FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Geometría Lineal del Espacio

El Plano

Ing. Ricardo Sagristá

Revisión y actualización: Patricia Có - Mariel Ugarte

-2020-

El Plano

1. Definición del plano como lugar geométrico

Sea en el espacio un punto fijo P_1 y un vector $\vec{n} \neq \vec{0}$

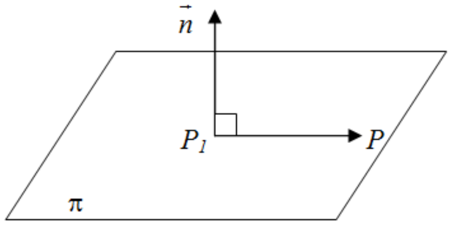


Figura 1

el lugar geométrico:

$$\pi = \left\{ P \,/\, \overline{P_1P} \perp \vec{n};\ o\ \ P \equiv P_1 \right\} \quad (1)$$

Es un plano que contiene al punto P_1 y es ortogonal al vector $\vec{n}$

El plano π queda descripto como el conjunto de puntos P del espacio, formado por el mismo punto P_1 dado y los puntos P que son extremos de los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ ortogonales al vector $\vec{n}$ dado.

2. Ecuaciones del plano referidas a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal en el espacio con la base canónica asociada $\left\{\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right\}$, un vector no nulo $\vec{n}$ de componentes (a,b,c) y un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

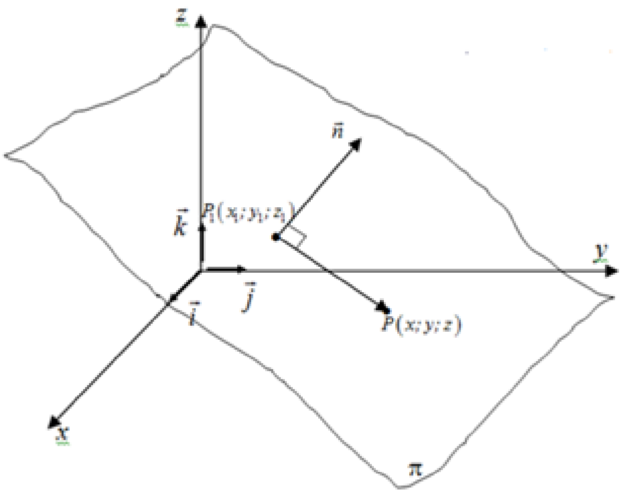


Figura 2

El lugar geométrico (1), viene dado por:

$$\pi = \left\{ P(x;y;z) \,/\, \overline{P_1P} \perp \vec{n};\ o\ \ P \equiv P_1 \right\}$$

También puede escribirse:

$$\pi = \left\{ P(x;y;z) \,/\, \overline{P_1P} \times \vec{n} = 0 \right\}$$

La ecuación

$$\boxed{\overline{P_1P} \times \vec{n} = 0} \,(2)$$

que verifican todos los puntos del plano y sólo ellos, es la **ecuación vectorial** del plano π, que pasa por el punto P_1 y es normal al vector $\vec{n}$.

2.1 Ecuación general del plano

Siendo $P\ (x,\ y, z)$ un punto cualquiera del plano, y $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, la ecuación (2) puede escribirse:

$$(a\,;b\,;c) \times (x - x_1; y - y_1; z - z_1) = 0$$

Recordando que el producto escalar es igual a la suma de los productos de las componentes homólogas, tenemos:

$$\boxed{a.(x-x_1)+b.(y-y_1)+c(z-z_1)=0} \quad (3)$$

es decir:

$$a.x+b.y+c.z+(-a\,x_1-b\,y_1-c\,z_1)=0$$

si llamamos

$$-a\,x_1-b\,y_1-c\,z_1=d$$

se obtiene

$$a\,x+b\,y+c\,z+d=0 \quad (4)$$

que es la llamada **ecuación general del plano.**

Es una ecuación de primer grado en las tres variables *x; y; z.* A las constantes *a*, *b*, *c* y *d* se las llama ***coeficientes*** de la ecuación, siendo *d* el término independiente.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación del plano normal al vector $\vec{n}=(2;3;-1)$ y que pasa por el punto $P_1(5;-2;3)$.

Reemplazando estos datos en la ecuación (3), tenemos que:

$$2(x-5)+3(y+2)-(z-3)=0 \quad \text{o sea} \quad 2x+3y-z=1.$$

Si optamos por utilizar la ecuación (4), llegamos a:

$$2x+3y-z+d=0$$

Para calcular *d*, tenemos en cuenta que el punto $P_1(5;-2;3)$ pertenece al plano, por lo tanto sus coordenadas deben verificar la ecuación del mismo:

$$2.5+3.(-2)-3=-d \;\Rightarrow\; -d=1$$

reemplazando:

$$2x+3y-z=1$$

como ya habíamos obtenido por medio de la ecuación (3).

2.1.1 Significado de los coeficientes de la ecuación general del plano

Sabemos que si un plano π está dado por la ecuación $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$, los coeficientes *a*, *b* y *c* son las componentes de un vector $\vec{n}=(a,b,c)$ normal a dicho plano.

El término independiente *d* resulta ser, como veremos a continuación, proporcional a la distancia del origen de coordenadas al plano. En efecto, si elegimos cualquier punto $P\,(x,\,y,z)$ del plano π, resulta que:

$$|d|=|-d|=|a\,x+b\,y+c\,z|=|(a,b,c)\times(x,y,z)|=\left|\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right|=|\vec{n}|\,.\left|\overrightarrow{OP}\right|.\left|\cos(\widehat{\vec{n},\overrightarrow{OP}})\right|=|\vec{n}|.\left|proy_{\vec{n}}\overrightarrow{OP}\right|=|\vec{n}|\;\delta(\pi,0)$$

lo que significa que $|d|$ es proporcional al módulo de la proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre la dirección de $\vec{n}$, esto es, $|d|$ es proporcional a la distancia del origen *O* al plano.

Podemos escribir entonces que: $\boxed{\delta(\pi,0)=\dfrac{|d|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

En caso de que $|\vec{n}|=1$, tenemos que $|d|$ es exactamente la distancia del origen al plano.

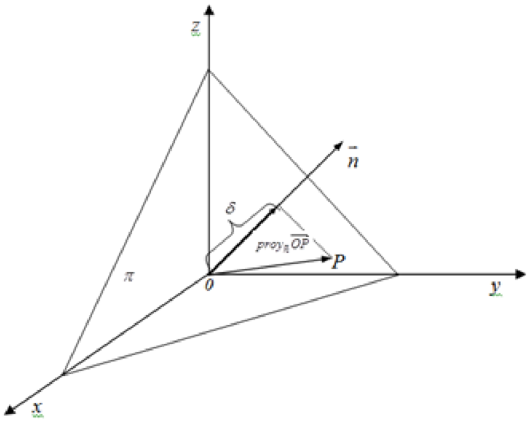


Figura 3

Observación 1:

Si $|\vec{n}| \neq 1$, dividimos la ecuación (4) por $|\vec{n}|$ (es siempre posible ya que $|\vec{n}| \neq 0$ pues $\vec{n} \neq \vec{0}$), quedando lo que se conoce como la **ecuación normalizada del plano**:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,z+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$$

donde el nuevo vector normal al plano es:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,;\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,;\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

siendo fácil comprobar que se trata de un versor.

Como ya vimos, cuando la ecuación del plano está normalizada, el valor absoluto del término independiente es la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

Ejemplo 2

Hallar la distancia δ del plano $\pi)\ 2x-y+3z-1=0$ al origen de coordenadas.

Siendo $\vec{n}=(2,-1,3)$ y como $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}\neq 1$, la distancia pedida es: $\delta(\pi,0)=\left|-\frac{1}{\sqrt{14}}\right|=\frac{1}{\sqrt{14}}$.

2. 2 Ecuación segmentaria de un plano.

Sea un plano π de ecuación $ax+by+cz+d=0$, con $d\neq 0$.

Si dividimos ambos miembros por $(-d)$, obtenemos:

$$\frac{a}{-d}x+\frac{b}{-d}y+\frac{c}{-d}z=1$$

que también puede escribirse:

$$\frac{x}{\frac{-d}{a}}+\frac{y}{\frac{-d}{b}}+\frac{z}{\frac{-d}{c}}=1; \qquad (a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)\,.$$

O bien: $\boxed{\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{l}=1}$

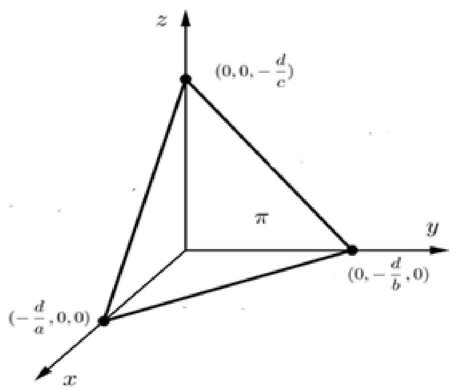


Figura 4

Esta ecuación es llamada **ecuación segmentaria del plano**.

En ella se evidencia las coordenadas de los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados: $(h,0,0),(0,k,0)$ y $(0,0,l)$, siendo: $h=-\dfrac{d}{a}, k=-\dfrac{d}{b}, l=-\dfrac{d}{c}$.

Ejemplo 3

Encontrar la ecuación segmentaria del plano $\pi)\ 3x+3y-2z=6$ y representarlo gráficamente.

Haciendo los cálculos correspondientes, resulta que $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-3}=1$ es la ecuación buscada.

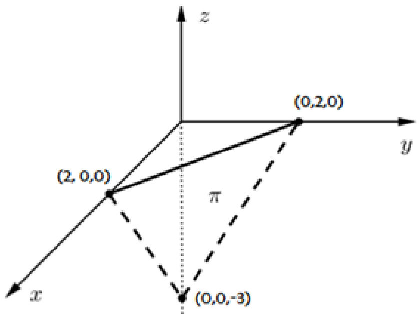


Figura 5

Observación 2:

Sabemos que tres puntos **no alineados** P_1, P_2 y P_3 en el espacio determinan un plano. Para obtenerla ecuación de dicho plano necesitamos encontrar un vector $\vec{n}=(a,b,c)$ normal al mismo.

El vector $\vec{n}$ es perpendicular a todo vector contenido en el plano, en particular:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2} \text{ y } \vec{n}\perp\overrightarrow{P_1P_3}$$

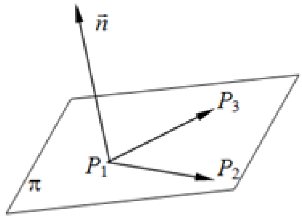


Figura 6

Recordando la definición de **producto vectorial** entre dos vectores, un vector perpendicular al plano será

$$\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\wedge\overrightarrow{P_1P_3}.$$

Ejemplo 4

Determinar una ecuación del plano que contenga a los puntos $P_1(2,-2,1)$, $P_2(-1,3,2)$ y $P_3(3,1,-1)$.

Encontramos que $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,5,1)$ y que $\overrightarrow{P_1P_3}=(1,3,-2)$, luego $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=(-13,-5,-14)$ es un vector normal al plano buscado y su ecuación es $-13x-5y-14z+d=0$.

Para encontrar el término independiente *d*, teniendo en cuenta que el punto $P_1(2,-2,1)$ pertenece al plano (podríamos haber tomado cualquiera de los tres puntos) y por lo tanto satisface su ecuación, tenemos que:

$$(-13)\ 2-5\ (-2)-14+d=0 \text{, entonces } d=30,$$

de donde:

$$13\ x+5\ y+14\ z=30$$

Actividad 1:

1. Encuentra una ecuación que represente, en cada uno de los siguientes casos, a un plano que contiene al punto P y es perpendicular al vector $\bar{n}$. Representa gráficamente cada plano.

a) $P(1,2,3)$ y $\bar{n}=\bar{i}$ b) $P(1,2,3)$ y $\bar{n}=\bar{i}+\bar{j}$

c) $P(1,2,3)$ y $\bar{n}=\bar{j}+\bar{k}$ d) $P(1,2,3)$ y $\bar{n}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

2. Determina en cada caso una ecuación del plano:

a) que contiene al punto $P(5,1,3)$ y es perpendicular al vector $\bar{n}$ de origen $Q(1,2,3)$ y extremo $R(2,4,12)$.

b) que contiene a los puntos $A(3,5,2)$, $B(2,3,1)$ y $C(-1,-1,4)$.

c) que es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $P(1,2,-1)$ y $Q(3,0,-3)$.

d) que contiene al punto $A(2,3,-5)$ y es paralelo al plano $\alpha)\, x+y-4z=1$.

e) que contiene al punto $B(3,6,12)$ y es perpendicular al eje y.

f) que contiene a los puntos $C(2,-1,1)$ y $D(3,1,2)$ y es paralelo al eje y.

g) que contiene al punto $E(3,4,-5)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(3,1,-1)$ y $\vec{v}=(1,-2,1)$.

3. a) Halla una ecuación del plano que contiene a los puntos $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(-1,0,2)$ y $\mathrm{C}(0,2,0)$.

b) Escribe su forma segmentaria y representa gráficamente.

c) Determina una ecuación normalizada del plano y la distancia del mismo al origen de coordenadas.

2.3 Ecuación general de un plano. Casos particulares.

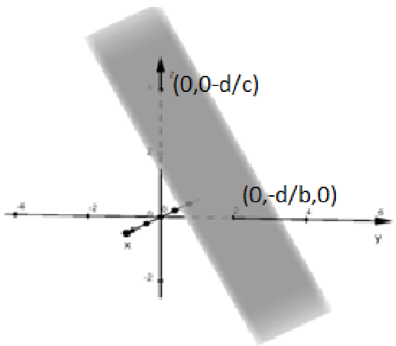
Dado un plano de ecuación $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$, consideremos los siguientes casos particulares:

i) Si d = 0 **el plano contiene al origen de coordenadas***(0; 0; 0).*

En efecto, si $d=0$ la ecuación de plano es $a\,x+b\,y+c\,z=0$, que claramente es satisfecha por el origen de coordenadas (0; 0; 0). Recíprocamente, si el origen de coordenadas pertenece al plano, la distancia de dicho punto al plano es nula, entonces $d=0$.

Veamos qué ocurre cuando se anula exactamente un coeficiente de x, y o z en la ecuación general:

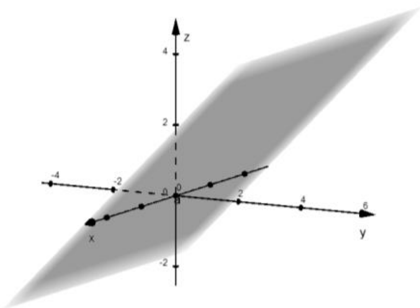
ii) Supongamos que ***a* =0***;* $b\neq 0$*;* $c\neq 0$*;* $d\neq 0$, la ecuación del plano es:



$$b\,y+c\,z+d=0 \quad \forall x \; (5)$$

El vector normal $\vec{n}=(0,b,c)$ resulta ser perpendicular al eje x puesto que $\vec{i}\times\vec{n}=0$ donde $\vec{i}=(1,0,0)$ es el versor asociado a dicho eje.

Por lo tanto $\vec{n}$ es paralelo al plano coordenado ***YZ***, lo que implica que nuestro plano de ecuación (5) es normal a dicho plano coordenado, es decir se tiene un **plano proyectante sobre el plano *YZ***.

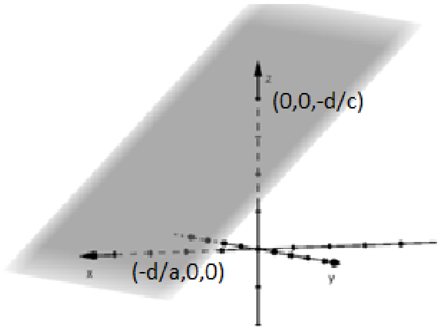


Si en (5) es también ***d=0*** se obtiene:

$$b\,y+c\,z=0 \;\; \forall\, x \quad (6)$$

En este caso el plano proyectante sobre el plano ***YZ*** contiene al origen de coordenadas, lo que implica que toda ecuación del tipo (6) es la ecuación de un **plano proyectante sobre el plano *YZ* que contiene al eje *x*.**

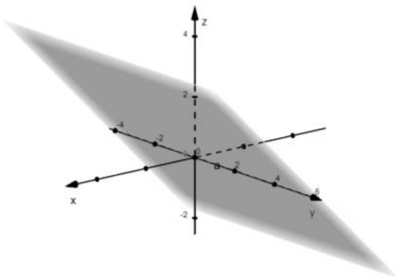
En forma análoga pueden estudiarse los casos:



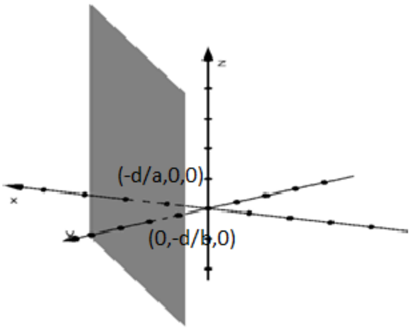
iii) $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b = 0}$, $\boldsymbol{c \neq 0}, \boldsymbol{d \neq 0}$, es decir la ecuación

$$ax + cz + d = 0 \ \forall y$$

Siguiendo el caso anterior, es fácil mostrar que representan a un **plano proyectante sobre el plano *XZ***.



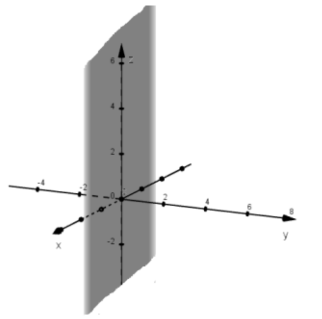
Si además es ***d=0***, dicho plano **contendrá al eje *y***.



iv) $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}, \boldsymbol{c = 0}, \boldsymbol{d \neq 0}$, tendremos la ecuación

$$ax + by + d = 0 \ \forall z$$

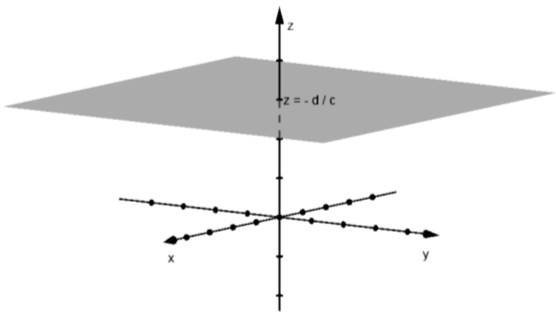
que será la ecuación de un **plano proyectante sobre el plano *XY***.



Si además es ***d=0***, dicho plano **contendrá al eje *z***.

Veamos ahora qué ocurre cuando se anulan de a dos los coeficientes de x, y, z en la ecuación general:

v) $a = 0$, $\boldsymbol{b = 0}, \boldsymbol{c \neq 0}, \boldsymbol{d \neq 0}$ $a = 0$; $b = 0$; $c \neq 0$; $d \neq 0$



de la ecuación general obtendremos:

$$cz + d = 0 \ \forall x, \forall y \text{; o bien } z = -\frac{d}{c} \ \forall x, \forall y \quad (7)$$

el vector normal $\vec{n} = (0,0,c) = c(0,0,1) = c\vec{k}$, es decir $\vec{n} \,//\, \text{eje } z$

por lo que el plano resulta **perpendicular** a dicho eje, o lo que es lo mismo **paralelo al plano coordenado *XY*.**

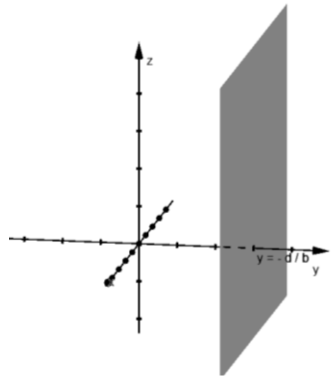
Si **además** es $\boldsymbol{d = 0}$ tenemos en (7) $z = 0 \ \forall x \ \forall y$, que es la ecuación del plano coordenado ***XY***.

vi) En el caso de ser $\boldsymbol{a=0}$, $\boldsymbol{b\neq 0}$, $c=0$, $\boldsymbol{d\neq 0}$,

la ecuación será: $b\,y+d=0\ \ \forall x,\forall z$; o bien $y=-\dfrac{d}{b}\ \ \forall x,\forall z$,

que es la ecuación de un **plano paralelo al plano coordenado *XZ***.

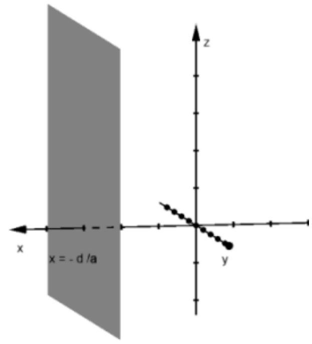
Si **además** es $\boldsymbol{d=0}$ tenemos $y=0\ \forall x\ \forall z$, que es la ecuación del plano coordenado ***XZ***.



vii) Si $a\neq 0$; $b=0$; $c=0$; $d\neq 0$**,** tendremos: $a\,x+d=0\ \ \forall y,\forall z$, o sea $x=-\dfrac{d}{a}\ \ \forall y,\forall z$,

que es la ecuación de un **plano paralelo al plano coordenado *YZ***.

Si **además** es $d=0$ tenemos $x=0\ \forall y\ \forall z$, que es la ecuación del plano coordenado ***YZ***.



2. 4 Trazas de un plano

Llamamos **trazas** de un plano π de ecuación $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ a las intersecciones de él con cada uno de los planos coordenados.

Determinemos, por ejemplo, **la traza del plano** π **sobre el plano coordenado *XY***, este último de ecuación $z=0, \forall x, \forall y$.

Se trata de hallar la intersección de ambos planos:

$$\{P(x;y;z)/\,ax+by+cz+d=0\}\cap\{P(x;y;z)/\,z=0\}=\{P(x;y;z)/\,ax+by+d=0; z=0\}$$

Esto significa que la **traza** buscada es una **recta en el espacio**, contenida en el plano ***XY*,** representada como intersección de dos planos de la forma: $\begin{cases} a\,x+b\,y+d=0\ \forall z \\ z=0\ \forall x,\forall y \end{cases}$.

La traza de π **sobre el plano *YZ*** se obtiene hallando la intersección de:

$\{P(x;y;z)/\,ax+by+cz+d=0\}\cap\{P(x;y;z)/\,x=0\}=\{P(x;y;z)/\,by+cz+d=0; x=0\}$ es decir se trata de una **recta en el espacio** contenida en el plano ***YZ*** representada por: $\begin{cases} b\,y+c\,z+d=0\ \ \forall x \\ x=0\,\forall y,\forall z \end{cases}$.

Igualmente puede mostrarse que **la traza sobre el plano *XZ*,** es la **recta en el espacio** $\begin{cases} a\,x+c\,z+d=0\ \forall y \\ y=0\ \forall x\,\forall z \end{cases}$, contenida en el plano ***XZ***.

Para representar gráficamente a un plano necesitamos conocer sus trazas y para ello conviene determinar los puntos *A*, *B* y *C* intersección del plano con cada uno de los ejes coordenados.

El punto A tendrá coordenadas (*h*; 0; 0), el valor de *h* lo obtendremos reemplazando esas coordenadas, *x=0* e *y=0*, en la ecuación del plano dado y haciendo que la verifiquen.

Esto es:

$$a\,h+b0+c0+d=0\ \text{, si } a\neq 0 \text{ resulta } h=-\frac{d}{a} \text{ y } A(-\frac{d}{a},0,0)$$

De igual modo se obtienen las coordenadas de los puntos $B(0,-\frac{d}{b},0)$, $(b\neq 0)$ y $C(0,0,-\frac{d}{c})$, $(c\neq 0)$

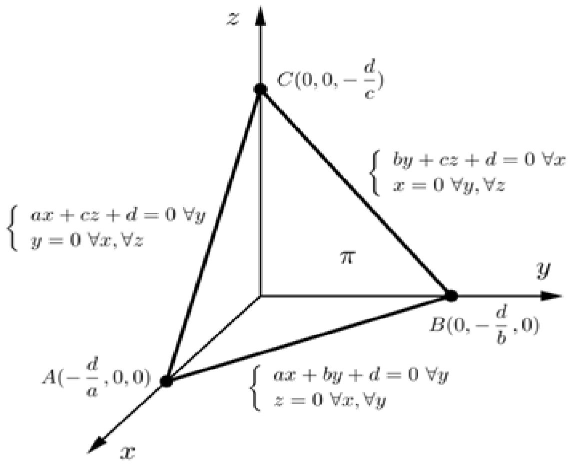


Figura 7

Es claro que si el plano pasara por el origen de coordenadas, los puntos *A*, *B* y *C* coinciden con el origen de coordenadas y las trazas pasan por él.

Ejemplo 5

Representar el plano de ecuación $4x+5y+3z-2=0$ y sus trazas.

Los puntos de intersección con los ejes son:

Con el eje *x*: $(\frac{1}{2}; 0; 0)$.

Con el eje *y*: $(0; \frac{2}{5}; 0)$.

Con el eje *z*: $(0; 0; \frac{1}{3})$.

Con estos puntos hallamos las trazas del plano, que nos permiten representarlo, y cuyas ecuaciones se indican en el gráfico.

Figura 8

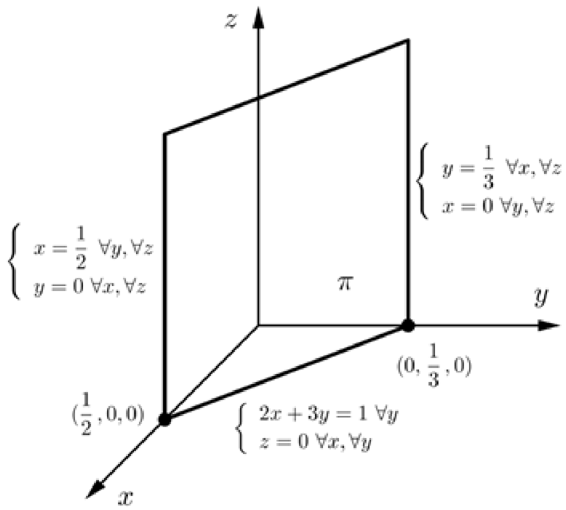


Figura 9

Ejemplo 6

Representar el plano de ecuación $2x+3y=1 \forall z$

Se trata de un plano proyectante sobre el plano coordenado *XY*.

La traza sobre el ***XY*** es la recta dada por $\begin{cases} 2x+3y=1 \forall z \\ z=0\ \forall x \forall y \end{cases}$.

La traza sobre el plano ***YZ*** es la recta $\begin{cases} y=\frac{1}{3}\ \forall z \\ x=0\ \forall y \forall z \end{cases}$, paralela al eje *z* y contenida en el plano Y***Z***.

Análogamente, la traza sobre el plano ***XZ*** es la recta $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \ \forall z \\ y = 0 \ \forall x \forall z \end{cases}$, paralela al eje z y contenida en el plano ***XZ***, como se puede ver en la figura 9.

2.5 Ecuaciones paramétricas del plano

Dados un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$, y dos vectores no nulos ni paralelos entre sí, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, existe un único plano π que contiene a P_1 y es paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

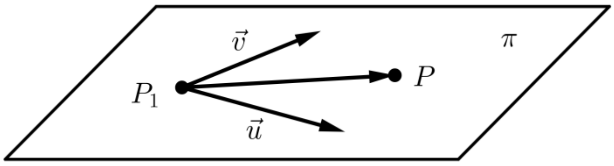


Figura 10

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano π.

$P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{P_1P}$ son coplanares $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ existen escalares s y t tales que $\overrightarrow{P_1P} = s\vec{u} + t\vec{v}$.

En componentes se tiene que:

$$P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3) \ ; s, t \in \Re \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = s\,u_1 + t\,v_1 \\ y - y_1 = s\,u_2 + t\,v_2 \ ; s, t \in \Re \\ z - z_1 = s\,u_3 + t\,v_3 \end{cases}$$

En síntesis:

$$\begin{cases} x = x_1 + s u_1 + t v_1 \\ y = y_1 + s u_2 + t v_2 \quad ; s,\ t \in \Re \\ z = z_1 + s\,u_3 + t\,v_3 \end{cases}$$

Son las **ecuaciones paramétricas** de un plano.

Ejemplo 7

Encontrar las ecuaciones paramétricas de un plano que sea paralelo al vector $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ y que contenga a los puntos $P_1(0, -1, 3)$ y $P_2(1, 3, -2)$.

Determinamos el segundo vector con los puntos dados, esto es: $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (1, 3, -2) - (0, -1, 3) = (1, 4, -5)$ y utilizamos como punto de paso cualquiera de los dos puntos dados, por ejemplo P_1.

Entonces $\begin{cases} x = -s + t \\ y = -1 + 2s + 4t \ ; s,\ t \in \Re \\ z = 3 - 2s - 5t \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas buscadas.

Actividad 2

1. El pie de la perpendicular trazada desde el punto $A(3, 6, 2)$ a un plano es el punto $B(1, 2, 6)$. Halla una ecuación de dicho plano y encuentra las coordenadas de los puntos donde intercepta a los ejes coordenados.

2. Los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 6)$ son vértices de un paralelepípedo. Sabiendo que los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ determinan tres aristas del mismo, encuentra:

a) las coordenadas de los restantes vértices,

b) las ecuaciones de los planos que contienen a las caras del paralelepípedo.

3. Represente gráficamente los siguientes planos:

$\pi_1)\ 2x+y-1=0$ $\quad\pi_2)\ x-4y=0$ $\quad\pi_3)\ x-z=0$ $\quad\pi_4)\ 3y=0$

$\pi_5)\ 2z+3=0$ $\quad\pi_6)\ x=2$ $\quad\pi_7)\ 2y+4z-4=0$ $\quad\pi_8)\ 4x+6y+3z=12$

4. Halla una ecuación del plano que contiene a los puntos $P(2,1,-1)$ y $Q(-1,0,3)$, y que es perpendicular al plano de ecuación $-x+2y+z=5$.

¿Qué condición deben verificar P y Q para que no haya solución única?

5. Halla una ecuación del plano que contiene al punto $P(2,3,-1)$ y que es simultáneamente perpendicular a los planos de ecuaciones $x+2y+4z-4=0$ y $3x+y-2z=7$.

6.a) Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al origen de coordenadas y es paralelo a los vectores $\bar{u}=(1,2,1)$ y $\bar{v}=(1,0,3)$.

b) Obtiene, a partir de las ecuaciones paramétricas, una ecuación general cartesiana.

3.Ángulo que forman entre sí dos planos

Supongamos tener dos planos que se corten. De la geometría elemental, sabemos que se llama ángulo entre los mismos, al ángulo de la sección normal del diedro determinado por ambos planos. Dicha sección normal se obtiene interceptando ambos planos con otro normal a ellos.

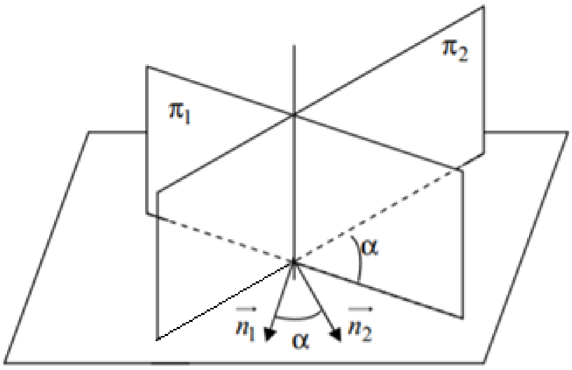


Figura 11

Supongamos que las ecuaciones de los planos son:

$$\pi_1)\ a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0;\ \overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1,c_1)\ \text{y}\ \pi_2)\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0;\ \overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$$

El ángulo formado por $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ coincide **con uno** de los ángulos de la sección normal (el otro ángulo es el suplementario).

Recordando que:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = |\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|\,cos\,\alpha$$

Obtenemos:

$$cos\,\alpha=\frac{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{a_1\,a_2+b_1\,b_2+c_1\,c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\,\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}\ \rightarrow\ \alpha\ (10)$$

3.1 Condición de perpendicularidad entre planos

$$\pi_1\perp\pi_2\ \Leftrightarrow\ \vec{n}_1\ \perp\ \vec{n}_2\ \Leftrightarrow\ \vec{n}_1\ \times\ \vec{n}_2=0\ \Leftrightarrow a_1\,a_2+b_1b_2+c_1\,c_2=0$$

Luego esta última es una **condición necesaria y suficiente de perpendicularidad** entre los planos π_1 y π_2.

3.2 Condición de paralelismo entre planos

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = k\,\overrightarrow{n_2},\ k \neq 0 \Leftrightarrow a_1 = k\,a_2,\ b_1 = k\,b_2,\ c_1 = k\,c_2,\ k \neq 0$$

Luego esta última es una **condición necesaria y suficiente de paralelismo** entre los planos π_1 y π_2 .

Como ya hemos visto, si $a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0, c_2 \neq 0$, esta condición puede escribirse $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Si para los planos π_1 y π_2 antes mencionados se cumple que:

$$a_1 = k\,a_2,\ b_1 = k\,b_2,\ c_1 = k\,c_2, d_1 = kd_2,\ k \in \Re\ ,$$

Entonces **los planos son coincidentes.**

Si $a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, d_2 \neq 0$, la condición anterior puede escribirse $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$.

Ejemplo 8

Dados los planos de ecuaciones: $2x + 3y - z = -2$ y $-x + 2y + kz = 1$, calcular k de modo que resulten perpendiculares.

Aplicamos la condición (11):

$$2(-1) + 3.2 - k = 0 \text{ de donde } k = 4$$

Actividad 3

1. Determina los ángulos que forman los planos $\pi)\ x + y = 1$ y $\sigma)\ y + z = 2$.

2. Halla el coseno del ángulo agudo que forman los planos de ecuaciones $x - 3y + z = 4$ y $2x + y + 7z = 1$.

4. Distancia de un punto a un plano

Sea el plano π de ecuación $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ y el punto $P_1(x_1; y_1; z_1) \notin \pi$

Recordemos que la distancia del punto P_1 al plano π , es la longitud δ del segmento determinado por P_1 y el punto R, intersección de la recta perpendicular a π que contiene a P_1 (a R se lo llama *pie de la perpendicular).*

Evidentemente si $P_1 \in \pi$ es $\delta = 0$.

Hallaremos ahora una expresión que nos permita calcular, en función de los datos, la distancia $\delta(P_1, \pi)$,si $P_1 \notin \pi$.

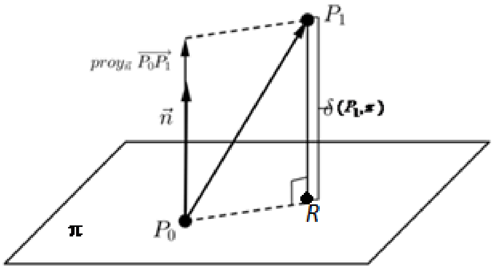


Figura 12

Tomemos $P_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi$, luego las coordenadas de P_0 verifican las ecuaciones de π :

$$a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d = 0$$

observamos en la figura que δ se puede obtener como $\left|proy_{\vec n}\,\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \frac{\vec n}{|\vec n|}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec n\right|}{|\vec n|}$,

Teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \text{ y } \vec n = (a, b, c)$$

se tiene que $\delta = \dfrac{|a(x_1-x_0)+b\,(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|a\,x_1+b\,y_1+c\,z_1-(a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Como $d=-(a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0)$, luego:

$$\boxed{\delta(P_1,\pi)=\frac{|a\,x_1+b\,y_1+c\,z_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (11)}$$

Observar que si $P_1\equiv 0$, entonces $\boxed{\delta(O,\pi)=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$, como habíamos obtenido anteriormente.

Ejemplo 9

Dado el plano $\pi)\ 2x-y+z=3$, hallar la distancia del punto $P_1(-1;\,2;\,3)$ al mismo.

Siendo $\vec{n}=(2;\,-1;\,1)$; $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$, entonces:

$$d=\left|\frac{2}{\sqrt{6}}(-1)+\frac{-1}{\sqrt{6}}\,2+\frac{1}{\sqrt{6}}\,3-\frac{3}{\sqrt{6}}\right|=\left|\frac{-4}{\sqrt{6}}\right|=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

4.1 Distancia entre dos planos paralelos

Con el resultado obtenido en el punto anterior queda resuelto el problema de hallar la distancia entre dos planos paralelos. Bastará calcular la distancia de un punto, perteneciente a uno de ellos, al otro plano.

Ejemplo 10

Hallar la distancia entre los planos $\pi_1)\ 2x-y+3z=-1$ y $\pi_2)\ 4x-2y+6z=5$.

Se verifica que $\pi_1 \,//\, \pi_2$ pues $\dfrac{2}{4}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{3}{6}$.

Tomemos ahora un punto cualquiera de π_2, para ello fijamos arbitrariamente dos coordenadas, y calculamos la tercera de modo que verifique la ecuación de π_2, por ejemplo $P_1(1;\,1;\,z_1)$.

Reemplazando las coordenadas de P_1 en la ecuación: $\pi_2)\ 4-2+6z_1=5$ de donde $z_1=\frac{1}{2}$.

Basta ahora calcular la distancia del punto $P_1(1,1,\frac{1}{2})$ al plano π_1, problema que ya conocemos.

Se obtiene que $\delta=\frac{7}{2\sqrt{14}}$

Actividad 4

1. Determina α para que los planos $\pi)\ x+2y+z=1$ y $\sigma)\ 2x+\alpha y+2z=5$ sean:

a) perpendiculares,
b) paralelos. En este caso calcula la distancia entre los mismos.

2. Halla una ecuación del plano que es paralelo al plano de ecuación $-5x+y-2z+8=0$, sabiendo que ambos planos equidistan del punto $P(-1,1,4)$.

3. Calcula la distancia del punto $A(1,0,-2)$ al plano $\pi)\ 2x-4y+3z=1$ y encuentra el punto de π que está a dicha distancia de *A*.

5. Intersección de tres planos

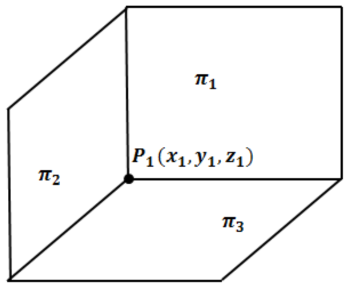
Sean los planos de ecuaciones:
$$\begin{array}{l} \pi_1)\ a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0 \\ \pi_2)\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0 \\ \pi_3)\ a_3\,x+b_3\,y+c_3\,z+d_3=0 \end{array} \qquad (12)$$

Se trata de determinar el conjunto:

$$\left\{(x,y,z)\in\Re^3 / a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0,\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0,\ a_3\,x+b_3\,y+c_3\,z+d_3=0\right\}=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$$

Se busca resolver el sistema (12) de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por alguno de los métodos de cálculo ya conocidos (sustitución, igualación, cramer, gauss, etc.).

Un sistema como el que nos ocupa puede ser:



a. compatible (si tiene solución)o

b. incompatible (si no tiene ninguna solución).

Si el sistema (12) resultara **compatible**, pueden presentarse dos casos:

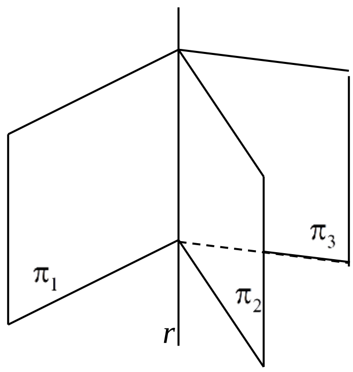
a1. Sistema **compatible** con **única solución**.

$$\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\left\{P_1\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)\right\}$$

geométricamente los tres planos tienen en común un único punto $P_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$.

a2. Sistema**compatible** con **infinitas soluciones**.

geométricamente pueden ocurrir los siguientes tres casos:

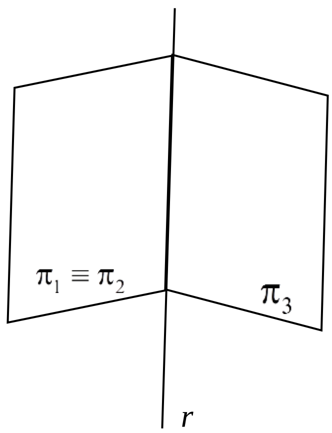


a2.1. Los tres planos se intersecan en una recta*r*. Cualquier punto de esa recta *r* satisface las ecuaciones de los tres planos.

$$\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\left\{P\left(x;\ y;\ z\right)/\ P\in r\right\}$$

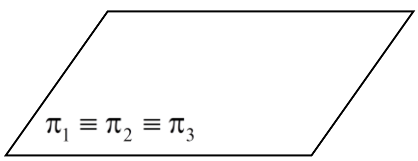
a2.2. Dos planos son coincidentes y el tercero los corta en una recta *r*. Cualquier punto de esa recta *r* satisface las ecuaciones de los tres planos.

$$\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\left\{P\left(x;\ y;\ z\right)/\ P\in r\right\}$$



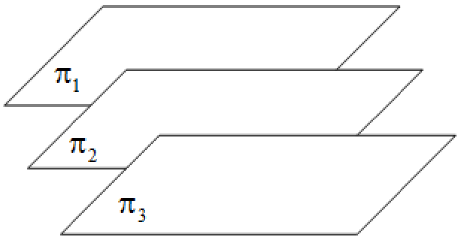
a2.3. Los tres planos son coincidentes.

$$\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\pi_1$$

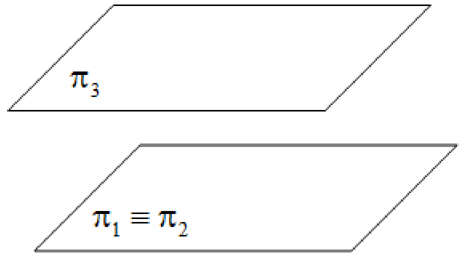


b. Si el sistema (12) resultara in**compatible,** esto es $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\varnothing$, pueden presentarse cuatro casos:

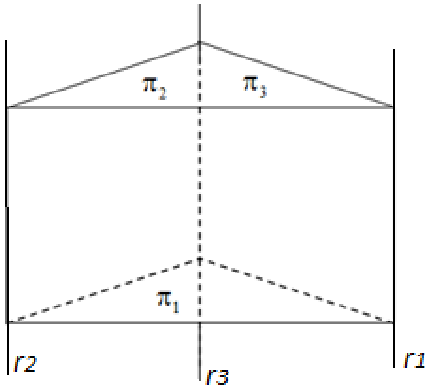
b1. Los tres planos son paralelos



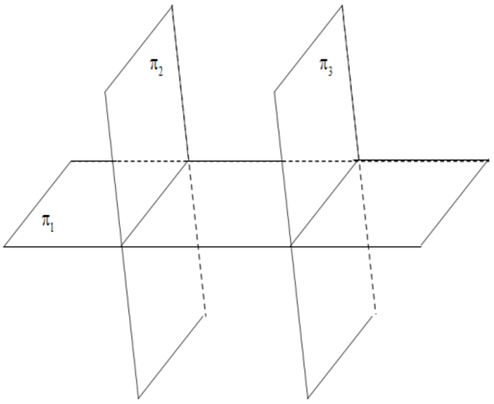
b**2.** Dos planos coincidentes y el tercero paralelo a ellos



b3. Los tres planos se cortan según tres rectas paralelas



b**4**. Dos planos son paralelos y el tercero los interseca a ambos.

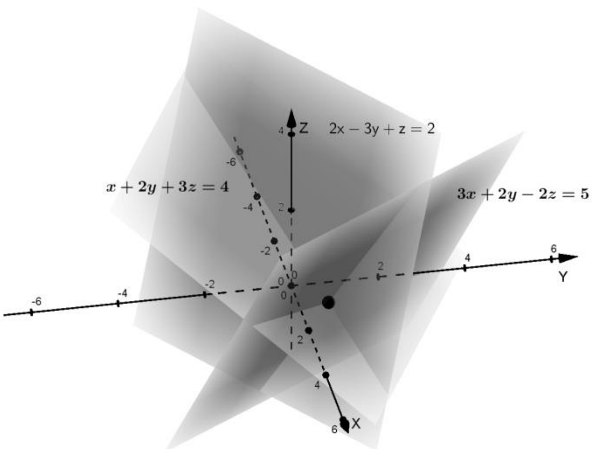


Ejemplo 11

Hallar si es posible la intersección de los tres planos cuyas ecuaciones se dan

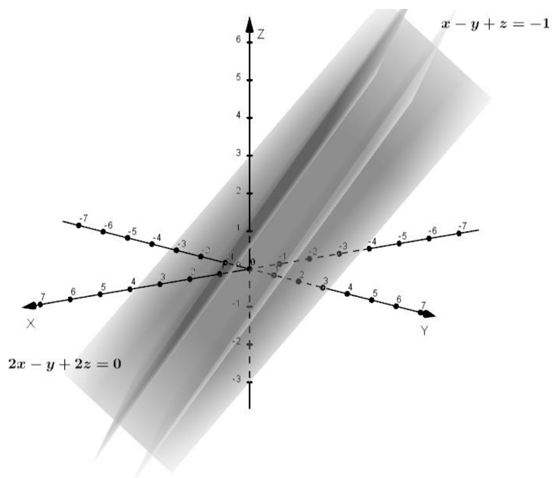
a) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-3y+z=2 \\ 3x+2y-2z=5 \end{cases}$

Analizando las ecuaciones podemos concluir que se trata de un sisma **compatible.** Mediante un método de resolución adecuado llegamos a que tiene solución única, dada por el punto $P_1\left(\frac{91}{57};\frac{31}{57};\frac{25}{57}\right)$. Esto quiere decir que los tres planos se intersectan en un único punto P_1 (caso **a1**).

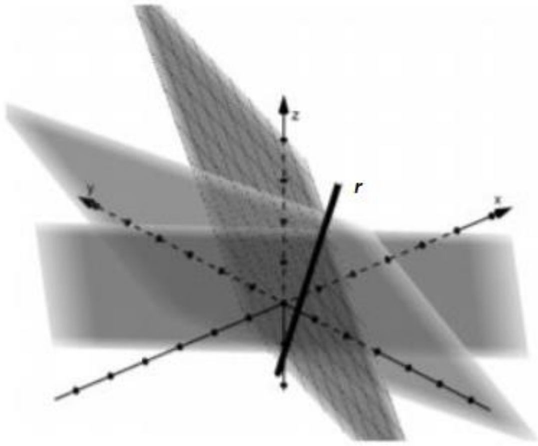


b) Dado el sistema $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x-y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=2 \end{cases}$

Observando las ecuaciones del sistema, vemos que la primera y la tercera representan a dos planos paralelos. Ello implica que el sistema es **incompatible (**caso **b4**).



c) Dado el sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + 4z = 1 \end{cases}$



Es posible verificar que el sistema es **compatible con infinitas soluciones** y que los tres planos se cortan según una recta en el espacio dada el conjunto de puntos

$r = \left\{ \left(x = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}t, y = -\frac{1}{4} - \frac{7}{8}t, z = \ t \right) \ t \in R \right\}$(caso **a2.1**)

Actividad 5

Encuentra la intersección entre los tres planos dados en cada ítem, y en cada caso determina su el sistema es compatible (determinado o indeterminado) o incompatible. *(Recuerda que puedes hacer un análisis previo de las ecuaciones, para ver si es necesario realmente resolver el sistema de ecuaciones)*

$a)\begin{cases} \pi_1)\ 4x + y + 3z + 6 = 0 \\ \pi_2)\ x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z + 8 = 0 \\ \pi_3)\ 24x + 6y + 18z + 2 = 0 \end{cases}$ $b)\begin{cases} \pi_1)\ x - y + z - 1 = 0 \\ \pi_2)\ x + 2y - z - 1 = 0 \\ \pi_3)\ x - 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ $c)\begin{cases} \pi_1)\ \frac{1}{7}x + y + \frac{1}{21}z + 2 = 0 \\ \pi_2)\ x + 7y + \frac{1}{3}z + 14 = 0 \\ \pi_3)\ 3x + 21y + z + 42 = 0 \end{cases}$

Actividad complementaria

1. .Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a) Los puntos $A(5,1,1)$, $B(-1,-2,1)$, $C(3,3,3)$ y $D(16,-1,-4)$ son coplanares.

b) $x + y = 0 \quad \forall z$ es una ecuación del plano coordenado XY .

c) La ecuación $(8x + y + z).(x - y + z - 2) = 0$ representa un par de planos que se interceptan en una recta en el espacio.

d) El plano de ecuación $-3x + 2y + 5z = 2$ se encuentra a dos unidades del origen de coordenadas.

e) Los planos de ecuaciones $x + y + z = 1$ y $2x + 2y + 2z = 2$ no tienen puntos en común.

f) Los puntos $A(2,1,5)$, $B(8,-2,0)$ y $C(14,-5,-5)$ determinan un único plano.

g) La ecuación $x.y.z = 0$ se satisface para todos los puntos de los planos coordenados.

h) $x - 3y + 8z - 15 = 0$ es una ecuación de un plano perpendicular al segmento de extremos $A(3,2,-7)$ y $B(5,-4,9)$ que contiene al punto medio del segmento.

i) $z = 9$, cualesquiera sean x e y , es una ecuación del plano perpendicular al eje Z que contiene al punto $A(-4,2,9)$.

j) Si dos planos son paralelos, sus trazas sobre cualquiera de los planos coordenados son dos rectas paralelas.

k) $3x + 4z = 0 \quad \forall y$ es una ecuación de un plano que contiene al eje Y y al punto $P(8,4,-6)$.

2. Halla el volumen del tetraedro formado por el plano $6x + 7y + 14z - 42 = 0$ y los planos coordenados.

3. Construye el prisma triangular formado por los planos coordenados y por los planos de ecuaciones $x + 2y - 4 = 0$ y $z - 5 = 0$. Calcula su volumen.

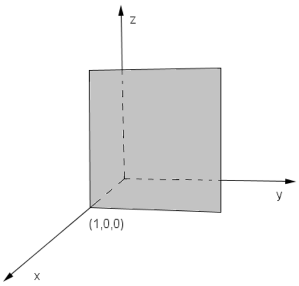
4. Halla y reconoce la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los punto $A(1,1,1)$ y $B(3,3,3)$.

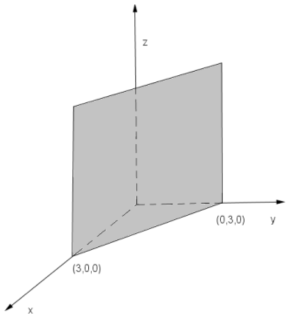
5. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos A(2,0,-2), B(3,4,1) y es perpendicular al plano de ecuación $x + y - z + 2 = 0$.

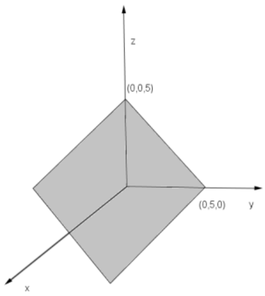
Respuestas

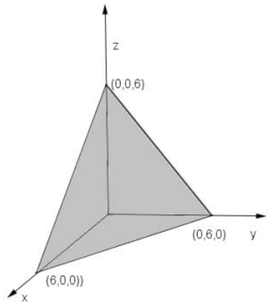
Actividad 1

1.a) $x=1$ b) $x+y-3=0$ c) $y+z-5=0$ d) $x+y+z-6=0$









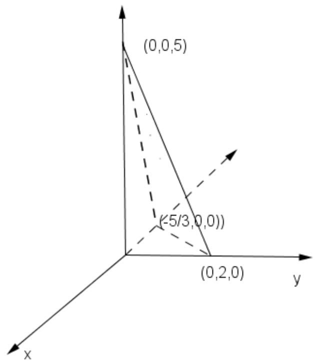
2. a)$\pi_a)\ x+2y+9z-34=0$ b) $\pi_b)\ 5x-3y+z-2=0$ c)$\pi_c)\ -x+y+z+3=0$

d)$\pi_d)\ x+y-4z-25=0$ e) $\pi_e)\ y-6=0\ \forall x;\ \forall y$ f)$\pi_f)\ x-z-1=0$ g)

$\pi_g)\ x+4y+7z+16=0$

3.a) $-6x+5y+2z-10=0$ b) $\frac{x}{-5/3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-5}=1$

c) $\frac{-6}{\sqrt{65}}x+\frac{5}{\sqrt{65}}y+\frac{2}{\sqrt{65}}z-\frac{10}{\sqrt{65}}=0$ $\delta(\pi,0)=\left|\frac{-10}{\sqrt{65}}\right|=\left|\frac{10}{\sqrt{65}}\right|$



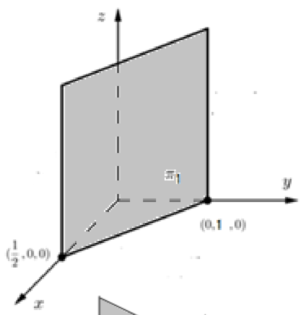
Actividad 2

1. $x+2y-2z+7=0$ $I_x(-7,0,0)$ $I_y(0,-\frac{7}{2},0)$ $I_z(0,0,\frac{7}{2})$

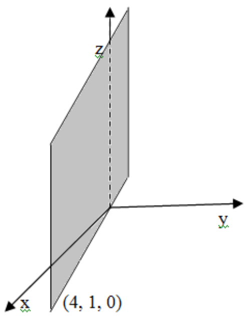
2. a) $D(3,2,0)$, $E(3,0,6)$, $F(0,2,6)$ y $G(3,2,6)$.

b) $x=0\ \forall y,\forall z;$ $x=3\ \forall y,\forall z;$ $y=0\ \forall x,\forall z;$ $y=2\ \forall x,\forall z;$ $z=0\ \forall x,\forall y;$ $z=6\ \forall x,\forall y$

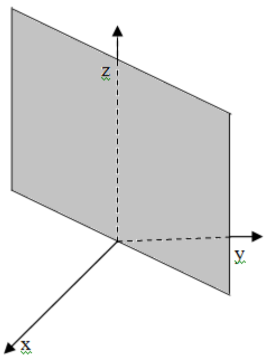
3.a)



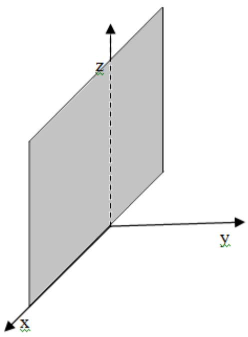
b)



c))



d)



4. $-9x - y - 7z + 12 = 0$

Si P y Q son los extremos de un vector paralelo al vector $\overline{n} = (-1,2,5)$ entonces el problema admite "infinitas" soluciones.

5. $-8x + 14y - 5z - 31 = 0$

6. a) $\begin{cases} x = s + t \\ y = 2s \qquad s,t \in \Re \\ z = s + 3t \end{cases}$ b) $3x - y - z = 0$

Actividad 3

1. $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$

2. $\frac{6}{\sqrt{594}}$

Actividad 4

1. a) $\alpha = -2$ b) $\alpha = 4$ $d = \frac{3}{\sqrt{24}}$

2. $-5x + y - 2z - 4 = 0$

3. $d(A,\pi) = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $P(\frac{39}{29}, -\frac{20}{29}, -\frac{43}{29})$

Actividad 5

a) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ (sistema incompatible)

b) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \left\{\left(1 - \frac{1}{3}t,\ \frac{2}{3}t, t\right), t \in R\right\}$ (se cortan en una recta, sistema compatible indeterminado)

c) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1$ (se cortan en un plano, sistema compatible indeterminado)

Actividad complementaria

1. a) *V*. Las coordenadas del punto *D* satisfacen la ecuación del plano determinado por los puntos *A*, *B* y *C*. También puede justificarse a través del producto mixto.

b) *F*. Se trata de un plano proyectante sobre el plano coordenado *XY* que contiene al eje *Z*.

c) *V*. El producto de dos factores es igual a cero cuando al menos uno de los mismos es igual a cero. La ecuación representa un par de planos no paralelos ni coincidentes que se interceptan en una recta.

d) *F*. La distancia al origen de coordenadas es igual a $\frac{2}{\sqrt{38}}$

e) *F*. Las ecuaciones dadas son equivalentes, es decir tienen el mismo conjunto solución. Por lo tanto representan a un mismo plano.

f) *F*. Los puntos están alineados, es decir pertenecen a una misma recta. Por lo tanto existen "infinitos" planos que los contienen.

g) *V*. El producto de tres factores es igual a cero cuando al menos uno de los mismos es igual a cero.

h) *V*. El vector determinado por los puntos $A(3,2,-7)$ y $B(5,-4,9)$ es perpendicular al plano y el punto medio $M(4,-1,1)$ satisface la ecuación.

i) *V*. El plano es paralelo al coordenado *XY*, por lo tanto todos sus puntos tienen la tercera coordenada constante. Siendo $A(-4,2,9)$ un punto del plano, su ecuación es $z = 9$ cualesquiera sean x e y.

j) *V*. Surge inmediatamente de escribir las ecuaciones de los planos y sus trazas.

k) *V*. Las coordenadas del punto P y las coordenadas de todos los puntos del eje Y satisfacen la ecuación dada.

2. 21

3. 20

4. **e**s un plano de ecuación $x + y + z - 6 = 0$.

5. $-7x + 4y - 3z + 8 = 0$