

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	i
Tabellenverzeichnis	ii
Abkürzungsverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	4
2.1 Polygone	4
2.1.1 Definition	4
2.1.2 Klassifikation von Polygonen	4
2.1.3 Diagonalen	5
2.1.4 Ear und Ear Tips	5
2.1.5 Sätze über Polygone	5
2.1.6 Polytope	6
2.2 Simplexe und Triangulation	7
2.3 Slivers	8
2.4 Der Traditionelle Ear-Clipping-Algorithmus	9
2.5 Preprocessing für Polygone mit Löchern	10
3 Verwandte Arbeiten	15
3.1 Verbesserungen des Ear-Clipping-Algorithmus	15
3.2 Parallelisierung des Ear-Clipping-Algorithmus	17
3.3 Alternative Verfahren und Ansätze	20
3.3.1 Delauny Triangulation	20
3.3.2 Algorithmus basierend auf Sichtbarkeit	22
Literatur	26

Abbildungsverzeichnis

1	Ein Dreieck als Beispiel für ein Polygon	4
2	Zwei Secksecke als Beispiel für konvexe bzw. konkave Polygone . .	5
3	Beispiele für Ear und Ear Tips in Polygonen	5
4	Beispiele für Polytope der Dimensionen 0 bis 4	6
5	Zerlegung eines Würfels in vier Tetraeder	7
6	Zerlegung der Oberfläche eines Würfels in Dreiecke mittels Würfelgitter	8
7	Unterschied Sliver und normales Dreieck	8
8	Vereinfachung eines Polygons mit mehreren Löchern zu einem einfachen Polygon	11
9	Brücken finden mittels Sichtlinie	12
10	Ermittlung eines Ersatzpunktes, wenn die Sicht blockiert ist . . .	13
11	Edge Swapping	16
12	Unterteilung des Streckenzugs in Unterstreckenzüge mittels Landmarks für Parallelisierung	19
13	Markierung konvexer Eckpunkte für Parallelisierung	19
14	Umkreis eines Dreiecks	20
15	Delauny Triangulation für vier konvexe Punkte	21
16	Constrained Delauny Triangulation für ein Polygon	21
17	Sichtbarkeit von Punkten	22
18	Test zur Auswahl des Second Head	23
19	Triangulation mittels Sichtbarkeitsalgorithmus	24

Tabellenverzeichnis

1	Vergleich verschiedener Parallelisierungen des Ear-Clipping-Algorithmus (ECA) in fast industrial-strength triangulation framework (FIST)	20
2	Vergleich ECA und Sichtbarkeitsalgorithmus bei rundem Polygon	25
3	Vergleich ECA und Sichtbarkeitsalgorithmus bei länglichem Polygon	25

Abkürzungsverzeichnis

GUI Graphical User Interface

ECA Ear-Clipping-Algorithmus

DT Delaunay Triangulation

CDT Constrained Delaunay Triangulation

TM Turingmaschine

CPU Central Processing Unit

FIST fast industrial-strength triangulation framework

SP Steiner Punkte

1 Einleitung

Die größte technische Wende nach der industriellen Revolution war die digitale Revolution gegen Ende des 20. Jahrhunderts.[1] Eingeleitet durch die Entwicklung des Mikrochips und der damit verbunden Verbreitung des Computers in allen Lebensbereichen führte sie zu einer dramatischen Veränderung. Nicht nur in der Industrie und Produktion fanden diese tiefgreifenden Umbrüche statt, welche sich in flexibler Automatisierung äußerten, sondern auch in anderen Bereichen. So wurde die Entwicklung des Internets durch vernetzte Rechner möglich. Als dann Computer nicht mehr nur in der Forschung und für die automatische Produktion genutzt wurden, sondern auch für den täglichen Gebrauch im Büro und daheim etablierten, benötigte man grafische Benutzeroberflächen und Betriebssysteme. Doch dort machte die Entwicklung nicht halt. Auch die Unterhaltungsbranche erfuhr mit Videospielen eine Revolution, welche ebenso auf Computergrafik angewiesen ist wie ein einfaches Graphical User Interface (GUI).

Zu Beginn beschränkte sich die Darstellung auf sogenannte ASCII-Art, bei der übliche Zeichen aus dem ASCII-Alphabet benutzt wurden, um komplexe Bilder zu erzeugen. Da dies jedoch nicht genügte, um Flächen und Objekte lückenlos darzustellen, bedurfte es einer Innovation. Obwohl es für Menschen einfach ist, Flächen als Ganzes zu betrachten und Polygone in unterschiedlichster Komplexität zeichnerisch darzustellen, ist es für Computer nicht so einfach, diese zu speichern, geschweige denn darzustellen. Flächen und dreidimensionale Objekte kann man, so die Idee, über ihre Eckpunkte (Vertices) und die dazwischen liegenden Kanten (Edges) zu repräsentieren. Man erzeugt also ein Polygonnetz, welches den Körper abbildet. Dabei ist die Wahl des Polygons zunächst irrelevant. So könnte man beispielsweise einen Würfel, abhängig von der Definition der Kanten, aus Quadraten oder Dreiecken aufbauen.[2] In der Praxis sind Polytope und Polygone jedoch meistens unregelmäßig, ergeben sie sich doch zum Beispiel aus Umgebungs-scans mit einem Laser-Scanner oder der Oberfläche einer Videospieldigur. Es bietet sich in solchen Fällen nicht an, regelmäßige Polygone, wie Quadrate oder Rechtecke, als Grundlage für das Polygonnetz zu nutzen.

Eine geeignete Methode, um diese komplexen Polygone für Computer effizient darzustellen, ist die Nutzung von Dreiecken als primitive Form für die Zerlegung. Dieses Vorgehen bezeichnet man als Triangulation. Diese ist formal die Zerlegung eines topologischen Raumes, hier also eines Polygons, in Simplexe. Das Simplex der zweiten Dimension das Dreieck und damit ist die Triangulation ein Verfahren zur Zerlegung eines Polygons in Dreiecke. Es sei erwähnt, dass es Computern durchaus möglich ist, Flächen und Körper darzustellen, welche nicht aus Dreiecken bestehen. Dies ist jedoch wesentlich speicher- und rechenaufwendiger, als es bei Dreiecken der Fall ist. Für die Darstellung eines Objektes ließe sich alternativ auch eine sogenannte Punktwolke nutzen. Wie der Name bereits andeutet, wird

das Objekt dabei aus einer großen Menge von Einzelpunkten gebildet. Für einen hohen Detailgrad sind dafür allerdings auch sehr viele Punkte nötig, was den Speicheraufwand stark erhöht. Bei der Verwendung von Dreiecken handelt es sich, vorallem bei runden Objekte, eher um eine Approximation der Form. Eine Kugel wäre dann nicht vollständig rund, sondern würde als Polyeder repräsentiert werden. Dadurch spart man jedoch sehr viel Speicherplatz. Man kann auch hier den Detailgrad steigern, indem man die Anzahl der Dreiecke erhöht und ihre Größe reduziert. Da Dreiecke Flächen sind, benötigt man von ihnen jedoch eine geringere Anzahl, um ein Objekt darzustellen, als wenn dies mittels einer Punktwolke geschieht.

Um eine Triangulation per Computer durchzuführen, bedarf es eines Algorithmus, der das Verfahren beschreibt. Von diesen gibt es viele verschiedene, welche unterschiedlichste Herangehensweisen nutzen. Hier seien der Ear-Clipping-Algorithmus (ECA) und die monotone Triangulation als Beispiel für Algorithmen genannt. Des weiteren sollen hier die Delaunay Triangulation (DT) als Triangulation mit besonderen Eigenschaften und das Voronoi-Diagramm als duale Form zur DT angeführt werden. Diese unterscheiden sich erheblich in ihrer Komplexität und Effizienz. Mit einer Laufzeit von $O(n^2)$ [5], ist der ECA bei weitem nicht so effizient wie beispielsweise ein Algorithmus zur Erzeugung einer DT mit $O(n \log n)$. Für den ECA spricht jedoch seine relative Einfachheit im Vergleich zu anderen Algorithmen.

In dieser Arbeit soll jedoch nicht die Laufzeitoptimierung im Vordergrund stehen, sondern die Anschaulichkeit. Sie ist ein wichtiger Punkt, wenn es um Didaktik geht. Anschauliche Lehrmaterialien fördern das Verständnis und bieten Interaktivität. So hat diese Ausarbeitung zum Ziel, eine interaktive Visualisierung für die Triangulation von Polygonen zu schaffen. Dafür ist der ECA aufgrund seiner relativen Einfachheit gut geeignet. Er lässt sich schrittweise durchlaufen und ist somit sehr anschaulich, da in jedem Schritt ein Dreieck der Triangulierung erzeugt wird. Es liegt in der Natur dieses Algorithmus, dass Uneindeutigkeiten auftreten, was die Auswahl des nächsten Dreiecks angeht. Diese führen zum zweiten wichtigen Punkt in dieser Arbeit - der Interaktivität. Der Nutzer der Visualisierungssoftware soll interaktiv entscheiden können, welches das nächste Dreieck ist, welches bearbeitet wird. Er beeinflusst somit direkt das endgültige Resultat. Neben dem direkten Eingriff des Nutzers sollen auch Heuristiken zum Einsatz kommen, um diese Auswahl zu treffen. Beispielsweise kann hierfür die Größe des Dreiecks im Bezug auf seinen Flächeninhalt genutzt werden oder auch die Innenwinkel. Es ist angestrebt, dass die Nutzerauswahlen ausgewertet und in eine Heuristik überführt werden. Um dies zu bewerkstelligen, soll die Qualität der Triangulation mittels verschiedener Metriken beurteilt werden. Hierfür kann ein Vergleich zum Voronoi-Diagramm ebenso wie zum Beispiel die Anzahl der

sogenannten *Slivers*[3] betrachtet werden. Letztere führen in Anwendungen der Computergrafik oft zu Fehlern, welche vermieden werden sollten.

Es soll somit nicht nur eine Visualisierung für Triangulationen geschaffen werden, sondern es sollen auch die Auswirkungen einfacher Heuristiken auf die Qualität dieser Zerlegungen betrachtet werden. Es steht dabei, wie bereits erwähnt, nicht die Laufzeit des Algorithmus im Vordergrund, welche üblicherweise Ziel der Optimierung ist.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Polygone

2.1.1 Definition

Ein geschlossener Streckenzug, also eine Folge von Strecken, welche jeweils einen Endpunkt mit ihrem Vorgänger bzw. Nachfolger gemeinsam haben, bilden ein **Polygon**.

Dabei ist es wichtig, dass die Anzahl von Strecken endlich ist. "Das Polygon, [zu Deutsch Vieleck], ist also eine durch eine Folge von Strecken begrenzte ebene Fläche." [10] Das einfachste Beispiel hierfür ist ein Dreieck. Es besitzt die Eckpunkte A , B und C und wird daher vom Streckenzug aus den Strecken \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} begrenzt (s. Abbildung 1). Mit genau diesem Prinzip lassen sich beliebig komplexe Polygone erzeugen und beschreiben. Die Strecken werden auch als **Seiten** und die Endpunkte dieser Strecken als **Ecken** bezeichnet. Es sei angemerkt, dass Kreise, obwohl sie ebenfalls ebene Flächen sind, keine Polygone sind. Das folgt daraus, dass Kreise weder Ecken noch eine Begrenzung aus Strecken besitzen.

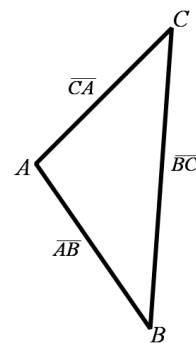


Abbildung 1:
Dreieck mit Ecken
 A, B, C als Beispiel
für ein Polygon

2.1.2 Klassifikation von Polygonen

Es ist denkbar, dass sich die Seiten des Polygons schneiden oder berühren. Man bezeichnet dieses Polygon als überschlagen. [10] Des weiteren kann man Polygone in regulär und nicht regulär unterteilen. Ein Polygon mit den n Seiten a, b, c, \dots und den Innenwinkeln $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ heißt regulär, wenn

$$a = b = c = \dots \text{ und } \alpha = \beta = \gamma = \dots$$

gilt. In einem regelmäßigen Polygon sind demnach alle Seiten zueinander kongruent und alle Winkel gleich groß. [11]

Eine weitere Unterteilungsmöglichkeit lautet wie folgt. Ein Polygon heißt **konvex**, wenn für alle Innenwinkel α_i ($i \in \mathbb{N}$) gilt: $\alpha_i < 180^\circ$. Anderenfalls heißt es **konkav**. [12]

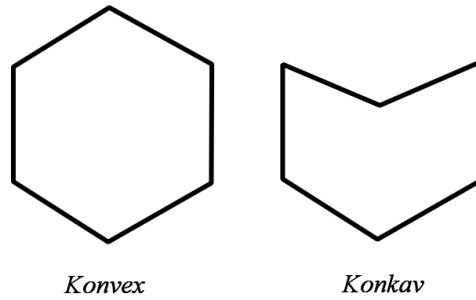


Abbildung 2: Zwei Sechsecke: links konvex, rechts konkav

2.1.3 Diagonalen

Außer des Streckenzuges, welcher die äußere Grenze des Polygons bildet, kann man im Polygon selbst auch weitere Strecken definieren, welche dann als **Diagonalen** bezeichnet werden. Mittels dieser Diagonalen ist es möglich, jedes Polygon in Dreiecke zu zerlegen. Das wird in den nächsten Kapiteln noch näher erläutert, da dieser Sachverhalt die Grundlage für sämtliche Zerlegungsalgorithmen darstellt.

2.1.4 Ear und Ear Tips

Für den in Kapitel 3.3 beschriebenen ECA ist es der Begriff des **Ear** (Ohr) relevant. Ein Dreieck, welches aus drei aufeinanderfolgenden Ecken $v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}$ des Polygons gebildet wird, ohne dass andere Ecken innerhalb dieses Dreiecks liegen oder dass der äußere Streckenzug des Polygons durch die Seiten des Dreiecks geschnitten wird, nennt man Ear. Dabei bildet die Strecke $\{v_{i_0}, v_{i_2}\}$ eine Diagonale des Polygons. Die Ecke v_{i_1} heißt dann **Ear Tip**. [20]

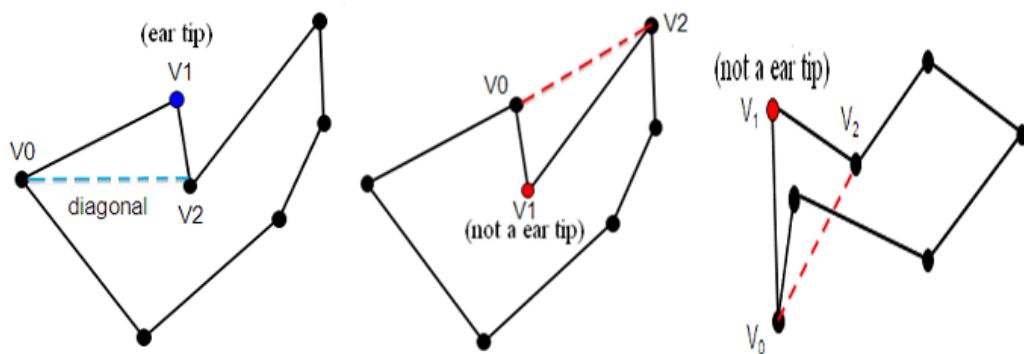


Abbildung 3: Links ist $\triangle v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}$ Ear und v_{i_1} Ear Tip. In der Mitte und rechts ist $\triangle v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}$ kein Ear, da $\{v_{i_0}, v_{i_2}\}$ keine Diagonale ist. [9]

2.1.5 Sätze über Polygone

Für Polygone gibt es einige Erkenntnisse, welche für die allgemeine Strukturanalyse von eben diesen oder auch für die Triangulation mittels ECA von Bedeutung sind.

Satz 1 (Jordan'scher Kurvensatz):

In der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 zerlegt jede geschlossene Jordan-Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ deren Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ in zwei disjunkte Gebiete, deren gemeinsamer Rand die Jordankurve C ist und deren Vereinigung zusammen mit die ganze Ebene \mathbb{R}^2 ausmacht.

Genau eines der beiden Gebiete, das sogenannte **Innengebiet**, ist eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Das andere dieser beiden Gebiete ist das sogenannte **Außengebiet** und unbeschränkt. [17]

Satz 2 (Dreieckszerlegung):

Jedes Polygon P mit n Ecken kann mittels Hinzunahme von null oder mehr Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegt werden. [9]

Satz 3 (Anzahl der Diagonalen):

Jede Triangulation eines Polygons P mit n Ecken besteht nutzt $(n - 3)$ Diagonalen und besteht aus $(n - 2)$ Dreiecken. [9]

Satz 4 (Two Ears Theorem):

Jedes Polygon P mit $n \geq 4$ Ecken besitzt mindestens zwei nicht überlappende Ears. [19]

2.1.6 Polytope

Zuletzt sei an dieser Stelle angemerkt, dass ein Polygon die zweidimensionale Ausprägung des topologischen Begriffs des **Polytops** ist. Betrachtet man die räumlichen Dimensionen null bis vier in aufsteigender Reihenfolge, so sind ein Punkt, eine Strecke, ein Quadrat, ein Würfel und ein Tesseract. Dies ist in der nachstehenden Abbildung zu sehen.

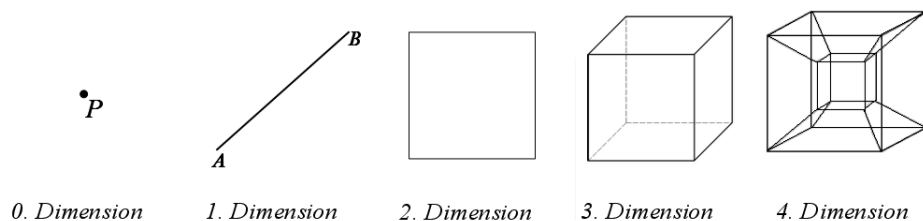


Abbildung 4: Beispiele für Polytope der Dimensionen 0 bis 4

2.2 Simplexe und Triangulation

Wie bereits angesprochen, kann man durch Hinzufügen von Diagonalen ein Polygon in Dreiecke oder allgemeiner in Unterpolygone zerlegen. Diese Eigenschaft macht sich die **Triangulation** zu nutze. Allgemein beschreibt der Begriff Triangulation die Zerlegung eines topologischen Raumes in **Simplexe**. [13] Der topologische Raum ist in diesem Fall das Polygon, welches durch einen Streckenzug gebildet wird.

Als Simplex bezeichnet man das einfachste Polygon einer Dimension. [14] Für die nullte Dimension ist das trivialerweise der Punkt. Da keine räumliche Ausdehnung möglich ist, ist der begrenzende Streckenzug hier nur der Punkt selbst. In der ersten Dimension, in welcher Objekte eine Länge, aber keine Breite besitzen, ist der Streckenzug eine einzelne Strecke. Diese ist somit auch das Simplex dieser Dimension. Für die zweite Dimension ist nun das Dreieck das Simplex. Es ist die Fläche, welche aus den wenigsten Punkten, verbunden durch Strecken, erzeugt werden kann und daher das einfachste Polygon dieser Dimension.

Wie bereits beschrieben, kann jedes komplexere Polygon so durch Diagonalen zerlegt werden, dass es vollständig von Dreiecken repräsentiert wird. Das ist besonders günstig für eine Bearbeitung durch Computer, da ein Dreieck immer eindeutig durch seine drei Eckpunkte beschrieben wird. Wie später noch zu sehen sein wird, kann man in einem Polygon sehr einfach Dreiecke dadurch erzeugen, dass man Diagonalen einfügt. Man kann spezielle Dreiecke, die sogenannten Ears, sogar durch Hinzufügen von nur einer Diagonalen generieren, was algorithmisch gut beschreibbar ist.

Da in der Praxis nicht nur zweidimensionale sondern auch dreidimensionale Objekte eine Rolle spielen, stellt sich die folgende Frage. Kann man diese 3D-Objekte nicht auch in ebenfalls dreidimensionale Simplexe zerlegen?

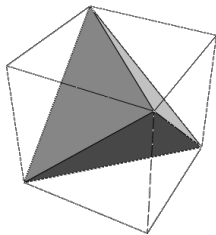


Abbildung 5:
Zerlegung eines
Würfels in vier
Tetraeder [18]

Die Antwort ist ja, jedoch ist das nicht sonderlich nützlich. Natürlich existiert in der dritten Dimension auch ein Simplex. Dieses ist der Tetraeder. Man kann auch jedes Polytop dieser Dimension in Tetraeder zerlegen. Diese Zerlegung benötigt man durchaus für spezielle Anwendungen. Wöllte man das Innere eines Objektes durch die Zerlegung ebenfalls erhalten, beispielsweise einen Vollwürfel aus Holz in der Realität zersägen, dann wäre eine Tetraederzerlegung notwendig. Ein Beispiel für diese Art der Zerlegung ist in Abbildung 5 zu sehen. Man benötigt diese Form der Zerlegung zwar für einige Anwendungen, wie etwa bei der finite Elemente Methode, jedoch soll das nicht Gegenstand der

Betrachtung in dieser Arbeit sein. Man kann die räumlich orientierte Oberfläche eines Würfels topologisch isomorph zu einem Würfelgitter aus quadratischen

Flächen beschrieben. Diese Gesamtfläche lässt sich dann wiederum in Dreiecke zerlegen. Somit lässt sich auch die Oberfläche dreidimensionaler Objekte durch eine Triangulierung beschreiben. Das ist besonders gut geeignet für Computer, da man nur einen einzigen Algorithmus zur Bearbeitung von Flächen und Körpern benötigt, wenn man diese in Dreiecke zerlegen möchte.

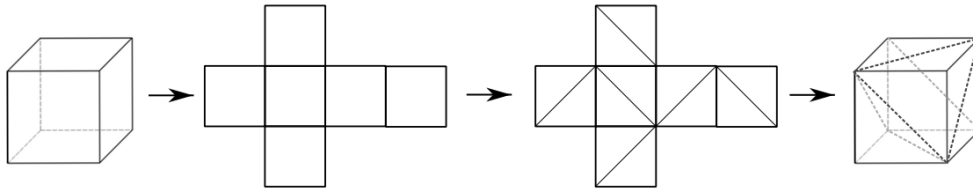


Abbildung 6: Zerlegung der Oberfläche eines Würfels in Dreiecke mittels Würfelgitter

2.3 Slivers

Bei Triangulationsalgorithmen wie dem ECA liegt der Fokus zunächst nicht in der Qualität der Zerlegung. Natürlich gibt es verbesserte Versionen wie beispielsweise in Kapitel 3.1 beschrieben wird. In jedem Fall sind sogenannte **Slivers** jedoch ein negativer Einflussfaktor, wenn es um qualitative Gesichtspunkte geht. Dreiecke haben in der Computergrafik eine bestimmte Eigenschaft. Legt man eine Scanline durch ein Dreieck, dann schneidet diese die Kanten des Dreiecks in zwei Punkten. Diese zwei Schnittpunkte werden von zwei unterschiedlichen Pixeln auf dem Bildschirm repräsentiert. Somit lässt sich definieren, wo eine Fläche beginnt und wo sie endet und dies auf dem Bildschirm darstellen. Bei Slivers ist das nicht der Fall. Ihre Innenfläche ist so schmal, dass die beiden Schnittpunkte der Scanline mit den Kanten des Dreiecks auf den selben Pixel fallen. [4] Das führt in letzter Instanz zu Grafikfehlern.

Der Begriff Sliver beschränkt sich nicht nur auf Dreiecke. Auch andere Simplexe wie Tetraeder können Slivers sein. Sie sind so flach, dass auch hier Darstellungsfehler entstehen. Zusätzlich dazu gibt es noch den verwandten Begriff der **Needle**, der einen sehr schmalen aber auch sehr spitzen Tetraeder bezeichnet.[3]

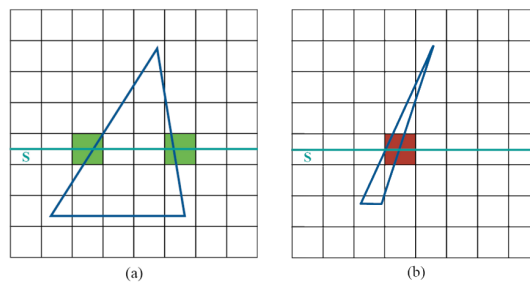


Abbildung 7: (a) Scanline mit zwei separaten Schnittpunktpixeln (b) Sliver mit nur einem Pixel für beide Schnittpunkte

2.4 Der Traditionelle Ear-Clipping-Algorithmus

Der zentrale Fokus in dieser Arbeit liegt auf dem ECA. Dieser wurde von Meister in seiner Abhandlung *Polygons have ears* [20] in seiner ursprünglichen Form beschrieben. Der Algorithmus bestimmt Dreiecke, welche die Eigenschaft eines Ears erfüllen, fügt die dafür nötige Diagonale in eine Liste ein und löscht den Ear Tip aus der Liste aller noch nicht bearbeiteten Punkte. Dies wird solange wiederholt, bis das Restpolygon nur noch aus drei Punkten besteht. Zuletzt wird die Liste der Diagonalen ausgegeben, da diese die Triangulation des Polygons erzeugt. Der Algorithmus ist im Folgenden in Pseudocode dargestellt.

Algorithmus 1: Traditionelles Ear-Clipping [8]

Eingabe: Polygon P mit n Ecken in einer Liste L
Ausgabe: Liste D mit $n - 3$ Diagonalen, die eine Triangulierung bilden.
Schritt 1: Sei $D := \emptyset$ Liste der Diagonalen.
Schritt 2: **while** $|L| > 3$ **do**
 (a) Finde ein Ear v_{i-1}, v_i, v_{i+1}
 (b) $D := D \cup \{v_{i-1}v_{i+1}\}$
 (c) $L := L \setminus v_i$
endwhile
Schritt 3: Ausgabe von D als triangulierende Diagonalen.

Dieser Algorithmus hat einen Zeitaufwand von $O(n^3)$ mit einem Aufwand von $O(n^2)$ für das Ermitteln des Ear-Status eines Dreiecks. In dieser Formulierung wird nicht auf die Klassifikation eines Ears im speziellen eingegangen. Hierfür beginnt man klassisch beim ersten Punkt in L . Man überprüft ob dieser Punkt v_i konvex ist. Ist das der Fall, dann muss die Strecke $\{v_{i-1}v_{i+1}\}$ die Eigenschaft haben, eine Diagonale von P zu sein. Wenn das ebenfalls zutrifft, dann ist das Dreiecke v_{i-1}, v_i, v_{i+1} ein Ear. Man kann die Klassifikation so darstellen:

Algorithmus 2: Ear Klassifikation

Eingabe: Ecken $v_i, v_{i-1}, v_{i+1} \in L$
Ausgabe: $\triangle v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ ist Ear oder nicht.
Schritt 1: **if** v_i konvex **AND** $\{v_{i-1}v_{i+1}\}$ ist Diagonale von P
 Ausgabe $\triangle v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ ist Ear.
else Ausgabe $\triangle v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ ist kein Ear.
endif

Diese Klassifikation könnte man auch zuerst über alle Punkte v_i in L laufen lassen. Man spricht dann von der Klassifikationsphase. Danach kann man in einer zweiten Phase, der Cutting-Phase, Dreiecke auswählen, welche die Ear-Eigenschaft erfüllen und sich nicht überschneiden, und diese dann abschneiden. Mit diesen beiden Phasen im Wechsel kann man ebenfalls eine Triangulation erreichen. O'Rourke beschreibt in seinem Buch einen Ansatz, der einige Zeitersparnis bei diesem Algorithmus bewirkt.[22] Anstatt nach dem Abtrennen eines Ear Tip Punkts den Status jedes Eckpunktes erneut zu überprüfen, muss man nur den Status von v_{i-1} und v_{i+1} erneut betrachten. Nur diese beiden Punkte sind nämlich vom Abtrennen von v_i beeinflusst. Somit benötigt man insgesamt nur noch eine Zeit von $O(n^2)$. [9] In jedem Cutting-Schritt kann man dann zusätzlich entscheiden, welches Dreieck als nächstes ausgewählt werden soll. So könnte man nur die Dreiecke auswählen, welche einer bestimmten Heuristik entsprechen. Beispielsweise könnten so nur Dreiecke gewählt werden, bei denen der kleinste Innenwinkel das Maximum aller aktuell verfügbaren Innenwinkel ist. Auf diese Weise ist es denkbar, dass man Sliver vermeiden könnte. Andere Ansätze sind exemplarisch in Kapitel 3 aufgeführt.

2.5 Preprocessing für Polygone mit Löchern

Neben einfachen Polygonen, wie sie bisher in dieser Arbeit beschrieben worden sind, gibt es auch komplexere Formen. Held bezeichnet sie in seiner Abhandlung über FIST als *multiply-connected polygonal areas*, also als mehrfach verbundene polygonale Flächen.[24] Der Einfachheit halber sollen eben diese zusammengesetzten Polygone in dieser Arbeit entweder als **komplexe Polygone** oder als **Polygone mit Loch** bezeichnet werden. Ein solches Loch wird dabei ebenfalls durch einen geschlossenen Streckenzug begrenzt und ist somit selbst ein Polygon. Ein Loch H hat allerdings die Eigenschaft bereits im Inneren eines anderen Polygons P zu liegen, ohne dabei mit dem äußeren Streckenzug von P verbunden zu sein oder diesen zu schneiden.

Da diese beiden Streckenzüge keine Kante besitzen, welche sie verbindet, ergibt sich ein Problem für den ECA, welcher nur mit einem geschlossenen Polygonzug und dessen Ecken arbeitet. Um den ECA dennoch auch auf komplexe Polygone anwenden zu können, bedarf es der Vorbereitung durch einen anderen Algorithmus, um aus den endlich vielen verschiedenen Streckenzügen von P und den i Löchern H_i zu erzeugen. M. Held beschreibt in seiner Arbeit zwei verschiedene Verfahren mit dem selben Grundgedanken. Man fügt dazu zusätzliche Kanten, sogenannte **Brücken** (contour bridges) zwischen je einer Ecke v_i von P und einer Ecke u_j eines Loches H ein. Diese Kante sei dann $\{v_i u_j\} \in E(P')$. Damit man den Streckenzug, der daraus entsteht weiter entlang laufen kann, ohne eine Kante doppelt zu nutzen, muss man die Brücke sozusagen doppelt einfügen. Hierzu erzeugt man Kopien

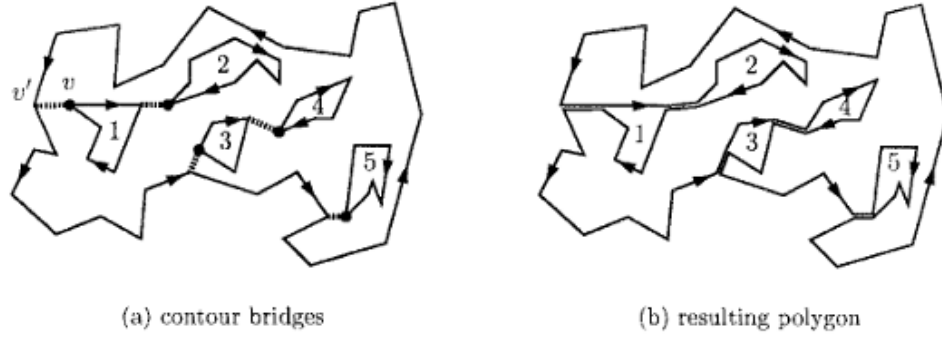


Abbildung 8: (a) Polygon mit mehreren Löchern. Brücken gestrichelt dargestellt. (b) Resultierendes Polygon (Durchlaufrichtung entlang des Streckenzugs mittels Pfeilen gekennzeichnet)[24]

v'_i, u'_j von v_i, u_j und verbindet diese ebenfalls mit einer Brücke, allerdings mit umgekehrter Orientierung, $\{u'_j v'_i\} \in E(P')$. P' sei dabei das neu entstandene Polygon aus der Vereinigung $E(P) \cup E(H) \cup \{\{v_i u_j\}, \{u'_j v'_i\}\}$.

Der erste Ansatz, um ein Loch H mit dem Polygon P zu verbinden, beruht auf einer vollständigen Enumeration. Man bildet alle Paare von Punkten (v_i, u_j) und verbindet diese mit einer vorläufigen Strecke. Dann berechnet man die Länge aller dieser Strecken und wählt die kürzeste von ihnen als Brücke. Dabei muss überprüft werden, dass die gewählte Strecke keine Kante von P oder H schneidet. Sollte es einen Schnittpunkt geben, wird die zweit längste Strecke überprüft und so weiter. Bei diesem Verfahren kommt man auf eine Komplexität von $O(n^3)$ wobei es $O(n^2)$ viel mögliche Strecken gibt und man lineare Zeit benötigt, um eine Brücke als valide zu klassifizieren. Hat man mehr als ein Loch, so beginnt man mit einem beliebigen und verbindet es mit P und wählt dann das nächste aus, bis alle Löcher und P zum Polygon P' vereinigt worden sind.

Da diese Laufzeit sehr unzufriedenstellend ist, schlägt Held ein zweites Verfahren vor, welches er auch bei der Implementierung von FIST verwendet. Hierfür bestimmt man für jedes Loch H_j den am weitesten links liegenden Eckpunkt u_{left} . Dann werden die Löcher nach eben diesen Punkten sortiert, von links nach rechts in aufsteigender Reihenfolge. Eine solche Sortierung ist in Abbildung 8 zu sehen. Man beginnt dann mit dem Loch mit der Nummer eins H_1 mit der Verbindung mit P . Dazu bestimmt man alle Punkte v_i von P , welche links von u_{left} liegen und sortiert diese nach ihrem Abstand zu u_{left} . Beginnen mit dem am wenigsten entfernten Punkt, v_1 , wird dann überprüft, ob $\{v_1 u_{left}\}$ eine Brücke ist. Die Sortierung der Punkte v_i soll dafür sorgen, dass möglichst wenig solcher Paare überprüft werden müssen. Führt man diesen Algorithmus für alle i Löcher durch, so erhält man im schlimmsten Fall eine Laufzeit von $O(i \cdot n^2)$.

Ein noch effizienterer Ansatz, welcher auch bei der Umsetzung dieser Arbeit berücksichtigt wird, wurde von David Eberly in seiner Veröffentlichung *Triangula-*

tion by Ear Clipping beschrieben.[27] Zum Bestimmen der zwei Punkte, welche das Loch H und das äußere Polygon P mit einer Brücke verbinden sollen nutzt er eine Herangehensweise, welche mit einer Halbgerade als Sichtlinie arbeitet. Zunächst bestimmt der Algorithmus von Eberly den Eckpunkt u des Loches H mit der größten x-Koordinate. Dieser soll Ausgangspunkt für die Sichtlinie sein. Diese Verläuft entlang positiver X-Richtung und kann somit als $r_u = u + t \cdot (1, 0)$ beschrieben werden. Der sich ergebende Schnittpunkt von r_u mit den Kanten des Polygons P soll mit i bezeichnet werden.

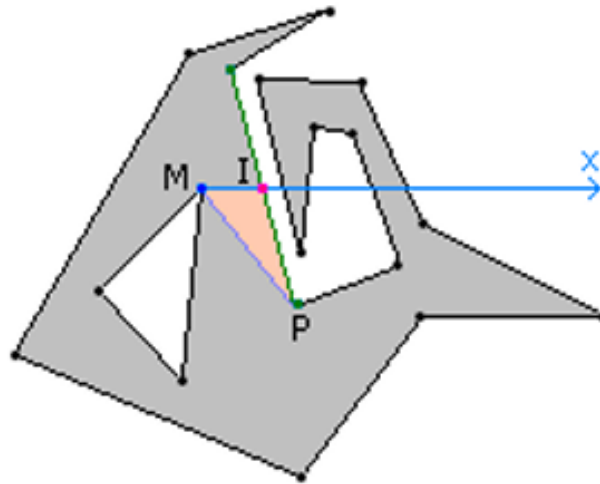


Abbildung 9: Nächster Sichtbarer Punkt w zu Punkt u des Lochs. [27]

Für diesen Punkt gibt es nun zwei Möglichkeiten. Entweder i ist Eckpunkt von P oder i liegt auf einer Kante von P . Im ersten Fall muss i für u sichtbar sein und somit wird die Kante zwischen diesen beiden Punkten die Brücke zwischen H und P . Auch diese muss doppelt vorhanden sein, wie bereits zuvor beschrieben. Der zweite Fall, bei dem i auf einer Kante $v_i v_{i+1}$ liegt bedarf näherer Betrachtung. Hierfür wird ebenfalls wieder der eine der beiden Punkte bestimmt, welcher die größere x-Koordinate besitzt. Es kann sein, dass der so ausgewählte Punkt w nicht für u sichtbar ist. Das ist dann der Fall wenn sich im Dreieck $\triangle uwi$ konkave Eckpunkte von P befinden. Die Kanten, zu denen diese Eckpunkte gehören, blockieren dann die Sicht auf w . Daher muss überprüft werden, ob keine solchen Punkte im inneren des besagten Dreiecks liegen. Ist dem so, dann ist w der gesuchte Punkt für die Brücke zu u . Sollten sich konkave Punkte im Inneren von $\triangle uwi$ befinden, dann wird derjenige gesucht, der den Abstand zu u minimiert. Einen solchen Punkt muss es immer geben und dieser ist dann sichtbar für u und eignet sich somit für eine Brücke. In Abbildung 10 kommen die Punkte a, b und c also neue Kandidaten in Frage. Für a ist der Abstand zu u minimal. Der eben beschriebene Algorithmus ist im Folgenden noch einmal in Pseudocode dargestellt.

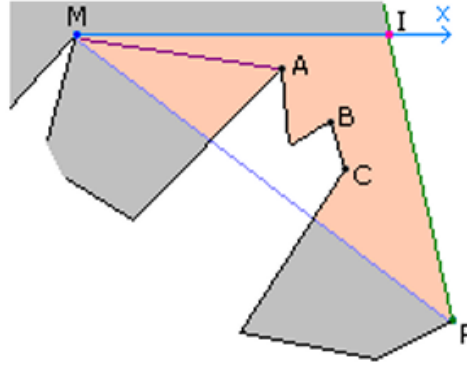


Abbildung 10: Sichtlinie von u nach w ist durch äußeres Polygon blockiert. Konkave Punkte a, b, c sind Kandidaten für die Brückenbildung. Abstand von a nach u ist minimal.[27]

Algorithmus 3: Ermittlung von Brückenknoten mittels Sichtlinie[27]

Eingabe: Ecken $v_i \in V(P)$, Ecken $u_i \in V(H)$

Ausgabe: Kanten $E(P')$

Schritt 1: Wähle u_i mit maximaler x-Koordinate aller $u_i \in V(H)$

Schritt 2: Bestimme ersten Schnittpunkt i von $r_u = u_i + t \cdot (1, 0)$,
($t \in \mathbb{R}$) mit $e \in E(P)$

Schritt 3: Bestimme Eckpunkte von e : $v_{1,e}, v_{2,e}$

Schritt 4: **if** $i = v_{1,e}$ OR $i = v_{2,e}$

Ausgabe $E(P') := E(P) \cup iu_i \cup E(H) \cup u_i i$

else

Schritt 5: Bestimme Punkt mit maximaler x-Koordinate
von $v_{1,e}, v_{2,e}$ als Punkt w

Schritt 6: Bestimme $\Delta u_i i w$

Schritt 7: **if** Keine Punkte von P im Inneren $I_{\Delta u_i i w}$ von $\Delta u_i i w$

Ausgabe $E(P') := E(P) \cup wu_i \cup E(H) \cup u_i w$

else

Schritt 8: Bestimme alle konkaven Punkte in $I_{\Delta u_i i w}$

Schritt 9: Bestimme Punkt $a \in I_{\Delta u_i i w} \cap E(P)$ mit minimalem Abstand zu u_i

Schritt 10: Ausgabe $E(P') := E(P) \cup au_i \cup E(H) \cup u_i a$

endif

endif

Durch das Einfügen von Brückenkanten können zwar das Polygon P und alle Löcher H_i verbunden werden und als ein einziges Polygon P' behandelt werden, nur ergibt sich ein neues Problem. Laut der Definition eines einfachen Polygons (s. Kapitel 2.1.1) ist es nicht erlaubt, dass sich Kanten schneiden oder berühren. Da aber die Brückenkanten doppelt vorhanden sind, also an der exakt

gleichen Position befinden, ist das Polygon P' kein einfaches solches mehr. Man bezeichnet es als **schwach einfach** (weakly simple)[28]. Diese Polygone können per Definition durch eine beliebige minimale Änderung ϵ in einfache Polygone umgewandelt werden. Diese Änderung ϵ kann eine Verschiebung der Eckpunkte der Brücken um eine kleine Konstante sein, sodass sich die doppelten Kanten nicht mehr berühren. Dazu ist es notwendig die ursprünglichen Positionen dieser Punkte zu speichern, damit diese in der Nachbearbeitung wieder an ihre eigentlichen Koordinaten zurück verschoben werden können.

3 Verwandte Arbeiten

3.1 Verbesserungen des Ear-Clipping-Algorithmus

Wenn man einen Algorithmus mathematisch betrachtet, dann ist die Zeit, welcher er bis zur Terminierung benötigt, zumeist der Gegenstand der Betrachtung. Mittels der Komplexitätstheorie lässt sich eine vom Computertyp unabhängige Beschreibung dafür finden. Das Referenzmodell ist dabei zumeist die Turingmaschine (TM).[21] Ziel ist es, dass ein Algorithmus auf einer TM in Polynomialzeit abläuft. Diese Zeit hängt zumeist von der Eingabegröße ab. Für den ECA ist die entscheidende Größe die Anzahl der Ecken n des Polygons P . Betrachtet man den ECA auf einer TM, so hat er eine Komplexität von $O(n^3)$. Zwar ist dieser Term ein Polynom in n , jedoch ist das kein Grund für die Wissenschaft, hier mit der Optimierung aufzuhören. Wie O'Rourke in seiner Arbeit zeigt, kann man den ECA durch kleine Änderungen so modifizieren, dass dieser eine Komplexität von $O(n^2)$ aufweist.[22] Diese Erkenntnis nutzen Mei, Tipper und Xu, um den Algorithmus auf andere Art zu verbessern.[15]

Für einen Algorithmus wie den ECA ist nicht nur seine Laufzeit entscheidend. Während andere Algorithmen beispielsweise Entscheidungsprobleme lösen, bei denen es nur um die Frage nach der Existenz der Lösung geht, ist bei einer Triangulation bereits bekannt, dass es unterschiedliche Lösungen gibt. Daher ist die Frage nicht, ob eine Lösung existiert, sondern ob eine optimale solche gefunden werden kann. Optimal ist dabei ein relativer Begriff, der stark von den Rahmenbedingungen abhängt. Für den ECA ist der Speicherbedarf ebenfalls entscheidend. Dieser ist bei Mei, Tipper und Xu durch $O(n)$ begrenzt. Das Ziel ihrer Arbeit war es, qualitativ hochwertige Triangulationen für komplexe Polygone zu erzeugen. Der Qualitätsparameter war dabei der kleinste Innenwinkel der erzeugten Dreiecke in der Zerlegung. Genauer ging es darum, die sogenannten Slivers zu vermeiden (s. Kapitel 2.3).

Ihr Ansatz war es, den verbesserten Algorithmus von O'Rourke so zu modifizieren, dass er über die Option des **Edge Swappings** verfügt. Wird ein Ear erkannt, dann wird für jeden seiner Innenwinkel überprüft, ob dieser kleiner ist als ein zuvor festgelegter Grenzwert. Ist das der Fall, dann muss bei diesem Dreieck Edge Swapping durchgeführt werden. Dafür werden der größte Innenwinkel des Dreiecks und die, ihm gegenüberliegende, längste Seite bestimmt. Daraufhin wird überprüft, ob es ein Nachbardreieck gibt, welches sich mit dem Ursprünglichen eben diese längste Seite teilt. Gibt es einen solchen Nachbarn, dann wird in dem von den beiden Dreiecken gebildeten Viereck eine Diagonale zwischen den beiden Ecken gezogen, welche jeweils der zuvor bestimmten längsten Seite gegenüber lagen. Auf diese Art entstehen wieder zwei Dreiecke, von denen nun die Innenwinkel auf ihre Größe überprüft werden. Ist jeweil der kleinste Winkel größer als der

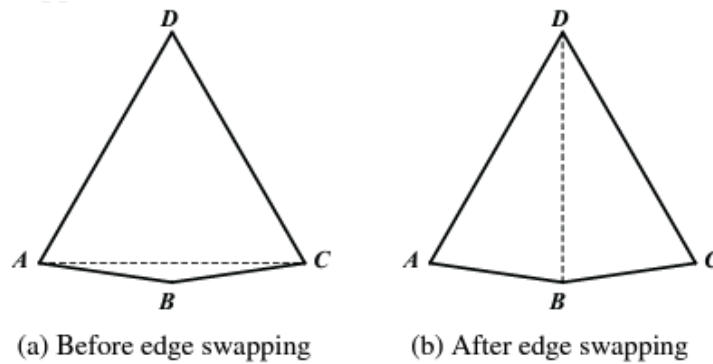


Abbildung 11: Edge Swapping [15]

Grenzwert, dann ist die Qualität der Dreiecke nun besser als die des ursprünglich Ausgewählten. Wenn dem nicht so ist, bleibt alles unverändert und das Ear wird wie es war gewählt und abgeschnitten.

Auf diese Art kann die Qualität der Dreiecke in der Triangulation stark erhöht werden. Sie zeigen an Beispielen, dass sich die Innenwinkelgröße durchschnittlich verdoppelt. Teilweise können Dreiecke mit minimalem Innenwinkel von $< 15^\circ$ ganz eliminiert werden. Das hängt jedoch vom eingegebenen Polygon ab und hat keine Allgemeingültigkeit.

Eine weitere wichtige Verbesserung für den ECA stellt die Verwendung einer Gitterdatenstruktur, dem sogenannten **Grid** dar. Sie wurde beispielsweise bei der Implementierung von FIST verwendet. Dieses Framework ist ein in C++ verfasster Code für Polygontriangulation basierend auf dem ECA.[7] FIST wurde von M. Held entwickelt und beinhaltet verschiedenste Techniken, um Triangulationen zu verbessern.[24] Eine solche Technik sind die angesprochenen Grids. Eine der möglichen Überprüfungsöglichkeiten ob ein Dreieck in einem Polygon ein Ear ist oder nicht ist die folgende:

Satz 5 (Ear-Bedingung:)[24]

Dreiaufeinanderfolgende Punkte $v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \in V(P)$ bilden ein Ear von P genau dann, wenn

- (1) v_i ist konvex,
- (2) die abgeschlossene Hülle des Dreiecks $\triangle v_{i-1}v_iv_{i+1}$ enthält keine konvexen Punkte aus $V(P)$ (außer v_{i-1}, v_{i+1})

Benutzt man diese Definition, muss man also für jedes mögliche Dreieck in P überprüfen ob ein oder mehrere konkave Punkte in der abgeschlossenen Hülle des Dreiecks liegen. Hier kommt das Grid ins Spiel. Es unterteilt das minimal umgebende Rechteck, welches das gesamte Polygon einschließt, in rechteckige Zellen. Für jeden konkaven Punkt von P wird dann die Zelle bestimmt, in welcher er sich befindet und speichern den Punkt in dieser. Da man am besten auf Nummer sicher geht, wird ein Punkt der sehr nah an der Grenze zwischen zwei Zellen

liegt auch in die Nachbarzelle gespeichert. Was die Auflösung des Grids angeht, ist klar, dass man keinen Speicherplatz mit einem sehr hochauflösenden Gitter verschwenden möchte. Nach Held wurde experimentell ein Optimum gefunden mit $w\sqrt{n} \times h\sqrt{n}$ als Anzahl der Zellen, wobei w und h von den Proportionen des umgebenden Rechtecks von P abhängen und n die Anzahl der Ecken von P ist. Zusätzlich wird gefordert, dass $w \cdot h = 1$ gilt.

Für die Überprüfung der Ear-Bedingung wird zunächst das minimal umgebende Rechteck bestimmt, welches das betreffende Dreieck einschließt. Dann werden alle Zellen überprüft, welche dieses Rechteck überdeckt, ob sie einen konkaven Punkt enthalten. Ist das Dreieck ein Ear kann das Grid nach dem Clipping einfach aktualisiert werden, da für jedes Dreieck maximal zwei Punkte ihren Status von konkav zu konvex ändern können. Wird ein Punkt konvex, dann wird er einfach aus dem Grid gelöscht.

Man bezeichnet die Verwendung eines Grids als *spatial hashing Verfahren* oder *geometrical hashing Verfahren*. Allgemein ist spatial hashig die Erweiterung der Idee hinter einer Hash Tabelle auf höhere Dimensionen. Statt einem einfachen Schlüsselwert (Key) werden die Koordinaten des zu speichernden Objekts als Key verwendet.[29] Das oben beschriebene Verfahren von Held wird in der Umsetzung dieser Arbeit verwendet.

3.2 Parallelisierung des Ear-Clipping-Algorithmus

Anstatt den Algorithmus selbst in seiner Laufzeit zu verbessern, ist es ein Gedanke, die Abarbeitung aufzuteilen. Vorallem mit der technischen Entwicklung mehrerer Prozessorkerne in einer Central Processing Unit (CPU) ist verteiltes Rechnen ein gängiges Konzept. Hierzu haben Eder, Held und Palfrader eine Arbeit verfasst, die sich mit der Umsetzung des ECA unter dem Gesichtspunkt der coarse-grain parallelization, zu Deutsch grobkörnigen Parallelisierung, befasst.[7] Dieses Prinzip beschreibt die Aufteilung eines Programms in längere Unteraufgaben. Das ist ein für Multicore Computer sehr geeignetes Konzept. Andere Arbeiten befassten sich auch mit der Umsetzung der Arbeitsteilung, aber dort speziell mit dem Konzept der fine-grain parallelization im Bezug auf die DT. Die fine-grain parallelization, also die feinkörnige Parallelisierung, beschreibt die Aufteilung eines Programms in eine Vielzahl kleinerer Aufgaben. Hier ist beispielsweise M. Goodrich[23] zu nennen.

Eder, Held und Palfrader haben ihre Arbeit auf FIST aufgebaut. Wie bereits in Kapitel 3.1 erwähnt, basiert FIST auf dem ECA.[7] Sie beschränkten sich dabei mit der Parallelisierung auf den Bereich des Algorithmus, welcher sich mit der Klassifikation und dem Clipping der Ears befasst. Dieser Teil macht etwa 80% des Rechenaufwandes aus. Um eine Aufteilung in k Threads zu erreichen, welche dann auf den k Kernen der CPU abgearbeitet werden sollen, nutzen Sie

drei verschiedene Ansätze und vergleichen diese miteinander und mit der nicht parallel laufenden Form des Algorithmus in FIST.

Ihr erster Ansatz beruht auf dem *divide-and-conquer-Prinzip*. Anstatt das Polygon P allerdings durch Diagonalen in etwa gleich große Unterpolygone P_k zu unterteilen, nutzen Sie $k - 1$ viele senkrechte Geraden dafür. Dies ist weit weniger aufwendig in der Berechnung, da das Finden von geeigneten Diagonalen relativ rechenintensiv ist. Sie berufen sich dabei auf einen Algorithmus von Sutherland und Hodgman [25]. Bei dieser Form der Unterteilung entstehen sogenannte Steiner Punkte (SP), welche die Schnittpunkte der senkrechten Geraden mit den Strecken der äußeren Begrenzung darstellen. Dafür benötigt man eine Zeit von $O(n)$ pro Gerade l und fügt im schlimmsten Fall $O(n)$ SP ein. Diese werden als neue Eckpunkte in den Unterpolygonen eingefügt und damit vom ECA auch als Eckpunkte der Dreiecke in der Zerlegung benutzt. Das führt dazu, dass Dreiecke in der Gesamtzerlegung von P entstehen, welche unzulässige Eckpunkte besitzen, da diese im Ursprünglichen Polygon nicht existieren. Dafür muss eine Bereinigung der Zerlegung durchgeführt werden, nachdem alle k Threads ihre Triangulation der P_k Unterpolygone geliefert haben. Durch den Schnitt des Polygons mit einer senkrechten Geraden entstehen zwei SP s_a und s_b . Um diese wieder zu löschen, werden alle Dreiecke, welche zu einem dieser beiden Punkte inzident sind, aus der Triangulation gelöscht. Auf diese Weise erzeugt man ein Loch H in der Zerlegung, welches wieder ein Polygon ist. Diese kann man nun durch erneute Triangulation mit validen Dreiecken füllen.

Einen *partition-and-cut-Ansatz* zu verwenden, war die zweite Variante, um die Triangulation auf die k Threads aufzuteilen. Dabei wird nicht wie bei *divide-and-conquer* das gesamte Polygon P , sondern nur sein begrenzender Streckenzug unterteilt. Hierfür werden **Landmarks**, also Wegpunkte, eingeführt. Dies geschieht anhand der Indizierung der n Ecken. Die Eckpunkte mit den Indizes $\left\{0, \frac{n}{k}, \frac{2n}{k}, \dots, \frac{(k-1)n}{k}\right\}$ werden die Landmarks. Der Streckenzug zwischen je zwei dieser Markierungen wird jeweils einem Thread zugewiesen. Die Wegpunkte gehören dabei jeweils zu zwei benachbarten Teilstreckenzügen gleichzeitig. Jeder Thread durchläuft dann eine Klassifikations- und eine Clippingphase, bei denen darauf geachtet wird, dass die Landmarks nicht gelöscht werden. Ist das geschehen und alle Threads beendet, dann bleibt ein Teil des Polygons noch unbearbeitet. Dieser Teil wird bei Eder, Held und Palfrader nicht noch einmal in Abschnitte für verschiedene Threads unterteilt sondern wird dann vom sequentiellen ECA in FIST bearbeitet. Zwischen den Threads wird keine Synchronisation benötigt, da sowohl Klassifikation als auch Clipping völlig unabhängig von anderen Threads ablaufen und nur in ihrem jeweiligen Abschnitt Dreiecke erzeugt werden. Dabei sei angemerkt, dass das Überprüfen der Ear-Eigenschaft nur Lesezugriff auf die

Globale Liste aller Eckpunkte des Polygons benötigt. Der Vorgang der Aufteilung in Threads und deren bearbeitung ist in der nachstehenden Abbildung zu sehen.

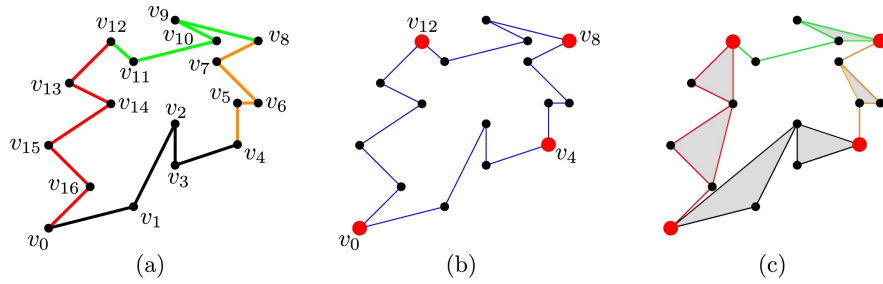


Abbildung 12: (a) Einfaches Polygon P unterteilt in vier Streckenzüge (b) Landmarks hervorgehoben (c) Triangulierung durch Threads

Der dritte Ansatz, betreffend dem ECA in FIST ist der sogenannte *mark-and-cut-Ansatz*, welcher Ähnlichkeiten zum vorher erwähnten *partition-and-cut-Ansatz* aufweist. Auch in diesem Fall werden einige Eckpunkte von P als Markierungen genutzt. In der Markierungsphase, durchläuft ein Thread den Streckenzug von P und speichert jeden zweiten konvexen Eckpunkt in einer Liste. Hat dieser Thread die Hälfte aller Punkte überprüft, werden die Cut-Threads gestartet, welche nur die Cutting-Phase durchlaufen. Bildet ein Punkt in der Liste mit seiner gegenüberliegenden Seite ein Dreiecke, dann wird dieses sofort als valide gespeichert und abgeschnitten. Jeder dieser Punkte darf nur einmal bearbeitet werden, damit es nicht zu Asynchronität und Redundanz kommt. Wenn die Cut-Threads alle ihre Arbeit getan haben, werden sie neu gestartet und bearbeiten dann alle Punkte, die seit ihrem letzten Start zur Liste hinzugefügt worden sind. Währenddessen durchläuft der Mark-Thread das Polygon erneut und fügt neue konvexe Punkte zu Liste hinzu und so weiter, bis nurnoch weniger Dreiecke erkannt werden, als vorher mit einem Grenzwert festgelegt. Dieser lag bei Eder, Held und Palfrader bei 20 Dreiecken. Der Rest von P , welcher noch nicht bearbeitet wurde, wird dann wie im *partition-and-cut-Ansatz* von einem sequentiellen Aufruf von FIST bearbeitet.

Der finale Vergleich aller drei Ansätze hinsichtlich ihrer Qualität zeigt, dass sie

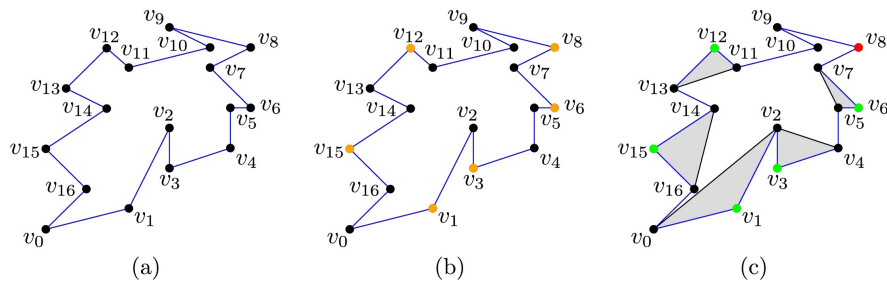


Abbildung 13: (a) Einfaches Polygon P (b) Erste Markierungsphase, ausgewählte Ecken in orange (c) Erste Cutting-Phase

in etwa gleich gut sind. Als Vergleich wurde von ihnen noch eine Variante der DT, die sogenannte Constrained Delaunay Triangulation (CDT) durchgeführt, auf die an dieser Stelle allerdings nicht genauer eingegangen werden soll. Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis.

	CDT	FIST's top	D&C	P&C	M&C
(1) Durchschn. Abw. 60°	30.79°	31.53°	35.29°	34.97°	38.38°
(2) Durchschn. min. Winkel	24.60°	23.40°	20.07°	21.32°	21.07°

Tabelle 1: Vergleich der FIST Triangulation inklusive CDT und FIST's top Heuristik. Aufgeführt sind folgende Parallele Versionen von FIST: Divide-and-conquer D&C, Partition-and-cut P&C und Mark-and-Cut M&C. (1) Durchschnittliche Abweichung aller Innenwinkel von 60° über alle Triangulationen (je kleiner, desto besser) (2) Durchschnittliche Größe des kleinsten Innenwinkels aller Dreiecke über alle Triangulationen (je größer, desto besser) [7]

3.3 Alternative Verfahren und Ansätze

3.3.1 Delaunay Triangulation

Spricht man von Triangulationen, so stößt man zwangsläufig auf den Begriff der Delaunay Triangulation. Sie ist, qualitativ gesehen, die Triangulation mit den ausgewogensten Dreiecken.

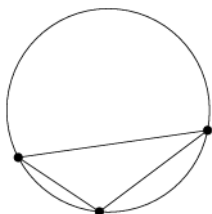


Abbildung 14:
Umkreis eines
Dreiecks [26]

Um jedoch zu verstehen wie die DT gebildet wird, benötigt man den Begriff des *leeren Umkreises*. Sie ist die grundlegende Bedingung für eine DT, da man nur solche Triangulationen, in denen alle Dreiecke eben diese Bedingung des leeren Umkreises erfüllen, eine DT nennt. [26]

Man betrachte eine Menge aus Punkten V in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 . Ein Dreieck $\triangle v_1 v_2 v_3$ mit $v_1, v_2, v_3 \in V$ erfüllt die Bedingung des leeren Umkreises, wenn der Kreis, welcher durch die drei Punkte v_1, v_2, v_3 geht, keine anderen Punkte $v_i \in V$ beinhaltet.

Kann man also eine Menge aus Dreiecken T finden, sodass jeder Punkt der Menge V teil mindestens eines Dreiecks ist und jedes Dreieck wenigstens eine Seite mit einem anderen Dreieck teilt, dann ist die T eine DT von V , wenn jedes Dreieck in T einen leeren Umkreis besitzt.

Dass diese Triangulation nicht eindeutig ist, kann man an einem einfachen Beispiel zeigen. Hat man vier Punkte im \mathbb{R}^2 , welche alle zueinander konvex sind, dann ist es möglich, dass alle diese Punkte auf dem selben Umkreis liegen. In einem solchen Fall sind alle möglichen Kombinationen aus sich nicht gegenseitig schneidenden Dreiecken als DT zulässig. Jedoch gibt es auch den Fall, dass nur je drei Punkte auf einem Kreis liegen. Dafür gibt es immer zwei Möglichkeiten, von

denen meist nur eine DT ist. In Abbildung 15 sind in den Fällen (a) und (b) diese Möglichkeiten für Umkreise zu sehen, welche einmal eine DT erzeugen und einmal nicht. In Fall (c) ist der zuvor beschriebene Fall aufgeführt, bei dem die vier Punkte alle auf dem selben Kreis liegen.

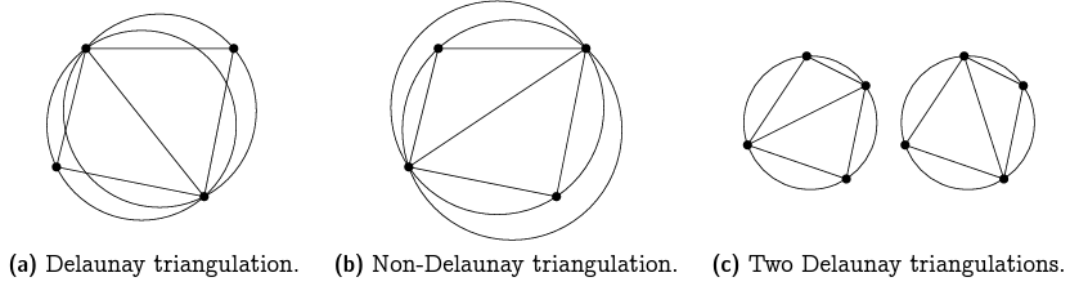


Abbildung 15: Delaunay Triangulation für vier konvexe Punkte. (a) Delaunay Triangulation (b) keine Delaunay Triangulation (c) mehrere gleichwertige Triangulationen [26]

Eine sehr vorteilhafte Eigenschaft der DT, welche diese für praktische Anwendungen sehr interessant macht, ist, dass sie den minimalen Innenwinkel jedes Dreiecks der Triangulation maximiert. Das bedeutet, dass die DT die qualitativ hochwertigste aller möglichen Triangulationen einer Menge von Punkten ist. Aber auch so ist es nicht möglich, dass jede DT die Bedingung erfüllt, keine Slivers zu enthalten. Es bedeutet lediglich, dass, wenn ein Sliver Teil einer DT ist, dann wäre auch in jeder anderen Triangulation mindestens ein Sliver enthalten. Das ist immerhin in sofern eine gute Eigenschaft, da eine DT einer Punktmenge immer die minimale Anzahl an Slivers enthält. Sie dient damit als optimaler Vergleich für beispielsweise den ECA, da man damit die Abweichung der Triangulation des ECA zu der durch die DT erzeugten bestimmen kann.

Möchte man, wie in dieser Arbeit, ein Polygon in Dreiecke zerlegen, so stößt man auf ein Problem. Ein Polygon ist zwar eine Menge aus Punkten, jedoch sind diese bereits durch einen Streckenzug fest miteinander verbunden. Man kann in dem meisten Fällen also keine echte DT erzeugen, da die Dreiecke nicht frei wählbar sind. Man spricht dann von der sogenannten CDT. Diese versucht ebenfalls die Bedingung des leeren Umkreises zu erfüllen, allerdings mit einer Einschränkung, welche sie für vorgegebene Polygone umsetzbar macht. Der Umkreis eines Dreiecks Δ darf andere Punkte des Polygons enthalten, wenn diese von innerhalb von Δ nicht sichtbar sind. Ein Punkt p heißt **sichtbar**, wenn ein Punkt q im

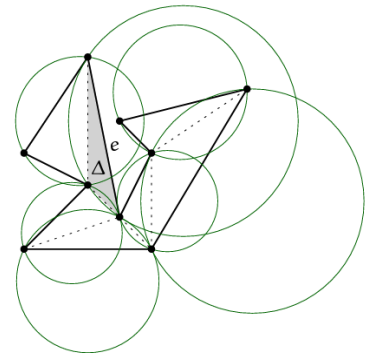


Abbildung 16: Constrained Delaunay Triangulation eines Polygons [26]

Inneren des Dreiecks \triangle existiert, so dass die Strecke \overline{pq} keine andere Strecke $e \in E$ schneidet. Anderenfalls blockiert e sozusagen die Sicht auf den Punkt p .

3.3.2 Algorithmus basierend auf Sichtbarkeit

Wie schon bei der DT ist hier der Begriff der Sichtbarkeit von Eckpunkten entscheidend. Anders als zuvor werden hier jedoch keine Dreiecke ermittelt, welche die Bedingung des leeren Umkreises erfüllen. In diesem Algorithmus, beschrieben von Ran Liu, wird das Polygon P in zwei Unterpolygone P_1 und P_2 unterteilt, welche dann solange rekursiv weiter unterteilt werden, bis die entstandenen Unterpolygone P_i Dreiecke sind.[9] Hierfür muss in einem ersten Schritt die Sichtbarkeit jedes Punkte gegenüber einem Referenzpunkt v_i überprüft werden. Dazu betrachtet man zunächst die Nachbarn v_{i-1} und v_{i+1} von v_i . Diese begrenzen das sogenannte **Sichtfeld** von v_i , welches mit α bezeichnet wird und dem Winkel in v_i entspricht. Für spätere Betrachtungen zählen v_{i-1} und v_{i+1} als nicht sichtbar im Bezug auf v_i . Entlang der Kanten von P wird nun ausgehend von v_{i+1} entgegen dem Uhrzeigersinn überprüft, ob ein Punkt v_j im Sichtfeld von v_i liegt. Ist das der Fall, dann gilt der Punkt v_j als sichtbar, wenn die Strecke $v_i v_j$ eine Diagonale von P ist. Zusätzlich begrenzt dieser Punkt nun das Sichtfeld und es muss verkleinert werden. Das neue Sichtfeld α berechnet sich also durch $\alpha = v_{i-1}, v_i, v_j$. Der Vorgang wird fortgesetzt, bis alle Punkte überprüft sind. Ist diese Überprüfung für alle v_i von P abgeschlossen, wird die Anzahl der sichtbaren Punkte gegenüber dem jeweiligen Referenzpunkt bestimmt. Diese dient als Vergleichskriterium für die Punkte untereinander. Als Beispiel ist in der nachfolgenden Abbildung einmal die Ermittlung von α und die Überprüfung mehrerer Punkte bezogen auf den Punkt v_0 dargestellt.

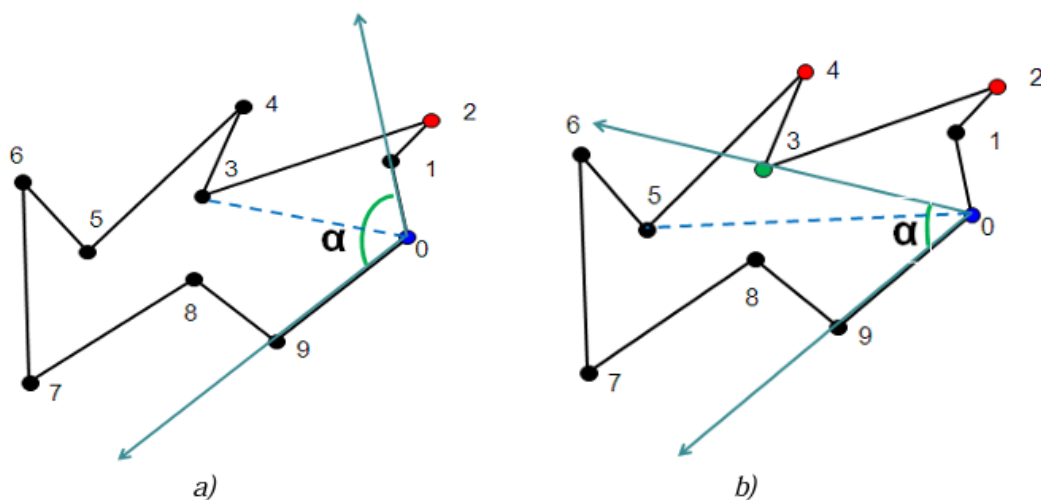


Abbildung 17: (a) v_3 ist sichtbar für v_0 (b) Überprüfung der Sichtbarkeit von v_5 mit neuem Sichtfeld α (nicht sichtbar entspricht rot, sichtbar entspricht grün) [9]

Für die Anzahl sichtbarer Punkte bezogen auf v_i wird die hier Bezeichnung

$s(v_i)$ verwendet. Man kann diesen Vorgang der Sichtbarkeitsanalyse wie folgt in Pseudocode beschreiben.

Algorithmus 4: Sichtbarkeitsanalyse für einen Punkt v_i

Eingabe: Ecken $v_i \in V(P)$, $n = |V(P)| - 3$, $s(v_i) = 0$

Ausgabe: Anzahl sichtbarer Punkte $s(v_i)$

Schritt 1: Wähle Referenzpunkt v_i

Schritt 2: $\alpha = \angle v_{i-1}v_iv_{i+1}$

Schritt 3: **while** $n > 0$ **do**
 if $\angle v_{i-1}v_iv_j > 0 \wedge \angle v_{i-1}v_iv_j < \alpha$
 if v_iv_j Diagonale von P
 (a) $s(v_i) = s(v_i) + 1$
 (b) $\alpha = \angle v_{i-1}v_iv_j$
 (c) $n = n - 1$

Schritt 4: Ausgabe von $s(v_i)$

Ist $s(v_i)$ für jeden Eckpunkt v_i von P ermittelt, wird der Punkt mit der größten solchen Anzahl ausgewählt. Gibt es mehrere solche Punkte, dann kann ein beliebige dieser Punkte gewählt werden. Dieser Punkt wird dann als **First Head** bezeichnet. Als nächstes wird noch der Punkt mit der zweit höchsten Anzahl $s(v_i)$ gewählt. Er wird als **Second Head** bezeichnet. Sollte es hier Uneindeutigkeiten bei der Auswahl geben, dann wird ein Test durchgeführt, um diesen Punkt auszuwählen. Durch die Diagonale zwischen First und Second Head soll das Polygon in zwei Unterpolygone zerlegt werden. Man testet, bei welchem der möglichen Punkte für den Second Head, der Betrag der Differenz zwischen der Anzahl an Strecken in den beiden Unterpolygonen P_1 und P_2 am geringsten ist. Das ist in der nächsten Abbildung zu sehen.

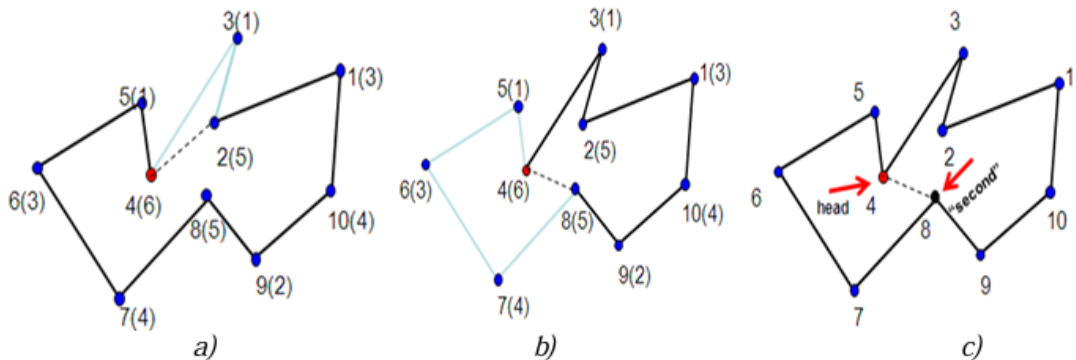


Abbildung 18: (a) und (b) Vergleich der Differenz zwischen der Länge des schwarzen und des türkisen Streckenabschnitts (c) Auswahl des Second Head [9]

Für die Zerlegung werden First und Second Head dann dupliziert, damit beide Polygone vollständig begrenzt sind. In beiden Unterpolygonen muss dann die Sichtbarkeitsanalyse erneut durchgeführt werden. Damit dies ein wenig schneller

geschieht, kann man die sichtbaren Punkte im Bezug auf einen Punkt v_i in einer sogenannten *single circular list* gespeichert werden. In einer solchen Liste zeigt der Pointer des letzten Elements auf das erste Element der Liste. Beim Update der Sichtbarkeiten müssen dann für jeden Punkt nur die Punkte in seiner jeweiligen Liste überprüft werden und jetzt nicht mehr sichtbare Punkte aus der Liste gelöscht werden. Damit wird die Laufzeit der Sichtbarkeitsanalyse von $O(n^2)$ auf $O(n)$ begrenzt. Nichtsdestotrotz hat der neue Algorithmus von Ran Liu, nach seiner eigenen groben Analyse, eine Komplexität von über $O(n^3)$. Im Vergleich mit dem ECA, welcher eine Komplexität von $O(n^2)$ besitzt, schneidet er damit schlechter ab. In Tabelle 2 und 3 werden zwei Beispiele des Vergleichs zwischen dem Sichtbarkeitsalgorithmus und dem ECA aus der Arbeit von Liu angeführt. Die Algorithmen wurden auf zufällig generierten Polygone unterschiedlicher Knotenanzahl und Form getestet. Dabei waren die getesteten Polygonformen einmal *rund*, das heißt die Eckpunkte konnten nur in einem quadratischen Koordinatenbereich liegen. Der andere Typ war *länglich*, wobei die Punkte eher in ihrer x-Koordinate weiter streuten, nicht so sehr jedoch in der y-Koordinate. Es ist in den Ergebnissen dieser Tests ersichtlich, dass die Qualität der Dreiecke bezogen auf ihre minimalen Innenwinkel bei Liu's Algorithmus besser ist, als die des ECA. In Sachen Laufzeit jedoch schneidet der neue Algorithmus jedoch schlechter ab, wie bereits die Komplexitätsanalyse zeigte.

In der nachfolgenden Abbildung ist zunächst einmal exemplarisch dargestellt, wie eine solche Zerlegung eines einfachen Polygons durchgeführt wird. Danach folgen die angesprochenen Tabellen.

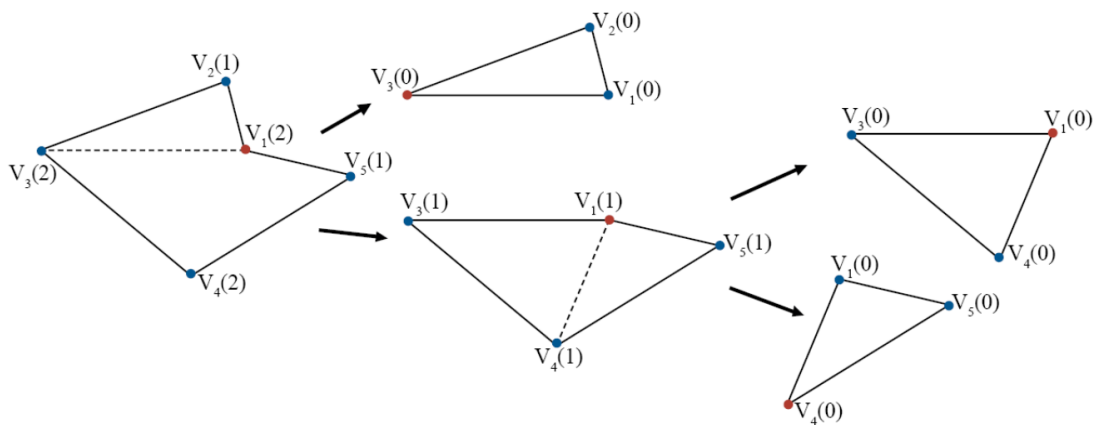


Abbildung 19: Von links nach rechts die Schritte der Unterteilung eines Polygons in Unterpolygone bis zur Triangulierung mittels Sichtbarkeit der Eckpunkte (rot die First Heads)[9]

Eckenanzahl: 30		$v_i = \{(x, y) -50 < x < 50, -50 < y < 50\}$		
Algorithmus	Polygon- fläche	Durchschn. Dreiecksfläche	Standartabw. der Dreiecksfläche	Durchschn. min. Winkel
Ear-Clipping	4128,5px	147,446px	163,63px	10,29°
Sichtbarkeit	4128,5px	147,446px	148,91px	15,04°

Tabelle 2: Vergleich des ECA und des Sichtbarkeitsalgorithmus bei einem rundem Polygon mit 30 Ecken anhand der Standartabweichung der Dreiecksfläche in Pixeln (je kleiner desdo besser) und der durchschnittlichen minimalen Innenwinkelgröße in Grad (je größer desdo besser) [9]

Eckenanzahl: 30		$v_i = \{(x, y) -100 < x < 100, -30 < y < 30\}$		
Algorithmus	Polygon- fläche	Durchschn. Dreiecksfläche	Standartabw. der Dreiecksfläche	Durchschn. min. Winkel
Ear-Clipping	5066px	180,93px	185,50px	9,23°
Sichtbarkeit	5066px	180,93px	146,03px	16,45°

Tabelle 3: Vergleich des ECA und des Sichtbarkeitsalgorithmus bei einem länglichen Polygon mit 30 Ecken anhand der Standartabweichung der Dreiecksfläche in Pixeln (je kleiner desdo besser) und der durchschnittlichen minimalen Innenwinkelgröße in Grad (je größer desdo besser) [9]

Literatur

- [1] *Digitale Revolution*
(<https://www.staatslexikon-online.de>)
- [2] *Darstellung von Kurven und Flächen*, Christoph Dähne
(<https://www.inf.tu-dresden.de>)
- [3] *Geometrical Mesh Quality*
(<https://www.iue.tuwien.ac.at>)
- [4] *Sliver In: Computer Graphics Dictionary*, Stevens, R.T., 2002.
- [5] *Triangulation by Ear Clipping*, David Eberly
(<https://www.geometriertools.com>)
- [6] *Polygon Triangulation*, Subhash Suri
(<https://sites.cs.ucsb.edu/~suri/cs235/Triangulation.pdf>)
- [7] *Parallelized ear clipping for the triangulation and constrained Delaunay triangulation of polygons*, Günther Eder, Martin Held, Peter Palfrader
(<https://www.sciencedirect.com>)
- [8] *Improved Algorithms For Ear-CLipping Triangulation*, Bartosz Kajak, 2005
(<https://digitalscholarship.unlv.edu/thesesdissertations/1319/>)
- [9] *A comparison of Ear Clipping and a new Polygon Triangulation Algorithm*, Ran Liu
(<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:330344/FULLTEXT02.pdf>)
- [10] *Polygon, Definition*
(<https://mathepedia.de/Polygone.html>)
- [11] *Regular Polygons. In: Michiel Hazewinkel (Hrsg.): Encyclopedia of Mathematics. Springer-Verlag und EMS Press, Berlin 2002*
- [12] *Convex Polygon*
(<https://www.mathopenref.com/polygonconvex.html>)
- [13] *Triangulation, Definition*
(<https://encyclopediaofmath.org/wiki/Triangulation>)
- [14] *Simplex, Definition*
(<https://encyclopediaofmath.org/wiki/Simplex>)
- [15] *Ear-clipping Based Algorithms of Generating High-quality Polygon Triangulation*, Gang Mei, John C.Tipper and Nengxiong Xu
(<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1212/1212.6038.pdf>)
- [16] *Ear-Clipping Triangulierung*
(wiki.delphigl.com)
- [17] *Jordanscher Kurvensatz*
(<https://de.wikipedia.org>)

- [18] *The smallest 8 cubes to cover a regular tetrahedron*
(<https://math.stackexchange.com/>)
- [19] *Slicing an ear using prune-and-search* In: *Pattern Recognition Letters*, ElGindy, H., Everett, H., and Toussaint, G. T., (1993) S. 719-722
- [20] *Polygons Have Ears* In: *Amer. Math. Monthly*, G.H. Meisters, Ausgabe 82, S. 648–651, 1975.
- [21] *Turing-Maschinen* In: *Der Turing Omnibus*, A. K. Dewdney, S. 211-230, 1975.
- [22] *Computational Geometry* In: *C. Cambridge: Cambridge University Press*, O'Rourke, J., (1998).
- [23] *Triangulating a polygon in parallel* In: *Journal of Algorithms*, M. Goodrich, Ausgabe 10, S. 327-351, 1989.
(<https://www.sciencedirect.com/>)
- [24] *FIST: Fast Industrial-Strength Triangulation of Polygons* In: *Algorithmica*, Held, M., Ausgabe 30, S. 563–596, 2001.
(<https://link.springer.com/article/10.1007/s00453-001-0028-4>)
- [25] *Reentrant Polygon Clipping*, Sutherland, Ivan E. und Hodgman, Gary W., 1974.
(<https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/360767.360802>)
- [26] *Delauny Triangulation*
(<https://ti.inf.ethz.ch/ew/Lehre/CG13/lecture/Chapter%206.pdf>)
- [27] *Triangulation by Ear Clipping*, David Eberly, Geometric Tools, Redmond WA, 2002
(<https://www.geometrictools.com/Documentation/TriangulationByEarClipping.pdf>)
- [28] *Detecting Weakly Simple Polygons*, Hsien-Chih Chang, Jeff Erickson, Chao Xu, Proceedings of the 2015 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), S. 1655 - 1670, 2015
(<https://jeffe.cs.illinois.edu/pubs/pdf/weak.pdf>)
- [29] *Perfect Spatial Hashing*, Sylvain Lefebvre Hugues Hoppe, Microsoft Research
(<https://hhoppe.com/perfecthash.pdf>)