Capitolo 1

Distribuzioni e trasformate di Fourier

1.1 Distribuzioni

le distribuzioni (funzioni generalizzate) sono degli oggetti che generalizzano le funzione e le distribuzioni di probabilità. Estendono il concetto di derivata a tutte le funzioni continue e oltre. le distribuzioni sono importanti in fisica (p.e. distribuzione delta di Dirac).

1.1.1 Idea di base

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione integrabile $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ smooth (C^∞), con supporto compatto. $\to \int f\phi \mathrm{dx} \in \mathbb{R}$, dipende linearmente e in un modo continuo da ϕ. $\Rightarrow$ f è un funzionale lineare continuo sullo spazio di tutte le "funzioni test"ϕ. Questa è la definizione di una distribuzione.
Le distribuzioni possono essere moltiplicate con dei numeri reali, e possono essere sommate $\to$ formano uno spazio vettoriale reale.

1.1.2 Derivata di una distribuione

Considera prima il caso di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Se ϕ è una funzione test, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi dx = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' dx$$

non c'è un termine di bordo perchè ϕ ha supporto compatto. $\to$ suggerisce la seguente definizione della derivata S' di una distribuzione S : S' = funzionale lineare che manda la funzione test ϕ in $-S\left(\phi\right)$

1.1.3 Delta di Dirac

("Funzione delta di Dirac") $\delta(x)$ è la distribuzione che manda la funzione test ϕ in $\phi(0)$. È la derivata della funzione step di Heaviside.

$$H\left(x\right) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

La derivata della delta di Dirac è la distribuzione che manda ϕ in $-\phi'(0)$. la delta è un esempio di una distribuzione che non è una funzione, ma può essere definita come limite di una seuenza di funzioni, p.e.

$$\delta\left(x\right) = \lim_{a \to 0} \delta_a\left(x\right)$$

$$\delta_a\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\int_R \delta_a(x)\Phi(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a}\Phi(x)dx = \frac{1}{2a}\left(\psi(a) - \psi(-a)\right) \quad \psi = \int \Phi, \quad \psi' = \Phi \blacksquare$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}\int_R \delta_a(x)\Phi(x)dx = lim_{a\to 0}\frac{\psi(a)-\psi(-a)}{2a} = \psi'(0)$$

1.1.4 Definizione formale

Def: una funzione $\Phi : U \to \mathbb{R}$ ha <u>supporto compatto</u> se esiste un sottoinsieme compatto K di U tale che $\Phi(x) = 0 \forall x \in U \backslash K$
Le funzioni $C^\infty \Phi : U \to \mathbb{R}$ con supporto compatto formano uno spazio vettoriale topologico $\mathbf{D}(U)$

<u>Def:</u> lo spazio delle <u>distribuizioni</u> su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è il <u>duale</u> $D'(U)$ dello spazio vettoriale topologico D(U) di funzioni C^∞ con supporto compatto in U.

Notazione:

$$S \in D'(U), \quad \phi \in D(U), \quad S : D(U) \to \mathbb{R}, \quad \Phi \mapsto S(\Phi) =< S|\Phi >$$

Una funzione integrabile f definisce una distribuzione $\tilde{f}$ su $\mathbb{R}^n$ tramite

$$< \tilde{f}, \Phi >:= \int_{\mathbb{R}^n} f\Phi d^n x \forall \Phi \in D(U) \tag{1.1}$$

Si dice che $\tilde{f}$ è la distribuzione associata alla funzione f, o che la distribuzione $\tilde{f}$ è equivalente alla funzione f.
La distribuzione di Dirac (o misura di Dirac) è definita da

$$< \delta, \Phi >:= \Phi(0) \tag{1.2}$$

<u>Teorema:</u> la distribuzione di Dirac non può essere rappresentata da una funzione integrabile (senza dim).
Nonostante ciò scriveremo in seguito formalmente

$$< \delta, \Phi >= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\phi(x)d^n x = \Phi(0) \tag{1.3}$$

<u>Es</u> (n=1)
Si dimostri che

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \tag{1.4}$$

Si ha

$$\int x\delta(x)\Phi(x)dx = x\Phi(x)\|_{x=0} = 0 \forall \Phi \Rightarrow x\delta(x) = 0$$

$$\Rightarrow \delta(x) + x\delta'(x) \Rightarrow \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \blacksquare$$

Un'altra identità utile è

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{1.5}$$

dove x_i sono gli zeri della fuznione g(x).
Rappresentazione della delta: $\delta(x) = \lim_{a\to 0}\delta_a(x)$, con

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \le x \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{1.6a}$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2} \tag{1.6b}$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp -\frac{x^2}{a^2} \tag{1.6c}$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{ikx-a|k|}\, dk \tag{1.6d}$$

Dimostrazione della (1.6b):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\Phi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\Phi(x)dx = (x = at) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\Phi(at)dt$$

$$lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\Phi(x)dx = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(at)\frac{dt}{1+t^2}$$

usa il teorema della convergenza dominata: se $f_{k k\in\mathbb{N}}$è una successione di funzioni misurabili con limite puntuale f, e se esiste una funzione integrabile g tale che $|f_k| \leq g\forall k$ allora f è integrabile e $\lim_{k\to\infty}\int f_k dx = \int f dx$

Da noi $f_k(t)\hat{=}\frac{\Phi(at)}{1+t^2}$ $\rightarrow$ funzione g esiste, perchè Φ ha supporto compatto.

Quindi :

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty} \infty\delta_a(x)\Phi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{a\to 0}\Phi(at)\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\Phi(0)arctan(t)|_{-\infty}^{\infty} = \Phi(0)q.e.d.$$

In N dimensioni: coordinate cartesiane $x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \delta(x) = \delta(x_1)\ldots\delta(x_n)$

1.1.5 Proprietà della delta di Dirac

$$\delta(-\bar{r}) = \delta(\hat{r})$$

$$\int_{\Re^n} d^n\hat{r}\delta(\hat{r}-\hat{r'})f(\hat{r}) = \int_{\Re^n} d^n\hat{\rho}\delta(\hat{\rho})f(\hat{\rho}+\hat{r'}) = f(\hat{\rho}+\hat{r'}\Big|_{\rho\hat{=}0} = f(\hat{r'}) \tag{1.7}$$

Scegli f=1 $\Rightarrow$ formalmente

$$\int_{\Re^n} d^n\hat{r}\delta(\hat{r}-\hat{r'}) = 1 \tag{1.8}$$

δ in coordinate curvilinee?

la quantità invariante per trasformazione di coordinate è $d^n\hat{r}\delta(\hat{r}-\hat{r'})$ Coord $\alpha_i(x_i,\ldots,x_n), i = 1,\ldots,n$ x_j sono le coordinate cartesiane

Jacobiano

$$J(x_i,\xi_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} dx_1\ldots dx_n\delta(x_1-x_1')\ldots\delta(x_n-x_n')$$

$$|J|d\xi_1\ldots d\xi_n\delta(x_1-x_1')\ldots\delta(x_n-x_n') = d\xi_1\ldots d\xi_n\delta(\xi_1\ldots\xi_1')\ldots\delta(\xi_n-\xi_n')$$

$$\delta(\xi_1-\xi_1')\ldots\delta(\xi_n-\xi_n') = |J|\delta(x_1-x_1')\ldots\delta(x_n-x_n') \tag{1.9}$$

Esempio coordinate sferiche 3-dim

$$x = r\cos\varphi\sin\theta \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta \qquad z = r\cos\theta \quad (\xi_1 = r, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \varphi)$$

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow \delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi') = r^2\sin\theta\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{1.10}$$

Esercizio: calcolare J in coordinate cilindriche

Densità di carica di un insieme discreto di N cariche puntiformi

$$\rho(\hat{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\hat{r} - \hat{r}_i) \tag{1.11}$$

carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica con raggio R. $\rho(\underline{r}) =?$
Chiamo $\rho(\underline{r}) = AQ\delta(r - R)$ con A da determinare.

$$\int d^3\underline{r}\rho(\underline{r}) = 4\pi \int r^2 sin\theta dr d\theta d\phi AQ\delta(r - R) = 4\pi AQ \int r^2 dr \delta(r - R) = 4\pi AQR^2$$

Normalizzando $4\pi AQR^2 = Q$ ottengo $A = \frac{1}{4\pi R^2}$

$$\rho(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r - R)$$

1.2 Trasformate di Fourier

Definizione: spazi L^P
Sia χ uno spazio di misura con misura m positiva. (Possiamo prendere la misura di Lebesgue come esempio)
$L^P(\chi) :=$ spazio di funzioni su χ tale che $|f|^p$ sia integrabile, e $\int_\chi |f|^p dm < \infty$
Si dimostra che per p≥1, $L^P(\chi)$ è uno spazio vettoriale e $\|f\| := \left\{\int_\chi |f|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}}$ è una norma su questo spazio.
A noi interessa il caso in cui m è la misura di Lebesgue; in tal caso gli elementi di $L^P(\chi)$ sono le funzioni f con $\int_\chi |f|^p dx < \infty$. Il caso p=2 trova applicazioni in meccanica quantistica.
Definizione: Sia f una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier Ff è una funzione in $\mathbb{R}^n$ (in realtà sul duale di $\mathbb{R}^n$, ma coincide con $\mathbb{R}^n$) definita da

$$((F) f) (\bar{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\bar{k}\bar{x}} f(\bar{x}) d^n\bar{x} \tag{1.12}$$

Si osserva che se $f \in L'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists (Ff)(\bar{k})$. In seguito verrà usata la notazione $\hat{f}(\bar{k}) = (Ff)(\bar{k})$
Una possibile rappresentazione della δ di Dirac è (per n=1)

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - a|k|} dk$$

che è una Trasformata di Fourier. Formalmente si può scrivere

$$\delta(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{k}\bar{x}} d^n\bar{k} \tag{1.13}$$

Se conosco la trasformata di Fourier $\hat{f}$ posso determinare la funzione f applicando la antitrasformata di Fourier:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \hat{f}(\bar{k}) =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\bar{k}\bar{x}'} f(\bar{x}') d^n\bar{x}' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{x}' f(\bar{x}') \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{k} e^{i\bar{k}\left(\bar{x} - \bar{x}'\right)} =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{x}' f(\bar{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}')$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \hat{f}(\bar{k}) \tag{1.14}$$

paragonando quest'ultima espressione con (1.13) si trova che

$$(F\delta)(\bar{k}) = 1 \tag{1.15}$$

Definiamo ora una famiglia di funzioni

$$\varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\bar{k}\bar{x}} \tag{1.16}$$

Allora possiamo riscrivere la funzione $f(\bar{x})$ come:

$$f(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int d^n\bar{k}\hat{f}(\bar{k}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x}))$$

$\Rightarrow$ se dimostro che $\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$ è <u>ortonormale</u> e <u>completo</u> allora posso sviluppare qualsiasi funzione su $\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$ che chiamo <u>funzioni di base</u>.
<u>Dimostrazione completezza:</u>

$$\int d^n\bar{k}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\varphi^*_{\bar{k}}(\bar{x}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n\bar{k}e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}')} = \delta(\bar{x}-\bar{x}') \tag{1.17}$$

Che equivale alla condizione di completezza, infatti:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = &\int d^n\bar{x}' f(\bar{x}')\delta(\bar{x}-\bar{x}') = \\ &= \int d^n\bar{x'} f(\bar{x'}) \int d^n\bar{k}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\varphi^*_{\bar{k}}(\bar{x}') = \int d^n\bar{k}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \int d^n\bar{x}' f(\bar{x}')\varphi^*_{\bar{k}}(\bar{x}') = \\ &= \int d^n\bar{k}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int d^n\bar{k}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\hat{f}(\bar{x})$$

quindi qualunque f è sviluppabile in una base di $\varphi_{\bar{k}}$
<u>Dimostrazione ortogonalita:</u>

$$\int d^n\bar{x}\varphi_k(\bar{x})\varphi^*_{\bar{k}'}(\bar{x}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\bar{x}} = \delta(\bar{x}-\bar{x}') \tag{1.18}$$

<u>Osservazione:</u> $\{\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\}$ formano una <u>base</u> di $\mathbb{R}^n$, non di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Sulla superficie sferica, le armoniche sferiche sono le combinazioni lineari di $\{\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\}$

1.3 Funzioni di Green

<u>Definizione:</u> un <u>nucleo</u> (detto anche <u>Kernel</u>) su $\mathbb{R}^n$ è una distribuzione su $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$, ossia un elemento del duale $D'(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$ di funzioni C^∞ con supporto compatto in $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$.

$$K : D(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \qquad K \in D'(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n)$$

<u>Definizione:</u> un <u>nucleo fondamentale</u> (o elementare) E di un operatore differenziale lineare D su $\mathbb{R}^n$ con coefficienti $a_j(\bar{x}) \in C^\infty$;

$$D = \sum_{|j|\leq m} a_j(\bar{x})D^j$$

è un nucleo, che soddisfa

$$D = \sum_{|j|\leq m} a_j(\bar{x}) D^j E(\bar{x},\bar{y}) = \delta(\bar{x}-\bar{y})(1.19) \tag{1.19}$$

osservazione sulla notazione: j è un indice multiplo

$$j = (j_1, \dots, j_n) \qquad |j| = \sum_{i=1}^{n} j_i$$

con m:= ordine dell'operatore differenziale D^j

$$D^j = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{j_i}$$

dimostrazione:

$$DX(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} DE(\bar{x},\bar{y})B(\bar{y})d^n(\bar{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\bar{x}-\bar{y})B(\bar{y})d^n y$$

$$\Rightarrow DX(\bar{x}) = B(\bar{x})\blacksquare$$

Definizione: una funzione di green è un nucleo elementare per l'operatore differenziale

$$-\frac{\nabla^2}{4\pi} \Rightarrow -\nabla^2 G(\bar{x},\bar{y}) = -4\pi\delta(\bar{x}-\bar{y})(1.21) \tag{1.20}$$

Si può dimostrare che $G(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{y},\bar{x})$.
Esempio: si consideri una carica puntiforme in $\bar{y}$ con carica $q = 1$. $\rho = q\delta(\bar{x}-\bar{y})$ è la densità di carica. Dalle equazioni di Maxwell si ha $\nabla^2\phi(\bar{x}) = -4\pi\rho(\bar{x}) = -4\pi\delta(\bar{x}-\bar{y}) \to$ definizione di Funzione di Green.
Una possibile Funzione di Green è $\phi(\bar{x}) = \dfrac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|}$
Se è nota una funzione di Green $\Rightarrow$ una soluzione dell'equazione di Poisson è:

$$\phi(|x) = \int G(\bar{x},\bar{y})\rho(\bar{y})d^3y(1.23)$$

Quindi passo da un'equazione differenziale ad un integrale.
Nel nostro caso $\phi(\bar{x}) = \int \rho(\bar{y})d^3\bar{y}$, come in elettromagnetismo, in generale

$$G(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} + F(\bar{x},\bar{y})(1.24a) \tag{1.21a}$$

$$\nabla^2 F(\bar{x},\bar{y}) = 0(1.24b) \tag{1.21b}$$

$\Rightarrow$ F dipende dalle condizioni di bordo. Teorema: In assenza di superficio di bordo la funzione di Green $G(\bar{x},\bar{y})$ dipende solo dalla differenza $\bar{x}-\bar{y}$

$$G(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x}-\bar{y}) \to \text{Invarianzatraslazionale}(1.25)$$

Nota: non dimostrato ma intuibile, $\delta(\bar{x}-\bar{y})$ invariante se non ho condizioni di bordo; ∇^2 invariante; $G(\bar{x}-\bar{y})$ invariante per traslazioni $\bar{x} \to \bar{x}-\bar{a}$, $\bar{y} \to -\bar{a}$
Se $G(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x}-\bar{y})$ è più facile trovarla. Per n=3

$$\nabla^2 G(\bar{x}-\bar{y}) = -4\pi\delta(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\frac{\nabla^2}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\tilde{G}(\bar{k}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}$$

Quindi il primo passaggio è scrivere G e δ come trasformate di Fourier

$$\int d^3k e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}(-k^2\tilde{G}(\bar{k}) + 4\pi) = 0$$

il secondo passaggio è osservare che $\bar{x}$ compare solo come esponente ($\Rightarrow -k^2$) e porto tutto da una parte. $e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} = \psi_k(\bar{x})$ è linearmente indipendete, quindi deve annullarsi il coefficiente

$$-k^2\tilde{G}(\bar{k}) + 4\pi = 0 \Rightarrow \tilde{G}(\bar{k}) = \frac{4\pi}{\bar{k}^2}$$

Applico l'antitrasformata di Fourier

$$G(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi^3}\int d^3\bar{k}e^{i\bar{k}\bar{x}}\frac{4\pi}{\bar{k}^2}$$

Cambiamento di coordinate: coordinate sferiche

$$d^3\bar{k} = k^2\sin\theta dk d\theta d\varphi \Rightarrow G(\bar{x}) = \frac{1}{\pi}\int \sin\theta d\theta dk\frac{e^{ik|\bar{x}|\cos\theta}}{k^2}$$

cambio variabile: $u = \cos\theta \to du = -\sin\theta d\theta$

$$G(\bar{x}) = -\frac{1}{\pi}\int du dk e^{ik|\bar{x}|u} = \int_0^\infty \frac{2}{k|\bar{x}|\pi}\sin(k|\bar{x}|)dk = \frac{1}{|\bar{x}|}$$

Capitolo 2

Equazione del Calore

La legge di Fourier della conduzione termica è data da

$$\bar{q} = -k\bar{\nabla}T \tag{2.1}$$

dove $\bar{q}$:= densità di flusso termico; k := conducibilità termica; T := temperatura.
La temperatura può essere riscritta come $T = \dfrac{\phi}{C_p\rho}$, dove ρ è la denstià, C_p è il calore specifico a pressione costante, e ϕ è il calore per unità di volume.
L'equazione di continuità è:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \bar{\nabla}\bar{q} = 0 \tag{2.2}$$

che ha la forma tipica di una legge di conservazione.
In questa formula sostituiscto ϕ e $\bar{q}$ e trovo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + na\bar{b}la \cdot (-k\bar{\nabla}T) = \rho C_p \frac{\partial}{\partial t}T - k\nabla^2 T = 0$$

Definendo $\chi = \dfrac{k}{\rho C_p}$:= coefficiente di conducibilità termica, si ottiene l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\nabla^2 T \tag{2.3}$$

paragona con l'equazione di diffusione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \Delta u \tag{2.4}$$

D: Coefficiente di diffusione
u: densità del materiale che si diffonde

la (2.4) segue dalla 1 legge di Fick sulla corrente di diffusione

$$\vec{q}_D = -D\vec{\nabla}u \tag{2.5}$$

più l'equazione di continuità (il materiale non viene creato o distrutto)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q_D} = 0$$

La (2.4) viene anche chiamata 2 legge di Fick.
N.B. anche l'equazione di Black-Scholes per il prezzo di un'opzione può essere riportato nella forma (2.3),(2.4).
-Risolviamo la (2.3) in d dimensioni:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \tag{2.6}$$

Faccio una trasformata di Fourier:

$$T(\bar{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \tilde{T}(\bar{k},t) \tag{2.7}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{x}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}(\bar{k},t) + \chi \bar{k}^2 \tilde{T}(\bar{k},t) \right) = 0$$

dato che gli esponenziali sono lnearmente indipendenti, devo annullare i coefficienti

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{T} + \chi \bar{k}^2 \tilde{T} = 0 \Rightarrow \tilde{T}(\bar{k},t) = e^{-\chi \bar{k} t} \tilde{T}_0(\bar{k}) \tag{2.8}$$

faccio una trasformata di fourier inversa

$$\int d^d\bar{y} e^{-i\bar{k}\bar{y}} T_0(\bar{y}) \tag{2.9}$$

sostituisco (8),(9) nella (7):

$$T(\bar{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d\bar{y} T_0(\bar{y}) \int d^d\bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y}) - \chi \bar{k} t}$$

definisco

$$\int d^d\bar{k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y}) - \chi \bar{k} t} =: (2\pi)^d G(\bar{x}-\bar{y},t) \tag{2.10}$$

G: propagatore/nucleo di calore (”heat kernel”). Propaga le condizioni iniziali di $T_0(\bar{y})$. Quindi abbiamo la convoluzione:

$$T(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y} G(\bar{x}-\bar{y},t) T_0(\bar{y}) (11) \tag{2.11}$$

Caso particolare: $T_0(\bar{y}) = \delta(\bar{y})$

$$\Rightarrow T(\bar{x},t) = G(\bar{x},t)$$

il propagatore è soluzione dell'equazione del calore corrispondente a un dato iniziale deltiforme. Per questo motivo, il propagatore è anche chiamato soluzione fondamentale, perchè esso è una soluzione e con esso si costruiscono tutte le altre per convoluzione.
Calcoliamo G:

$$G(\bar{z},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{z} - \chi \bar{k} t}$$

passo agli esponenti, usando il teorema dei residui sposto l'asse reale nel piano complesso in alto o in basso

$$-\chi t \left(\bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\chi t} \right)^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\chi t}$$

$$\left(\bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\chi t} \right)^2 =: \bar{k}'$$

$$\Rightarrow G(\bar{z},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{-\bar{z}^2}{4\chi t} \right) \int d^d\bar{k} e^{-\chi t \bar{k}'^2}$$

l'integrale è Gaussiano (più precisamente prodotto di integrali Gaussiani)

$$G(\bar{z},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi t} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}^d$$

Se $Re(\chi t) > 0 \Rightarrow t > 0$, la soluzione esiste solo per $t > 0$, cioé per tempi posteriori all'essegnazione del dato iniziale (soluzione ritardata)

$$\Rightarrow G(\bar{z},t) = \frac{1}{(4\pi\chi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi t} \right) (12) \tag{2.12}$$

-Soluzione della (11) per d=1 per dato iniziale localizzato:

$$T_0(x) = \begin{cases} \hat{T}_0 & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

$$(11) \Rightarrow T(\bar{x}, t) = \int_L^L dy \hat{T}_0 \frac{1}{(4\pi\chi t)^{1/2}} exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\chi t}\right)$$

definisco $z := x - y$

$$= \frac{\hat{T}_0}{(4\pi\chi t)^{1/2}} \int_{x-L}^{x+L} dz exp\left(-\frac{z^2}{4\chi t}\right)$$

definisco $r := \dfrac{z}{(4\chi t)^{1/2}}$

$$= \frac{\hat{T}_0}{\pi} \int_{\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}}^{\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-r^2} dr = \frac{\hat{T}_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}}^{0} e^{-r^2} dr + \int_0^{\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}} \right)$$

$$= \frac{\hat{T}_0}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{\sqrt{pi}}{2}\right)$$

$$= \frac{\hat{T}_0}{2} \left(erf \frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}} - erf \frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}} \right) (13) \tag{2.13}$$

dove la funzione degli errori (di Gauss) e definita da

$$erf(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-r^2} dr (14) \tag{2.14}$$

dato che la soluzione e pari possiamo limitarci a $x \geq 0$ Il punto fondamentale è che, sebben il dato iniziale sia nonnullo solo in una regione localizzata, appena comincia al'evoluzione la funzione è maggiore di zero ovunque, per quanto lontano dal supporto del dato iniziale. $\grave{E}$ questo il comportamento diffusivo che contrasta con la propagazione per onde.
-Dimostrazione che la (11) soddisfa il dato iniziale per $t \to 0$. A tal fine dimostriamo che :

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} = \delta(x) =: \delta_a(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \phi(x)dx = (\frac{x}{a} =: y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \phi(ya)dy$$

$$\lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\phi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \phi(ya)dy = (\text{teo conv dominata}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty} \infty \lim_{a \to 0} e^{-y^2} \phi(ya)dy =$$

$$= \frac{\phi(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \phi(0)$$

Con $a = 2\sqrt{\chi t}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} e^{-\frac{x^2}{4\chi t}} = \delta(x)(15) \tag{2.15}$$

Quindi (12)$\Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0} G(\bar{z}, t) = \delta(z_1) \cdot \dots \cdot \delta(z_d) = \delta(\bar{z})$$

e la (11) implica

$$\lim_{t\to 0} T(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y} \lim_{t\to 0} G(\bar{x}-\bar{y},t)T_0(\bar{y}) = \int d^d\bar{y}\delta(\bar{x}-\bar{y})T_0(\bar{y}) = T_0(\bar{x}) \quad \blacksquare$$

-Flusso di calore con produzione di calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi\Delta T = S(\bar{x},t) \quad t>0$$

S è il termine di sorgente, rende l'equazione lineare non omogenea
-Soluzione particolare dell'equazione non omogenea:
definiamo una funzione di Green G tramite una convoluzione spaziale e temporale

$$\left(\partial_t - \chi\Delta\right) G(\bar{x}-\bar{x'},t-t') = \delta(\bar{x}-\bar{x'})\delta(t-t')(16) \tag{2.16}$$

$$\Rightarrow T(\bar{x},t) = \int d^n\bar{x'}dt'$$

$$G(\bar{x}-\bar{x'},t-t')S(\bar{x'},t')(17) \tag{2.17}$$

Check:

$$(\partial_t - \chi\Delta_{\bar{x}})T(\bar{x},t) = \int d^n\bar{x'}dt'(\partial_t - \chi\Delta_{\bar{x}})G(\bar{x}-\bar{x'},t-t')S(\bar{x'},t') = S(\bar{x},t)$$

$$(\partial_t - \chi\Delta_{\bar{x}})G(\bar{x}-\bar{x'},t-t') = \delta(\bar{x}-\bar{x'})\delta(t-t')$$

trasformata di Fourier, definisco $\bar{z} := \bar{x}-\bar{x'}, \tau := t-t'$

$$G(\bar{z},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int d^n\bar{k}d\omega e^{i(\bar{k}\bar{z}-\omega\tau)}\tilde{G}\bar{k},\omega\delta(\bar{z})\delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int d^n\bar{k}d\omega e^{i(\bar{k}\bar{z}-\omega\tau)}$$

sostituito nella (16) mi da

$$(-i\omega+\chi\bar{k}^2)\tilde{G}(\bar{k},\omega) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\bar{k},\omega) = \frac{1}{-i\omega+\chi\bar{k}^2}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int d^n\bar{k}dwe^{i(\bar{k}\bar{z}-\omega\tau)}\frac{1}{-i\omega+\chi\bar{k}^2}$$

calcolo l'integrale in $d\omega$ con il teorema dei residui, chiudendo sopra se τ è positiva, e viceversa

$$i\omega+\chi\bar{k}^2 = 0 \Rightarrow \omega = -i\chi\bar{k}^2$$

$$\int d\omega\frac{e^{-i\omega\tau}}{-i(\omega+i\chi\bar{k}^2)} =: \int F(\omega)d\omega$$

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i(Re\omega+iIm\omega)\tau}$$

$$\begin{array}{ll} \tau>0 & \Rightarrow Im\omega<0 \\ \tau<0 & \Rightarrow Im\omega>0 \Rightarrow G(\bar{z},t)=0 \end{array}$$

per $\tau <=$, cioè $t-t'<0$

$$F(\omega)dw = \frac{e^{-i\tau(\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi)}}{-i(\rho e^{i\varphi}+i\chi\bar{k}^2)}\rho e^{i\varphi}id\varphi =: f(\varphi)d\varphi$$

vado a risolvere l'integrale

$$\left|\int_0^\pi f(\varphi)d\varphi\right| \leq \int_0^\pi |f(\varphi)|\,d\varphi = \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho\sin\varphi}\rho d\varphi}{\left|\rho e^{i\varphi}+i\chi\bar{k}^2\right|} =$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho\sin\varphi}\rho d\varphi}{\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi + \chi\bar{k}^2)^2}} = \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho\sin\varphi}\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho\sin\varphi\chi\bar{k}^2 + \chi^2 k^4}}$$

posso minorare il denominatore con ρ^2 e ottengo

$$\leq \int_0^\pi \frac{e^{\tau\rho\sin\varphi}\rho d\varphi}{\rho} = 2\int_0^{\pi/2} e^{\tau\rho\sin\varphi d\varphi}$$

So che in $[0, \frac{\pi}{2}] : \sin\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$

$$(\tau < 0) \Rightarrow \tau\rho\sin\varphi \leq \tau\rho\frac{2\varphi}{\pi}$$

$$\Rightarrow 2\int_0 \pi/2 e^{\tau\rho\sin\varphi} d\varphi \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{\tau\rho\frac{2\varphi}{\pi}} = 2\left[\frac{\pi}{2\tau\rho} e^{\tau\rho\frac{2\varphi}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\tau\rho}(e^{\tau\rho} - 1) \to (\rho \to \infty) 0$$

Analogamente si dimostra che anche per il cammino sotto l'integrale per $\rho \to \infty$ tende a 0. Restano da calcolare i residui.

$$Res F(\omega) = \lim_{\omega \to -i\chi\bar{k}^2} F(\omega) \cdot (\omega + i\chi\bar{k}^2) = ie^{-i\tau(-i\chi\bar{k}^2)} = ie^{-\tau\chi\bar{k}^2}$$

Per $\tau > 0$ chiudo l'integrale sotto. Il valore dell'integrale sull'asse reale è la differenza tra l'integrale sul cammino chiuso e quello sul solo semicerchio sotto.

$$\tau > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) = (residui) = -2\pi i Res F(\omega) = -2\pi i e^{-\tau\chi\bar{k}^2} = 2\pi e^{-\tau\chi\bar{k}^2}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n\bar{k} e^{i\bar{k}\bar{z} - \tau\chi\bar{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} exp\left(\frac{-\bar{z}^2}{4\tau\chi}\right)\int d^n\bar{k} e^{-\tau\chi\left(\bar{k} - \frac{i\bar{z}}{2\tau\chi}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\tau\chi}\right)\sqrt{\frac{\pi}{\chi\tau}}^n = \frac{1}{(4\pi\tau\chi)^{n/2}} exp\left(-\frac{\bar{z}^2}{4\chi\tau}\right)(18) \tag{2.18}$$

$\rightarrow$ nucleo di calore!

$$G(\bar{z}, \tau) = 0, \tau > 0 (19) \tag{2.19}$$

$\rightarrow$ soluzione particolare dell'equazione del calore con sorgente:

$$T(\bar{x}, t) = (17) = \int d^n\bar{x'}\int_{-\infty=0}^{t} dt' G(\bar{x} - \bar{x'}, t - t') S(\bar{x'}, t')$$

Soluzione generale dell'equazione omogenea

$$T_{om}(\bar{x}, t) = (11) = \int d^n\bar{x'} G(\bar{x} - \bar{x'}, t) T_0(\bar{x'})$$

Soluzione generale dell'equazione non omogenea

$$T(\bar{x}, t) = T_p(\bar{x}, t) + T_{om}(\bar{x}, t)$$

supponi $S(\bar{x'}, t') = 0$ per $t' < 0 \Rightarrow T_p(\bar{x}, t) = 0$, e quindi abbiamo che $T(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x})$
-Considera il problema di Dirichlet in un dominio connesso (o su una varietà curva con bordo) U. λ_n : autovalori del problema di Dirichlet, ϕ : autofunzioni di Δ

$$\begin{array}{ll} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{in } U \\ \phi = 0 & \text{su } \partial U \end{array}$$

$$G(t,\bar{x},\bar{y}) = \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\bar{x})\phi_n(\bar{y})(20) \tag{2.20}$$

$$T(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y} G(t,\bar{x},\bar{y}) t_0(\bar{y}) = \int d^d\bar{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\bar{x})\phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y})(21) \tag{2.21}$$

La (20) è un esempio di una funzione di Green che non dipende solo la $\bar{x}-\bar{y}$, ma da $\bar{x}$ e $\bar{y}$ separatamente.
Motivo: rottura dell'invarianza per traslazioni a causa del bordo ∂U
Check: $T(\bar{x},0) = (21) =$

$$= \int d^d\bar{y} \sum_n \phi_n(\bar{x})\phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y}) = \int d^d\bar{y} \delta(\bar{x}-\bar{y}) T_0(\bar{y}) = T_0(\bar{x})$$

$$T(\bar{x},t)|_{\bar{x}\in\partial U} = \int d^d\bar{y} \sum_n e^{-\lambda n \chi t} \left. \phi_n(\bar{x}) \right|_{\bar{x}\in\partial U} \phi_n(\bar{y}) t_0(\bar{y}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y} \sum_n (-\lambda_n \chi) e^{-\lambda_n \chi t} \cdot \phi_n(\bar{x})\phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y})$$

$$\chi \Delta_{\bar{x}} T(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \chi \Delta_{\bar{x}} \phi_n(\bar{x})\phi_n(\bar{y}) T_0(\bar{y}) = (\chi \Delta_{\bar{x}} \phi_n(\bar{x}) = -\lambda_n \phi_n(\bar{x})) = \frac{\partial}{\partial t} T(\bar{x},t)$$

Esempio: $U = [0,L] \to$ da risolvere $\partial_t T = \chi \partial_x^2 T$, $x \in [0,L], t > 0$ condizioni al contorno $T(0,t) = 0 = T(L,t)$, $T(x,0) = T_0(x)$

$$\partial_x^2 \phi = -\lambda \phi \to \phi = \phi_0 \sin \frac{n\pi}{L} x, n = 0,1,2,\ddots,\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\int_0^L dx \phi_n(x)^2 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$(20) \Rightarrow G(t,x,y) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 \frac{\chi t}{L^2}} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y(22) \tag{2.22}$$

$$(21) \Rightarrow T(x,t) = \int_0^L dy \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 \frac{\chi t}{L^2}} \cdot \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} y T_0(y)(23) \tag{2.23}$$

Sviluppo $T_0(y)$ in serie di Fourier:

$$T_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} y(24) \tag{2.24}$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(y) \sin \frac{n\pi}{L} y dy(25) \tag{2.25}$$

Usando la (25), posso riscrivere la (23)

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 \frac{\chi t}{L^2}} b_n \sin \frac{n\pi}{L}(26) \tag{2.26}$$

N.B.: la (20) vale anche per varietà compatte senza bordo (p.e. S^2)
Compiti a casa: i) risolvere $\partial_t T = \chi \Delta T$ nel cubo

$$\begin{array}{c} \partial_t T = \chi \Delta T \\ 0 \le x \le L \qquad 0 \le y \le L \quad 0 \le z \le L \qquad t \ge 0 \\ T(\bar{x},0) = T_0(\bar{x}) \\ T(\bar{x},t) = 0 \qquad x = 0,L \qquad y = 0,L \qquad z = 0,L \end{array}$$

ii) le (20),(21) valgono anche per il problema di Neumann $\Delta\phi+\lambda\phi=0$ in Um $\bar{n}\cdot\bar{\nabla}\phi=0$ su ∂U ($\bar{n}$: versore normale al bordo). Perchè? (p.e. verificare che $\bar{n}\cdot\bar{\nabla}T\Big|_{\bar{x}\in\partial U}=0$ risolvere l'equzione del calore nel cubo con pareti isolati (nessun flusso termico attraverso le pareti, vedi equazione (1)

$$\begin{array}{ll} T(\bar{x},0)=T_0(\bar{x}) & \\ \partial_x T=0 & x=0,L \\ \partial_y T=0 & y=0,L \\ \partial_z T=0 & z=0,L \end{array}$$

iii) Risolvere l'equzione del calore sulla 2-sfera. Suggerimento: scrivere il laplaciano in coordinate sferiche

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2\varphi(27) \tag{2.27}$$

porre $r=cost$ e usare

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta Y_l^m)+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 Y_l^m=-\lambda Y_l^m(28) \tag{2.28}$$

con $\lambda=l(l+1), Y_l^m$ armoniche sferiche. Sostituire le (24),(25) col corrispondente sviluppo in armoniche sferiche.

-Parentesi: soluzione di $\Delta_{\bar{x}}G(\bar{x},\bar{y})=-\delta(\bar{x}-\bar{y})$ in d dimensioni.

consideriamo un problema un po' più generale:

$$(\Delta_{\bar{x}}-m^2)G(\bar{x}-\bar{y})=-\delta(\bar{x}-\bar{y})(29) \tag{2.29}$$

$\rightarrow$ G è il nucleo dell'equazione di <u>Helmholtz</u>

$$(\Delta_{\bar{x}}-m^2)f=-S(30) \tag{2.30}$$

(soluzione: $f(\bar{x})=\int d^d\bar{x}'G(\bar{x}-\bar{x'})S(\bar{x'})$) G è il propagatore per un campo scalare in di dimensioni Euclidee ($\rightarrow$ teoria quantistica dei campi). Uso la trasformata di Fourier per riportarmi ad un'equazione algebrica

$$G(\bar{x}-\bar{y})=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d\bar{k}e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\tilde{G}(\bar{k})$$

$$\delta(\bar{x}-\bar{y})=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d\bar{k}e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\Rightarrow(-k^2-m^2)\tilde{G}(\bar{k})=-1\Rightarrow\tilde{G}(\bar{K})=\frac{1}{\bar{k}^2+m^2}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z})=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d\bar{k}\frac{e^{i\bar{k}\bar{z}}}{\bar{k}^2+m^2} \tag{2.31}$$

Uso

$$\frac{1}{\bar{k}^2+m^2}=\int_0^\infty exp\left(-\tau(\bar{k}^2+m^2)\right)d\tau(32) \tag{2.32}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z})=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^\infty d\tau e^{-\tau m^2}\cdot\int d^d\bar{k}e^{i\bar{k}\bar{z}-\tau\bar{k}^2}$$

$$i\bar{k}\bar{z}-\tau\bar{k}^2=-\tau(\bar{k}-\frac{i\bar{z}}{2\tau})^2-\frac{\bar{z}^2}{4\tau}$$

$$\bar{k}':=\bar{k}-\frac{i\bar{z}}{2\tau}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z})=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^\infty d\tau e^{-\tau m^2-\frac{\bar{z}^2}{4\tau}}\cdot\int d^d\bar{k}'e^{-\tau\bar{k}'^2}$$

$$\int d^d\bar{k}'e^{-\tau\bar{k}'^2}=\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{d/2}\quad(\tau>0)$$

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^\infty\tau^{-d/2}e^{-\tau m^2-\frac{\bar{z}^2}{4\tau}}d\tau$$

$$\tau := \frac{m^{-1}}{2}|\bar{z}|e^t, \quad d\tau = \frac{m^{-1}}{2}|\bar{z}|e^t dt$$

$$\tau^{-\frac{d}{2}} = \left(\frac{m^{-1}|\bar{z}}{2}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{d}{2}t}$$

$$-\tau m^2 - \frac{\bar{z}^2}{4\tau} = -\frac{m^-1}{2}|\bar{z}|e^t m^2$$

$$-\frac{\bar{z}^2}{4\tau}\frac{2m}{|\bar{z}|}e^{-t} = -m|\bar{z}|\cosh t$$

$$\Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dty\left(\frac{|\bar{z}|}{2m}\right)^{1-d/2} e^{(1-d/2)t}e^{-m|\bar{z}|\cosh t} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_{-\infty}^{0} dt\left(\frac{|\bar{z}|}{2m}\right)^{1-d/2} e^{(1-d/2)t}e^{-m|\bar{z}|\cosh t}$$

$$(t' = -t) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_{0}^{\infty} dt'\left(\frac{|\bar{z}|}{2m}\right)^{1-d/2} e^{-(1-d/2)t'}e^{-m|\bar{z}|\cosh t'}$$

$$(t' \to t) \Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_{0}^{\infty} dt\left(\frac{|\bar{z}|}{2m}\right)^{1-d/2} \cdot 2\cosh((1-d/2)t)e^{-m|\bar{z}|\cosh t}$$

funzione di Bessel modificata del 2 tipo:

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\cosh(\nu t)dt(33) \tag{2.33}$$

$$Rex > 0 \Rightarrow K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$$

$$\Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{|\bar{z}|}{2m}\right)^{1-d/2} \cdot 2K_{1-d/2}(m|\bar{z}|)$$

$$\Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{d-2}(|\bar{z}|m)^{1-d/2} \cdot K_{1-d/2}(m|\bar{z}|)(34) \tag{2.34}$$

$m \to 0$: usa

$$K_\nu(x)(x \to 0)\begin{cases} -\gamma - \ln\frac{x}{2} & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu > 0 \end{cases}(35) \tag{2.35}$$

dove $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0,577$ costante di Eulero-Mascheroni.

$\Gamma(\nu)$: funzione gamma di Eulero, estende il concetto di fattoriale ai numeri complettì, el senso che per ogni numero intero non negativo n si ha $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad Rez > 0(36) \tag{2.36}$$

Esercizio: integrando per parti, dimostrare che

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)(37) \tag{2.37}$$

$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ Usando questa la definizione della Γ può essere estesa al piano $Rez < 0 \Rightarrow$ per $d+2$ e $m \to 0$, la (34) diventa

$$G(\bar{z}) \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{\frac{d-2}{2}}|\bar{z}|^{1-d/2}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2}\left(\frac{2}{m|\bar{z}|}\right)^{d/2-1} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{d/2}|\bar{z}|^{d-2}}(38) \tag{2.38}$$

corrisponde al potenziale di una carica puntiforme in d-dimensioni.
Caso $d = 3$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{4\pi|\bar{z}|}(38')$$

Caso limite $d = 2$:

$$(34) \Rightarrow G(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi}K_0(m|\bar{z}|)(39) \tag{2.39}$$

$$(35)(m \to 0) \to \frac{1}{2\pi}\left(-\gamma - \ln\frac{m|\bar{z}|}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}(-\gamma - \ln m + \ln 2 - ln|\bar{z}|)$$

Chiaro: G definita a meno di una costante additiva nel caso $m \to 0$.

$$\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x} - \bar{y}) = -\delta(|x - \bar{y}) \Rightarrow G(\bar{z}) = -\frac{\ln|\bar{z}|}{2\pi}(40) \tag{2.40}$$

Check: $\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x}) = -\delta(\bar{x})$
A causa dell'invarianza per rotazioni, G dipende solo da $|\bar{x}|$, se le condizioni al contorno non rompono l'invarianza. Passo in coordinate polari per controllare.
Coordinate polari:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

considero $r \neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{-\ln r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r}\right)\right) = 0 \qquad \checkmark$$

Per verificare che $\Delta_{\bar{x}} G(\bar{x}) = -\delta(\bar{x})$ integro ΔG su un disco D centrato in zero, con raggio ϵ

$$\int_D \Delta G d^2\bar{x} = \int_D \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} G) d^2\bar{x}$$

Uso Gauss per passare a un integrale di bordo

$$= \int_{\partial D} \bar{n} \cdot \underline{\nabla} G ds \quad \bar{n} = \bar{e_r}, \quad ds = r d\varphi$$

$$\int_{\partial D} \bar{n} \cdot \underline{\nabla} G ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} G\right) r d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi r} r d\varphi = -1 = -\int_D \delta(\bar{x}) d^2\bar{x} \quad \checkmark$$

ho ottenuto il nucleo del laplaciano in due dimensioni, che corrisponde al potenziale elettrostatico in due dimensioni

2.1 Flusso di calore in un cilindro infinito

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \chi \Delta T$$
$$T(\bar{x}, t) = 0 \qquad \bar{x} \text{ sul bordo}$$
$$T(\bar{x}, 0) = T_0(\bar{x})$$

la simmetria del problema suggerisc edi usare le coordinate cilindriche: r, φ, z, con $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$0 \leq r \leq L, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$

2.1.1 Separazione delle variabili

$$T(r,\varphi,z,t) = \tau(t)R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \tau'(t)R\Phi Z$$

$$\Delta T = \tau(R'' + \frac{1}{r}R')\Phi Z + \tau R\frac{1}{r^2}\Phi'' Z + \tau R\Phi Z'' = \frac{1}{\chi}\tau' R\Phi Z \Rightarrow \frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{\chi}\frac{\tau'}{\tau} = 0$$

la funzione di Z è costante $= C_2$, e analogamente la funzione di t $= C_2$, di conseguenza la parte rimanente in $r, \varphi = C_1 - C_2$

$$\begin{array}{ll} \tau' = \chi\tau C_1 & \tau = \tau_0 e^{\chi C_1 t} \\ Z'' = C_2 Z & Z = Z_0 e^{\sqrt{C_2}z} + Z_1 e^{-\sqrt{C_2}z} \end{array}$$

$$r^2\frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{\Phi''}{\Phi} = (C_1 - C_2)r^2 \Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = cost := -\lambda^2$$

$$^2\frac{1}{R}(R''+\frac{1}{r}R')+(C_2-C_1)r^2 = \lambda^2 \Rightarrow \Phi = \Phi_0\cos\lambda\varphi+\Phi_1\sin\lambda\varphi = \Phi_0\cos\lambda(\varphi+2\pi)+\Phi_1\sin\lambda(\varphi+2\pi) = \phi_0(\cos\lambda\varphi\cos 2\pi\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \phi_0\cos 2\pi\lambda + \phi_1\sin 2\pi\lambda = \phi_0 \\ -\phi_0\sin 2\pi\lambda + \phi_1\cos 2\pi\lambda = \phi_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda - 1 & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = 0$$

ho una soluzione non banale se il determinante è nullo $\implies \cos 2\pi\lambda = 1, \quad \sin 2\pi\lambda = 0, \quad \lambda = m, m \in \mathbb{Z}$.
Basta prendere $m \in \mathbb{N}_0$, per cui le funzioni Φ formano un sistema completo.
Passo all'equazione radiale:

$$r^2R'' + rR' + ((C_2 - C_1)r^2 - m^2)R = 0$$

Supponiamo per semplicità che $T_0(\bar{x})$ dipenda solo da r, φ.

$$T(r,\varphi,z,0) = \tau_0 R\Phi Z' = T_0(r,\varphi) \Rightarrow Z = cost \Rightarrow C_2 = 0$$

$$Z = Z_0 e^{\sqrt{C_2}z} + Z_1 e^{-\sqrt{C_2}z}$$

senza perdere la generalità, poniamo $Z = 1, C_1 < 0$ altrimenti T diverge per $t \to \infty \quad (\tau = \tau_0 e^{\chi C_1 t})$ (Inoltre si può far vedere che la soluzione dell'equzione radiale (con $C_2 = 0$) diverge nell'origine (per le nostre condizioni al contorno) se $C_1 > 0$) Pongo $x := \sqrt{|C_1|}r$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2)R = 0(41) \tag{2.41}$$

equazione differenziale di Bessel. Cerca soluzioni della forma

$$R(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (42) \tag{2.42}$$

$$(a_0 \neq 0) \Rightarrow R'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sum_n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n a_n x^{n-1}$$

$$R''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sum_n a_n x^n + 2\alpha x^{\alpha-1}\sum_n a_n x^{n-1} + x^\alpha\sum_n n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$(41) \Rightarrow \alpha(\alpha-1)x^\alpha\sum_n a_n x^n + 2\alpha x^\alpha\sum_n n a_n x^n + x^\alpha\sum_n n(n-1)a_n x^n + \alpha x^\alpha\sum_n a_n x^n + x^\alpha\sum_n n a_n x^n + (x^2-m^2)x^\alpha\sum_n a_n x$$

studio il prefattore di x^0: $\alpha^2 a_0 - m^2 a_0 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm m$. Scarto la soluzione $\alpha = -m$ perchè non fisica (divergerebbe sull'asse del cilindro).
Soluzione regolare in $x = 0 : \alpha = m$. In tal caso:

$$2m\sum_n n a_n x^n + \sum_n n^2 a_n x^n + \sum_n a_n x^{n+2} = 0(43) \tag{2.43}$$

sostituisco nell'ultimo pezzo $n+2=n'$

$$\sum_{n'} a_{n'-2}x^{n'}$$

$$x^1 : 2ma_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$\Rightarrow la(43)diventa$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n(a_n(2mn+n^2)+a_{n-2}) = 0 \Rightarrow a_n := -\frac{a_n-2}{2mn+n^2}(44) \tag{2.44}$$

$\rightarrow$ relazione di ricorrenza

scegliendo $a_0 = \frac{2^{-m}}{m!}$ per motivi di normalizzazione, si ottiene la soluzione

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k!(m+k)!}(45) \tag{2.45}$$

dove per m non interi si definisce $m! := \Gamma(m+1)$ J_m : funzione di Bessel del 1 tipo
$\Rightarrow R = J_m(\sqrt{|C_1|}r)$, impongo le condizioni al contorno $T(r=L,\varphi,z,t)=0$

$$\Rightarrow R(r=L)=0 \Rightarrow J_m(\sqrt{|C_1|}L)=0 \implies \sqrt{|C_1|}L = j_k^{(m)}, \quad k=1,2,\cdots \implies C_1 = -\left(\frac{j_k^{(m)}}{L}\right)^2$$

dove $j_k^{(m)}$ sono gli zeri positivi di $J_m(x)$, noti numericamente.

$$\Rightarrow T(r,\varphi,z,t) = \tau_0 e^{-\chi\left(\frac{j_k^{(m)}}{L}\right)^2 t} \cdot J_m\left(j_k^{(m)}\frac{r}{L}\right)(\phi_0\cos m\varphi + \phi_1 \sin r\varphi)$$

la costante τ_0 si può riassorbire in ϕ_0, ϕ_1, quindi la pongo =1. La soluzione generale sarà uan combinazione lineare di queste soluzioni.

$$T(r,\varphi,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\chi\left(\frac{j_k^{(m)}}{L}\right)^2 t} J_m\left(j_k^{(m)}\frac{r}{L}\right)(C_{km}\cos m\varphi + S_{km}\sin m\varphi)(46) \tag{2.46}$$

$$T(r,\varphi,z,0) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_m\left(j_k^{(m)}\frac{r}{L}\right)(C_{km}\cos m\varphi + S_{km}\sin m\varphi) = T_0(r\varphi)(47) \tag{2.47}$$

la (47) forma un sistema di funzioni completo nel cilindro $\rightarrow$ qualsiasi funzione $T_0(r,\varphi)$ con $T_0(L,\varphi)=0$ possiede uno sviluppo di questo tipo. Devono essere scelte delle costanti $C_{km}eS_{km}$ appropriate, invertendo la (47)

2.2 Problemi non omogenei

spesso la separazione delle variabili riducce delle equazioni differenziali alle derivate parziali a delle equazioni differenziali ordinarie, come p.e.

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x)(48) \tag{2.48}$$

Ipotesi: $a(x)$ continuamente differenziabile; b,c continue. Moltiplica la (48) con $\frac{1}{a(x)}exp\left(\int_\alpha^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)}d\xi\right)$ e definisco

$$p(x) := exp\left(\int_\alpha^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)}d\xi\right)$$

$$q(x) := \frac{c(x)}{a(x)}p(x), \quad f(x) := \frac{F(x)}{a(x)}p(x)$$

posso scrivere la "forma autoaggiunta" della (48)

$$(48) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f(x)(49) \tag{2.49}$$

digressione:

$$p\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}u\right) + pqu = pf$$

definisco $pq := \omega^2(x)$, $pf := g$ e y attraverso

$$\frac{d}{dy} = p(x)\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{p(x)} = dy \Rightarrow y = \int \frac{dx}{p(x)}$$

ottengo

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \omega^2(y)u = g$$

è un'equazione di oscillatore armonico con frequenza ω che dipende dal "tempo" g, dove g è una forzante. Viene chiamato "oscillatore di Ermakoff", e trova applicazioni in Cosmologia (equazione di Sasaki-Mukhonov) per quanto riguarda la teoria dell'inflazione.

Equazione omogenea:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + qv = 0(50) \tag{2.50}$$

possiede 2 soluzioni v_1, v_2 linearmente indipendenti $\implies$ soluzione generale:

$$v(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x), \quad c_1, c_2 cost$$

considera la funzione

$$w(x) = v_1(x)\int_\alpha^x v_2(\xi)f(\xi)d\xi - v_2(x)\int_\alpha^x v_1(\xi)f(\xi)d\xi(51) \tag{2.51}$$

(paragona con il metodo della variazione delle costanti)

$$\Rightarrow w'(x) = v_1'(x)\int_\alpha^x v_2(\xi)f(\xi)d\xi - v_2'(x)\int_\alpha^x v_1(\xi)f(\xi)d\xi + v_1(x)v_2(x)f(x) - v_2(x)v_1(x)f(x) =$$

$$= v_1'(x)\int_\alpha^x v_2(\xi)f(\xi)d\xi - v_2'(x)\int_\alpha^x v_1(\xi)f(\xi)d\xi \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dw}{dx}\right) =$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)v_1'(x))\int_\alpha^x v_2(\xi)f(\xi)d\xi - \frac{d}{dx}(p(x)v_2'(x))\int_\alpha^x v_1(\xi)f(\xi)d\xi + p(x)v_1'(x)v_2(x)f(x) - p(x)v_2'(x)v_1(x)f(x)$$

i coefficienti davanti agli integrali corrispondono rispettiamente a $-qv_1$ e $-qv_2$

$$-q(x)w(x) + p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x))f(x)$$

Inoltre:

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x))\right\}$$

deve avere il Wronskiano

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= \frac{d}{dx}(pv_1')v_2 - \frac{d}{dx}(pv_2')v_1 + pv_1'v_2' - pv_2'v_1' = 0$$

$$\Rightarrow p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x)) = K \quad costante$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dw}{dx}\right) + qw = Kf(52) \tag{2.52}$$

Inoltre, se v_1', v_2' sono limitati per $x \to \alpha$, $w(\alpha) = w'(\alpha) = 0$

$$(52) : K \Rightarrow \frac{w(x)}{K} = u(x) = \int_\alpha^x R(x,\xi)f(\xi)d\xi(53) \tag{2.53}$$

con

$$R(x,\xi) := \frac{v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)}{p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x))}(54) \tag{2.54}$$

è una soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f(x) \quad x > \alpha \\ u(\alpha) = u'(\alpha) = 0 \end{cases} (55) \tag{2.55}$$

Il denominatore della (54) è costante $\implies$ $R(x,\xi)$ soddisfa l'equazione omogenea (50) sia come funzione di x che di ξ. (NB: $R(x,\xi) = -R(\xi,x)$). Per ξ fissato: $R(x,\xi)$ è la soluzione del problema omogeneo ai valori iniziali

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dR}{dx}\right) + q(x)R = 0, \quad x > \xi$$

$$R|_{x=\xi} = 0 \qquad \left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=\xi} = (54) = \frac{1}{p(\xi)}(56) \tag{2.56}$$

$R(x,\xi)$: funzione di Green (one-sided).
esempio: oscillatore armonico invertito

$$\begin{cases} u'' - u = f(x) \qquad x > 0 \\ u(0) = u'(x) = 0 \end{cases}$$

soluzione per ξ fissato, $R(x,\xi)$ soddisfa

$$\frac{d^2R}{dx^2} - R = 0, \quad x > \xi$$

$$R|_{x=\xi} = 0, \qquad \left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=\xi} = 1$$

$$\Rightarrow R = A(\xi)\sinh(x) + B(\xi)\cosh(x)$$

$$R|_{x=\xi} = A\sinh\xi + B\cosh\xi = 0$$

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=\xi} = A\cosh\xi + B\sinh\xi = 1$$

$$\Rightarrow A = \cosh\xi, \quad B = -\sinh\xi, \Rightarrow R = \sinh(x-\xi)$$

$$(53) \Rightarrow u(x) = \int_0^x f(\xi)\sinh(x-\xi)d\xi$$

N.B. i) Se $u(\alpha), u'(\alpha) \neq 0 \implies$ aggiungi soluzione $c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ dell'equazione omogenea, in modo tale da soddisfare le nuove condizioni iniziali. Nell'esempio sopra:

$$u(x) = \int_0^x f(\xi)\sinh(x-\xi)d\xi + c_1\sinh(x) + c_2\cosh(x)$$

soddisfa $u(0) = c_2, u'(0) = c_1$
ii) (53) $\Rightarrow$ Il valore di $u(x)$ dipende solo da $f(\xi)$ per $\xi < x$. Comportamento molto simile a quelle delle equazioni alle derivate parziali iperboliche (vedi piu tardi)

2.3 Problema ai valori al contorno

Risolvi p.e.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right) + qu = -f(x) \quad \alpha < x < \beta \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0 \end{cases}$$

(ndr il - davanti a $f(x)$ viene messo per convenienza)
soluzione generale:

$$u(x) = -\int_\alpha^x R(\xi, x)f(\xi)d\xi + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \tag{2.57}$$

$$\begin{cases} u(\alpha) = c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = 0 \\ u(\beta) = -\int_\alpha^\beta R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi + c_1 v_1(\beta) + c_2 v_2(\beta) = 0 \end{cases} (58) \tag{2.58}$$

La (58) ha una soluzione per c_1, c_2 se $D := v_1(\alpha)v_2(\beta) - v_2(\alpha)v_1(\beta) \neq 0$. In tal caso

$$c_1 = -\frac{v_2(\alpha)}{D}\int_\alpha^\beta R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi = -\frac{v_2(\alpha)}{D}\int_\alpha^x R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi - \frac{v_2(\alpha)}{D}\int_x^\beta R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi$$

$$c_2 = \frac{v_1(\alpha)}{D}\int_\alpha^\beta R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi = \frac{v_1(\alpha)}{D}\int_\alpha^x R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi + \frac{v_1(\alpha)}{D}\int_x^\beta R(\beta,\xi)f(\xi)d\bar{x}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\int_\alpha^x \left[R(x,\xi) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D}R(\beta,\xi)\right] f(\xi)d\xi - \int_x^\beta \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D}R(\beta,\xi)f(\xi)d\xi$$

$$R(x,\xi) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D}R(\beta,\xi) = (54) =$$
$$\frac{v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)}{KD}(v_1(\alpha)v_2(\beta) - v_2(\alpha)v_1(\beta)) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D}\frac{v_1(\beta)v_2(\xi) - v_2(\beta)v_1(\xi)}{K}$$

$$\frac{1}{KD}(v_1(\alpha)v_2(\xi) - v_2(\alpha)v_1(\xi))(v_1(x)v_2(\beta) - v_2(x)v_1(\beta))$$

Definisco G

$$G(x,\xi) := \begin{cases} \dfrac{1}{KD}(v_1(\xi)v_2(\alpha) - v_2(\xi)v_1(\alpha))(v_1(x)v_2(\beta) - v_2(x)v_1(\beta)) & \xi \leq x \\ \dfrac{1}{KD}(v_1(x)v_2(\alpha) - v_2(x)v_1(\alpha))(v_1(\xi)v_2(\beta) - v_2(\xi)v_1(\beta)) & x \leq \xi \end{cases} (59) \tag{2.59}$$

$\Longrightarrow$ soluzione del problema ai valori al contorno (57):

$$u(x) = \int_\alpha^\beta G(x,\xi)f(\xi)d\xi(60) \tag{2.60}$$

$G(x,\xi)$ è una funzione di Green

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)(61) \tag{2.61}$$

per determinare G notiamo che per ogni ξ soddisfa il problma ai valori al contorno

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG}{dx}\right) + q(x)G = 0 \quad x \neq \xi \\ G|_{x=\alpha} = G|_{x=\beta} = 0 \\ G_{x=\xi+0} == G|_{\xi-0} \qquad\qquad (62) \\ Gcontinuain\xi \\ \frac{dG}{dx}|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx}|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} \end{gathered} \tag{2.62}$$

$\frac{dG}{dx}$ discontinua in $x=\xi$. (Usare la (59). Per ricavare l'ultima equazione bisogna usare anche la definizione di K)

Esempio:

$$((1+x)^2u')' - u = f(x), \quad 0<x<1, \quad u(0)=u(1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left((1+x)^2\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - G(x,\xi) = 0$$

Prova $G(x,\xi) = c(\xi)(1+x)^\alpha \implies \dfrac{dG}{dx} = c\alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$$\left((1+x)^2\frac{dG}{dx}\right)' = \left(c\alpha(1+x)^{\alpha+1}\right)' = c\alpha(\alpha+1)(1+x)^\alpha = G = c(1+x)^\alpha$$

$$\implies \alpha^2+\alpha-1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}) := \alpha_\pm$$

devo separe i casi $x>\xi$ e $x<\xi$

$$\Rightarrow G(x,\xi) = \begin{cases} c_+(\xi)(1+x)^{\alpha_+} + c_-(\xi)(1+x)^{\alpha_-} & x<\xi \\ \tilde{c}_+(\xi)(1+x)^{\alpha_+} + \tilde{c}_-(\xi)(1+x)^{\alpha_-} & x>\xi \end{cases}$$

$$\begin{gathered} G|_{x=0} = c_+ + c_- = 0 \qquad\qquad \implies c_- = -c_+ \\ G|_{x=1} = \tilde{c}_+2^\alpha + \tilde{c}_-2^\alpha = 0 \quad \implies \tilde{c}_- = -\tilde{c}_+2^{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow G(x,\xi) = \left\{c_+(\xi)((1+x)^{\alpha_+}\right\} \\ G(x,\xi) = \left\{c_+(x)((1+\xi)\right\} \end{gathered}$$

$$\Rightarrow G(x,\xi) = \begin{Bmatrix} \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-})((1+x)^{\alpha_+} - (1+x)^{\alpha_-}) & x<\xi \\ \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-})((1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}) & x>\xi \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow G|_{x=\xi+0} = G|_{x=\xi-0}$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=\xi+0} = \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-})(\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_++1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{\alpha_--1})$$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=\xi-0} = \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-})(\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_++1} - \alpha_-(1+\xi)^{\alpha_--1})$$

$\frac{dG}{dx}\big|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx}{}_{x=\xi-0}$

$$= \lambda\Big[\alpha_+(1+\xi)^{2\alpha_+-1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{\alpha_++\alpha_--1} - \alpha_+(1+\xi)^{\alpha_-+\alpha_+-1} + 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{2\alpha_--1} -$$

$$\alpha_+(1+\xi)^{2\alpha_+-1} + \alpha_-(1+\xi)^{\alpha_++\alpha_--1} + 2^{\sqrt{5}}\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_-+\alpha_+-1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{2\alpha_--1}\Big] = -\frac{1}{p(\xi)} = -\frac{1}{(1+\xi)^2}$$

$$\alpha_+ + \alpha_- - 1 = -2$$
$$\Rightarrow \lambda \left[-2^{\sqrt{5}} \alpha_- - \alpha_+ + \alpha_- + 2^{\sqrt{5}} \alpha_+ \right] = -1$$

$\rightarrow$ determina λ

Problema ai valori al contorno piu generale:

$$(pu')' + qu = -f, \quad \alpha < x < \beta, \quad u(\alpha) = a, u(\beta) = b(63) \tag{2.63}$$

A tal fine: nota che $\frac{\partial G}{\partial \xi}(x\alpha)$ soddisfa

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) \right) \right] + q(x) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) = 0, \quad \alpha < x < \beta$$
$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{p(\alpha)}, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi}(\beta, \alpha) = 0$$

mentre

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) \right) \right] + q(x) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) = 0, \quad \alpha < x < \beta$$
$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi}(\beta, \beta) = -\frac{1}{p(\beta)}$$

(seguono dalla definizione (59) $\rightarrow$ compito)
il problema (63) ha la soluzione

$$u(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi) f(|xi) d\xi + ap(\alpha) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) - bp(\beta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta)(64) \tag{2.64}$$

combinazione lineare di soluzione particolare (l'integrale) e soluzione dell'omogenea(il resto).
Nella soluzione del problema (57) abbiamo dovuto assumere $D \neq 0$.
Caso $D = 0$: le equazioni

$$c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = 0$$
$$c_1 v_1(\beta) + c_2 v_2(\beta) = 0$$

ammettono soluzione non banale $\Rightarrow v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ soddisfa

$$(pv')' + qv = 0, \quad \alpha < x < \beta, \quad v(\alpha) = v(\beta) = 0$$

Se u è una soluzione del problema (63), lo è anche u+cv, $\forall c$ costante.$\Rightarrow$ il problema (63) non può avere soluzione unica. Inoltre:
moltiplica la (63) conn v e integra da α a β:

$$-\int_\alpha^\beta f(x) v(x) dx = \int_\alpha^\beta v(x)((pu')' + qu) dx$$

integro due volte per parti

$$= \left[vpu' - v'pu \right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta u \left[(pv')' + qvdx \right] = p(\alpha) v'(\alpha) a - p(\beta) v'(\beta) b$$

dove l'integranda è nulla. $v(pu')' \rightarrow -v'pu' \rightarrow (v'p)'u$
Se il problema (63) deve avere una soluzione, la funzione f e le due costanti a,b devono soddisfare

$$p(\alpha) v'(\alpha) a - p(\beta) v'(\beta) b = -\int_\alpha^\beta v(x) f(x) dx$$

altrimenti non ci può essere una soluzione del problema.
⇒ nel caso D=0, il problema (63) può avere nessuna soluzione o molte soluzioni, ma mai una sola soluzione.
Problemi ai valori al contorno ancora piu generali:

$$\begin{array}{c} (pu')' + qu = -f(x), \quad \alpha < x < \beta \\ -\mu_1 u'(\alpha) + \sigma_1 u(\alpha) = a, \qquad (65) \\ \mu_2 u'(\beta) + \sigma_2 u(\beta) = a \end{array} \tag{2.65}$$

(condizione al contorno di Robin).
La funzione di Green $G(x, \xi)$ si ricava come prima se

$$D := \left[-\mu_1 v_1'(\alpha) + \sigma_1 v_1(\alpha)\right] \cdot \left[\mu_2 v_2'(\beta) + \sigma_2 v_2(\beta)\right] - \left[-\mu_1 v_2'(\alpha) + \sigma_1 v_2(\alpha)\right] \cdot \left[\mu_2 v_1'(\beta) + \sigma_2 v_1(\beta)\right] \neq 0$$

(esercizio) $G(x, \xi)$ è la soluzione del problema

$$\begin{array}{c} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG}{dx}\right) + q(x)G = 0 \quad x \neq \xi \\ -\mu_1 \frac{dG}{dx}|_{x=\alpha} + \sigma_1 G|_{x=\alpha} = \mu_2 \frac{dG}{dx}|_{x=\beta} + \sigma_2 G|_{x=\beta} = 0(66) \\ G|_{x=\xi+0} = G|_{x=\xi-0} \frac{dG}{dx}|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx}|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} \end{array} \tag{2.66}$$

(paragona con le (62), qui le condizioni al contorno su G sono più generali). G soddisfa ancora $G(x, \xi) = G(\xi, x)$
-Soluzione di (65):

$$u(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{p(\alpha)}{\mu_1} a G(x, \alpha) + \frac{p(\beta)}{\mu_2} b G(x, \beta)(67) \tag{2.67}$$

$(\mu_1, \mu_2 \neq 0)$ se $\mu_1 = 0$ sostituisci $\frac{1}{\mu_1} G(x, \alpha) con \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha)$
se $\mu_2 = 0$ sostituisci $\frac{1}{\mu_2} G(x, \beta) con \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha)$
(Siccome $D \neq 0$ non può essere $\mu_1 = \sigma_1 = 0$ oppure $\mu_2 = \sigma_2 = 0$)
Caso D=0: il problema (65) avrà nessuna soluzione o molte soluzione ed è quindi ben bosto se e solo se $D \neq 0$. In tal caso la soluzione è data dalla (67)

NB:
i) In un problema ai valori al contorno, il valore di u in un dato punto dipende dai valori di f(x) nell'intero intervallo $\alpha, \beta)$. → Comportamento simile a quello delle equazionni alle derivate parziali ellittiche (vedi piu tardi).
ii) Se una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea può essere indovinata, non è necessario usare le funzioni di Green

2.3.1 Applicazione del formalismo imparato

Conduzione di calore in un intervallo con sorgente

$$\begin{array}{c} \partial_t T = \chi \partial_x^2 T + S(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0 \\ T(0, t) = T(L, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0 \end{array} (68) \tag{2.68}$$

Sviluppa $T(x, t)$ in serie di Fourier

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}(69) \tag{2.69}$$

con

$$b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L T(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx(70), vedi(25) \tag{2.70}$$

$$S(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}(71a) \tag{2.71a}$$

$$s_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L S(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx(71b) \tag{2.71b}$$

inserisco (69),(71a) nella (68)

$$\Rightarrow \partial_t b_n(t)=\chi\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)b_n(t)+s_n(t) \tag{2.72}$$

Questa si risolve facilmente col metodo di variazione delle costanti arbitrarie. Invece con la funzione di Green: Riscrivi la (72) nella forma

$$(p(t)u'(t))'=f(t)$$

con $p(t)=exp\left(\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}t\right)$, $\quad u'(t)=b_n(t), \quad f(t)=p(t)s_n(t)$

$$T(x,0)=0\Rightarrow b_n(t)=0\Rightarrow u'(t)=0$$

$u(t)$ è definita a meno di una costante additiva $\rightarrow$ scegli $u(t)=0$ $\rightarrow$ problema ai valori iniziali (55). La funzione di Green $R(t,\xi)$ dalla (56):

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dR}{dt}\right)=0, \quad t>\xi$$

$$\Rightarrow p(t)\frac{dR}{dt}=C(\xi)\Rightarrow R=-C(\xi)\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}t\right)+\tilde{C}(\xi)$$

$$R|_{t=\xi}=-C(\xi)\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)+\tilde{C}(\xi)=0$$

$$\tilde{C}(\xi)=C\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)=\gamma(\xi)\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)$$

$$\Rightarrow R(t,\xi)=\gamma(\xi)\left(\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)-\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}t\right)\right)$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=\xi}=\gamma\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)=\frac{1}{p(\xi)}=\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)$$

$$\gamma=\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\implies\Rightarrow R(t,\xi)=\gamma(\xi)\left(\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)-\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}t\right)\right)$$

$$u(t)=(53)=\int_0^t\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\left(\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi\right)-\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}t\right)\right)e^{\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\xi}s_n(\xi)d\xi$$

$$=\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\int_0^t\left(1-\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)\right)\cdot s_n(\xi)d\xi\equiv\int_0^t H(t,\xi)d\xi$$

$b_n(t)=u'(t)$

$$\int_0^t H(t,\xi)d\xi=H(t,t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}H(t,\xi)d\xi=\frac{L^2}{\chi n^2\pi^2}\int_0^t\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)s_n(t)d\xi=$$

$$=\int_0^t\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)s_n(t)d\xi$$

Nella (69):

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)s_n(t)d\xi\sin\frac{n\pi x}{L}$$

riscrivo $s_n(t)$ usando la (71b)

$$\Rightarrow T(x,t)=\int_0^t\int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{L}S(y,\xi)dyd\xi$$

$$\Rightarrow T(x,t)=\int_0^t\int_0^L G(t-\xi,x,y)S(y,\xi)dyd\xi \tag{2.73}$$

$$G(t-\xi,x,y):=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{L} \tag{2.74}$$

è identica alla (22).
NB: se $T(x,0)=T_0(x)$ anziché 0, sostituisci $b_n(0)=0$ con

$$b_n(0)=\frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n(t)=\int_0^t\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)s_n(\xi)d\xi+\underbrace{b_n(0)\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t)\right)}$$

Soluzione dell'equazione omogenea $b_n'(t)=-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}b_n(t)$

$$\Rightarrow T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}(t-\xi)\right)s_n(\xi)d\xi\sin\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(0)\exp\left(-\frac{\chi n^2\pi^2}{L^2}t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$T(x,t)=\int_0^t\int_0^t G(t-\xi,x,y)S(y,\xi)dyd\xi+\int_0^L G(t,x,y)T_0(y)dy \tag{2.75}$$

-Abbiamo visto che la (74) coincide con la (22), ottenuta dalla (20). Questo vale in generale.: vogliamo risolvere

$$\begin{matrix}\partial_t T=\chi\Delta T+S(\bar{x},t), \quad \bar{x}\in U\\ T(\bar{x},t)|_{\bar{x}\in U}=0\end{matrix}(76) \tag{2.76}$$

A tal fine: funzione di Green tale che

$$(\partial_t\chi\Delta_{\bar{x}})G(t-t',\bar{x},\bar{y})=\delta(t-t')\delta(\bar{x}-\bar{y})(77) \tag{2.77}$$

$$\Rightarrow T(\bar{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_U d^d\bar{y}G(t-t',\bar{x},\bar{y})S(\bar{y},t')(78) \tag{2.78}$$

Sviluppa G e δ secondo

$$\begin{matrix}G(t-t',\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{2\pi}\int d\omega\sum_{n,m}e^{-i\omega(t-t')}\cdot\varphi_n(\bar{x})\varphi_m(\bar{y})\tilde{G}_{nm}(\omega)\\ \delta(t-t')\delta(\bar{x}-\bar{y})=\frac{1}{2\pi}\int d\omega e^{-i\omega(t-t')}\sum_{n,m}\varphi_n\bar{x}\varphi_m(\bar{y})\delta_{nm}\end{matrix}(79) \tag{2.79}$$

a causa del bordo l'integrale viene discretizzato.
φ soddisfa $\Delta\varphi_n+\lambda_n\varphi_n=0$ in U, $\varphi(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial U}=0$ formano un sistema completo in U. Motro completezza

$$\sum_{n,m}\varphi_n(\bar{x})\varphi_m(\bar{y})\delta_n,m=\sum_n\varphi_n(\bar{x})\varphi_n(\bar{y})=\delta(\bar{x}-\bar{y})$$

sostituisco la (79)nella (77)

$$\frac{1}{2\pi}\int d\omega\sum_{n,m}(-i\omega+\chi\lambda_n)e^{-i\omega(t-t')}\cdot\varphi_n(\bar{x})\varphi_m(\bar{y})\tilde{G}_{n,m}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int d\omega\sum_{n,m}(-i\omega+\chi\lambda_n)e^{-i\omega(t-t')}\cdot\varphi_n(\bar{x})\varphi_m(\bar{y})\delta_{nm}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}_{nm}(\omega)=\frac{\delta_{nm}}{-i\omega+\chi\lambda_n}$$

Nella (79): $\Rightarrow$

$$G(\tau,\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{2\pi}\int d\omega\sum_{n,m}e^{-i\omega\tau}\varphi_n(\bar{x})\varphi_m(\bar{y})\frac{\delta_{nm}}{-i\omega+\chi\lambda_n}$$

Considera $\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega\tau}}{-i\omega+\chi\lambda_n}$ Affermazione: titti gli autovalori λ_n sono positivi:
Dimostrazione

$$0=\int_U\varphi_n(\Delta\varphi_n+\lambda_n\varphi_n)d^d\bar{x}=\int_U\left[\bar{\nabla}\cdot(\varphi_n\bar{\nabla}\varphi_n)-\bar{\nabla}\varphi_n\cdot na\bar{b}la\varphi_n+\lambda_n\varphi_n^2\right]d^d\bar{x}$$

uso Gauss

$$=\int_{\partial U}\bar{n}(\varphi_n\bar{\nabla}\varphi_n)d^{d-1}\bar{x}+\int_U\left[-(\bar{\nabla}\varphi_n)^2+\lambda_n\varphi_n^2\right]d^d\bar{x}$$

il primo integrale è nullo per le condizioni al contorno, $\varphi_n|_{\partial U}=0$

$$\lambda_n=\frac{\int_U(\bar{\nabla}\varphi_n)^2d^d\bar{x}}{\int_u\varphi_n^2d^d\bar{x}}>0,\quad q.e.d.$$

$\rightarrow$ polo nel semipiano inferiore:

$$e^{-i\omega\tau}=e^{-i(Re\omega+iIm\omega)\tau}=e^{-i\tau Re\omega}e^{\tau Im\omega}$$

Abbiamo gia dimostrato che il contributo del semicerchio è nullo (vedi)

$$\Rightarrow G(\tau,\bar{x},\bar{y})=0,\quad \tau<0(80) \tag{2.80}$$

$\tau=t-t',\quad \tau<0\Rightarrow t<t'\rightarrow$ contributi solo dal passato nella convoluzione

$$\tau>0:\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{-i(\omega+i\chi\lambda_n)}=-2\pi i\cdot ie^{-i(-i\chi\lambda_n)\tau}=2\pi e^{-\chi\lambda_n\tau}$$

$$\Rightarrow G(\tau,\bar{x},\bar{y})=\sum_n e^{-\chi\lambda_n\tau}\varphi_n(\bar{x})\varphi_n(\bar{y})(81)v(20) \tag{2.81}$$

$\Rightarrow$ L'equazione del calore $(\partial_t-\chi\Delta)T=S$ in U ha la soluzione

$$T(\bar{x},t)=\int_0^t dt'\int_U d^d\bar{y}G(t-t',\bar{x},\bar{y})S(\bar{y},t')+\int_U d^d\bar{y}G(t,\bar{x},\bar{y})T_0(\bar{y})(82) \tag{2.82}$$

Soluzione particolare dell'equazione non omogenea (v.(78)), tenendo conto della (80) e di $S(\bar{y},t')=0$ per $t'<0$ sommata a soluzone dell'equazione omogenea in modo tale che $T(\bar{x},0)=T_0(\bar{x})$

-Altro esempio: equazione di laplace (Poisson) nella palla di raggio R

$$\begin{gathered}\Delta\Phi=-F(r,\theta,\varphi)\quad r<R\\ \Phi(R,\theta,\varphi=0\end{gathered} \tag{2.83}$$

(Elettrostatica: $-F=4\pi\rho$)

$$\Delta=\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

Sviluppo di Φ, F in armoniche sferiche (reali, non complesse):

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a_{l0}(r)P_l^0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{l}\left(a_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi + b_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right)\right)$$

$$F(r,\theta\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}A_{l0}(r)P_l^0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{l}\left(A_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi + B_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right)\right) \tag{2.84}$$

Sostituisco nella (83)

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a''_{l0}(r)P_l^0(\cos\theta) + \frac{2}{r}\frac{1}{2}a'_{l0}(r)P_l^0(\cos\theta) + \frac{1}{r^2}(-l)(l+1)\frac{a_{l0}(r)}{2}P_l^0(\cos\theta)\right) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m>0}\left(a''_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi + b''_{lm}\right.$$

$$= -\sum_{l}\frac{1}{2}A_{l0}(r)P_l^0(\cos\theta) - \sum_{l,m>0}\left(A_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi + B_{lm}(r)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right)$$

(usato: $\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta(P_l^m(\cos\theta)cosm\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2(P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi) = -l(l+1)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$. Sfrutto il fatto che le armoniche sferiche $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ e $P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ sono linearmente indipendenti

$$\begin{gathered} \implies a''_{lm}(r) + \frac{2}{r}a'_{lm}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}a_{lm}(r) = -A_{lm}(r) \\ b''_{lm}(r) + \frac{2}{r}b'_{lm}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}b_{lm}(r) = -B_{lm}(r) \\ a_{lm}(R) = b_{lm}(R) = 0 \end{gathered} \tag{2.85}$$

Entrambe le equazioni possono essere riscritte nella forma $(pu')' + qu = -f$, con $p = r^2$, $q = -l(l+1)$, $f = A_{lm}(r)r^2$ oppure $B_{lm}(r)r^2$, $u = a_{lm}(r)$ oppure $b_{lm}(r)$. Funzione di Green $G(r,\xi)$. Soddisfa l'equazione omogenea $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right) - l(l+1)G = 0$. Prova $G(r,\xi) = C(\xi)r^\alpha$, $r \neq \xi$

$$r^2\frac{dG}{dr} = C\alpha r^{\alpha+1}$$

$$\implies C\alpha(\alpha+1)r^\alpha - l(l+1)Cr^\alpha = 0, \quad \alpha = l \vee \alpha = -l-1$$

$$G(r,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)r^l + c_2(\xi)r^{-l-1} & \xi \leq r \\ \tilde{c}_1(\xi)r^l + \tilde{c}_2(\xi)r^{-l-1} & \xi \geq r \end{cases}$$

N.B. l'estremo r=0 dell'intervallo [0,R] è un punto singolare: $p(r) = r^2$ si annulla in r=0, e la soluzione fondamentale $\sim r^{-l-1}$ diverge. Al posto di una condizione al contorno inr=0 richiediamo che u (e G) rimangano limitate $\implies \tilde{c}_2 = 0$

$$G|_{r=\xi+0} = G|_{r=\xi-0} \implies c_1\xi^l + c_2\xi^{-l-1} = \tilde{c}_1\xi^l$$

$$\tilde{c}_1 0 c_1 + c_2\xi^{-2l-1}$$

$$G|_{r=R} = 0 \Rightarrow c_1R^l + c_2R^{-l-1} = 0 \implies c_2 = -c_1R^{2l+1} \implies \tilde{c}_1 = c_1(1 - R^{2l+1}\xi^{-2l-1})$$

$$\Rightarrow G(r,\xi) = \begin{cases} c_1 r^l(1 - (\frac{R}{r})^{2l+1} & \xi \leq r \\ c_1 r^l(1 - (\frac{R}{\xi})^{2l+1} & \xi \geq r \end{cases}$$

$$\frac{dG}{dr}|_{r=\xi+0} - \frac{dG}{dr}|_{r=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)}$$

$$c_1 = \frac{\xi^l}{(2l+1)R^{2l+1}}$$

$$G_l(r,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{(2l+1)R}(\frac{\xi}{R})^l[\frac{r}{R})^{-l-1} - (\frac{r}{R})^l] & \xi \leq r \\ appunti \end{cases} \tag{2.86}$$

Inversa della (84):

$$\begin{aligned} A_{lm}(r) &= \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} F(r,\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi \\ B_{lm}(r) &= \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} F(r,\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned}(88) \tag{2.87}$$

(usa ortogonalità delle armoniche sferiche).
Con la (87) e (88), la (84) diventa

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R G(r,\theta,\varphi,r',\theta',\varphi')F(r',\theta',\varphi')r'^2\sin\theta' dr'd\theta'd\varphi'(89) \tag{2.88}$$

dove, per r'¡r

$$G(r,\theta,\varphi,r',\theta',\varphi') = \sum_{l,m>0} \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}\frac{1}{(2l+1)R}(\frac{r'}{R})^l[(\frac{r}{R})^{-l-1} - (\frac{r}{R})^l]P_L^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')(\cos m\varphi\cos m\varphi'\sin m\varphi$$

(per r'¿r : scambia r con r')

$$\sum_{m=1}^{l}\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\underbrace{(\cos m\varphi\cos m\varphi' + \sin m\varphi + \sin m\varphi')}_{} + \frac{1}{2}\frac{2l+1}{2\pi}P_l^0(\cos\theta)P_l^0(\cos\theta')$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{im(\varphi-\varphi')} + e^{-im(\varphi-\varphi')}\right)$$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

Riscrivo passando alle armoniche complesse

$$= \sum_{m=1}^{l}\left(Y_l^m(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta',\varphi') + Y_l^{m*}(\theta,\varphi)Y_l^m(\theta',\varphi')\right) + Y_l^0(\theta,\varphi)Y_l^{0*}(\theta',\varphi')$$

$$Y_l^{m*}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\varphi)$$
$$Y_l^m(\theta',\varphi') = (-1)^m Y_l^{-m*}(\theta',\varphi')$$

$$= \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta',\varphi') = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\gamma)$$

con $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$. Quindi

$$G(r,\theta,\varphi;r',\theta',\varphi') = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)R}(\frac{r'}{R})^l[(\frac{r}{R})^{-l-1} - (\frac{r}{R})^l]\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\gamma)$$

-funzione generatrice dei polinomi di Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n(90) \tag{2.89}$$

$$G(r,\theta,\varphi;r',\theta',\varphi') = \frac{1}{4\pi r}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\left(\frac{r'}{r}\right)^l - \frac{1}{4\pi R}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\left(\frac{rr'}{R^2}\right)^l$$

$$(90) = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\gamma+\frac{r'^2}{r^2}}} - \frac{1}{4\pi R}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{rr'}{R^2}\cos\gamma+\frac{r^2r'^2}{R^4}}}$$

$$= \frac{1}{4\pi}(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\pi}(R^2+\frac{r^2r'^2}{R^2}-2rr'\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}(91) \tag{2.90}$$

è già simmetrica in $r, r' \to$ stesso risultato per $r' > r$.
in coordinate cartesiane:

$$G(x,y,z,x',y',z') = \frac{1}{4\pi}\left\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{r'}\left\{(x-x'\frac{R^2}{r'^2})^2+(y-y'\frac{R^2}{r'^2})^2+(z-z'\frac{R^2}{r'^2})^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{2.91}$$

usando

$$R^2+\frac{r^2r'^2}{R^2}-2rr'\cos\gamma = \frac{r'^2}{R^2}\left(r^2+\frac{R^4}{r'^2}-\frac{2rR^2}{r'}\cos\gamma\right) = \frac{r'^2}{R^2}(\bar{r}-\bar{\rho})^2$$

$$\bar{\rho} := \frac{R^2}{r'^2}\bar{r}'$$

1 termine della (91'): carica puntiforme in $\bar{r}'$.

2 termine : carica immagine in $\bar{\rho} = \frac{R^2}{r'^2}\bar{r}'$ (che è fuori dalla palla)

2.4 Il kernel di Schroedinger

equazione di Schroedinger

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi = (p.libera) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

$$\Rightarrow -i\partial_t\psi = \frac{\hbar}{2m} = \chi\Delta\psi(92) \tag{2.92}$$

risulta dall'equazione del calore $\partial_t\psi = \chi\Delta\psi$ tramite la rotazione di Wick $t \to it$ ($\Rightarrow \partial_t \to -i\partial_t$)
Supponiamo di essere in d dimensioni spaziali. Trasformata di fourier

$$\psi(\bar{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d\bar{k}e^{i\bar{k}\bar{x}}\tilde{\psi}(\bar{k},t)$$

$$(92) \Rightarrow -i\partial_t\tilde{\psi}(\bar{k},t) = \chi(-\bar{k}^2)\tilde{\psi}(\bar{k},t)$$

$$\Rightarrow \tilde{psi}(\bar{k},t) = e^{-i\chi\bar{k}t^2}\tilde{\psi}_0(\bar{k})$$

$$\tilde{psi}_0(\bar{k}) = \int d^d\bar{y}e^{-i\bar{k}\bar{y}}\psi_0(\bar{y})$$

$$\Rightarrow \psi(\bar{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d\bar{y}\psi_0(\bar{y})\cdot\int d^d\bar{k}e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})-i\chi\bar{k}^2t}$$

definisco $\bar{z} := \bar{x}-\bar{y}$, $\quad (2\pi)^dG(\bar{z},t) := \int d^d\bar{k}e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})-i\chi\bar{k}^2t}$

$$i\bar{k}\bar{z} - i\chi\bar{k}^2t = -i\chi t\left(\bar{k}-\frac{\bar{z}}{2\chi t}\right)^2 + \frac{i\bar{z}^2}{4\chi t}$$

$Re(i\chi t) = 0 \Rightarrow$ regolarizza $t \to t - i\epsilon$, $\epsilon > 0 \implies Re(i\chi(t-i\epsilon)) = \chi\epsilon > 0 \quad \checkmark$

$$\Rightarrow G(\bar{z},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{i\bar{z}}{4\chi(t-i\epsilon)}\right) \cdot \int d^d\bar{k} e^{-i\chi(t-i\epsilon)\left(\bar{k}-\frac{\bar{z}}{2\chi(t-i\epsilon)}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{i\bar{z}^2}{4\chi(t-i\epsilon)}\right) \sqrt[d]{\frac{\pi}{i\chi(t-i\epsilon)}}$$

$$\to (\epsilon \to 0) \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{m\bar{z}^2}{2i\hbar t}\right) (93) \tag{2.93}$$

"Schroedinger Kernel" esiste per tutti i $t \in \mathbb{R}$. (l'equazione di Schroedinger è reversibile, quella del calore no)

$$-i\partial_t\psi = \chi\Delta\psi$$
$$(t \to -t) \Rightarrow i\partial_t\psi = \chi\Delta\psi$$
$$(\psi \to \psi^*) \Rightarrow i\partial_t\psi^* = \chi\Delta\psi^*$$
$$(c.contorno) \Rightarrow -i\partial_t\psi = \chi\Delta\psi$$

Commenti: i) $G(\bar{x}-\bar{y},t)$ soddisfa l'equazione di Schroedinger $-\partial_t\psi = \chi\Delta_{\bar{x}}G$
ii) $\lim_{t\to 0} G(\bar{z},t) = \delta(\bar{z})$
Più in generale (non necessariamente particella libera):
cerchiamo $G^R(\bar{x},\bar{y},t) t.c.$

$$\psi(\bar{x},t) = i\int d^d\bar{y}\psi_0(\bar{y})G^R(\bar{x},\bar{y},t)(94) \tag{2.94}$$

$G^R(\bar{x},\bar{y},t)$: funzione di Green ritardata, $G^R(\bar{x},\bar{y},t)$=0 per t¡0. Rappresenta l'ampiezza di probabilità che la particella cada dal punto $(\bar{y}, t=0)$ al punto $(\bar{x},t)$.
φ_n autofunzioni di $\hat{H}$

$$\hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n(95) \tag{2.95}$$

$$\Rightarrow G^R(\bar{x},\bar{y},t) = -i\sum_n e^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y}), \quad t \geq 0(96) \tag{2.96}$$

vedi le (20) e (81)

$$(94) \Rightarrow \psi(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y}\sum_n e^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})\psi_0(\bar{y})$$

sooddisfa l'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar\partial_t\psi(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y}\sum_n i\hbar\frac{-iE_nt}{\hbar}e^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})\psi_0(\bar{y})$$

$$\hat{H}_{\bar{x}}\psi(\bar{x},t) = \int d^d\bar{y}\sum_n e^{-iE_nt/\hbar}\underbrace{\hat{H}_{\bar{x}}\varphi_n(\bar{x})}_{E_n\varphi_n(\bar{x})}\varphi_n^*(\bar{y})\psi_0(\bar{y})$$

Inoltre: $\psi(\bar{x},0) = \int d^d\bar{y}\underbrace{\sum_n \varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})}_{\delta(\bar{x}-\bar{y})}\psi_0(\bar{y}) = \psi_0(\bar{x}) \qquad \checkmark$

Trasformata di Fourier:

$$\tilde{G}^R(\bar{x},\bar{y},E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt/\hbar}G^R(\bar{x},\bar{y},t) = \int_0^{\infty} dt e^{iEt/\hbar}G^R(\bar{x},\bar{y},t) = (96) = -i\sum_n\int_0^{\infty} dt e^{i(E-E_n)t/\hbar}\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})$$

l'ultimo integrale non è ben definito se $E \in \mathbb{R} \to$ regolarizza tramite $E \to E + i\epsilon, \quad \epsilon > 0$

$$\Rightarrow \tilde{G}^R(\bar{x},\bar{y},E) = \sum_n \frac{\varphi_n(\bar{x})\varphi_n^*(\bar{y})}{E + i\epsilon - E_n} \tag{2.97}$$

Capitolo 3

Carica immagine

problema: sfera con raggio R, messa a terra, con carica puntiforme q in $\bar{r}_0$

Per motivi di simmetria, la carica immagine giace sulla retta che collega O e q.
Potenziale in P

$$\Phi = \frac{q}{a} + \frac{q'}{b} = 0 \tag{3.1}$$

prendi p=A:

$$\frac{q}{R - r_0} + \frac{q'}{d} = 0 \tag{3.2}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{d}{R - r_0}$$

prendo p=B:

$$\frac{q}{R + r_0} + \frac{q'}{d + 2R} = 0 \tag{3.3}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{q'}{q} = \frac{d + 2R}{R + r_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{R - r_0} = \frac{d + 2R}{R + r_0}$$

$$\Rightarrow d(R + r_0) = (d + 2R)(R - r_0)$$

$$\Rightarrow dR + 2dr_0 = dR - dr_0 - 2R^2 - 2Rr_0$$

$$\Rightarrow d = \frac{R(R - r_0)}{r_0} \tag{3.4}$$

e quindi

$$q' = \frac{dq}{Rr_0} = -\frac{q}{Rr_0}\frac{R(R - r_0)}{r_0} = -\frac{qR}{r_0} \tag{3.5}$$

Verificare che la (1) vale $\forall p$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{b}{a} = (5) = \frac{R}{r_0} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{R}{r_0}$$

Calcolo α : $a^2 = r_0^2 + R^2 = 2r_0R\cos\alpha \implies \cos\alpha = \dfrac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R}$
D'altra parte:

$$\cos\alpha = \frac{r_0 + l}{R} \implies \frac{r_0 + l}{R} = \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R} \implies l = \frac{-r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0}$$

$$c^2 = R^2 - (r_0 + l)^2 = R^2 - \left(\frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0}\right)^2 = b^2 - (d + R - r_0 - l)^2 = b^2 - (d + R)^2 - (r_o + l)^2 + 2(d + R)(r_0 + l)$$

$$\Rightarrow R^2 = b^2 - (d+R)^2 + 2\underbrace{(d+R)}_{\frac{R^2}{r_0^2}}\underbrace{(r_0+l)}_{\frac{r_0^2+R^2-a^2}{2r_0R}}$$

$$\Rightarrow R^2 = b^2 - \frac{R^4}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^2}(r_0^2 + R^2 - a^2) \implies \frac{R}{r_0^2}a^2 = b^2 \implies \frac{b}{a} = \frac{R}{r_0} \qquad \checkmark$$