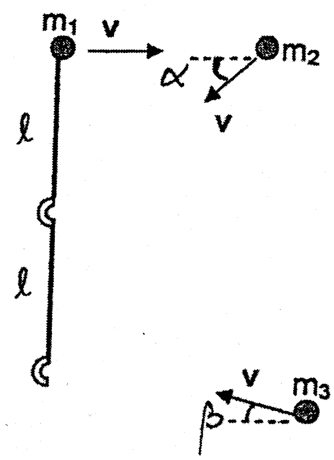
tarea $2^{da}$ ecuación cardinal

**2** Tres masas constituyen el modelo de un sistema físico en estudio. Una de ellas ($m_1$) está vinculada a un alambre de masa despreciable que posee dos ganchos. Este dispositivo se mueve con velocidad v. Ambos ganchos atrapan en el mismo instante partículas de masas $m_2$ y $m_3$ respectivamente.

a) Describir el movimiento del sistema un instante después de que las masas fueran atrapadas, calculando las velocidades pertinentes.

b) ¿Cuál es la dirección de movimiento del centro de masa del sistema?

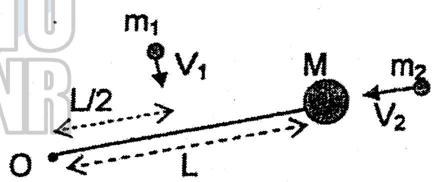



**Datos:**

$m_1 = m = 1kg$ $\alpha=45°$ $\beta=30°$

$m_2 = 2m$ $m_3 = 3m$ $\ell = 0{,}50$ m $v=2m/s$

**3** Una barra (de masa despreciable) posee una masa M adherida en uno de sus extremos y en el otro está fija a un vínculo O. Inicialmente se encuentran en reposo sobre una mesa horizontal sin roce. En determinado instante chocan simultáneamente las partículas $m_1$ y $m_2$ de modo tal que la $m_1$ queda adherida a la barra y la $m_2$ a la masa M. La dirección de $\mathbf{v_1}$ es perpendicular a la barra y la de $\mathbf{v_2}$ es colineal con la barra.




a) Explicar si se conserva alguna magnitud, cuál y por qué.

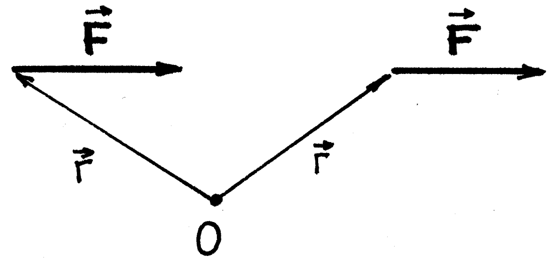
b) Hallar la posición del centro de masa del sistema en el instante del choque.

c) Describir el movimiento del sistema luego del choque, calculando las velocidades correspondientes.

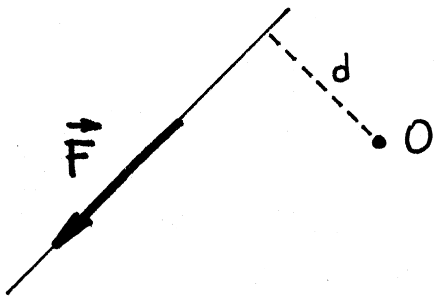
$$M = 400g \qquad m_1 = m_2 = m = 200\text{ g} \qquad L = 1\text{ m} \qquad v_1 = v_2 = 1{,}5\text{ m/s}$$

| LINEAL | ANGULAR |
|---|---|
| posición : $x$ | $\theta$ : posición angular |
| velocidad : $v$ | $\omega$ : velocidad angular |
| aceleración : $a$ | $\alpha$ : aceleración angular |
| $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ | $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ |
| fuerza : $\vec{F}$ | $\vec{\tau}_0$ ó $\vec{M}_0$ : torque o momento c/ resp. al pto O |
| masa : $m$ | $I_0$ : momento de inercia c/ resp. al pto O |
| cant. de movim. : $\vec{P}$ | $\vec{l}_0$ : momento angular c/ resp. al pto O |
| $\vec{P} = m . \vec{v}$ | $\vec{l}_0 = I_0 . \vec{\omega}$ |
| $\sum \vec{F} = m . \vec{a}$ | $\sum \vec{M}_0 = I_0 . \vec{\alpha}$ |
| $\underbrace{\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}_{1^{er} \text{ E.C.}}$ | $\underbrace{\sum \vec{M}_0^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}}_{2^{da} \text{ E.C.}}$ |

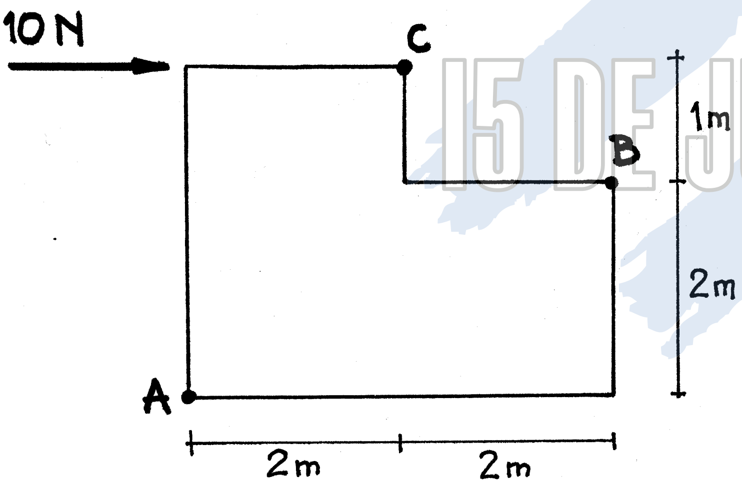
# MOMENTO o TORQUE




definición : $\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}}$ [N.m]




en módulo : $|\vec{M}_o| = F.d$




$M_A = 10\,N . 3m = 30\,Nm$

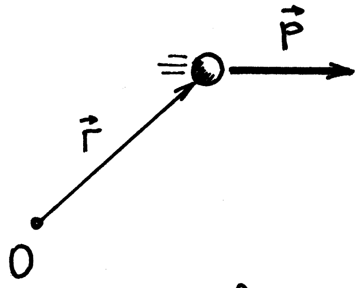
$M_B = 10\,N . 1m = 10\,Nm$

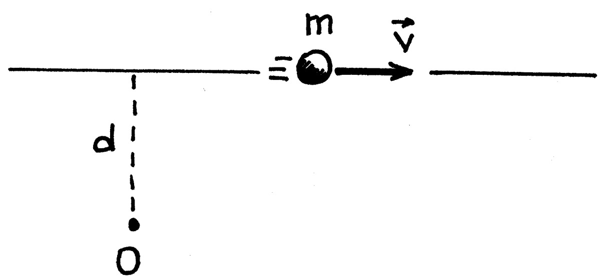
$M_C = 10\,N . 0 = 0$

una fuerza CENTRAL
no produce momento

¡NO EXISTE!

# MOMENTO ANGULAR



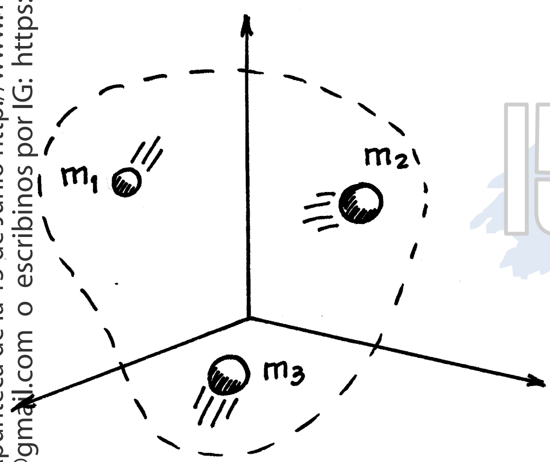

definición

$$\boxed{\vec{\ell}_o = \vec{r} \wedge \vec{p}} \qquad \left[Kg\,\frac{m^2}{s}\right]$$

$$\boxed{|\vec{\ell}_o| = m.v.d}$$

$$\boxed{\vec{\ell}_o = m.v.d.(\pm\vec{k})}$$

para un sistema de partículas vale :



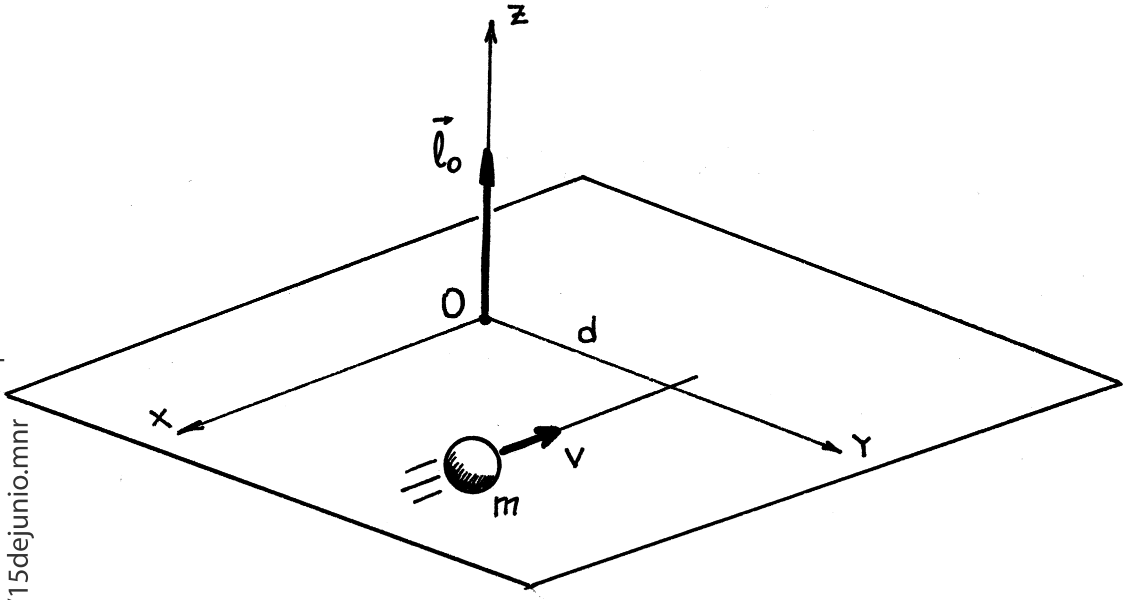

$\vec{L}_o$ = momento angular total

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i$$



$$\boxed{\sum \vec{M}_o^{ext} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}} \Rightarrow$$ 2$^{da}$ ecuación cardinal

COROLARIO N° 3 : $\boxed{\text{si } \sum \vec{M}_o^{ext} = \vec{0} \text{ entonces } \vec{L}_o \text{ es constante}}$



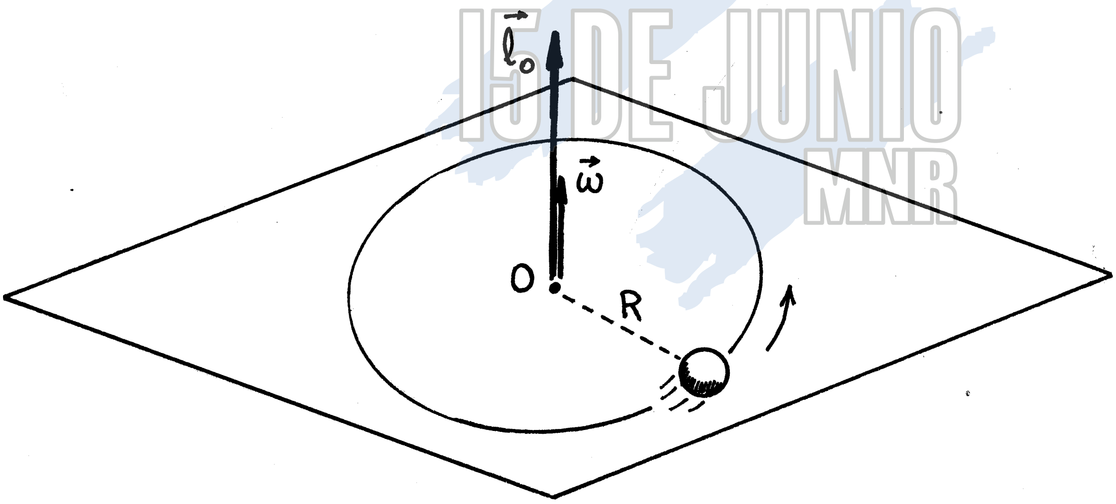

$m = 2\ kg$

$v = 3\ m/s$

$d = 4\ m$

$$|\vec{l}_o| = m \cdot v \cdot d = 2\ kg \cdot 3\ m/s \cdot 4\ m = \mathbf{24\ kg\frac{m^2}{s}}$$

$$\vec{l}_o = (0 ; 0 ; 24)\ kg\frac{m^2}{s} = \mathbf{24\ \vec{k}}\ \left[kg\frac{m^2}{s}\right]$$




$$\vec{l}_o = m \cdot v \cdot d \cdot \vec{k}$$
$$= m \cdot (\omega \cdot R) \cdot R \cdot \vec{k}$$
$$= m \cdot \omega \cdot R^2 \cdot \vec{k}$$
$$= m \cdot R^2 \cdot \underbrace{\omega \cdot \vec{k}}_{\text{esto es } \vec{\omega}}$$

$$\boxed{\vec{l}_o = m R^2 \cdot \vec{\omega}}$$

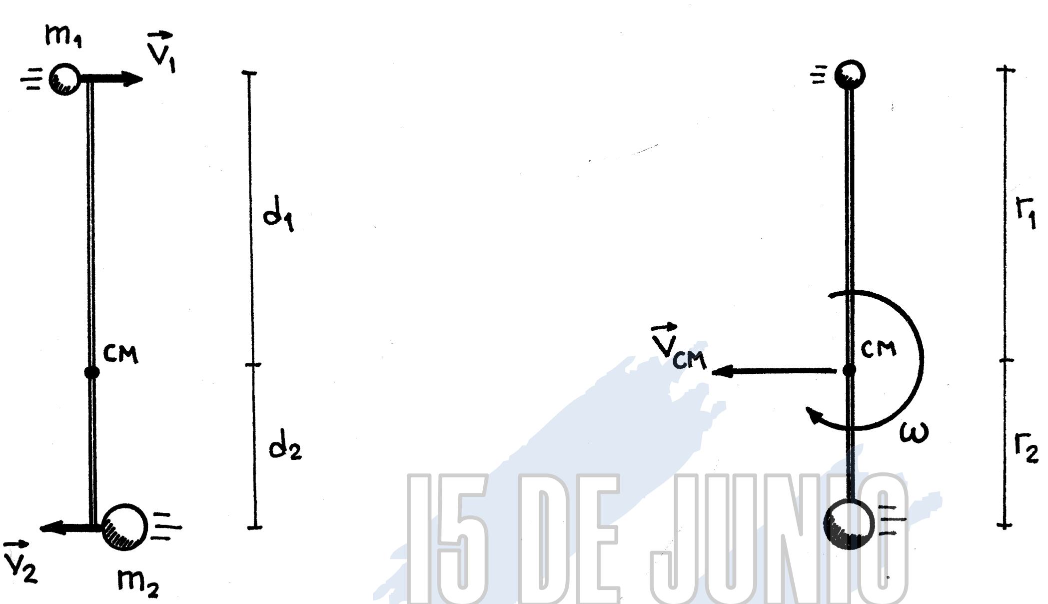
Ej) Dos patinadores de 60 Kg y 80 Kg avanzan en direcciones paralelas pero de distinto sentido, a $5\,\frac{m}{s}$ y $4\,\frac{m}{s}$ respectivamente.

Se sujetan al mismo tiempo de una barra de 3,5 m de largo.

Describir el movimiento posterior del sistema.

---

"antes" "despues"




$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P}(\text{antes}) = \vec{P}(\text{despues})}$$

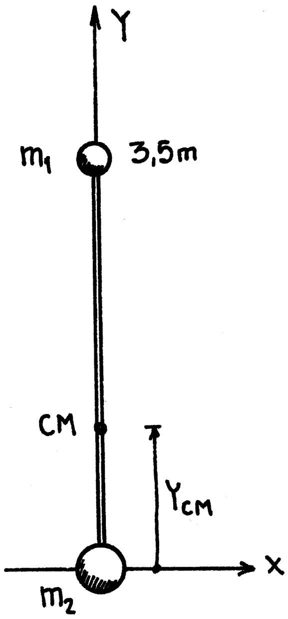
$$m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{V}_{CM}$$

$$60\,Kg \cdot (5;0)\,\frac{m}{s} + 80\,Kg \cdot (-4;0)\,\frac{m}{s} = 140\,Kg \cdot \vec{V}_{CM}$$

$$(300;0)\,Kg\frac{m}{s} + (-320;0)\,Kg\frac{m}{s} = 140\,Kg \cdot \vec{V}_{CM}$$

$$\frac{(-20;0)\,Kg\frac{m}{s}}{140\,Kg} = \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{V}_{CM} = (-0{,}14;0)\,\frac{m}{s} \quad \checkmark$$




posición del CM

$$\boxed{Y_{CM} = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2}{M}}$$

$$= \frac{60\,kg \cdot 3{,}5\,m + 80\,kg \cdot 0}{140\,kg} = \mathbf{1{,}5\,m}$$

$$\sum \vec{M}^{ext}_{CM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{CM}\,(\text{antes}) = \vec{L}_{CM}\,(\text{despues})}$$

$$m_1 \cdot v_1 \cdot d_1 \cdot (-\vec{k}) + m_2 \cdot v_2\, d_2 \cdot (-\vec{k}) = m_1 r_1^2 \cdot \vec{\omega} + m_2 r_2^2 \cdot \vec{\omega}$$

$$60\,kg \cdot 5\,\frac{m}{s} \cdot 2\,m \cdot (-\vec{k}) + 80\,kg \cdot 4\,\frac{m}{s} \cdot 1{,}5\,m\,(-\vec{k}) = 60 \cdot 2^2 \cdot \vec{\omega} + 80 \cdot 1{,}5^2 \cdot \vec{\omega}$$

$$-600\,kg\,\frac{m^2}{s} \cdot \vec{k} - 480\,kg\,\frac{m^2}{s} \cdot \vec{k} = 240\,kg\,m^2 \cdot \vec{\omega} + 180\,kg\,m^2 \cdot \vec{\omega}$$

$$-1080\,kg\,\frac{m^2}{s} \cdot \vec{k} = 420\,kg\,m^2 \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{-1080\,kg\,\frac{m^2}{s} \cdot \vec{k}}{420\,kg\,m^2} = \vec{\omega}$$

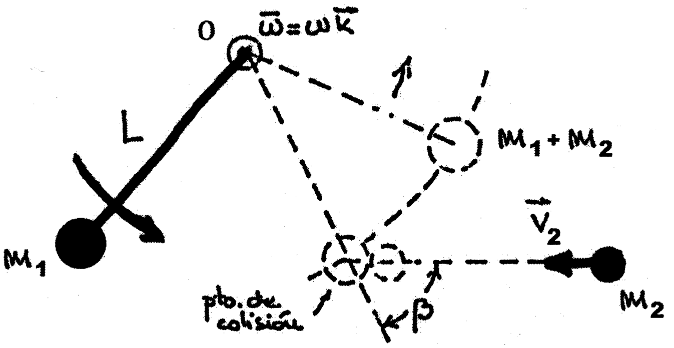
$$\mathbf{-2{,}57\,s^{-1} \cdot \vec{k} = \vec{\omega}}$$ ✓

Una masa $\mathbf{m_1}$ está vinculada a una varilla rígida de masa despreciable que está girando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un punto fijo O.

En un instante dado colisiona plásticamente con otra masa $\mathbf{m_2}$ que tiene una velocidad $\mathbf{v_2}$.

a) Indicar qué magnitudes físicas se conservan.

b) Calcular la velocidad angular final del sistema.




$M_1 = 1{,}5\ kg$

$M_2 = 0{,}5\ kg$

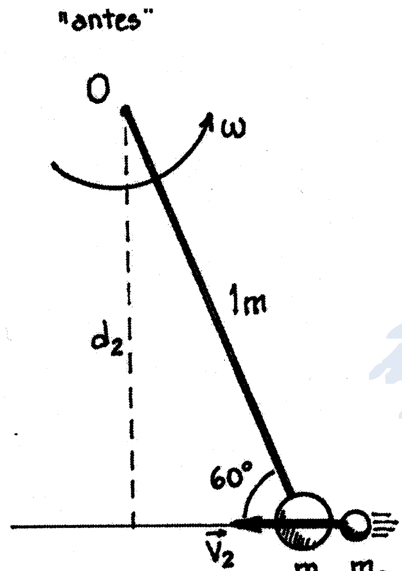
$\vec{\omega} = 1{,}5\ rad/s\ \vec{K}$

$V = 2\ m/s$

$\beta = 60°$

$L = 1\ m$

---




$$\sum \vec{F}^{ext} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{P} \neq cte$$

$$\sum \vec{M}_0^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = cte$$

$$\boxed{\vec{L}_0(\text{antes}) = \vec{L}_0(\text{despues})}$$

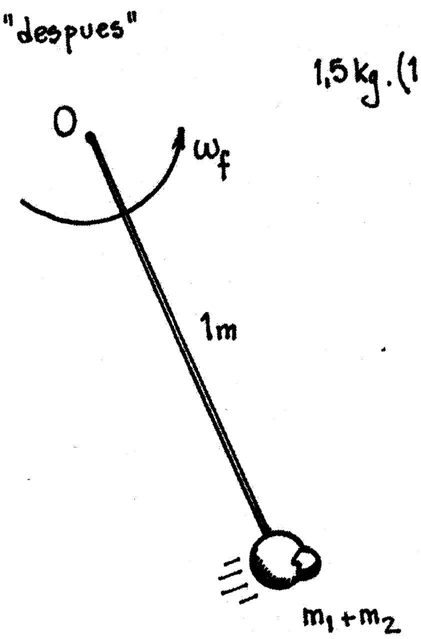
$$m_1 r_1^2 \vec{\omega} + m_2 V_2 d_2 . (-\vec{K}) = (m_1 + m_2) . r^2 . \vec{\omega}_f$$

$$1{,}5\,kg . (1m)^2 . 1{,}5 \tfrac{rad}{s} . \vec{K} + 0{,}5\,kg . 2 \tfrac{m}{s} . 0{,}87\,m\,(-\vec{K}) = 2\,kg . (1m)^2 . \vec{\omega}_f$$

$$2{,}25 . \vec{K} + 0{,}87 . (-\vec{K}) = 2 . \vec{\omega}_f$$

$$1{,}38 . \vec{K} = 2 . \vec{\omega}_f$$

$$\vec{\omega}_f = 0{,}69 \tfrac{rad}{s} . \vec{K} \ \checkmark$$



# 4

Ambas masas se desplazan sobre un plano horizontal sin rozamiento y chocan al mismo tiempo con la varilla (vinculada al plano por un clavo) quedando unidas a ella:

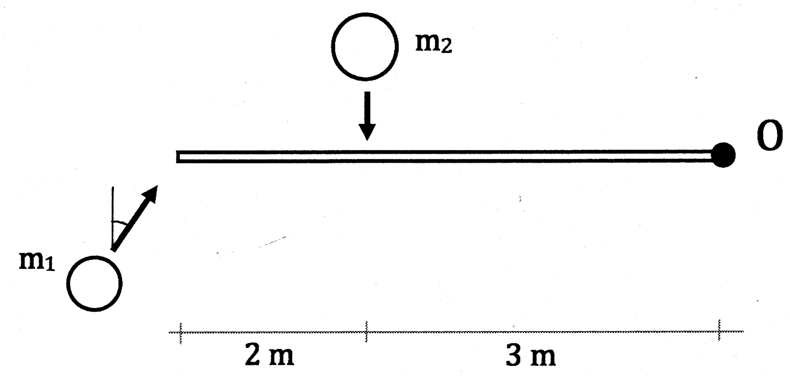
a) ¿Cuál es la velocidad angular con la que el sistema queda girando?

b) ¿Qué fuerza ejerce el clavo sobre la varilla?

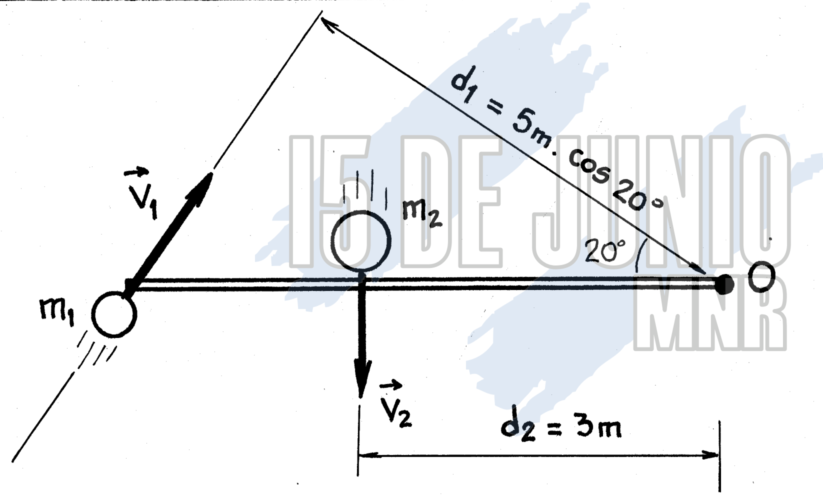
$m_1 = 2$ Kg
$m_2 = 5$ Kg

$v_1 = 10$ m/s
$v_2 = 12$ m/s

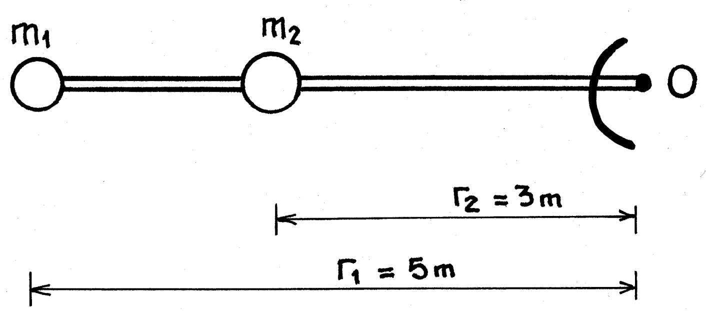
$\theta = 20°$




"antes"




"despues"



hay una fuerza externa que no está equilibrada : la que hace el clavo sobre la varilla $\longrightarrow$ $\sum \vec{F}^{ext} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{P} \neq cte$

pero esa fuerza es central y no produce momento con respecto al clavo $\longrightarrow$ $\sum \vec{M}_0^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = cte$

$$\boxed{\vec{L}_0 \text{(antes)} = \vec{L}_0 \text{(después)}}$$

$$m_1 . v_1 . d_1 . (-\vec{k}) + m_2 . v_2 . d_2 . \vec{k} = m_1 r_1^2 . \vec{\omega} + m_2 r_2^2 . \vec{\omega}$$

$$2kg . 10\frac{m}{s} . (5m . \cos 20°) . (-\vec{k}) + 5kg . 12 m/s . 3m . \vec{k} = 2kg . (5m)^2 . \vec{\omega} + 5kg . (3m)^2 . \vec{\omega}$$

$$94 \ kg\frac{m^2}{s} . (-\vec{k}) + 180 \ kg\frac{m^2}{s} \ \vec{k} = 50 \ kgm^2 . \vec{\omega} + 45 \ kgm^2 . \vec{\omega}$$

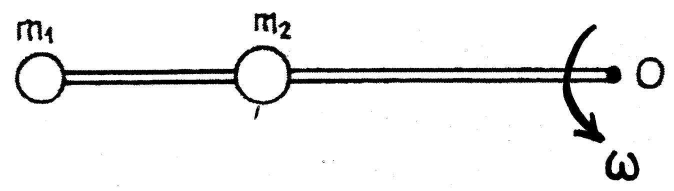
$$86 \ kg\frac{m^2}{s} . \vec{k} = 95 \ kgm^2 . \vec{\omega}$$

$$\frac{86 \ kg\frac{m^2}{s} . \vec{k}}{95 \ kgm^2} = \vec{\omega}$$

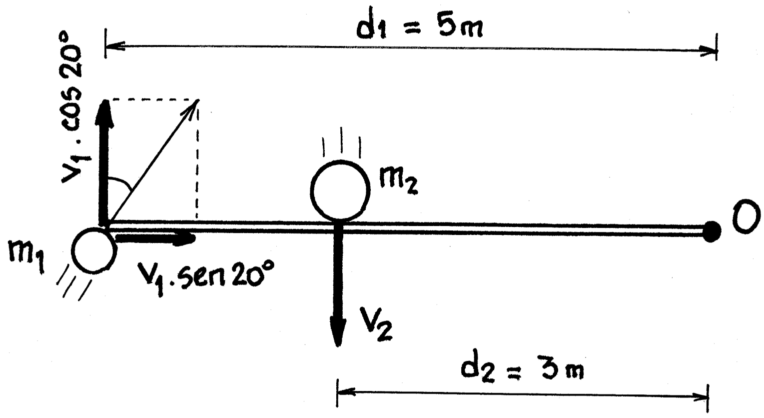
$$0{,}9 \ s^{-1} . \vec{k} = \vec{\omega}$$

el sistema queda rotando en sistema antihorario

"despues"



otra forma: (descomponiendo la velocidad inclinada)



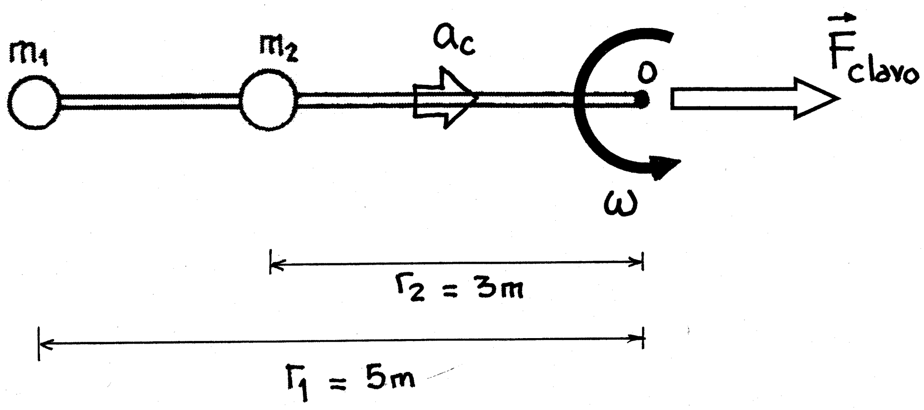

$$\vec{L}_o \text{ (antes)} = m_1 . (V_1 . \cos 20°) . d_1 . (-\vec{k}) + m_2 . V_2 . d_2 . \vec{k}$$

$$= 2\,kg . (10 \tfrac{m}{s} . \cos 20°) . 5m . (-\vec{k}) + 5\,kg . 12 \tfrac{m}{s} . 3m . \vec{k}$$

$$= 94\, kg \tfrac{m^2}{s} . (-\vec{k}) + 180\, kg \tfrac{m^2}{s} . \vec{k}$$

$$= \mathbf{86\, kg \tfrac{m^2}{s} . \vec{k}} \quad ✓$$

momento angular total
del sistema
(antes del impacto)




$$F = m \cdot a_c = m \cdot (\omega^2 r)$$

como hay 2 masas distintas
girando con radios distintos:

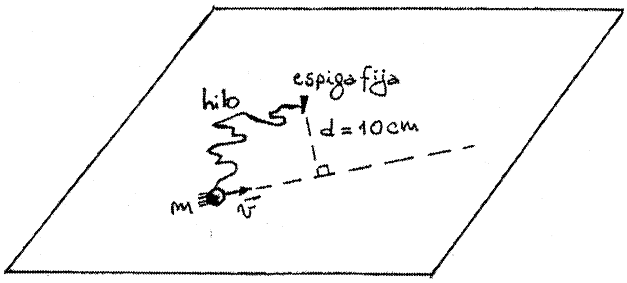
$$\boxed{F_{clavo} = m_1 \cdot (\omega^2 r_1) + m_2 \cdot (\omega^2 r_2)}$$

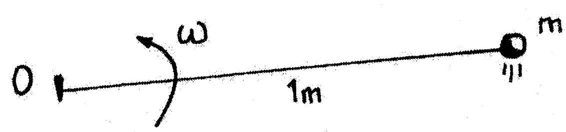
$$= 2kg \cdot (0{,}9^2 \cdot 5m) + 5kg \cdot (0{,}9^2 \cdot 3m)$$

$$= 8{,}1\ N + 12{,}1\ N$$

$$= \mathbf{20{,}2\ N} \checkmark$$

**1** Una masa de 3 gramos está unida a un hilo ligero de 1 m de longitud.
El otro extremo se ata a una espiga fija a una superficie horizontal lisa.
Se la dá a esta masa una velocidad de 10 m/s de tal manera que pasa a 10 cm de la espiga, llevando detrás suyo al hilo.
Cuando la partícula tensa al hilo, comienza a describir una trayectoria circular.
¿Cuál es su velocidad angular?
¿Qué tensión soporta el hilo?




como $\sum \vec{F}^{ext} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{P} \neq cte$

pero $\sum \vec{M}_0^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = cte \Rightarrow \boxed{\vec{L}_0 (antes) = \vec{L}_0 (despues)}$

$$m\,v\,d \, . \, \vec{k} = m\,r^2\,\vec{\omega}$$

$$0{,}003\,kg \, . \, 10\,\frac{m}{s} \, . \, 0{,}1\,m \, . \, \vec{k} = 0{,}003\,kg \, . \, (1\,m)^2 \, . \, \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = 1\,\frac{rad}{s} \, . \, \vec{k} \quad ✓$$

tensión del hilo $\boxed{T = m\,\omega^2\,r}$

$$= 0{,}003\,kg \, . \, \left(1\,\frac{rad}{s}\right)^2 . \, 1\,m$$

$$= 0{,}003\ N \quad ✓$$