

# Розділ 4: ЕМ-алгоритм на умовних випадкових полях

## Домашнє завдання

### 1 Основне (2 бали)

#### 1.1 Монотонність ЕМ-алгоритму

Сформулювати ЕМ-алгоритм самонавчання та показати, що на жодній ітерації він не зменшує функції правдоподібності.

### 2 Додаткове (3 бали)

#### 2.1 ЕМ для GMM

Вивести ЕМ-алгоритм для кластеризації елементів з вибірки тривимірних нормально розподілених векторів, кожен з яких належить одному з двох розподілів з невідомими параметрами  $\mu_1 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mu_2 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  та  $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

### 3 Комп'ютерне (4 бали)

#### 3.1 Основи текстурної сегментації

##### Задача

Задано поле зору  $T = \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, w\}$ . Маємо кольорове триканальне (RGB) зображення  $x : T \rightarrow C$  та його часткову сегментацію  $s : T \rightarrow \{b, f, \varepsilon\}$ . Реалізувати алгоритм, що складається з чергування наступних кроків:

- Навчання суміші тривимірних випадкових векторів, розподілених за нормальним законом (gaussian mixture model, GMM), використовуючи сегментацію  $s$ , що дає на виході набори  $\left\{ \left\langle p^f(i), \mu_i^f, \Sigma_i^f \right\rangle : i = \overline{1, N^f} \right\}$  і  $\left\{ \left\langle p^b(i), \mu_i^b, \Sigma_i^b \right\rangle : i = \overline{1, N^b} \right\}$ , де  $N^f \in \{3, \dots, 8\}$ ,  $N^b \in \{3, \dots, 8\}$ .
- Розв'язок задачі розмітки на умовному випадковому полі

$$s \in \operatorname{argmax}_{s: T \rightarrow \{b, f\}} p(s; x) = \operatorname{argmax}_{s: T \rightarrow \{b, f\}} \frac{1}{Z(x)} \cdot \prod_{t \in T} q_t(s_t; x) \cdot \prod_{tt' \in \tau} g_{tt'}(s_t, s_{t'}; x),$$

де

$$q_t(s_t; x) = \sum_{i=1}^{N^{s_t}} p^{s_t}(i) \cdot (2 \cdot \pi)^{-\frac{5}{2}} \cdot \det(\Sigma_i^{s_t})^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}_t - \mu_i^{s_t})^T \cdot (\Sigma_i^{s_t})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_t - \mu_i^{s_t}) \right\},$$

$$g_{tt'}(s_t, s_{t'}; x) = \exp \left\{ -\llbracket s_t \neq s_{t'} \rrbracket \cdot \gamma \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t'}\|^2}{2 \cdot \beta}} \right\},$$

$$\gamma \in [10; 100],$$

$$\beta = \frac{\sum_{tt' \in \tau} \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t'}\|^2}{|\tau|}.$$

Зі схожими методами сегментації, що використовують схожі вхідні дані та ті ж розподіли, можна ознайомитися за посиланнями

- <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.86.9971&rep=rep1&type=pdf>
- <https://cvg.ethz.ch/teaching/cvl/2012/grabcut-siggraph04.pdf>
- <https://sandipanweb.wordpress.com/2018/02/11/interactive-image-segmentation-with-graph-cut/>
- <https://www.robots.ox.ac.uk/~varun/prs.pdf>

Зверніть увагу на те, що в даних роботах використовується інший алгоритм пошуку найбільш ймовірного стану випадкового поля, а саме розв'язок задачі про мінімальний зріз графу або її двоїстої задачі — задачі пошуку максимального потоку.

Мета

Ефективна реалізація оцінки найбільш ймовірного стану випадкового поля та ЕМ-алгоритму кластеризації нормальних випадкових векторів.

Завдання

На вхід програмі подається

- шлях до зображення;
- шлях до зображення з частковою сегментацією, де синій та червоний кольори означають фон та об'єкт, а чорний позначає невідому частину, яку програма повинна сегментувати;
- параметри  $\gamma$ ,  $N^f$ ,  $N^b$ ;
- максимальну кількість ітерацій ЕМ-алгоритму;
- максимальну кількість ітерацій алгоритму пошуку найбільш ймовірного стану випадкового поля (якщо використовується ітеративний алгоритм);

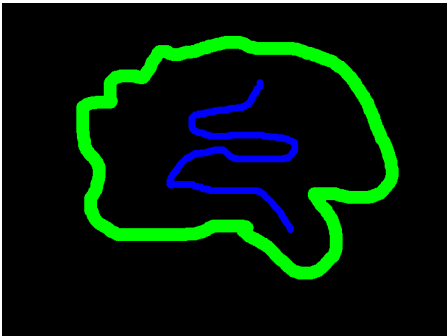
ЕМ-алгоритм та алгоритм пошуку найбільш ймовірного стану випадкового поля потрібно реалізувати власноруч.

У випадку використання алгоритму дифузії чи TRW-S 10 проходів по зображенню у прямому та зворотньому напрямку не повинно виконуватись більше ніж 100 секунд на зображенні розміром  $700 \times 500$ .

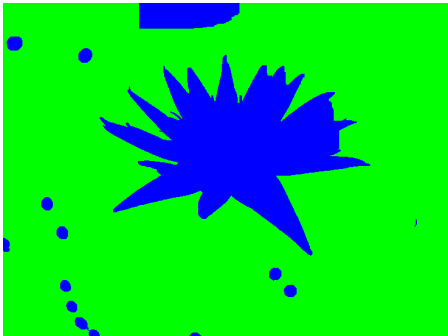
Приклади



(a) Вхідне зображення  $x$



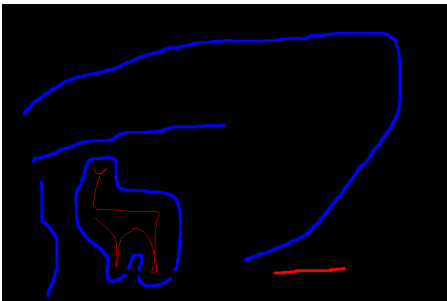
(b) Початкова сегментація  $s$



(c) Результат роботи алгоритму з параметрами  $N^f = N^b = 5$ ,  $\gamma = 50$ , 10 кроків алгоритму по 100 проходів TRW-S в кожному



(a) Вхідне зображення  $x$



(b) Початкова сегментація  $s$



(c) Результат роботи алгоритму з параметрами  $N^f = N^b = 5$ ,  $\gamma = 50$ , 5 кроків алгоритму по 100 проходів TRW-S в кожному