{172}$$

Приклад 7. Задано

$$f(x,y) = a\ e^{-x^2+xy-y^2} \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

Знайти a, $M(x/y)$, $M(y/x)$. Обчислити r_{xy}.

Розв'язання. Згідно з умовою нормування (132) маємо:

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+xy-y^2}dx\,dy} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+xy-y^2}dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx\right)dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ dx = \dfrac{dz}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2}}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)dy =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}y^2}dy = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{2\pi} \quad \textit{є інтегралом Пуассона}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}y^2}dy = \left|\sqrt{\frac{3}{2}}y = t \to dy = \sqrt{\frac{2}{3}}dt\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}\sqrt{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Отже, $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$ і при цьому

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-x^2+xy-y^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty.$$

Скориставшись (154), знайдемо

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+xy-y^2}dy = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} y - \dfrac{x}{2} = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ dy = \dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}x^2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}.$$

Отже,

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Далі, застосувавши (155), знайдемо:

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+xy-y^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{array}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{3}{4}y^2}\sqrt{2\pi}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{4}y^2}.$$

Отже,

$$f(y)=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{4}y^2}, \quad -\infty<y<\infty.$$

Знайдемо основні числові характеристики. Згідно з (137) — (142) маємо:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{3}{4}x^2}dx=0,$$

оскільки підінтегральна функція є непарною, а межі інтегрування симетричні відносно нуля.

$$D(X)=M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{3}{4}x^2}dx=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{3}{4}x^2}dx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx \\ xe^{-\frac{3}{4}x^2}dx=dv\to \\ \to v=-\dfrac{2}{3}e^{-\frac{3}{4}x^2} \end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}xe^{-\frac{3}{4}x^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{4}x^2}dx\right]=\left|\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{3}{2}}x=t\to \\ \to dx=\sqrt{\dfrac{2}{3}}dt \end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}xe^{-\frac{3}{4}x^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt\right]=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{2}{3}.$$

Отже, $D(X)=\dfrac{2}{3}$, звідки $\sigma(X)=\sigma_x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{3}{4}y^2}dy=0.$$

$$D(Y)=M(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=\left|\begin{array}{l} u=y,\ du=dy \\ ye^{-\frac{3}{4}y^2}dy=dv\to \\ \to v=-\dfrac{2}{3}e^{-\frac{3}{4}y^2}\end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{4}y^2}dy\right]=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,y=t\to \\ \to dy=\sqrt{\dfrac{2}{3}}dt\end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{2}{3}.$$

Отже, $D(Y)=\dfrac{2}{3}$. Тоді $\sigma(Y)=\sigma_y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f(xy)dx\,dy=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ e^{-x^2+xy-y^2}dx\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx\right)dy=\left|\begin{array}{l} x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ x=\dfrac{z}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{2} \\ dx=\dfrac{dz}{\sqrt{2}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{y}{2}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{y}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}\,dy=2\,\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{2\pi}\int_{0}^{\infty}y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}\,dy=\left|\begin{array}{l}u=y,\quad du=dy,\\ ye^{-\frac{3}{4}y^2}\,dy=dv\to v=-\frac{2}{3}\,e^{-\frac{3}{4}y^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}\,ye^{-\frac{3}{4}y^2}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}\,dy\right]=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}\,dy=$$

$$=\left|\sqrt{\frac{3}{2}}y=t\to dy=\sqrt{\frac{2}{3}}dt\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{3}\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{1}{3}.$$

Таким чином, дістали

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\,M(Y)=\frac{1}{3};$$

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\,.$$

Визначимо умовні щільності ймовірностей, скориставшись (156) і (157):

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-x^2+xy-y^2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{3}{4}x^2}}=\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}x^2+xy-y^2}\,.$$

Отже,

$$f(x/y)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2}\,,\quad -\infty<y<\infty.$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-x^2+xy-y^2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{3}{4}y^2}}=\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2}\,.$$

Звідси

$$f(x/y)=\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2}\,,\quad -\infty<x<\infty.$$

$$M(X/y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}y=\frac{z}{\sqrt{2}}\to x=\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}y \\ dx=\frac{dz}{\sqrt{2}} \end{array}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}y\right)e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{2}y\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}y\sqrt{2\pi}=\frac{1}{2}y.$$

Отже, $M(X/y)=\frac{1}{2}y$ є лінійною функцією регресії відносно аргументу y.

Аналогічно маємо:

$$M(Y/x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2}dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l} y-\frac{1}{2}x=\frac{t}{\sqrt{2}},\to y=\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}x \\ dy=\frac{dt}{\sqrt{2}} \end{array}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{2}x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}x\sqrt{2\pi}=\frac{1}{2}x.$$

Таким чином $M(X/y)=\frac{1}{2}y$ також є лінійною функцією регресії відносно аргументу x.

Приклад 8. Задано
$f(x,y)=a\,(x+y)$, якщо $(x,y)\in\Omega$;
$f(x,y)=0$, якщо $(x,y)\,\overline{\in}\,\Omega$, де $\Omega=\{0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$.
Знайти a і r_{xy}.

Розв'язання. Область Ω зображено на рис. 68.

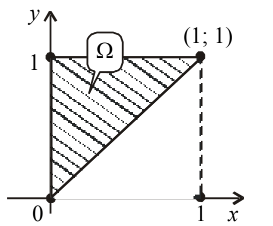

Рис. 68

За умовою нормування (131) обчислюємо значення a:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dx\,dy = 1 \to \int_0^1\int_x^1 a(x+y)dx\,dy = 1 \to a = \frac{1}{\int_0^1\int_x^1 (x+y)dx\,dy} \to$$

$$\to \int_0^1\int_x^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^1 (x+y)dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left((x+y)^2\Big|_x^1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[(x+1)^2-(x+x)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1(x^2+2x+1-4x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1(2x-3x^2+1)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 2x\,dx - \int_0^1 3x^2dx + \int_0^1 dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2\Big|_0^1 - x^3\Big|_0^1 + x\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, $a = 2$.

Тоді

$f(x,y) = 2(x+y)$, якщо $(x,y)\in\Omega$,

$f(x,y) = 0$, якщо $(x,y)\overline{\in}\,\Omega$, де $\Omega = \{0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$.

Числові характеристики знаходимо за (137) — (142):

$$M(X) = \iint_{\Omega} xf(x,y)dx\,dy = \int_0^1\int_x^1 x\,2(x+y)dx\,dy =$$

$$\to 2\int_0^1\int_x^1 x(x+y)\,dx\,dy = 2\int_0^1 x\left(\int_x^1 (x+y)dy\right)dx = 2\frac{1}{2}\int_0^1 x\left((x+y)^2\Big|_x^1\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x\left[(x+1)^2-4x^2\right]dx = \int_0^1(2x^2-3x^3+x)dx = \int_0^1 2x^2dx - \int_0^1 3x^3dx + \int_0^1 x\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

$$M(X) = \frac{5}{12}.$$

$$M(X^2) = \iint_{\Omega} x^2 f(x,y)dx\,dy = \int_0^1\int_x^1 x^2\,2(x+y)dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^1 x^2\left(\int_x^1 (x+y)\,dy\right)dx = 2\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left((x+y)^2\right)\Big|_x^1 dx = \int_0^1 x^2\left((x+1)^2-4x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1(2x^3-3x^4+x^2)dx = \int_0^1 2x^3dx - \int_0^1 3x^4dx + \int_0^1 x^2dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^4\Big|_0^1 - \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3} = \frac{7}{30}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{7}{30} - \frac{25}{144} = \frac{1008-750}{4320} = \frac{43}{720}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{43}{5}} \approx 0{,}244.$$

$$M(Y) = \iint_{\Omega} yf(x,y)dy\,dx = \int_0^1\int_x^1 y2(x+y)dy\,dx =$$

$$= 2\int_0^1\left(\int_0^1 (xy+y^2)dy\right)dx = 2\int_0^1\left(\left.\frac{xy^2}{2}\right|_x^1 + \left.\frac{y^3}{3}\right|_x^1\right)dx = 2\int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}\right)dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^3dx + \frac{1}{3}\int_0^1 dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3dx\right) =$$

$$= 2\left(\left.\frac{1}{4}x^2\right|_0^1 - \left.\frac{1}{8}x^4\right|_0^1 + \left.\frac{1}{3}x\right|_0^1 - \left.\frac{1}{12}x^4\right|_0^1\right) = 2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right) =$$

$$= \frac{2}{24}(6-3+8-2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

$$M(Y) = \frac{3}{4}.$$

$$M(Y^2) = \iint_{\Omega} y^2 f(x,y)dy\,dx = \int_0^1\int_x^1 y^2\,2(x+y)dy\,dx = 2\int_0^1\left(\int_x^1 (xy^2+y^3)dy\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(xy^3/3\Big|_x^1 + y^4/4\Big|_x^1\right)dx = 2\int_0^1 (x/3 - x^4/3 + 1/4 - x^4/3)\,dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^4dx + \frac{1}{4}\int_0^1 dx - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4dx\right) =$$

$$= 2\left(\left.\frac{x^2}{6}\right|_0^1 - \frac{1}{15}x^5\Big|_0^1 + \frac{1}{4}x\Big|_0^1 - \left.\frac{1}{20}x^5\right|_0^1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{15}+\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right) = \frac{2}{60}(10-4+15-3) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{16} = \frac{3}{16}.$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{3}{16}} \approx 0{,}433.$$

$$M(XY) = \iint_{\Omega} xy\,f(x,y)dy\,dx = 2\int_0^1\int_x^1 xy(x+y)dy\,dx = 2\int_0^1\left(\int_x^1 (x^2y+xy^2)dy\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1\left(\left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_x^1 + \left.\frac{xy^3}{3}\right|_x^1\right)dx = 2\int_0^1\left(\frac{x^2-x^4}{2}+\frac{x-x^4}{3}\right)dx =$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx+\frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{3}\int_0^1 x^4dx\right)=2\left(\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1-\left.\frac{x^5}{10}\right|_0^1+\left.\frac{x^2}{6}\right|_0^1-\left.\frac{x^5}{15}\right|_0^1\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{3}.$$

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\,M(Y)=\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\frac{3}{4}=\frac{1}{3}-\frac{15}{48}=\frac{1}{48}.$$

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\frac{1}{48}}{0{,}433\cdot 0{,}244}=\frac{1}{48\cdot 0{,}433\cdot 0{,}244}\approx\frac{1}{5{,}071}\approx 0{,}197.$$

Отже,
K_{xy} = 1,48; $R_{xy} \approx$ 0,197.

10. Система довільного числа випадкових величин

10.1. Функція розподілу системи n випадкових величин

Функцією розподілу n випадкових величин називається така функція від n аргументів ($x_1, x_2 \ldots x_n$), яка визначає ймовірність спільної одночасної появи подій

$$((X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap (X_3 < x_3) \cap \ldots \cap (X_n < x_{1n}):$$

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i < x_i). \qquad (173)$$

Ця функція має всі властивості функції розподілу ймовірностей одного та двох аргументів.

Якщо принаймні один з аргументів $x_i \to -\infty$, то функція розподілу ймовірностей системи n випадкових величин прямує до нуля.

Якщо із системи $x_1, x_2, \ldots x_n$ виділимо деяку підсистему $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k < n$), то функцію розподілу для цієї підсистеми дістанемо, коли решта аргументів прямуватиме до ∞:

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = F(x_1, x_2, ...x_k, \infty, \infty ... \infty).$$

Зокрема, дістанемо функцію розподілу одного аргументу, якщо всі аргументи, окрім x_1, спрямуємо до ∞:

$$F(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, ..., \infty).$$

Якщо всі аргументи спрямувати до ∞, то $F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$.

10.2. Щільність імовірностей системи n випадкових величин

Щільність імовірностей системи n випадкових величин є функція

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, ... \partial x_n} \qquad (174)$$

Умова нормування для системи n неперервних випадкових величин

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 \, dx_2 \, ... dx_n = 1. \qquad (175)$$

Щільність імовірностей для деякої підсистеми (x_1, x_2 , ... x_k) системи (x_1, x_2 , ... x_n), де $k < n$ подається у вигляді

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_{k+1} \, dx_{k+2} \, ... dx_n. \qquad (176)$$

Наприклад,

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_2 \, dx_3 \, ... dx_n. \qquad (177)$$

Умовна щільність підсистеми (x_1, x_2,..., x_k) системи (x_1, x_2,..., x_n) ($k < n$) визначається за формулою

$$f(x_1, x_2, ..., x_k / x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{f(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)}. \qquad (178)$$

Якщо випадкові величини системи (x_1, x_2 ,..., x_n) є незалежними, то

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1) f(x_2) ... f(x_n). \qquad (179)$$

10.3. Числові характеристики системи n випадкових величин

$$M(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 \, dx_2 \, ... dx_n; \qquad (180)$$

$$D(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 \, dx_2 \, ... dx_n - M^2(x_i); \qquad (181)$$

$$K_{x_i x_j} = K_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 \, dx_2 \, ... dx_n - M(x_i) M(x_j). \qquad (182)$$

При цьому виконується рівність

$$K_{ij} = K_{ji}. \qquad (183)$$

Коли $i = j$, маємо:

$$K_{ii} = K_{jj} = D(x_i) = \sigma_i^2. \qquad (184)$$

Усі кореляційні моменти і дисперсії розміщують у вигляді квадратної таблиці, яка називається *кореляційною матрицею системи n випадкових величин* і має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (185)$$

Елементи кореляційної матриці симетрично розміщені відносно її головної діагоналі. Оскільки $K_{ij} = K_{ji}$, $K_{it} = \sigma_i^2$, заповнюють лише половину кореляційної матриці. І в цьому випадку вона набуває такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ & \sigma_2^2 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ & & \sigma_3^2 & \dots & k_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (186)$$

Якщо $K_{ij} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n,$ то кореляційна матриця набирає такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \sigma_3^2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (187)$$

Таку матрицю називають *діагональною*.

За відомими кореляційними моментам K_{ij} визначаємо парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \qquad (188)$$

При $i = j$ маємо $r_{ij} = 1$.

Із парних коефіцієнтів кореляції утворюють так звану *нормовану* квадратну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & 1 & \dots & r_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad (189)$$

Приклад 9.

Дано кореляційну матрицю системи $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1 & -0{,}8 \\ & 4 & -1 & 0{,}8 \\ & & 16 & 2 \\ & & & 25 \end{pmatrix}.$$

Побудувати нормовану кореляційну матрицю.

Розв'язання. Згідно зі (188) маємо:

$$r_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{0{,}5}{1\cdot 2} = 0{,}25;$$

$$r_{13} = \frac{K_{13}}{\sigma_1\sigma_3} = \frac{1}{1\cdot 4} = 0{,}25;$$

$$r_{14} = \frac{K_{14}}{\sigma_1\sigma_4} = \frac{-0{,}8}{1\cdot 5} = -0{,}16;$$

$$r_{23} = \frac{K_{23}}{\sigma_2\sigma_3} = -\frac{1}{2\cdot 4} = -\frac{1}{8} = -0{,}125;$$

$$r_{24} = \frac{K_{24}}{\sigma_2\sigma_4} = \frac{0{,}8}{2\cdot 5} = 0{,}08;$$

$$r_{34} = \frac{K_{34}}{\sigma_3\sigma_4} = \frac{2}{4\cdot 5} = 0{,}1\,.$$

Нормована кореляційна матриця подається у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}16 \\ & 1 & -0{,}125 & 0{,}08 \\ & & 1 & 0{,}1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Теоретичні запитання до теми ?

1. Означення багатовимірної випадкової величини.
2. Означення закону розподілу багатовимірної випадкової величини.
3. Основні числові характеристики для системи двох дискретних випадкових величин.
4. Що визначає кореляційний момент?
5. Чому дорівнює K_{xy}?
6. Коефіцієнт кореляції та його властивості.

7. Якщо $K_{xy} = 0$, то чому дорівнює r_{xy}?
8. Що називається умовним законом розподілу Y / x?
9. Умови нормування для системи двох дискретних випадкових величин.
10. Що називається умовним законом розподілу X / y?
11. Чому дорівнюють $M(X / y)$, $M(Y / x)$?
12. Означення функції розподілу системи двох випадкових величин.
13. Довести, що $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$.
14. Довести, що $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.
15. Як обчислити $P(a < X < b, c < Y < d)$?
16. Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to \infty} F(x, y)$?
17. Чому дорівнює $\lim\limits_{y \to \infty} F(x, y)$?
18. Чому дорівнює $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y)$?
19. Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y)$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y)$, $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y)$?
20. Означення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин.
21. Довести, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx\, dy = \ldots$.
22. Довести, що $\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y) dx\, dy = \ldots$.
23. Чому дорівнює $\int\limits_{a}^{b} \int\limits_{c}^{d} f(x, y) dx\, dy = \ldots$, якщо $\Omega = (a < x < b, c < y < d)$?
24. Чому дорівнює $\iint\limits_{D} f(x, y) dx\, dy = \ldots$, якщо $D = \{a < x < b,\ c < y < d\} \subset \Omega$?
25. Чому дорівнює $\iint\limits_{\Omega} x f(x, y) dx\, dy = ?$
26. Чому дорівнює $\iint\limits_{\Omega} y f(x, y) dx\, dy = ?$
27. Формула для $D(X)$ випадкової величини X, що утворює систему (X, Y), має вигляд… .
28. K_{xy} для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) обчислюється за формулою… .
29. $D(Y)$ для випадкової величини Y, що утворює систему двох неперервних випадкових величин (X, Y), обчислюється за формулою… .

30. Чому дорівнює $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = ...$?

31. Чому дорівнює $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = ...$?

32. Довести, що $\left|r_{xy}\right| \le 1$.

33. Як знайти $f(X/y)$?

34. $M(X/y)$ обчислюється за формулою… .

35. Чому дорівнює $f(Y/x)$?

36. $M(X/x)$ обчислюється за формулою… .

37. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $f(x, y)$ обчислюється за формулою… .

38. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $F(x, y) = ...$.

39. Якщо випадкові величини некорельовані, то чи будуть вони й незалежними і навпаки?

40. Що називається функцією розподілу системи n випадкових величин?

41. Як визначається щільність імовірностей системи n випадкових величин?

42. Як визначається щільність імовірностей системи (x_1, x_2, … x_k), що входить до (x_1, x_2 , … x_n)?

43. Основні числові характеристики системи n випадкових величин.

44. Чому дорівнює K_{ij} ?

45. Чому дорівнює K_{ij} , якщо $i = j$?

46. Парні коефіцієнти кореляції обчислюються за формулою… .

47. Чому дорівнює r_{ij} ?

48. Що називають кореляційною матрицею системи n випадкових величин?

49. Що називають нормованою кореляційною матрицею?

Приклади до теми

1. Імовірність появи випадкової події в кожному з чотирьох незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Розглядаються дві випадкові величини: X — число появи випадкової події в результаті цих експериментів; Y — число експериментів, при яких подія не наставала.

Обчислити: $M(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy}.

Відповідь. $M(X) = 3,6$; $\sigma(X) = 0,6$; $M(Y) = 0,4$; $\sigma(Y) = 0,6$; $K_{xy} = -0,36$; $r_{xy} = -1$.

2. Задано $f(x, y) = a$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$, де $\Omega = (-6 \le x \le 2, -3 \le y \le 5)$. Знайти a. Обчислити r_{xy}, $P(-4 < x < 1;$ $-2 < y < 4)$.

Відповідь. $a = 1/64$, $r_{xy} = 0$, $P(-4 < x < 1; -2 < y < 4) = 15 / 32$.

3. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

$Y \backslash X$	2	4	6	8	p_{y_i}
– 6	$0{,}1a$	$0{,}5a$	$0{,}4a$	a	
– 4	$0{,}9a$	$0{,}4a$	$0{,}5a$	$0{,}2a$	
– 2	a	$2{,}1a$	$1{,}1a$	$1{,}8a$	
p_{x_i}					

Обчислити r_{xy}, $M(X / y = 4)$, $M(Y / x = -2)$.

Відповідь: $r_{xy} = -0{,}009$, $M(X / y = 4) = -3{,}3$, $M(Y / x = -2) = 5{,}23$.

4. Щільність імовірностей системи випадкових величин задана виразом $f(x, y) = a \cos(x - y)$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$, де $\Omega = \{0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2\}$. Визначити a і r_{xy}.

Відповідь. $a = 1 / 2$, $r_{xy} = \dfrac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32}$.

5. Щільність імовірностей двох випадкових величин (X, Y) задано виразом

$$f(x, y) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

Знайти a; $M(x)$; $M(y)$; σ_x; σ_y; r_{xy}..

Відповідь. $a = \dfrac{1}{4\pi}$; $M(x) = -3$; $M(y) = 1$, $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$, $r_{xy} = 0$.

6. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-0{,}5(x^2 + 2xy + 5y^2)}, \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

знайти $f(x)$, $f(y)$.

Відповідь. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2{,}5\pi}} e^{-0{,}4x^2}$, $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}5\pi}} e^{-2y^2}$.

7. Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм і за овальністю на чотири групи зі значенями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Спільний розподіл цих відхилень X — діаметра і Y — овальності циліндрів наведено в таблиці:

$Y \backslash X$	0,01	0,02	0,03	0,04	p_{y_i}
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04	
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06	
0,006	0,04	0,1	0,08	0,08	
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02	
p_{x_j}					

Знайти r_{xy}.

Відповідь. $r_{xy} = 0{,}141$.

8. П'ять приладів випробовують на надійність. Імовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює 0,85. Нехай X — число приладів, які витримають випробування, а Y — число приладів, які не витримають їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і обчислити K_{xy}, r_{xy}.

Відповідь. $K_{xy} = -0{,}6375$, $r_{xy} = -1$.

9. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 6 стандартних і 4 браковані вироби; у другій — 8 стандартних і 2 браковані, а у третій — 9 стандартних і 1 бракований виріб. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X — поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y — поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y і обчислити K_{xy}, r_{xy}.

Відповідь.

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	0	0,432
1	0	0	0,444	0
2	0	0,116	0	0
3	0,008	0	0	0

$K_{xy} = 0{,}21$, $r_{xy} = 0{,}148$.

10. Брак продукції заводу внаслідок дефекту A становить 3%, а внаслідок дефекту B — 4,5%. Стандартна продукція становить 95%. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції між дефектами A і B.

Відповідь. $K_{AB} = 0{,}02365$, $r_{AB} = 0{,}67$.

11. Задана щільність імовірностей:

$f(x, y) = 0,5\sin(x+y)$, якщо $(X, Y) \in \Omega$;

$f(x, y) = 0$, якщо $(X, Y) \overline{\in} \Omega$,

де $\Omega = \left\{0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Побудувати кореляційну матрицю.

Відповідь.

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{pmatrix}.$$

12. Система випадкових величин (X, Y) має щільність імовірностей

$$f(x, y) = \frac{a}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)},$$

якщо $(X, Y) \in \Omega$ де $\Omega = (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$.

Знайти a і $F(x, y)$, r_{xy}.

Відповідь: $a = 20$, $F(x, y) = \left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5} + \dfrac{1}{2}\right)$, $r_{xy} = 0$.

13. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x, y) = \left(1 - e^{-4x}\right)\left(1 - e^{-5y}\right), \qquad x \ge 0,\ y \ge 0$$

знайти $f(x, y)$ і r_{xy}.

Відповідь. $f(x, y) = 20e^{-4x-5y}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $r_{xy} = 0$.

14. За заданою функцією розподілу ймовірностей системи (X, Y) маємо:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le -6,\ y \le 2; \\ \dfrac{x+6}{8}, & -6 < x \le 2,\ y > 4; \\ \dfrac{(x+6)(y+2)}{48}, & -6 < x \le 2,\ -2 < y \le 4; \\ \dfrac{y+2}{6}, & x > 2,\ -2 < y \le 4; \\ 1, & x > 2,\ y > 4. \end{cases}$$

Знайти K_{xy}. Обчислити $P(-2 < x < 1,\ -1 < y < 3)$.

Відповідь. $K_{xy} = 0$; $P(-2 < x < 1,\ -1 < y < 3) = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

15. Задано

$f(x, y) = a,$ якщо $(X, Y) \in \Omega$;

$f(x, y) = 0,$ якщо $(X, Y) \overline{\in} \Omega$,

де $\Omega = (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2)$.

Знайти a і r_{xy}.

Відповідь. $a = 3$; $r_{xy} = 0$.

16. Задано

$f(x, y) = a\,(xy + x^2),$ якщо $(X, Y) \in \Omega$;

$f(x, y) = 0,$ якщо $(X, Y) \overline{\in} \Omega$,

де $\Omega = (0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x)$.

Знайти a і побудувати кореляційну матрицю.

Відповідь. $a = \dfrac{120}{11}$; $K = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}035 \\ 0{,}035 & 0{,}0423 \end{pmatrix}$.

17. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) задано таблицею:

$Y \backslash X$	2,2	4,2	6,2	1,2	p_{y_i}
2,5	0,02	a	0,08	0,1	
3,5	a	0,04	0,06	0,2	
4,5	0,08	0,06	0,6a	0,1	
p_{x_j}					

Знайти ймовірності p_{21}; p_{12}; p_{33}; побудувати кореляційну матрицю і нормовану кореляційну матрицю.

Відповідь: $p_{21} = 0{,}1$; $p_{12} = 0{,}1$; $p_{33} = 0{,}06$.

$$K = \begin{pmatrix} 5{,}432 & -0{,}13 \\ -0{,}13 & 0{,}6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -0{,}072 \\ -0{,}072 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Задано

$f(x, y) = a\,(1 + xy)x,$ якщо $(X, Y) \in \Omega$;

$f(x, y) = 0,$ якщо $(X, Y) \overline{\in} \Omega$,

де $\Omega = \left\{0 \le x \le 1,\ \ x \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

Знайти a і побудувати кореляційну матрицю і нормовану кореляційну матрицю.

Відповідь. $a = \dfrac{105}{23}$; $K = \begin{pmatrix} 0{,}09478 & 0{,}14 \\ 0{,}14 & 0{,}2995 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}827 \\ 0{,}827 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Брак у продукції заводу внаслідок дефекту *A* становить 6%. Водночас серед забракованої за дефектом *A* продукції 4% таких, що мають дефект *B*, а в продукції, в якій відсутній дефект *A*, дефект *B* зустрічається в 1% випадках.

Знайти коефіцієнт кореляції між дефектами *A* і *B*.

Відповідь. $r_{AB} = 0{,}0936$.

20. За заданою кореляційною матрицею чотиривимірної випадкової величини

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 1 & -0{,}8 \\ & 4 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ & & 9 & 0{,}4 \\ & & & 25 \end{pmatrix}$$

знайти нормовану кореляційну матрицю.

Відповідь. $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}333 & -0{,}16 \\ & 1 & 0{,}117 & 0{,}05 \\ & & 1 & 0{,}03 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

21. Задано $f(x, y) = \dfrac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$,

якщо $(X, Y) \in \Omega$ де $\Omega = \{-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty\}$.

Знайти *a* і *f*(*x*), *f*(*y*). З'ясувати, чи існує кореляційний зв'язок між випадковими величинами *X* і *Y*.

Відповідь. $a = \dfrac{1}{\pi^2}$; $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$; $f(y) = \dfrac{1}{\pi(1 + y^2)}$.

Оскільки $f(x, y) = f(x) f(y)$, то $K_{XY} = 0$.

22. Відомо, що $P(A) = P(B) = 0{,}8$. Яке значення повинна мати $P(A / B)$, щоб коефіцієнт кореляції між *A* і *B* дорівнював 0,6?

Відповідь. $P(A / B) = 0{,}92$.

23. Задано $f(x, y) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} e^{-4x^2 - 6xy - 9y^2}$, $\quad -\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty.$

Знайти $f(x / y),\ f(y / x),\ M(X / y),\ M(Y / x)$.

Відповідь.

$$f(x / y) = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x + 3y)^2}; \qquad f(y / x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(2x + \frac{9}{2}y)^2};$$

$$M(X / y) = -\frac{9}{4} y; \qquad M(Y / x) = -\frac{x}{3}.$$

24. Випадкові події A і B мають однакову ймовірність появи, яка дорівнює p. Яка повинна бути умовна ймовірність $P(A/B)$, якщо відомо, що коефіцієнт кореляції між випадковими подіями A і B дорівнює r.

Відповідь. $P(A/B) = p + r\,(1 - p)$.

25. Визначити кореляційну матрицю системи випадкових величин (X, Y), якщо щільність імовірностей

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Відповідь. $K = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

26. За заданою кореляційною матрицею системи випадкових величин

$$K = \begin{pmatrix} 49 & -14 & 10 \\ -14 & 30 & -20 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

побудувати нормовану кореляційну матрицю.

Відповідь.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Відомі значення $p\,(A) = 0{,}02$, $p\,(B) = 0{,}04$, $p\,(B\,/\,A) = 0{,}03$. Обчислити коефіцієнт кореляції між A і B.

Відповідь: $r_{AB} \approx 0{,}0072$.

28. Двоє робітників виготовляють однотипні вироби. Імовірність того, що виріб, виготовлений першим робітником, є стандартним, дорівнює 0,9; для другого робітника ця ймовірність дорівнює 0,85. Позначивши через X число стандартних виробів, виготовлених першим робітником, а через Y число стандартних виробів, виготовлених другим робітником, побудувати функції розподілу $F(x, y)$, системи випадкових величин (X, Y).

Відповідь: $F\,(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}01, & x \le 1, \\ 0{,}18, & x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ $F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 0{,}0225, & 0 < y \le 1, \\ 0{,}225, & 1 < y \le 2, \\ 1, & y > 2. \end{cases}$

$F\,(x, y)$ подано в табличній формі:

Y \ X	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$x > 2$
$y \le 0$	0	0	0	0
$0 < y \le 1$	0	0,000225	0,00405	0,01
$1 < y \le 2$	0	0,00405	0,0455	0,18
$y > 2$	0	0,0225	0,225	1

29. Задано $f(x) = \dfrac{1}{72}$, якщо $(x, y) \in \Omega$,

$f(x) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$,

де $\Omega = \{-4 \le x \le 5, -3 \le y \le 5\}$.

Знайти $F\,(x, y)$ і обчислити $P\,(-1 < x < 4, -2 < y < 3)$.

Відповідь. $$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le -4,\ \ y \le -3; \\ \dfrac{x+4}{9}, & -4 < x \le 5,\ \ y > 5; \\ \dfrac{(x+4)(y+3)}{72}, & -4 < x \le 5,\ -3 < y \le 5; \\ \dfrac{y+3}{8}, & x > 5,\ -3 < y \le 5; \\ 1, & x > 5,\ \ y > 5. \end{cases}$$

$$P\left(-1 < x < 4,\ -2 < y < 3\right) = \frac{25}{72}.$$

30. Незалежні випадкові величини X і Y задані щільностями ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3e^{-3x}, & x > 0; \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ 5e^{-5y}, & y > 0. \end{cases}$$

Записати вирази для $f\,(x, y)$, $F\,(x, y)$.

Відповідь: $$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\ y \le 0; \\ 15e^{-(3x+5y)}, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\ y \le 0; \\ 15e^{-3x}, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

31. Система двох неперервних випадкових величин має сталу щільність усередині квадрата, зображеного на рис. 69.

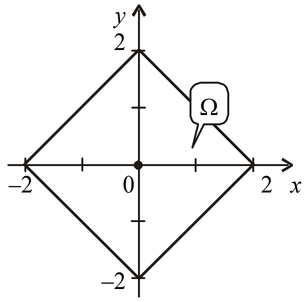

Рис. 69

Знайти вирази для $f(x,y)$, $f(x)$, $f(y)$, $f(x/y)$, $f(y/x)$, $M(X/y)$, $M(Y/x)$.

Відповідь. $f(x,y)=\begin{cases}0, & (X,Y)\ \overline{\in}\ \Omega;\\ \dfrac{1}{2}, & (X,Y)\in\Omega.\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ (x+2), & -2<x\le 0;\\ (2-x), & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2;\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ (2+y), & -2<y\le 0;\\ (2-y), & 0<y\le 2;\\ 0, & y>2;\end{cases}$$

$$f(x/y)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{1}{2(2+x)}, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{1}{2(2-x)}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2;\end{cases}\qquad f(y/x)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \dfrac{1}{2(2+y)}, & -2<y\le 0;\\ \dfrac{1}{2(2-y)}, & 0<y\le 2;\\ 0, & y>2.\end{cases}$$

$$M(X/y)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ -\dfrac{1}{2+x}, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{1}{2-x}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2;\end{cases}\qquad M(Y/x)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ -\dfrac{1}{2+y}, & -2<y\le 0;\\ \dfrac{1}{2-y}, & 0<y\le 2;\\ 0, & y>2.\end{cases}$$

32. Система двох неперервних випадкових величин (X, Y) має сталу щільність імовірності всередині квадрата, зображеного на рис. 70.

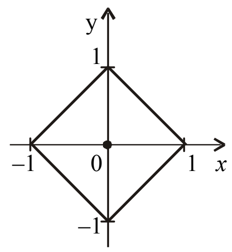

Рис. 70

Знайти вирази для $f(x,y)$, $f(x), f(y)$, $f(x/y)$, $f(y/x)$. З'ясувати залежність і корельованість між випадковими величинами X і Y.

Відповідь. $f(x,y)=\begin{cases}0, & \overline{(X,Y)\in\Omega};\\ \dfrac{1}{2}, & (X,Y)\in\Omega.\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1+x, & -1<x\le 0;\\ 1-x, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1;\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ 1+y, & -1<y\le 0;\\ 1-y, & 0<y\le 1;\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

$$f(x/y)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{2(1+x)}, & -1<x\le 0;\\ \dfrac{1}{2(1-x)}, & 0<x\le 1;\end{cases}\qquad f(y/x)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \dfrac{1}{2(1+y)}, & -1<y\le 0;\\ \dfrac{1}{2(1-y)}, & 0<y\le 1.\end{cases}$$

$f(x,y)\ne f(x)f(y)$. Випадкові величини X та Y не корельовані, але залежні $K_{XY}=0$.

ТЕМА 8. **ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ**

1. Функції одного випадкового аргументу

Функцією випадкового аргументу X називають таку випадкову величину Y, яка набуває значення $Y=y=\alpha(x)$ щоразу, коли $X=x$, де α є невипадковою функцією. Якщо X є дискретною випадковою величиною, то і функція випадкового аргументу $Y=\alpha(x)$ буде дискретною.

Коли X є неперервною випадковою величиною, то і $Y=\alpha(x)$ буде неперервною.

1.1. Функції дискретного випадкового аргументу

Нехай закон дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…………	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	…………	p_k

Тоді закон розподілу випадкової величини $Y = \alpha(x)$ матиме такий вигляд:

$Y = \alpha(x_i)$	$\alpha(x_1)$	$\alpha(x_2)$	$\alpha(x_3)$	………………	$\alpha(x_k)$
$P(Y = \alpha(x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	……………	p_k

де кожне можливе значення Y дістають, виконуючи ті операції, які вказані в невипадковій функції, умовно позначеній α.

При цьому, якщо в законі розподілу випадкової величини Y є повторення значень, то кожне з цих значень записують один раз, додаючи їх імовірності.

Приклад 1.
Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-2	-1	1	2	4
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Побудувати закон розподілу ймовірностей для $Y = 3x^2$.

Розв'язання. Із функціональної залежності $Y = 3x^2$ маємо:

$Y = 3x_i^2$	16	4	1	1	4	16
$P(y = 3x_i^2) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Ураховуючи повтори можливих значень Y, дістаємо:

$$P\,(y = 16) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4;$$
$$P\,(y = 4) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4;$$
$$P\,(y = 1) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2.$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової величини Y набирає такого вигляду:

$Y = y_j$	1	4	16
$P\,(y = y_j) = p_j$	0,2	0,4	0,4

2. Числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу

1. Математичне сподівання

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_i)p_i=\sum_{j=1}^{m}y_j p_j. \qquad (190)$$

2. Дисперсія

$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-M^2(Y)=\sum_{i=1}^{k}\varphi^2(x_i)p_i-M^2(Y)=\sum_{j=1}^{m}y_j^2 p_j-M^2(Y). \qquad (191)$$

3. Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}. \qquad (192)$$

Приклад 2. За заданим законом розподілу

$X=x_i$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$, якщо $Y=\cos^2 x$.

Розв'язання. Побудуємо закон розподілу Y.

$Y=\cos^2 xi$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cos^2 0$	$\cos^2\frac{\pi}{6}$	$\cos^2\frac{\pi}{4}$	$\cos^2\frac{\pi}{3}$
$P(Y=\cos^2 x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

або

$Y=\cos^2 x_i$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$P(Y=\cos^2 x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

$Y=\cos^2 x_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$P(Y=\cos^2 x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

$Y=y_j$	0,25	0,5	0,75	1
$P(Y=y_j)=p_j$	0,3	0,3	0,3	0,1

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{4} y_j \mathrm{p}_j = 0{,}25\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}75\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}1=$$

$$=0{,}075+0{,}15+0{,}225+0{,}1=0{,}55 \to M(Y)=0{,}55;$$

$$M(Y^2)=\sum_{j=1}^{4} y_i^{\,2} p_j = 0{,}0625\cdot 0{,}3+0{,}25\cdot 0{,}3+0{,}5625\cdot 0{,}3+10{,}1=$$

$$=0{,}01875+0{,}075+0{,}16875+0{,}1=0{,}3625;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=0{,}3625-0{,}3025=0{,}06;$$

$$D(Y)=0{,}06;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}06}\approx 0{,}245;$$

$$\sigma(Y)=0{,}245.$$

3. Функції неперервного випадкового аргументу та їх числові характеристики

Нехай закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X задано щільністю $f(x)$.

Необхідно знайти $f(y)$, якщо $Y=\alpha(x)$.

А. *Функція* $\alpha(x)$ *монотонна.*

Розглянемо випадок, коли $Y=\alpha(x)$ є монотонно зростаючою функцією, зображеною на рис. 71.

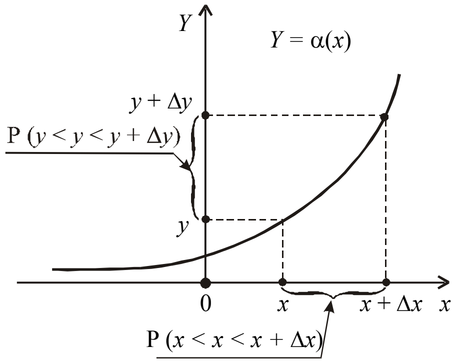

Рис. 71

Якщо випадкова величина X міститься у проміжку $[x;\ x+\Delta x]$, то оскільки Y жорстко зв'язана з випадковою величиною X функцією $\alpha(x)$, то Y міститиметься у проміжку $[y,\ y+\Delta y]$ (рис. 71). Отже, події $x < X < x + \Delta x$ і $y < Y < y + \Delta y$ будуть рівноймовірними:

$$P(x < X < x + \Delta x) = P(y < Y < y + \Delta y). \qquad (193)$$

Згідно з визначенням щільності ймовірностей

$$f(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}.$$

Але

$F(y + \Delta y) - F(y) = P(y < Y < y + \Delta y) = P(x < X < x + \Delta x)$ згідно зі (193).

Тоді:

$$f(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta y}.$$

Отже,

$$f(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta y}. \qquad (194)$$

При $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$ з урахуванням функціональної залежності між Y і X, помноживши і поділивши дріб (194) на Δx, дістанемо:

$$f(y) \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(x)\ x'_y.$$

Із $Y = \alpha(x)$ знаходимо явно $X = \Psi(y)$. Тоді

$$f(y) = f(\Psi(y))\ \Psi'(y). \qquad (195)$$

Якщо $Y = \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ є монотонно спадною функцією (рис. 72),

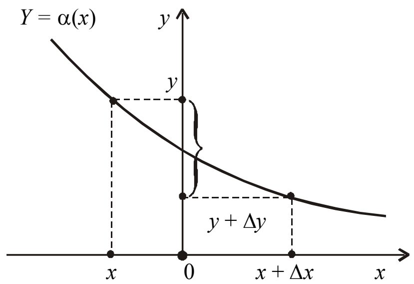

Рис. 72

то додатному приросту аргументу $x+\Delta x$ відповідатиме від'ємний приріст функції $y-\Delta y$ і похідна $\Psi'(Y)<0$.

А оскільки $f(y)\geq 0$, то об'єднуючи обидва випадки, дістанемо

$$f(y)=f(\Psi(Y))\,|\Psi'(Y)| \tag{196}$$

Б. *Загальна методика знаходження* $f(y)$.

Нехай неперервна випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x)$, якщо $x\in[a;b]$.

Необхідно визначити $f(y)$, якщо $Y=\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ є монотонною функцією.

1. Необхідно визначити множину можливих значень для Y

Оскільки $a\leq x\leq b$, то $\alpha(a)\leq Y\leq\alpha(b)$.

2. Із $Y=\alpha(x)$ знаходимо явний вираз X через Y, а саме: $X=\Psi(Y)$.

3. Знаходимо похідну

$$X'_y=\Psi'(y).$$

4. Будуємо щільність імовірностей для випадковой величини Y

$$f(y)=f(\Psi(y))\,|\Psi'(y)|,\ Y\in[\alpha(a);\,\alpha(b)].$$

5. Перевіряється виконання умови нормування для $f(y)$:

$$\int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(y)\omega y=1.$$

Якщо нормування виконується, то $f(y)$ знайдено вірно.

За знайденою $f(y)$ функцією розподілу ймовірностей визначається

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(a)}^{y} f(y)dy. \tag{197}$$

Числові характеристики функцій неперервного випадкового аргументу визначаються за формулами:

математичне сподівання

$$M(Y)=\int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} yf(y)dy=\int\limits_a^b \alpha(x)f(x)\,dx; \tag{198}$$

дисперсія

$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-M^2(Y)=\int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} y^2 f(y)\,dy-M^2(Y)=$$

$$=\int\limits_a^b \alpha^2(x)f(x)dx-M^2(Y); \tag{199}$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}. \tag{200}$$

Приклад 3.
Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти $f(y)$, $F(y)$, якщо $Y = 2x^2$.
Обчислити $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$.

Розв'язання. Використовуючи загальну методику знаходження $f(y)$, дістанемо наведені далі висновки.

1. Знаходимо інтервал можливих значень для випадкової величини Y:

$$0\le X\le 1;$$
$$0\le Y\le 2,$$

оскільки на проміжку $[0,\ 1]$ $Y=2x^2$ є монотонно зростаючою функцією.

2. Із функціональної залежності $Y=2x^2$ записуємо явний вираз

$$X=\sqrt{\frac{y}{2}}=\Psi(y).$$

3. Знаходимо похідну функції $\Psi(y)$

$$\Psi'(y)=\frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Використовуючи (196), будуємо функцію $f(y)$:

$$f(y)=f(\Psi(y))\,(\Psi'(y))=\frac{10}{7}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{14}}\frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{15}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{4}{14}}=\frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}.$$

5. Перевіряємо виконання умови нормування:

$$\int_0^2 f(y)\,dy=1\to\int_0^2\frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}dy=\frac{5}{14}\int_0^2\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}dy=\frac{5}{14}2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\frac{7}{5}\Bigg|_0^2=\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\Bigg|_0^2=1.$$

Нормування виконується, тому щільність імовірностей випадкової величини Y

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{15}{14}\left(\dfrac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}, & 0<y\le 2;\\ 0, & y>2.\end{cases}$$

Використовуючи (197), знаходимо

$$F(y)=\int_0^y f(y)dy=\int_0^y \frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}dy=\left.\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\right|_0^y=\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}.$$

Отже,

$$F(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}, & 0<y\le 2;\\ 1, & y>2.\end{cases}$$

Використовуючи формули (198), (199), (200), знаходимо числові характеристики:

$$M(Y)=\int_0^2 yf(y)dy=\int_0^2 y\frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}dy=\frac{5}{14}\sqrt[7]{4}\int_0^2 y^{\frac{5}{7}}dy=\frac{5}{14}\sqrt[7]{4}\left.\frac{y^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}}\right|_0^2=$$

$$=\frac{5}{24}2^{\frac{2}{7}}\cdot 2^{\frac{12}{7}}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}.$$

$M(Y)$ можна обчислити, не відшукуючи $f(y)$:

$$M(Y)=\int_0^1 2x^2\frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}dx=\frac{20}{7}\int_0^1 x^{\frac{17}{7}}dx=\frac{20}{7}\left.\frac{x^{\frac{24}{7}}}{\frac{24}{7}}\right|_0^1=\frac{20}{25}=\frac{5}{6}.$$

$M(Y)=\frac{5}{6}$.

$$M(Y^2)=\int_0^2 y^2f(y)dy=\int_0^2 y^2\frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}dy=\frac{5}{14}\sqrt[7]{4}\int_0^2 y^{\frac{12}{7}}dy=$$

$$=\frac{5}{14}\sqrt[7]{4}\left.\frac{y^{\frac{19}{7}}}{\frac{19}{7}}\right|_0^2=\frac{5}{38}2^{\frac{2}{7}}\cdot 2^{\frac{19}{7}}=\frac{5}{38}8=\frac{40}{38}=\frac{20}{19};$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\frac{20}{19}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{20}{19}-\frac{25}{26}=\frac{720-475}{684}=\frac{245}{684};$$

Так само, як і для $M(Y)$:

$$M\left(Y^2\right)=\int_0^1 (2x^2)^2 \frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}\,dx=\frac{40}{7}\int_0^1 x^4 x^{\frac{3}{7}}\,dx=\frac{40}{7}\int_0^1 x^{\frac{31}{7}}\,dx=\frac{40}{7}\left.\frac{x^{\frac{38}{7}}}{\frac{38}{7}}\right|_0^1=\frac{40}{38}=\frac{20}{19}.$$

$$D\left(Y\right)=\frac{20}{19}-\frac{25}{36}=\frac{245}{684}.$$

$$\sigma\left(Y\right)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\frac{245}{684}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{245}{19}}.$$

В. *Функція* $\alpha(x)$ *немонотонна.*

Нехай $Y=\alpha(x)$, де функція $\alpha(x)$ є немонотонною функцією, зображеною на рис. 73.

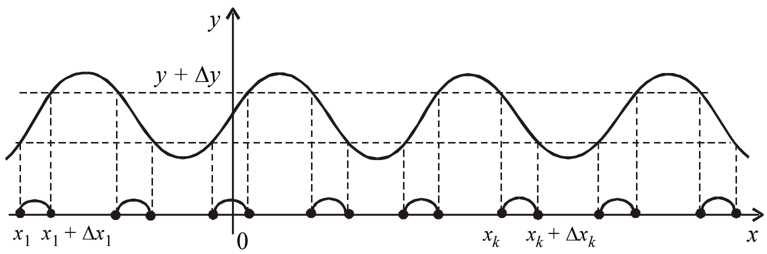

Рис. 73

У цьому разі обернена функція до $\alpha(x)$ $X=\Psi(y)$ буде неоднозначною, а саме $Y=y$ буде відповідати в загальному випадку множина обернених функцій $\psi_1(y),\ \psi_2(y),\ ...,\psi_k(y)$.

І, очевидно, що випадковій події $y<Y<y+\Delta y$ відповідатимуть k несумісних випадкових подій:

$$(x_1<X<x_1+\Delta x_1),\ (x_2<X<x_2+\Delta x_2),\ ...,\ (x_k<X<x_k+\Delta x_k)\ .$$

Отже, у цьому разі

$P\left(y<Y<y+\Delta y\right)=\sum_{i=1}^{k}P\left(x_i<X<x_i+\Delta x_i\right)$ або, використовуючи властивості функції розподілу ймовірностей, можна записати:

$$F(y+\Delta y)-F(y)=\sum_{i=1}^{k}\left(F(x_i+\Delta x_i)-F(x_i)\right).$$

Тоді

$$f(y) = F'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{k} \frac{F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i)}{\Delta\ y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0, \Delta x \to 0_i} \sum_{i=1}^{k} \frac{F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i)}{\Delta x_i} \left| \frac{\Delta x_i}{\Delta y} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i)}{\Delta x_i} \lim_{\Delta y \to 0} \left| \frac{\Delta x_i}{\Delta y} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f(x_i)(x'_y) = \sum_{i=1}^{k} f(\Psi_i(y)) \left| \Psi'_i(y) \right|.$$

Отже,

$$f(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\Psi_i(y)) \left| \Psi'_i(y) \right|. \qquad (201)$$

Методика знаходження $f(y)$ така сама, як і для монотонної функції. Щоб обчислити числові характеристики, можна використати формули (198), (199), (200).

Приклад 4. Задано

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty.$$

Знайти $f(y)$, якщо $Y = x^2$.

***Розв'язання*.** Побудуємо графіки $f(x)$, $Y = x^2$ (рис. 74 і 75).

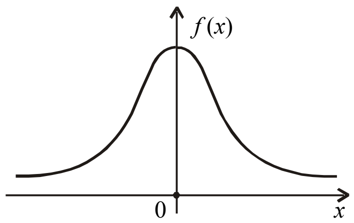

Рис. 74

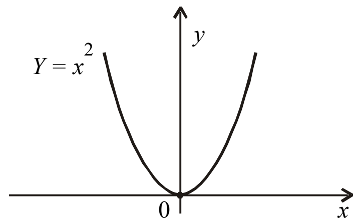

Рис. 75

1. Якщо $-\infty < X < \infty$, то $0 < Y < \infty$.

2. Оскільки $Y = x^2$ є немонотонною функцією при $\infty < X < \infty$, знаходимо обернені функції:

$$x_1 = \Psi_1(y) = \sqrt{Y}, \quad x_2 = \Psi_2(y) = -\sqrt{Y}\ .$$

3. Похідні від обернених функцій будуть:

$$x_1' = \Psi_1'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad x_2' = \Psi_2'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}} .$$

4. Будуємо функцію $f(y)$, використовуючи (201):

$$f(y) = \sum_{i=1}^{2} f(\Psi_i(y)) \left(\Psi_i'(y)\right) = f(\Psi_1(y)) \left(\Psi_1'(y)\right) + f(\Psi_2(y)) \left(\Psi_2'(y)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} .$$

5. Перевіряємо виконання умови нормування:

$$\int_0^\infty f(y)dy = 1 \to \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy = \left| \begin{matrix} y = z^2 \\ dy = 2zdz \end{matrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{z\, e^{-\frac{z^2}{2}}}{Z}\, d\,Z =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

Отже, умова нормування виконується, а це свідчить про те, що $f(y)$ знайдено правильно.

Остаточно записуємо:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0. \end{cases}$$

Відшукаємо числові характеристики:

$$M(Y) = yf(y)\, dy = \int_0^\infty y \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, y^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{y}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{y}{2}} dy =$$

$$= \left|\ y = z^2 \to dy = 2zdz\ \right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left| \begin{matrix} u = z, \quad du = dz \\ ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = dv \to v = e^{-\frac{z^2}{2}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \right] = 1.$$

$M(Y) = 1$.

Для обчисленя дисперсії $D(Y)$ знаходимо

$$M\left(Y^2\right)=\int_0^{\infty} y^2 f(y)dy=\int_0^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy=$$

$$=\left|\ y=z^2 \to dy=2zdz\ \right|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{2}} dz=\begin{vmatrix} u=z^2,\ du=2zdz \\ ze^{-\frac{z^2}{2}} dz=dv,\ v=-e^{-\frac{z^2}{2}} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}-2e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}\right]=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$M(Y)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-M^2(Y)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-1=\frac{4-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. Функції двох випадкових аргументів та їх числові характеристики

У загальному випадку функцію двох аргументів X і Y можна позначити як

$$Z=\alpha(x,\ y), \tag{202}$$

де α є невипадковою функцією.

Якщо X та Y є дискретними випадковими величинами, то і Z буде дискретною. Якщо X та Y є неперервними, то і Z буде неперервною.

4.1. Знаходження F (z), f (z), якщо Z = X + Y

Розглянемо функціональну залежність $Z = X + Y$, де X і Y є неперервними випадковими величинами.

Потрібно за відомою щільністю $f(x,\ y)$ знайти $F(z)$, $f(z)$.

Імовірність влучення Z в області $Z < z$, а саме $Z < X + Y$ зображено на рис. 76.

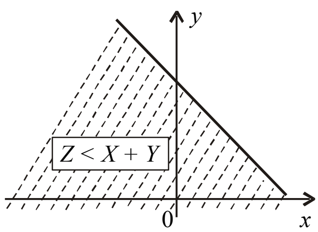

Рис. 76

Ця ймовірність обчислюється так:

$$P(X+Y<Z)=P(Z<z)=F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\,dx \qquad (203)$$

або

$$P(X+Y<Z)=P(Z<z)=F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (204)$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{z-x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{z-y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx\,,$$

то формули (203), (204) можна подати так:

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z-x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx; \qquad (205)$$

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z-y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (206)$$

Тоді щільність імовірностей для випадкової величини Z буде така:

$$f(z)=F'(z)=\left(\int_{-\infty}^{z-x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right)'_z=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,dx;$$

$$f(z)=F'(z)=\left(\int_{-\infty}^{z-y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx\right)'_z=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,dy.$$

Отже,

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,dx; \qquad (207)$$

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,dy. \qquad (208)$$

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $f(x,y)=$ $=f(x)\,f(y)$. За цієї умови формули наберуть такого вигляду:

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,f(z-x)\,dx; \qquad (209)$$

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)\,f(y)\,dy. \qquad (210)$$

Формули (209), (210) називають *згорткою*, або *композицією*, двох законів.

Приклад 5. Задано закони розподілу ймовірностей незалежних випадкових величин *X, Y*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{1}{6}, & -4<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \dfrac{1}{8}, & -2<y\le 6;\\ 0, & y>6.\end{cases}$$

Знайти $F(z)$, $f(z)$, якщо $Z = X + Y$. Побудувати графіки $F(z)$, $f(z)$.

Розв'язання. Побудуємо множину Ω-сумісної появи випадкових величин *X* і *Y*. Ця множина зображена на рис. 77.

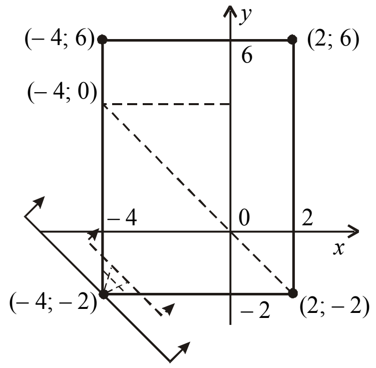

Рис. 77

Пряма $Z = X + Y$ зі збільшенням *Z* рухатиметься паралельно сама собі, відтинаючи від множини Ω змінні площі (рис. 77, 78 і 79).

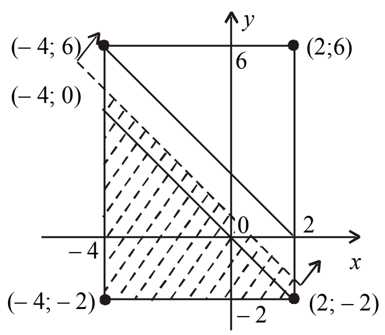

Рис. 78

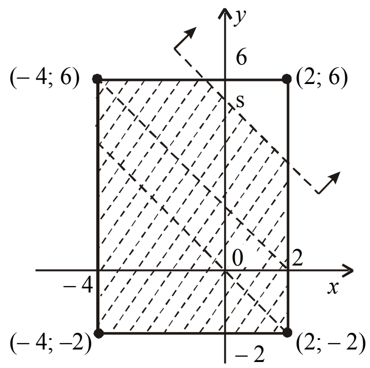

Рис. 79

У точці (– 4; –2) $Z = -6$; у точці (2; –2) $Z = 0$; у точці (– 4; 6) $Z = 2$; у точці (2; 6) $Z = 8$.

1. При $Z < -6$ $F(z) = 0$.

2. У разі зміни Z у проміжку $-6 < Z < 0$ маємо:

$$F_1(z) = \int_{-4}^{z+2}\int_{-2}^{z-x} f(x)\ f(y)dx\,dy = \int_{-4}^{z+2}\int_{-2}^{z-x}\frac{1}{6}\,\frac{1}{8}\,dy\,dx = \frac{1}{48}\int_{-4}^{z+2}\int_{-2}^{z-x}dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{48}\int_{-4}^{z+2}\left(\int_{-2}^{z-x}dy\right)dx = \frac{1}{48}\int_{-4}^{z+2}\left(y\Big|_{-2}^{z-x}\right)dx = \frac{1}{48}\int_{-4}^{z+2}(z+2-x)\ dx =$$

$$= -\frac{1}{48}\ \frac{(z+2-x)^2}{2}\Bigg|_{-4}^{z+2} = \frac{(z+6)^2}{96}\ .$$

Отже, на проміжку [– 6; 0] функція розподілу ймовірностей змінюється за законом

$$F(z) = \frac{(z+6)^2}{96}\ .$$

3. Оскільки в точці (– 4; 4) $Z = 0$, то на проміжку [0; 2] маємо:

$$F_2(Z) = F_1(0) + \frac{1}{48}\int_{-4}^{2}\left(\int_{-x}^{z-x}dy\right)dx = \frac{36}{96} + \frac{1}{48}\int_{-4}^{2}\left(y\Big|_{-x}^{z-x}\right)dx =$$

$$= \frac{36}{96} + \frac{1}{48}\int_{-4}^{2}(z-x+x)\ dx = \frac{36}{96} + \frac{z}{48}\int_{-4}^{2}dx = \frac{36}{96} + \frac{z}{48}6 =$$

$$= \frac{36+12z}{96} = \frac{z+3}{8}.$$

Отже, на проміжку [0, 2], що зображено на рис. 78, функція розподілу ймовірностей змінюється за законом

$$F_2(z) = \frac{z+3}{8}.$$

4. У точці (2, 6) $Z = 8$ і функція розподілу ймовірностей при своїй зміні наближатиметься до одиниці. Щоб дістати аналітичний вираз для $F(z)$, від одиниці віднімаємо змінну площу S трикутника, зображеного на рис. 79.

$$F_3(Z) = 1 - \frac{1}{48}\int_{z-6}^{2}\int_{z-x}^{6}dy\,dx = 1 - \frac{1}{48}\int_{z-6}^{2}\left(\int_{z-x}^{6}dy\right)dx = 1 - \frac{1}{48}\int_{z-6}^{2}\left(y\Big|_{z-x}^{6}\right)dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{48}\int_{z-6}^{2}(6-z+x)\ dx = 1 - \frac{1}{48}\ \frac{(6-z+x)^2}{2}\Bigg|_{z-6}^{2} = 1 - \frac{(8-z)^2}{96}\ .$$

Отже,

$$F(z) = 1 - \frac{(z-8)^2}{96}.$$

Таким чином, загальний вигляд функції розподілу ймовірностей буде такий:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \le -6; \\ \frac{(z+6)^2}{96}, & -6 < z \le 0; \\ \frac{z+3}{8}, & 0 < z \le 2; \\ 1 - \frac{(z-8)^2}{96}, & 2 < z \le 2; \\ 1, & z > 8. \end{cases}$$

Тоді щільність імовірностей матиме вигляд

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \le -6; \\ \frac{z+6}{48}, & -6 < z \le 0; \\ \frac{1}{8}, & 0 < z \le 2; \\ \frac{8-z}{48}, & 2 < z \le 8; \\ 0, & z > 8. \end{cases}$$

Графіки $F(x)$, $f(x)$ зображені на рис. 80 і 81.

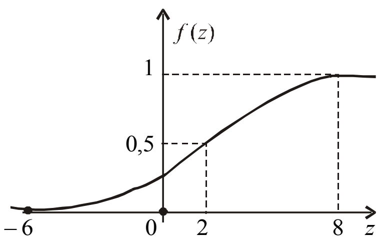

Рис. 80

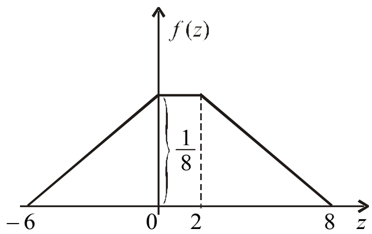

Рис. 81

4.2. Знаходження F (z), f (z), якщо $Z = \frac{Y}{X}$ $(Y = ZX)$

Оскільки пряма $Y = ZX$ ділить площину xOy на дві неперетинні області, зображені на рис. 82.

Приклад 6. Задано

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<\infty;\ \ f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty<y<\infty.$$

Знайти $f(z)$, якщо $Z=\dfrac{Y}{X}$.

Розв'язання. Згідно з (214) маємо

$$f(z)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(zx)^2}{2}}x\,dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(zx)^2}{2}}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{1+z^z}e^{-\left(1+z^2\right)\frac{x^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{1+z^2}e^{-\left(1+z^2\right)\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2\pi}.\right.$$

$$\left[\frac{1}{1+z^z}+\frac{1}{1+z^2}\right]=\frac{1}{\pi(1+z^z)}.$$

Перевірка умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{0}f(z)\,dx=1\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+z^z)}dz=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}Z\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Отже, $f(z)$ знайдено правильно.

Таким чином,

$$f(z)=\frac{1}{\pi(1+z^2)},\qquad -\infty<z<\infty.$$

4.3. Знаходження F(Z), f (z), якщо Z = XY.

Якщо $Z=XY$, тобто випадкова величина Z дорівнює добутку двох випадкових величин X і Y, то ймовірність потрапляння випадкової величини Z в область $D:Z<z\ \ (YX<z)$ унаочнює рис. 83.

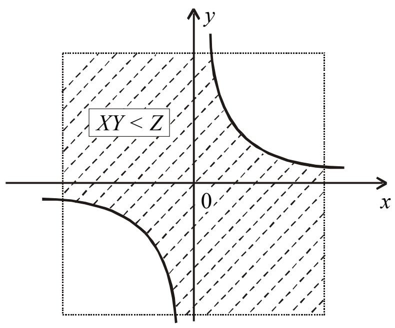

Рис. 83

Маємо:

$$P(XY<z)=P(Z<z)=F(z)=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{\infty}f(x,\ y)\,dy\ dx+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}}f(x,\ y)\,dy\ dx$$

або $$P(Z<z)=F(z)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}}\int\limits_{0}^{\infty}f(x,\ y)\,dy\ dx-\int\limits_{\infty}^{\frac{z}{x}}\int\limits_{-\infty}^{0}f(x,\ y)\,dy\ dx\,. \quad (215)$$

Скориставшись (215), дістанемо

$$f(z)=F'(Z)=\left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}}\int\limits_{0}^{\infty}f(x,\ y)\,dy\ dx-\int\limits_{\infty}^{\frac{z}{x}}\int\limits_{-\infty}^{0}f(x,\ y)\,dy\ dx\right)'_x=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}f\left(x,\ \frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}dx-\int\limits_{-\infty}^{0}f\left(x,\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx.$$

Отже, $$f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}dx-\int\limits_{-\infty}^{0}f\left(x,\ \frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}dx. \quad (216)$$

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то

$$f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}f(x)\,f\left(\frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}dx-\int\limits_{-\infty}^{0}f(x)\,f\left(\frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}dx\,. \quad (217)$$

Приклад 7. Незалежні випадкові величини X і Y мають рівномірний закон розподілу ймовірностей, щільності ймовірностей яких такі:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2;\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{1}{2}, & 0<y\le 2;\\ 0, & y>2.\end{cases}$$

Знайти $F(z), f(z)$, якщо $Z=XY$.

Розв'язання. Імовірність влучення випадкової величини $Z=XY$ в область D зображена на рис. 84.

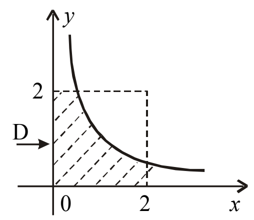

Рис. 84

Згідно з (217) маємо:

$$F(z)=1-\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{2}\int\limits_{\frac{z}{z}}^{2}dy\ dx=1-\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{2}\left(y\Bigg|_{\frac{z}{x}}^{2}\right)dx=1-\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{2}(2-\frac{\text{Z}}{\text{X}})\ dx=1-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{z}{2}}^{2}dx+\frac{z}{4}\int\limits_{\frac{z}{2}}^{2}\frac{dx}{x}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{z}{2}\right)+\frac{z}{4}\ln x\Bigg|_{\frac{z}{x}}^{2}=1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{z}{2}\right)+\frac{z}{4}\left(\ln 2-\ln\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{z}{4}+\frac{z}{4}(\ln 2-\ln z+\ln 2)=\frac{z}{4}+\frac{z}{4}(2\ln 2-\ln z).$$

Отже,

$$F(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ \frac{z}{4}+\frac{z}{4}(2\ln 2-\ln z), & 0<z\le 4;\\ 1, & z>4.\end{cases}$$

Звідси $$F(z)=F'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ \frac{1}{4}(2\ln 2-\ln z), & 0<z\le 4;\\ 0, & z>4.\end{cases}$$

Перевірка виконання умови нормування:

$$\int\limits_0^4 f(z)dz=1\to\int\limits_0^4\frac{1}{4}(2\ln 2-\ln z)dz=\frac{1}{4}2\ln 2\int\limits_0^4 dz=-\frac{1}{4}\int\limits_0^4\ln z dz=$$

$$=\left|\begin{matrix}\ln z=u,\ du=\dfrac{dz}{z}\\ dz=dv,\ v=z\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\ln 2z\Bigg|_0^4-\frac{1}{4}\left[z\ln z\Bigg|_0^4-\int\limits_0^4 dz\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)4-\frac{1}{4}\left(4\ln 4-z\Bigg|_0^4\right)=2\ln 2-2\ln 2+1=1.$$

Умова нормування виконується. Отже, $f(z)$ знайдено вірно.

5. Числові характеристики функції *n* випадкових аргументів

1. *Математичне сподівання.*

А. $$M(X+Y)=M(X)+M(Y).\qquad(218)$$

! **Доведення.** Нехай X і Y є неперервними випадковими величинами. Тоді

$$M(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,\ y)\,dx\ dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\ y)\,dx\ dy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,\ y)\,dx\ dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\ dy\right)dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\ dx\right)dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\ dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)\ dy=M(X)+M(Y).$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\,dy=f(x)$, то $\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\ dx=f(y)$.

Висновок 1.

$$M\,(AX+BY+C)=AM\,(X)+BM\,(Y)+C. \qquad (219)$$

тут A, B, C — деякі сталі.

! **Доведення**.

$$M(AX+BY+C)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(Ax+By+C)f(x,\ y)\,dx\ dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Axf(x,\ y)\,dx\ dy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Byf(x,\ y)\,dx\ dy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Cf(x,\ y)\,dx\ dy=$$
$$=A\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\ dy\right)dx+B\int_{-\infty}^{\infty}y\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\,dx\right)dy+C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\,dx\ dy=$$
$$=A\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)+B\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)+C=AM(X)+BM(Y)+C,$$

оскільки $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\,dx\ dy=1.$

Висновок 2.

$$M\left(\sum_{i=1}^{n}X\right)=\sum_{i=1}^{n}M\,(X_i)\ . \qquad (220)$$

Б. Якщо випадкові величини є між собою незалежними, то

$$M\,(XY)=M\,(X)\,M\,(Y). \qquad (221)$$

! **Доведення.**

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f(x,\ y)\,dx\ dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\ \ f(x)\,f(y)\,dx\ dy=M(X)\,M(Y)$$

(оскільки для незалежних випадкових величин $f(x,\ y)=f(x)\,f(y)$).

Висновок. Для n незалежних випадкових величин

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} M(X_i). \tag{222}$$

В. Якщо випадкові величини X і Y є залежними, то

$$M(XY) = M(X)\, M(Y) + K_{xy}. \tag{223}$$

Формула (223) випливає з визначення кореляційного моменту

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)\, M(Y).$$

2. *Дисперсія*.

А.
$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}. \tag{224}$$

! **Доведення.**

$$D(X+Y) = M\big((X+Y) - M(X+Y)\big)^2 = M(X+Y-M(X)-M(Y))^2;$$

$$M = \big((X-M(X)) + (Y-M(Y)\big)^2 =$$
$$= M\Big((X-M(X))^2 + (Y-M(Y))^2 + 2(X-M(X))\,(Y-M(X)\Big) =$$
$$= M(X-M(X))^2 + M(Y-M(Y))^2 + 2M(X-M(X))(Y-M(Y)) =$$
$$= D(X) + D(Y) + 2K_{xy},$$

де $K_{xy} = M(X - M(X))\,(Y - M(Y))$.

Висновок 1.

$$D(AX + BY + C) = A^2 D(X) + B^2 D(Y) + 2ABK_{xy}. \tag{226}$$

! **Доведення.**

$$D(AX+BY+C) = M\big((AX+BY+C) - M(AX+BY+C)\big)^2 =$$
$$= M\big(AX+BY+C-AM(X)-BM(Y)-C\big)^2 =$$
$$= M\big(A(X-M(X)) + B(Y)-M(Y)\big)^2 =$$
$$= M\Big(A^2(X-M(X))^2 + B^2(Y-M(Y))^2 + 2AB(X-M(Y))(Y-M(Y))\Big) =$$
$$= A^2 M(X-M(X))^2 + B^2 M(Y-M(Y))^2 + 2ABM\,(X-M(X))(Y-M(Y)) =$$
$$= A^2 D(X) + B^2 D(Y) + 2ABK_{xy}.$$

Висновок 2.

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = D\sum_{j=1}^{n}(X_j) + 2\sum_{j=i} K_{ij}. \tag{227}$$

Якщо $K_{ij} = 0,\ \ i \neq j,\ \ i, j = \overline{1, n},$ то

$$D\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} D(X_i). \tag{228}$$

Б. Якщо випадкові величини є незалежними, то

$$D\,(XY) = D\,(X)\,D\,(Y) + M^2\,(X)\,D\,(Y) + M^2\,(Y)\,D\,(Y), \qquad (229)$$

або

$$D\,(XY) = (D\,(X) + M^2\,(X))\,(D\,(Y) + M^2\,(Y)) - M^2\,(X)\,M^2\,(Y).$$

! **Доведення.**

$$D(XY) = M\left(XY - M(XY)\right)^2 = M\left(X^2Y^2 - 2XY\,M(XY) + M^2(XY)\right) =$$
$$= M\left(X^2Y^2 - 2XY\,M(X)M(Y) + M^2(X)M^2(Y)\right) =$$
$$= M\left(X^2\right)M(Y^2) - 2M^2(X)M^2(Y) + M^2(X)\,M^2(Y) =$$
$$= M\left(X^2\right)M(Y^2) - M^2(X)M^2(Y) =$$
$$= \left(D(X) + M^2(X))(D(Y) + M^2(Y)\right) - M^2(X)\,M^2(Y),$$

оскільки $M\left(X^2\right) = D(X) + M^2(X)$, $\qquad M\left(Y^2\right) = D(Y) + M^2(Y)$.

Висновок. Для n незалежних випадкових величин маємо:

$$D\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(D(X_i) + M^2(X_i)\right) - \prod_{j=1}^{n} M^2(X_i) \qquad (230)$$

Приклад 8. Відомі значення: $M\,(X) = -2$; $D\,(X) = 4$; $M(Y) = -3$; $K_{xy} = -1$.
Знайти $M\,(Z)$, $D\,(Z)$, $\sigma\,(Z)$, якщо $Z = -9x + 5y + 3$.

Розв'язання. Скориставшись (219) і (226) дістанемо:

$M\,(Z) = M\,(-9x + 5y + 3) = -9\,M\,(X) + 5\,M\,(Y) + 3 =$
$= -9\,(-2) + 5\,(-3) + 3 = 18 - 15 + 3 = 6.$

$D\,(Z) = D\,(-9x + 5y + 3) = 81\,D\,(X) + 25D\,(Y) + 2\,(-9)\,5\,K_{xy} =$
$= 81D\,(X) + 25\,D\,(Y) - 90\,K_{xy} = 81\cdot 4 + 25\cdot 3 - 90\,(-1) =$
$= 324 + 75 + 90 = 489.$

$\sigma(z) = \sqrt{D(z)} = \sqrt{489} \approx 22{,}1.$

Приклад 9. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty < x < \infty$$

знайти $M\,(Y)$; Kxy, якщо $Y = 3x^2 - 2x^2 + x + 1$.

Розв'язання. Для знаходження $M\,(Y)$, K_{xy}, необхідно визначити $M(X^4), M(X^3)$, $M(X^2)$, $M(X)$, оскільки:

$M(Y) = M\left(3x^3 - 2x^2 + x + 1\right) = 3M\left(x^3\right) - 2M(x^2) + M(x) + 1$;

$K_{xy} = M\,(XY) - M\,(Y)\,M\,(X)$,

де $M(xy) = M\left(x(3x^3-2x^2+x+1)\right) = M\left(3x^4-2x^3+x^2+x\right) =$

$= 3M(x^4) - 2M(x^3) + M(x^2) + M(x).$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0;$$

$M(X) = 0;$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x,\ du = dx \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = d\upsilon \to \upsilon = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

$M(x^2) = 1;$

$$M(x^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0;$$

$M(x^3) = 0;$

$$M(x^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \begin{vmatrix} u = x^3,\ du = 3x^2 dx \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = d\upsilon \to \\ \upsilon = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \right] =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \begin{vmatrix} u = x,\ dx = dx \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = d\upsilon \to \upsilon = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \right] = \frac{6}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{6}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 3.$$

$M(x^4) = 3;$

$M(Y) = 3M(x^3) - 2M(x^2) + M(x) + 1 = 3\cdot 0 - 2\cdot 1 + 0 + 1 = -1;$

$M(XY) = 3M(x^4) - 2M(x^3) + M(x^2) + M(x) = 3\cdot 3 - 2\cdot 0 + 1 + 0 = 8;$

$K_{xy} = M(XY) - M(Y)\ M(X) = 8 - (-1)\ 0 = 8.$

Приклад 9. Задано щільності ймовірностей незалежних випадкових величин X і Y:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2e^{-2x}, & x>0;\end{cases}\qquad f(y)=\ f(y)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \dfrac{1}{6}, & -2<y\le 4;\\ 0, & y>4.\end{cases}$$

Знайти $M(Z)$, $D(Z)$, якщо виконуються умови:

1) $Z=3x-5y+1$; 2) $Z=XY$; 3) $Z=-2x-3y+1$.

Розв'язання. Обчислимо: $M(X)$; $M(X^2)$, $M(Y)$; $M(Y^2)$.

$$M(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty x2e^{-2x}dx=\begin{vmatrix}u=x,\ du=dx,\\ 2e^{-2x}dx=d\upsilon\to\upsilon=-e^{-2x}\end{vmatrix}=$$

$$=-xe^{-2x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-2x}dx=\int_0^\infty e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2};$$

$$M(X)=\frac{1}{2}.$$

$$M(X^2)=\int_0^\infty x^2f(x)dx=\int_0^\infty x^2 2e^{-2x}dx=\begin{vmatrix}x^2=u,\ du=2xdx\\ 2e^{-2x}dx=d\upsilon\to\\ \to\upsilon=-e^{-2x}\end{vmatrix}=$$

$$=-x^2e^{-2x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty x2e^{-2x}dx=\int_0^\infty x2e^{-2x}dx=\begin{vmatrix}u=x,\ du=dx\\ 2e^{-2x}dx=d\upsilon\to\\ \to\upsilon=-e^{-2x}\end{vmatrix}=$$

$$=-xe^{-2x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-2x}dx=\int_0^\infty e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2};$$

$$M(X^2)=\frac{1}{2};$$

$$D(X)=M(x^2)-M^2(x)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4};\qquad D(X)=\frac{1}{4};$$

$$M(Y)=\int_{-2}^4 yf(y)dy=\int_{-2}^4 y\frac{1}{6}\,dy=\frac{y^2}{12}\Big|_{-2}^4=\frac{16-4}{12}=1;\qquad M(Y)=1;$$

$$M(Y^2)=\int_{-2}^4 y^2f(y)\,dy=\int_{-2}^4 y^2\frac{1}{6}dy=\frac{y^3}{18}\Big|_{-2}^4=\frac{64+8}{18}=\frac{72}{18}=4;\quad M(Y^2)=4;$$

$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 4 - 1 = 3.$

1. $M(Z) = M(3x - 5y + 1) = 3M(x) - 5M(y) + 1 =$

$$= 3\,\frac{1}{2} - 5 \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2} - 5 + 1 = \frac{3}{2} - 4 = \frac{3-8}{2} = -\frac{5}{2} = -2{,}5:$$

$M\,(Z) = -\,2{,}5;$

$D(Z) = D(3x - 5y + 1) = 9D(x) + 25D(y) =$

$$= 9\,\frac{1}{4} + 25 \cdot 3 = \frac{9}{4} + 75 = \frac{309}{4} = 77{,}29;$$

$D\,(Z) = 77{,}29.$

2. $M(Z) = M(xy) = M(x)\;M(y) = \frac{1}{2}\,1 = \frac{1}{2};$

$M\,(Z) = 0{,}5.$

$D(Z) = D(xy) = \left(D(x) + M^2(x)\right)\left(D(y) + M^2(y)\right) - M^2(x)M^2(y) =$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)(3+1) - \frac{1}{4}\,1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75;$$

$D\,(Z) = 1{,}75.$

3. $M(Z) = M(-\,2x - 3y + 1) = -2M(x) - 3M(y) + 1 =$

$$= -2\frac{1}{2} - 3 \cdot 1 + 1 = -1 - 3 + 1 = -3;$$

$M\,(Z) = -\,3.$

$D(Z) = D(-\,2x - 3x + 1) = 4D(x) + 9D(y) = 4\frac{1}{4} + 9 \cdot 3 = 1 + 27 = 28\,;$

$D\,(Z) = 28.$

Приклад 10. Двовимірна випадкова величина (X, Y) має такий закон розподілу ймовірностей

$X \backslash Y$	5	10	15	20	p_{yi}
– 6	0,02	0,01	0,03	0,04	0,1
– 4	0,18	0,09	0,07	0,06	0,4
– 2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5
p_{xj}	0,3	0,3	0,2	0,2	

Знайти $M\,(Z)$, $D\,(Z)$, якщо:
1) $Z = -\,4x - 3y + 10;$ 2) $Z = 3x - 9y - 7.$

Розв'язання. Обчислимо $M\,(X)$; $D\,(Y)$, $D\,(Y)$; K_{xy}.

$$M(X)=\sum_{j=1}^{4}x_j\,p_{xj}=5\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}3+15\cdot 0{,}2+20\cdot 0{,}2=1{,}5+3+3+4=11{,}5.$$

$M(X) = 11{,}5$.

$$M(X^2)=\sum_{j=1}^{4}x_j^2\,p_{xj}=25\cdot 0{,}3+100\cdot 0{,}3+225\cdot 0{,}2+400\cdot 0{,}2=$$
$$=7{,}5+30+45+80=162{,}5.$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=162{,}5-(11{,}5)^2=162{,}5-132{,}25=30{,}25.$$

$D(X) = 30{,}25$.

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{3}y_i\,p_{yi}=-6\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}4-2\cdot 0{,}5=-0{,}6-1{,}6-1=-3{,}2.$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{3}y_j^2\,p_{yi}=36\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}5=3{,}6+6{,}4+2=12.$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=12-(-3{,}2)^2=12-10{,}24=1{,}76.$$

$D(Y) = 1{,}76$.

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}y_i x_j p_{ij}=-6\cdot 5\cdot 0{,}02-6\cdot 10\cdot 0{,}01-6\cdot 15\cdot 0{,}03-$$
$$-6\cdot 20\cdot 0{,}04-4\cdot 5\cdot 0{,}18=-4\cdot 10\cdot 0{,}09-4\cdot 15\cdot 0{,}07-4\cdot 20\cdot 0{,}06-2\cdot 5\cdot 0{,}1-$$
$$-2\cdot 10\cdot 0{,}2-2\cdot 15\cdot 0{,}1-2\cdot 20\cdot 0{,}1=-0{,}6-0{,}6-2{,}7-4{,}8-3{,}6-3{,}6-4{,}2-$$
$$-4{,}8-1-4-3-4=-36{,}9.$$

$M(XY) = -36{,}9$.

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\,M(Y)=-36{,}9-11{,}5(-3{,}2)=-36{,}9+36{,}8=-0{,}1;$$

$K_{xy} = -0{,}1$.

1) $M(Z)=M(-4x-3y+10)=-4M(x)-3M(y)+10=$
$$=-4\cdot 11{,}5-3\cdot(-3{,}2)+10=-46+9{,}6+10=-26{,}4.$$

$M(Z) = -26{,}4$.

$$D(Z)=D(-4x-3y+10)=16D(x)+9D(y)+2(-4)(-3)K_{xy}=$$
$$=16\cdot 30{,}25+9\cdot 1{,}76+2\cdot 12(-0{,}1)=484+15{,}84-2{,}4=497{,}44.$$

$D(Z) = 497{,}44$.

2) $M(Z)=M(3x-9y-7)=3M(X)-9M(Y)-7=$
$$=3\cdot 11{,}5-9(-3{,}2)-7=34{,}5+28{,}8-7=56{,}3.$$

$M(Z) = 56{,}3$.

$$D(Z)=D(3x-9y-7)=9D(X)+81D(Y)+2(3)\,(-9)K_{xy}=$$
$$=9\cdot 30{,}25+81\cdot 1{,}76+54\cdot 0{,}1=272{,}25+142{,}56+5{,}4=420{,}21.$$

$D(Z) = 420{,}21$.

Приклад 11. Відомо, що $X = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, коли $M(X_1) = -2$, $M(X_2) = 3$, $M(X_3) = 1$; $D(X_1) = 4$; $D(X_2) = 3$; $D(X_3) = 5$; $r_{12} = 0{,}36$; $r_{13} = 0{,}3$; $r_{23} = -0{,}1$.

Розв'язання. Використовуючи властивості математичного сподівання, дисперсії та парного коефіцієнта кореляції, одержимо:

$$M(x) = M(2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5) = 2M(x_1) - 3M(x_2) + 4M(x_3) + 5 =$$
$$= 2(-2) - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 = -4 - 9 + 4 + 5 = -4.$$

$M(x) = 4$.

$$D(x) = D(2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5) = 4D(x_1) + 9D(x_2) + 16D(x_3) +$$
$$+ 2(2)(-3)K_{12} + 2(2)(-4)K_{13} + 2(-3)(-4)K_{23} =$$
$$= 4D(x_1) + 9D(x_2) + 16D(x_3) - 12K_{12} - 16K_{13} + 24K_{23}.$$

Оскільки

$$r_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)}; \qquad r_{13} = \frac{K_{13}}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)}; \qquad r_{23} = \frac{K_{23}}{\sigma(x_2)\sigma(x_3)}, \text{ то:}$$

$$K_{12} = r_{12}\sigma(x_1)\,\sigma(x_2) = 0{,}36\sqrt{D(x_1)}\,\sqrt{D(x_2)} =$$
$$= 0{,}36\sqrt{4}\sqrt{3} = 0{,}36 \cdot 2 \cdot 1{,}732 = 1{,}24704;$$

$$K_{13} = r_{13}\sigma(x_1)\,\sigma(x_2) = r_{13}\sqrt{D(x_1)}\,\sqrt{D(x_2)} = 0{,}3\sqrt{4}\sqrt{5} =$$
$$= 0{,}3 \cdot 2 \cdot 2{,}236 = 1{,}3418;$$

$$K_{23} = r_{23}\sigma(x_2)\,\sigma(x_3) = -0{,}1\sqrt{D(x_2)}\,\sqrt{D(x_3)} = -0{,}1\sqrt{3}\,\sqrt{5} =$$
$$= -0{,}1 \cdot 1 \cdot 1{,}732 \cdot 2{,}236 = -0{,}397.$$

Отже,

$$D(x) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 16 \cdot 5 - 12 \cdot 1{,}24704 - 16 \cdot 1{,}3418 + 24(-0{,}397) =$$
$$= 16 + 27 + 80 - 14{,}965 - 21{,}469 - 9{,}528 = 77{,}038.$$

$D(x) = 77{,}038$.

Приклад 12. За заданою кореляційною матрицею

$$K = \begin{pmatrix} 16 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ & 9 & 1 & -0{,}8 \\ & & 25 & -0{,}4 \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

знайти $D(X)$, якщо $X = 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 5$.

Розв'язання. Використовуючи властивості дисперсії, дістаємо:

$$D(x) = D(4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 5) = 16D(x_1) + 9D(x_2) + 25D(x_3) +$$
$$+ D(x_4) + 2 \cdot 4(-3)K_{12} + 2 \cdot 4(-5)K_{13} + 2 \cdot 4(-1)K_{14} + 2(-3)(-5)K_{23} +$$
$$+ 2(-3)(-1)K_{24} + 2(-5)(-1)K_{34} = 16D(x_1) + 9D(x_2) + 25D(x_3) +$$
$$+ D(x_4) - 24K_{12} - 40K_{13} - 8K_{14} + 30K_{23} + 6K_{24} + 10K_{34} = 16 \cdot 16 + 9 \cdot 9 +$$

$+ 25 \cdot 25 + 4 - 24 \cdot 0{,}1 - 40 \cdot 0{,}2 - 8 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 1 + 6\,(-0{,}8) + 10\,(-0{,}4) =$
$= 256 + 81 + 625 + 4 - 2{,}4 - 8 - 4 + 30 - 4{,}8 - 4 = 972{,}8.$
$D\,(x) = 972{,}8.$

Приклад 13. За заданою кореляційною матрицею

$$K = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 \\ & & & 16 \end{pmatrix}$$

знайти $D\,(X)$, якщо $X = -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 100$.

Розв'язання. Використовуючи властивості дисперсії, одержимо:

$$D(X) = D(-3x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 100) =$$
$$= 9D(x_1) + 4D(x_2) + D(x_3) + 25D(x_4) =$$
$$= 9 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 4 + 25 \cdot 16 = 81 + 4 + 4 + 400 = 489.$$

$D\,(X) = 489.$

Приклад 14. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{3}{2}x^2, & -1 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $f\,(y)$, якщо $Y = \min\,(X;\ 1)$.

Розв'язання. Випадкова величина Y буде величиною мішаного виду:

при $Y \in \left[-1;\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{2}{3}};\ 1\right]$ $\quad Y = 1$;

при $Y \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}};\ 0\right] \cup \left[0;\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ $\quad Y = X$.

Графік $f\,(y)$ зображено на рис. 85.

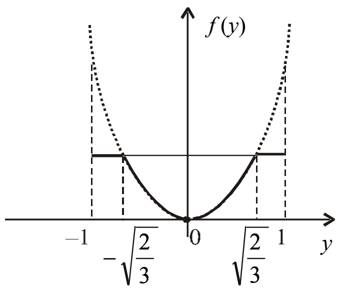

Рис. 85

Для $f(y)$ на проміжку $[-1;\,1]$ має виконуватися умова нормування:

$$a\left[\int_{-1}^{-\sqrt{\frac{2}{3}}} dy+\frac{3}{2}\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} y^2dy+\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1} dy\right]=1\rightarrow a\left[2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right]=1\rightarrow$$

$$\rightarrow a\left[2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right]=1\rightarrow 2a\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right]=1\rightarrow a=\frac{1}{2\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Отже,

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \dfrac{1}{2\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}, & -1<y\le -\sqrt{\frac{2}{3}};\\ \dfrac{3}{4\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}y^2, & -\sqrt{\frac{2}{3}}<y\le -\sqrt{\frac{2}{3}};\\ \dfrac{1}{2\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}, & \sqrt{\frac{2}{3}}<y\le 1;\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

Приклад 15. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{2}x^2, & -1<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти $f(y)$, якщо $Y=\max(X;\,1)$.

***Розв'язання*.** Випадкова величина Y буде величиною мішаного виду:

$$\text{при } Y\in\left[-1;\,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{2}{3}};\,1\right]\qquad Y=X;$$

$$\text{при } Y \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \qquad Y = 1.$$

Графік $f(y)$ зображено на рис. 86.

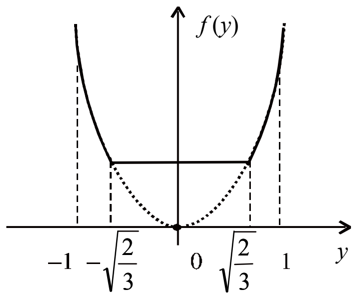

Рис. 86

За умовою нормування для випадкової величини Y на проміжку $[-1;\,1]$ дістаємо:

$$a\left[\frac{3}{2}\int_{-1}^{-\sqrt{\frac{2}{3}}} y^2 dy + \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} dy + \frac{3}{2}\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1} y^2 dy\right] = 1 \to a\left[1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right] = 1 \to a = \frac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

Отже,

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1; \\ \dfrac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\,\dfrac{3}{2}y^2, & -1 < y \le -\sqrt{\frac{2}{3}}; \\ \dfrac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}, & -\sqrt{\frac{2}{3}} < y \le \sqrt{\frac{2}{3}}; \\ \dfrac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\,\dfrac{3}{2}y^2, & \sqrt{\frac{2}{3}} < y \le 1; \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

Теоретичні запитання до теми ?

1. Як обчислити щільність імовірностей випадкової величини Y, якщо $Y = \alpha(X)$, де $\alpha(x)$ — монотонна функція, і відомий закон розподілу випадкової величини X?
2. Як обчислити $f(y)$, якщо $Y = \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — немонотонна функція, і відомий закон розподілу випадкової величини X?
3. Числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу.
4. Числові характеристики функції неперервного випадкового аргументу.
5. Як визначити $F(Z)$, $f(z)$, якщо $Z = X + Y$?
6. Як визначити $F(Z)$, $f(z)$, якщо $Z = \frac{Y}{X}$?
7. Як визначити $F(Z)$, $f(z)$, якщо $Z = X\,Y$?
8. Що означає здійснити композицію двох законів розподілу?
9. Довести, що $M(X + Y) = \ldots$.
10. Довести, що $M(AX + BY + C) = \ldots$, якщо A, B, C — деякі сталі.
11. Довести, що $M(XY) = \ldots$.
12. Довести, що $D(X + Y) = \ldots$.
13. Довести, що $D(AX + BY + C) = \ldots$, якщо A, B, C — деякі сталі.
14. За якої умови $M(X\,Y) = M(X)\,M(Y)$?
15. Довести, що $D(X\,Y) = \ldots$.
16. Чому дорівнює $M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \ldots$?
17. Чому дорівнює $D\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \ldots$?
18. За якої умови $M\left(\prod_{\mu=1}^{n} x_\mu\right) = \prod_{\mu=1}^{n} M(x_\mu)$?
19. Чому дорівнює $D\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \ldots$?
20. Чому дорівнює дисперсія від суми n некорельованих випадкових величин?
21. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції випадкових величин Y і X, якщо між ними існує лінійна функціональна залежність ?
22. Довести, що $\left|K_{xy}\right| \le \sigma_x \sigma_y$.
23. Довести, що $\left|r_{xy}\right| \le 1$.

Приклади до теми

1. Задано

x_i	0,001	0,01	0,1	10	100	100
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$, якщо $Y = \lg x$.

Відповідь. $M(Y) = 0$, $D(Y) = 3{,}8$; $\sigma(Y) \approx 1{,}95$.

2. Незалежні випадкові величини X і Y мають щільності ймовірностей згідно з рис. 87 і 88.

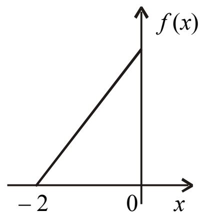

Рис. 87

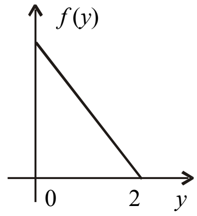

Рис. 88

Визначити: 1) $M(2x + 3y - 2)$; $D(2x + 3y - 2)$;
2) $M(XY)$; $D(XY)$.

Відповідь. 1) $\frac{4}{3}$; $\frac{13}{6}$; 2) $-\frac{4}{9}$; $\frac{57}{324}$.

3. Випадкові величини X і Y є залежними і мають щільності ймовірностей згідно з рис. 89 і 90.

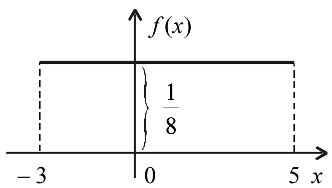

Рис. 89

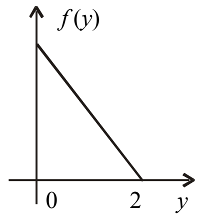

Рис. 90

Знайти: 1) $M(4x - 5y - 1)$; $D(4x - 5y - 1)$;
2) $M(-4x - 10y + 5)$; $D(-4x - 10y + 5)$;
3) $M(XY)$. При цьому відоме значення $K_{xy} = -0{,}5$.

Відповідь. 1) $-\frac{1}{3}$; 70,5; 2) $-\frac{17}{3}$; 67,56; 3) 0,193.

4. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & x>2.\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \dfrac{1}{2}, & -1<y\le 1;\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

Знайти $f(Z)$, якщо $Z = X + Y$.
Відповідь.

$$f(z)=\begin{cases}0, & z\le -1;\\ \dfrac{1+z}{4}, & -1<z\le 1;\\ \dfrac{3-z}{4}, & 1<z\le 3;\\ 0, & z>3.\end{cases}$$

5. Задані закони розподілу двох незалежних випадкових величин X і Y є щільностями ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{1}{4}, & -2<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \dfrac{1}{8}, & -2<y\le 6;\\ 0, & y>6.\end{cases}$$

Знайти $F(z)$, $f(z)$, якщо $Z = X + Y$.
Відповідь.

$$F(z)=\begin{cases}0, & z\le -4;\\ \dfrac{(Z+4)^2}{64}, & -4<z\le 0;\\ \dfrac{Z+4}{8}, & 9<z\le 4;\\ 1-\dfrac{(Z-8)^2}{64}, & 4<z\le 8;\\ 1, & z>8.\end{cases} \qquad f(z)=\begin{cases}0, & z\le -4;\\ \dfrac{Z+4}{32}, & -4<z\le 0;\\ \dfrac{1}{8}, & 0<z\le 4;\\ -\dfrac{Z-8}{32}, & 4<z\le 8;\\ 0, & z>8.\end{cases}$$

6. Двовимірна випадкова величина (X і Y) має закон розподілу ймовірностей:

X \ Y	4	6	8	Py_i
10	0,03	0,07	0,2	0,3
20	0,27	0,23	0,2	0,7
Px_j	0,3	0,3	0,4	

Знайти $M(Z)$, $D(Z)$, якщо виконуються умови:
1) $Z = -9x + 2y - 5$;
2) $Z = -3x - 2y + 5$;
3) $Z = XY$.
Відповідь. 1) –26,8; 408,36; 2) – 47,6; 75,24; 3) 96,6.

7. Відомі значення випадкового вектора (X, Y):
$M(X) = -1$; $M(Y) = 4$; $D(X) = 2$; $D(Y) = 5$;
$r_{xy} = -0,4$.
Знайти $M(Z)$, $D(Z)$, якщо: 1) $Z = -x - 5y + 5$;
2) $Z = 2x - 9y - 3$;
3) $Z = XY$.
Відповідь. 1) –14; 114,36; 2) –37; 367,96; 3) –2,736.

8. За заданою кореляційною матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -0,8 & 0,4 & 1 \\ & 1 & 0,8 & 0,5 \\ & & 9 & -1 \\ & & & 16 \end{bmatrix}$$

знайти $D(X)$, якщо:
1) $X = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 + 2$;
2) $X = -3x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 - 1$.
Відповідь. 1) 216,4; 2) 650,6.

9. За заданою кореляційною матрицею

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 9 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 \\ & & & 25 \end{pmatrix}$$

знайти $D(Z)$, якщо: 1) $Z = -4x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 5$;
2) $Z = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 100$.
Відповідь. 1) 150; 2) 497.

10. Незалежні випадкові величини X і Y мають рівномірний закон розподілу, щільності ймовірностей яких відповідно такі

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ 1, & 0<y\le 1;\\ 0, & y>1.\end{cases}$$

Знайти $f(z)$, якщо $Z = XY$. Чому дорівнюють $M(Z)$, $D(Z)$?

Відповідь.

$$f(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ -\ln z, & 0<z\le 1\\ 0, & z>1.\end{cases}$$

$M(Z) = 0{,}25$; $D(Z)=\dfrac{7}{144}$.

11. Знайти $f(z)$, якщо $Z=\dfrac{Y}{X}$, де X і Y є незалежними випадковими величинами, закони яких задані щільностями ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 6e^{-6x}, & x>0;\end{cases}$$

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty<y<\infty .$$

Відповідь.

$$f(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ ze^{-\frac{18}{z^2}}, & z>0.\end{cases}$$

12. Незалежні випадкові величини X і Y мають такі щільності ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ C_1x^{\alpha}e^{-\beta x}, & x>0;\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ C_2y^{\gamma}e^{-\beta y}, & y>0.\end{cases}$$

Знайти C_1, C_2 і $f(z)$, якщо $Z = X + Y$.

Відповідь: $C_1 = \dfrac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$, $C_2 = \dfrac{\beta^{\gamma+1}}{\Gamma(\beta+1)}$;

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ \dfrac{\beta^{\alpha+\gamma+2}}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)} z^{\beta+\gamma+1} e^{-\beta z}, & 0 < z \le 1; \\ 0, & z > 1. \end{cases}$$

13. Визначити $f(y)$, якщо $Y = x^n$ і $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Відповідь.
1) для непарного n

$$f(y) = \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{\pi n\ (1+y^{\frac{2}{n}})};$$

2) для парного n

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \dfrac{2y^{\frac{1}{n}-1}}{\pi n(1+y^{\frac{2}{n}})}, & y > 0. \end{cases}$$

14. Випадкова величина Y задана у вигляді

$$Y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \ge 0; \\ \sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Знайти $f(y)$, якщо щільність імовірностей випадкової величини X:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Відповідь.

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \dfrac{4y}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^4}{2}}, & y > 0. \end{cases}$$

15. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[0;1]$ і пов'язана із Y функціональною залежністю $\operatorname{tg}\frac{\pi Y}{2} = e^x$. Знайти $f(y)$.

Відповідь.

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le \frac{1}{2}; \\ \frac{\pi}{\sin \pi y}, & \frac{1}{2} < y \le \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e; \\ 0, & y > \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e. \end{cases}$$

16. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей, що задано щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \frac{1}{6}, & -3 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(y)$, якщо $Y = \sin\frac{\pi}{6}x$. Обчислити $M(Y)$, $D(Y)$.

Відповідь.

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y < -1; \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y \le 1; \\ 0, & y \ge 1. \end{cases}$$

$M(Y) = 0$,

$D(Y) = 0{,}5$

17. Щільність імовірностей випадкової величини

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти $f(y)$, якщо: 1) $y = 1 - x^3$; 2) $y = x^2$; 3) $y = \operatorname{arctg} x$; 4) $y = \frac{1}{x}$.

Відповідь.

1) $f(y)=\dfrac{1}{3\pi\left[1+(1-y)^{\frac{2}{3}}\right](1-y)^{\frac{2}{3}}}, \quad -\infty<y<\infty;$

2) $f(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \dfrac{1}{\pi(1+y\ \ )\sqrt{y}}, & y\ge 0;\end{cases}$

3) $f(y)=\begin{cases}0, & y<-\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & y>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

4) $f(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad -\infty<y<\infty.$

18. Закони розподілу незалежних випадкових величин X і Y задані щільностями ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{1}{8}, & -4<x\le 4;\\ 0, & x>4;\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \dfrac{1}{8}, & -2<y\le 6;\\ 0, & y>6.\end{cases}$$

Знайти $f(z)$, $M(z)$, $D(z)$, якщо $Z=X+Y$.
Відповідь.

$$f(z)=\begin{cases}0, & z\le -6;\\ \dfrac{z+6}{64}, & -6<z\le 2;\\ \dfrac{10-z}{64}, & 2<z\le 10;\\ 0, & z>10;\end{cases}$$

$M(Z)=0$,

$D(Z)=\dfrac{17}{16}.$

19. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти *M* (*Y*), якщо *Y* = min (*X*; 0,5).
Відповідь. *M* (*Y*) = 0.

20. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти *M* (*Y*), якщо *Y* = max (*X*; 0,5),
Відповідь. *M* (*Y*) = 0.

РОЗДІЛ III

ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

ТЕМА 9. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЦІЛОЧИСЛОВИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Серед дискретних випадкових величин особливе місце в теорії ймовірностей посідають такі, що набувають лише цілих невід'ємних значень $X = x_k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ці випадкові величини називають цілочисловими.

1. Імовірнісні твірні функції та їх властивості

Для дослідження законів розподілу цілочислових випадкових величин використовують імовірнісну твірну функцію. Імовірнісною твірною функцією називають збіжний степеневий ряд виду:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \; p_k = p_0 + xp_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x_m p_m + \ldots \; . \qquad (231)$$

Тут $p_k = P(X = k)$, тобто є ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Імовірнісній твірний функції притаманні такі властивості

1. $A(X)$ визначена в кожній точці інтервалу $[-1; 1]$.
2. При $X = 1$ маємо:

$$A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \,,$$

оскільки це є умовою нормування для дискретної випадкової величини.

3. Із (231) дістаємо

$$P_k = \frac{1}{k!} A^{(k)}(0) \,,$$

де A^k (0) — k-та похідна від $A(x)$, при $X = 0$. Отже, знаючи аналітичний вираз для $A(x)$, можемо знайти ймовірність будь-якого можливого значення $X = k$.

4. $A'(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} p_k$.

При $x = 1$ дістанемо

$$A'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = M(X).$$

Звідси

$$M(X) = A'(1). \tag{232}$$

5. $A''(X) = (\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} p_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} p_k$.

При $x = 1$

$$A''(1) = (\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} kp_k.$$

Це можна записати так:

$$A''(1) = M(X^2) - A'(1) \rightarrow M(X^2) = A''(1) + A'(1).$$

Тоді

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2.$$

Отже, формула для обчислення дисперсії буде така:

$$D(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2. \tag{233}$$

2. Біноміальний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, 3, ..., n. \tag{234 a}$$

У табличній формі цей закон набирає такого вигляду:

$X = x_k = k$	0	1	2	3	...	n
$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$		p^n

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають *біноміальним*:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q+p)^n = 1.$$

Побудуємо ймовірнісну твірну функцію для цього закону

$$A(X) = \sum_{k=0}^{n} x^k p_k = \sum_{k=0}^{n} x^k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (px)^k q^{n-k} = (q+px)^n.$$

Отже, імовірнісна твірна функція для біноміального закону

$$A(X) = (q + px)^n . \qquad (234\ b)$$

Знайдемо основні числові характеристики для цього закону:

1. $M(X) = A'(1) = \left[(q + px)^n\right]'_{X=1} = \left[np\,(q + px)^{n-1}\right]'_{X=1} = np\,(q + p) = np;$

$$(p + q = 1),$$

$$M(X) = np . \qquad (235)$$

2. $A''(1) = \left[np\,(q + px)^{n-1}\right]'_{X=1} = \left[n\,(n-1)\,(q + px)^{n-2}\,p^2\right]'_{X=1} =$

$= n\,(n-1)\,(q + p)\,p^2 = n\,(n-1)\,p^2 ;\ A''(1) = n\,(n-1)\,p^2 ;$

$D(X) = A'' + A'(1) - (A'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 +$

$+ np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1 - p) = npq;$

$$D(X) = npq ; \qquad (236)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} . \qquad (237)$$

Приклад 1. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу ймовірностей, яка може набувати значення

$$X = k = 0, 1, 2, ..., 400.$$

Імовірності можливих значень обчислюються за формулою Бернулі: $P_k = P(X = k) = C_{400}^k p^k q^{400-k}$, де p = 0,95 — імовірність появи стандартної деталі, $q = 1 - p$ =1 – 0,95 = 0,05 — імовірність появи нестандартної деталі.

Згідно з (235), (236), (237), маємо:

$$M(X) = np = 400 \cdot 0{,}95 = 380;$$

$$D(X) = npq = 400 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 19;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4{,}36.$$

Приклад 2. У кожному із 100 контейнерів міститься по 8 виробів першого сорту, а решта 2 — браковані. Із кожного контейнера навмання беруть по одному виробу. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X — поява числа виробів першого сорту серед 100 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу. Із умови задачі маємо:

$$n = 100,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 100.$$

За формулами (235), (236), (237) дістаємо:

$$M(X) = np = 100 \cdot 0{,}8 = 80;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{16} \approx 4.$$

3. Пуассонівський закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$$P_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n, \tag{238}$$

тобто обчислюється за формулою Пуассона, де $a = np$. У табличній формі цей закон розподілу буде такий:

$X = k$	0	1	2	3	…	n
$P = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{1}{2!} a^2 e^{-a}$	$\frac{1}{3!} a^3 e^{-a}$		$\frac{1}{n!} a^n e^{-a}$

$$\sum P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^{a} = e^0 = 1.$$

Умова нормування виконується.

Побудуємо ймовірну твірну функцію для цього закону:

$$A(X) = \sum_{k=0}^{n} x^k p_k = \sum_{k=0}^{n} x^k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k} = e^{-a} e^{ax} = e^{a(x-1)}.$$

Отже,

$$A(X) = e^{a(x-1)}. \tag{239}$$

Скориставшись (232), (233), дістанемо вирази для $M(X)$, $D(X)$:

1. $M(X) = A'(1) = (e^{a(x-1)})'_{X=1} = (ae^{a(x-1)})_{X=1} = a$;

$$M(X) = a = np. \tag{240}$$

2. $A''(1) = (ae^{a(x-1)})'_{X=1} = (a^2 e^{a(x-1)})_{X=1} = a^2$;

$D(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2 = a^2 + a - a^2 = a$;

$$P(X) = a; \tag{241}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{a}. \tag{242}$$

Отже, для Пуассонівського закону розподілу ймовірностей $M(X) = D(X) = a$.

Приклад 3. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X — числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, що має пуассонівський закон розподілу — імовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона, котра є асимптотичною щодо формули Бернуллі для великих значень n і малих значень p, так званих малоймовірних випадкових подій.

За умовою задачі маємо:

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4;$$

$$D(X) = M(X) = np = 4;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{4} = 2.$$

Приклад 4. У деякому населеному пункті маємо 0,1% дальтоніків. Навмання вибирають 5000 мешканців цього населеного пункту. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X — числа дальтоніків, яких буде виявлено серед 5000 навмання вибраних мешканців.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу. Із умови задачі: $n = 5000$, $p = 0{,}0001$. Згідно з (240), (241), (242), дістаємо:

$$M(X) = np = 5000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}5;$$

$$D(X) = M(X) = np = 0{,}5;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71.$$

4. Геометричний закон розподілу ймовірностей

Інколи спроби здійснюють до першої появи випадкової події. Число проведених спроб буде цілочисловою випадковою величиною. Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{243}$$

Тут p — імовірність появи випадкової події в кожній спробі — є величиною сталою, $q = 1 - p$.

У табличній формі геометричний закон розподілу такий:

$X = X_k = k$	1	2	3	4	...
$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$	p	pq	pq^2	pq^3	...

При перевірці умови нормування використовується формула суми нескінченної геометричної прогресії, тому й закон розподілу називають геометричним:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = p + pq + pq^2 + pq^3 + ... = p(1 + q + q^2 + q^3 + ...) = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1.$$

Побудуємо ймовірнісну твірну функцію

$$A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^k .$$

Ураховуючи, що $|X| \le 1$, дістаємо

$$A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^k .$$

Оскільки $|X| \le 1$, то

$$A(X) = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^k = \frac{p}{q}(qx + (qx)^2 + (qx)^3 + ...) = \frac{p}{q}\,\frac{qx}{1-qx} ;$$

$$A(X) = \frac{px}{1-qx} . \qquad (244)$$

Числові характеристики для цього закону:

1. $$M(X) = A'(1) = \left[\frac{px}{1-qx}\right]'_{X=1} = \left[\frac{p(1-qx) + pqx}{(1-qx)^2}\right]_{X=1} =$$

$$= \left[\frac{p}{(1-qx)^2}\right]_{X=1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} ;$$

$$M(X) = \frac{1}{p} . \qquad (245)$$

2. $$A''(1) = \left[\frac{p}{(1-qx)^2}\right]'_{X=1} = \left[\frac{2pq(1-qx)}{(1-qx)^4}\right]_{X=1} =$$

$$= \left[\frac{2pq}{(1-qx)^3}\right]_{X=1} = \frac{2pq}{(1-qx)^3} = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2} ;$$

$$D(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2} .$$

$$D(X)=\frac{q}{p^2};\qquad (246)$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}.\qquad (247)$$

Серед дискретних випадкових величин лише геометричному закону притаманна властивість відсутності післядії. Це означає, що ймовірність появи випадкової події в k-му експерименті не залежить від того, скільки їх з'явилося до k-го, і завжди дорівнює p.

Приклад 5. Гральний кубик підкидається до першої появи цифри 6. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для випадкової величини X числа здійснюваних підкидань.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, що має геометричний закон розподілу ймовірностей. За умовою задачі: $p=\frac{1}{6}$; $q=\frac{5}{6}$.

Скориставшись (245), (246), (247), дістанемо:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6;\ D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}}=30;\ \sigma(X)=\sqrt{30}\approx 5{,}48.$$

Приклад 6. Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Імовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X — числа витрачених спортсменом набоїв.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, з геометричним законом розподілу ймовірностей. За умовою задачі: $p=0{,}8$; $q=0{,}2$.

Згідно з (245), (246) і (247) маємо:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}8}=\frac{5}{4};\ D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}2}{0{,}64}=\frac{5}{16};\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

5. Рівномірний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_k=P(X=k)=\frac{1}{n}.\qquad (248)$$

У табличній формі запису рівномірний закон розподілу має вигляд:

$X = x_k = k$	1	2	3	...	n
$P_k = P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$

Умова нормування $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ виконується.

Імовірнісна твірна функція для цього закону

$$A(X) = \sum_{k=1}^{n} x^k p_k = \sum_{k=1}^{n} x^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1}{n}\,\frac{1-x^n}{1-x};$$

$$A(X) = \frac{1}{n}\,\frac{1-x^n}{1-x}, \tag{249}$$

або

$$A(X) = \frac{x - x^{n+1}}{n(1-x)}.$$

Числові характеристики рівномірного закону:

1. $M(X) = A'(1) = \frac{1}{n}\left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)'_{X=1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\left(1-(n+1)x^n\right) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}\right)_{X=1} =$

$= \Big|$ При $x = 1$ дістаємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, яку розкриваємо

за правилом Лопіталя $\Big| = \frac{1}{n}\left(\lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(1-(n+1)x^n\right)(1-x) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}\right) =$

$$= \frac{1}{n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{(1-(n+1)x^n)(1-x) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-(n+1)\,x^4 - x + (n+1)\,x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{-(n+1)x^n + (n+1)\,x^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{-(n+1)\,nx^{n-1} + (n+1)^2 x^n - (n+1)\,x^n}{-2\,(1-x)}\right) =$$

$= \frac{n+1}{2n}\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{-nx^{n-1} + (n+1)\,x^n - x^n}{-2(1-x)}\right) = \Big|$ При $x = 1$ знову дістаємо

невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, яку розкриваємо за правилом Лопіталя $\Big| =$

$$= \frac{n+1}{2n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{-n(n-1)x^{n-2} + n(n+1)x^{n-1} - nx^{n-1}}{1}\right) = \frac{n+1}{2n}\left(-n(n-1) + n(n+1) - n\right) =$$

$$= \frac{n+1}{2n}(-n^2 + n + n^2 + n - n) = \frac{n+1}{2};$$

$$M(X) = \frac{n+1}{2}. \tag{250}$$

2. Виконуючи аналогічні, але більш громіздкі перетворення, дістаємо:

$$D(X) = \frac{n^2 - 1}{12}; \tag{251}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2\sqrt{3}}. \tag{252}$$

Приклад 7. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу і можливі значення її такі:

$$X_k = k = 1, 2, 3, \ ..., 100 .$$

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $n = 100$, $P_k = 1/100$. Згідно з (250), (251), (252) дістаємо:

$$M(X) = \frac{n = 1}{2} = \frac{100 + 1}{2} = 50{,}5 .$$

$$D(X) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{1000 - 1}{2} = \frac{9999}{12} = 832{,}25 .$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2} - 1}{2\sqrt{3}} = \sqrt{832{,}25} \approx 28{,}87 .$$

6. Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m} . \tag{253}$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай задано деяку множину однотипних елементів, число яких дорівнює n; з них n_1 елементів мають, наприклад, ознаку A (колір, стандартність), а решта $n - n_1$ елементів — ознаку B; коли із цієї множини навмання беруть m елементів, число елементів k з ознакою A (або B), що трапляється серед m навмання взятих елементів, буде цілочисловою випадковою величиною з гіпергеометричним законом розподілу.

У табличній формі запису цей закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	...	m
$P_k = P(X = k) = \dfrac{C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}$	$\dfrac{C_{n-n_1}^{m}}{C_n^m}$	$\dfrac{C_{n_1}^{1} C_{n-n_1}^{m-1}}{C_n^m}$	$\dfrac{C_{n_2}^{2} C_{n-n_2}^{m-2}}{C_n^m}$		$\dfrac{C_{n-n_1}^{m}}{C_n^m}$

При цьому $m \le n$.

Умова нормування $\sum\limits_{k=0}^{m} P_k = \dfrac{1}{C_n^m} \sum\limits_{k=0}^{m} C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k} = 1$.

Залежно від умови задачі найменше значення може становити $m = 0, 1, 2, 3, ..., m - 1$.

Числові характеристики цього закону обчислюються за наведеними далі формулами:

$$1.\ M(X) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} k C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k}. \tag{254}$$

$$2.\ D(X) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} k^2 C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X). \tag{255}$$

$$3.\ \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} k^2 C_{n_1}^{m} C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)}. \tag{256}$$

Приклад 8. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть m деталей. Побудувати закони розподілу цілочислової випадкової величини X — появу числа стандартних деталей серед m навмання взятих і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо: 1) $m = 3$; 2) $m = 4$; 3) $m = 5$; 4) $m = 7$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (253) побудуємо гіпергеометричні закони розподілу:

1. $m = 3$; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; $k = 0, 1, 2, 3$.

У табличній формі гіпергеометричний закон подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	3
$P_k = P(X = k) = \dfrac{C_7^k C_3^{3-k}}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3}$

або

k	0	1	2	3
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^k}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{35}{120}$

$$\sum P_k = \frac{1+21+63+35}{120} = \frac{120}{120} = 1\ .$$

1) $M(X) = \sum kp_k = 0\frac{1}{120} + 1\frac{21}{120} + 2\frac{63}{120} + 3\frac{35}{120} = \frac{21+126+105}{120} = \frac{252}{120} = 2{,}1;$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 0\frac{1}{120} + 1\frac{21}{120} + 4\frac{63}{120} + 9\frac{35}{120} = \frac{21+252+315}{120} =$

$= \frac{588}{120} = 4{,}9;\ D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 4{,}9 - (2{,}1)^2 = 4{,}9 - 4{,}41 = 0{,}49\ ;$

3) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7\ .$

2. $m = 4;\ n_1 = 7;\ n - n_1 = 3;\ k = 1, 2, 3, 4.$

У табличній формі закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	1	2	3	4
$P_k = P(X = k) = \frac{C_7^k c_3^{4-k}}{c_{10}^4}$	$\frac{C_7^1 C_3^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^2 C_3^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^3 C_3^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^4 C_3^{10}}{C_{10}^4}$

або

k	1	2	3	4
$P_k = \frac{C_7^k C_3^{4-k}}{210}$	$\frac{7}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{35}{210}$

$$\sum P_k = \frac{7+63+105+35}{210} = \frac{210}{210} = 1\ .$$

1) $M(X) = \sum kp_k = 1\frac{7}{210} + 2\frac{63}{210} + 3\frac{105}{210} + 4\frac{35}{210} =$

$$= \frac{7+126+315+140}{210} = \frac{588}{210} = 2{,}8\ ;$$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 1\frac{7}{210} + 4\frac{63}{210} + 9\frac{105}{210} + 16\frac{35}{210} =$

$$= \frac{7+252+945+560}{210} = \frac{1764}{210} = 8{,}4\ ;$$

3) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75\ .$

3. $m = 5;\ n_I = 7;\ n = 3;\ k = 2, 3, 4, 5.$

У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	2	3	4	5
$P_k = P(X=k) = \dfrac{C_7^k C_3^{5-k}}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^2 C_3^3}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^3 C_3^2}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^4 C_3^1}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^5 C_3^0}{C_{10}^5}$

або

k	2	3	4	5
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^{5-k}}{252}$	$\dfrac{21}{252}$	$\dfrac{105}{252}$	$\dfrac{105}{252}$	$\dfrac{21}{252}$

1) $M(X) = \sum k p_k = 2\dfrac{21}{252} + 3\dfrac{105}{252} + 4\dfrac{105}{252} + 5\dfrac{21}{252} =$

$$= \frac{42 + 315 + 420 + 105}{252} = \frac{882}{252} = 3{,}5\,;$$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 4\dfrac{21}{252} + 9\dfrac{105}{252} + 16\dfrac{105}{252} + 25\dfrac{21}{252} =$

$$= \frac{84 + 945 + 1680 + 525}{252} = \frac{3234}{2252} = 12{,}83\,;$$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 12{,}83 - (3{,}5)^2 = 12{,}83 - 12{,}25 = 0{,}58$.

3) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}58} \approx 0{,}76$.

4. $m = 7$; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; $k = 4, 5, 6, 7$.

У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	4	5	6	7
$P_k = P(X=k) = \dfrac{C_7^k C_3^{7-k}}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^4 C_3^3}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^5 C_3^2}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^6 C_3^1}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^7 C_3^0}{C_{10}^7}$

або

k	4	5	6	7
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^{7-k}}{C_{10}^7}$	$\dfrac{35}{120}$	$\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{1}{120}$

$$\sum P_k = \frac{21 + 105 + 105 + 21}{252} = \frac{252}{252} = 1\,.$$

$$1)\ M(X)=\sum kp_k=4\frac{35}{120}+5\frac{63}{120}+6\frac{21}{120}+7\frac{1}{120}=$$
$$=\frac{140+315+126+7}{120}=\frac{588}{120}=4{,}5;$$

$$2)\ M(X^2)=\sum k^2 p_k=16\frac{35}{12}+25\frac{63}{120}+36\frac{21}{120}+49\frac{1}{120}=\frac{2942}{120}\approx 24{,}52;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=24{,}52-(4{,}5)^2=24{,}52-20{,}25=4{,}27;$$

$$3)\ \sigma(X)=\sqrt{4{,}27}\approx 2{,}1.$$

Теоретичні запитання до теми ?

1. Дати означення цілочислової випадкової величини.
2. Що називають імовірною твірною функцією?
3. Властивості ймовірнісної твірної функції.
4. Чому дорівнює A (1)?
5. Використання ймовірнісної твірної функції для визначення M (X).
6. Використання ймовірнісної твірної функції для визначення D (X).
7. Що називають біноміальним законом розподілу ймовірностей?
8. Вивести аналітичний вираз ймовірнісної твірної функції для біноміального закону розподілу.
9. Числові характеристики для біноміального закону розподілу (M (X), D (X), σ (X)).
10. Що називають пуассонівським законом розподілу ймовірностей?
11. Вивести аналітичний вираз ймовірної твірної функції для пуассонівського закону розподілу.
12. Числові характеристики пуассонівського закону розподілу (M (X), D (X), σ (X)).
13. Що називають геометричним законом розподілу ймовірностей?
14. Вивести аналітичний вираз ймовірнісної твірної функції для геометричного закону розподілу.
15. Числові характеристики геометричного закону розподілу (M (X), D (X), σ (X)).
16. Що називають рівномірним законом розподілу ймовірностей?
17. Вивести аналітичний вираз ймовірнісної твірної функції для рівномірного закону розподілу.

18. Числові характеристики для рівномірного закону розподілу ($M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$).
19. Дати означення гіпергеометричного закону розподілу.
20. Числові характеристики для гіпергеометричного закону розподілу ($M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$).

Приклади до теми

1. Серед дев'яти однотипних виробів п'ять відповідають вимогам стандарту, а решта — ні. Навмання береться шість виробів. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X — появу числа виробів, що відповідають стандарту і обчислити для цієї величини $M(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь.

k	2	3	4	5
P_k	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$M(X) = 3{,}33$, $\sigma(X) \approx 0{,}76$.

2. Під час штампування валиків імовірність відхилення кожного валика від стандартного розміру дорівнює 0,15. За робочу зміну робітником було проштамповано 800 валиків. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа валиків, що не відповідають стандартному розміру.

Відповідь. $M(X) = 120$, $D(X) = 102$, $\sigma(X) \approx 10{,}1$.

3. У лабораторних умовах було висіяно 10000 насінин нового сорту ячменю. Імовірність того, що насінина ячменю не проросте в середньому становить 0,2. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X — числа зернин ячменю, що проростуть, і обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X) = 8000$, $\sigma(X) = 40$.

4. Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Унаслідок атмосферних завад імовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2000 цифр. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа спотворених цифр в отриманому тексті.

Відповідь. $M(X) = 2$, $D(X) = 2$, $\sigma(X) \approx 1{,}41$.

5. В урні міститься 100 кульок, із них 80 білі, а решта чорні. Кульки із урни виймають навздогад по одній із поверненням. Визначити закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа про-

веденних експериментів, якщо вони здійснюються до першої появи чорної кульки. Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$?

Відповідь. $M(X) = 5$, $D(X) = 20$, $\sigma(X) \approx 4{,}47$.

6. В електромережу містечка увімкнуто для освітлення вулиць у вечірню пору 20000 електролампочок. Імовірність того, що лампочка не перегорить протягом вечірнього часу дорівнює в середньому 0,95. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа електролампочок, що не перегорять протягом вечірнього часу.

Відповідь. $M(X) = 19000$, $\sigma(X) \approx 30{,}8$.

7. Для космічного корабля ймовірність зіткнення його з метеоритом малої маси дорівнює 0,001 протягом одного оберту навкіл землі. Космічний корабель здійснив 900 обертів. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X — числа зіткнень космічного корабля із метеоритами малої маси.

Відповідь. $M(X) = 0{,}9$, $\sigma(X) \approx 0{,}95$.

8. Монета підкидається доти, доки вона випаде гербом. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа здійснених підкидань.

Відповідь. $M(X) = 2$, $\sigma(X) \approx 1{,}41$.

9. Робітник за зміну обслуговує 14 однотипних верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника становить 1/7. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

Відповідь. $M(X) = 2$, $\sigma(X) = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$.

10. За одну робочу зміну верстат-автомат виготовляє 400 однотипних деталей. Імовірність, що виготовлена верстатом деталь стандартна дорівнює 0,8. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа стандартних деталей, виготовлених верстатом-автоматом за робочу зміну.

Відповідь. $M(X) = 320$, $\sigma(X) = 8$.

11. Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта — ні. Навмання вибирають 10 телевізорів. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед 10 навмання вибраних.

Відповідь. $M(X) \approx 6{,}67$, $\sigma(X) \approx 0{,}601$.

12. Десять студентів складають залік з курсу «Вища математика». Імовірність того, що студент складе залік, у середньому стано-

вить 0,91. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа студентів, що складуть залік.

Відповідь. $M(X) = 9{,}1$, $D(X) = 0{,}819$, $\sigma(X) = 0{,}905$.

12. Визначити $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X рівномірним законом розподілу, можливі значення якої $X = x_k = k = \overline{1, 99}$.

Відповідь. $M(X) = 50$, $\sigma(X) = 28{,}3$.

ТЕМА 10. ОСНОВНІ ЗАКОНИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Нормальний закон розподілу

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{257}$$

де $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Отже, нормальний закон визначається звідси параметрами a і σ і називається загальним.

Тоді

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{258}$$

Якщо $a = 0$ і $\sigma = 1$, то нормальний закон називають *нормованим*.

У цьому разі

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{259}$$

тобто $f(x) = \varphi(x)$ є функцією Гаусса,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{260}$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ для загального нормального закону залежно від параметрів a і σ зображені на рис. 91 і 92.

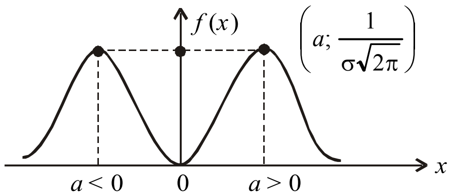

Рис. 91

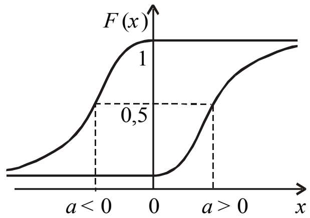

Рис. 92

Із рис. 91 бачимо, що графік $f(x)$ розміщений симетрично відносно умовно проведеного перпендикуляра в точку $X = a$. Зі зміною значень параметра a крива $f(x)$ зміщується праворуч, якщо $a > 0$ або ліворуч, якщо $a < 0$, не змінюючи при цьому своєї форми; $f(a) = \max$, отже, $\text{Mo} = a$.

Із рис. 92 бачимо, що графік $F(x)$ є неспадною функцією, оскільки $f(x) = F'(x) > 0$ і, як буде доведено далі, $F(a) = 0{,}5$.

Отже, $\text{Me} = a$.

Зі зміною значень параметра a крива $F(x)$ зміщується праворуч для $a > 0$ або ліворуч при $a < 0$, не змінюючи при цьому форми кривої.

Отже, для нормального закону $\text{Mo} = \text{Me} = a$.

Зі зміною значень σ при $a = \text{const}$ змінюється крутизна кривих у околі значень $X = a$, що унаочнюють рис. 93 і 94.

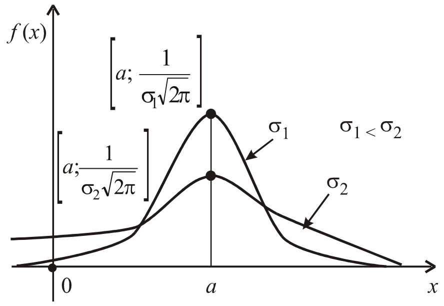

Рис. 93

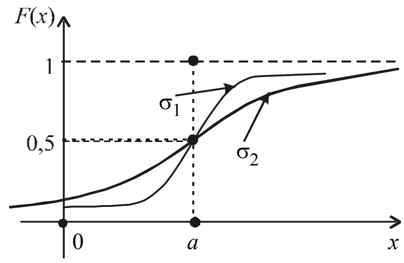

Рис. 94

Для нормованого нормального закону графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображено на рис. 95 і 96.

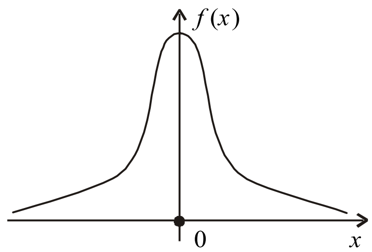

Рис. 95

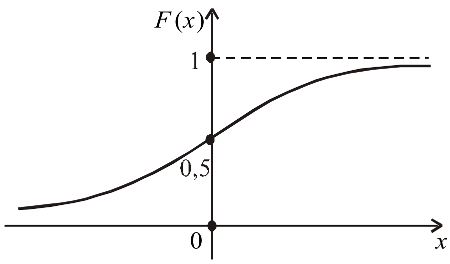

Рис. 96

Загальний нормальний закон позначають: $N(a;\ \sigma)$. Так, наприклад, $N(-2;\ 4)$ — загальний нормальний закон із значенням параметрів $a = -2$, $\sigma = 4$.

Нормований нормальний закон позначають $N(0;\ 1)$.

1.1. Визначення Me, As, Es

По визначенню медіани маємо $F(\text{Me}) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{Me} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 0{,}5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{x-a}{\sigma} = z \to -\infty < x < \text{Me},\ -\infty < z < \frac{\text{Me}-a}{\sigma} \to dx = \sigma dz\right| \Rightarrow F(\text{Me}) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\text{Me}-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz = 0{,}5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\text{Me}-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz = 0{,}5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \int\limits_{0}^{\frac{\text{Me}-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$$= 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\text{Me}-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0{,}5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\text{Me}-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\text{Me}-a}{\sigma}\right) =$$

$$= 0 \Rightarrow \frac{\text{Me}-a}{\sigma} = 0 \Rightarrow \text{Me} = a.$$

Для визначення As необхідно знайти μ_3.

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M(x))^3 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^3 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix}\dfrac{x-a}{\sigma} = z,\ dx = dz \\ x - a = \sigma z\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^3 z^3 e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz = \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0\ ,$$

оскільки підінтегральна функція є непарною, а межі інтегрування є симетричними відносно нуля. Таким чином, $\mu_3 = 0$, а отже, і $As = 0$.

Для визначення Es необхідно знайти μ_4.

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M(x))^4 f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^4 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix}\dfrac{x-a}{\sigma} = z,\ dx = \sigma dz \\ x - a = \sigma z\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^4 z^4 e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} z^4 e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$$= \left|\begin{matrix}u = z^3;\ du = 3z^2dz \\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = dv \to v = -e^{-\frac{z^2}{2}}\end{matrix}\right| = \frac{2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^3 e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty} + 3\int\limits_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right] =$$

$$= \frac{6\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \left|\begin{matrix}u = z;\ du = dz \\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = dv \to v = -e^{-\frac{z^2}{2}}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{6\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \left[-ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \frac{6\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{6\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 3\sigma^4.$$

Отже, $\mu_4 = 3\,\sigma^4$.

Тоді $Es = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$

Отже, доведено, що для нормального закону $As = Es = 0$ при будь-яких обмежених значеннях параметрів a і σ.

1.2. Формули для обчислення ймовірностей подій: $\alpha < x < \beta$; $|x - a| < \delta$.

1) $P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = z \to x = \sigma z + a, \ dx = \sigma\,dz \\ \alpha < x < \beta \to \dfrac{\alpha - a}{\sigma} < z < \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Отже,

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (261)$$

2) $P(|x - a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta) = |\alpha = a - \delta, \ \beta = a + \delta| =$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Отже,

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (262)$$

Для $N(0, 1)$ формули (261), (262) наберуть такого вигляду:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha);$$

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi(\delta).$$

1.3. Правило трьох сигм для нормального закону

Коли $\delta = 3\sigma$, то згідно з (262) маємо:

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973 .$$

Практично ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Звідси:

$$P(|x-a| > 3\sigma) = 1 - P(|x-a| < 3\sigma) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027.$$

Тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина X, яка має закон розподілу $N(a; \sigma)$, не потрапить у проміжок $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$, дорівнює 0,0027. Це становить 0,27%, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок проведення одного експерименту не здійсниться.

1.4. Лінійне перетворення для нормального закону

Нехай випадкова величина X має закон розподілу $N(a; \sigma)$. Необхідно знайти $f(y)$, якщо $y = kx + b$.

Оскільки $M(Y) = M(kx + b) = kM(x) + b = ka + b$.

$D(Y) = D(kx + b) = k^2 D(x) = k^2\sigma^2$, $\sigma(y) = |k|\sigma$, то щільність імовірностей випадкової величини Y буде мати вигляд:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma|k|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(ka+b))^2}{2k^2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < \infty . \qquad (263)$$

Отже, при лінійному перетворенні випадкова величина Y також матиме нормальний закон зі значеннями параметрів

$$M(Y) = ka + b,\ \sigma(y) = |k|\sigma .$$

Приклад 1. Відомо, що випадкова величина X має закон розподілу $N(-4; 2)$.
Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і накреслити їх графіки. Обчислити $P(-6 < x < 3)$, $P(|x+4| < 4)$. Чому дорівнюють Mo, Me, As, Es?

Розв'язання.

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+4)^2}{3}},\quad -\infty<x<\infty;$$

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x+4)^2}{3}}dx.$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ наведені на рис. 97 і 98.

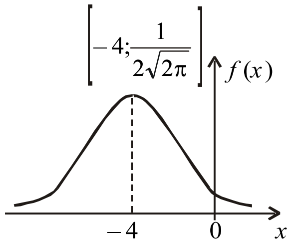

Рис. 97

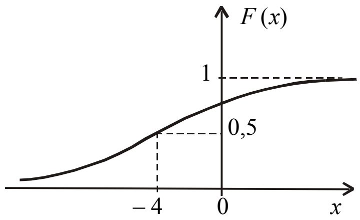

Рис. 98

Використовуючи формули (261), (262), обчислюємо ймовірності:

1) $P(-6<x<3)=\Phi\left(\frac{3-(-4)}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-6-(-4)}{2}\right)=\Phi\left(\frac{3+4}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-6+4}{2}\right)=$

$=\Phi(3{,}5)-\Phi(-1)=\Phi(3{,}5)+\Phi(1)=0{,}49966+0{,}3413=0{,}84096;$

$P(-6<x<3)=0{,}84096.$

2) $P\left(|x+4|<4\right)=2\Phi\left(\frac{4}{2}\right)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$

$P\left(|x+4|<4\right)=0{,}9544.$

$\text{Mo}=\text{Me}=a=-4;\ As=Es=0.$

Приклад 2. Випадкова величина X має закон розподілу $N(2;\,5)$. Знайти $f(y)$, якщо $y=-2x+1$. Обчислити $P(-2<y<5)$.

Розв'язання. Оскільки $M(Y)=M(kx+b)=kM(x)+b=-2\cdot 2+1=$ $=-3$, $D(Y)=D(kx+b)=k^2D(x)=4\cdot 25=100$, $\sigma(y)=10$, то щільність імовірностей випадкової величини Y

$$f(y)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+3)^2}{200}},\quad -\infty<y<\infty.$$

Імовірність події $-2<y<5$ така:

$$P(-2<y<5)=\Phi\left(\frac{5-(-3)}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2-(-3)}{2}\right)=\Phi(4)-\Phi(0{,}5)=0{,}5-0{,}1915=0{,}3085.$$

Приклад 3. Задано $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1^2)}{2}}$, $-\infty<x<\infty$. Знайти $M(y)$, k_{xy}, якщо $y = 2x^2 - 3x + 5$.

Розв'язання. Оскільки $M(Y) = M(2x^2 - 3x + 5) = 2M(x^2) - 3M(x) + 5$; $M(XY) = M(x\,(2x^2 - 3x + 5)) = M(2x^3 - 3x^2 + 5x) = 2M(x^3) - 3M(x^2) + 5M(x)$ і при цьому $M(x) = -1$, $M(x^2) = D(x) + M^2(x) = 1 + (-1)^2 = 2$, то нам необхідно лише знайти $M(x^3)$.

$$M(x^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^3e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}dx=\begin{vmatrix}x+1=z\to dx=dz\\ x=z-1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(z-1)^3e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(z^3-3z^2+3z-1)\,e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}z^3e^{-\frac{z^2}{2}}-3\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz+3\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-6\int_{0}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\sqrt{2\pi}\right]=\begin{vmatrix}u=z,\ du=dz\\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=dv\to v=-e^{-\frac{z^2}{2}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-6\left(-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)-\sqrt{2\pi}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-6\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\sqrt{2\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-6\frac{\sqrt{2\pi}}{2}-\sqrt{2\pi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-4\sqrt{2\pi})=-4.$$

Отже, $M(x^3) = -4$.
$M(Y) = 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) + 5 = 12$;
$M(XY) = 2\cdot(-4) - 3\cdot 2 + 5\cdot(-1) = -19$;
$K_{xy} = M(XY) - M(X)\ \ M(Y) = -19 - (-1)\cdot 12 = 7.$
Отже, одержали: $M(Y) = 12$, $k_{xy} = 7$.

Приклад 4. Відомо, що діаметр кульки підшипника D є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу. Бракування кульок здійснюється за таким алгоритмом: якщо кулька не проходить через отвір із діаметром 5,5 мм, але проходить через отвір із діаметром 5,58 мм, то її розмір відповідає стандарту. Якщо будь-яка із наведених умов не виконується, то кулька бракується. Визначити σ_d, якщо брак становить 10%.

Розв'язання. Середній діаметр кульки

$$m_d=\frac{5{,}5+5{,}58}{2}=\frac{11{,}08}{2}=5{,}54\text{ мм.}$$

Якщо позначимо d_1 = 5,5мм, d_2 = 5,58 мм, то ймовірність того, що кулька буде забракована, визначається як:

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - m_d}{\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m_d}{\sigma_d} \right) \right].$$

Оскільки $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$ — математичне сподівання, то виконуються рівності:

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma_d} \right) \right] = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) + \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right).$$

Далі маємо:

$$2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) = 0{,}9 \to \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) = 0{,}45 \to \frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} =$$

$$= 1{,}65 \to \sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{3{,}3} = \frac{5{,}58 - 5{,}5}{3{,}3} = 0{,}024 \text{ мм}; \ \ \sigma_d = 0{,}024 \text{ мм}.$$

2. Двовимірний нормальний закон (нормальний закон на площині)

Щільність імовірностей для нормального закону на площині має вигляд

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)} \left(\frac{(x - a_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r_{xy} \frac{(x - a_x)(y - a_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y - a_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right),$$

$$-\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty . \tag{264}$$

Тут exp (z) = e^{-z}, де

$$z = -\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)} \left(\frac{(x - a_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r_{xy} \frac{(x - a_x)(y - a_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y - a_y)^2}{\sigma_y^2} \right);$$

$$a_x = M(X), \ x_x = \sigma(X), \ a_y = M(Y), \ \sigma_y = \sigma(Y), \ \ r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Якщо $r_{xy} = 0$, то щільність імовірностей набере такого вигляду:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma^2{}_y}\right)\right), \qquad (265)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

У цьому випадку

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Якщо $a_x = a_y = 0$, то

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}, \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty. \qquad (266)$$

У результаті перетину поверхні (264) площинами, паралельними координатній площині xOy, і проектування перерізів на цю площину утворюється множина подібних і однаково розташованих еліпсів зі спільним центром на початку координат. Кожний такий еліпс — геометричне місце точок, де $f(x, y)$ є величиною сталою. Тому еліпси називають еліпсами рівних щільностей. Перетинаючи поверхні (265), (266) такими площинами і проектуючи ці перерізи на координатну площину xOy, дістаємо множину кіл.

Імовірність потрапляння (X, Y) у прямокутну область $a < x < b$, $c < y < d$, коли $K_{xy} = 0$, буде така:

$$P(a<x<b, c<y<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi}\int_a^b\int_c^d e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-ax)^2}{\sigma x^2}+\frac{(y-ay)^2}{\sigma y^2}\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{(x-ax)^2}{2\sigma x^2}}dx\int_c^d e^{-\frac{(y-ay)^2}{2\sigma y^2}}dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x-a_x}{\sigma_x}=z,\ dx=\sigma_x dz,\ \frac{y-a_y}{\sigma_y}=t,\ dy=\sigma_y dt\\ a<x<b\ \to\ \frac{a-a_x}{\sigma_x}<z<\frac{b-a_x}{\sigma_x},\ c<y<d\ \to\ \frac{c-a_y}{\sigma_y}<t<\frac{d-a_y}{\sigma_y}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-ax}{\sigma x}}^{\frac{b-ax}{\sigma x}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma_x dz\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c-ay}{\sigma y}}^{\frac{d-ay}{\sigma y}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma_y dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-ax}{\sigma x}}^{\frac{b-ay}{\sigma y}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c-ay}{\sigma y}}^{\frac{d-ay}{\sigma y}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{a-a_x}{\sigma_x}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{b-a_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dz\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{c-a_y}{\sigma_y}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{d-a_y}{\sigma_y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{b-a_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{a-a_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{d-a_y}{\sigma_y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{c-a_y}{\sigma_y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=$$

$$=\left[\Phi\left(\frac{b-a_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-a_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{d-a_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-a_y}{\sigma_y}\right)\right].$$

Отже,

$$P(a<x<b, c<y<d)=\left[\Phi\left(\frac{b-a_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-a_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{d-a_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-a_y}{\sigma_y}\right)\right]. \quad (267)$$

Приклад 5. Робітник на верстаті виготовляє валики. Довжина Y і діаметр X валика є незалежними випадковими величинами, що мають нормальний закон розподілу з числовими характеристиками: $M(X) = 50$ мм, $\sigma(X) = 0,1$ мм, $M(Y) = 20$ мм, $\sigma(Y) = 0,0005$ мм. Визначити відсоток бракованих валиків, якщо валик рахується стандартним, коли його розміри задовольняють умови:

$(50 – 0,1)$ мм $< x < (50 + 0,1)$ мм,
$(20 – 0,05)$ мм $< y < (20 + 0,05)$ мм.

Розв'язання. Імовірність того, що валик не буде забракованим, визначається імовірністю влучення розмірів (x, y) у прямокутну область, зображену на рис. 100.

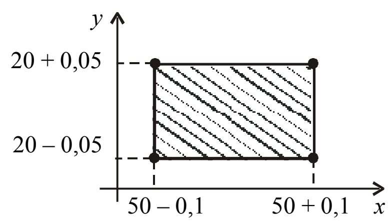

Рис. 100

$$P\big((|x-50|<0,1)\cap(|y-20|<0,05)\big)=4\Phi\left(\frac{0,1}{0,1}\right)\ \Phi\left(\frac{0,05}{0,005}\right)=$$

$$=4\Phi(1)\ \Phi(10)=4\cdot 0,3413\cdot 0,5=0,6826.$$

Імовірність браку така:

$$1-P\left(\left(\left|x-50\right|<0{,}1\right)\cap\left(\left|y-20<0{,}5\right|\right)\right)=1-0{,}6826=0{,}3174,$$

що становить 31,74%.

3. Логарифмічний нормальний закон розподілу

Нехай Y має закон розподілу $f(y)=\dfrac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^{\,2}}}, \quad -\infty<y<\infty.$

Необхідно знайти $f(x)$, якщо $X=e^y$.

Таким чином, Y є функцією випадкового аргументу X. Тоді

$$f(x)=f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|.$$

Оскільки $X=e^y\to Y=\ln x, \quad \psi'(x)=\dfrac{1}{x}.$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-a_y)^2}{2\sigma_y^{\,2}}}, & x>0.\end{cases} \qquad (268)$$

Закон розподілу випадкової величини X із щільністю (268) називають логарифмічним нормальним законом.

3.1. Числові характеристики

1) $M(X)=\int\limits_0^\infty xf(x)\,dx=\dfrac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty x\dfrac{1}{x}e^{-\frac{\ln x-a_y}{2\sigma_y^2}}dx=\dfrac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{\ln x-a_y}{\sigma_y}=z\to\ln x=\sigma_y z+a_y\to x=e^{\sigma_y z+a_y}\to\\ \to dx=\sigma_y e^{\sigma_y z+a_y}dz, \qquad 0<x<\infty\to-\infty<z<\infty\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma_y e^{\sigma_y z+a_y}dz=\frac{e^{a_y}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}+\sigma_y z}dz=$$

$$=\left|-\frac{z^2}{2}+\sigma_y z=\frac{\sigma_y^{\,2}}{2}-\frac{(z-\sigma_y)^2}{2}\right|=$$

$$=\frac{e^{a_y}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_y^2}{2}-\frac{(z-\sigma_y)^2}{2}}dz=\frac{e^{a_y+\frac{\sigma_y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\sigma_y)^2}{2}}dz=$$

$$=\begin{vmatrix} z-\sigma_y=t \\ dz=dt \end{vmatrix}=\frac{e^{a_y+\frac{\sigma_y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{e^{a_y+\frac{\sigma_y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=e^{a_y+\frac{\sigma_y^2}{2}}.$$

$$M(X)=e^{a_y+\frac{\sigma_y^2}{2}}. \qquad (269)$$

2. $M(X^2)=\int_0^{\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^2\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln x-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}dx=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-\frac{(\ln x-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}dx.$

Виконуючи таку саму заміну, як і для знаходження $M(X)$, дістаємо:

$$\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_y z+a_y}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma_y e^{\sigma_y z+a_y}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma_y z+2a_y-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{e^{2a_y}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma_y z-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{e^{2a_y}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma_y^2-\frac{(z-2\sigma_y)^2}{2}}dz=\frac{e^{2a_y+2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-2\sigma_y)^2}{2}}dz=\frac{e^{2a_y+2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=e^{2a_y+2\sigma_y^2};$$

$M(X^2)=e^{2a_y+2\sigma_y^2}.$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=e^{2a_y+2\sigma_y^2}-\left(e^{a_y+\frac{\sigma_y^2}{2}}\right)=e^{2a_y+2\sigma_y^2}-e^{2a_y+\sigma_y^2}=$$

$$=e^{2a_y+\sigma_y^2}(e^{\sigma_y^2}-1).$$

3. $D(X)=e^{2a_y+\sigma_y^2}(e^{\sigma_y^2}-1)\,. \qquad (270)$

Приклад 6. Випадкова величина X має закон розподілу $N\,(2;\,4)$. Знайти математичне сподівання і дисперсію для логарифмічного нормального закону випадкової величини Y.

Розв'язання. $M(Y)=e^{a_x+\frac{\sigma_y^2}{2}}=e^{10}.$

$$D(Y)=e^{2a_x+\sigma_x^2}(e^{\sigma_x^2}-1)=e^{2\cdot 2+16}(e^{16}-1)=e^{20}(e^{16}-1).$$

4. Урізаний (ліворуч) нормальний закон

Нормальний закон посідає особливе місце в теорії ймовірностей та математичній статистиці, особливо у прикладних задачах. Але існує певний клас задач, які характерні для теорії надійності, коли випадкова величина X може набувати лише додатні числові значення. У цьому разі використовують урізаний ліворуч нормальний закон, що зображений на рис. 101 для $a > 0$.

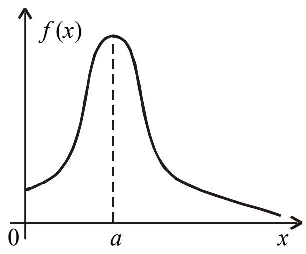

Рис. 101

Щільність імовірностей цього закону буде така:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, & x>0.\end{cases}$$

Сталу C знаходимо з умови нормування:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=1\rightarrow\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1\rightarrow C=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx};\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{x-a}{\sigma}=z,\ dx=\sigma dz\\ 0<x<\infty\rightarrow-\dfrac{a}{\sigma}<z<\infty\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-\frac{a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=0{,}5-\Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)=0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right).$$

Звідси $C=\dfrac{1}{0{,}5+\Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right)}$.

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{\sigma\left(0{,}5+\Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right)\right)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, & x>0;\end{cases}\qquad(271)$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{\sigma\left(0{,}5+\Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right)\right)\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, & x>0.\end{cases} \qquad (272)$$

4.1. Числові характеристики

1. $M(X)=\int\limits_0^\infty xf(x)dx=\dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{x-a}{\sigma}=z\to x=\sigma z+a, \quad dx=\sigma\ dz\\ 0<x<\infty\to \quad -\dfrac{a}{\sigma}<z<\infty\end{array}\right|=\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}(\sigma\ z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma\,dz=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}(\sigma\ z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{Ca}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}+Ca\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]\right)=\frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}+a\frac{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}=$$

$$=a+\frac{\sigma}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

$$M(X)=a+\frac{\sigma}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}. \qquad (273)$$

2. $M(X^2)=\int\limits_0^\infty x^2f(x)dx=\dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty x^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$

$$=\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}(z\sigma+a)^2e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma\ dz=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}(\sigma^2z^2+2\sigma\ az+a^2)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{C}{\sqrt{2\pi}}2\sigma a\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{C}{\sqrt{2\pi}}a^2\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

1) $\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \left| \begin{matrix} u = z, \quad du = dz \\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = dv \to v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{matrix} \right| =$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty} + \int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \right] = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\left[\frac{a}{\sigma}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}}a\sigma e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{Ca\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

2) $\frac{C}{\sqrt{2\pi}}2\sigma a\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}2\sigma a\left[-e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty}\right] = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}2\sigma\ ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$

3) $\frac{C}{\sqrt{2\pi}}a^2\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}a^2\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right] = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}.$

$$M(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{Ca\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \frac{2Ca\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{Ca\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}.$$

3. $D(X) = M(X^2) - M^2(X) =$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{a\sigma}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]} - e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} - \left(a + \frac{\sigma}{\left[0{,}5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right)^2 \qquad (274)$$

Приклад 7. За заданим N (2; 4) записати $f(x)$, $F(x)$ для урізаного нормального закону (ліворуч) і знайти $M(X)$, $D(X)$.

Розв'язання. Використовуючи (273) — (276), одержимо:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2{,}766\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)}{32}}, & x > 0; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2{,}766\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{(x-2)}{32}}dx, & x > 0. \end{cases}$$

$$M(X) = 2 + \frac{1{,}446}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}}; \qquad D(X) = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} + \frac{11{,}57}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}} - (2 + 5{,}79e^{-\frac{1}{8}})^2.$$

5. Гамма-розподіл

Неперервна випадкова величина X має гамма-розподіл імовірностей, якщо

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Cx^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

де $\alpha>0$, $\lambda>0$, C — константа, яка визначається із умови нормування:

$$C=\frac{1}{\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx}.$$

Тут

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}=\left|\begin{matrix}\lambda x=z, & x=\dfrac{z}{\lambda}\\ dx=\dfrac{dz}{\lambda} & \end{matrix}\right|=\int\limits_0^\infty\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\alpha-1}e^{-z}\frac{dz}{\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\lambda^\alpha}\int\limits_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha},$$

де $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz$ називають *гамма-функцією*.

Таким чином,

$$C=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}. \tag{275}$$

Тоді

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases} \tag{276}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx, & x\ge 0.\end{cases} \tag{277}$$

Отже, гамма-розподіл визначається двома параметрами α і λ.
Розглянемо властивості гамма-функції:

1. $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-z}dz=-e^{-z}\Big|_0^\infty=1;$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1}e^{-z}dz=\int\limits_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz=\left|z=\frac{t^2}{2},\, dz=tdt\right|=$

$$=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}tdt}{\sqrt{\frac{t^2}{2}}}=\sqrt{2}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \qquad (278)$$

3. Установимо зв'язок між гамма-функціями $\Gamma(\alpha+1)$ і $\Gamma(\alpha)$.

$$\Gamma(\alpha+1)=\int\limits_0^\infty z^\alpha e^{-z}dz,$$

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz.$$

Зінтегруємо $\Gamma(\alpha+1)$.

$$\Gamma(\alpha+1)=\int\limits_0^\infty z^\alpha e^{-z}dz=\left|\begin{matrix} u=z^\alpha,\ du=\alpha z^{\alpha-1}dz \\ e^{-z}dz=dv\to v=-e^{-z}\end{matrix}\right|=$$

$$=-z^\alpha e^{-z}\Big|_0^\infty+\alpha\int\limits_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\alpha\int\limits_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Отже,

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\,. \qquad (279)$$

Якщо, наприклад, $\alpha = n$, де n — ціле невід'ємне число, то:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n).$$

Використовуючи рівність (278) для $\Gamma(n)$, дістаємо:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1),$$

для $\Gamma(n-1)$ рівність (278) набуде такого вигляду:

$$\Gamma(n-1)=(n-2)\Gamma(n-2)$$

і так для кожного цілого значення аргументу α гамма-функції.

Таким чином,

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\,\Gamma(n-1)=$$
$$=n\,(n-1)\,(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=$$
$$=n(n-1)(n-2)\,\ldots\,\Gamma(1)=n(n-1)(n-2)\,\ldots\,1=n!$$

Отже,

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (280)$$

Так, наприклад, $\Gamma(6) = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$.

5.1. Числові характеристики

1. $M(X)=\int\limits_0^\infty xf(x)dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty xx^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix}\lambda x=z, & x=\frac{z}{\lambda} \\ dx=\frac{dz}{\lambda} & \end{matrix}\right|=$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\left(\frac{z}{\lambda}\right)^\alpha e^{-z}\frac{dz}{\lambda}=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha+1}}\int\limits_0^\infty z^\alpha e^{-z}dz=\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1)=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\lambda}.$$

$$M(X)=\frac{\alpha}{\lambda}. \tag{281}$$

2. $M(X^2)=\int\limits_0^\infty x^2f(x)dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty x^2x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx=$

$=$ | здійснивши таку саму заміну, як і для визначення $M(X)$, дістанемо | $=$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\alpha+1}e^{-z}\frac{dz}{\lambda}=\frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty z^{\alpha+1}e^{-z}dz=\frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)=$$

$$=\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2=\frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\lambda^2}=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

$$D(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{282}$$

3. $\sigma(X)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$ (283)

6. Розподіл Ерланга *k*-го порядку

Якщо в гамма-розподілі k набуває лише цілих значень ($k\ge 1$), то гамма-розподіл перетворюється в розподіл Ерланга k-го порядку, щільність ймовірностей якої

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0; \\ \frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}, & x>0, \quad k=1,\ 2,\ 3,\ldots\ .\end{cases} \tag{283а}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0; \\ \frac{\lambda}{(k-1)!}\int\limits_0^x(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases} \tag{283б}$$

Закону розподілу Ерланга k-го порядку підлягає сума незалежних випадкових величин $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_к$, кожна з яких має експоненціальний закон із параметром λ.

6.1. Числові характеристики

$$1.\ M(X) = \frac{k}{\lambda};$$

$$2.\ D(X) = \frac{k}{\lambda^2}; \qquad (283в)$$

$$3.\ \sigma(X) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

Приклад 8. Задано $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Cx^5 e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0. \end{cases}$

Знайти C і $F(x)$. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Із умови задачі маємо: $\alpha = 6,\ \lambda = \frac{1}{2}$.

Використовуючи формули (275), (276), (277), (281), (282), (283), записуємо:

$$C = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\Gamma(6)} = \frac{1}{64 \cdot 51} = \frac{1}{64 \cdot 120} = \frac{1}{7680}.$$

Тоді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{7680} x^5 e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{7680} \int_0^x x^5 e^{-\frac{1}{2}x} dx, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12;$$

$$D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{24} \approx 4{,}9.$$

7. Експоненціальний закон розподілу

Експоненціальним законом випадкової величини називають гамма-розподіл, в якому $\alpha = 1$.

Для цього закону розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \end{cases} \tag{284}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{285}$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ зображені на рис. 102 і 103.

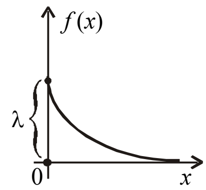

Рис. 102

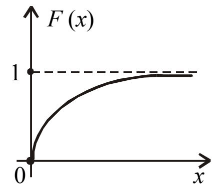

Рис. 103

7.1. Числові характеристики

Оскільки $\alpha = 1$, маємо такі співвідношення.

1. $M(X) = \frac{1}{\lambda}$. (286)

2. $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. (287)

3. $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$. (288)

4. Me для експоненціального закону визначається так:

$$F(\text{Me}) = \frac{1}{2} \to 1 - e^{-\lambda \text{Me}} = \frac{1}{2} \to e^{-\lambda \text{Me}} = \frac{1}{2} \to -\lambda \text{Me} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

$$\text{Me} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{289}$$

Серед усіх законів неперервних випадкових величин лише експоненціальному притаманна властивість — відсутність післядії, а саме: якщо пов'язати випадкову величину із часом, то для цього закону минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому. Цю властивість експоненціального закону використовують у марківських випадкових процесах, теорії масового обслуговування, теорії надійності.

Властивість відсутності післядії унаочнює рис. 104.

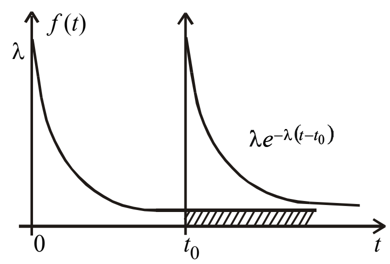

Рис. 104

На рис. 104 зображено щільність експоненціального закону $\lambda e^{-\lambda t}$. Коли збіжить час t_0, який вигляд матиме щільність експоненціального закону на проміжку$[t_0, \infty]$?

Розглянемо заштриховану область. Щоб звести заштриховану область до стандартного для щільності вигляду, маємо виконати таке нормування, щоб площа, обмежена $f(t)$ на проміжку $[t_0, \infty]$, дорівнювала одиниці. Дістанемо нову щільність імовірностей, визначену для $t \in [t_0, \infty]$, яка буде точною копією початкової функції.

Приклад 9. Задано

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$$

Визначити $M(X)$, $\sigma(X)$, Me.

Розв'язання. Використовуючи формули (286—289), одержимо:

$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$, оскільки $\lambda = 5$;

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25}; \qquad \sigma(X) = \frac{1}{5}; \qquad \text{Me} = \frac{\ln 2}{5}.$$

8. Бета-розподіл

Неперервна випадкова величина X має бета-розподіл, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ Cx^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Для визначення C використовуємо умову нормування

$$C = \frac{1}{\int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx}.$$

Інтеграл $\int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx$ називають *бета-функцією* і позначають $B(\beta;\gamma)$, де $\beta > 0,\ \gamma > 0$.

Тобто: $$B(\beta;\gamma) = \int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx. \qquad (290)$$

Отже, знайдемо $B(\beta;\gamma)$.

$$\int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{z}{1+z}; \quad 1-x = \dfrac{1}{1+z}; \quad dx = \dfrac{dz}{(1+z)^2} \\ 0 < x < 1 \ \to \ 0 < z < \infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{z^{\beta-1}}{(1+z)^{\beta+\gamma}}\,dz. \qquad (290а)$$

Як відомо, $\Gamma(P) = \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$

Якщо $t = my$, то

$$\Gamma(P) = m^p \int\limits_0^\infty y^{p-1}e^{-my}dy \to \frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(P)}\int\limits_0^\infty y^{p-1}e^{-my}dy.$$

Позначимо $m = (1+z),\ p = \beta + \gamma$.

Тоді

$$\frac{1}{(1+z)^{\beta+\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int\limits_0^\infty y^{p+\gamma-1}e^{-(1+z)y}dy. \qquad (291)$$

Підставляючи вираз (291) у (290а), дістаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{z^{\beta-1}}{(1+z)^{\beta+\gamma}}dz = \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty y^{\beta+\gamma-1}e^{-(1+z)y}dy\right)z^{\beta-1}dz = \left| \begin{matrix} \text{поміняємо} \\ \text{порядок} \\ \text{інтегрування} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty z^{\beta-1}e^{-yz}dz\right)y^{\beta+\gamma-1}e^{-y}dy =$$

$$= \left| \text{оскільки внутрішній інтеграл } \int\limits_0^\infty z^{\beta-1}e^{-yz}dz = \frac{\Gamma(\beta)}{y^\beta}, \text{ дістаємо} \right| =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int\limits_0^\infty y^{\beta+\gamma-1}e^{-y}\frac{1}{y^\beta}\,dy = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int\limits_0^\infty y^{\gamma-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}.$$

Остаточно маємо:

$$B(\beta,\gamma)=\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}\,dx=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)},\ \text{тоді}\ C=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}. \qquad (292)$$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases} \qquad (293)$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\displaystyle\int_0^x x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}\,dx, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases} \qquad (294)$$

8.1. Числові характеристики

1. $M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\int_0^1 xx^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}\,dx=$

$$=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\int_0^1 x^{\beta}(1-x)^{\gamma-1}\,dx=\left|\int_0^1 x^{\beta}(1-x)^{\gamma-1}\,dx=B(\beta+1;\ \gamma)=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}\right|=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\,\beta\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\,(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}=\frac{\beta}{\beta+\gamma}.$$

$$M(X)=\frac{\beta}{\beta+\gamma}. \qquad (295)$$

2. $M(X^2)=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\dfrac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\varsigma)}\int_0^1 x^2x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}\,dx=$

$$=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\int_0^1 x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma-1}dx=\left|\int_0^1 x^{\beta+1}(1-x)^{\gamma-1}dx=B(\beta+2;\gamma)=\frac{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma+2)}\right|=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\ \frac{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma+2)}=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\ \frac{(\beta+1)\,\beta\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{(\beta+\gamma+1)\,(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}=\frac{(\beta+1)\,\beta}{(\beta+\gamma+1)\,(\beta+\gamma)}.$$

$$M\left(X^2\right)=\frac{\beta(\beta+1)}{(\beta+\gamma)\,(\beta+\gamma+1)};$$

3. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\dfrac{\beta(\beta+1)}{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+1)}-\dfrac{\beta^2}{(\beta+\gamma)^2}=\dfrac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma+1)}.$

$$D(X)=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma+1)}. \qquad (296)$$

4. $\sigma(X)=\frac{1}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}}$. (297)

Приклад 10. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ Cx^5(1-x)^6, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти C, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Використовуючи формули (292), (295), (296), (297):

$$C=\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}=\frac{\Gamma(13)}{\Gamma(6)\Gamma(7)}=\frac{12!}{5!6!}=11\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5544;$$

$$M(X)=\frac{\beta}{\beta+\gamma}=\frac{6}{6+7}=\frac{6}{13};$$

$$D(X)=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma+1)}=\frac{6\cdot 7}{(6+7)^2(6+7+1)}=\frac{42}{13^2\cdot 14}=\frac{21}{1183}=\frac{3}{169};$$

$$\sigma(X)=\frac{1}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}}=\frac{1}{13}\sqrt{\frac{42}{14}}=\frac{\sqrt{3}}{13}.$$

9. Розподіл Вейбулла

Неперервна випадкова величина X має розподіл Вейбулла, якщо

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Cx^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}, & x>0, \beta>0,\ \theta>0.\end{cases}$$

За умовою нормування визначимо сталу C:

$$\int_0^\infty f(x)dx=1\to\int_0^\infty Cx^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}dx=1\to C=\frac{1}{\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}dx}.$$

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}dx=\left|\begin{matrix}\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta=z\to x=\theta z^{\frac{1}{\beta}}\to\\ dx=\frac{\theta}{\beta}z^{\frac{1-\beta}{\beta}}dz\end{matrix}\right|=\int_0^\infty \theta^{\beta-1}z^{\frac{\beta-1}{\beta}}e^{-z}\frac{\theta}{\beta}z^{\frac{1-\beta}{\beta}}dz=\frac{\theta^\beta}{\beta}\int_0^\infty e^{-z}dz=$$

$$=\frac{\theta^\beta}{\beta}\left(-e^{-z}\Big|_0^\infty\right)=\frac{\theta^\beta}{\beta}.$$

$$C=\frac{\beta}{\theta^\beta}. \tag{298}$$

Щільність імовірностей для розподілу Вейбулла:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^p}, & x>0.\end{cases} \tag{299}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}dx=\int_0^x e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}d\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta=-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}\Bigg|_0^x=1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}.$$

Звідси

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}, & x>0\end{cases} \tag{300}$$

Отже, розподіл Вейбулла визначається двома параметрами β, θ.

9.1. Числові характеристики

1. $M(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty x\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}dx=\beta\int_0^\infty\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}dx=$

$$=\left|\begin{matrix}\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta=z\to\frac{x}{\theta}=z^{\frac{1}{\beta}}\to\\ \to dx=\frac{\theta x}{\beta}z^{\frac{1}{\beta}-1}dz\end{matrix}\right|=\beta\int_0^\infty ze^{-z}\frac{\theta}{\beta}z^{\frac{1}{\beta}-1}dz=\theta\int_0^\infty z^{\frac{1}{\beta}}e^{-z}dz=\theta\Gamma(\frac{1}{\beta}+1);$$

$$M(X)=\theta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right). \tag{301}$$

2. $M(X^2)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx=\int_0^\infty x^2\,\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}dx=\beta\theta\int_0^\infty\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta+1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}dx=$

$=\left|\begin{array}{l}\text{зробивши таку саму заміну, як}\\ \text{і при визначенні } M(X)\text{, дістанемо}\end{array}\right|=\beta\,\theta\int_0^\infty t^{\frac{1}{\beta}+1}e^{-t}\,\frac{\theta}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt=$

$=\theta^2\int_0^\infty t^{\frac{2}{\beta}}e^{-t}dt=\theta^2\Gamma(\frac{2}{\beta}+1);$

$$M(X)=\theta^2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right).$$

3. $D(X)=\theta^2\left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right).$ (302)

4. $\sigma(X)=\theta\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}.$ (303)

Приклад 11. За заданими параметрами $\beta = 2$, $\theta = 4$ записати математичний вираз для $f(x)$, $F(x)$ і обчислити числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Використовуючи (302) — (306),

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{8}xe^{-\frac{1}{16}x}, & x>0.\end{cases}$$

1. $M(X)=\theta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)=4\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=4\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}$;

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, що було нами доведено;

2. $D(X)=\theta^2\left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)=16\left(\Gamma(2)-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)=$

$=16\left[2-\frac{1}{4}\pi\right]=4(8-\pi).$

3. $\sigma(X)=2\sqrt{8-\pi}$.

10. Закони розподілу випадкових величин, пов'язаних із нормальним законом розподілу

Нормальному закону розподілу належить центральне місце в побудові статистичних моделей у теорії надійності та математичній статистиці.

10.1. Розподіл χ^2 (хі-квадрат)

Якщо кожна із X_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) незалежних випадкових величин характеризується нормованим законом розподілу ймовірностей $(N(0;1))$, то випадкова величина $X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ матиме розподіл χ^2 із k ступенями свободи, щільність імовірностей якої буде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ Cx^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Використовуючи умову нормування, знаходимо

$$C = \frac{1}{\int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx};$$

$$\int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = z \to x = 2z \\ dx = 2dz \end{array} \right| = \int_0^\infty (2z)^{\frac{k}{2}-1} e^{-z} 2dz = 2^{\frac{k}{2}} \int_0^\infty z^{\frac{k}{2}-1} e^{-z} dz = 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right).$$

Тоді
$$C = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \qquad (304)$$

Отже,
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases} \qquad (305)$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^x x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx, & x > 0. \end{cases} \qquad (306)$$

10.1.1. Числові характеристики

1. $M(X)=\int_0^{\infty} x\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\infty} x^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=z\to x=2z;\\ dx=2dz\end{array}\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\infty}(2z)^{\frac{k}{2}}e^{-z}2dz=\frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\infty}z^{\frac{k}{2}}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=\frac{2\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=2\frac{k}{2}=k\ ;$$

$$M(X)=k\ . \qquad (307)$$

2. $M(X^2)=\int_0^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\infty}x^{\frac{k}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=z\to x=2z;\\ dx=2dz\end{array}\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\infty}(2z)^{\frac{k}{2}+1}e^{-z}2dz=\frac{2^{\frac{k}{2}+2}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\infty}z^{\frac{k}{2}+1}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{4\Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=\frac{4\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=k(k+2)\ ;$$

$$M(X^2)=k(k+2)\ ;$$

3. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=k(k+2)-k^2=k^2+2k-k^2=2k$;

$$D(X)=2k\ . \qquad (308)$$

4. $\sigma(X)=\sqrt{2k}$. (309)

Приклад 12. Кожна з 10 незалежних випадкових величин x_i має закон розподілу $N\,(0;\,1)$. Записати вирази для $f\,(x)$, $F(x)$ і обчислити $M\,(X)$, $D\,(X)$, $\sigma\,(X)$.

Розв'язання. Використовуючи (308)—(312), дістаємо:

$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2^5\Gamma(5)}x^4e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{32\cdot 4!}x^4e^{-\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{32\cdot 24}x^4e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{768}x^4e^{-\frac{x}{2}}.$$

Таким чином,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{768}x^4e^{-\frac{x}{2}}, & x>0;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{768}\int\limits_0^{\infty}x^4e^{-\frac{x}{2}}dx, & x>0;\end{cases}$$

$M(X)=k=10;$

$D(X)=2k=20;$

$\sigma(X)=\sqrt{2k}=\sqrt{20}\approx 4{,}47.$

10.2. Розподіл $\frac{\chi^2}{k}$

Нехай випадкова величина Y має розподіл χ^2 із k ступенями свободи:

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$, якщо $X=\frac{Y}{k}$. Оскільки $Y=kX$ і при цьому $y'_x=k$, то згідно зі (196) дістанемо

$$f(x)=f(\psi(x))|\psi'(x)|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}(kx)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}k=$$

$$=\frac{k^{\frac{k}{2}-1}k}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}=\frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}.$$

Отже, щільність імовірностей розподілу $\frac{\chi^2}{k}$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}, & x>0.\end{cases} \tag{310}$$

10.3. Розподіл χ

Нехай випадкова величина Y має розподіл χ^2 із k ступенями свободи:

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

Знайдемо $f(x)$, якщо $X=\sqrt{Y}$. Оскільки $Y=x^2=\psi(x)$, то $\psi'(y)=2x$. Використовуючи (196), дістаємо

$$f(x)=f(\psi(x))|\psi'(x)|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}(x^2)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}}2x=\frac{2}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Випадкова величина X має розподіл χ, якщо

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0.\end{cases} \tag{311}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^x x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & x>0.\end{cases} \tag{312}$$

10.3.1. Числові характеристики χ-розподілу

1. $M(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty x\ x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty x^k e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x^2}{2}=z\to x=2^{\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{2}}\\ xdx=dz\end{array}\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}xdx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty 2^{\frac{k-1}{2}}z^{\frac{k-1}{2}}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{2^{\frac{k-1}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{k-1}{2}}e^{-z}dz=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-z}dz=\frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)};$$

$$M(x)=\frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \qquad (313)$$

2. $M(X^2)=\int_0^\infty x^2f(x)dx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty x^2x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty x^{k+1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{зробивши таку саму заміну,}\\ \text{як і при визначенні } M(X),\\ \text{дістанемо}\end{array}\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty (2z)^{\frac{k}{2}}e^{-z}2dz=$$

$$=\frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{k}{2}}e^{-z}dz=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\left(\frac{k}{2}+1\right)-1}e^{-z}dz=\frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=\frac{2\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=2\frac{k}{2}=k;$$

$$M(X^2)=k; \qquad (314)$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=k-\frac{2\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

3. $D(X)=k-\frac{2\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)}$. (315)

4. $\sigma(X)=\sqrt{k-\dfrac{2\Gamma^2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}}$. (316)

Приклад 13. Випадкова величина X має розподіл χ із $k = 8$ ступенями свободи. Записати вираз для $f(x)$, $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Обчислимо гамма-функції для $k = 8$:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{8}{2}\right)=\Gamma(4)=3!=6.$$

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{8+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\Gamma\left(4\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7\cdot5\cdot3}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{7\cdot5\cdot3}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{16}\sqrt{\pi}=\frac{7!!}{16}\sqrt{\pi}.$$

Тут 7!! — добуток натурального ряду непарних чисел, починаючи від 1 до 7.

У загальному вигляді

$$(2n-1)!! \qquad (317)$$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{48}x^7e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{48}\int\limits_0^{\infty}x^7e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & x>0.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}=\frac{7!!\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)};$$

$$D(X)=k-\frac{2\Gamma^2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}=8-2{,}393\pi;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{8-2{,}393\pi}\ .$$

10.4. Розподіл $\dfrac{\chi}{\sqrt{k}}$

Нехай випадкова величина Y має розподіл χ із k ступенями свободи

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}y^{k-1}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

Необхідно знайти $f(x)$, якщо $X=\dfrac{Y}{\sqrt{k}}$. Оскільки $Y=\sqrt{k}\,X=\psi(x)$ і при цьому $\psi'_x=\sqrt{k}$, то

$$f(x)=f(\psi(x))\,|\,\psi'(x)\,|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\sqrt{k}\,x\right)^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}\sqrt{k}=\frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}.$$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}, & x>0.\end{cases}\tag{318}$$

10.5. Розподіл Стьюдента

Незалежні випадкові величини Y і X мають закони розподілу:

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<\infty;$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

Знайти $f(z)$, якщо $Z=\dfrac{Y}{X}$. Для зручності подальших перетворень запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\sqrt{2k}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(\dfrac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

Використовуючи формулу (217), дістаємо:

$$f(z)=\int_0^\infty f(x)f(zx)x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2k}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}e^{-\frac{x^2z^2}{2}}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}(k+z^2)}x\,dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{2}(k+z^2)=t\to x=\left(\dfrac{2t}{k+z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ x\,dx=\dfrac{dt}{k+z^2}\end{array}\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\int_0^\infty\frac{2^{\frac{k-1}{2}}t^{\frac{k-1}{2}}}{(k+z^2)^{\frac{k-1}{2}}}e^{-t}\frac{dt}{k+z^2}=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{(k)^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{(k+z^2)^{\frac{k+1}{2}}}\int_0^\infty t^{\frac{k-1}{2}}e^{-t}dt=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{(k)^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{(k)^{\frac{k+1}{2}}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}\int_0^\infty t^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-t}dt=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Отже, якщо Y має розподіл $N(0,\,1)$, а випадкова величина $X-\dfrac{\chi}{\sqrt{k}}$, то випадкова величина $Z=\dfrac{Y}{X}$ характеризуватиметься розподілом Стьюдента зі щільністю ймовірностей

$$f(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},\qquad -\infty<z<\infty. \tag{319a}$$

Тоді функція розподілу ймовірностей

$$F(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{z}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz\,. \qquad (319б)$$

10.5.1. Числові характеристики розподілу Стьюдента

1. $M(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}z\,f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}z\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}z\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=0\,.$$

Оскільки підінтегральна функція є непарною, а межі інтегрування симетричні відносно нуля:

$$M(Z)=0\,. \qquad (320)$$

2. $M(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty}z^2 f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}z^2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}z^2\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}z^2\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z=\left(\frac{kt}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}},\ dz=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{kt}}\ \frac{kdt}{(1-t)^2} \\ 0<z<\infty\ \rightarrow 0<t<1 \end{array}\right|=$$

$$=2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{0}^{1}\frac{kt}{1-t}\left(1+\frac{1}{k}\frac{kt}{1-t}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{kt}}\frac{kdt}{(1-t)^2}=$$

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{k\sqrt{kt}}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\frac{1}{\sqrt{kt}}\frac{kdt}{\sqrt{t}} = 2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k\sqrt{k}}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}-2}dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}2\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\left(\frac{k}{2}-1\right)-1}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\left(\frac{k}{2}-1\right)-1}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Зі співвідношення } \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\left(\frac{k}{2}-1\right)-1}dt = B\left(\frac{3}{2};\ \frac{k}{2}-1\right) \text{ і згідно з} \\ \text{властивістю бета-функції } B(p;q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \text{ дістаємо} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}B\left(\frac{3}{2};\ \frac{k}{2}-1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{k}{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \\ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \Gamma\left(\left(\frac{k}{2}-1\right)+1\right) = \left(\frac{k}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k-2}{2}} = \frac{k}{k-2}.$$

3. $D(Z) = \frac{k}{k-2}$. (321)

4. $\sigma(Z) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}$. (322)

Приклад 14. Випадкова величина X має розподіл Стьюдента із $k = 7$ ступенями свободи. Записати вираз для $f(x)$, $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. За заданим числом ступеней свободи $k = 7$ обчислимо гамма-функції:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\Gamma(4)=3!=6;$$

$$f(x)=\frac{6}{\sqrt{7\pi}\,\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4}=\frac{48}{\sqrt{7}\cdot 15\pi}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4},\quad -\infty<x<\infty;$$

$$F(x)=\frac{48}{\sqrt{7}\cdot 15\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4}dx;$$

$$M(X)=0;$$

$$D(X)=\frac{k}{k-2}=\frac{7}{7-2}=\frac{7}{5}=1{,}4;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}4.}\approx 1{,}18.$$

10.6. Розподіл Фішера—Снедекора

Нехай задано дві незалежні випадкові величини Y і X, які мають закони розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}}{2^{\frac{k_1}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)}x^{\frac{k_1}{2}-1}e^{-\frac{k_1x}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{(k_2)^{\frac{k_2}{2}}}{2^{\frac{k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}y^{\frac{k_2}{2}-1}e^{-\frac{k_2y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

Знайти $f(z)$, якщо $Z=\dfrac{Y}{X}$. Оскільки $Y = ZX$ і при цьому $0 < x < \infty$; $0 < y < \infty$; $0 < z < \infty$, то згідно з (217), дістаємо:

$$f(z)=\int_0^\infty f(x)f(zx)\,dx=\frac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}(k_2)^{\frac{k_2}{2}}}{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\int_0^\infty x^{\frac{k_1}{2}-1}e^{-\frac{k_1x}{2}}(zx)^{\frac{k_2}{2}-1}e^{-\frac{k_2zx}{2}}x\,dx=$$

$$=\frac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}(k_2)^{\frac{k_2}{2}}}{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{2t}{k_1+k_2z}\right)^{\frac{k_1+k_2z}{2}x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\dfrac{k_1+k_2z}{2}x=t\to x=\dfrac{2t}{k_1+k_2z}\to dx=\dfrac{2dt}{k_1+k_2z}\\ 0<x<\infty,\qquad 0<z<\infty\end{array}\right|=$$

$$=\frac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}(k_2)^{\frac{k_2}{2}}z^{\frac{k_2}{2}-1}}{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{2t}{k_1+k_2z}\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}e^{-t}\,\frac{2dt}{k_1+k_2z}=$$

$$=\frac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}(k_2)^{\frac{k_2}{2}}z^{\frac{k_2}{2}-1}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)(k_1+k_2z)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\int_0^\infty t^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}e^{-t}dt=$$

$$=\left|\text{оскільки }\int_0^\infty t^{\frac{k_1+k_2}{2}-1}e^{-t}dt=\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right),\ \text{ то }\right|=$$

$$=\frac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}(k_2)^{\frac{k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}z^{\frac{k_2}{2}-1}(k_1+k_2z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}=$$

$$=\frac{(k_1)^{\frac{k_1}{2}}(k_2)^{\frac{k_2}{2}}\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}z^{\frac{k_2}{2}-1}(k_1)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}(1+\frac{k_2}{k_1}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}z^{\frac{k_2}{2}-1}(1+\frac{k_2}{k_1}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}.$$

Отже, якщо випадкова величина X має розподіл $\frac{\chi^2}{k_1}$, а Y — $\frac{\chi^2}{k_2}$, де k_1 — число ступенів свободи випадкової величини X, k_2 — число ступенів свободи Y, і при цьому X і Y не корельовані, то $Z = \frac{Y}{X}$ має розподіл Фішера—Снедекора зі щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} z^{\frac{k_2}{2}-1}(1+\dfrac{k_2}{k_1}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, & z \geq 0. \end{cases} \tag{323}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} \int\limits_0^z z^{\frac{k_2}{2}-1}(1+\dfrac{k_2}{k_1}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}dz, & z \geq 0. \end{cases} \tag{324}$$

10.6.1. Числові характеристики розподілу Фішера—Снедекора

1. $$M(Z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\ f(z)dz = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} \int\limits_0^z z\, z^{\frac{k_2}{2}-1}(1+\frac{k_2}{k_1}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}dz =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} \int\limits_0^z z^{\frac{k_2}{2}}(1+\frac{k_2}{k_1}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{k_1}{k_2}\dfrac{t}{1-t} \to 1+\dfrac{k_2}{k_1}z = 1+\dfrac{k_2}{k_1}\dfrac{k_1}{k_2}\dfrac{t}{1-t} = 1+\dfrac{t}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} \\ dz = \dfrac{k_1}{k_2}\dfrac{dt}{(1-t)^2} \ \to\ 0 < z < \infty\ \to\ 0 < t < 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} \int\limits_0^1 \left(\frac{k_1}{k_2}\frac{t}{(1-t)}\right)^{\frac{k_2}{2}}(1-t)^{\frac{k_1+k_2}{2}}\frac{k_1}{k_2}\frac{dt}{(1-t)^2} =$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\int_0^1\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_2}{2}}\frac{t^{\frac{k_2}{2}}}{(1-t)^{\frac{k_2}{2}}}(1-t)^{\frac{k_1+k_2}{2}}\frac{k_1}{k_2}\frac{dt}{(1-t)^2}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\frac{k_1}{k_2}\int_0^1 t^{\frac{k_2}{2}}(1-t)^{\frac{k_1}{2}-2}\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\int_0^1 t^{\frac{k_2}{2}}(1-t)^{\frac{k_1}{2}-2}\,dt=\int_0^1 t^{\left(\frac{k_2}{2}+1\right)-1}(1-t)^{\left(\frac{k_1}{2}-1\right)-1}\,dt=\\ \quad =B\left(\frac{k_2}{2}+1;\frac{k_1}{2}-1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{k_1}{k_2}\,\frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-1\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}}=\frac{k_1}{k_2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}=$$

$$=\frac{k_1}{k_2}\,\frac{\frac{k_2}{2}\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-1\right)}{\left(\frac{k_1}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}=\frac{k_1}{k_2}\,\frac{\frac{k_2}{2}}{\frac{k_1}{2}-1}=\frac{k_1}{k_1-2}.$$

$$M(Z)=\frac{k_1}{k_1-2}. \tag{325}$$

2. $M(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)\,dz=$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\int_0^z z^2 z^{\frac{k_2}{2}-1}\left(1+\frac{k_2}{k_1}z\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}dz=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\int_0^z z^{\frac{k_2}{2}+1}\left(1+\frac{k_2}{k_1}z\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}dz=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Здійснивши таку саму заміну, як і}\\ \text{при визначенні } M(z)\text{, дістанемо}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\int_0^1\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{t}{(1-t)}\right)^{\frac{k_2}{2}+1}(1-t)^{\frac{k_1+k_2}{2}}\frac{k_1}{k_2}\frac{dt}{(1-t)^2}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{\text{л}_2}{2}}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{2}\int_0^1 t^{\frac{k_2}{2}+1}(1-t)^{\frac{k_1}{2}-3}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{2}\int_0^1 t^{\frac{k_2}{2}+1}(1-t)^{\frac{k_1}{2}-3}\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\int_0^1 t^{\frac{k_2}{2}+1}(1-t)^{\frac{k_1}{2}-3}\,dt=\int_0^1 t^{\left(\frac{k_2}{2}+2\right)-1}(1-t)^{\left(\frac{k_1}{2}-2\right)-1}\,dt=\\ =B\left(\frac{k_2}{2}+2;\ \frac{k_1}{2}-2\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{k_1^2}{k_2^2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}=\frac{k_1^2}{k_2^2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+2\right)=\Gamma\left(\left(\frac{k_2}{2}+1\right)+1\right)=\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}+2\right)=\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\frac{k_2}{2}\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)\\ \Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)=\Gamma\left(\left(\frac{k_1}{2}-1\right)+1\right)=\left(\frac{k_1}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-1\right)=\left(\frac{k_1}{2}-1\right)\Gamma\left(\left(\frac{k_1}{2}-2\right)+1\right)=\\ \qquad=\left(\frac{k_1}{2}-1\right)\left(\frac{k_1}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-2\right)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\frac{k_2}{2}\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-2\right)}{\left(\frac{k_1}{2}-1\right)\left(\frac{k_1}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}=\frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{(k_2+2)k_2}{(k_1-2)(k_1-4)}=\frac{k_1^2(k_2+2)}{k_2(k_1-2)(k_1-4)}.$$

Отже,

$$M(Z^2) = \frac{k_1^2 (k_2 + 2)}{k_2 (k_1 - 2)(k_1 - 4)}.$$

3. $$D(Z) = M(Z^2) - M^2(Z) = \frac{k_1^2 (k_2 + 2)}{k_2 (k_1 - 2)(k_1 - 4)} - \frac{k_1^2}{(k_1 - 2)^2} =$$

$$= \frac{k_1^2}{k_2 (k_1 - 2)^2 (k_1 - 4)} \big((k_2 + 2)(k_1 - 2) - k_2 (k_1 - 4) \big) =$$

$$= \frac{k_1^2}{k_2 (k_1 - 2)^2 (k_1 - 4)} \big(k_2 k_1 - 2k_2 + 2k_1 - 4 - k_2 k_1 + 4k_2 \big) = \frac{2k_1^2 \big(k_2 + k_1 - 2 \big)}{k_2 (k_1 - 2)^2 (k_1 - 4)};$$

$$D(Z) = \frac{2k_1^2 \big(k_2 + k_1 - 2 \big)}{k_2 (k_1 - 2)^2 (k_1 - 4)}. \tag{326}$$

4. $$\sigma(Z) = \frac{k_1}{k_1 - 2} \sqrt{\frac{2\big(k_2 + k_1 - 2 \big)}{k_2 (k_1 - 4)}}. \tag{327}$$

11. Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина *X*, що визначена на проміжку [*a*, *b*], має рівномірний закон розподілу, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

11.1. Числові характеристики

1. $$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{b+a}{2};$$

$$M(X) = \frac{b+a}{2}.$$

2. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$,

де $M(X^2)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2dx=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$.

Тоді

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$;

4. $\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$;

5. $\mathrm{Me}=M(X)=\frac{b+a}{2}$.

Приклад 15. Випадкова величина X має розподіл Фішера із $k_1=6$, $k_2=8$ ступенями свободи. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Обчислимо значення гамма-функцій:

$$\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{6}{2}\right)=\Gamma(3)=2!=2;$$

$$\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{8}{2}\right)=\Gamma(4)=3!=6;$$

$$\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{6+8}{2}\right)=\Gamma(7)=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720.$$

Тоді

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{2560}{9}x^3\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{-7}, & x>0.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{2560}{9}\int\limits_0^x x^3\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{-7}dx, & x>0.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{k_1}{k_1-2}=\frac{6}{6-2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

$$D(X)=\frac{2k_1^2(k_2+k_1-2)}{k_2(k_1-2)^2(k_1-4)}=\frac{2\cdot 36(6+8-2)}{8(6-2)^2(6-4)}=\frac{72\cdot 12}{8\cdot 16\cdot 2}=3{,}375.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{3{,}375}=1{,}84.$$

Із розглянутих законів: χ^2, χ, розподіл Стьюдента, розподіл Фішера—Снедекора можна зробити висновок, що вони не залежать від параметрів тих законів розподілу, які лежать в основі їх побудови, а залежать лише від числа ступенів свободи.

Теоретичні запитання до теми ?

1. Визначення нормального закону розподілу.
2. Як впливають параметри a, σ на графіки функцій $f(x)$ $F(x)$ загального нормального закону.
3. Що називають нормованим нормальним законом?
4. Довести, що Мо для нормального закону буде дорівнювати … .
5. Довести, чому дорівнює Ме для нормального закону.
6. Довести, що для нормального розподілу $\mu_3 = \ldots$.
7. Довести, що для нормального закону $As = \ldots$.
8. Довести, що для нормального закону $Es = \ldots$.
9. Довести, що для загального нормального закону розподілу $P(\alpha < x < \beta) = \ldots$.
10. Довести, що для загального нормального закону $P(|x-a| < \delta) = \ldots$.
11. Довести, що для нормованого нормального закону $P(\alpha < x < \beta) = \ldots$.
12. Правило трьох сигм для нормального закону.
13. Записати $f(x, y)$ для нормального закону на площині.
14. Записати $f(x, y)$ для нормального закону на площині за умови, що $K_{xy} = 0$.
15. Довести, що для нормального закону на площині $P(a < x < b,\ c < y < d) = \ldots$.
16. Дати визначення гамма-розподілу.
17. Чому дорівнюють $f(x)$, $F(x)$ для гамма-розподілу?
18. Властивоста гамма-функції.
19. Чому дорівнює $\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)}$?
20. Чому дорівнює $\dfrac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$?

21. Чому дорівнює $\Gamma(k+1)$, де k — ціле невід'ємне число?

22. Чому дорівнює $\dfrac{\Gamma(k+3)}{\Gamma(k)}$?

23. Довести, що $M(X)$ для гамма-розподілу дорівнюватиме… .
24. Довести, що для гамма-розподілу $D(X) = \dots$.

25. Довести, що $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dots$?

26. Що називають експоненціальним законом розподілу?
27. Довести, що для експоненціального закону розподілу $M(X) = \dots$, $D(X) = \dots$, $\sigma(X) = \dots$.
28. Що називають логарифмічним нормальним законом?
29. Довести, що для логарифмічного нормального закону $M(X) = \dots$.
30. Довести, що для логарифмічного нормального закону $D(X) = \dots$.
31. Що називають урізаним (ліворуч) нормальним законом?
32. Довести, що для урізаного (ліворуч) нормального закону розподілу $M(X) = \dots$.
33. Довести, що для урізаного (ліворуч) нормального закону розподілу $D(X) = \dots$.
34. Що називають бета-розподілом?
35. Бета-функція та її властивості.
36. Довести, що для бета-розподілу $M(X) = \dots$.
37. Довести, що для бета-розподілу $D(X) = \dots$.
38. Що називають розподілом Вейбулла?
39. Довести, що для розподілу Вейбулла $M(X) = \dots$.
40. Довести, що для розподілу Вейбулла $D(X) = \dots$.
41. Що називають розподілом χ^2?
42. Довести, що для розподілу χ^2 $M(X) = \dots$.
43. Довести, що для розподілу χ^2 $D(X) = \dots$.
44. Записати $f(x)$ $F(x)$ для розподілу χ.
45. Довести, що для розподілу χ $M(X) = \dots$.
46. Довести, що для розподілу χ $D(X) = \dots$.
47. Що називають розподілом Стьюдента?
48. Записати $f(x)$ $F(x)$ для розподілу Стьюдента.
49. Довести, що для розподілу Стьюдента $M(X) = \dots$.
50. Довести, що для розподілу Стьюдента $D(X) = \dots$.
51. Що називають розподілом Фішера—Снедекора?
52. Довести, що для розподілу Фішера—Снедекора $M(X) = \dots$
53. Довести, що для розподілу Фішера—Снедекора $D(X) = \dots$
54. Яка сутність відсутності післядії для експоненціального закону розподілу?

Задачі до теми

1. Задано $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$.

Визначити Mo, Me, As, Es. Обчислити $P(-4 < x < 2), \quad P(|x+3| < 2)$.

Відповідь. 0,1587; 0,9544.

2. Відомо, що випадкові величини X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу зі значеннями параметрів: $a_x = -2$, $\sigma_x = 4$, $a_y = 2$, $\sigma_y = 2$.

Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин: $z = 2x + 3y$ і $t = 2x - 3y$.

Відповідь. $r_{zt} = -0,12$.

3. Відомо, що випадкові величини X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу із значеннями парамтрів: $a_x = -1$, $\sigma_x = 4$, $a_y = 5$; $\sigma_y = 3$.

Знайти кореляційний момент і r_{zt} для випадкових величин

$$z = 3x - 2y + 5 \text{ і } t = -4x - y + 2.$$

Відповідь. $K_{zt} = -220$; $r_{zt} = -0,981$.

4. Завод виготовляє кульки для підшипників. Номінальний діаметр кульки $d_n = 5,55$ мм. Внаслідок неточностей при виготовленні кульок діаметр підшипника є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу із математичним сподіванням $a = d_n$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_d = 0,08$ мм. Під час контролю всі кульки бракуються, якщо їх діаметр відрізняється від d_n більш ніж на 0,04 мм.

Визначити, який відсоток кульок бракується під час контролю.

Відповідь. 4,56%.

5. Задано $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x+2)^2}{32}}, \quad -\infty < x < \infty$.

Знайти ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину більшу, ніж 36.

Відповідь. 0,0027.

6. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-4;\ 5)$. Знайти точки перегину кривої розподілу $f(x)$.

Відповідь. $x_1 = -9$; $x_2 = 1$.

7. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-0;\ 6)$. При якому значенні σ імовірність $P(2 < x < 4)$ буде найбільшою?

Відповідь. $\sigma = \sqrt{\frac{6}{\ln 2}}$.

8. Випадкова величина X має закон розподілу $N(4; 6)$. Знайти таке значення σ, щоб $P(0 < x < 8) = 0{,}9906$

Відповідь. $\sigma \approx 1{,}54$.

9. Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу при її виготовленні на верстаті має нульове математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення, що дорівнює 8 мк. Скільки необхідно виготовити цих деталей, щоб із імовірністю 0,99 серед них була хоча б одна деталь, що відповідала вимогам стандарту, якщо для такої деталі допустиме відхилення її розміру від номіналу було б не більше, ніж на 4 мк.

Відповідь. $n = \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}617}$.

10. Заряд мисливського пороху зважують на терезах, що мають середню квадратичну похибку зважування 0,5 мг. Номінальна маса порохового заряду 4,5 г. Визначити ймовірність пошкодження мисливської рушниці при пострілі, якщо максимально допустима вага порохового заряду 4,9 г.

Відповідь. $p = 0{,}4238$.

11. Вимір відстані до об'єкта супроводжується систематичною і випадковою помилками. Систематична помилка становить 25 м у бік зниження відстані, а випадкова помилка має нормальний закон розподілу із значенням $\sigma = 50$ м. Знайти: 1) ймовірність вимірювання дальності з похибкою, що за абсолютною величиною не перевищує 100 м; 2) імовірність того, що виміряна відстань не перевищить справжньої.

Відповідь. 1) $P(-100 < x < 100) = 0{,}927$;

2) $P(x < 0) = P(-\infty < x < \infty) = 0{,}4013$.

12. Виріб вважається найвищої якості, якщо відхилення його розмірів від номіналу за абсолютною величиною не перевищує 2,28 мм. Відхилення розміру виробу від номіналу має нормальний закон розподілу зі значенням $\sigma = 2{,}4$ мм, а систематична похибка відсутня.

Визначити середнє число виробів вищої якості, якщо виготовлено 8 деталей.

Відповідь. $p = 0{,}6778$; $M(x) = np = 8 \cdot 0{,}6778 \approx 5$.

13. Якої ширини має бути поле допуску розміру деталі, щоб із імовірністю, не більшою за 0,0027, виготовлена деталь із контрольованим розміром виявилась за межами поля допуску, коли відомо, що відхилення розміру є випадковою величиною, з нормальним законом розподілу з параметрами $a = 0$; $\sigma = 12{,}5$ мк?

Відповідь. Не менш як 37,5 мк.

14. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x, y)=\frac{1}{40\pi\sqrt{0{,}75}}e^{-1{,}5\left(\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(x-y)(y+2)}{20}+\frac{(y+2)^2}{25}\right)},\quad -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty.$$

Визначити $M(z),\ D(z)$, якщо $z=4x-5y+3$.

Відповідь. $M(z)=1,\ D(z)=589.$

15. Задано

$$f(x, y)=\frac{1}{60\pi}e^{-0{,}5\left(\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{25}\right)},\quad -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty.$$

Обчислити $P(-4<x<2,\ -1<y<5)$.

Відповідь. 0,1541.

16. Система (X, Y) має нормальний закон на площині, кореляційна матриця якої $K=\begin{pmatrix}9 & 0{,}12\\ & 16\end{pmatrix}$.

Записати аналітичний вираз щільності ймовірностей для цієї системи, коли відомі значення $a_x = 0$, $a_y = -2$.

Обчислити $D(z)$, якщо $z=3x-2y+5$.

Відповідь. $D(z)=143{,}56$.

17. За заданою кореляційною матрицею $K=\begin{pmatrix}4 & 0\\ & 1\end{pmatrix}$ нормального закону на площині і значеннями $a_x = -4$, $a_y = 2$ записати аналітичний вираз для $f(x, y)$ і обчислити $P(-4<x<1,\ -2<y<4)$.

Відповідь. 0,4924.

18. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-a;\ \sigma)$. Визначити μ_k.

Відповідь. $\mu_k=0$, якщо $k=2n+1$.

$$\mu_k=\frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right),\quad k=2n.$$

19. За заданим законом розподілу випадкової величини X $N(2;\ 4)$ записати логарифмічний закон розподілу для Y і визначити $M(Y)$; $D(Y)$.

Відповідь. $f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{1}{4y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-2)^2}{32}}, & y>0;\end{cases}$

$$M(Y)=e^{10};\ D(Y)=e^{20}(e^{16}-1).$$

20. За заданим законом розподілу випадкової величини $X\ N(4;\ 2)$ записати аналітичний вираз для урізаного ліворуч нормального закону розподілу $f(y)$ і визначити $M(Y)$, $D(Y)$.

Відповідь. $f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{1}{1{,}9544\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-4)^2}{8}}, & y>0.\end{cases}$

$M(Y)=2+\dfrac{1{,}023}{\sqrt{2\pi}}e^{-2};\quad D(Y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(20-8{,}187e\right)^{-2}-\left(4+2{,}047e^{-2}\right)^{2}.$

21. Випадкова величина X має закон розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 32x^2e^{-5x}, & x>0.\end{cases}$$

Визначити $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X)=\dfrac{9}{4}$, $D(X)=\dfrac{3}{16}$, $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

22. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{125}{24}x^2e^{-5x}, & x>0.\end{cases}$$

Визначити назву цього закону і обчислити $M(X)$, $D(X)$.

Відповідь. $M(X)=\dfrac{3}{5}$, $D(X)=\dfrac{3}{25}$.

23. Неперервна випадкова величина X має гамма-розподіл зі значеннями параметрів $\alpha=4$, $\lambda=4$. Визначити K_{xy}, якщо $y=2x^2-3x+5$.

Відповідь. $K_{xy}=-1{,}25$.

24. За заданою щільністю ймовірностей

$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 8e^{-8x}, & x>0.\end{cases}$

Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$, Me.

Відповідь. $M(X)=\sigma(X)=0{,}125$; $\text{Me}=\dfrac{\ln 2}{8}$.

25. Неперервна випадкова величина X має експоненціальний закон розподілу ймовірностей зі значенням $\lambda=10$. Визначити K_{xy}, якщо $y=x^2-3x+5$.

Відповідь. $K_{xy}=0{,}004$.

26. Неперервна випадкова величина X має бета-розподіл зі значеннями параметрів $\beta = 8,\ \gamma = 10.$ Знайти аналітичний вираз для $f(x)$ і $F(x)$ і обчислити $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2431\, x^7 (1-x)^9, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2431 \int\limits_0^x x^7 (1-x)^9 dx, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{4}{9};\ D(X) = \frac{20}{1539}.$$

27. Неперервна випадкова величина X має розподіл Вейбулла із значеннями параметрів $\theta = 5;\ \beta = \frac{1}{4}.$ Записати аналітичний вираз для $f(x)$ і $F(x)$ і обчислити $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4} 5 \sqrt[4]{125x}^{\,-\frac{3}{4}} e^{-\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{4}}}, & x > 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{4}}}, & x > 0; \end{cases}$$

$$M(X) = 100;\ D(X) = 993550.$$

28. Неперервна випадкова величина X має розподіл χ^2 із $k = 8$ ступенями свободи. Записати формулою $f(x)$ і $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{96} x^3 e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{96} \int\limits_0^x x^3 e^{-\frac{x}{2}} dx, & x > 0; \end{cases}$$

$$M(X) = 8;\ D(X) = 16,\ \sigma(X) = 4.$$

29. Випадкова величина X має розподіл χ^2 із $k = 6$ ступенями свободи. Знайти K_{xy}, якщо $y = x^2 - 3x + 9$.

Відповідь. $K_{xy} = 156$.

30. Неперервна випадкова величина X має розподіл χ із $k = 5$ ступенями свободи. Записати формули для $f(x)$ і $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$.

Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}\sqrt{\pi}}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5\pi}}\int\limits_0^x x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & x>0;\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}};\ \ D(X)=\frac{45\pi-128}{9\pi}.$$

31. Випадкова величина X має розподіл χ із k = 7 ступенями свободи. Знайти K_{xy}, якщо $y=9x-2$.

Відповідь. $K_{xy}=63-\dfrac{112\sqrt{2}}{5\sqrt{\pi}}-\dfrac{4608}{25\pi}$.

32. Випадкова величина X має розподіл Стьюдента із k = 8 ступенями свободи. Записати формули для $f(x)$ і $F(x)$ і обчислити $M(x)$, $D(x)$.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{35}{4\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{x^2}{8}\right)^{-\frac{9}{2}},\ -\infty<x<\infty;$

$$F(x)=\frac{35}{4\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-\frac{9}{2}}dx,\ \ -\infty<x<\infty;\ \ M(X)=0;\ D(X)=\frac{4}{3}.$$

33. Випадкова величина X має розподіл Стьюдента із k = 10 ступенями свободи. Знайти K_{xy}, якщо $y=9x-2$.

Відповідь. K_{xy} = 3,75.

34. Випадкова величина X має розподіл Фішера із k_1 = 6, k_2 = 10 ступенями свободи. Записати формули для $f(x)$ і $F(x)$ і обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(x)$.

Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{109375}{243}x^4\left(1+\dfrac{5}{3}x\right)^{-3}, & x>0.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{109375}{243}\int\limits_0^x x^4\left(1+\dfrac{5}{3}x\right)^{-3}, & x>0.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{3}{2};\ D(X)=\frac{63}{20}.$$

РОЗДІЛ IV

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

ТЕМА 11. **ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

1. Закон великих чисел

Математичні закони теорії ймовірностей одержані внаслідок формалізації реальних статистичних закономірностей, що притаманні масовим випадковим подіям. Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так, у разі великого числа проведених експериментів відносна частота події $W(A)$ виявляє стабільність і за ймовірністю наближається до ймовірності $P(A)$; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Усі ці явища об’єднують під спільною назвою закону великих чисел, який можна загалом сформулювати так: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Закон великих чисел об’єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових, сталих величин.

Для доведення цих теорем використовується нерівність Чебишова.

2. Нерівність Чебишова

Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$; $D(X)$, то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε ($\varepsilon > 0$), не перевищуватиме величини: $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Це можна записати так:

$$P\big(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\big)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (328)$$

Доведення нерівності. Нехай випадкова величина X є неперервна, закон розподілу ймовірностей якої $f(x)$; $M(X)$, $D(X)$ — обмежені величини. Випадкові події $\left|X-M(X)\right|<\varepsilon$ і $\left|X-M(X)\right|>\varepsilon$ будуть протилежними (рис. 105).

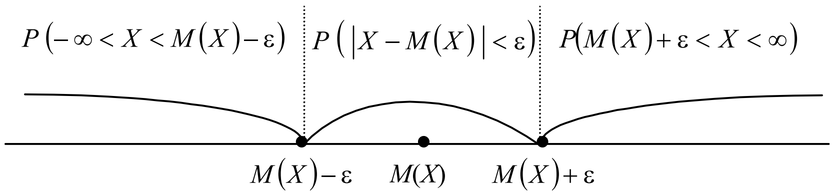

Рис. 105

А тому

$$P\left(\left|X-M(x)\right|<\varepsilon\right)+P\left(\left|X-M(x)\right|>\varepsilon\right)=1\rightarrow \qquad (329)$$

$$\rightarrow P\left(\left|X-M(x)\right|<\varepsilon\right)=1-P\left(\left|X-M(x)\right|\geq\varepsilon\right). \qquad (а)$$

Отже, знаючи оцінку для $P(\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon)$, ми згідно з (а), знайдемо оцінку і для $P(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon)$.

Розглянемо нерівність:

$$\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon \;\rightarrow \left|X-M(X)\right|^2\geq\varepsilon^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2}\left|X-M(X)\right|^2\geq 1. \qquad (б)$$

Помноживши ліву і праву частини нерівності (б) на $f(x)$ ($f(x)>0$), дістанемо:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left|X-M(X)\right|^2 f(x)\geq f(x). \qquad (в)$$

Зінтегруємо праву і ліву частини нерівності (в) на проміжках $[-\infty;\ M(X)-\varepsilon]\cup[(X)+\varepsilon;\ \infty]$:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}\left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{M(X)+\varepsilon}^{\infty}\left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx\geq$$

$$\geq\int\limits_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}f(x)dx+\int\limits_{M(X)+\varepsilon}^{\infty}f(x)dx \qquad (г)$$

або

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon}\left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx\geq\int\limits_{\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon}f(x)dx. \qquad (д)$$

Згідно з рис. 105 запишемо: $\int\limits_{|X-M(X)|\geq\varepsilon} f(x)\,dx = P(|X-M(X)| > \infty$,

оскільки

$$P(|X-M(X)|>\varepsilon) = P(-\infty < X < M(X)-\varepsilon) + P(M(X)+\varepsilon < X < \infty) .$$

З огляду на те, що $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(X-M(X))^2 f(x)dx,$ маємо:

$$\int\limits_{|X-M(X)|\geq\varepsilon} \left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty}(X-M(X))^2 f(x)dx \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \int\limits_{|X-M(X)|\geq\varepsilon} \left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx \leq D(X).$$

Зрештою, нерівність (д) набере такого вигляду:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}D(X) \geq P(|X-M(X)| \geq \varepsilon) . \qquad \text{(е)}$$

Отже,

$$\frac{1}{\varepsilon^2}D(X) \geq P(|X-M(X)| \geq \varepsilon) . \qquad (330)$$

Підставивши оцінку для $P(|X-M(X)| \geq \varepsilon)$ (330) в (329), дістанемо:

$P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, що й потрібно було довести.

Приклад 1. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-2; 4)$.
Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність $|x-a| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 4\sigma$.

Розв'язання.
Оскільки $a = -2$, $\sigma_x = 4$, $D(X) = 16$, то згідно з (328) маємо:

$$P(|x+2| < 16) \geq 1-\frac{16}{256} = 1-0{,}0625 = 0{,}9375 .$$

Приклад 2. Імовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X-M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 10$.

Розв'язання: За умовою задачі маємо: $n = 400$, $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$; $\varepsilon = 10$.

$$M(X) = np = 400\cdot 0{,}9 = 360; \quad D(X) = npq = 360\cdot 0{,}1 = 36.$$

$$P(|x-360| < 10) \geq 1-\frac{36}{100} = 0{,}64 .$$

3. Теорема Чебишова

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots X_n$, які мають обмежені $M(X_i)$ ($i = 1,\ldots, n$) і дисперсії яких $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої C ($C > 0$), тобто $D(X_i) \le C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε імовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\overline{X}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} = \frac{\sum_1^n M(X_i)}{n},$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε, прямуватиме до одиниці зі збільшенням числа n:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{331}$$

Доведення. Оскільки X_i — випадкові величини, то і $\overline{X}$ буде випадковою. Числові характеристики для $\overline{X}$:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(X_i); \qquad D(\overline{X}) = D\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i).$$

Застосуємо нерівність Чебишова для випадкової величини $\overline{X}$:

$$P(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} \text{ або } P(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^n D(X_i)}{(n\varepsilon)^2}.$$

Ураховуючи умову $D(X_i) \le C$, записуємо:

$$P(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{nc}{(n\varepsilon)^2} \to P(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Тоді при $n \to \infty$ дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}\right) = 1.$$

Оскільки ймовірність не може бути більшою за одиницю, а нерівність є не строгою, одержимо

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon) = 1$$

або $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 3. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Розв'язання.

Використовуючи нерівність Чебишова для теореми Чебишова, одержимо:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{4500} X_i}{4500} - \frac{\sum_{i=1}^{4500} M(X_i)}{4500}\right| < 0{,}4\right) \geq 1 - \frac{5}{4500 \cdot 0{,}4} = 0{,}003.$$

Приклад 4. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

Розв'язання.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \geq 1 - \frac{8}{900\,(1{,}2)^2} = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9932;$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \approx 0{,}0068.$$

Оскільки ця ймовірність дуже мала, відхилення маси можна вважати невипадковим.

4. Теорема Бернуллі

Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p, то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \to \infty$ імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності p, взятої за абсолютною величиною на ε (ε > 0) прямуватиме до одиниці зі зростанням n, що можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)=1. \qquad (332)$$

! **Доведення.** Оскільки $W(A) = m / n$, де m — число експериментів — яких випадкова подія A спостерігалась, n — загальне число проведених експериментів, то ми можемо записати, що $m=\sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i — дискретна випадкова величина, яка може набувати лише одного з можливих значень: 0 або 1. У табличній формі закон дискретної випадкової величини X_i можна записати так:

x_i	0	1
p_i	q	p

Числові характеристики X_i:

$M(X_i) = 0\,q + 1\,p = p$;
$M(X^2{}_i) = p$;
$D(X_i) = M(X^2{}_i) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

Нерівність Чебишова для теореми Бернуллі матиме такий вигляд:

$$P(|W(A)-p|<\varepsilon)\ge 1-\frac{npq}{n^2\varepsilon^2} \to P(|W(A)-p|<\varepsilon)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (333)$$

Отже, доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)=1.$

Приклад 5. Імовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від імовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі: $p = 0{,}95$; $q = 0{,}05$; $n = 400$. На підставі (333) дістаємо:

$$P(|W(A)-0{,}95|<0{,}02)\ge 1-\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{400\cdot(0{,}02)^2}=1-0{,}2969=0{,}7031.$$

Приклад 6. Скільки необхідно провести експериментів n, щоб імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності $p = 0{,}85$, взяте за абсолютною величиною, на $\varepsilon = 0{,}001$, була б не меншою за 0,99.

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0{,}85$; $q = 0{,}15$; $\varepsilon = 0{,}001$,

$$P(|W(A) - 0{,}85| < 0{,}001) = 0{,}99.$$

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0{,}99 \ \rightarrow \ n = \frac{pq}{0{,}01\ \varepsilon^2} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}15}{0{,}01 \cdot 0{,}000001} = 12450000.$$

5. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова)

5.1. Характеристичні функції та їх властивості

Для доведення центральної граничної теореми використовуються характеристичні функції.

Розглядається випадкова величина $Y = e^{itX}$, де X — дійсна випадкова величина, закон розподілу якої відомий, t — параметр, а $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця.

Така випадкова величина називається комплексною.

Характеристичною функцією називають математичне сподівання від e^{itX}:

$$\alpha_X(t) = M(Y) = M\left(e^{itX}\right). \tag{334}$$

Якщо X є дискретною, то

$$\alpha_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{itx_i} p_i\ . \tag{335}$$

Якщо X є неперервною, то

$$\alpha_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx\ . \tag{336}$$

Основні властивості $\alpha_x(t)$:

1. $\alpha_x(0) = 1$, оскільки в цьому разі ($t = 0$), то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

2. Якщо взяти похідну від $\alpha_x(t)$ по t, то $\alpha'_X(t) = i\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x)dx$.

Прирівнявши параметр $t = 0$, одержимо

$$\alpha'_X(0) = i\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{itx} f(x)dx = i\,M(X) \rightarrow$$

$$\rightarrow M(X) = \frac{1}{i}\alpha'_X(0) = -i\,\alpha'_X(0)\,, \qquad (337)$$

оскільки $i^2 = -1$.

3. Якщо взяти другу похідну від $\alpha_x(t)$ за параметром і при цьому $t = 0$, то одержимо:

$$\alpha''_X(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{itx} f(x)dx\Big|_{x=0} = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = -M(X^2) \rightarrow M(X^2) = -\alpha''_X(0)\,.$$

Отже,

$$D(X) = -\alpha''_X(0) - \left(\alpha'_X(0)\right)^2\,. \qquad (338)$$

4. Якщо випадкові величини Y і X пов’язані співвідношенням $Y = ax + b$, де a і b є сталими, то їх характеристичні функції пов’язані між собою так:

$$\alpha_Y(t) = M\left(e^{itY}\right) = M\left(e^{it(ax+b)}\right) = e^{itb}M\left(e^{itax}\right) = e^{itb}\alpha_X(at)\,.$$

Отже,

$$\alpha_Y(t) = e^{itb}\alpha_X(at)\,. \qquad (339)$$

5. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots X_n$ є незалежними і відомі їх характеристичні функції $\alpha_{X_i}(t)$, то для випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ характеристична функція:

$$\alpha_X(t) = M\left(e^{itX}\right) = M\left(e^{it\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} M\left(e^{itx_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{X_i}(t)\,. \qquad (340)$$

6. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots X_n$ є незалежними, кожна із них має один і той самий закон розподілу, то характеристична функція для $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\alpha_Y(t) = \alpha_X^n(t)\,. \qquad (341)$$

Приклад 7. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу $N\,(0;\,1)$. Знайти характеристичну функцію для цього закону.

Розв’язання. Оскільки $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$, то

$$\alpha_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx = e^{-\frac{t^2}{2}}\,,$$

через те, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, де $z = x - i\,t$, $dx = dz$.

Отже, для нормованого нормального закону розподілу випадкової величини X характеристична функція

$$\alpha_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{342}$$

5.2. Центральна гранична теорема

Розглядається один із найпростіших варіантів цієї теореми.

Теорема. Нехай задано n незалежних випадкових величин X_1, X_2, … X_n, кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей із $M(X_i) = 0$, $\sigma(X) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|$, тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ наближатиметься до нормального.

! **Доведення.** Оскільки випадкові величини X_i мають один і той самий закон розподілу, то кожна із них має одну і ту ж характеристичну функцію $\alpha_x(t)$. Згідно з (341) маємо:

$$\alpha_Y(t) = \alpha_X^n(t).$$

Розвинувши $\alpha_Y(t)$ в ряд Маклорена в околі точки $t = 0$ і обмежившись при цьому трьома членами й залишковим членом в формі Лагранжа, запишемо:

$$\alpha_Y(t) = \left[\alpha_X(0) + \frac{\alpha'_X(0)}{1!}t + \frac{\alpha''_X(0)}{2!}t^2 + R_3(\theta t)\right]^n, \tag{343}$$

де $R_3(\theta t) = \dfrac{\alpha'''_X(\theta t)}{3!}t^2, \quad (0 < \theta < 1)$.

Із властивостей характеристичної функції випливає:
$\alpha_x(0) = 1$; $\alpha'_x(0) = iM(X) = 0$, оскільки $M(X) = 0$;
$\alpha''_x(0) = -M(X^2) = -\sigma^2$.
Тоді вираз (342) набирає такого вигляду:

$$\alpha_Y(t) = \left[1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + R_3(\theta t)\right]^n. \tag{344}$$

Оскільки $\alpha'''_X(\theta t) = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{i\theta t x} f(x)dx$ і при цьому

$$\left|\alpha'''_X(\theta t)\right| = \left|-i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{i\theta t x} f(x)dx\right| < 2\,|\nu_3|.$$

Це випливає з того, що

$$e^{it\theta x}=\cos\theta tx+i\sin\theta tx\ \rightarrow\left|e^{it\theta x}\right|=\left|\cos\theta tx+i\sin\theta tx\right|<2\,.$$

Уведемо випадкову величину $Z=\dfrac{Y}{\sigma\sqrt{n}}$.

Маємо: $D(Y)=D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=n\sigma^2$.

Використовуючи властивість характеристичної функції (339), дістаємо:

$$\alpha_Z(t)=\alpha_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\left[1-\frac{t^2}{2n}+R_3(\theta t)\right]^n, \qquad (345)$$

де

$$R_3(\theta t)<\frac{\nu_3}{3}\ \frac{t^3}{\sigma^3\ \sqrt{n^3}}. \qquad (346)$$

Прологарифмуємо вираз (345): $\ln\alpha_Z(t)=n\ln\left[1-\dfrac{t^2}{2n}+R_3(\theta t)\right]$. (347)

Використовуючи в (347) при $n\to\infty$ еквівалентність нескінченно малих $(\ln(1+\alpha)\approx\alpha)$, одержимо:

$$\ln\alpha_Z(t)=n\left(-\frac{t^2}{2n}+R_3(\theta t)\right)\rightarrow\ln\alpha_Z(t)=-\frac{t^2}{2}+nR_3(\theta t)\rightarrow$$

$$\rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_Z(t)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{t^2}{2}+nR_3(\theta t)\right)\ \rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_Z(t)=-\frac{t^2}{2}+\lim_{n\to\infty}nR_3(\theta t)\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}nR_3(\theta t)<\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{\nu_3\left|t_3\right|}{\sigma^3 n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\nu_3\left|t_3\right|}{\sigma^3\sqrt{n}}=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_Z(t)=-\frac{t^2}{2}\,.$$

Звідси випливає, що

$$\alpha_Z(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Таким чином, доведено, що характеристична функція випадкової величини Z при $n\to\infty$ дорівнює характеристичній функції нормованого нормального закону, а звідси випливає, що Z і пов'язана лінійною залежністю величина Y наближатимуться до нормального закону розподілу.

Приклад 8. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку [0; 0,12]. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Розв'язання.
Знаходимо числові характеристики для X_i: $M(X_i) = 0{,}06$; $D\,(X) = 0{,}1$. Тоді

$$M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot 0{,}06 = 6.$$

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$$

На підставі центральної граничної теореми маємо

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{20}}, \quad -\infty < y < \infty .$$

Центральна гранична теорема була вперше використана для доведення інтегральної теореми Муавра—Лапласа.

6. Теорема Муавра—Лапласа

У загальному випадку випадкові величини $X_1, X_2, \ldots X_n$, що розглядаються в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні закони розподілу.

Якщо X_i є дискретними і мають лише два значення: $P\,(X_i = 0) = q$, $P\,(X_i = 1) = p$, то приходимо до теореми Муавра—Лапласа, яка є найпростішим випадком центральної граничної теореми.

Якщо здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких імовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то для інтервалу $[\alpha; \beta)$ справедлива рівність:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{348}$$

Доведення. Нехай проводиться n незалежних експериментів, у кожному з яких випадкова подія A може здійснитися зі сталою ймовірністю p. Тоді $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — поява випадкової події в

n експериментах є випадковою величиною із числовими характеристиками:

$$M(Y) = np,\ D(Y) = npq,\ \sigma(Y) = \sqrt{npq}\ .$$

На підставі центральної граничної теореми розподіл випадкової величини Y зі зростанням n наближатиметься до нормального. Тому для обчислення ймовірності події $\alpha < Y < \beta$ використовується формула (261): $P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$, що і треба було довести.

Приклад 9. Завод виготовляє 80% виробів першого сорту. Навмання вибирають 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $n = 800$; $\alpha = 700$, $\beta = 620$.

Обчислимо: $np = 800 \cdot 0{,}8 = 640$; $\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 11{,}3$.

Згідно з (259) дістанемо:

$$P(600 < y < 680) = \Phi\left(\frac{680 - 640}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 640}{11{,}3}\right) = \Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{11{,}3}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) = 2\Phi\,(3{,}5) = 2 \cdot 0{,}4499841 = 0{,}999682.$$

Теоретичні запитання до теми ?

1. Як сформулювати в загальному вигляді закон великих чисел?
2. Сформулювати нерівність Чебишова.
3. Довести, що $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.
4. Сформулювати умови, які мають виконуватися для нерівності Чебишова.
5. Де використовується нерівність Чебишова?
6. Сформулювати теорему Чебишова.
7. Які умови мають виконуватися для доведення теореми Чебишова?
8. Записати нерівність Чебишова для теореми Чебишова.
9. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$.

10. Сформулювати теорему Бернуллі.
11. Записати нерівність Чебишова для теореми Бернуллі.
12. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|W(A)-p\right|<\varepsilon\right)=1$.
13. Дати визначення характеристичної функції для випадкової величини.
14. Чому дорівнює $\alpha_x(0)$?
15. Чому дорівнює $\alpha'_x(0)$?
16. Чому дорівнює $\alpha''_x(0)$?
17. Чому дорівнює $\alpha_Y(t)$, якщо $Y = ax + b$?
18. Чому дорівнює $\alpha_Y(t)$, якщо $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$?
19. Сформулювати центральну граничну теорему.
20. Довести, що для нормованого нормального закону розподілу $\alpha_x(t) = \ldots$.
21. Доведення центральної граничної теореми.
22. Використання центральної граничної теореми для доведення інтегральної теореми Муавра—Лапласа.

Приклади до теми

1. Імовірність появи випадкової події в одному експерименті є величиною сталою і дорівнює 0,3. Із якою імовірністю можна стверджувати, що відносна частота цієї події при 100 експериментах буде знаходитись у межах [0,2; 0,4].

Відповідь. 0,98.

2. Випадкова подія A може здійснитися при одному експерименті із імовірністю p. Експеримент повторили n раз. Яка ймовірність того, що при цьому виконується нерівність

$$np - 2\sqrt{npq} < m < np + 2\sqrt{npq}\ .$$

Відповідь. 0,9544.

3. Яке повинна мати значення величина ε у нерівності Чебишова, щоб $P(\left|X-a\right|<\varepsilon)\approx 0{,}99$, коли відомо, що $D(X) = 4$.

Відповідь. $\varepsilon = 20$.

4. Із якою надійністю середнє арифметичне вимірів певної величини відповідає істинному виміру цієї величини, якщо було здійснено 500 вимірювань із точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин — результатів вимірювання — не перевищують 0,3.

Відповідь. 0,94.

5. Скільки необхідно провести вимірів діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірів відрізнялося від істинного розміру

діаметра втулки не більше як 0,05 із надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірів) не перевищують 0,2.

Відповідь. $n = 800$.

6. Імовірність того, що за час t із ладу вийде один конденсатор, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що за час t із 100 конденсаторів із ладу вийде:

1) не менш як 28 конденсаторів;

2) від 14 до 26 конденсаторів?

Відповідь. 1) 0,98; 2) 0,9.

7. При відливанні відливок, із яких потім виготовляють на верстатах деталі, одержують у середньому 20% браку. Скільки необхідно запланувати відливок, щоб із імовірністю не меншою за 0,95 була забезпечена програма випуску деталей, для виготовлення яких необхідно 50 бездефектних відливок.

Відповідь. $n = 305$.

8. Здійснюється вибіркове обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,9876 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилялось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин.

Відповідь. $n = 4776$.

9. Випадкова величина $\overline{X}$ — середнє арифметичне 10000 незалежних випадкових велечин, що мають один і той самий закон розподілу, і середнє квадратичне відхилення кожної із них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини $\overline{X}$ від його математичного сподівання можна очікувати із імовірністю 0,9544?

Відповідь. 0,04.

10. Верстат із програмним управлінням виготовляє за робочу зміну 900 виробів, із яких в середньому 1% складає брак. Знайти наближено ймовірність того, що за зміну буде виготовлено не менше 810 доброякісних виробів, якщо вони виявляються доброякісними незалежно один від одного.

Відповідь. 0,99865.

11. Кожна із 40 незалежних випадкових величин має гамма-розподіл із значенями параметрів $\alpha = 2$, $\lambda = 10$. На підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей записати наближено закон розподілу для випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{40} X_i$.

Відповідь. $a = 8$; $\sigma \approx 0{,}9$; $f(x) = \dfrac{1}{0{,}9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{1{,}62}}, \quad -\infty < x < \infty$.

12. У касі певного закладу в наявності є 4000 гривень. У черзі знаходиться $n = 30$ робітників. Сума X, яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною із математичним сподіванням, рівним 200 грн. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 60$ грн. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.

Відповідь. $M(Y) = n\,M(X) = 30 \cdot 200 = 6000$ грн.;

$$\sigma(Y) = \sqrt{30}\ 60 \approx 5{,}48 \cdot 60 \approx 328{,}8 \text{ грн.};$$

$$P(X > 4000) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{4000 - 6000}{328{,}8}\right) = 1 \text{. Не вистачить.}$$

13. Зберігається умова задачі 12, тільки в черзі стоїть $n = 15$ робітників і сума X, яку повинен одержати кожний із них, є випадковою величиною із значеннями $M(X) = 150$ грн., $\sigma(X) = 60$ грн. Яка ймовірність того, що суми вистачить усім людям?

Відповідь. $M(Y) = 2250$ грн.; $\sigma(Y) = \sqrt{15} \cdot 60 \approx 232{,}4$ грн.;

$$P(X > 4000) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{4000 - 2250}{232{,}4}\right) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0 .$$

Усім робітникам вистачить суми, що є в касі.

14. Залізничний состав складається із 30 вагонів. Маса кожного з них є випадковою величиною X із математичним сподіванням $M(X) = 400$ т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 20$ т. Локомотив може нести масу не більшу за 12100 т. Якщо маса составу перевищує допустиму, то необхідно причеплювати другий локомотив. Знайти ймовірність того, що одного локомотива не досить для перевезення составу.

Відповідь. $G = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — маса составу.

$$M_G = n\,M(X) = 30 \cdot 400 = 12000 \text{ т}; \ \sigma(Y) = \sqrt{30}\,\sigma_X \approx 5{,}5 \cdot 20 = 110 \text{ т};$$

$$P(G > 14500) \approx 0{,}1814 .$$

15. Маємо 100 ідентичних елементів, що складають певний технічний комплекс. Час безвідмовної роботи кожного i-го елементу є випадковою величиною T_i, що має експоненціальний закон розподілу із параметром $\lambda = 40$ і однаковим для всіх елементів. Випадкові величини $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{100}$ є незалежними між собою. У разі відмови в роботі i-го елемента миттєво здійснюється переміщення на $i + 1$-й справний елемент. Загальний час безвідмовної роботи комплексу дорівнює сумі T_i, а саме $T = \sum_{i=1}^{100} T_i$.

Знайти наближено ймовірність того, що комплекс безвідмовно пропрацює не менш як 20 год.

Відповідь:

$$P(T>20)=0{,}5-\Phi\left(\frac{80-100}{\sqrt{100}}\right)\approx 0{,}5+\Phi\left(\frac{20}{10}\right)=0{,}5+\Phi\,(2)=0{,}9772\,.$$

16. Провести апроксимацію нормального закону із параметрами a, σ за допомогою суми n незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n, кожна із яких має рівномірний закон розподілу на проміжку [0; 1]

Відповідь. $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$; $M(Y)=\frac{n}{2}$; $D\,(Y_n)=\frac{n}{12}$; $X=kY_n+b$

$$\begin{cases} a=k\dfrac{n}{2}+b \\ \sigma^2=k^2\dfrac{n}{12} \end{cases} \to k=\frac{\sqrt{12}\sigma}{n}\,;\quad b=a-\sigma\sqrt{3}\,n\,.$$

17. Верстат-автомат виготовляє за робочу зміну n = 1000 виробів, із яких брак у середньому становить 5%. На скільки доброякісних виробів k має бути розрахований бункер для доброякісних виробів, щоб імовірність його переповнення за зміну не перевищувала 0,001.

Відповідь.

$$P(Y>k)\approx 1-0{,}001=0{,}999\to\Phi\left(\frac{k-956}{6{,}9}\right)\approx 0{,}499\to k\approx 772.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е. С.*, *Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерное приложение. — М.: Наука, 1988.
2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1961.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУССА $\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3478	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2813	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2293	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1646	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1107
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0978	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0525	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0279	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0164	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0118	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0014	0014	0013	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	000

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

X	Φ (*x*)	*X*	Φ (*x*)	*X*	Φ (*x*)	*X*	Φ (*x*)	*X*	Φ (*x*)
00	0.0000	0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.02	0.4783
01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3448	1.51	0.4345	2.04	0.4793
02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.06	0.4803
03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.08	0.4812
04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.10	0.4821
05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	L55	0.4394	2.12	0.4830
06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.14	0.4838
07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.16	0.4846
08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.18	0.4854
09	00359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.20	0.4861
10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.22	0.4868
11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.24	0.4875
12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.26	0.4881
13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	03708	1.63	0.4484	2.28	0.4887
14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.30	0.4893
15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.32	0.4898
16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.34	0.4904
17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.36	0.4909
18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.38	0.4913
19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.40	0.4918
20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.42	0.4922
21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.44	0.4927
22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3883	1.72	0.4573	2.46	0.4931
23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3807	1.73	0.4582	2.48	0.4934
24	0.0948	0.74	0.2703	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.50	0.4938
25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.52	0.4941
26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.54	0.4945

Закінчення дод. 2

X	Ф (*x*)	*X*	Ф (*x*)	*X*	Ф (*x*)	*X*	Ф (*x*)	*X*	Ф (*x*)
27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.56	0.4948
28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.58	0.4951
29	0(1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.60	0.4953
30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2-62	0.4956
31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.64	0.4959
32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.66	0.4961
33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.68	0.4963
34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.70	0.4965
35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.72	0.4967
36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.74	0.4969
37	0.1443	0.87	0.3076	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.76	0.4971
38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.78	0.4973
39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.80	0.4974
40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.82	0.4976
41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.84	0.4977
42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.86	0.4979
43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.88	0.4980
44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.90	0.4981
45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.92	0.4982
46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.94	0,4985
47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.96	0.4985
0.48	0.1884	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.98	0.4986
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	3.00	0.49865
								3.20	0.49931
								3.40	0.49966
								3.60	0.499841
								3.62	0.499928
								4.00	0.499468
								4.50	0.499997
								5.00	0.499997

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $P\left(k,\ a\right)=\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$

	a								
K	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.065310	0.548812	0.496585	0.449329	0.406570
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287	347610	359463	365913
2	004524	016375	033337	353626	065816	098786	121663	143785	164661
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757	028388	038343	049398
4	000004	000055	000250	000715	001580	002764	004968	007669	011115
5		000002	000015	000057	000158	000356	000696	001227	002001
6			000001	000004	000013	000036	000081	000164	000300
7					000001	000003	000008	000019	000039
8							000001	000002	000004

	a								
K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.367879	0.135335	0.49787	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	367879	270671	149361	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	183940	270671	224042	146525	084224	044618	022341	010735	004998
3	061313	180447	224042	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	015328	090224	168031	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	003066	036089	100819	156293	175467	160623	127717	091604	060727
6	000511	012030	050409	104196	146223	160623	149003	122138	091090
7	000073	003437	021604	059540	104445	137677	149003	139587	117126
8	000009	000859	008102	029770	065278	103258	130377	138587	131756
9	000001	000191	002701	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10		000038	000810	005292	018138	041303	070983	099262	118580
11		000007	000221	001295	008242	022529	045171	072190	097020
12		000001	000055	000642	003434	011264	026350	048127	072765
13			000013	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14			000003	000056	000472	002228	007094	016924	Q32384
15			000001	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16				000004	000049	000334	001448	004513	010930
17				000001	000014	000118	000596	002124	005786
18					000004	000039	000232	000944	002893
19					000001	000012	000085	000397	001370
20						000004	000030	000159	000617
21						000001	000010	000061	000264
22							000003	000022	000108
23							000001	000008	000042
24								000003	000016
25								000001	000006
26									000002
27									000001

ЗМІСТ