Movement and Artificial Intelligence

M2 – INF 3002

AIDN: Interactive Analysis of Digital Data

Sylvie Gibet

Outline of the course

- **Lecture 2. Motion Processing**
  - Dynamic programming - DTW
    - TD/TP DTW using gestural traces (Wacom tablet)
  - Dimension-reduction – PCA
  - Motion descriptors

How to reduce the dimensionality ?

- Representing motion into PCA basis (Principal Components Analysis) or PGA basis
  - Variant: SVD (Singular Value Decomposition)
- Compression of trajectories by curves and surfaces approximations

Reducing dimensionality using PCA

- Principal Component Analysis
  - Motion = Matrixes of joint angles trajectories
    - Find the main axes (eigenvectors)
    - Motion = linear combination of a limited number of eigenvectors

Méthode SVD

Principe

- La décomposition en valeurs singulières est une méthode de réduction de dimension permettant la compression de données (utile pour l'indexation de données) et le transfert d'information. Nous proposons dans ce TP d'exploiter cette méthode pour compresser des images.

- Compte tenu de la quantité d'informations numériques à stocker et à traiter, il est intéressant d'utiliser des méthodes d'algèbre linéaire à des fis de compression de données.

Méthode SVD - Principe

- Soit A une matrice m x n. La SVD permet la factorisation de A en $U\Sigma V^T$, où U et V sont des matrices orthonormales. Σ est une matrice diagonale qui comprend les valeurs singulières de A.

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$$

- Les valeurs singulières sont les valeurs propres de $A.A^T$ et $A^T.A$

$$A = U\,\Sigma\,V^T$$

Principe de la compression à partir de la décomposition SVD

- La SVD prend une matrice, carrée ou non carrée, et la décompose en deux matrices orthogonales U et V, et une matrice diagonale Σ.

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \cdots & \mathbf{u_{n-1}} & \mathbf{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ & & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1}^T \\ \mathbf{v_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v_{n-1}}^T \\ \mathbf{v_n}^T \end{bmatrix}$$

$$A = \mathbf{u_1}\sigma_1\mathbf{v_1}^T + \mathbf{u_2}\sigma_2\mathbf{v_2}^T + \cdots + \mathbf{u_{n-1}}\sigma_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}^T + \mathbf{u_n}\sigma_n\mathbf{v_n}^T$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T$$

Principe de la compression à partir de la décomposition SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \cdots & \mathbf{u_{n-1}} & \mathbf{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ & & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1}^T \\ \mathbf{v_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v_{n-1}}^T \\ \mathbf{v_n}^T \end{bmatrix}$$

$$A = \mathbf{u_1}\sigma_1\mathbf{v_1}^T + \mathbf{u_2}\sigma_2\mathbf{v_2}^T + \cdots + \mathbf{u_{n-1}}\sigma_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}^T + \mathbf{u_n}\sigma_n\mathbf{v_n}^T$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T$$

- Comme $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$, le premier terme de la série aura le plus d'impact sur la somme totale (c'est lui qui représente le maximum de variance des données), suivi du second terme puis du troisième...
- Ainsi, on peut additionner uniquement les premiers termes de la série et négliger les autres.

Principe de la compression à partir de la décomposition SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \cdots & \mathbf{u_{n-1}} & \mathbf{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ & & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1}^T \\ \mathbf{v_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v_{n-1}}^T \\ \mathbf{v_n}^T \end{bmatrix}$$

$$A = \mathbf{u_1}\sigma_1\mathbf{v_1}^T + \mathbf{u_2}\sigma_2\mathbf{v_2}^T + \cdots + \mathbf{u_{n-1}}\sigma_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}^T + \mathbf{u_n}\sigma_n\mathbf{v_n}^T$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T$$

Principe de la compression à partir de la décomposition SVD

- Ainsi, on peut reconstituer la matrice approchée en ne considérant que les *k* premier termes de la somme.

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

- Si la matrice A représente une image, cela permet de compresser plus ou moins cette image. Plus k est grand et plus on s'approche de la matrice originale. Si k est égal au rang de A, alors on réplique complètement la matrice.
- Méthode qui fonctionne en analyse / synthèse
- Paramètre de compression : *k*

Reducing dimensionality of movement using SVD

Movement

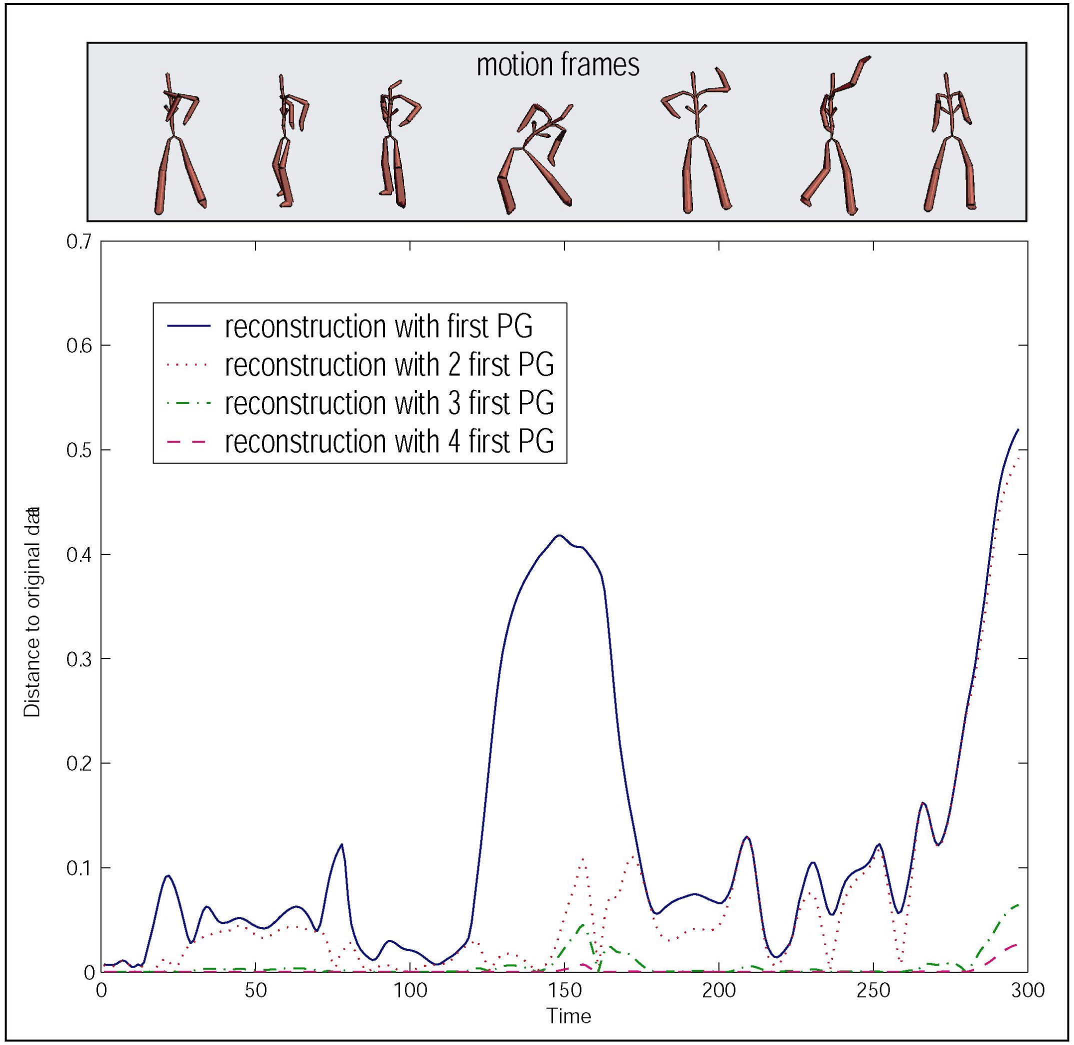
- Motion = Matrixes of joint angles trajectories
  - Find the main axes (eigenvectors)
- Motion = linear combination of a limited number of eigenvectors
- Decomposition into singular values (SVD) : projection of motions into a ref. basis:

$$M_{ref} = U_{ref} \Sigma_{ref} V_{ref}^T$$

$$V_i^T = \Sigma_{ref}^+ U_{ref}^T M_i$$

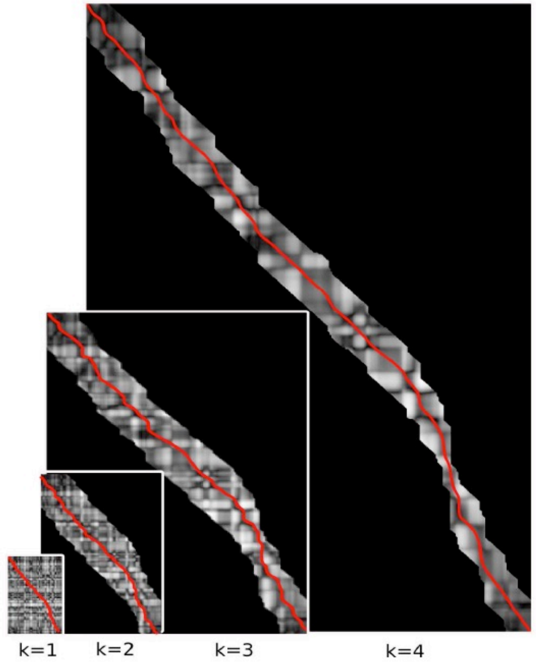
Reducing dimensionality using PGA (Principal geodesic analysis)

- Intérêts : compression du mouvement, segmentation, analyse/synthèse



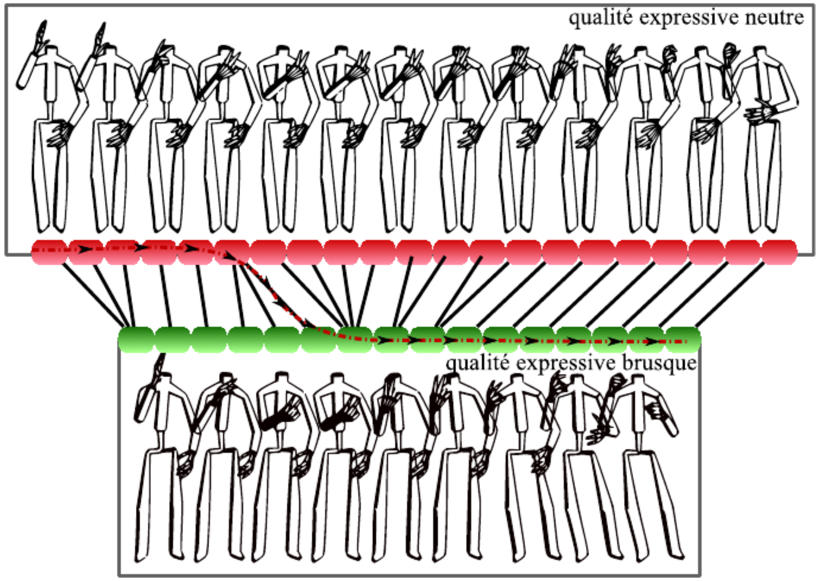
Temporal alignment
Dynamic Time Warping

- **PCA-based techniques**
  - Motion representation: from orientation (63 quat.) to 4 eigenvalues

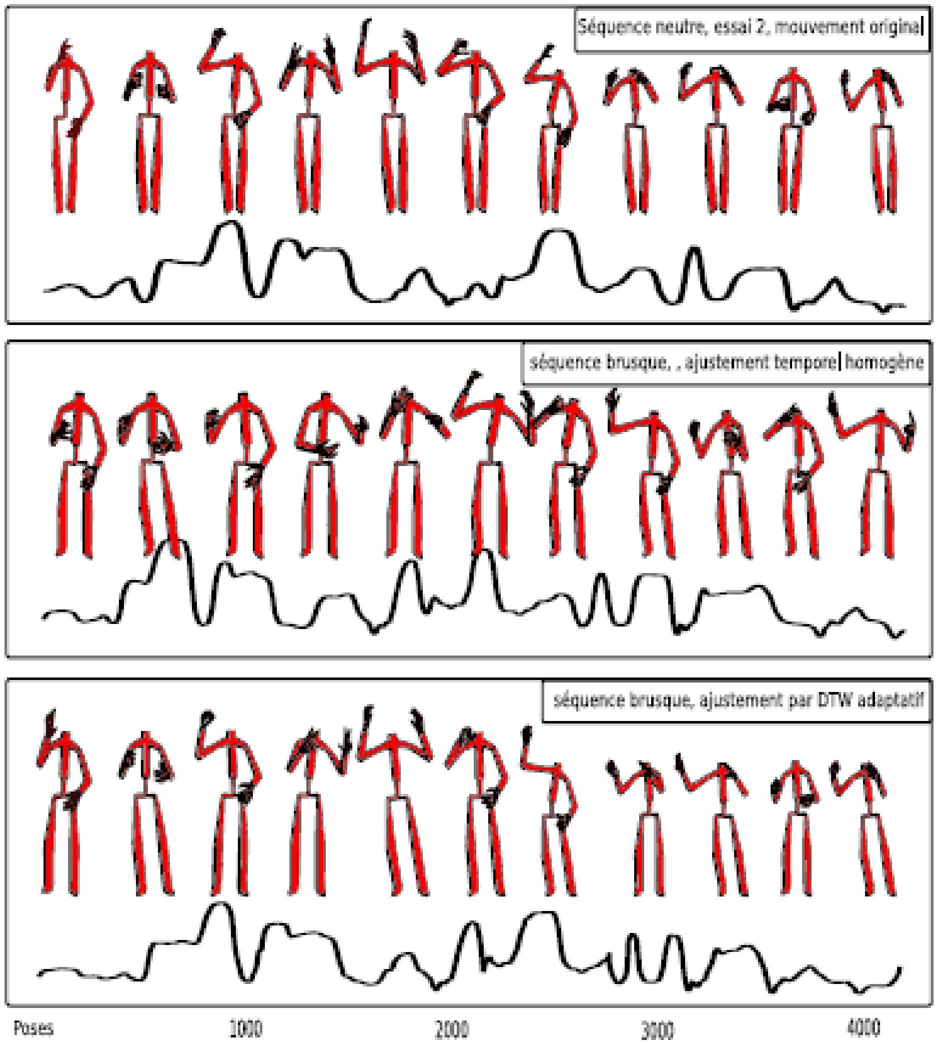


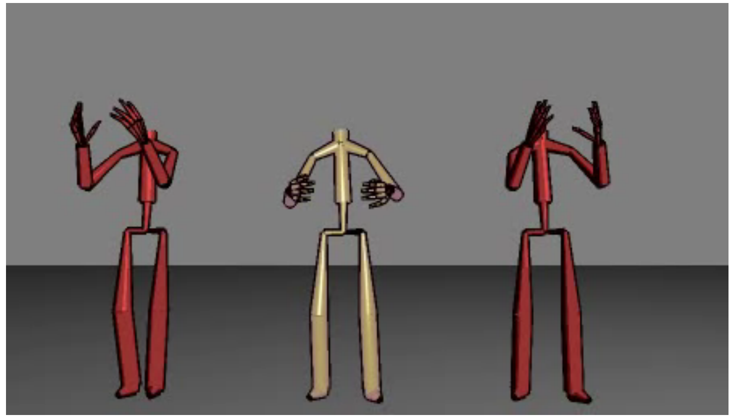
- **Temporal alignment with DTW**
  - Whole sequence of motion (40 s.)
  - Expressive transformations:

Neutral -> {Angry, Cool, etc.)



Temporal alignment with DTW

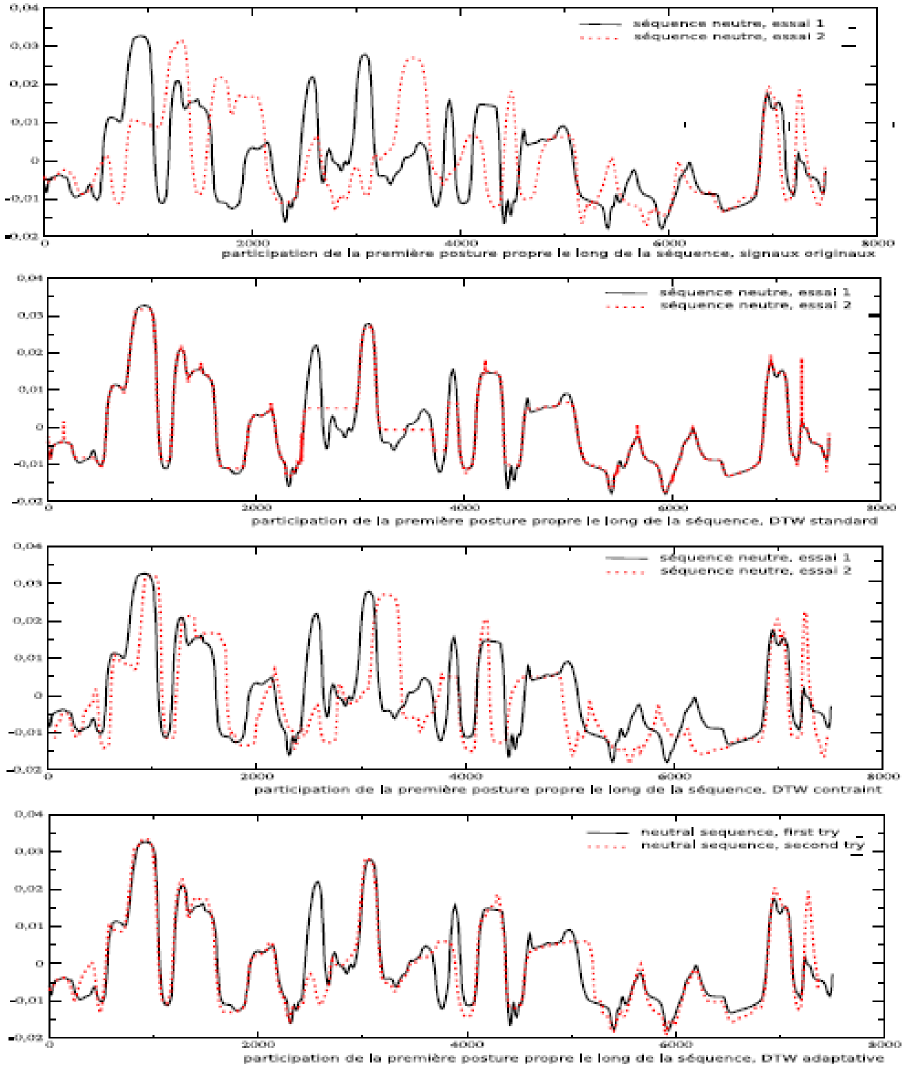




[Héloir, CAVW 2006]

Keep the meaningful motion units (strokes): semantic coherence

Temporal alignment with DTW



Articles PCA

1. Principal component analysis reveals the proximal to distal pattern in vertical jumping is governed by two functional degrees of freedomEJ Cushion, J Warmenhoven, J North, DJ Cleather, Frontiers in bioengineering and biotechnology 7, 193, 2019   biomechanics

2. P. Glardon, R. Boulic and D. Thalmann, "PCA-based walking engine using motion capture data,In *Proceedings Computer Graphics International, 2004.*, Crete, 2004, pp. 292-298, doi: 10.1109/CGI.2004.1309224.

data-based synthesis synthesis

3. Jernej Barbic, Jia-Yu Pan, Christos Faloutsos, Jessica Hodgins and Nancy Pollard, In Proceedings of Graphics Interface 2004, pp. 185 - 194, *May, 2004*

segmentation

4. *K. Forbes, Eugène Fiume, An efficient search algorithm for motion data using weighted PCA. 67-76,* Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation (2005)
motion retrieval

5. Alexis Héloir, Nicolas Courty, Sylvie Gibet, Franck Multon, Temporal alignment of communicative gesture sequences, CAVW 17 (3-4): 347-357 (2006)   style charactérization

Eléments complémentaires

- **Exemple de décomposition SVD**

Exemple de décomposition SVD

- Soit la matrice A de rand 2 suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Plusieurs étapes :
  - Calcul de $A.A^T$ et de A^TA
  - Détermination des valeurs propres
  - Détermination de U et V

Exemple de décomposition SVD

- Calcul de $A.A^T$ et de A^TA

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemple de décomposition SVD

- Détermination des valeurs propres de A.A^T et de A^{T}A : il s'agit de trouver les valeurs propres l_1 et l_2 qui vérifient :

$$|AA^T - \lambda I| = 0$$
$$|A^T A - \lambda I| = 0$$

- Nous résolvons la première équation

Détermination des valeurs propres

- Première équation :

$$|AA^T - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(8-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 8$$

$$\lambda_2 = 2$$

Calcul des valeurs singulières et de la matrice Σ

- Les valeurs propre λ_1 et λ_2 permettent de calculer les valeurs singulières σ_1 et σ_2 et par conséquent la matrice Σ :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{8}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Détermination de U

- Les colonnes de U sont les vecteurs propres de AA^T.
- Nous devons résoudre l'équation (3) et les valeurs propres calculées précédemment pour déterminer les vecteurs propres et ainsi construire U

$$(AA^T - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \tag{3}$$
$$(A^T A - \lambda I)\mathbf{x} = 0. \tag{4}$$

Détermination de U

- Premier vecteur propre (première colonne de U)

$$(AA^T - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \mathbf{x}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 - 8 & 0 \\ 0 & 2 - 8 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = 0$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Détermination de U

- Second vecteur propre (seconde colonne de U)

$$(AA^T - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\mathbf{x}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 - 8 & 0 \\ 0 & 2 - 8 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2 = 0$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Détermination de U

- Grâce aux deux vecteurs propres x1 et x2, on peut former la matrice U en normalisant ces vecteurs : u1 et u2 sont alors des vecteurs unitaires (U et V doient être orthonormales)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x_1}\|} \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x_2}\|}$$

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Détermination de V

- On utilise un procédé similaire, en résolvant l'équation (4), pour déterminer les vecteurs propres unitaires v1 et v2 de V, et ainsi former V

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$