

# Appunti del corso di Equazioni Differenziali I

raccolti da  
Luca Colombo Gomez

AA 2017/2018

# Indice

<b>1</b>	<b>Distribuzioni e trasformate di Fourier</b>	<b>2</b>
1.1	Distribuzioni . . . . .	2
1.1.1	Idea di base . . . . .	2
1.1.2	Derivata di una distribuzione . . . . .	2
1.1.3	Delta di Dirac . . . . .	2
1.1.4	Definizione formale . . . . .	3
1.1.5	Proprietà della delta di Dirac . . . . .	4
1.2	Trasformate di Fourier . . . . .	5
1.3	Funzioni di Green . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Equazione del Calore</b>	<b>9</b>
2.1	Flusso di calore in un cilindro infinito . . . . .	17
2.1.1	Separazione delle variabili . . . . .	18
2.2	Problemi non omogenei . . . . .	19
2.3	Problema ai valori al contorno . . . . .	22
2.3.1	Applicazione del formalismo imparato . . . . .	25
2.4	Il kernel di Schroedinger . . . . .	31
2.5	L'equazione dei telegrafisti . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del 2 ordine</b>	<b>36</b>
3.1	Il problema di Cauchy . . . . .	38
3.2	La questione della buona posizione del problema di Cauchy . . . . .	41
3.3	Classificazione di equazioni differenziali di ordine superiore e in più variabili . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Carica immagine</b>	<b>46</b>

# Capitolo 1

## Distribuzioni e trasformate di Fourier

### 1.1 Distribuzioni

le distribuzioni (funzioni generalizzate) sono degli oggetti che generalizzano le funzioni e le distribuzioni di probabilità. Estendono il concetto di derivata a tutte le funzioni continue e oltre. le distribuzioni sono importanti in fisica (p.e. distribuzione delta di Dirac).

#### 1.1.1 Idea di base

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione integrabile  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  smooth ( $C^\infty$ ), con supporto compatto.  $\rightarrow \int f\phi dx \in \mathbb{R}$ , dipende linearmente e in un modo continuo da  $\phi$ .  $\Rightarrow f$  è un funzionale lineare continuo sullo spazio di tutte le "funzioni test"  $\phi$ . Questa è la definizione di una distribuzione.

Le distribuzioni possono essere moltiplicate con dei numeri reali, e possono essere sommate  $\rightarrow$  formano uno spazio vettoriale reale.

#### 1.1.2 Derivata di una distribuzione

Considera prima il caso di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile. Se  $\phi$  è una funzione test, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} f' \phi dx = - \int_{\mathbb{R}} f \phi' dx$$

non c'è un termine di bordo perchè  $\phi$  ha supporto compatto.  $\rightarrow$  suggerisce la seguente definizione della derivata  $S'$  di una distribuzione  $S$  :  $S' =$  funzionale lineare che manda la funzione test  $\phi$  in  $-S(\phi')$

#### 1.1.3 Delta di Dirac

("Funzione delta di Dirac")  $\delta(x)$  è la distribuzione che manda la funzione test  $\phi$  in  $\phi(0)$ . È la derivata della funzione step di Heaviside.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

La derivata della delta di Dirac è la distribuzione che manda  $\phi$  in  $-\phi'(0)$ . la delta è un esempio di una distribuzione che non è una funzione, ma può essere definita come limite di una sequenza di funzioni, p.e.

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x)$$

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x) \Phi(x) dx = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} \Phi(x) dx = \frac{1}{2a} (\psi(a) - \psi(-a)) \quad \psi = \int \Phi, \quad \psi' = \Phi \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \int_R \delta_a(x) \Phi(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\psi(a) - \psi(-a)}{2a} = \psi'(0)$$

#### 1.1.4 Definizione formale

Def: una funzione  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  ha supporto compatto se esiste un sottoinsieme compatto  $K$  di  $U$  tale che  $\Phi(x) = 0 \forall x \in U \setminus K$

Le funzioni  $C^\infty \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  con supporto compatto formano uno spazio vettoriale topologico  $\mathbf{D}(U)$

Def: lo spazio delle distribuzioni su  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  è il duale  $D'(U)$  dello spazio vettoriale topologico  $\mathbf{D}(U)$  di funzioni  $C^\infty$  con supporto compatto in  $U$ .

Notazione:

$$S \in D'(U), \quad \phi \in D(U), \quad S : D(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi \mapsto S(\Phi) = \langle S | \Phi \rangle$$

Una funzione integrabile  $f$  definisce una distribuzione  $\tilde{f}$  su  $\mathbb{R}^n$  tramite

$$\langle \tilde{f}, \Phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f \Phi d^n x \quad \forall \Phi \in D(U) \quad (1.1)$$

Si dice che  $\tilde{f}$  è la distribuzione associata alla funzione  $f$ , o che la distribuzione  $\tilde{f}$  è equivalente alla funzione  $f$ .

La distribuzione di Dirac (o misura di Dirac) è definita da

$$\langle \delta, \Phi \rangle := \Phi(0) \quad (1.2)$$

Teorema: la distribuzione di Dirac non può essere rappresentata da una funzione integrabile (senza dim). Nonostante ciò scriveremo in seguito formalmente

$$\langle \delta, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \phi(x) d^n x = \Phi(0) \quad (1.3)$$

Es (n=1)

Si dimostri che

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \quad (1.4)$$

Si ha

$$\int x \delta(x) \Phi(x) dx = x \Phi(x) \Big|_{x=0} = 0 \quad \forall \Phi \Rightarrow x \delta(x) = 0$$

$$\Rightarrow \delta(x) + x \delta'(x) \Rightarrow \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \quad \blacksquare$$

Un'altra identità utile è

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (1.5)$$

dove  $x_i$  sono gli zeri della funzione  $g(x)$ .

Rappresentazione della delta:  $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x)$ , con

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1.6a)$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (1.6b)$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp -\frac{x^2}{a^2} \quad (1.6c)$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{ikx-a|k|} dk \quad (1.6d)$$

Dimostrazione della (1.6b):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \Phi(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} \Phi(x) dx = (x = at) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \Phi(at) dt \\ \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \Phi(x) dx &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(at) \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

usa il teorema della convergenza dominata: se  $f_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di funzioni misurabili con limite puntuale  $f$ , e se esiste una funzione integrabile  $g$  tale che  $|f_k| \leq g \forall k$  allora  $f$  è integrabile e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx = \int f dx$

Da noi  $f_k(t) \doteq \frac{\Phi(at)}{1+t^2} \rightarrow$  funzione  $g$  esiste, perchè  $\Phi$  ha supporto compatto.

Quindi :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \Phi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \Phi(at) \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \Phi(0) \arctan(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \Phi(0) q.e.d.$$

In  $N$  dimensioni: coordinate cartesiane  $x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow \delta(x) = \delta(x_1) \dots \delta(x_n)$

### 1.1.5 Proprietà della delta di Dirac

$$\begin{aligned} \delta(-\hat{r}) &= \delta(\hat{r}) \\ \int_{\mathbb{R}^n} d^n \hat{r} \delta(\hat{r} - \hat{r}') f(\hat{r}) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n \hat{\rho} \delta(\hat{\rho}) f(\hat{\rho} + \hat{r}') = f(\hat{\rho} + \hat{r}') \Big|_{\hat{\rho}=0} = f(\hat{r}') \end{aligned} \quad (1.7)$$

Scegli  $f=1 \Rightarrow$  formalmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \hat{r} \delta(\hat{r} - \hat{r}') = 1 \quad (1.8)$$

$\delta$  in coordinate curvilinee?

la quantità invariante per trasformazione di coordinate è  $d^n \hat{r} \delta(\hat{r} - \hat{r}')$  Coord  $\alpha_i(x_i, \dots, x_n), i = 1, \dots, n$   $x_j$  sono le coordinate cartesiane

Jacobiano

$$\begin{aligned} J(x_i, \xi_j) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) \\ |J| d\xi_1 \dots d\xi_n \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) &= d\xi_1 \dots d\xi_n \delta(\xi_1 \dots \xi'_1) \dots \delta(\xi_n - \xi'_n) \\ \delta(\xi_1 - \xi'_1) \dots \delta(\xi_n - \xi'_n) &= |J| \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Esempio coordinate sferiche 3-dim

$$x = r \cos \varphi \sin \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \theta \quad (\xi_1 = r, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \varphi)$$

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') = r^2 \sin \theta \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (1.10)$$

Esercizio: calcolare  $J$  in coordinate cilindriche

Densità di carica di un insieme discreto di N cariche puntiformi

$$\rho(\hat{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\hat{r} - \hat{r}_i) \quad (1.11)$$

carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica con raggio R.  $\rho(r) = ?$   
 Chiamo  $\rho(r) = A Q \delta(r - R)$  con A da determinare.

$$\int d^3r \rho(r) = 4\pi \int r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi A Q \delta(r - R) = 4\pi A Q \int r^2 dr \delta(r - R) = 4\pi A Q R^2$$

Normalizzando  $4\pi A Q R^2 = Q$  ottengo  $A = \frac{1}{4\pi R^2}$

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R)$$

## 1.2 Trasformate di Fourier

Definizione: spazi  $L^P$

Sia  $\chi$  uno spazio di misura con misura m positiva. (Possiamo prendere la misura di Lebesgue come esempio)  
 $L^P(\chi) :=$  spazio di funzioni su  $\chi$  tale che  $|f|^p$  sia integrabile, e  $\int_{\chi} |f|^p dm < \infty$

Si dimostra che per  $p \geq 1$ ,  $L^P(\chi)$  è uno spazio vettoriale e  $\|f\| := \left\{ \int_{\chi} |f|^p dm \right\}^{\frac{1}{p}}$  è una norma su questo spazio.

A noi interessa il caso in cui m è la misura di Lebesgue; in tal caso gli elementi di  $L^P(\chi)$  sono le funzioni f con  $\int_{\chi} |f|^p dx < \infty$ . Il caso  $p=2$  trova applicazioni in meccanica quantistica.

Definizione: Sia f una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la trasformata di Fourier  $Ff$  è una funzione in  $\mathbb{R}^n$  (in realtà sul duale di  $\mathbb{R}^n$ , ma coincide con  $\mathbb{R}^n$ ) definita da

$$((F)f)(\bar{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\bar{k}\bar{x}} f(\bar{x}) d^n \bar{x} \quad (1.12)$$

Si osserva che se  $f \in L'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists (Ff)(\bar{k})$ . In seguito verrà usata la notazione  $\hat{f}(\bar{k}) = (Ff)(\bar{k})$   
 Una possibile rappresentazione della  $\delta$  di Dirac è (per  $n=1$ )

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - a|k|} dk$$

che è una Trasformata di Fourier. Formalmente si può scrivere

$$\delta(\bar{x}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{k}\bar{x}} d^n \bar{k} \quad (1.13)$$

Se conosco la trasformata di Fourier  $\hat{f}$  posso determinare la funzione f applicando la antitrasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \hat{f}(\bar{k}) &= \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\bar{k}\bar{x}'} f(\bar{x}') d^n \bar{x}' = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \bar{x}' f(\bar{x}') \int_{\mathbb{R}^n} d^n \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x} - \bar{x}')} = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \bar{x}' f(\bar{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}') \\ \Rightarrow f(\bar{x}) &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \hat{f}(\bar{k}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

paragonando quest'ultima espressione con (1.13) si trova che

$$(F\delta)(\bar{k}) = 1 \quad (1.15)$$

Definiamo ora una famiglia di funzioni

$$\varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i\bar{k}\bar{x}} \quad (1.16)$$

Allora possiamo riscrivere la funzione  $f(\bar{x})$  come:

$$f(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int d^n \bar{k} \hat{f}(\bar{k}) \varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$$

$\Rightarrow$  se dimostro che  $\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$  è ortonormale e completo allora posso sviluppare qualsiasi funzione su  $\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$  che chiamo funzioni di base.

Dimostrazione completezza:

$$\int d^n \bar{k} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \varphi_{\bar{k}'}^*(\bar{x}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}')} = \delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad (1.17)$$

Che equivale alla condizione di completezza, infatti:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \int d^n \bar{x}' f(\bar{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}') = \\ &= \int d^n \bar{x}' f(\bar{x}') \int d^n \bar{k} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \varphi_{\bar{k}'}^*(\bar{x}') = \int d^n \bar{k} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \int d^n \bar{x}' f(\bar{x}') \varphi_{\bar{k}'}^*(\bar{x}') = \\ &= \int d^n \bar{k} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\bar{k}) \\ \Rightarrow f(\bar{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int d^n \bar{k} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \hat{f}(\bar{k}) \end{aligned}$$

quindi qualunque  $f$  è sviluppabile in una base di  $\varphi_{\bar{k}}$

Dimostrazione ortogonalità:

$$\int d^n \bar{x} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \varphi_{\bar{k}'}^*(\bar{x}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n \bar{x} e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\bar{x}} = \delta(\bar{k} - \bar{k}') \quad (1.18)$$

Osservazione:  $\{\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\}$  formano una base di  $\mathbb{R}^n$ , non di tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ . Sulla superficie sferica, le armoniche sferiche sono le combinazioni lineari di  $\{\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\}$

### 1.3 Funzioni di Green

Definizione: un nucleo (detto anche Kernel) su  $\mathbb{R}^n$  è una distribuzione su  $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$ , ossia un elemento del duale  $D'(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$  di funzioni  $C^\infty$  con supporto compatto in  $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$ .

$$K : D(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad K \in D'(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$$

Definizione: un nucleo fondamentale (o elementare)  $E$  di un operatore differenziale lineare  $D$  su  $\mathbb{R}^n$  con coefficienti  $a_j(\bar{x}) \in C^\infty$ ;

$$D = \sum_{|j| \leq m} a_j(\bar{x}) D^j$$

è un nucleo, che soddisfa

$$D = \sum_{|j| \leq m} a_j(\bar{x}) D^j E(\bar{x}, \bar{y}) = \delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (1.19)$$

osservazione sulla notazione:  $j$  è un indice multiplo

$$j = (j_1, \dots, j_n) \quad |j| = \sum_{i=1}^n j_i$$

con  $m :=$  ordine dell'operatore differenziale  $D^j$

$$D^j = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{j_i}$$

dimostrazione:

$$\begin{aligned} DX(\bar{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} DE(\bar{x}, \bar{y}) B(\bar{y}) d^n(\bar{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\bar{x} - \bar{y}) B(\bar{y}) d^n \bar{y} \\ &\Rightarrow DX(\bar{x}) = B(\bar{x}) \blacksquare \end{aligned}$$

Definizione: una funzione di green è un nucleo elementare per l'operatore differenziale

$$-\frac{\nabla^2}{4\pi} \Rightarrow -\nabla^2 G(\bar{x}, \bar{y}) = -4\pi \delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (1.20)$$

Si può dimostrare che  $G(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{y}, \bar{x})$ .

Esempio: si consideri una carica puntiforme in  $\bar{y}$  con carica  $q = 1$ .  $\rho = q\delta(\bar{x} - \bar{y})$  è la densità di carica. Dalle equazioni di Maxwell si ha  $\nabla^2 \phi(\bar{x}) = -4\pi \rho(\bar{x}) = -4\pi \delta(\bar{x} - \bar{y}) \rightarrow$  definizione di Funzione di Green.

Una possibile Funzione di Green è  $\phi(\bar{x}) = \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|}$

Se è nota una funzione di Green  $\Rightarrow$  una soluzione dell'equazione di Poisson è:

$$\phi(\bar{x}) = \int G(\bar{x}, \bar{y}) \rho(\bar{y}) d^3 \bar{y} \quad (1.23)$$

Quindi passo da un'equazione differenziale ad un integrale.

Nel nostro caso  $\phi(\bar{x}) = \int \rho(\bar{y}) d^3 \bar{y}$ , come in elettromagnetismo, in generale

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} + F(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1.24a)$$

$$\nabla^2 F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (1.24b)$$

$\Rightarrow F$  dipende dalle condizioni di bordo. Teorema: In assenza di superficie di bordo la funzione di Green  $G(\bar{x}, \bar{y})$  dipende solo dalla differenza  $\bar{x} - \bar{y}$

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x} - \bar{y}) \rightarrow \text{Invarianza traslazionale} \quad (1.25)$$

Nota: non dimostrato ma intuibile,  $\delta(\bar{x} - \bar{y})$  invariante se non ho condizioni di bordo;  $\nabla^2$  invariante;  $G(\bar{x} - \bar{y})$  invariante per traslazioni  $\bar{x} \rightarrow \bar{x} - \bar{a}$ ,  $\bar{y} \rightarrow -\bar{a}$

Se  $G(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x} - \bar{y})$  è più facile trovarla. Per  $n=3$

$$\nabla^2 G(\bar{x} - \bar{y}) = -4\pi \delta(\bar{x} - \bar{y})$$

$$\frac{\nabla^2}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k}(\bar{x}-\bar{y})} \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k}(\bar{x}-\bar{y})}$$

Quindi il primo passaggio è scrivere  $G$  e  $\delta$  come trasformate di Fourier

$$\int d^3 k e^{i\vec{k}(\bar{x}-\bar{y})} (-k^2 \tilde{G}(\vec{k}) + 4\pi) = 0$$



il secondo passaggio è osservare che  $\bar{x}$  compare solo come esponente ( $\Rightarrow -k^2$ ) e porto tutto da una parte.  $e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} = \psi_k(\bar{x})$  è linearmente indipendente, quindi deve annullarsi il coefficiente

$$-k^2 \tilde{G}(\bar{k}) + 4\pi = 0 \Rightarrow \tilde{G}(\bar{k}) = \frac{4\pi}{\bar{k}^2}$$

Applico l'antitrasformata di Fourier

$$G(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \frac{4\pi}{\bar{k}^2}$$

Cambiamento di coordinate: coordinate sferiche

$$d^3\bar{k} = k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi \Rightarrow G(\bar{x}) = \frac{1}{\pi} \int \sin\theta d\theta dk \frac{e^{ik|\bar{x}|\cos\theta}}{k^2}$$

cambio variabile:  $u = \cos\theta \rightarrow du = -\sin\theta d\theta$

$$G(\bar{x}) = -\frac{1}{\pi} \int du dk e^{ik|\bar{x}|u} = \int_0^\infty \frac{2}{k|\bar{x}|\pi} \sin(k|\bar{x}|) dk = \frac{1}{|\bar{x}|}$$

## Capitolo 2

# Equazione del Calore

La legge di Fourier della conduzione termica è data da

$$\bar{q} = -k \bar{\nabla} T \quad (2.1)$$

dove  $\bar{q} :=$  densità di flusso termico;  $k :=$  conducibilità termica;  $T :=$  temperatura.

La temperatura può essere riscritta come  $T = \frac{\phi}{C_p \rho}$ , dove  $\rho$  è la densità,  $C_p$  è il calore specifico a pressione costante, e  $\phi$  è il calore per unità di volume.

L'equazione di continuità è:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{\nabla} \bar{q} = 0 \quad (2.2)$$

che ha la forma tipica di una legge di conservazione.

In questa formula sostituisco  $\phi$  e  $\bar{q}$  e trovo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \bar{\nabla} \cdot (-k \bar{\nabla} T) = \rho C_p \frac{\partial}{\partial t} T - k \nabla^2 T = 0$$

Definendo  $\chi = \frac{k}{\rho C_p} :=$  coefficiente di conducibilità termica, si ottiene l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad (2.3)$$

paragona con l'equazione di diffusione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \Delta u \quad (2.4)$$

D: Coefficiente di diffusione

u: densità del materiale che si diffonde

la (2.4) segue dalla 1 legge di Fick sulla corrente di diffusione

$$\vec{q}_D = -D \vec{\nabla} u \quad (2.5)$$

più l'equazione di continuità (il materiale non viene creato o distrutto)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_D = 0$$

La (2.4) viene anche chiamata 2 legge di Fick.

N.B. anche l'equazione di Black-Scholes per il prezzo di un'opzione può essere riportato nella forma (2.3),(2.4).

-Risolvi la (2.3) in d dimensioni:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \quad (2.6)$$

Faccio una trasformata di Fourier:

$$T(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \tilde{T}(\bar{k}, t) \quad (2.7)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}(\bar{k}, t) + \chi \bar{k}^2 \tilde{T}(\bar{k}, t) \right) = 0$$

dato che gli esponenziali sono linearmente indipendenti, devo annullare i coefficienti

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{T} + \chi \bar{k}^2 \tilde{T} = 0 \Rightarrow \tilde{T}(\bar{k}, t) = e^{-\chi \bar{k}^2 t} \tilde{T}_0(\bar{k}) \quad (2.8)$$

faccio una trasformata di Fourier inversa

$$\int d^d \bar{y} e^{-i\bar{k}\bar{y}} T_0(\bar{y}) \quad (2.9)$$

sostituisco (8),(9) nella (7):

$$T(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{y} T_0(\bar{y}) \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})-\chi \bar{k}^2 t}$$

definisco

$$\int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})-\chi \bar{k}^2 t} =: (2\pi)^d G(\bar{x} - \bar{y}, t) \quad (2.10)$$

G: propagatore/nucleo di calore ("heat kernel"). Propaga le condizioni iniziali di  $T_0(\bar{y})$ . Quindi abbiamo la convoluzione:

$$T(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} G(\bar{x} - \bar{y}, t) T_0(\bar{y}) \quad (2.11)$$

Caso particolare:  $T_0(\bar{y}) = \delta(\bar{y})$

$$\Rightarrow T(\bar{x}, t) = G(\bar{x}, t)$$

il propagatore è soluzione dell'equazione del calore corrispondente a un dato iniziale deltafunzione. Per questo motivo, il propagatore è anche chiamato soluzione fondamentale, perchè esso è una soluzione e con esso si costruiscono tutte le altre per convoluzione.

Calcoliamo G:

$$G(\bar{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{z}-\chi \bar{k}^2 t}$$

passo agli esponenti, usando il teorema dei residui spostando l'asse reale nel piano complesso in alto o in basso

$$\begin{aligned} & -\chi t \left( \bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\chi t} \right)^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\chi t} \\ & \left( \bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\chi t} \right)^2 =: \bar{k}'^2 \\ & \Rightarrow G(\bar{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi t}\right) \int d^d \bar{k} e^{-\chi t \bar{k}'^2} \end{aligned}$$

l'integrale è Gaussiano (più precisamente prodotto di integrali Gaussiani)

$$G(\bar{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi t}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}^d$$

Se  $\text{Re}(\chi t) > 0 \Rightarrow t > 0$ , la soluzione esiste solo per  $t > 0$ , cioè per tempi posteriori all'assegnazione del dato iniziale (soluzione ritardata)

$$\Rightarrow G(\bar{z}, t) = \frac{1}{(4\pi\chi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi t}\right) \quad (2.12)$$

-Soluzione della (11) per d=1 per dato iniziale localizzato:

$$T_0(x) = \begin{cases} \hat{T}_0 & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

$$(11) \Rightarrow T(\bar{x}, t) = \int_L^L dy \hat{T}_0 \frac{1}{(4\pi\chi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\chi t}\right)$$

definisco  $z := x - y$

$$= \frac{\hat{T}_0}{(4\pi\chi t)^{1/2}} \int_{x-L}^{x+L} dz \exp\left(-\frac{z^2}{4\chi t}\right)$$

definisco  $r := \frac{z}{(4\chi t)^{1/2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hat{T}_0}{\pi} \int_{\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}}^{\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-r^2} dr = \frac{\hat{T}_0}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}}^0 e^{-r^2} dr + \int_0^{\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-r^2} dr \right) \\ &= \frac{\hat{T}_0}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{\sqrt{\pi i}}{2} \right) \\ &= \frac{\hat{T}_0}{2} \left( \operatorname{erf} \frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}} - \operatorname{erf} \frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}} \right) \quad (2.13) \end{aligned}$$

dove la funzione degli errori (di Gauss) è definita da

$$\operatorname{erf}(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-r^2} dr \quad (2.14)$$

dato che la soluzione è pari possiamo limitarci a  $x \geq 0$ . Il punto fondamentale è che, sebbene il dato iniziale sia nonnullo solo in una regione localizzata, appena comincia l'evoluzione la funzione è maggiore di zero ovunque, per quanto lontano dal supporto del dato iniziale. È questo il comportamento diffusivo che contrasta con la propagazione per onde.

-Dimostrazione che la (11) soddisfa il dato iniziale per  $t \rightarrow 0$ . A tal fine dimostriamo che :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} = \delta(x) =: \delta_a(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \phi(x) dx = \left( \frac{x}{a} =: y \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \phi(ya) dy \\ \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \phi(ya) dy = (\text{teo conv dominata}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-y^2} \phi(ya) dy = \\ &= \frac{\phi(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \phi(0) \end{aligned}$$

Con  $a = 2\sqrt{\chi t}$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} e^{-\frac{x^2}{4\chi t}} = \delta(x) \quad (2.15)$$

Quindi (12)  $\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(\bar{z}, t) = \delta(z_1) \cdots \delta(z_d) = \delta(\bar{z})$$

e la (11) implica

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} \lim_{t \rightarrow 0} G(\bar{x} - \bar{y}, t) T_0(\bar{y}) = \int d^d \bar{y} \delta(\bar{x} - \bar{y}) T_0(\bar{y}) = T_0(\bar{x}) \quad \blacksquare$$

-Flusso di calore con produzione di calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \Delta T = S(\bar{x}, t) \quad t > 0$$

S è il termine di sorgente, rende l'equazione lineare non omogenea

-Soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

definiamo una funzione di Green G tramite una convoluzione spaziale e temporale

$$(\partial_t - \chi \Delta) G(\bar{x} - \bar{x}', t - t') = \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - t') \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(\bar{x}, t) &= \int d^n \bar{x}' dt' \\ G(\bar{x} - \bar{x}', t - t') S(\bar{x}', t') & \quad (2.17) \end{aligned}$$

Check:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \chi \Delta_{\bar{x}}) T(\bar{x}, t) &= \int d^n \bar{x}' dt' (\partial_t - \chi \Delta_{\bar{x}}) G(\bar{x} - \bar{x}', t - t') S(\bar{x}', t') = S(\bar{x}, t) \\ (\partial_t - \chi \Delta_{\bar{x}}) G(\bar{x} - \bar{x}', t - t') &= \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - t') \end{aligned}$$

trasformata di Fourier, definisco  $\bar{z} := \bar{x} - \bar{x}', \tau := t - t'$

$$G(\bar{z}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n \bar{k} d\omega e^{i(\bar{k}\bar{z} - \omega\tau)} \tilde{G}(\bar{k}, \omega) \delta(\bar{z}) \delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n \bar{k} d\omega e^{i(\bar{k}\bar{z} - \omega\tau)}$$

sostituito nella (16) mi da

$$\begin{aligned} (-i\omega + \chi \bar{k}^2) \tilde{G}(\bar{k}, \omega) &= 1 \\ \Rightarrow \tilde{G}(\bar{k}, \omega) &= \frac{1}{-i\omega + \chi \bar{k}^2} \\ \Rightarrow G(\bar{z}, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n \bar{k} d\omega e^{i(\bar{k}\bar{z} - \omega\tau)} \frac{1}{-i\omega + \chi \bar{k}^2} \end{aligned}$$

calcolo l'integrale in  $d\omega$  con il teorema dei residui, chiudendo sopra se  $\tau$  è positiva, e viceversa

$$\begin{aligned} i\omega + \chi \bar{k}^2 = 0 &\Rightarrow \omega = -i\chi \bar{k}^2 \\ \int d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{-i(\omega + i\chi \bar{k}^2)} &=: \int F(\omega) d\omega \\ e^{-i\omega\tau} &= e^{-i(Re\omega + iIm\omega)\tau} \\ \tau > 0 &\Rightarrow Im\omega < 0 \\ \tau < 0 &\Rightarrow Im\omega > 0 \Rightarrow G(\bar{z}, t) = 0 \end{aligned}$$

per  $\tau \leq 0$ , cioè  $t - t' < 0$

$$F(\omega) d\omega = \frac{e^{-i\tau(\rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi)}}{-i(\rho e^{i\varphi} + i\chi \bar{k}^2)} \rho e^{i\varphi} i d\varphi =: f(\varphi) d\varphi$$

vado a risolvere l'integrale

$$\left| \int_0^\pi f(\varphi) d\varphi \right| \leq \int_0^\pi |f(\varphi)| d\varphi = \int_0^\pi \frac{e^{\tau \rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{|\rho e^{i\varphi} + i\chi \bar{k}^2|} =$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{\sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi + \chi \bar{k}^2)^2}} = \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \sin \varphi \chi \bar{k}^2 + \chi^2 \bar{k}^4}}$$

posso minorare il denominatore con  $\rho^2$  e ottengo

$$\leq \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{\rho} = 2 \int_0^{\pi/2} e^{\tau\rho \sin \varphi} d\varphi$$

So che in  $[0, \frac{\pi}{2}] : \sin \varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$

$$\begin{aligned} (\tau < 0) &\Rightarrow \tau\rho \sin \varphi \leq \tau\rho \frac{2\varphi}{\pi} \\ \Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} e^{\tau\rho \sin \varphi} d\varphi &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{\tau\rho \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{\frac{2\tau\rho}{\pi} \varphi} d\varphi = 2 \left[ \frac{\pi}{2\tau\rho} e^{\frac{2\tau\rho}{\pi} \varphi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\tau\rho} (e^{\tau\rho} - 1) \rightarrow (\rho \rightarrow \infty) 0 \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che anche per il cammino sotto l'integrale per  $\rho \rightarrow \infty$  tende a 0. Restano da calcolare i residui.

$$ResF(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -i\chi \bar{k}^2} F(\omega) \cdot (\omega + i\chi \bar{k}^2) = ie^{-i\tau(-i\chi \bar{k}^2)} = ie^{-\tau\chi \bar{k}^2}$$

Per  $\tau > 0$  chiudo l'integrale sotto. Il valore dell'integrale sull'asse reale è la differenza tra l'integrale sul cammino chiuso e quello sul solo semicerchio sotto.

$$\tau > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) = (residui) = -2\pi i ResF(\omega) = -2\pi i e^{-\tau\chi \bar{k}^2} = 2\pi e^{-\tau\chi \bar{k}^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(\bar{z}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{z} - \tau\chi \bar{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(\frac{-\bar{z}^2}{4\tau\chi}\right) \int d^n \bar{k} e^{-\tau\chi \left(\bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\tau\chi}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\tau\chi}\right) \sqrt{\frac{\pi^n}{\chi\tau}} = \frac{1}{(4\pi\tau\chi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi\tau}\right) \quad (2.18) \end{aligned}$$

→ nucleo di calore!

$$G(\bar{z}, \tau) = 0, \tau > 0 \quad (2.19)$$

→ soluzione particolare dell'equazione del calore con sorgente:

$$T(\bar{x}, t) = (17) = \int d^n \bar{x}' \int_{-\infty=0}^t dt' G(\bar{x} - \bar{x}', t - t') S(\bar{x}', t')$$

Soluzione generale dell'equazione omogenea

$$T_{om}(\bar{x}, t) = (11) = \int d^n \bar{x}' G(\bar{x} - \bar{x}', t) T_0(\bar{x}')$$

Soluzione generale dell'equazione non omogenea

$$T(\bar{x}, t) = T_p(\bar{x}, t) + T_{om}(\bar{x}, t)$$

supponi  $S(\bar{x}', t') = 0$  per  $t' < 0 \Rightarrow T_p(\bar{x}, t) = 0$ , e quindi abbiamo che  $T(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x})$

-Considera il problema di Dirichlet in un dominio connesso ( o su una varietà curva con bordo)  $U$ .  $\lambda_n$  : autovalori del problema di Dirichlet,  $\phi$  : autofunzioni di  $\Delta$

$$\begin{aligned} \Delta\phi + \lambda\phi &= 0 & \text{in } U \\ \phi &= 0 & \text{su } \partial U \end{aligned}$$

$$G(t, \bar{x}, \bar{y}) = \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\bar{x}) \phi_n(\bar{y}) \quad (2.20)$$

$$T(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} G(t, \bar{x}, \bar{y}) t_0(\bar{y}) = \int d^d \bar{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\bar{x}) \phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y}) \quad (2.21)$$

La (20) è un esempio di una funzione di Green che non dipende solo da  $\bar{x} - \bar{y}$ , ma da  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  separatamente. Motivo: rottura dell'invarianza per traslazioni a causa del bordo  $\partial U$

Check:  $T(\bar{x}, 0) = (21) =$

$$= \int d^d \bar{y} \sum_n \phi_n(\bar{x}) \phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y}) = \int d^d \bar{y} \delta(\bar{x} - \bar{y}) T_0(\bar{y}) = T_0(\bar{x})$$

$$T(\bar{x}, t)|_{\bar{x} \in \partial U} = \int d^d \bar{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial U} \phi_n(\bar{y}) t_0(\bar{y}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} \sum_n (-\lambda_n \chi) e^{-\lambda_n \chi t} \cdot \phi_n(\bar{x}) \phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y})$$

$$\chi \Delta_{\bar{x}} T(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \chi \Delta_{\bar{x}} \phi_n(\bar{x}) \phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y}) = (\chi \Delta_{\bar{x}} \phi_n(\bar{x}) = -\lambda_n \phi_n(\bar{x})) = \frac{\partial}{\partial t} T(\bar{x}, t)$$

Esempio:  $U = [0, L] \rightarrow$  da risolvere  $\partial_t T = \chi \partial_x^2 T$ ,  $x \in [0, L]$ ,  $t > 0$  condizioni al contorno  $T(0, t) = 0 = T(L, t)$ ,  $T(x, 0) = T_0(x)$

$$\partial_x^2 \phi = -\lambda \phi \rightarrow \phi = \phi_0 \sin \frac{n\pi}{L} x, n = 0, 1, 2, \dots, \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\int_0^L dx \phi_n(x)^2 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$(20) \Rightarrow G(t, x, y) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{\chi t}{L^2}} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y \quad (2.22)$$

$$(21) \Rightarrow T(x, t) = \int_0^L dy \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{\chi t}{L^2}} \cdot \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y T_0(y) \quad (2.23)$$

Sviluppo  $T_0(y)$  in serie di Fourier:

$$T_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} y \quad (2.24)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(y) \sin \frac{n\pi}{L} y dy \quad (2.25)$$

Usando la (25), posso riscrivere la (23)

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{\chi t}{L^2}} \frac{\chi t}{L^2} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (2.26)$$

N.B.: la (20) vale anche per varietà compatte senza bordo (p.e.  $S^2$ )

Compiti a casa: i) risolvere  $\partial_t T = \chi \Delta T$  nel cubo

$$\begin{aligned} \partial_t T &= \chi \Delta T \\ 0 \leq x \leq L \quad 0 \leq y \leq L \quad 0 \leq z \leq L \quad t &\geq 0 \\ T(\bar{x}, 0) &= T_0(\bar{x}) \\ T(\bar{x}, t) &= 0 \quad x = 0, L \quad y = 0, L \quad z = 0, L \end{aligned}$$

ii) le (20),(21) valgono anche per il problema di Neumann  $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$  in  $U$  m  $\bar{n} \cdot \bar{\nabla}\phi = 0$  su  $\partial U$  ( $\bar{n}$ : versore normale al bordo). Perchè? (p.e. verificare che  $\bar{n} \cdot \bar{\nabla}T|_{\bar{x} \in \partial U} = 0$  risolvere l'equazione del calore nel cubo con pareti isolati (nessun flusso termico attraverso le pareti, vedi equazione (1))

$$\begin{aligned} T(\bar{x}, 0) &= T_0(\bar{x}) \\ \partial_x T &= 0 & x = 0, L \\ \partial_y T &= 0 & y = 0, L \\ \partial_z T &= 0 & z = 0, L \end{aligned}$$

iii) Risolvere l'equazione del calore sulla 2-sfera. Suggerimento: scrivere il laplaciano in coordinate sferiche

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial^2 \varphi) \quad (2.27)$$

porre  $r = \cos t$  e usare

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta Y_l^m) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y_l^m = -\lambda Y_l^m \quad (2.28)$$

con  $\lambda = l(l+1)$ ,  $Y_l^m$  armoniche sferiche. Sostituire le (24),(25) col corrispondente sviluppo in armoniche sferiche.

-Parentesi: soluzione di  $\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x}, \bar{y}) = -\delta(\bar{x} - \bar{y})$  in d dimensioni.

consideriamo un problema un po' più generale:

$$(\Delta_{\bar{x}} - m^2) G(\bar{x} - \bar{y}) = -\delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (2.29)$$

→ G è il nucleo dell'equazione di Helmholtz

$$(\Delta_{\bar{x}} - m^2) f = -S \quad (2.30)$$

(soluzione:  $f(\bar{x}) = \int d^d \bar{x}' G(\bar{x} - \bar{x}') S(\bar{x}')$ ) G è il propagatore per un campo scalare in d dimensioni Euclidee (→ teoria quantistica dei campi). Uso la trasformata di Fourier per riportarmi ad un'equazione algebrica

$$\begin{aligned} G(\bar{x} - \bar{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} \tilde{G}(\bar{k}) \\ \delta(\bar{x} - \bar{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} \Rightarrow (-k^2 - m^2) \tilde{G}(\bar{k}) = -1 \Rightarrow \tilde{G}(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{k}^2 + m^2} \\ &\Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} \frac{e^{i\bar{k}\bar{z}}}{\bar{k}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Uso

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{k}^2 + m^2} &= \int_0^\infty \exp(-\tau(\bar{k}^2 + m^2)) d\tau \quad (2.32) \\ \Rightarrow G(\bar{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau m^2} \cdot \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{z} - \tau \bar{k}^2} \\ i\bar{k}\bar{z} - \tau \bar{k}^2 &= -\tau \left( \bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\tau} \right)^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\tau} \\ \bar{k}' &:= \bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\tau} \\ \Rightarrow G(\bar{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau m^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\tau}} \cdot \int d^d \bar{k}' e^{-\tau \bar{k}'^2} \\ \int d^d \bar{k}' e^{-\tau \bar{k}'^2} &= \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^{d/2} \quad (\tau > 0) \\ \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \tau^{-d/2} e^{-\tau m^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\tau}} d\tau \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\tau &:= \frac{m^{-1}}{2} |\bar{z}| e^t, \quad d\tau = \frac{m^{-1}}{2} |\bar{z}| e^t dt \\
\tau^{-\frac{d}{2}} &= \left( \frac{m^{-1} |\bar{z}|}{2} \right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{d}{2} t} \\
-\tau m^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\tau} &= -\frac{m^{-1}}{2} |\bar{z}| e^t m^2 \\
-\frac{\bar{z}^2}{4\tau} \frac{2m}{|\bar{z}|} e^{-t} &= -m |\bar{z}| \cosh t \\
\Rightarrow G(\bar{z}) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt y \left( \frac{|\bar{z}|}{2m} \right)^{1-d/2} e^{(1-d/2)t} e^{-m|\bar{z}| \cosh t} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \\
&\quad \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{-\infty}^0 dt \left( \frac{|\bar{z}|}{2m} \right)^{1-d/2} e^{(1-d/2)t} e^{-m|\bar{z}| \cosh t} \\
(t' = -t) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^{\infty} dt' \left( \frac{|\bar{z}|}{2m} \right)^{1-d/2} e^{-(1-d/2)t'} e^{-m|\bar{z}| \cosh t'} \\
(t' \rightarrow t) \Rightarrow G(\bar{z}) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^{\infty} dt \left( \frac{|\bar{z}|}{2m} \right)^{1-d/2} \cdot 2 \cosh((1-d/2)t) e^{-m|\bar{z}| \cosh t}
\end{aligned}$$

funzione di Bessel modificata del 2 tipo:

$$K_\nu(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t} \cosh(\nu t) dt \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
\text{Re } x > 0 &\Rightarrow K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \\
\Rightarrow G(\bar{z}) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{|\bar{z}|}{2m} \right)^{1-d/2} \cdot 2 K_{1-d/2}(m|\bar{z}|) \\
\Rightarrow G(\bar{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m^{d-2} (|\bar{z}|m)^{1-d/2} \cdot K_{1-d/2}(m|\bar{z}|) \quad (2.34)
\end{aligned}$$

$m \rightarrow 0$  : usa

$$K_\nu(x)(x \rightarrow 0) \begin{cases} -\gamma - \ln \frac{x}{2} & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left( \frac{2}{x} \right)^{2\nu} & \nu > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

dove  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,577$  costante di Eulero-Mascheroni.

$\Gamma(\nu)$ : funzione gamma di Eulero, estende il concetto di fattoriale ai numeri complessi, el senso che per ogni numero intero non negativo  $n$  si ha  $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re } z > 0 \quad (2.36)$$

Esercizio: integrando per parti, dimostrare che

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.37)$$

$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$  Usando questa la definizione della  $\Gamma$  può essere estesa al piano  $\text{Re } z < 0 \Rightarrow$  per  $d+2$  e  $m \rightarrow 0$ , la (34) diventa

$$G(\bar{z}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m^{\frac{d-2}{2}} |\bar{z}|^{1-d/2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2} \left( \frac{2}{m|\bar{z}|} \right)^{d/2-1} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{d/2} |\bar{z}|^{d-2}} \quad (2.38)$$

corrisponde al potenziale di una carica puntiforme in d-dimensioni.  
Caso  $d = 3$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{4\pi|\bar{z}|} \quad (38')$$

Caso limite  $d = 2$ :

$$(34) \Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} K_0(m|\bar{z}|) \quad (39) \quad (2.39)$$

$$(35)(m \rightarrow 0) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \left( -\gamma - \ln \frac{m|\bar{z}|}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} (-\gamma - \ln m + \ln 2 - \ln|\bar{z}|)$$

Chiaro:  $G$  definita a meno di una costante additiva nel caso  $m \rightarrow 0$ .

$$\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x} - \bar{y}) = -\delta(|x - \bar{y}|) \Rightarrow G(\bar{z}) = -\frac{\ln|\bar{z}|}{2\pi} \quad (40) \quad (2.40)$$

Check:  $\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x}) = -\delta(\bar{x})$

A causa dell'invarianza per rotazioni,  $G$  dipende solo da  $|\bar{x}|$ , se le condizioni al contorno non rompono l'invarianza. Passo in coordinate polari per controllare.

Coordinate polari:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

considero  $r \neq 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{-\ln r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \left( -\frac{1}{r} \right) \right) = 0 \quad \checkmark$$

Per verificare che  $\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x}) = -\delta(\bar{x})$  integro  $\Delta G$  su un disco  $D$  centrato in zero, con raggio  $\epsilon$

$$\int_D \Delta G d^2 \bar{x} = \int_D \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} G) d^2 \bar{x}$$

Uso Gauss per passare a un integrale di bordo

$$= \int_{\partial D} \bar{n} \cdot \underline{\nabla} G ds \quad \bar{n} = \bar{e}_r, \quad ds = r d\varphi$$

$$\int_{\partial D} \bar{n} \cdot \underline{\nabla} G ds = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} G \right) r d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi r} r d\varphi = -1 = - \int_D \delta(\bar{x}) d^2 \bar{x} \quad \checkmark$$

ho ottenuto il nucleo del laplaciano in due dimensioni, che corrisponde al potenziale elettrostatico in due dimensioni

## 2.1 Flusso di calore in un cilindro infinito

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \chi \Delta T$$

$$T(\bar{x}, t) = 0 \quad \bar{x} \text{ sul bordo}$$

$$T(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x})$$

la simmetria del problema suggerisce di usare le coordinate cilindriche:  $r, \varphi, z$ , con  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$0 \leq r \leq L, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

### 2.1.1 Separazione delle variabili

$$T(r, \varphi, z, t) = \tau(t)R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \tau'(t)R\Phi Z$$

$$\Delta T = \tau(R'' + \frac{1}{r}R')\Phi Z + \tau R \frac{1}{r^2}\Phi'' Z + \tau R\Phi Z'' = \frac{1}{\chi}\tau' R\Phi Z \Rightarrow \frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{\chi}\frac{\tau'}{\tau} = 0$$

la funzione di  $Z$  è costante  $= C_2$ , e analogamente la funzione di  $t = C_2$ , di conseguenza la parte rimanente in  $r, \varphi = C_1 - C_2$

$$\begin{aligned} \tau' &= \chi\tau C_1 & \tau &= \tau_0 e^{\chi C_1 t} \\ Z'' &= C_2 Z & Z &= Z_0 e^{\sqrt{C_2}z} + Z_1 e^{-\sqrt{C_2}z} \end{aligned}$$

$$r^2 \frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{\Phi''}{\Phi} = (C_1 - C_2)r^2 \Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = cost := -\lambda^2$$

$$^2 \frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') + (C_2 - C_1)r^2 = \lambda^2 \Rightarrow \Phi = \Phi_0 \cos \lambda\varphi + \Phi_1 \sin \lambda\varphi = \Phi_0 \cos \lambda(\varphi + 2\pi) + \Phi_1 \sin \lambda(\varphi + 2\pi) = \phi_0(\cos \lambda\varphi \cos 2\pi\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \phi_0 \cos 2\pi\lambda + \phi_1 \sin 2\pi\lambda &= \phi_0 \\ -\phi_0 \sin 2\pi\lambda + \phi_1 \cos 2\pi\lambda &= \phi_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda - 1 & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = 0$$

ho una soluzione non banale se il determinante è nullo  $\Rightarrow \cos 2\pi\lambda = 1, \sin 2\pi\lambda = 0, \lambda = m, m \in \mathbb{Z}$ .

Basta prendere  $m \in \mathbb{N}_0$ , per cui le funzioni  $\Phi$  formano un sistema completo.

Passo all'equazione radiale:

$$r^2 R'' + rR' + ((C_2 - C_1)r^2 - m^2)R = 0$$

Supponiamo per semplicità che  $T_0(\bar{x})$  dipenda solo da  $r, \varphi$ .

$$T(r, \varphi, z, 0) = \tau_0 R\Phi Z' = T_0(r, \varphi) \Rightarrow Z = cost \Rightarrow C_2 = 0$$

$$Z = Z_0 e^{\sqrt{C_2}z} + Z_1 e^{-\sqrt{C_2}z}$$

senza perdere la generalità, poniamo  $Z = 1, C_1 < 0$  altrimenti  $T$  diverge per  $t \rightarrow \infty$  ( $\tau = \tau_0 e^{\chi C_1 t}$ ) (Inoltre si può far vedere che la soluzione dell'equazione radiale (con  $C_2 = 0$ ) diverge nell'origine (per le nostre condizioni al contorno) se  $C_1 > 0$ ) Pongo  $x := \sqrt{|C_1|}r$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2)R = 0 \quad (2.41)$$

equazione differenziale di Bessel. Cerca soluzioni della forma

$$R(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.42)$$

$$(a_0 \neq 0) \Rightarrow R'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sum_n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n a_n x^{n-1}$$

$$R''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \sum_n a_n x^n + 2\alpha x^{\alpha-1} \sum_n a_n x^{n-1} + x^\alpha \sum_n n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$(41) \Rightarrow \alpha(\alpha-1)x^\alpha \sum_n a_n x^n + 2\alpha x^\alpha \sum_n n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n(n-1)a_n x^n + \alpha x^\alpha \sum_n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n a_n x^n + (x^2 - m^2)x^\alpha \sum_n a_n x^n$$

studio il prefattore di  $x^0$ :  $\alpha^2 a_0 - m^2 a_0 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm m$ . Scarto la soluzione  $\alpha = -m$  perchè non fisica (divergerebbe sull'asse del cilindro).

Soluzione regolare in  $x = 0$ :  $\alpha = m$ . In tal caso:

$$2m \sum_n n a_n x^n + \sum_n n^2 a_n x^n + \sum_n a_n x^{n+2} = 0 \quad (2.43)$$

sostituisco nell'ultimo pezzo  $n + 2 = n'$

$$\sum_{n'} a_{n'-2} x^{n'}$$

$$x^1 : 2ma_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$\Rightarrow$  la (43) diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n (a_n(2mn + n^2) + a_{n-2}) = 0 \Rightarrow a_n := -\frac{a_n - 2}{2mn + n^2} \quad (2.44)$$

$\rightarrow$  relazione di ricorrenza

scegliendo  $a_0 = \frac{2^{-m}}{m!}$  per motivi di normalizzazione, si ottiene la soluzione

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k!(m+k)!} \quad (2.45)$$

dove per m non interi si definisce  $m! := \Gamma(m+1)$   $J_m$  : funzione di Bessel del 1 tipo

$\Rightarrow R = J_m(\sqrt{|C_1|}r)$ , impongo le condizioni al contorno  $T(r = L, \varphi, z, t) = 0$

$$\Rightarrow R(r = L) = 0 \Rightarrow J_m(\sqrt{|C_1|}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{|C_1|}L = j_k^{(m)}, \quad k = 1, 2, \dots \Rightarrow C_1 = -\left(\frac{j_k^{(m)}}{L}\right)^2$$

dove  $j_k^{(m)}$  sono gli zeri positivi di  $J_m(x)$ , noti numericamente.

$$\Rightarrow T(r, \varphi, z, t) = \tau_0 e^{-\chi \left(\frac{j_k^{(m)}}{L}\right)^2 t} \cdot J_m\left(j_k^{(m)} \frac{r}{L}\right) (\phi_0 \cos m\varphi + \phi_1 \sin r\varphi)$$

la costante  $\tau_0$  si può riassorbire in  $\phi_0, \phi_1$ , quindi la pongo =1. La soluzione generale sarà una combinazione lineare di queste soluzioni.

$$T(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\chi \left(\frac{j_k^{(m)}}{L}\right)^2 t} J_m\left(j_k^{(m)} \frac{r}{L}\right) (C_{km} \cos m\varphi + S_{km} \sin m\varphi) \quad (2.46)$$

$$T(r, \varphi, z, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_m\left(j_k^{(m)} \frac{r}{L}\right) (C_{km} \cos m\varphi + S_{km} \sin m\varphi) = T_0(r, \varphi) \quad (2.47)$$

la (47) forma un sistema di funzioni completo nel cilindro  $\rightarrow$  qualsiasi funzione  $T_0(r, \varphi)$  con  $T_0(L, \varphi) = 0$  possiede uno sviluppo di questo tipo. Devono essere scelte delle costanti  $C_{km}, S_{km}$  appropriate, invertendo la (47)

## 2.2 Problemi non omogenei

spesso la separazione delle variabili riduce delle equazioni differenziali alle derivate parziali a delle equazioni differenziali ordinarie, come p.e.

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad (2.48)$$

Ipotesi:  $a(x)$  continuamente differenziabile;  $b, c$  continue. Moltiplica la (48) con  $\frac{1}{a(x)} \exp\left(\int_{\alpha}^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi\right)$  e definisco

$$p(x) := \exp\left(\int_{\alpha}^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi\right)$$

$$q(x) := \frac{c(x)}{a(x)}p(x), \quad f(x) := \frac{F(x)}{a(x)}p(x)$$

posso scrivere la "forma autoaggiunta" della (48)

$$(48) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu = f(x) \quad (2.49)$$

digressione:

$$p \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} u \right) + pqu = pf$$

definisco  $pq := \omega^2(x)$ ,  $pf := g$  e y attraverso

$$\frac{d}{dy} = p(x) \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{p(x)} = dy \Rightarrow y = \int \frac{dx}{p(x)}$$

ottengo

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \omega^2(y)u = g$$

è un'equazione di oscillatore armonico con frequenza  $\omega$  che dipende dal "tempo"  $y$ , dove  $g$  è una forzante. Viene chiamato "oscillatore di Ermakoff", e trova applicazioni in Cosmologia (equazione di Sasaki-Mukhonov) per quanto riguarda la teoria dell'inflazione.

Equazione omogenea:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + qv = 0 \quad (2.50)$$

possiede 2 soluzioni  $v_1, v_2$  linearmente indipendenti  $\Rightarrow$  soluzione generale:

$$v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x), \quad c_1, c_2 \text{ cost}$$

considera la funzione

$$w(x) = v_1(x) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - v_2(x) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi \quad (2.51)$$

(paragona con il metodo della variazione delle costanti)

$$\begin{aligned} \Rightarrow w'(x) &= v_1'(x) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - v_2'(x) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi + v_1(x) v_2(x) f(x) - v_2(x) v_1(x) f(x) = \\ &= v_1'(x) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - v_2'(x) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dw}{dx} \right) &= \\ \frac{d}{dx} (p(x) v_1'(x)) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - \frac{d}{dx} (p(x) v_2'(x)) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi &+ p(x) v_1'(x) v_2(x) f(x) - p(x) v_2'(x) v_1(x) f(x) \end{aligned}$$

i coefficienti davanti agli integrali corrispondono rispettivamente a  $-qv_1$  e  $-qv_2$

$$-q(x)w(x) + p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x))f(x)$$

Inoltre:

$$\frac{d}{dx} \{ p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x)) \}$$

deve avere il Wronskiano

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ & = \frac{d}{dx}(pv'_1)v_2 - \frac{d}{dx}(pv'_2)v_1 + pv'_1v'_2 - pv'_2v'_1 = 0 \\ & \Rightarrow p(x)(v'_1(x)v_2(x) - v'_2(x)v_1(x)) = K \quad \text{costante} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dw}{dx} \right) + qw = Kf \quad (2.52)$$

Inoltre, se  $v'_1, v'_2$  sono limitati per  $x \rightarrow \alpha$ ,  $w(\alpha) = w'(\alpha) = 0$

$$(52) : K \Rightarrow \frac{w(x)}{K} = u(x) = \int_{\alpha}^x R(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.53)$$

con

$$R(x, \xi) := \frac{v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)}{p(x)(v'_1(x)v_2(x) - v'_2(x)v_1(x))} \quad (2.54)$$

è una soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu = f(x) & x > \alpha \\ u(\alpha) = u'(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Il denominatore della (54) è costante  $\Rightarrow R(x, \xi)$  soddisfa l'equazione omogenea (50) sia come funzione di  $x$  che di  $\xi$ . (NB:  $R(x, \xi) = -R(\xi, x)$ ). Per  $\xi$  fissato:  $R(x, \xi)$  è la soluzione del problema omogeneo ai valori iniziali

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dR}{dx} \right) + q(x)R = 0, \quad x > \xi \\ & R|_{x=\xi} = 0 \quad \frac{dR}{dx} \Big|_{x=\xi} = (54) = \frac{1}{p(\xi)} \quad (2.56) \end{aligned}$$

$R(x, \xi)$ : funzione di Green (one-sided).

esempio: oscillatore armonico invertito

$$\begin{cases} u'' - u = f(x) & x > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

soluzione per  $\xi$  fissato,  $R(x, \xi)$  soddisfa

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dx^2} - R = 0, \quad x > \xi \\ & R|_{x=\xi} = 0, \quad \frac{dR}{dx} \Big|_{x=\xi} = 1 \\ & \Rightarrow R = A(\xi) \sinh(x) + B(\xi) \cosh(x) \\ & R|_{x=\xi} = A \sinh \xi + B \cosh \xi = 0 \\ & \frac{dR}{dx} \Big|_{x=\xi} = A \cosh \xi + B \sinh \xi = 1 \\ & \Rightarrow A = \cosh \xi, \quad B = -\sinh \xi, \Rightarrow R = \sinh(x - \xi) \\ & (53) \Rightarrow u(x) = \int_0^x f(\xi) \sinh(x - \xi) d\xi \end{aligned}$$

N.B. i) Se  $u(\alpha), u'(\alpha) \neq 0 \implies$  aggiungi soluzione  $c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$  dell'equazione omogenea, in modo tale da soddisfare le nuove condizioni iniziali. Nell'esempio sopra:

$$u(x) = \int_0^x f(\xi) \sinh(x - \xi) d\xi + c_1 \sinh(x) + c_2 \cosh(x)$$

soddisfa  $u(0) = c_2, u'(0) = c_1$

ii) (53)  $\Rightarrow$  Il valore di  $u(x)$  dipende solo da  $f(\xi)$  per  $\xi < x$ . Comportamento molto simile a quelle delle equazioni alle derivate parziali iperboliche (vedi piu tardi)

## 2.3 Problema ai valori al contorno

Risolvi p.e.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu = -f(x) & \alpha < x < \beta \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0 \end{cases}$$

(ndr il - davanti a  $f(x)$  viene messo per convenienza)

soluzione generale:

$$u(x) = - \int_{\alpha}^x R(\xi, x) f(\xi) d\xi + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} u(\alpha) = c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = 0 \\ u(\beta) = - \int_{\alpha}^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi + c_1 v_1(\beta) + c_2 v_2(\beta) = 0 \end{cases} \quad (58) \quad (2.58)$$

La (58) ha una soluzione per  $c_1, c_2$  se  $D := v_1(\alpha)v_2(\beta) - v_2(\alpha)v_1(\beta) \neq 0$ . In tal caso

$$c_1 = - \frac{v_2(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi = - \frac{v_2(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^x R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi - \frac{v_2(\alpha)}{D} \int_x^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$c_2 = \frac{v_1(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi = \frac{v_1(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^x R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{v_1(\alpha)}{D} \int_x^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow u(x) = - \int_{\alpha}^x \left[ R(x, \xi) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) \right] f(\xi) d\xi - \int_x^{\beta} \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} R(x, \xi) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) &= (54) = \\ \frac{v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)}{KD} (v_1(\alpha)v_2(\beta) - v_2(\alpha)v_1(\beta)) &+ \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} \frac{v_1(\beta)v_2(\xi) - v_2(\beta)v_1(\xi)}{K} \\ \frac{1}{KD} (v_1(\alpha)v_2(\xi) - v_2(\alpha)v_1(\xi)) (v_1(x)v_2(\beta) - v_2(x)v_1(\beta)) \end{aligned}$$

Definisco G

$$G(x, \xi) := \begin{cases} \frac{1}{KD} (v_1(\xi)v_2(\alpha) - v_2(\xi)v_1(\alpha)) (v_1(x)v_2(\beta) - v_2(x)v_1(\beta)) & \xi \leq x \\ \frac{1}{KD} (v_1(x)v_2(\alpha) - v_2(x)v_1(\alpha)) (v_1(\xi)v_2(\beta) - v_2(\xi)v_1(\beta)) & x \leq \xi \end{cases} \quad (59) \quad (2.59)$$

$\implies$  soluzione del problema ai valori al contorno (57):

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (60) \quad (2.60)$$

$G(x, \xi)$  è una funzione di Green

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad (2.61)$$

per determinare  $G$  notiamo che per ogni  $\xi$  soddisfa il problema ai valori al contorno

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dG}{dx} \right) + q(x)G &= 0 \quad x \neq \xi \\ G|_{x=\alpha} &= G|_{x=\beta} = 0 \\ G_{x=\xi+0} &= G|_{\xi-0} \\ G &\text{continua in } \xi \\ \frac{dG}{dx}|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx}|_{x=\xi-0} &= -\frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$\frac{dG}{dx}$  discontinua in  $x = \xi$ . (Usare la (59). Per ricavare l'ultima equazione bisogna usare anche la definizione di  $K$ )

Esempio:

$$((1+x)^2 u')' - u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( (1+x)^2 \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right) - G(x, \xi) = 0$$

$$\text{Prova } G(x, \xi) = c(\xi)(1+x)^\alpha \Rightarrow \frac{dG}{dx} = c\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\left( (1+x)^2 \frac{dG}{dx} \right)' = (c\alpha(1+x)^{\alpha+1})' = c\alpha(\alpha+1)(1+x)^\alpha = G = c(1+x)^\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) := \alpha_\pm$$

devo separare i casi  $x > \xi$  e  $x < \xi$

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} c_+(\xi)(1+x)^{\alpha_+} + c_-(\xi)(1+x)^{\alpha_-} & x < \xi \\ \tilde{c}_+(\xi)(1+x)^{\alpha_+} + \tilde{c}_-(\xi)(1+x)^{\alpha_-} & x > \xi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G|_{x=0} = c_+ + c_- &= 0 \quad \Rightarrow c_- = -c_+ \\ G|_{x=1} = \tilde{c}_+ 2^{\alpha_+} + \tilde{c}_- 2^{\alpha_-} &= 0 \quad \Rightarrow \tilde{c}_- = -\tilde{c}_+ 2^{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \{c_+(\xi)((1+x)^{\alpha_+})\}$$

$$G(x, \xi) = \{c_+(x)((1+\xi)^{\alpha_-})\}$$

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-})((1+x)^{\alpha_+} - (1+x)^{\alpha_-}) & x < \xi \\ \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-})((1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}) & x > \xi \end{cases}$$

$$\Rightarrow G|_{x=\xi+0} = G|_{x=\xi-0}$$

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi+0} = \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-})(\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_++1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{\alpha_- - 1})$$

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi-0} = \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-})(\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_++1} - \alpha_-(1+\xi)^{\alpha_- - 1})$$

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi-0}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda \left[ \alpha_+(1+\xi)^{2\alpha_+-1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{\alpha_++\alpha_- - 1} - \alpha_+(1+\xi)^{\alpha_- + \alpha_+ - 1} + 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{2\alpha_- - 1} - \right. \\ &\left. \alpha_+(1+\xi)^{2\alpha_+ - 1} + \alpha_-(1+\xi)^{\alpha_++\alpha_- - 1} + 2^{\sqrt{5}}\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_- + \alpha_+ - 1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{2\alpha_- - 1} \right] = -\frac{1}{p(\xi)} = -\frac{1}{(1+\xi)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\alpha_+ + \alpha_- - 1 &= -2 \\ \Rightarrow \lambda \left[ -2\sqrt{5}\alpha_- - \alpha_+ + \alpha_- + 2\sqrt{5}\alpha_+ \right] &= -1\end{aligned}$$

→ determina  $\lambda$

Problema ai valori al contorno piu generale:

$$(pu')' + qu = -f, \quad \alpha < x < \beta, \quad u(\alpha) = a, u(\beta) = b \quad (2.63)$$

A tal fine: nota che  $\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha)$  soddisfa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) \right) \right] + q(x) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) &= 0, \quad \alpha < x < \beta \\ \frac{\partial G}{\partial \xi}(\alpha, \alpha) &= \frac{1}{p(\alpha)}, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi}(\beta, \alpha) = 0\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) \right) \right] + q(x) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) &= 0, \quad \alpha < x < \beta \\ \frac{\partial G}{\partial \xi}(\alpha, \beta) &= 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi}(\beta, \beta) = -\frac{1}{p(\beta)}\end{aligned}$$

(seguono dalla definizione (59) → compito)

il problema (63) ha la soluzione

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + ap(\alpha) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) - bp(\beta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) \quad (2.64)$$

combinazione lineare di soluzione particolare (l'integrale) e soluzione dell'omogenea (il resto).

Nella soluzione del problema (57) abbiamo dovuto assumere  $D \neq 0$ .

Caso  $D = 0$ : le equazioni

$$c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = 0$$

$$c_1 v_1(\beta) + c_2 v_2(\beta) = 0$$

ammettono soluzione non banale  $\Rightarrow v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$  soddisfa

$$(pv')' + qv = 0, \quad \alpha < x < \beta, \quad v(\alpha) = v(\beta) = 0$$

Se  $u$  è una soluzione del problema (63), lo è anche  $u + cv$ ,  $\forall c$  costante.  $\Rightarrow$  il problema (63) non può avere soluzione unica. Inoltre:

moltiplica la (63) con  $v$  e integra da  $\alpha$  a  $\beta$ :

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f(x) v(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} v(x) ((pu')' + qu) dx$$

integro due volte per parti

$$= [vpv' - v'pv]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} u [(pv')' + qv] dx = p(\alpha) v'(\alpha) a - p(\beta) v'(\beta) b$$

dove l'integranda è nulla.  $v(pu')' \rightarrow -v'pu' \rightarrow (v'p)'u$

Se il problema (63) deve avere una soluzione, la funzione  $f$  e le due costanti  $a, b$  devono soddisfare

$$p(\alpha) v'(\alpha) a - p(\beta) v'(\beta) b = - \int_{\alpha}^{\beta} v(x) f(x) dx$$

altrimenti non ci può essere una soluzione del problema.

⇒ nel caso  $D=0$ , il problema (63) può avere nessuna soluzione o molte soluzioni, ma mai una sola soluzione.

Problemi ai valori al contorno ancora più generali:

$$\begin{aligned}(pu')' + qu &= -f(x), & \alpha < x < \beta \\ -\mu_1 u'(\alpha) + \sigma_1 u(\alpha) &= a, \\ \mu_2 u'(\beta) + \sigma_2 u(\beta) &= a\end{aligned}\quad (2.65)$$

(condizione al contorno di Robin).

La funzione di Green  $G(x, \xi)$  si ricava come prima se

$$D := [-\mu_1 v_1'(\alpha) + \sigma_1 v_1(\alpha)] \cdot [\mu_2 v_2'(\beta) + \sigma_2 v_2(\beta)] - [-\mu_1 v_2'(\alpha) + \sigma_1 v_2(\alpha)] \cdot [\mu_2 v_1'(\beta) + \sigma_2 v_1(\beta)] \neq 0$$

(esercizio)  $G(x, \xi)$  è la soluzione del problema

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dG}{dx} \right) + q(x)G &= 0 & x \neq \xi \\ -\mu_1 \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\alpha} + \sigma_1 G \Big|_{x=\alpha} &= \mu_2 \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\beta} + \sigma_2 G \Big|_{x=\beta} = 0 \\ G \Big|_{x=\xi+0} &= G \Big|_{x=\xi-0} \\ \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi-0} &= -\frac{1}{p(\xi)}\end{aligned}\quad (2.66)$$

(paragona con le (62), qui le condizioni al contorno su  $G$  sono più generali).  $G$  soddisfa ancora  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$

-Soluzione di (65):

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{p(\alpha)}{\mu_1} a G(x, \alpha) + \frac{p(\beta)}{\mu_2} b G(x, \beta) \quad (2.67)$$

$(\mu_1, \mu_2 \neq 0)$  se  $\mu_1 = 0$  sostituisci  $\frac{1}{\mu_1} G(x, \alpha)$  con  $\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha)$

se  $\mu_2 = 0$  sostituisci  $\frac{1}{\mu_2} G(x, \beta)$  con  $\frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta)$

(Siccome  $D \neq 0$  non può essere  $\mu_1 = \sigma_1 = 0$  oppure  $\mu_2 = \sigma_2 = 0$ )

Caso  $D=0$ : il problema (65) avrà nessuna soluzione o molte soluzioni ed è quindi ben posto se e solo se  $D \neq 0$ . In tal caso la soluzione è data dalla (67)

NB:

i) In un problema ai valori al contorno, il valore di  $u$  in un dato punto dipende dai valori di  $f(x)$  nell'intero intervallo  $(\alpha, \beta)$ . → Comportamento simile a quello delle equazioni alle derivate parziali ellittiche (vedi più tardi).

ii) Se una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea può essere indovinata, non è necessario usare le funzioni di Green

### 2.3.1 Applicazione del formalismo imparato

Conduzione di calore in un intervallo con sorgente

$$\begin{aligned}\partial_t T &= \chi \partial_x^2 T + S(x, t), & x \in [0, L], & t \geq 0 \\ T(0, t) &= T(L, t) = 0, & T(x, 0) &= 0\end{aligned}\quad (2.68)$$

Sviluppa  $T(x, t)$  in serie di Fourier

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.69)$$

con

$$b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L T(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (70), \text{ vedi (25)} \quad (2.70)$$

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (71a) \quad (2.71a)$$

$$s_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L S(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (71b) \quad (2.71b)$$

inserisco (69),(71a) nella (68)

$$\Rightarrow \partial_t b_n(t) = \chi \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) b_n(t) + s_n(t) \quad (2.72)$$

Questa si risolve facilmente col metodo di variazione delle costanti arbitrarie. Invece con la funzione di Green: Riscrivi la (72) nella forma

$$(p(t)u'(t))' = f(t)$$

$$\text{con } p(t) = \exp \left( \frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right), \quad u'(t) = b_n(t), \quad f(t) = p(t)s_n(t)$$

$$T(x, 0) = 0 \Rightarrow b_n(t) = 0 \Rightarrow u'(t) = 0$$

$u(t)$  è definita a meno di una costante additiva  $\rightarrow$  scegli  $u(t) = 0 \rightarrow$  problema ai valori iniziali (55). La funzione di Green  $R(t, \xi)$  dalla (56):

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dR}{dt} \right) = 0, \quad t > \xi$$

$$\Rightarrow p(t) \frac{dR}{dt} = C(\xi) \Rightarrow R = -C(\xi) \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right) + \tilde{C}(\xi)$$

$$R|_{t=\xi} = -C(\xi) \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) + \tilde{C}(\xi) = 0$$

$$\tilde{C}(\xi) = C \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) = \gamma(\xi) \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right)$$

$$\Rightarrow R(t, \xi) = \gamma(\xi) \left( \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) - \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right) \right)$$

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_{t=\xi} = \gamma \frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) = \frac{1}{p(\xi)} = \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right)$$

$$\gamma = \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \Rightarrow R(t, \xi) = \gamma(\xi) \left( \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) - \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right) \right)$$

$$u(t) = (53) = \int_0^t \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \left( \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) - \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right) \right) e^{\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi} s_n(\xi) d\xi$$

$$= \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \int_0^t \left( 1 - \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) \right) \cdot s_n(\xi) d\xi \equiv \int_0^t H(t, \xi) d\xi$$

$$b_n(t) = u'(t)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t H(t, \xi) d\xi &= H(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \xi) d\xi = \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \int_0^t \frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(t) d\xi = \\ &= \int_0^t \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(t) d\xi \end{aligned}$$

Nella (69):

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2}(t - \xi)\right) s_n(t) d\xi \sin \frac{n\pi x}{L}$$

riscrivo  $s_n(t)$  usando la (71b)

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(x, t) &= \int_0^t \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2}(t - \xi)\right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} S(y, \xi) dy d\xi \\ \Rightarrow T(x, t) &= \int_0^t \int_0^L G(t - \xi, x, y) S(y, \xi) dy d\xi \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$G(t - \xi, x, y) := \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2}(t - \xi)\right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} \quad (2.74)$$

è identica alla (22).

NB: se  $T(x, 0) = T_0(x)$  anziché 0, sostituisci  $b_n(0) = 0$  con

$$\begin{aligned} b_n(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n(t) &= \int_0^t \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2}(t - \xi)\right) s_n(\xi) d\xi + \underbrace{b_n(0) \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2}(t)\right)} \end{aligned}$$

Soluzione dell'equazione omogenea  $b'_n(t) = -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2}(t - \xi)\right) s_n(\xi) d\xi \sin \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \exp\left(-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ T(x, t) &= \int_0^t \int_0^L G(t - \xi, x, y) S(y, \xi) dy d\xi + \int_0^L G(t, x, y) T_0(y) dy \end{aligned} \quad (2.75)$$

-Abbiamo visto che la (74) coincide con la (22), ottenuta dalla (20). Questo vale in generale.: vogliamo risolvere

$$\begin{aligned} \partial_t T &= \chi \Delta T + S(\bar{x}, t), \quad \bar{x} \in U \\ T(\bar{x}, t)|_{\bar{x} \in U} &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

A tal fine: funzione di Green tale che

$$(\partial_t \chi \Delta_{\bar{x}}) G(t - t', \bar{x}, \bar{y}) = \delta(t - t') \delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (2.77)$$

$$\Rightarrow T(\bar{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_U d^d \bar{y} G(t - t', \bar{x}, \bar{y}) S(\bar{y}, t') \quad (2.78)$$

Sviluppa G e  $\delta$  secondo

$$\begin{aligned} G(t - t', \bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} e^{-i\omega(t-t')} \cdot \varphi_n(\bar{x}) \varphi_m(\bar{y}) \tilde{G}_{nm}(\omega) \\ \delta(t - t') \delta(\bar{x} - \bar{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \sum_{n,m} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_m(\bar{y}) \delta_{nm} \end{aligned} \quad (2.79)$$

a causa del bordo l'integrale viene discretizzato.

$\varphi$  soddisfa  $\Delta \varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0$  in U,  $\varphi(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial U} = 0$  formano un sistema completo in U. Motro completezza

$$\sum_{n,m} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_m(\bar{y}) \delta_{n,m} = \sum_n \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n(\bar{y}) = \delta(\bar{x} - \bar{y})$$

sostituisco la (79) nella (77)

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} (-i\omega + \chi\lambda_n) e^{-i\omega(t-t')} \cdot \varphi_n(\bar{x}) \varphi_m(\bar{y}) \tilde{G}_{n,m}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} (-i\omega + \chi\lambda_n) e^{-i\omega(t-t')} \cdot \varphi_n(\bar{x}) \varphi_m(\bar{y}) \delta_{nm}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}_{nm}(\omega) = \frac{\delta_{nm}}{-i\omega + \chi\lambda_n}$$

Nella (79):  $\Rightarrow$

$$G(\tau, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} e^{-i\omega\tau} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_m(\bar{y}) \frac{\delta_{nm}}{-i\omega + \chi\lambda_n}$$

Considera  $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{-i\omega + \chi\lambda_n}$  Affermazione: tutti gli autovalori  $\lambda_n$  sono positivi:

Dimostrazione

$$0 = \int_U \varphi_n (\Delta \varphi_n + \lambda_n \varphi_n) d^d \bar{x} = \int_U [\bar{\nabla} \cdot (\varphi_n \bar{\nabla} \varphi_n) - \bar{\nabla} \varphi_n \cdot n \bar{\nabla} \varphi_n + \lambda_n \varphi_n^2] d^d \bar{x}$$

uso Gauss

$$= \int_{\partial U} \bar{n}(\varphi_n \bar{\nabla} \varphi_n) d^{d-1} \bar{x} + \int_U [-(\bar{\nabla} \varphi_n)^2 + \lambda_n \varphi_n^2] d^d \bar{x}$$

il primo integrale è nullo per le condizioni al contorno,  $\varphi_n|_{\partial U} = 0$

$$\lambda_n = \frac{\int_U (\bar{\nabla} \varphi_n)^2 d^d \bar{x}}{\int_U \varphi_n^2 d^d \bar{x}} > 0, \quad q.e.d.$$

$\rightarrow$  polo nel semipiano inferiore:

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i(R\epsilon\omega + iIm\omega)\tau} = e^{-i\tau R\epsilon\omega} e^{\tau Im\omega}$$

Abbiamo già dimostrato che il contributo del semicerchio è nullo (vedi )

$$\Rightarrow G(\tau, \bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \tau < 0 \quad (80)$$

$\tau = t - t', \quad \tau < 0 \Rightarrow t < t' \rightarrow$  contributi solo dal passato nella convoluzione

$$\tau > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{-i(\omega + i\chi\lambda_n)} = -2\pi i \cdot i e^{-i(-i\chi\lambda_n)\tau} = 2\pi e^{-\chi\lambda_n\tau}$$

$$\Rightarrow G(\tau, \bar{x}, \bar{y}) = \sum_n e^{-\chi\lambda_n\tau} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n(\bar{y}) \quad (81) \quad v(20)$$

$\Rightarrow$  L'equazione del calore  $(\partial_t - \chi\Delta)T = S$  in  $U$  ha la soluzione

$$T(\bar{x}, t) = \int_0^t dt' \int_U d^d \bar{y} G(t - t', \bar{x}, \bar{y}) S(\bar{y}, t') + \int_U d^d \bar{y} G(t, \bar{x}, \bar{y}) T_0(\bar{y}) \quad (82)$$

Soluzione particolare dell'equazione non omogenea (v.(78)), tenendo conto della (80) e di  $S(\bar{y}, t') = 0$  per  $t' < 0$  sommata a soluzione dell'equazione omogenea in modo tale che  $T(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x})$

-Altro esempio: equazione di laplace (Poisson) nella palla di raggio  $R$

$$\Delta \Phi = -F(r, \theta, \varphi) \quad r < R$$

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = 0 \quad (2.83)$$

(Elettrostatica:  $-F = 4\pi\rho$ )

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$$

Sviluppo di  $\Phi, F$  in armoniche sferiche (reali, non complesse):

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} a_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta) + \sum_{m=1}^l (a_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi + b_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi) \right) \\ F(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} A_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta) + \sum_{m=1}^l (A_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi + B_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi) \right) \quad (2.84)\end{aligned}$$

Sostituisco nella (83)

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} a_{l0}''(r) P_l^0(\cos \theta) + \frac{2}{r} \frac{1}{2} a_{l0}'(r) P_l^0(\cos \theta) + \frac{1}{r^2} (-l)(l+1) \frac{a_{l0}(r)}{2} P_l^0(\cos \theta) \right) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m>0} \left( a_{lm}''(r) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi + b_{lm}''(r) P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi \right) \\ = - \sum_l \frac{1}{2} A_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta) - \sum_{l,m>0} (A_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi + B_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi)\end{aligned}$$

(usato:  $\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta} (P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi)) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi}^2 (P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi) = -l(l+1) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi$ . Sfrutto il fatto che le armoniche sferiche  $P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi$  e  $P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi$  sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_{lm}''(r) + \frac{2}{r} a_{lm}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} a_{lm}(r) &= -A_{lm}(r) \\ b_{lm}''(r) + \frac{2}{r} b_{lm}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} b_{lm}(r) &= -B_{lm}(r) \\ a_{lm}(R) = b_{lm}(R) &= 0\end{aligned} \quad (2.85)$$

Entrambe le equazioni possono essere riscritte nella forma  $(pu')' + qu = -f$ , con  $p = r^2$ ,  $q = -l(l+1)$ ,  $f = A_{lm}(r)r^2$  oppure  $B_{lm}(r)r^2$ ,  $u = a_{lm}(r)$  oppure  $b_{lm}(r)$ . Funzione di Green  $G(r, \xi)$ . Soddisfa l'equazione omogenea  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) - l(l+1)G = 0$ . Prova  $G(r, \xi) = C(\xi)r^{\alpha}$ ,  $r \neq \xi$

$$r^2 \frac{dG}{dr} = C\alpha r^{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow C\alpha(\alpha+1)r^{\alpha} - l(l+1)Cr^{\alpha} = 0, \quad \alpha = l \vee \alpha = -l-1$$

$$G(r, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)r^l + c_2(\xi)r^{-l-1} & \xi \leq r \\ \tilde{c}_1(\xi)r^l + \tilde{c}_2(\xi)r^{-l-1} & \xi \geq r \end{cases}$$

N.B. l'estremo  $r=0$  dell'intervallo  $[0, R]$  è un punto singolare:  $p(r) = r^2$  si annulla in  $r=0$ , e la soluzione fondamentale  $\sim r^{-l-1}$  diverge. Al posto di una condizione al contorno in  $r=0$  richiediamo che  $u$  (e  $G$ ) rimangano limitate  $\Rightarrow \tilde{c}_2 = 0$

$$G|_{r=\xi+0} = G|_{r=\xi-0} \Rightarrow c_1\xi^l + c_2\xi^{-l-1} = \tilde{c}_1\xi^l$$

$$\tilde{c}_1 0 c_1 + c_2 \xi^{-2l-1}$$

$$G|_{r=R} = 0 \Rightarrow c_1 R^l + c_2 R^{-l-1} = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 R^{2l+1} \Rightarrow \tilde{c}_1 = c_1 (1 - R^{2l+1} \xi^{-2l-1})$$

$$\Rightarrow G(r, \xi) = \begin{cases} c_1 r^l (1 - (\frac{R}{\xi})^{2l+1}) & \xi \leq r \\ c_1 r^l (1 - (\frac{R}{\xi})^{2l+1}) & \xi \geq r \end{cases}$$

$$\frac{dG}{dr}|_{r=\xi+0} - \frac{dG}{dr}|_{r=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)}$$

$$c_1 = \frac{\xi^l}{(2l+1)R^{2l+1}}$$

$$G_l(r, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{(2l+1)R} \left( \frac{\xi}{R} \right)^l \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^{-l-1} - \left( \frac{r}{R} \right)^l \right] & \xi \leq r \\ \text{appunti} & \end{cases} \quad (2.86)$$

Inversa della (84):

$$\begin{aligned} A_{lm}(r) &= \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} F(r, \theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi \\ B_{lm}(r) &= \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} F(r, \theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (88) \quad (2.87)$$

(usa ortogonalità delle armoniche sferiche).

Con la (87) e (88), la (84) diventa

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') F(r', \theta', \varphi') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \quad (89) \quad (2.88)$$

dove, per  $r' \neq r$

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = \sum_{l,m>0} \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \frac{1}{(2l+1)R} \left( \frac{r'}{R} \right)^l \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^{-l-1} - \left( \frac{r}{R} \right)^l \right] P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') (\cos m\varphi \cos m\varphi' \sin m\varphi$$

(per  $r' \neq r$  : scambia  $r$  con  $r'$ )

$$\sum_{m=1}^l \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \underbrace{(\cos m\varphi \cos m\varphi' + \sin m\varphi + \sin m\varphi')}_{\frac{1}{2} \frac{2l+1}{2\pi} P_l^0(\cos \theta) P_l^0(\cos \theta')}$$

$$\frac{1}{2} \left( e^{im(\varphi-\varphi')} + e^{-im(\varphi-\varphi')} \right)$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Riscrivo passando alle armoniche complesse

$$= \sum_{m=1}^l (Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') + Y_l^{m*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta', \varphi')) + Y_l^0(\theta, \varphi) Y_l^{0*}(\theta', \varphi')$$

$$Y_l^{m*}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi)$$

$$Y_l^m(\theta', \varphi') = (-1)^m Y_l^{-m*}(\theta', \varphi')$$

$$= \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma)$$

con  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$ . Quindi

$$G(r, \theta, \varphi; r', \theta', \varphi') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)R} \left( \frac{r'}{R} \right)^l \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^{-l-1} - \left( \frac{r}{R} \right)^l \right] \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma)$$

-funzione generatrice dei polinomi di Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (90) \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned}
G(r, \theta, \varphi; r', \theta', \varphi') &= \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^l - \frac{1}{4\pi R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \left(\frac{rr'}{R^2}\right)^l \\
(90) &= \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} - \frac{1}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{rr'}{R^2} \cos \gamma + \frac{r^2 r'^2}{R^4}}} \\
&= \frac{1}{4\pi} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\pi} (R^2 + \frac{r^2 r'^2}{R^2} - 2rr' \cos \gamma)^{-\frac{1}{2}} \quad (91)
\end{aligned} \tag{2.90}$$

è già simmetrica in  $r, r' \rightarrow$  stesso risultato per  $r' > r$ .  
in coordinate cartesiane:

$$G(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left\{ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r'} \left\{ (x - x' \frac{R^2}{r'^2})^2 + (y - y' \frac{R^2}{r'^2})^2 + (z - z' \frac{R^2}{r'^2})^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{2.91}$$

usando

$$\begin{aligned}
R^2 + \frac{r^2 r'^2}{R^2} - 2rr' \cos \gamma &= \frac{r'^2}{R^2} \left( r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - \frac{2rR^2}{r'} \cos \gamma \right) = \frac{r'^2}{R^2} (\bar{r} - \bar{\rho})^2 \\
\bar{\rho} &:= \frac{R^2}{r'^2} \bar{r}'
\end{aligned}$$

1 termine della (91'): carica puntiforme in  $\bar{r}'$ .

2 termine : carica immagine in  $\bar{\rho} = \frac{R^2}{r'^2} \bar{r}'$  (che è fuori dalla palla)

## 2.4 Il kernel di Schroedinger

equazione di Schroedinger

$$\begin{aligned}
i\hbar \partial_t \psi &= \hat{H} \psi = (p.libera) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \\
\Rightarrow -i\partial_t \psi &= \frac{\hbar}{2m} = \chi \Delta \psi \quad (92)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

risulta dall'equazione del calore  $\partial_t \psi = \chi \Delta \psi$  tramite la rotazione di Wick  $t \rightarrow it$  ( $\Rightarrow \partial_t \rightarrow -i\partial_t$ )  
Supponiamo di essere in d dimensioni spaziali. Trasformata di fourier

$$\begin{aligned}
\psi(\bar{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \tilde{\psi}(\bar{k}, t) \\
(92) \Rightarrow -i\partial_t \tilde{\psi}(\bar{k}, t) &= \chi(-\bar{k}^2) \tilde{\psi}(\bar{k}, t) \\
\Rightarrow \tilde{\psi}(\bar{k}, t) &= e^{-i\chi \bar{k}^2 t} \tilde{\psi}_0(\bar{k}) \\
\tilde{\psi}_0(\bar{k}) &= \int d^d \bar{y} e^{-i\bar{k}\bar{y}} \psi_0(\bar{y}) \\
\Rightarrow \psi(\bar{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \bar{y} \psi_0(\bar{y}) \cdot \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y}) - i\chi \bar{k}^2 t}
\end{aligned}$$

definisco  $\bar{z} := \bar{x} - \bar{y}$ ,  $(2\pi)^d G(\bar{z}, t) := \int d^d \bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y}) - i\chi \bar{k}^2 t}$

$$i\bar{k}\bar{z} - i\chi \bar{k}^2 t = -i\chi t \left( \bar{k} - \frac{\bar{z}}{2\chi t} \right)^2 + \frac{i\bar{z}^2}{4\chi t}$$



$$Re(i\chi t) = 0 \Rightarrow \text{regularizza } t \rightarrow t - i\epsilon, \epsilon > 0 \Rightarrow Re(i\chi(t - i\epsilon)) = \chi\epsilon > 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(\bar{z}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{i\bar{z}}{4\chi(t - i\epsilon)}\right) \cdot \int d^d \bar{k} e^{-i\chi(t - i\epsilon)\left(\bar{k} - \frac{\bar{z}}{2\chi(t - i\epsilon)}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{i\bar{z}^2}{4\chi(t - i\epsilon)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{i\chi(t - i\epsilon)}} \\ &\rightarrow (\epsilon \rightarrow 0) \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{m\bar{z}^2}{2i\hbar t}\right) \quad (93) \end{aligned}$$

"Schroedinger Kernel" esiste per tutti i  $t \in \mathbb{R}$ . (l'equazione di Schroedinger è reversibile, quella del calore no)

$$\begin{aligned} -i\partial_t \psi &= \chi \Delta \psi \\ (t \rightarrow -t) &\Rightarrow i\partial_t \psi = \chi \Delta \psi \\ (\psi \rightarrow \psi^*) &\Rightarrow i\partial_t \psi^* = \chi \Delta \psi^* \\ (c.\text{contorno}) &\Rightarrow -i\partial_t \psi = \chi \Delta \psi \end{aligned}$$

Commenti: i)  $G(\bar{x} - \bar{y}, t)$  soddisfa l'equazione di Schroedinger  $-\partial_t \psi = \chi \Delta_{\bar{x}} G$

ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} G(\bar{z}, t) = \delta(\bar{z})$

Più in generale (non necessariamente particella libera):

cerchiamo  $G^R(\bar{x}, \bar{y}, t) t.c.$

$$\psi(\bar{x}, t) = i \int d^d \bar{y} \psi_0(\bar{y}) G^R(\bar{x}, \bar{y}, t) \quad (94)$$

$G^R(\bar{x}, \bar{y}, t)$ : funzione di Green ritardata,  $G^R(\bar{x}, \bar{y}, t) = 0$  per  $t \leq 0$ . Rappresenta l'ampiezza di probabilità che la particella cada dal punto  $(\bar{y}, t = 0)$  al punto  $(\bar{x}, t)$ .

$\varphi_n$  autofunzioni di  $\hat{H}$

$$\hat{H} \varphi_n = E_n \varphi_n \quad (95)$$

$$\Rightarrow G^R(\bar{x}, \bar{y}, t) = -i \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n^*(\bar{y}), \quad t \geq 0 \quad (96)$$

vedi le (20) e (81)

$$(94) \Rightarrow \psi(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n^*(\bar{y}) \psi_0(\bar{y})$$

sooddisfa l'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \partial_t \psi(\bar{x}, t) = \int d^d \bar{y} \sum_n i\hbar \frac{-iE_n t}{\hbar} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n^*(\bar{y}) \psi_0(\bar{y})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\bar{x}} \psi(\bar{x}, t) &= \int d^d \bar{y} \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \underbrace{\hat{H}_{\bar{x}} \varphi_n(\bar{x})}_{E_n \varphi_n(\bar{x})} \varphi_n^*(\bar{y}) \psi_0(\bar{y}) \end{aligned}$$

$$\text{Inoltre: } \psi(\bar{x}, 0) = \underbrace{\int d^d \bar{y} \sum_n \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n^*(\bar{y}) \psi_0(\bar{y})}_{\delta(\bar{x} - \bar{y})} = \psi_0(\bar{x}) \quad \checkmark$$

$$\delta(\bar{x} - \bar{y})$$

Trasformata di Fourier:

$$\tilde{G}^R(\bar{x}, \bar{y}, E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt/\hbar} G^R(\bar{x}, \bar{y}, t) = \int_0^{\infty} dt e^{iEt/\hbar} G^R(\bar{x}, \bar{y}, t) = (96) = -i \sum_n \int_0^{\infty} dt e^{i(E - E_n)t/\hbar} \varphi_n(\bar{x}) \varphi_n^*(\bar{y})$$

l'ultimo integrale non è ben definito se  $E \in \mathbb{R} \rightarrow$  regolarizza tramite  $E \rightarrow E + i\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \tilde{G}^R(\bar{x}, \bar{y}, E) = \sum_n \frac{\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})}{E + i\epsilon - E_n} \quad (97) \quad (2.97)$$

Abbiamo

$$(E + i\epsilon - \hat{H}_{\bar{x}})\tilde{G}(\bar{x}, \bar{y}, E) = \sum_n \frac{(E + i\epsilon - \hat{H}_{\bar{x}})\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})}{E + i\epsilon - E_n} = \sum_n \varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y}) = \delta(\bar{x} - \bar{y}) \quad (2.98)$$

Funzione di Green avanzata:

$$G^A(\bar{x}, \bar{y}, t)$$

$G^A(\bar{x}, \bar{y}, t) = 0$  per  $t \leq 0$ . Affinché la sua trasformata di Fourier

$$\tilde{G}^A(\bar{x}, \bar{y}, E) = \int_{-\infty}^0 dt e^{iEt/\hbar} G^A(\bar{x}, \bar{y}, t)$$

esista, dobbiamo sostituire  $E \rightarrow E - i\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$

$$\tilde{G}^A(\bar{x}, \bar{y}, E) = \sum_n \frac{\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})}{E - i\epsilon - E_n}$$

Esercizio: calcolare G per l'oscillatore armonico.

$$\hat{H}\varphi_n = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_n''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x)$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi_n(x) = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \cdot \underbrace{H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right)}$$

polinomi di Hermite

$$(96) \Rightarrow -i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y) \\ = -i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\hbar\omega(n+1/2)t} \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)\right) H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right) H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} y\right)$$

Usa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \exp\left\{\frac{2u}{1+u}xy - \frac{u^2}{1-u^2}(x-y)^2\right\} \quad (99) \quad (2.99)$$

$$(u = e^{-i\omega t}) \Rightarrow -i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y) =$$

$$-ie^{-i\omega t/2} \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)\right\} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2i\omega t}}} \exp\left\{\frac{2e^{-i\omega t}}{1+e^{-i\omega t}} \frac{m\omega}{\hbar} xy - \frac{e^{-2i\omega t}}{1-e^{-2i\omega t}} \frac{m\omega}{\hbar} (x-y)^2\right\} \\ = -\sqrt{\frac{i}{2\pi \sin \omega t}} \exp\left\{\frac{i\omega t}{\hbar} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \cot \omega t - xy \operatorname{cosec} \omega t\right]\right\} \quad (100) \quad (2.100)$$

"Mehler Kernel"

## 2.5 L'equazione dei telegrafisti

equazioni di Maxwell in materia, sistema CGS:

$$\operatorname{div} \bar{D} = 4\pi \rho_{\text{macr.}} \quad (2.101a)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}_{\text{macr.}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.101b)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (2.101c)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2.101d)$$

Legge di materiale (caso più semplice)

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad (2.102)$$

legge di Ohm,  $\sigma$  rappresenta la conducibilità elettrica

$$\bar{j}_{\text{macr}} = \sigma \bar{E} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} (101b) &\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{Rot} \bar{H} \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \bar{j}_{\text{macr}} + \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{D} \\ &= 0 \\ (103), (101d), (101c) &\Rightarrow \overbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{H}} - \Delta \bar{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \underbrace{\operatorname{rot} \bar{E}} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{B} \\ &\quad - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \\ &\Rightarrow \Delta \bar{B} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} \quad (2.104a) \end{aligned}$$

equazione dei telegrafisti

$$\begin{aligned} (101d) &\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{B} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{H} \\ (101b) &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi}{c} \sigma \bar{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \right) = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \bar{E}} - \Delta \bar{E} \\ &= 0 \text{ se } j_{\text{macr}} = 0 \\ &\Rightarrow \Delta \bar{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad (2.104b) \end{aligned}$$

è equivalente all'equazione delle onde, con l'aggiunta del termine dissipativo.

Casi limite:  $\sigma = 0$  equazione delle onde.  $\varepsilon = 0$ : equazione del calore con  $\chi = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}$

Esercizio: risolvere l'equazione dei telegrafisti  $\Delta u = a \partial_t u + b \partial_t^2 u$  ( $a, b$  costanti positive) nell'intervallo  $0 \leq x \leq L, t \geq 0$ , con  $u(0, t) = u(L, t) = 0, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  Soluzione: serie di Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con

$$u_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} u_n(t) = a u_n'(t) + b u_n''(t)$$

ansatz  $u_n(t) = \alpha e^{\lambda_n t}$

$$\Rightarrow -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} = a \lambda_n + b \lambda_n^2$$

$$\Rightarrow \lambda_n = -\frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}} \equiv \lambda_n^\pm$$

→ comportamento oscillatorio se  $\frac{n^2\pi^2}{L^2} > \frac{a^2}{4b}$

$$u_n(t) = \alpha_n^+ e^{\lambda_n^+ t} + \alpha_n^- e^{\lambda_n^- t}$$

$$u(x, 0) = 0 \Rightarrow u_n(0) = 0 \Rightarrow \alpha_n^- = -\alpha_n^+$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ (e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^+ e^{\lambda_n^+ t} - \lambda_n^- e^{\lambda_n^- t}) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L} =: g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\alpha_n^+ = \frac{g_n}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-} = \frac{g_n}{2\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}}} \frac{2}{L} \int_0^L g(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx'$$

e quindi

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L dx' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}}{\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}}} \sin \frac{n\pi x'}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} g(x') = \int_0^L G(x, x', t) g(x') dx'$$

con la funzione di Green

$$G(x, x', t) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}}{\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}}} \sin \frac{n\pi x'}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

N.B. se esiste  $n_0$  tale che

$$\lambda_{n_0}^+ = \lambda_{n_0}^-$$

cioè

$$\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}} = 0$$

scrivi

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}} &= \frac{e^{\left(-\frac{a}{2b} + \sqrt{\dots}\right)t} - e^{\left(-\frac{a}{2b} - \sqrt{\dots}\right)t}}{\sqrt{\dots}} \\ \frac{e^{-\frac{at}{2b}} 2 \sinh(\sqrt{\dots} t)}{\sqrt{\dots}} &\xrightarrow{\sqrt{\dots} \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{at}{2b}} 2 \sqrt{\dots} t}{\sqrt{\dots}} = 2te^{-\frac{at}{2b}} \end{aligned}$$

## Capitolo 3

# Classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del 2 ordine

per semplicità ci limitiamo alle equazioni in 2 variabili,

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y) \quad (3.1)$$

La classificazione è basata sulla sola parte contenente le derivate seconde,  $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy}$ , detta parte principale dell'equazione.

Definizione: Sia  $\delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ , il discriminante della parte principale

Se  $\delta > 0$  l'equazione (105) si dice iperbolica

Se  $\delta = 0$  l'equazione (105) si dice parabolica

Se  $\delta < 0$  l'equazione (105) si dice ellittica

N.B. la definizione si estende anche alle equazioni quasilinearli (nelle quali i coefficienti  $a_{ij}$  possono dipendere anche da  $u, u_x, u_y$ ) se si riesce a stabilire il segno di  $\delta$ .

Esempio: superfici minime

Considera superficie in  $\mathbb{R}^3$  definita da  $z = u(x, y)$ ,  $x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^3 \ni \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x, y) \end{pmatrix}$$

vettori tangenti:

$$\partial_x \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}, \quad \partial_y \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix}$$

vettore normale

$$\bar{N} = \partial_x \bar{x} \times \partial_y \bar{x} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} = e_z - u_x e_x - u_y e_y = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elemento di superficie:

$$dA = |\bar{N}| dx dy = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} dx dy$$

$\Rightarrow$  area della superficie:

$$A = \int_{\Omega} \sqrt{1 + (\nabla u)^2} dx dy \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L} dx dy \quad (106) \quad (3.2)$$

Superfici minime:  $\delta A = 0$  Equazione di Eulero-Lagrange:

$$\partial_i \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_i u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (107) \quad (3.3)$$

(somma su i da 1 a 2 sottintesa)

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial_i} \quad i = 1, 2 \quad x_1 = x, \quad x_2 = y$$

[paragona con  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$ ]

$$(107) \Rightarrow \partial_i \left( \frac{\partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i u} = \frac{1}{2} (1 + (\nabla u)^2)^{-\frac{1}{2}} 2 \partial_i u = \frac{\partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

oppure

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) = 0 \quad (108) \quad (3.4)$$

"equazione delle superfici minime"

(Senza usare la (107):

$$\delta \mathcal{L} = \delta \sqrt{1 + (\nabla u)^2} = \frac{1}{2} (1 + (\nabla u)^2)^{-\frac{1}{2}} 2 \nabla u \delta \nabla u \xrightarrow[\delta u|_{\text{bordo}=0}]{\text{int. parti}} - \delta u \nabla \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$(108) \Leftrightarrow \partial_i \left( \frac{\partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial_i \partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} + \partial_i u \left( -\frac{1}{2} \right) (1 + (\nabla u)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\partial_i (\nabla u)^2}_{\partial_i (\partial_j u \partial_j u)} = 0$$

$$\partial_i (\partial_j u \partial_j u) = 2 (\partial_i \partial_j u) \partial_j u$$

$$\Rightarrow (1 + \underbrace{(\nabla u)^2}_{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}) \underbrace{\Delta u}_{\partial_x^2 u + \partial_y^2 u} = -\partial_x u \partial_x u \partial_x^2 u - \partial_x u \partial_y u \partial_x \partial_y u - \partial_y u \partial_x u \partial_y \partial_x u - \partial_y u \partial_y u \partial_y^2 u = 0$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow (1 + u_y^2) u_{xx} + (1 + u_x^2) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 \quad (108') \quad (3.5)$$

$$a_{11} = 1 + u_y^2, \quad a_{22} = 1 + u_x^2, \quad a_{12} = -u_x u_y$$

$$\delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = u_x^2 u_y^2 - (1 + u_x^2 u_y^2 + u_x^2 u_y^2) = -(1 + (\nabla u)^2) < 0$$

$\Rightarrow$  equazione ellittica

$$\text{def. } A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = -\delta$$

iperbolica ( $\delta > 0$ ):  $\det A < 0$ , 2 autovalori di segno opposto

parabolica ( $\delta = 0$ ): 1 autovalore = 0

ellittica ( $\delta < 0$ ): 2 autovalori di segno uguale

È il parallelismo col comportamento della forma quadratica generata da A a suggerire la medesima denominazione delle coniche.

Esempi:

Equazioni ellittiche: laplace, Poisson (parte principale  $\Delta u$ )

Equazioni paraboliche: equazione del calore  $\partial_t u = \chi \Delta u$  nel caso di 2 variabili:  $\partial_t u = \chi \partial_x^2 u \Rightarrow a_{11} = \chi, \quad a_{12} = 0 = a_{22}$

Iperboliche: equazione delle onde e dei telegrafisti ( quest'ultima per  $\epsilon \neq 0$ , altrimenti è parabolica), equazione di Klein-Gordon.

### 3.1 Il problema di Cauchy

La classificazione ha una prima motivazione nel problema di Cauchy: trovare una funzione  $u \in C^2$  che soddisfi la (105) e i dati di Cauchy, ossia:

$$u|_\gamma = \Phi|_\gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma = \Psi|_\gamma \quad (109) \quad (3.6)$$

dove  $\Phi, \Psi$  sono funzioni assegnate e  $\gamma$  è una data urva regolare con normale  $\bar{n}$ ,  $\frac{\partial n}{\partial \bar{n}} = \bar{n} \cdot \bar{\nabla} u$ .

Possibile modo di tentare di risolvere il problema: supporre che le  $a_{ij}$ , la  $\gamma$  e i dati  $\Phi, \Psi$  siano analitici e cercare

i) di calcolare tutte le derivate di  $u$  su  $\gamma$

ii) di dimostrare che lo sviluppo di Taylor di  $u$  è convergente in un intorno di  $\gamma$ .

Se il procedimento ha successo si è costruita una soluzione analitica.

Questo è l'obiettivo del teorema di Cauchy - Kowalevski: se i coefficienti  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $d$  sono analitici in un dominio  $D$ , se  $\gamma \subset D$  è analitica e i dati di Cauchy  $\Phi, \Psi$  sono analitici in  $D$ , il problema di Cauchy (105) con dati iniziali (109) ammette una e una sola soluzione analitica in un opportuno intorno  $I \subset D$  di  $\gamma$ , purché la normale  $\bar{n}$  a  $\gamma$  verifichi la condizione

$$\bar{n} \cdot A\bar{n} \neq 0 \quad (110). \quad (3.7)$$

(senza dim.)

→ la (110) chiama in causa la classificazione. Il ruolo della (110) è quello di consentire il calcolo delle derivate seconde:

$$\bar{n} \equiv (\alpha, \beta)$$

Deriva tangenzialmente il primo dato di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} &\equiv \bar{\tau} \cdot \bar{\nabla}, \quad \bar{\tau} = (-\beta, \alpha), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_\gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\Big|_\gamma, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \Rightarrow (-\beta u_x + \alpha u_y)|_\gamma &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\Big|_\gamma \quad (111) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Secondo dato di Cauchy:

$$\begin{aligned} (\alpha u_x + \beta u_y)|_\gamma &= \Psi|_\gamma \quad (112) \\ (111), (112) &\xRightarrow{\alpha^2 + \beta^2 \neq 0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$u_x|_\gamma = p_0(s), \quad (3.10)$$

$$u_y|_\gamma = q_0(s) \quad (113) \quad (3.11)$$

dove  $p_0, q_0$  sono espresse tramite i dati e  $s$  è il parametro naturale su  $\gamma$  (lunghezza della curva).

Deriva (113) lungo  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \bar{\tau} \cdot \bar{\nabla} u_x|_\gamma &= p'_0(s) \\ \bar{\tau} \cdot \bar{\nabla} &= \frac{d}{ds} \\ \bar{\tau} \cdot \bar{\nabla} u_y|_\gamma &= q'_0(s), \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (-\beta u_{xx} + \alpha u_{xy})|_\gamma = p'_0 \\ (-\beta u_{xy} + \alpha u_{yy})|_\gamma = q'_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Anche la parte principale nella (105) è esprimibile su  $\gamma$  in base ai dati, perchè tutti i termini rimanenti sono calcolabili:

$$(a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy})|_\gamma = r_0(s)$$

⇒ sistema di 3 equazioni lineare con determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \bar{n} \cdot A\bar{n} \quad (114) \quad (3.12)$$

⇒ la condizione (110) consente di calcolare le derivate seconde. Nello stesso modo di calcolano, sempre grazie alla (110), tutte le derivate successive.

Interpretazione geometrica della negazione della (110)?

$$\bar{n} \cdot A\bar{n} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \quad (115) \quad (3.13)$$

Autovalori di A:  $\underbrace{\lambda_1, \lambda_2}_{\in \mathbb{R}}$ ; con autovettori ortogonali  $\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2$  (A simmetrica).

$$\bar{n} =: \eta_1 \bar{\Theta}_1 + \eta_2 \bar{\Theta}_2 \Rightarrow \bar{n} \cdot A\bar{n} = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2$$

→ nel caso ellittico, questo è sempre  $\neq 0$ .

Caso parabolico:  $A\bar{n} = 0$  per  $\bar{n}$  nell'autospazio corrispondente all'autovalore nullo.

Caso iperbolico:  $\bar{n} \cdot A\bar{n} = 0$  per  $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \pm \sqrt{\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|} \rightarrow 2$  campi vettoriali

$$\bar{w}_1 = \sqrt{|\lambda_2|} \bar{\Theta}_1 + \sqrt{|\lambda_1|} \bar{\Theta}_2, \quad (\eta_2 = \sqrt{|\lambda_1|}, \eta_1 = \sqrt{|\lambda_2|})$$

$$\bar{w}_2 = \sqrt{|\lambda_2|} \bar{\Theta}_1 - \sqrt{|\lambda_1|} \bar{\Theta}_2, \quad (\eta_2 = \sqrt{|\lambda_1|}, \eta_1 = -\sqrt{|\lambda_2|})$$

· curve  $\perp$  a questi campi:

$$\chi_{1,2}(x, y) = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \bar{n} \propto \bar{\nabla} \chi \Rightarrow (\alpha, \beta) \propto (\chi_x, \chi_y) \text{ e quindi (115)} \Rightarrow$$

$$a_{11}\chi_x^2 + 2a_{12}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 = 0 \quad (116) \quad (3.14)$$

Poni  $\chi =: f(x) - y \Rightarrow \chi_x = f', \quad \chi_y = -1$

$$(116) \Rightarrow a_{11}f'^2 - 2a_{12}f' + a_{22} = 0 \quad (116')$$

equazione di 2 grado per f'.

nel caso parabolico ci si riduce ad una sola famiglia, nel caso ellittico non ci sono curve di questo genere.

Definizione: le curve  $\chi(x, y) = \text{cost.}$  soddisfacenti la (116) si chiamano curve caratteristiche dell'equazione (105)

Esempi:

i) equazione d'onda in 1+1 dimensioni

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad a_{11} = c^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -1$$

$$(116') \Rightarrow c^2 f'^2 = 1 \Rightarrow f = \pm \frac{x}{c} + f_0$$

$$\chi = f(x) - t = \pm \frac{x}{c} + f_0 - t \stackrel{!}{=} \text{cost} \Rightarrow x - x_0 \pm c(t - t_0) = 0$$

ii) equazione del calore

$$\mathcal{H} u_{xx} - u_t = 0, \quad a_{11} = \mathcal{H}, \quad a_{12} = a_{22} = 0$$

$$(116') \Rightarrow \mathcal{H} f'^2 = 0 \Rightarrow f = \text{cost} =: f_0, \quad \chi = f_0 - t = \text{cost} \Rightarrow t = \text{cost.} \text{ ho delle rette}$$

-Cambiamento di coordinate: Sia  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  cambiamento di coordinate con determinante Jacobiano  $\neq 0$ .

$$v(\xi, \eta) := u(x, y)$$



Come si trasforma la parte principale della (105)?

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, & u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_x i \eta_{xx} + v_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + 2v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

→ la parte principale della (105) diventa  $\tilde{a}_{11} v_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12} v_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22} v_{\eta\eta}$ , con

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = \bar{\nabla} \xi \cdot A \bar{\nabla} \xi \\
\tilde{a}_{12} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y = \bar{\nabla} \eta \cdot A \bar{\nabla} \xi = \bar{\nabla} \xi \cdot A \bar{\nabla} \eta \\
\tilde{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2 = \bar{\nabla} \eta \cdot A \bar{\nabla} \eta \\
\implies \tilde{A} &= J A J^{-1}, \quad J = \text{Jacobiano}(117) \\
&\implies \det \tilde{A} = \det A (\det J)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad > 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

⇒ le trasformazioni invertibili di coordinate lasciano invariante il carattere dell'equazione.

Esempio: equazione d'onda  $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ . Prendi  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$ , ("coordinate di cono luce") poni  $v(\xi, \eta) = u(x, y) \implies \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , e l'equazione diventa  $v_{\xi\eta} = 0$ . (→ soluzione generale:

$v(\xi, \eta) = v_1(\xi) + v_2(\eta)$ , con  $v_1, v_2$  funzioni arbitrarie.

- riduzione alla forma canonica: forme canoniche:

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &\quad \text{ellittica} \\
u_{xx}(-u_t) &\quad \text{parabolica} \\
u_{xx} - u_{tt} &\quad \text{iperbolica (in alternativa } u_{xt})
\end{aligned}$$

N.B. costanti come per esempio  $c^2$  in  $c^2 u_{xx} - u_{tt}$  possono essere riassorbite nella scala delle variabili.

Trasformazione di una parte principale generica nella forma canonica:

Caso iperbolico:

L'esempio sopra suggerisce di prendere le curve caratteristiche come nuove linee coordinate  $\xi = \chi_1(x, y)$ ,  $\eta = \chi_2(x, y)$

$$\begin{aligned}
(117) \implies \tilde{A} &\begin{pmatrix} a_{11}\chi_{1x}^2 + 2a_{12}\chi_{1x}\chi_{1y} + a_{22}\chi_{1y}^2 & a_{11}\chi_{1x}\chi_{2x} + a_{12}(\chi_{1x}\chi_{2y} + \chi_{1y}\chi_{2x}) + a_{22}\chi_{1y}\chi_{2y} \\ a_{11}\chi_{1x}\chi_{2x} + a_{12}(\chi_{1x}\chi_{2y} + \chi_{1y}\chi_{2x}) + a_{22}\chi_{1y}\chi_{2y} & a_{11}\chi_{2x}^2 + 2a_{12}\chi_{2x}\chi_{2y} + a_{22}\chi_{2y}^2 \end{pmatrix} = \\
&\stackrel{(116)}{=} \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{parte principale riconducibile alla forma canonica } u_{xy} \\
&[\implies 2 * v_{\xi\eta} + \dots = 0] : (2*) \implies \text{parte princ } v_{\xi\eta}
\end{aligned}$$

Caso parabolico:

$$\text{prendi } \xi = x, \eta = \chi(x, y) \implies J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi_x & \chi_y \end{pmatrix}$$

N.B.  $\det A = 0 \implies$  se uno dei coefficienti  $a_{11}, a_{22}$  è zero lo è anche  $a_{12}$  ( $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ). In tal caso siamo già nella forma canonica.

→ supponiamo  $a_{11}a_{22} > 0$  (non può essere  $< 0$ , perchè  $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ ).

Equazione delle caratteristiche (116):

$$a_{11}\chi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 = 0$$

(se  $a_{12} = -\sqrt{a_{11}a_{22}}$ : manda  $y$  in  $-y$ ).

Senza perdere la generalità:

$a_{11} > 0$  (altrimenti moltiplica la (105) con  $-1$ )  $\Rightarrow a_{22} > 0$ .  $\rightarrow$  abbiamo  $(\sqrt{a_{11}}\chi_x + \sqrt{a_{22}}\chi_y)^2 = 0$

$$\Rightarrow \chi_y = -\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\chi_x \quad (118) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi_x & \chi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \sqrt{a_{11}a_{22}} \\ \sqrt{a_{11}a_{22}} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \chi_x \\ 0 & \chi_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}\chi_x + \sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_y \\ a_{11}\chi_x + \sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_y & a_{11}\chi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 \end{pmatrix} \stackrel{(118)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{forma canonica} \end{aligned}$$

**Caso ellittico:** il metodo seguito per le equazioni iperboliche e paraboliche non è applicabile (non disponiamo di curve caratteristiche)  $\rightarrow$  torna alla (117) e imponi direttamente  $\tilde{a}_{12} = 0, \tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}$

$$a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0 \quad (119) \quad (3.17)$$

$$a_{11}(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2a_{12}(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + a_{22}(\xi_y^2 - \eta_y^2) = 0 \quad (119') \quad (3.18)$$

$$2i \cdot (119) + (119') :$$

$$\Rightarrow a_{11}(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2a_{12}(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + a_{22}(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0 \quad (119'') \quad (3.19)$$

Si ha  $a_{11}a_{22} > 0$  nel caso ellittico (altrimenti  $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  non può mai essere  $\neq 0$ ).  $\rightarrow$  la (119'') è un'equazione di 2 grado non degenera per  $\rho := \frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}$ , con soluzioni  $\rho_{\pm} = -(a_{12} + i\sqrt{|\delta|})/a_{11}$ . Prendi per esempio  $\rho_+$ :

$$\Rightarrow a_{11}(\xi_x + i\eta_x) = -(a_{12} + i\sqrt{|\delta|})(\xi_y + i\eta_y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \xi_x &= (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)/\sqrt{|\delta|} \\ \xi_y &= -(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)/\sqrt{|\delta|} \end{aligned} \quad (120) \quad (3.20)$$

"equazioni di Beltrami", caratterizzano le trasformazioni che conducono la parte principale ad un'espressione proporzionale all'operatore di Laplace. È stato dimostrato (risultato non banale) che le (120) ammettono soluzioni nell'intera regione di ellitticità.

N.B. le (120) possono essere scritte nella forma

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (120') \quad (3.21)$$

$$\text{con } z = x + iy, w = \xi + i\eta, \mu = \frac{a_{11} + ia_{12} - \sqrt{|\delta|}}{-a_{11} + ia_{12} - \sqrt{|\delta|}} \quad (\text{esercizio})$$

Commento: un'applicazione  $w(z, \bar{z})$  che soddisfa la (120') viene chiamata mappa quasiconforme (Caso particolare  $\mu = 0$ : mappa conforme,  $w = w(z)$  funzione olomorfa).

## 3.2 La questione della buona posizione del problema di Cauchy

**Definizione:** un problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali si dice ben posto secondo Hadamard se possiede una e una sola soluzione ed essa dipende in modo continuo dai dati.

Commenti:

i) L'enunciato corretto di un problema al contorno contiene non solo l'equazione differenziale e i dati al contorno, ma anche la precisazione dello spazio funzionale in cui si cerca la soluzione. Questa scelta è in grado di influenzare ad esempio l'unicità.

ii) Cosa si intende per dipendenza continua?  $\rightarrow$  richiede una metrica nello spazio delle soluzioni e una metrica nello spazio dei dati

X: spazio delle soluzioni, con norma  $\|\cdot\|_X$

Y: spazio dei dati, con norma  $\|\cdot\|_Y$

→ dipendenza continua significa:

Sia  $\{\bar{\delta}_n\}$  successione di dati (ordinabili in un vettore) t.c.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\delta}_n - \bar{\delta}\|_Y = 0$ , e sia  $\{u_n\}$  successione di soluzioni,  $u$ : soluzione corrispondente al dato limite  $\bar{\delta}$ . Si ha dipendenza continua se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ .

-Le curve caratteristiche di un'equazione differenziale hanno un ruolo critico nel problema di Cauchy, perchè limitano la scelta delle curve portanti i dati.

→ equazioni ellittica avvantaggiate dall'assenza di curve caratteristiche? E' così per la questione dell'esistenza e unicità, ma non per la dipendenza continua (idem per le equazioni paraboliche).

N.B. dipendenza continua dai dati è proprietà irrinunciabile per un modello matematico sensato. Infatti i dati sono di solito sperimentali e ciò non deve essere causa di un comportamento imprevedibile della soluzione.

Inoltre: mancanza della dipendenza continua impedisce il calcolo numerico della soluzione, a causa della ripercussione incontrollabile degli errori di arrotondamento.

-La non buona posizione del problema di Cauchy per equazioni ellittiche e paraboliche è messa in luce dai seguenti esempi:

i) Successione di problemi di Cauchy

$$u_{xx}^{(n)} + u_{yy}^{(n)} = 0, \quad u^{(n)}(0, y) = 0, \quad u_x^{(n)}(0, y) = A_n \cos ny; n = 1, 2, \dots$$

$$\bar{n} \cdot \bar{\nabla} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \partial_x$$

→ unica soluzione:  $u^{(n)}(x, y) = \frac{A_n}{2n} (e^{nx} - e^{-nx}) \cos ny$  (si può trovare con un ansatz di separazione delle variabili,  $u^{(n)}(x, y) = f(x)g(y)$  (→ esercizio!)). Prendi per esempio  $A_n = e^{-\sqrt{n}} \Rightarrow n \rightarrow \infty$

-i dati di Cauchy tendono uniformemente a 0.

-per qualunque  $x \neq 0$  le  $u^{(n)}$  non solo non tendono a 0, ma non restano limitate. ii) Successione

$$u_{xx}^{(n)} - u_t^n = 0, \quad u^{(n)}(0, t) = A_n \sin nt, \quad u_x^{(n)}(0, t) = 0; n = 1, 2, \dots$$

→ soluzione:

$$u^{(n)}(x, t) = \frac{1}{2} A_n \left( e^{\sqrt{\frac{n}{2}}x} \sin \left( nt + \sqrt{\frac{n}{2}}x \right) + e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}x} \sin \left( nt - \sqrt{\frac{n}{2}}x \right) \right)$$

(esercizio!)

Prendi per esempio  $A_n = n^{-k}, k > 0 \rightarrow$  stessa situazione dell'esempio i)

**Problema:** calcolare le derivate di ordine  $\geq 2$  nel problema di Cauchy (105), (109).

**Soluzione:** conosciamo su  $\gamma$

$$u_{xx} := \omega_{2,0}(s), \quad u_{xy} := \omega_{1,1}(s), \quad u_{yy} := \omega_{0,2}(s)$$

$$\frac{d}{ds} = \bar{t} \cdot \bar{\nabla} = -\beta \partial_x + \alpha \partial_y$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \bar{t} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Derivate tangenziali: ho 4 incognite

$$\begin{aligned} -\beta u_{xxx} + \alpha u_{xxy} &= \omega'_{2,0}(s) \\ -\beta u_{xxy} + \alpha u_{xyy} &= \omega'_{1,1}(s) \\ -\beta u_{xyy} + \alpha u_{yyy} &= \omega'_{0,2}(s) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Inoltre: deriva la (105) rispetto a  $x$  e ottieni conto che termini del tipo  $(a_{11,x} u_{xx})|_\gamma$  sono noti

$$\Rightarrow a_{11} u_{xxx} + 2a_{12} u_{xxy} + a_{22} u_{xyy} = \omega_0^{(3)}(s) \quad (122.0) \quad (3.23)$$

oppure deriva rispetto a  $y$

$$\Rightarrow a_{11}u_{xxy} + 2a_{12}u_{xyy} + a_{22}u_{yyy} = r_1^{(3)}(s) \quad (122.1) \quad (3.24)$$

( $|_\gamma$  sempre sottinteso).

Per (121),(122.0) abbiamo il determinante:

$$J_0^{(3)} = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ a_{11} & 2a_{12} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}\alpha^3 + 2a_{12}\beta\alpha^2 + a_{22}\alpha\beta^2 = \alpha\bar{n} \cdot A\bar{n}$$

Per (121),(122.1) invece:

$$J_1^{(3)} = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\beta\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta^2 + a_{22}\beta^3 = \beta\bar{n} \cdot A\bar{n}$$

Siccome  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ,  $\bar{n} \cdot A\bar{n} \neq 0$ , non possono essere entrambi nulli.

Derivate di ordine  $> 3$ : supponiamo note su  $\gamma$  le derivate di grado minode nella forma  $\partial_x^{n-i}\partial_y^i u = \omega_{n-i,i}(s)$ , con  $n \geq 3$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  ( $\partial_x^0 = \partial_y^0 \equiv 1$ )

Deriviamole tangenzialmente:

$$-\beta\partial_x^{n+1-i}\partial_y^i u + \alpha\partial_x^{n-i}\partial_y^{i+1} u = \omega'_{n-i,i}(s) \quad (123) \quad (3.25)$$

ho  $n+1$  equazioni,  $n+2$  incognite. Equazione mancante: applica alla (105) l'operatore  $\partial_x^{n-1-k}\partial_y^k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) per far comparire le derivate  $(n+1)$ -esime:

$$\Rightarrow a_{11}\partial_x^{n+1-k}\partial_y^k u + 2a_{12}\partial_x^{n-k}\partial_y^{k+1} u + a_{22}\partial_x^{n-1-k}\partial_y^{k+2} u = r_k^{(n+1)}(s) \quad (124) \quad (3.26)$$

$\rightarrow$  troviamo dei determinanti  $J_k^{(n+1)}$ , che hanno in comue le prime  $n+1$  righe (corrispondenti alle (123))

$$\begin{array}{ccccccc} -\beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha \end{array}$$

mentre l'ultima riga (corrispondente a una delle (124)) ha la terna  $a_{11}, 2a_{12}, a_{22}$  che occupa i rispettivi posti  $(k+1)$ -esimo,  $(k+2)$ -esimo,  $(k+3)$ -esimo.

Per :

$$\begin{aligned} k=0 : J_0^{(n+1)} &= \alpha^{n-1}\bar{n} \cdot A\bar{n} \\ k=1 : J_1^{(n+1)} &= \beta\alpha^{n-2}\bar{n} \cdot A\bar{n} \\ &\vdots \\ k=n-1 : J_{n-1}^{(n+1)} &= \beta^{n-1}\bar{n} \cdot A\bar{n} \end{aligned}$$

Almeno uno tra  $J_0^{(n+1)}$  e  $J_{n-1}^{(n+1)}$  è diverso da zero.

### 3.3 Classificazione di equazioni differenziali di ordine superiore e in più variabili

Considera equazioni differenziali:

$$\sum_{|j| \leq m} a_j D^j u = f \quad (\text{in } \mathbb{R}^n) \quad (125) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
j &= (j_1, \dots, j_n) \quad \text{multi-indice} \\
|j| &\equiv j_1 + \dots + j_n \quad \text{m ordine} \\
D^j &\equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n}
\end{aligned}$$

parte principale:

$$\sum_{|j|=m} a_j D^j u(126) \quad (3.28)$$

Esempio m=3:

$$a_{300}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_{020}(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{201}(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial z} + a_{001}(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, z)(*)$$

→ parte principale:

$$a_{300}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_{201}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$$

Definizione: una sottovarietà di dim n-1 ed equazione  $S(x_1, \dots, x_n) = 0$  viene chiamata varietà caratteristica dell'equazione differenziale a derivate parziali se soddisfa l'equazione differenziale del 1 ordine

$$\sum_{|j|=m} a_j p^j = 0, \quad p^j = \left( \frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{\partial S}{\partial x_n} \right)^{j_n} = p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} (127) \quad (3.29)$$

Esempi:

i) per la (\*):

$$\begin{aligned}
\sum_{|j|=3} a_{j_1 j_2 j_3} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^{j_1} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^{j_2} \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^{j_3} &= 0 \\
\Rightarrow a_{300} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^3 + a_{201} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right) &= 0
\end{aligned}$$

ii) per la (105):

$$a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{02}u_{yy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = f(x, y)$$

(rinominato i coefficienti)

m=2

parte principale:  $a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{02}u_{yy}$

varietà caratteristica:

$$a_{20} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + a_{11} \frac{\partial S}{\partial y} + a_{02} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = 0$$

è la (116) (con  $\chi \rightarrow S|_{S(x,y)=0}$ ) Problema di Cauchy: trovare una soluzione  $C^m$  della (125), la quale, assieme alle sue derivate dell'ordine  $\leq m-1$ , assume dei valori fissati su una sottovarietà di dimensione n-1 ed equazione  $S(x_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ .

Esempio:  $n = m = 2 \Rightarrow \dim S=1 \rightarrow$  curva sulla quale fissiamo u e la sua derivata prima.

Il problema viene semplificato dal seguente cambiamento di coordinate:

$$x'_1 = S(x_1, \dots, x_n), x'_j = x_j (j = 2, \dots, n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_1} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = p_i \frac{\partial}{\partial x'_1} + \sum_{j=2}^n \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

$\Rightarrow$  la (125) diventa:

$$\begin{aligned}
& \sum_{|j| \leq m} a_j \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{j_2} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n} u \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \rightarrow p_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \sum_{j=2}^n \delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x'_j} = p_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{j_2} \rightarrow p_2 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \sum_{j=2}^n \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x'_j} = p_2 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \frac{\partial}{\partial x'_2} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n} \rightarrow p_n \frac{\partial}{\partial x'_1} + \frac{\partial}{\partial x'_n} \\
\Rightarrow \sum_{|j|=m} a_j p_1^{j_1} \cdots p_n^{j_n} \left( \frac{\partial}{\partial x'_1} \right)^{j_1 + \cdots + j_n} + \sum_{\substack{|j| \leq m \\ j_1 < m}} b_j \left( \frac{\partial}{\partial x'_1} \right)^{j_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x'_n} \right)^{j_n} u = f(128) \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Per alleggerire la notazione sopprimo i primi ' in quello che segue.

Dati di Cauchy per la (128):

$$\left. \frac{\partial^k u}{(\partial x_1)^k} \right|_{x_1=0} = \varphi_k(x_2, \dots, x_n), \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (129) \quad (3.31)$$

Se le funzioni  $\varphi_k$  sono di classe  $C^{m-k}$ , determinano

$$D^j u(0, x_2, \dots, x_n) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n} u \right) (0, x_2, \dots, x_n) \quad (130) \quad (3.32)$$

per  $|j| \leq m$ ,  $j_1 < m$  (deriva la (129) al massimo m-k volte).

Le (130), attraverso la (128), determinano  $\frac{\partial^m u}{(\partial x_1)^m}(0, x_2, \dots, x_n)$  se  $\sum_{|j|=m} a_j p^j \neq 0$ , cioè se S non è una varietà caratteristica. Se S è una varietà caratteristica, la (128) valutata in  $x_1 = 0$  dà una reatione fra i dati di Cauchy (129). Su una varietà caratteristica i dati di Cauchy possono essere prescritti indipendentemente!

## Capitolo 4

# Carica immagine

problema: sfera con raggio  $R$ , messa a terra, con carica puntiforme  $q$  in  $\bar{r}_0$

Per motivi di simmetria, la carica immagine giace sulla retta che collega  $O$  e  $q$ .  
Potenziale in  $P$

$$\Phi = \frac{q}{a} + \frac{q'}{b} = 0 \quad (4.1)$$

prendi  $p=A$ :

$$\frac{q}{R-r_0} + \frac{q'}{d} = 0 \quad (4.2)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{d}{R-r_0}$$

prendo  $p=B$ :

$$\frac{q}{R+r_0} + \frac{q'}{d+2R} = 0 \quad (4.3)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{q'}{q} = \frac{d+2R}{R+r_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{R-r_0} = \frac{d+2R}{R+r_0}$$

$$\Rightarrow d(R+r_0) = (d+2R)(R-r_0)$$

$$\Rightarrow dR + 2dr_0 = dR - dr_0 - 2R^2 - 2Rr_0$$

$$\Rightarrow d = \frac{R(R-r_0)}{r_0} \quad (4.4)$$

e quindi

$$q' = \frac{dq}{Rr_0} = -\frac{q}{Rr_0} \frac{R(R-r_0)}{r_0} = -\frac{qR}{r_0} \quad (4.5)$$

Verificare che la (1) vale  $\forall p$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{b}{a} = (5) = \frac{R}{r_0} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{R}{r_0}$$

$$\text{Calcolo } \alpha : a^2 = r_0^2 + R^2 = 2r_0R \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R}$$

D'altra parte:

$$\cos \alpha = \frac{r_0+l}{R} \implies \frac{r_0+l}{R} = \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R} \implies l = \frac{-r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0}$$

$$c^2 = R^2 - (r_0+l)^2 = R^2 - \left( \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0} \right)^2 = b^2 - (d+R-r_0-l)^2 = b^2 - (d+R)^2 - (r_0+l)^2 + 2(d+R)(r_0+l)$$

$$\Rightarrow R^2 = b^2 - (d + R)^2 + 2 \underbrace{(d + R)} \underbrace{(r_0 + l)}$$

$$\frac{R^2}{r_0^2} \quad \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R}$$

$$\Rightarrow R^2 = b^2 - \frac{R^4}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^2}(r_0^2 + R^2 - a^2) \implies \frac{R}{r_0^2}a^2 = b^2 \implies \frac{b}{a} = \frac{R}{r_0} \quad \checkmark$$