Exercice 2 : 5 points

1) Résous dans R^2 le système d'équations :

$$\begin{cases} 22x + 19y = 144000 \\ x + y = 7200 \end{cases}$$

Premièrement, résolvons la deuxième équation pour y :

$$y = 7200 - x$$

Ensuite, remplaçons y dans la première équation :

$$22x + 19(7200 - x) = 144000$$

Développons et simplifions :

$$22x + 136800 - 19x = 144000$$

$$3x + 136800 = 144000$$

$$3x = 7200$$

$$x = 2400$$

Ensuite, trouvons y :

$$y = 7200 - 2400 = 4800$$

Donc la solution est :

$$x = 2400, \quad y = 4800$$

2) Dans un magasin de vente d'articles divers, un fidèle client a acheté deux articles A et B, le tout à 7200 F. Une semaine plus tard, avec la même somme, il achète l'article A avec une augmentation de 10% et l'article B avec une réduction de 5%.

Quel a été le prix de l'article A avant l'augmentation et celui de l'article B avant la réduction ?

Soit a le prix initial de l'article A et b le prix initial de l'article B.

Première transaction :

$$a + b = 7200$$

Deuxième transaction :

$$1.1a + 0.95b = 7200$$

Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} a + b = 7200 \\ 1.1a + 0.95b = 7200 \end{cases}$$

Résolvons la première équation pour b :

$$b = 7200 - a$$

Ensuite, remplaçons b dans la deuxième équation :

$$1.1a + 0.95(7200 - a) = 7200$$

Développons et simplifions :

$$1.1a + 6840 - 0.95a = 7200$$

$$0.15a + 6840 = 7200$$

$$0.15a = 360$$

$$a = 2400$$

Ensuite, trouvons b :

$$b = 7200 - 2400 = 4800$$

Donc les prix sont :

$$a = 2400, \quad b = 4800$$

Exercice 3 : 7 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on considère deux points $M(1, 3)$, $N(3, 1)$. Soit $Q(-3, y)$ un point du plan où y est un réel.

1) Pour quelle valeur de y les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{MQ}$ sont-ils orthogonaux ?

Vecteurs :

$$\vec{MN} = (3 - 1, 1 - 3) = (2, -2)$$

$$\vec{MQ} = (-3 - 1, y - 3) = (-4, y - 3)$$

Les vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{MN} \cdot \vec{MQ} = 2 \times (-4) + (-2) \times (y - 3) = 0$$

$$-8 - 2(y - 3) = 0$$

$$-8 - 2y + 6 = 0$$

$$-2 - 2y = 0$$

$$-2y = 2$$

$$y = -1$$

2) Dans la suite de l'exercice, on prendra $y = -1$.

a) Détermine les coordonnées du point P, image du point Q par la translation de vecteur $\vec{MN}$.

Vecteur de translation $\vec{MN} = (2, -2)$:

$$P(-3+2, -1-2) = (-1, -3)$$

b) Déduis de ce qui précède la nature du quadrilatère $MNPQ$.

Le quadrilatère $M(1,3)$, $N(3,1)$, $P(-1,-3)$, $Q(-3,-1)$ est un parallélogramme car les côtés opposés sont parallèles et égaux.

c) Montre que l'aire A du quadrilatère $MNPQ$ est égale à $16\,\mathrm{cm}^2$.

Utilisons la formule de la shoelace :

$$A = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1)\right|$$

Pour les points $(1,3)$, $(3,1)$, $(-1,-3)$, $(-3,-1)$:

$$A = \frac{1}{2}\left|1\cdot 1 + 3\cdot(-3) + (-1)\cdot(-1) + (-3)\cdot 3 - (3\cdot 3 + 1\cdot(-1) + (-3)\cdot(-3) + (-1)\cdot 1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|1 - 9 + 1 - 9 - (9 - 1 + 9 - 1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-16 - 16\right| = \frac{1}{2} \times 32 = 16\,\mathrm{cm}^2$$

3) On suppose que le quadrilatère $MNPQ$ est la base d'une pyramide de sommet H et de hauteur $HO = 9\,\mathrm{cm}$.

Calcule le volume V de la pyramide $HMNPQ$.

Volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Base Area} \times \text{Height}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 16 \times 9 = 48\,\mathrm{cm}^3$$