

Note del corso di Fisica dei Continui

trascritte da
Luca Colombo Gomez

AA 2019/2020

Indice

0.1	Potenziale di Helmholtz F (o energia libera di Helmholtz)	4
0.2	Entalpia H	5
0.3	Potenziale di Gibbs G (o energia libera di Gibbs)	6
0.4	Relazioni di Maxwell	7
0.5	Calori specifici	8
0.6	Processi adiabatici	9
1	Generalità sui continui	10
2	Derivata sostanziale di integrali	12
2.1	Derivata sostanziale degli integrali di volume	12
2.2	Equazione di continuità - condizione analitica di incomprimibilità	13
2.3	Leggi in forma integrale e locale	14
2.4	Derivata sostanziale degli integrali di linea	15
3	Sforzi; fluidostatica: isotropia e continuità della pressione	16
3.1	Tensore degli sforzi	16
3.2	Sforzi (stresses)	16
3.2.1	Sforzo normale e sforzo tangenziale	16
3.3	Fluidostatica	16
3.3.1	Isotropia della pressione in equilibrio	16
3.3.2	Continuità di p all'interfaccia	16
3.3.3	Tensione superficiale	16
4	Equazione di Eulero	17
4.1	Appendice: teorema della divergenza per casi particolari	17
5	Fluidostatica: equilibrio meccanico, equilibrio e stabilità dell'atmosfera	18
5.1	Ritorno alla fluidostatica	18
5.2	Equilibrio dell'atmosfera - stabilità dell'equilibrio	18
5.2.1	Equilibrio meccanico + termico (atmosfera isoterma secca)	18
5.2.2	Atmosfera isoentropica (secca)	18
6	Fluidostatica di fluidi incomprimibili	19
6.1	Barometro di Torricelli	19
6.2	Vasi comunicanti - fluidi immiscibili	19
6.3	Pressa idraulica	19
6.4	Forza di Archimede	19
6.5	Centro di spinta ed equilibrio	19
6.6	Isotropia	19

7	Fluidodinamica di fluidi perfetti; flusso di impulso e di energia	20
7.1	Linee di corrente (Stream lines)	20
7.2	Flusso di quantità di moto	20
7.3	Forza su un tubo a gomito	20
7.4	Flusso di energia	20
7.4.1	Flusso di energia in campo esterno	20
8	Flusso stazionario: equazione di bernoulli e applicazioni	21
8.1	Equazione di Bernoulli	21
8.1.1	Fluido incompressibile	21
8.1.2	Fluido reale	21
8.2	Teorema di Torricelli	21
8.2.1	Tubo di Venturi	21
8.2.2	Cavitazione	21
8.2.3	Tubo di Pitot - sistema Pitot-statico	21
8.2.4	Sifone	21
8.2.5	Portanza	21
8.2.6	Volo aereo	21
9	Teorema di Kelvin; flusso potenziale	22
9.1	Teorema di Kelvin - conservazione della circolazione	22
9.2	Flusso potenziale	23
9.2.1	Flusso potenziale o irrotazionale	23
9.2.2	Flusso attorno ad un ostacolo	23
9.3	Condizione di incompressibilità - una prospettiva fisica	23
9.3.1	Flusso stazionario	23
9.3.2	Flusso non stazionario	23
9.4	Forza di resistenza nel flusso potenziale oltre a un corpo	23
10	Onde di gravità	24
10.1	Condizioni cinematiche generali	24
10.1.1	Fluidi perfetti	24
10.2	Condizioni dinamiche generali	24
10.2.1	Fluidi perfetti	24
10.2.2	Flusso potenziale	24
10.3	Linearizzazione delle condizioni all'interfaccia	24
10.4	Onde di gravità in un bacino di profondità infinita	24
10.5	Onde di gravità in un bacino di profondità finita	24
10.6	Onde di gravità tra due fluidi limitati in altezza	24
11	Trasporto di energia in onde di gravità; appendici	25
11.1	Appendice - velocità di fase e di gruppo (momento minimo)	25
11.2	Appendice - Vademecum minimo di funzioni iperboliche	25
12	Fluidi reali: tensori dei gradienti delle velocità e degli sforzi, equazione di Navier-Stokes	26
12.1	Tensore dei gradienti delle velocità - decomposizione e significato geometrico	26
12.2	Fluidi reali (viscosi) - relazione di Cauchy	26
12.3	Tensore degli sforzi Newtoniano - equazione di Navier-Stokes	26
13	Equazione di Navier-Stokes in coordinate non cartesiane	27
13.1	Coordinate cilindriche	27
13.2	Coordinate sferiche	27

14	Momento angolare e considerazioni sulla simmetria del tensore degli sforzi	28
14.1	Equazioni cardinali della dinamica - momento angolare	28
14.2	Momento delle forze esterne	28
14.3	Momento angolare orbitale e di spin	28
14.4	Pressione in un fluido in moto - pressione meccanica, termodinamica ed equilibrio locale . . .	28
14.5	Flusso di quantità di moto - tensore densità di flusso di qdm	28
14.6	Dissipazione nel fluido viscoso	28
15	Esempi di flusso viscoso	29
15.1	Flusso di Poiseuille	29
15.1.1	Geometria piana	29
15.1.2	Geometria cilindrica - flusso in condotta	29
15.2	Flusso di Couette	29
15.2.1	Geometria piana	29
15.2.2	Geometria cilindrica	29
16	Leggi di similarità e numeri adimensionati	30
16.1	Similitudine geometrica	30
16.2	Similitudine cinematica	30
16.3	Problemi simili	30
16.3.1	Problemi dinamicamente simili	30
16.3.2	Numero di Froude	30
16.3.3	Numero di Strouhal	30
17	Problema di Stokes per il moto di una sfera in un fluido viscoso	31
17.1	Confronto con sfera in fluido perfetto (moto potenziale)	31
17.2	Campo di pressione	31
17.3	Forza applicata sulla sfera	31
17.4	Perfezionamento della formula di Stokes	31
17.4.1	Formula di Oseen e coefficiente di penetrazione	31
18	Moti oscillatori in fluidi viscosi	32
18.1	Fluido di profondità infinita su piano oscillante	32
18.2	Fluido limitato tra due piani	32
18.3	Strato di fluido con pelo libero	32
18.4	Corpo generico oscillante in fluido viscoso	32
19	Smorzamento di onde di gravità; correnti superficiali: Ekman layer	33
19.1	Ekman layer	33

Memorie della termodinamica

Il primo principio della termodinamica, visto come legge di bilancio energetico, parte dall'energia interna U di un sistema, la cui equazione dU è in generale scrivibile come

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

(con μ potenziale chimico e N numero molare; se ci sono più componenti scriviamo $\sum_i \mu_i dN_i$, ma la sostanza è la stessa) e allora per un sistema termostatoato isolato che non scambia altro che calore ($dV=0$, $dN=0$)

$$\delta Q = dU = TdS \rightarrow dS = \frac{\delta Q}{T}$$

sia la trasformazione reversibile o meno.

È utile osservare di U , che essa è funzione di S, V, N , tutte grandezze estensive, ed è essa stessa estensiva, vale a dire

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda \cdot U(S, V, N) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

ovvero U è una funzione omogenea di grado 1. Per le funzioni omogenee di grado n si ha $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$, o anche, data $f(x_1, \dots, x_m)$

$$\sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_m) = n \cdot f(x_1, \dots, x_m) \quad (2)$$

che, applicato a $U(S, V, N)$, da

$$U(S, V, N) = \frac{\partial U}{\partial S} S + \frac{\partial U}{\partial V} V + \frac{\partial U}{\partial N} N \quad (3)$$

Da $dU = TdS - pdV + \mu dN$ si ottengono le equazioni di stato

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}; \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V}; \quad \mu = \frac{\partial U}{\partial N} \quad (4)$$

e per confronto con la relazione di Eulero si ha

$$U(S, V, N) = TS - pV + \mu N \quad (5)$$

0.1 Potenziale di Helmholtz F (o energia libera di Helmholtz)

F da una misura del lavoro estraibile da un sistema chiuso a T, V costanti (vediamo sotto). Si ottiene come trasformazione di Legendre di U rispetto a S :

$$F \doteq U - \frac{\partial U}{\partial S} S = U - TS \quad (6)$$

e si ha, da $U(S, V, N)$, una funzione $F = F(\frac{\partial U}{\partial S} \rightarrow T, V, N)$

Inoltre

$$F = U - TS = TS - pV + \mu N - TS = -pV + \mu N \quad (7a)$$

$$dF = dU - TdS - SdT = TdS - pdV + \mu dN - TdS - SdT = -SdT - pdV + \mu dN \quad (7b)$$

Possiamo dunque dimostrare l'affermazione iniziale. Preso un sistema S formato da costituenti in contatto termico con un termostato R a temperatura T^R (reservoir infinito di calore), il lavoro massimo estraibile dal sistema è

$$dL^{max} = -dF^S \quad (8)$$

Infatti

$$dL = -dU^S - dU^R \underbrace{=}_{\text{R termostato}} -dU^S - T^R dS^R$$

Poiché il sistema non scambia calore con l'esterno, l'entropia non decresce:

$$\begin{aligned} dS^S + dS^R &\geq 0 \implies -dS^R \leq dS^S \\ \implies dL = -dU^S - T^R dS^R &\leq -dU^S + T^R dS^S = -d(U^S - T^R S^S) \underbrace{=}_{T^R=T^S(\text{contatto termico})} -d(U^S - T^S S^S) \end{aligned}$$

cioè $dL \leq -dF^S$, il cui massimo appunto è $dL^{max} = -dF^S$ (caso di trasformazione reversibile)

Osservazioni:

- ne consegue che lo stato di equilibrio del sistema termostato è quello che minimizza l'energia libera di Helmholtz; (in equivalente è minima U, $dU = dU^S + dU^R = 0 \implies dF = 0$, FF stazionaria)
- F (come tutti i potenziali termodinamici) è definito all'equilibrio - altrimenti si deve sopporre un insieme di sottosistemi in equilibrio e isotermini;
- esempio di lavoro - energia libera è il lavoro molare di estrazione di un metallo, che è pari alla variazione di F in una mole di e^- nel passare dal metallo all'esterno

0.2 Entalpia H

H da una misura del lavoro estraibile da un sistema chiuso a p costante.

Si ottiene come trasformazione di Legendre di U rispetto a V:

$$H \doteq U - \frac{\partial U}{\partial V} V = U + pV \quad (9)$$

e si ha, da $U(S, V, N)$, una funzione $H = H(S, \frac{\partial U}{\partial V} \rightarrow p, N)$

Inoltre

$$\begin{aligned} H &= U + pV = TS - pV + \mu N + pV = TS + \mu N \\ dH &= dU + pdV + Vdp = TdS - pdV + \mu dN + pdV + Vdp = TdS + Vdp + \mu dN \end{aligned} \quad (10)$$

Se il sistema è chiuso (non scambia massa) e mantenuto a p costante, $dH = TdS = \delta Q_{rev}$ il calore assorbito in una trasformazione reversibile è pari alla variazione di H.

Nota: è questo il caso delle trasformazioni fatte a T costante; infatti p è costante, i potenziali chimici sono uguali¹, e il numero di moli (la massa) nel complesso è conservato ($dN^{(1)} + dN^{(2)} = 0 \implies Vdp + \sum_i \mu^{(i)} dN^{(i)} = 0$, da cui vediamo che il calore latente di trasformazione è la differenza di entalpia per unità di massa tra le fasi.

Similmente al caso dell'energia libera, si può dimostrare che preso un sistema chiuso S di costituenti mantenuti a p costante da un reservoir di pressione a $p = p^R$, il lavoro massimo estraibile da S è

$$dL^{max} = -dH^S$$

e lo stato di equilibrio di un sistema mantenuto a p costante di un reservoir di pressione è quello che minimizza l'entalpia.

Nota: Landau chiama $w \doteq H/M$ entalpia per unità di massa ($w = \varepsilon + pv = \varepsilon + p/\rho$);
 $v \doteq V/M = 1/\rho$ volume specifico

¹ce lo dice Josiah Willard Gibbs alla pagina seguente

0.3 Potenziale di Gibbs G (o energia libera di Gibbs)

G da una misura del lavoro estraibile da un sistema chiuso a T, p costanti. Si ottiene come trasformazione di Legendre di U rispetto a S e V:

$$G \doteq U - \frac{\partial U}{\partial S} S - \frac{\partial U}{\partial V} V = U - TS + pV$$

e si ha, da $U(S, V, N)$, una funzione $H = H(\frac{\partial U}{\partial S} \rightarrow T, \frac{\partial U}{\partial V} \rightarrow p, N)$

Inoltre

$$G = U - TS + pV = TS - pV + \mu N - TS + pV = \mu N \quad (11)$$

($\mu = G/N$ potenziale di Gibbs molare coincide con potenziale chimico)

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp = TdS - pdV + \mu dN - TdS - SdT + pdV + Vdp = -SdT + Vdp + \mu dN \quad (12)$$

Si può dimostrare che preso un sistema chiuso S i cui costituenti sono mantenuti a T e p costanti da reservoir di temperatura (termostato) a T^R e di pressione a p^R , il lavoro massimo estraibile da S è

$$dL^{max} \leq -dG^S$$

e lo stato di equilibrio di un sistema a T e p costanti grazie a reservoir ideali di T, p è quello che minimizza il potenziale di Gibbs.

Nota: dato un sistema a due fasi in equilibrio, se una tra p e T è fissata, lo è anche l'altra, e $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$. Ciò perchè

$$G = \mu^{(1)} dN^{(1)} + \mu^{(2)} dN^{(2)}$$

e

$$dG = \mu^{(1)} dN^{(1)} + \mu^{(2)} dN^{(2)}$$

ma la massa complessiva non varia $\implies N^{(1)} + N^{(2)} = cost \iff dN^{(1)} + dN^{(2)} = 0$

$$\implies dG = \mu^{(1)} dN^{(1)} - \mu^{(2)} dN^{(1)} = (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) dN^{(1)}$$

$$\text{Equilibrio} \iff dG = 0 \implies \mu^{(1)}(p, T) = \mu^{(2)}(p, T)$$

Questa, essendo i $\mu^{(i)}$ rappresentativi di fasi diverse e di funzioni diverse, rappresenta un'espressione implicita della relazione tra p e T; se p fissata \implies determinata anche T.

Nota: Landau chiama $\phi \doteq G/M$ energia libera di Gibbs per unità di massa

Poiché

$$G = \sum_i \mu^{(i)} N^{(i)} \implies dG = \sum_i \mu^{(i)} dN^{(i)} + \sum_i N^{(i)} d\mu^{(i)}$$

ma anche da

$$G = U - TS + pV \implies dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu^{(i)} dN^{(i)}$$

Si ottiene l'equazione di Gibbs - Duhem

$$\sum_i N^{(i)} d\mu^{(i)} = -SdT + Vdp \quad (13)$$

Si può anche derivare l'equazione di Clausius - Clapeyron, che descrive la pendenza della curva di equilibrio dp/dT tra due fasi di una sostanza.

Le due fasi in equilibrio, 1 e 2, hanno lo stesso potenziale di Gibbs:

$$\begin{aligned} G_1(T, p) = G_2(T, p) &\implies dG_1(p, T) = dG_2(p, T) \\ &\implies \frac{\partial G_1}{\partial p} dp + \frac{\partial G_1}{\partial T} dT = \frac{\partial G_2}{\partial p} dp + \frac{\partial G_2}{\partial T} dT \quad (14) \end{aligned}$$

Da $dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu^{(i)} dN^{(i)}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial T} = -S \\ \frac{\partial G}{\partial p} = V \end{cases}$$

$$V_1 dp - S_1 dT = V_2 dp - S_2 dT \implies \frac{dp}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} \quad (15)$$

A T costante

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 \delta Q = \frac{\lambda M}{T} \quad (16)$$

Con λ calore latente di trasformazione per unità di massa, M =massa. Detto $v = V/M$ volume specifico

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(V_2 - V_1)} \quad (17)$$

0.4 Relazioni di Maxwell

Lavoreremo tipicamente in sistemi senza scambio di massa, ignorando quindi il termine $\sum_i \mu_i dN_i$

- Dal primo principio della termodinamica

$$U = U(S, V)$$

$$dU = TdS - pdV \implies dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial S}\bigg|_{V=cost}}_T dS + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_{S=cost}}_{-p} dV$$

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}\bigg|_{V=cost}; \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_{S=cost}$$

Per il teorema di Schwarz, vale $\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial S}$ quindi

$$\frac{\partial T}{\partial V}\bigg|_{S=cost} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S}\bigg|_V \right)_S = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_S \right)_V = -\frac{\partial p}{\partial S}\bigg|_{V=cost}$$

$$\frac{\partial T}{\partial V}\bigg|_{S=cost} = -\frac{\partial p}{\partial S}\bigg|_{V=cost} \quad (18)$$

- Dal differenziale dell'entalpia

$$H = H(S, p)$$

$$dH = TdS + Vdp \implies dH = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial S}\bigg|_{p=cost}}_T dS + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p}\bigg|_{S=cost}}_V dp$$

$$T = \frac{\partial H}{\partial S}\bigg|_{p=cost}; \quad V = \frac{\partial H}{\partial p}\bigg|_{S=cost}$$

Per il teorema di Schwarz, uguagliando le due derivate parziali miste

$$\frac{\partial T}{\partial p}\bigg|_{S=cost} = \frac{\partial V}{\partial S}\bigg|_{p=cost} \quad (19)$$

- Dal differenziale del potenziale di Helmholtz

$$F = F(T, V)$$

$$dF = -SdT - pdV \implies dF = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial T}\bigg|_{V=cost}}_{-S} dT + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial V}\bigg|_{T=cost}}_{-p} dV$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}\bigg|_{V=cost}; \quad p = -\frac{\partial F}{\partial V}\bigg|_{T=cost}$$

Per il teorema di Schwarz, uguagliando le due derivate parziali miste

$$\frac{\partial S}{\partial V}\bigg|_{T=cost} = \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_{V=cost} \quad (20)$$

- Dal differenziale del potenziale di Gibbs

$$G = G(T, p)$$

$$dG = -SdT + Vdp \implies dG = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial T}\bigg|_{p=cost}}_{-S} dT + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial p}\bigg|_{T=cost}}_V dp$$

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}\bigg|_{p=cost}; \quad V = \frac{\partial G}{\partial p}\bigg|_{S=cost}$$

Per il teorema di Schwarz, uguagliando le due derivate parziali miste

$$\frac{\partial S}{\partial p}\bigg|_{T=cost} = -\frac{\partial V}{\partial T}\bigg|_{p=cost} \quad (21)$$

0.5 Calori specifici

la capacità termica C di una porzione di materia M , è il rapporto tra calore δQ assorbito e aumento di temperatura dT . La capacità termica per unità di massa è detta calore specifico $C \doteq \delta Q/dT$

$$c \doteq \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{dT}; \quad \text{oppure per mole} \quad C \doteq \frac{1}{N} \frac{\delta Q}{dT}$$

Questo valore dipende dal tipo di processo in cui avviene lo scambio di δQ , ovvero a pressione o volume costante

$$c_p = \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{dT}\bigg|_{p=cost} \quad \left(C_p = \frac{1}{N} \frac{\delta Q}{dT}\bigg|_p \right); \quad c_v = \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{dT}\bigg|_{V=cost} \quad \left(C_V = \frac{1}{N} \frac{\delta Q}{dT}\bigg|_V \right)$$

- Dal 1° principio della termodinamica $dU = \delta Q - pd$; per una trasformazione quasi-statica a V costante $dU = \delta Q$

$$\implies c_V = \frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_V = \frac{1}{M} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\bigg|_V$$

avendo $\varepsilon \doteq U/M$ energia interna per unità di massa

- lavorando a p costante sfruttiamo $dH = TdS + Vdp$, e per trasformazione quasi-statica, reversibile, $dH = TdS = \delta Q$

$$\implies c_p = \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{\partial T} \Big|_p = \frac{T}{M} \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_p = T \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_p$$

con $s \doteq S/M$

- Per gas perfetti, $pV = NRT$; $H = U + pV = U + NRT$ derivando rispetto a T

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} &= \frac{\partial U}{\partial T} + NR \\ \implies \frac{1}{N} \frac{\partial H}{\partial T} &= \frac{1}{N} \frac{\partial U}{\partial T} + R \\ C_p &= C_V + R \end{aligned}$$

0.6 Processi adiabatici

Una trasformazione è adiabatica quando avviene senza scambio di calore.

Poiché $\delta Q = 0 \implies dU + pdV = 0$

$$NC_V dT + \frac{NRT}{V} dV = 0$$

dividendo per $NC_V T$

$$\implies \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0 \implies d(\log T) + \frac{R}{C_V} d(\log V) = 0$$

$$\implies d\left(\log T + \log V^{\frac{R}{C_V}}\right) = 0$$

$$\implies \log(TV^{R/C_V}) = \text{costante} \implies TV^{R/C_V} = \text{costante}$$

Definito $\gamma \doteq \frac{C_P}{C_V}$ si ha

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \implies \frac{R}{C_V} = \gamma - 1$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \tag{22}$$

che è l'equazione della trasformazione adiabatica.

Usando $pV = NRT$ si può scrivere equivalentemente

$$T \propto pV \implies pV^{C_P/C_V}$$

$$pV^\gamma = \text{costante} \tag{23}$$

$$V \propto Tp^{-1} \implies T \left(\frac{T}{p}\right)^{\gamma-1} = T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{costante} \implies Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$Tp^{\frac{1}{\gamma-1}} = \text{costante} \tag{24}$$

Capitolo 1

Generalità sui continui

Particella o masserella fluida: porzione di mezzo continuo di dimensione lineare infinitesima.

Continui: mezzo materiale in cui, una volta stabilita la massima lunghezza d^1 che si possa trattare come infinitesima, presa una regione di diametro d , il numero di costituenti microscopici in essa contenuti è grande abbastanza da risultare statisticamente significativo.

In un solido o liquidi, possiamo stimare che le distanze intermolecolari/interatomiche siano dell'ordine di $1 - 10 \text{ \AA}$, cioè $0.1 - 1 \text{ nm}$; in un cubo di lato $1 \mu\text{m}$ ci saranno perciò $> 10^9$ costituenti elementari. $1 \mu\text{m}$ è perciò una lunghezza

- infinitesima se studiamo un fluido macroscopico, o al più oggetti nel fluido come granuli ($\sim 10 - 100 \mu\text{m}$); OK trattazione come continuo.
- NON infinitesima per un nanotecnologo, che ha a che fare con scale $\leq 1 \mu\text{m}$; NON va bene l'ipotesi di continuo.

Per un gaso come l'aria, una mole, cioè $\sim 10^{23}$ particelle, occupa ≈ 22 litri in condizioni normali ($1 \text{ atm} - 0^\circ\text{C}$), cioè un cubo di $\sim 0.28 \text{ m}$ di spigolo $\sim 10^5 \mu\text{m}$; nel cubo di $\sim 1 \mu\text{m}^3$ avremo $10^{23}/10^{15} = 10^8$ particelle, ancora un numero statisticamente sufficiente; ma nella parte più alta dell'atmosfera terrestre ($> 100 \text{ km}$), con pressioni di un ordine di grandezza inferiori, la statistica non è più plausibile e non siamo in regime di continuo.

Come studiare un fluido? Due punti di vista:

- Euleriano: osservo la variazione temporale delle grandezze di interesse in un punto \bar{x} fissato
- Lagrangiano: seguo una particella fluida (= un punto materiale) nella sua evoluzione, nel suo moto che quindi è in una $\bar{x}(t)$

Le grandezze che osservo sono quindi grandezze lagrangiane $F(\bar{x}(t), t)$ che dipende da t esplicitamente e implicitamente attraverso $\bar{x}(t)$

Data $F(\bar{x}, t)$ grandezza estensiva per unità di massa (udm). Per consolidare la sua derivata temporale seguendo la particella fluida che a t si trova in $\bar{x}(t)$ in moto, dobbiamo considerare che F dipende dal tempo sia esplicitamente che attraverso $\bar{x}(t)$, cioè $F = F(\bar{x}, t)$, quindi la derivata è la derivata di funzione composta a più variabili e si indica come

$$\frac{D}{Dt} = \text{DERIVATA SOSTANZIALE o MATERIALE o CONVETTIVA.}$$

Per la regola delle derivate di funzione composta

$$\frac{D}{Dt} F(\bar{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} F(\bar{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\frac{\partial F(\bar{x}, t)}{\partial x_i}}_{(\text{grad} F)_i} \underbrace{\frac{dx_i(t)}{dt}}_{v_i(\bar{x}, t)}$$

¹Diametro = distanza massima tra due punti del volume

$$\frac{D}{Dt}F(\bar{x}(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{v}(\bar{x}, t) \cdot \bar{F}(\bar{x}, t) \quad (1.1)$$

e questa gode delle proprietà di tutte le derivate ordinarie; per esempio la variazione DF della F seguendo il continuo nel suo moto naturale è

$$DF(\bar{x}, t) = F(\bar{x}(t + dt), t + dt) - F(\bar{x}(t), t) = \frac{D}{Dt}F(\bar{x}(t), t)dt \quad (1.2)$$

al primo ordine (relazione tra differenziali e derivata sostanziale)

Dim: $F(\bar{x}(t), t) = F(g(t))$ con $g(t) = g(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \frac{d}{dt}g(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, 1 \right) = (v_1, v_2, v_3, 1) \\ \implies \frac{d}{dt}F(g(t)) &= \frac{\partial F}{\partial g_1} \dot{g}_1 + \frac{\partial F}{\partial g_2} \dot{g}_2 + \frac{\partial F}{\partial g_3} \dot{g}_3 + \frac{\partial F}{\partial g_4} \dot{g}_4 \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad} \bar{F}(\bar{x}, t) \end{aligned}$$

Si tratta di una derivata fatta seguendo il moto della particella di continuo

Capitolo 2

Derivata sostanziale di integrali

2.1 Derivata sostanziale degli integrali di volume

Dato un continuo e presa una regione $R(t)$ che al tempo t è occupata da parte di questo continuo, consideriamo una grandezza estensiva che prende il valore $\mathbb{F}(t)$ sul volume $R(t)$; la grandezza per unità di volume associata a $\mathbb{F}(t)$ sia chiamata $F(\bar{x}(t), t)$, ovvero vale

$$\mathbb{F}(t) = \int_{R(t)} F(\bar{x}(t), t) d^3x \quad (2.1)$$

$\mathbb{F}(t)$ dipende dal tempo sia esplicitamente, sia implicitamente perché seguendo il continuo nel suo moto naturale, $R(t)$ evolve nel tempo la derivata temporale di $\mathbb{F}(t)$ è una derivata sostanziale. Si dimostra che

$$\frac{D}{Dt} \mathbb{F}(t) = \int_{R(t)} \left[\frac{D}{Dt} F(\bar{x}(t), t) + F(\bar{x}(t), t) \cdot \text{div} \bar{v}(\bar{x}(t), t) \right] d^3x = \int_{R(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} F(\bar{x}(t), t) + \text{div} (F(\bar{x}, t) \cdot \bar{v}(\bar{x}, t)) \right] d^3x \quad (2.2)$$

Dim: per definizione di derivata e di $\mathbb{F}(t)$

$$\frac{D\mathbb{F}(t)}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{R(t+\Delta t)} F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t) d^3x - \int_{R(t)} F(\bar{x}(t), t) d^3x \right]$$

Detto $\bar{x}' \doteq \bar{x}(t+\Delta t)$, al primo ordine in t si può scrivere $\bar{x}' = \bar{x}'(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{v}\Delta t$.

Rielaboriamo dunque il primo integrale fatto a $t+\Delta t$ su $R(t+\Delta t)$:

$$\int_{R(t+\Delta t)} F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t) d^3x = \int_{R'} F(\bar{x}', t+\Delta t) d^3x' = \int_R F(\bar{x}'(\bar{x}), t+\Delta t) |\mathbf{J}(x'|x)| d^3x$$

avendo usato il teorema del cambio di variabile per fare il cambio $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$, ed essendo $\mathbf{J}(x'|x)$ Jacobiano della trasformazione, che si può elaborare sviluppando al I ordine \bar{x}' .

$$|\mathbf{J}(x'|x)| = \det \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right) = \det \left(\delta_{ij} + \Delta t \frac{\partial v_i(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right) = 1 + \Delta t \text{Tr} \left(\frac{\partial v_i(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right)$$

sfruttando $\det(\mathbb{I} + \phi \underline{\underline{A}}) = 1 + \phi \text{Tr}(\underline{\underline{A}})$ se $\phi (= \Delta t)$ infinitesimo. Esplicitando la traccia si ha:

$$\rightarrow 1 + \Delta t \frac{\partial v_i(\bar{x}, t)}{\partial x_j} = 1 + \Delta t \text{div}(\bar{v}(\bar{x}, t))$$

Per l'espressione già nota del differenziale $DF(\bar{x}(t), t)$, si può scrivere al primo ordine in t

$$F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t) = F(\bar{x}(t), t) + \frac{D}{Dt} F(\bar{x}(t), t) \Delta t$$

e in definitiva riscriviamo la derivata totale di $\mathbb{F}(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbb{F}(t)}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{R(t+\Delta t)} F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t) d^3x - \int_{R(t)} F(\bar{x}(t), t) d^3x \right] = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{R(t)} \left[F(\bar{x}(t), t) + \frac{D}{Dt} F(\bar{x}(t), t) \Delta t \right] [1 + \Delta t \cdot \text{div}(\bar{v}(\bar{x}(t), t))] d^3x - \int_{R(t)} F(\bar{x}(t), t) d^3x \right\} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{R(t)} \left[F(\bar{x}(t), t) \text{div}(\bar{v}(\bar{x}(t), t)) \Delta t + \frac{DF(\bar{x}(t), t)}{Dt} \Delta t + \frac{F(\bar{x}(t), t)}{Dt} \text{div}(\bar{v}(\bar{x}(t), t)) (\Delta t)^2 \right] d^3x \right\} = \\
&= \int_{R(t)} \left[\frac{DF(\bar{x}(t), t)}{Dt} + F(\bar{x}(t), t) \text{div}[\bar{v}(\bar{x}(t), t)] \right] d^3x
\end{aligned}$$

trascurando i termini al 2 ordine in Δt e risolvendo il limite.

Esplicitando la derivata totale di F :

$$\begin{aligned}
&= \int_{R(t)} \left[\frac{\partial F(\bar{x}(t), t)}{\partial t} + \underbrace{(\bar{v} \cdot \text{grad}) F(\bar{x}, t) + F(\bar{x}, t) \text{div} \bar{v}}_{\text{div}(F\bar{v})} \right] d^3x \\
&= \int_{R(t)} \frac{\partial F(\bar{x}(t), t)}{\partial t} + \text{div}(F(\bar{x}(t), t) \bar{v}(\bar{x}(t), t)) d^3x
\end{aligned} \tag{2.3}$$

L'espressione ha validità generale per ogni grandezza estensiva F . Il primo e fondamentale risultato è l'applicazione $F = \rho$ (densità) e la conseguente equazione di continuità, o conservazione della massa.

2.2 Equazione di continuità - condizione analitica di incomprimibilità

Presa una porzione di continuo racchiusa in una regione $R(t)$ al tempo t , seguendola nel suo moto naturale sappiamo che la massa M verrà conservata. Dato il legame con la densità $\rho(\bar{x}, t)$ diciamo quindi

$$M(t) = \int_{R(t)} \rho(\bar{x}(t), t) d^3x = \text{costante} \tag{2.4}$$

ovvero $\frac{dM(t)}{dt} = 0$ seguendo l'evoluzione naturale della porzione nella $R(t)$, che vuol dire

$$\int_{R(t)} \rho(\bar{x}(t), t) d^3x = \int_{R(t)} \left[\frac{\partial \rho(\bar{x}(t), t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(\bar{x}(t), t) \bar{v}(\bar{x}(t), t)) \right] d^3x = 0$$

Data l'arbitrarietà con cui possiamo prendere $R(t)$, l'integranda deve essere nulla:

$$\frac{\partial \rho(\bar{x}(t), t)}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \tag{2.5}$$

che, come visto, si può anche scrivere

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\bar{v}) \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\text{div}(\bar{v}) \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \text{div}(\bar{v})$$

con $v \doteq \frac{1}{\rho}$ volume specifico (volume per unità di massa).

Da questa si ricava la condizione di incomprimibilità (ρ costante): $\text{div}(\bar{v}) = 0$

Nota: sempre sfruttando la legge per la derivazione degli integrali di volume, se $F(\bar{x}, t) = 1$, si ha $\mathbb{F}(t) = \int_R 1 \cdot d^3x = V$ volume della regione R , e

$$\frac{dV}{dt} = \int_{R(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(1) + \text{div}(1 \cdot \bar{v}) \right] d^3x = \int_{R(t)} \text{div}(\bar{v}) d^3x = \int_{\partial R(t)} \bar{v} \cdot \hat{n} da$$

dove $\partial R(t)$ è la superficie che racchiude $R(t)$, con \hat{n} versore normale uscente. Questo ci dice che la variazione di volume di un continuo nel tempo è data dal flusso di velocità attraverso il contorno del volume stesso.

2.3 Leggi in forma integrale e locale

Le leggi della fisica vengono espresse in forma integrale oppure in forma locale. È importante chiarire il legame tra queste due forme, che risultano, come ovvio, equivalenti.

Una legge in forma integrale, per quanto concerne l'approccio seguito qui, prevede l'uguaglianza tra la derivata sostanziale di un integrale, e dall'altra parte un altro integrale.

Esempio: scriviamo la prima equazione cardinale della dinamica per una porzione di continuo di densità $\rho(\bar{x}, t)$ contenuta nella regione $R(t)$, sottoposta a forze la cui risultante è $\bar{F}(t)$. L'equazione è:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) d^3x = \bar{F}$$

A sua volta possiamo esprimere \bar{F} usando \bar{f} = forza per udM e integrando $\rho \bar{f}$, che è una forza per unità di volume (udV), sul volume $R(t)$:

$$\bar{F}(t) = \int_{R(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{f}(\bar{x}, t) d^3x$$

da cui

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) d^3x = \int_{R(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{f}(\bar{x}, t) d^3x$$

Il primo integrale, poiché ρ soddisfa l'equazione di continuità, risulta scrivibile in altra maniera (la vediamo appena più sotto in generale):

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) d^3x = \int_{R(t)} \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} d^3x = \int_{R(t)} \rho(\bar{x}, t) \bar{f}(\bar{x}, t) d^3x$$

e dato che $R(t)$ è una regione arbitraria, devono essere uguali le funzioni integrande (e per $\rho \neq 0$ la si può semplificare)

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{f}$$

che esprime la stessa legge integrale in forma locale, tra grandezze per udM ($\bar{f} = F$ per udM, \bar{v} = quantità di moto per udM).

Come accennato, il risultato è generalizzabile. Prendiamo infatti una grandezza estensiva g , grandezza per udM

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_R \rho g d^3x &= \int_R \left[\frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \text{div}(\rho g \bar{v}) \right] d^3x = \\ &= \int_R \left[\rho \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial \rho}{\partial t} + g \text{div}(\rho \bar{v}) + \rho \bar{v} \cdot \text{grad} g \right] d^3x = \\ &= \int_R \left\{ \underbrace{g \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) \right]}_{=0 \text{ eq continuità}} + \underbrace{\rho \left[\frac{\partial g}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad}) g \right]}_{\dot{=} Dg/Dt} \right\} d^3x \\ \frac{D}{Dt} \int_R \rho g d^3x &= \int_R \rho \frac{Dg}{Dt} d^3x \end{aligned} \tag{2.6}$$

Quindi se esiste la grandezza per udM tale che esiste una legge integrale

$$\frac{D}{Dt} \int_R \rho g d^3x = \int_R \rho h \quad \implies \quad \int_R \rho \frac{Dg}{Dt} d^3x = \int_R \rho h d^3x$$

questa è equivalente alla legge locale

$$\frac{D}{Dt}g = h \quad (2.7)$$

Nota: si osservi che troviamo un legame tra la derivata parziale di una grandezza per udV, ρg , e la derivata sostanziale della stessa grandezza per udM, g ,

$$\frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \text{div}(\rho g \bar{v}) = \rho \frac{Dg}{Dt} \quad (2.8)$$

2.4 Derivata sostanziale degli integrali di linea

Si dimostra che data una curva $\gamma(t)$, che rappresenta un insieme di punti del continuo in moto naturale, e quindi curva che dipende dal tempo, presa la grandezza $f(\bar{x}, t)$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t) ds_i = \int_{\gamma(t)} \left(f \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} f \delta_{ij} \right) ds_j \quad (2.9)$$

dove ds_i è la i-esima componente dello spostamento $d\bar{x}$ lungo la curva e v_i la componente i-esima della velocità \bar{v} . Dimostrazione: γ è una funzione a valori in \mathbb{R}^3 definita su un intervallo $[a, b]$ della retta reale; la si può parametrizzare in vari modi equivalenti con un parametro corrente $\alpha \in [a, b]$ che in a e b dà gli estremi della curva.

Scegliamo quindi una parametrizzazione, che si esprime con $\bar{x} = \bar{x}(\alpha)$, di $\alpha \in [a, b]$, funzione regolare di componenti i-esime $x_i(\alpha)$; l'integrale di linea è definito dall'integrale di Riemann ordinario su $[a, b]$

$$\int_{\gamma} f(\bar{x}) ds_i = \int_a^b f(\bar{x}(\alpha)) \frac{dx_i(\alpha)}{d\alpha} d\alpha$$

la cui derivata sostanziale è

$$\frac{D}{Dt} \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t) ds_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\gamma(t+\Delta t)} f(\bar{x}, t + \Delta t) ds_i + \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t) ds_i \right]$$

(si noti che γ varia essa stessa).

Scegliamo una parametrizzazione opportuna: al tempo t $\bar{x} = \bar{x}(\alpha, t)$, e al tempo $t + \Delta t$ in modo che al valore di α corrisponda $\bar{x}(\alpha, t + \Delta t)$ = evoluto temporale del punto \bar{x} della curva al tempo t , $\bar{x}(\alpha, t)$ dato dallo stesso α .

In questo modo, vale al primo ordine in Δt

$$\bar{x}(\alpha, t + \Delta t) = \bar{x}(\alpha, t) + \bar{v}(\bar{x}(\alpha, t)) \Delta t$$

e rielaboriamo la differenza tra integrali

$$\int_{\gamma(t+\Delta t)} f(\bar{x}, t + \Delta t) ds_i - \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t) ds_i$$

applicando la parametrizzazione

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(\bar{x}(\alpha, t + \Delta t), t + \Delta t) \frac{dx_i(\alpha, t + \Delta t)}{d\alpha} d\alpha - \int_a^b f(\bar{x}(\alpha, t), t) \frac{dx_i(\alpha, t)}{d\alpha} d\alpha \\ &= \int_a^b f(\bar{x}(\alpha, t + \Delta t), t + \Delta t) \frac{\partial x_i(\alpha, t + \Delta t)}{\partial x_j(\alpha, t)} \frac{dx_j(\alpha, t)}{d\alpha} d\alpha - \int_a^b f(\bar{x}(\alpha, t), t) \frac{dx_j(\alpha, t)}{d\alpha} \delta_{ij} d\alpha = \\ &= \int_a^b \left[f(\bar{x}(\alpha, t + \Delta t), t + \Delta t) \frac{\partial x_i(\alpha, t + \Delta t)}{\partial x_j(\alpha, t)} - f(\bar{x}(\alpha, t), t) \delta_{ij} \right] \frac{dx_j(\alpha, t)}{d\alpha} d\alpha = \end{aligned}$$

Capitolo 3

Sforzi; fluidostatica: isotropia e continuità della pressione

3.1 Tensore degli sforzi

3.2 Sforzi (stresses)

3.2.1 Sforzo normale e sforzo tangenziale

3.3 Fluidostatica

3.3.1 Isotropia della pressione in equilibrio

3.3.2 Continuità di p all'interfaccia

3.3.3 Tensione superficiale

Capitolo 4

Equazione di Eulero

4.1 Appendice: teorema della divergenza per casi particolari

Capitolo 5

Fluidostatica: equilibrio meccanico, equilibrio e stabilità dell'atmosfera

5.1 Ritorno alla fluidostatica

5.2 Equilibrio dell'atmosfera - stabilità dell'equilibrio

5.2.1 Equilibrio meccanico + termico (atmosfera isoterma secca)

5.2.2 Atmosfera isoentropica (secca)

Capitolo 6

Fluidostatica di fluidi incomprimibili

- 6.1 Barometro di Torricelli
- 6.2 Vasi comunicanti - fluidi immiscibili
- 6.3 Pressa idraulica
- 6.4 Forza di Archimede
- 6.5 Centro di spinta ed equilibrio
- 6.6 Isotropia

Capitolo 7

Fluidodinamica di fluidi perfetti; flusso di impulso e di energia

7.1 Linee di corrente (Stream lines)

7.2 Flusso di quantità di moto

7.3 Forza su un tubo a gomito

7.4 Flusso di energia

7.4.1 Flusso di energia in campo esterno

Capitolo 8

Flusso stazionario: equazione di bernoulli e applicazioni

8.1 Equazione di Bernoulli

8.1.1 Fluido incompressibile

8.1.2 Fluido reale

8.2 Teorema di Torricelli

8.2.1 Tubo di Venturi

8.2.2 Cavitazione

8.2.3 Tubo di Pitot - sistema Pitot-statico

8.2.4 Sifone

8.2.5 Portanza

8.2.6 Volo aereo

Capitolo 9

Teorema di Kelvin; flusso potenziale

9.1 Teorema di Kelvin - conservazione della circolazione

Si era visto che data la curva $\gamma(t)$, vale

$$\frac{D}{Dt} \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t) ds_i = \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} f(\bar{x}, t) \delta_{ij} \right) ds_j$$

e se $f = f_i$ i-esima componente di $\bar{f}(\bar{x}, t)$ vettoriale

$$\frac{D}{Dt} \int_{\gamma(t)} \bar{f} \cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} \bar{f} \cdot \bar{v} + \int_{\gamma(t)} \frac{D}{Dt} \bar{f} \cdot d\bar{x}$$

dunque se $\bar{f} = \bar{v}$ velocità di un fluido perfetto, e $\gamma(t)$ linea ideale costituita da punti del fluido nel loro moto

$$\frac{D}{Dt} \int_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{v} + \int_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt} \cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \int_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt} \cdot d\bar{x}$$

Se $\gamma(t)$ è una curva chiusa, si definisce Γ circuitazione o circolazione $\Gamma \doteq \oint_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{l}$ e il primo integrale, essendo l'integrale di differenziale esatto, è nullo

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{l} = \oint_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt} \cdot d\bar{l}$$

per Eulero $\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} u$. Nell'ipotesi di moto isoentropico, oppure nel caso in cui $-\frac{1}{\rho} \text{grad} p$ ammetta potenziale:

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\text{grad}(w + u)$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt} \cdot d\bar{l} = - \oint_{\gamma(t)} \text{grad}(w + u) \cdot d\bar{l} = - \int_S \text{rot} [\text{grad}(w + u)] \cdot d\bar{s}$$

usando il teorema di Stokes nell'ultimo passaggio, ed essendo S superficie sottesa da γ . Poiché $\text{rot}(\text{grad}(f))=0$ per ogni f , la circolazione Γ si conserva nel moto isoentropico di fluido perfetto (Teorema di Kelvin)

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{l} = 0 \quad (9.1)$$

prendendo una γ che sottenda un'area infinitesima, ci restringiamo praticamente all'intorno di una singola linea di corrente; dunque la vorticità ($\text{rot} \bar{v}$) si conserva nel flusso, si muove col moto naturale del fluido

$$\oint_{\gamma=\partial S} \bar{v} \cdot d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{v} \cdot d\bar{a} \cong \text{rot} \bar{v} \cdot \bar{S} = \text{costante}$$

Nota: come Landau ci mettiamo nell'usuale caso isoentropico; basta in verità che $\frac{1}{\rho}\text{grad}p$ ammetta potenziale ψ , così che $\frac{1}{\rho}\text{grad}p = \text{grad}\psi$; sono diversi i casi possibili:

- isoentropico: $dw = Tds + \frac{1}{\rho}p = \frac{1}{\rho}p \implies \psi = w$ entalpia
- isoterma: $dp = -sdT + \frac{1}{\rho}p = \frac{1}{\rho}p \implies \psi = \phi$ energia libera di Gibbs
- incomprimibile: $\frac{1}{\rho}p = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) \implies \psi = \frac{p}{\rho}$

9.2 Flusso potenziale

La conservazione della circolazione $\Gamma = \oint_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{l}$ porta a osservazioni significative. Nel caso di flusso stazionario, se vi è un punto per il quale $\text{rot}\bar{v} = 0$, presa la linea di corrente che vi passa e considerata una γ infinitesima che la racchiude si può affermare che $\text{rot}\bar{v} = 0$ su tutta la linea. Se il moto non è stazionario, il risultato vale lungo una traiettoria; ciò sempre tenendo a mente l'ipotesi di flusso isoentropico, altrimenti l'osservazione non è valida (per es. in caso di urti o turbolenza).

Se supponiamo di avere un fluido in moto isoentropico che all'infinito è uniforme (\bar{v} uniforme; caso particolare fluido inizialmente a riposo, con \bar{v} nulla e \implies uniforme; è potenziale e tale resta), $\text{rot}\bar{v} = 0$ ovunque.

Il fatto che $\text{rot}\bar{v} = 0$ dice che è esprimibile come gradiente di un potenziale scalare $\varphi : \bar{v} = \text{grad}\varphi$. φ è il **POTENZIALE SCALARE DI VELOCITÀ** e il moto è nullo.

9.2.1 Flusso potenziale o irrotazionale

In questo flusso non esistono linee di corrente chiuse

$$\oint_{\gamma} \bar{v} \cdot d\bar{l} = 0$$

Avendo $\bar{v} = \text{grad}\varphi$ e considerando $\frac{-1}{\rho\text{grad}p = -\text{grad}\psi}$, l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad}) \bar{v} = -\text{grad}(\psi + u)$$

9.2.2 Flusso attorno ad un ostacolo

9.3 Condizione di incomprimibilità - una prospettiva fisica

9.3.1 Flusso stazionario

9.3.2 Flusso non stazionario

9.4 Forza di resistenza nel flusso potenziale oltre a un corpo

Capitolo 10

Onde di gravità

10.1 Condizioni cinematiche generali

10.1.1 Fluidi perfetti

10.2 Condizioni dinamiche generali

10.2.1 Fluidi perfetti

10.2.2 Flusso potenziale

10.3 Linearizzazione delle condizioni all'interfaccia

10.4 Onde di gravità in un bacino di profondità infinita

10.5 Onde di gravità in un bacino di profondità finita

10.6 Onde di gravità tra due fluidi limitati in altezza

Capitolo 11

Trasporto di energia in onde di gravità; appendici

11.1 Appendice - velocità di fase e di gruppo (momento minimo)

11.2 Appendice - Vademecum minimo di funzioni iperboliche

Capitolo 12

Fluidi reali: tensori dei gradienti delle velocità e degli sforzi, equazione di Navier-Stokes

- 12.1 Tensore dei gradienti delle velocità - decomposizione e significato geometrico
- 12.2 Fluidi reali (viscosi) - relazione di Cauchy
- 12.3 Tensore degli sforzi Newtoniano - equazione di Navier-Stokes

Capitolo 13

Equazione di Navier-Stokes in coordinate non cartesiane

13.1 Coordinate cilindriche

13.2 Coordinate sferiche

Capitolo 14

Momento angolare e considerazioni sulla simmetria del tensore degli sforzi

- 14.1 Equazioni cardinali della dinamica - momento angolare
- 14.2 Momento delle forze esterne
- 14.3 Momento angolare orbitale e di spin
- 14.4 Pressione in un fluido in moto - pressione meccanica, termodinamica ed equilibrio locale
- 14.5 Flusso di quantità di moto - tensore densità di flusso di qdm
- 14.6 Dissipazione nel fluido viscoso

Capitolo 15

Esempi di flusso viscoso

15.1 Flusso di Poiseuille

15.1.1 Geometria piana

15.1.2 Geometria cilindrica - flusso in condotta

15.2 Flusso di Couette

15.2.1 Geometria piana

15.2.2 Geometria cilindrica

Capitolo 16

Leggi di similarità e numeri adimensionati

16.1 Similitudine geometrica

16.2 Similitudine cinematica

16.3 Problemi simili

16.3.1 Problemi dinamicamente simili

16.3.2 Numero di Froude

16.3.3 Numero di Strouhal

Capitolo 17

Problema di Stokes per il moto di una sfera in un fluido viscoso

17.1 Confronto con sfera in fluido perfetto (moto potenziale)

17.2 Campo di pressione

17.3 Forza applicata sulla sfera

17.4 Perfezionamento della formula di Stokes

17.4.1 Formula di Oseen e coefficiente di penetrazione

Capitolo 18

Moti oscillatori in fluidi viscosi

18.1 Fluido di profondità infinita su piano oscillante

18.2 Fluido limitato tra due piani

18.3 Strato di fluido con pelo libero

18.4 Corpo generico oscillante in fluido viscoso

Capitolo 19

Smorzamento di onde di gravità; correnti superficiali: Ekman layer

19.1 Ekman layer