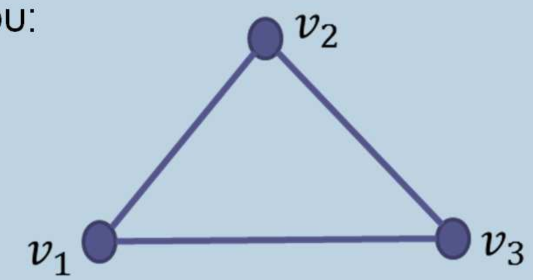
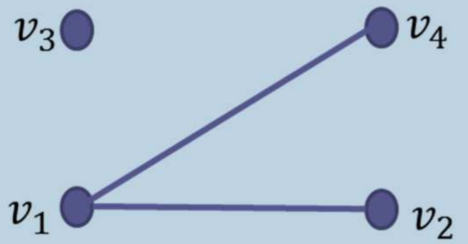
Ορισμός: Ένα **Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα G** είναι μία διατεταγμένη δυάδα **(V, E)** όπου:

- V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων): $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- E είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων): $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή $e_k = [v_i, v_j]$ ή $e_k = \{v_i, v_j\}$ με $v_i, v_j \in V$ για κάθε $k = 1, \dots, m$
  - Η ακμή θεωρείται μη διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή $[v_i, v_j]$ είναι ίδια με την ακμή $[v_j, v_i]$), δεν υπάρχει κατεύθυνση).

Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3\}$
$E = \{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_3, v_2]\}$



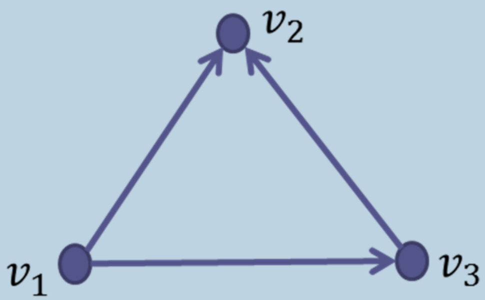
Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{[v_1, v_2], [v_1, v_4]\}$



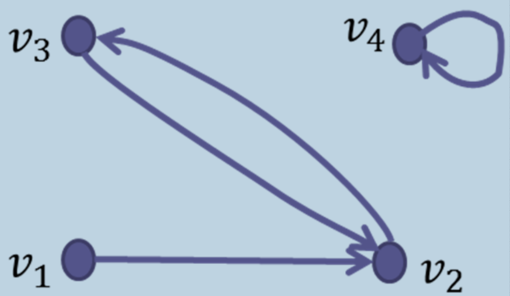
Ορισμός: Ένα **Κατευθυνόμενο Γράφημα G** είναι μία διατεταγμένη δυάδα (V, E) όπου:

- V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων): $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- E είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων): $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή $e_k = (v_i, v_j)$ ή $e_k = < v_i, v_j >$ με $v_i, v_j \in V$ για κάθε $k = 1, \dots, m$
  - Η ακμή θεωρείται διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή (v_i, v_j) είναι διαφορετική από την ακμή (v_j, v_i), υπάρχει κατεύθυνση). Η κορυφή v_i καλείται αρχή τη ακμής και η κορυφή v_j λέγεται πέρας της ακμής.

Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3\}$
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2)\}$



Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_4)\}$



Ορισμός:

<u>Μονοπάτι P</u> μήκους n από μία κορυφή v_0 σε μία κορυφή v_n είναι

- μια ακολουθία n ακμών (ακολουθώντας τις τυχόν κατευθύνσεις τους)
- (άρα n+1 κορυφών)

που ξεκινά από την κορυφή v_0 και καταλήγει στην v_n

<u>Απλό μονοπάτι</u> είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές (λέγεται και μονοκονδυλιά)

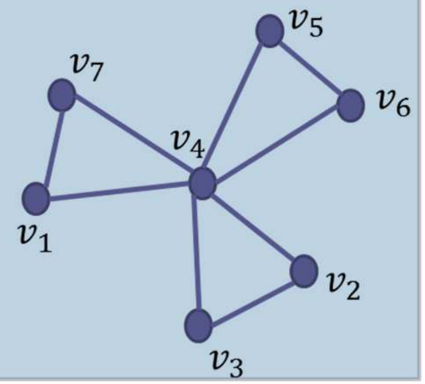
<u>Παράδειγμα</u>:

Μονοπάτι (που δεν είναι απλό):

$v_1 - v_4 - v_5 - v_6 - v_4 - v_3$

Μονοπάτι (που είναι απλό):

$v_1 - v_7 - v_4 - v_5 - v_6$



Ορισμός:

<u>Κύκλος</u> είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή

- Επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή.
- Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή.

<u>Απλός Κύκλος</u> είναι ένας κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

- Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή
- Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή

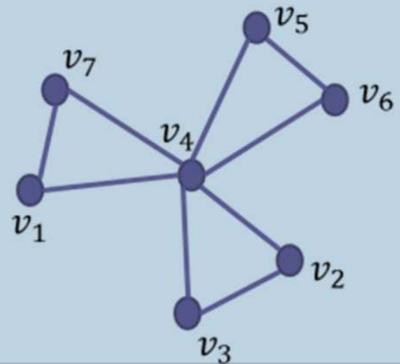
<u>Παράδειγμα</u>:

Κύκλος (που δεν είναι απλός):

$v_1 - v_7 - v_4 - v_5 - v_6 - v_4 - v_1$

Κύκλος (που είναι απλός):

$v_1 - v_7 - v_4 - v_1$



<u>Ορισμός:</u> Πλήρες γράφημα ή **κλίκα** n κορυφών (συμβολισμός K_n)

- Είναι <u>απλό</u> γράφημα G=(V,E) με n κορυφές που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές.

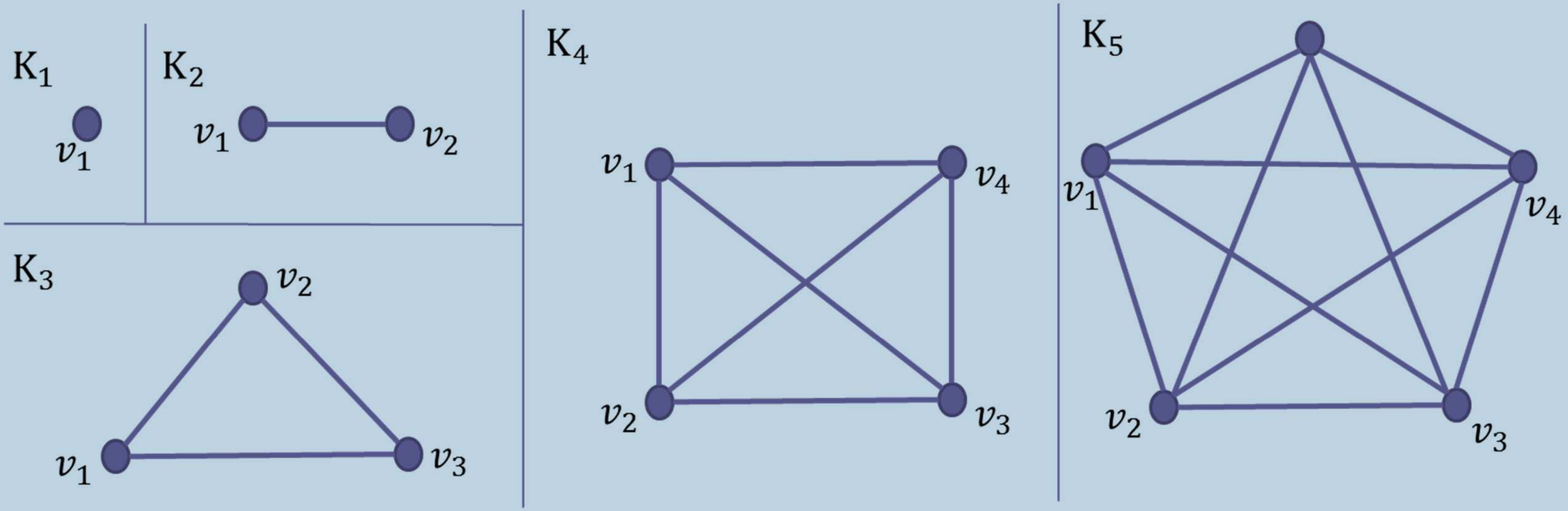
<u>Τυπικά:</u>

- Για κάθε $v_i, v_j \in V$ με $i \neq j$ η ακμή $[v_i, v_j] \in E$

Σημαντικό:

- Η κλίκα n κορυφών έχει $n(n-1)/2$ ακμές. (Είναι οι συνδυασμοί των n κορυφών ανά 2)

Οι 5 πρώτες κλίκες είναι οι εξής:



<u>Ορισμός:</u> **<u>Συνδεόμενο</u>** (ή συνδεδεμένο ή συνεκτικό) θα καλείται ένα Μ.Κ.Γ. που

- Οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι.

Τυπικά:

- Για κάθε $v_i, v_j \in V$ με $i \neq j$ υπάρχει μονοπάτι από την v_i στην v_j

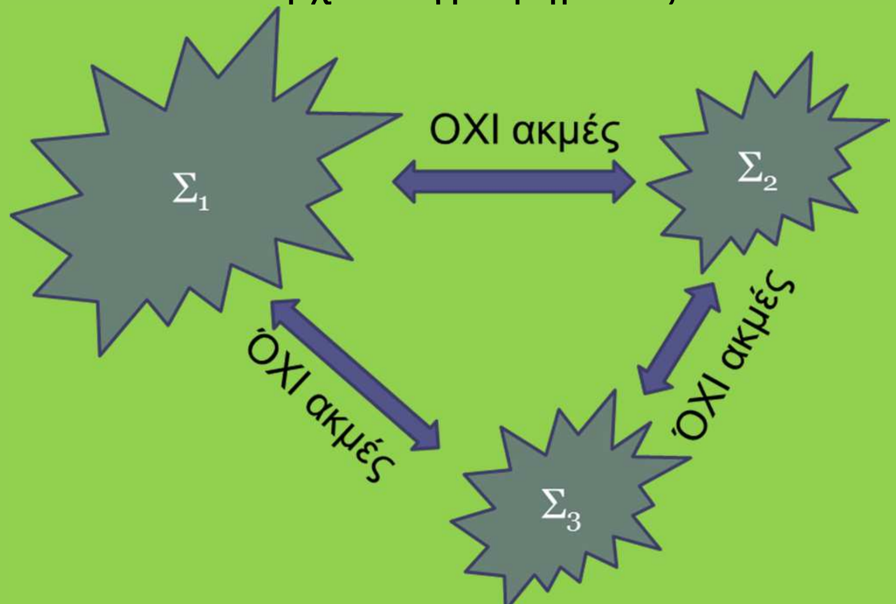
Ορισμός: Αν ένα γράφημα είναι μη συνδεόμενο:

- Κάθε μεγιστοτικό (ως προς τις κορυφές) συνδεόμενο υπογράφημά του λέγεται **συνεκτική συνιστώσα** ή **ασύνδετο τμήμα**

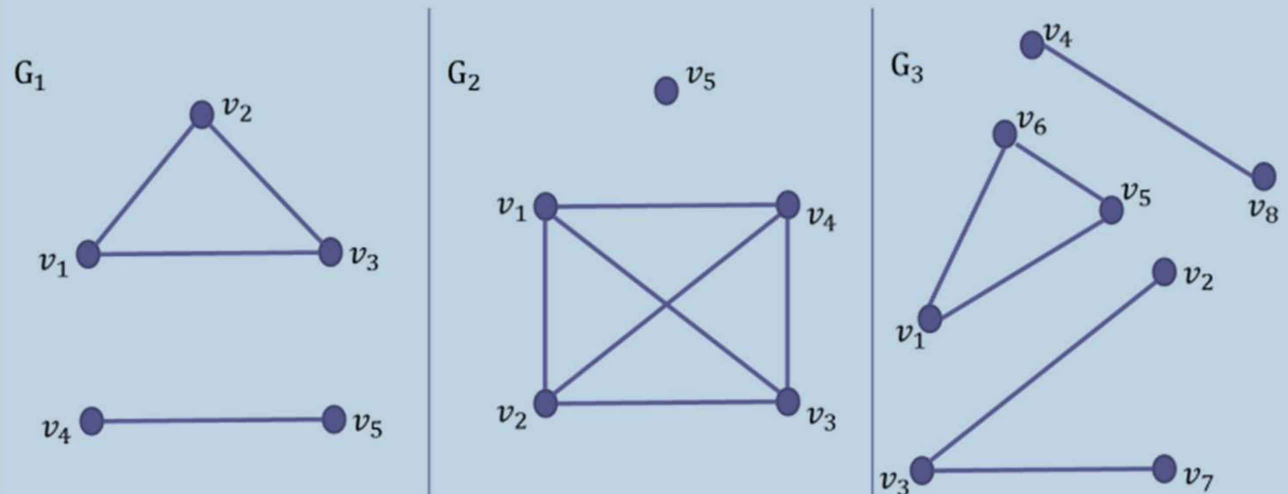
Πρακτικά, συνεκτική συνιστώσα είναι ένα «κομμάτι» του γραφήματος που μπορούμε να μεταβούμε (μέσω μονοπατιού) από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη.

Γενικά ένα γράφημα θα είναι:

- Είτε συνδεόμενο, οπότε θα αποτελείται από 1 συνεκτική συνιστώσα.
- Είτε μη συνδεόμενο (οπότε θα αποτελείται από τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες)
    - Αν σε μια εκφώνηση συναντήσουμε μη συνδεόμενο γράφημα στο θα πρέπει να οραματιζόμαστε τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες που η κάθε μία είναι ένα συνδεόμενο υπογράφημα του αρχικού γραφήματος:



<u>Παραδείγματα</u> μη συνδεόμενων γραφημάτων:



Έστω συνδεόμενο γράφημα:

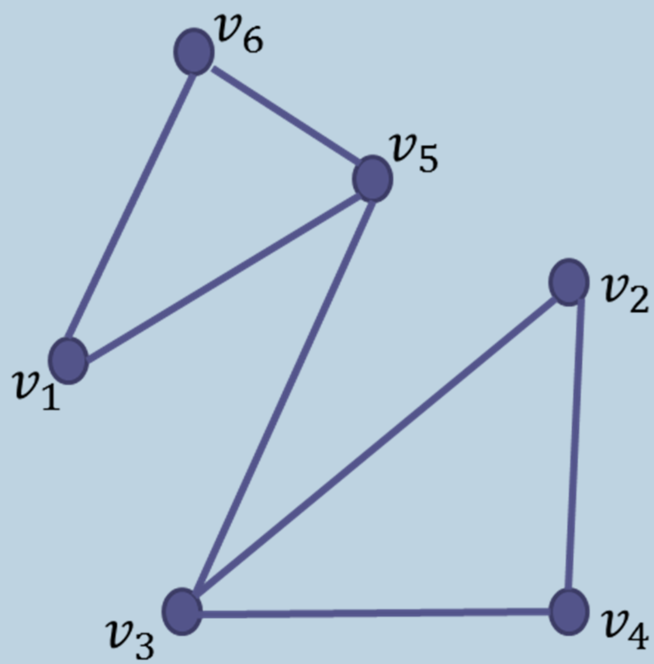
Ορισμός: Κάθε κορυφή, που αν αφαιρεθεί (μαζί με τις ακμές της) κάνει το γράφημα μη συνδεόμενο λέγεται σημείο κοπής ή σημείο άρθρωσης

Ορισμός: Κάθε ακμή, που αν αφαιρεθεί κάνει το γράφημα μη συνδεόμενο λέγεται γέφυρα ή ακμή τομής

Παράδειγμα:

Σημεία Κοπής:
v_3, v_5

Γέφυρα:
$[v_3 - v_5]$



Ορισμός: Έστω ένα απλό γράφημα $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$. Συμπλήρωμα του G, καλείται το γράφημα $\overline{\mathrm{G}} = (\overline{\mathrm{V}}, \overline{\mathrm{E}})$. που

- Έχει τις ίδιες κορυφές με το G
- Έχει ως ακμές αυτές που δεν περιέχονται στο G.

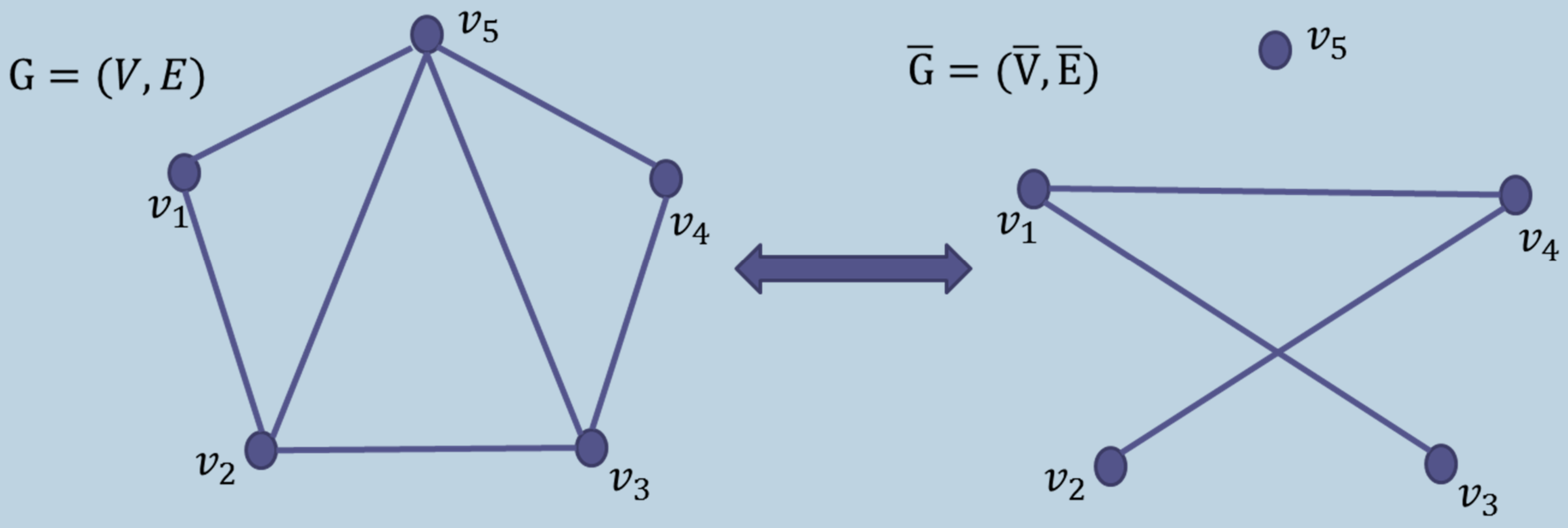
Τυπικά:

- Ισχύει $\overline{\mathrm{V}} = \mathrm{V}$ και $\mathrm{e} \in \overline{\mathrm{E}}$ αν και μόνο αν $\mathrm{e} \notin \mathrm{E}$

Σημαντικό:

- $|\mathrm{E}| + |\overline{\mathrm{E}}| = n(n-1)/2$

Παράδειγμα:



Ορισμός: Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. **Υπογράφημα** του G, καλείται το γράφημα $G' = (V', E')$. που

- Περιέχει κάποιες κορυφές του G (1…όλες)
- Περιέχει κάποιες ακμές του G που συνδέεουν αυτές τις κορυφές

Τυπικά:

- Ισχύει $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$ και για κάθε $[v_i, v_j] \in E'$ ισχύει ότι $v_i, v_j \in V'$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Απαγορεύεται στο υπογράφημα να έχουμε ακμή που δεν ανήκει στο αρχικό γράφημα

Ορισμός: Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. **Επαγόμενο Υπογράφημα** του G, καλείται το γράφημα $G' = (V', E')$:

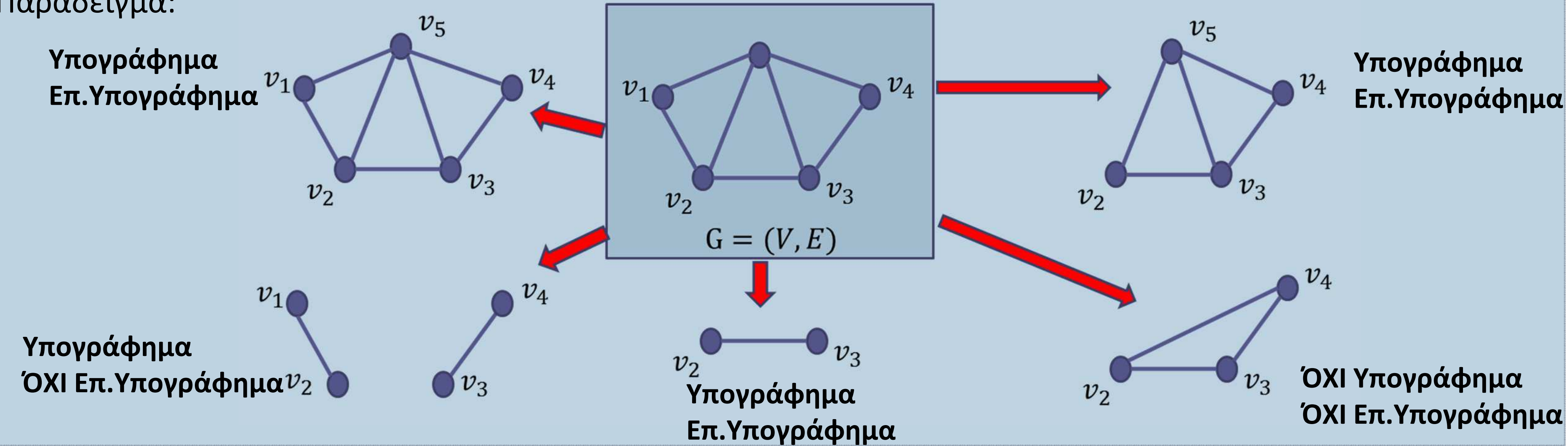
- Περιέχει κάποιες κορυφές του G (1…όλες)
- Περιέχει ΟΛΕΣ τις ακμές του G που συνδέεουν αυτές τις κορυφές

Τυπικά:

- Ισχύει $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$ και για κάθε $[v_i, v_j] \in E$ με $v_i, v_j \in V'$ ισχύει $[v_i, v_j] \in E'$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Απαγορεύεται στο επαγόμενο υπογράφημα να μην έχουμε όλες τις ακμές των κορυφών που έχουμε επιλέξει

Παράδειγμα:



Ορισμός για μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα:

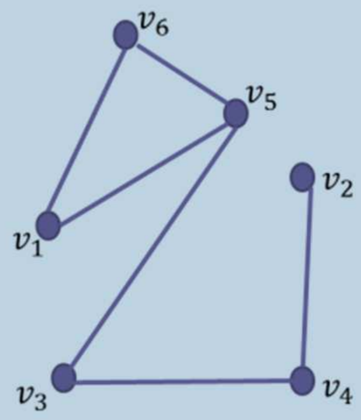
Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν

- Συμβολίζεται με $d(v_i)$

Ειδικά για μη απλά γραφήματα η ανακύκλωση μετράει κατά 2 στο βαθμό κορυφής.

Παράδειγμα:

$d(v_1) = 2$
$d(v_2) = 1$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 2$
$d(v_5) = 3$
$d(v_6) = 2$



Ορισμός:

Έσω Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφη v_i

- Συμβολίζεται με $d^-(v_i)$

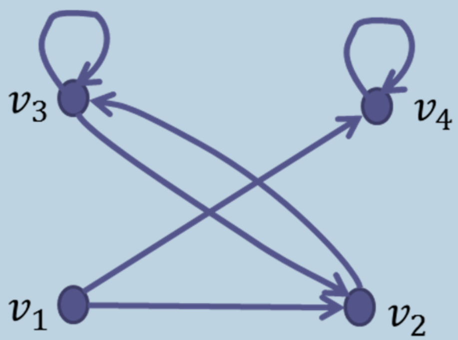
Έξω Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφη v_i

- Συμβολίζεται με $d^+(v_i)$

Παράδειγμα:

$d^-(v_1) = 0$
$d^-(v_2) = 2$
$d^-(v_3) = 2$
$d^-(v_4) = 2$

$d^+(v_1) = 2$
$d^+(v_2) = 1$
$d^+(v_3) = 2$
$d^+(v_4) = 1$



Θεώρημα Βαθμών Κορυφών (λέγεται και **Λήμμα της Χειραψίας**)

Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

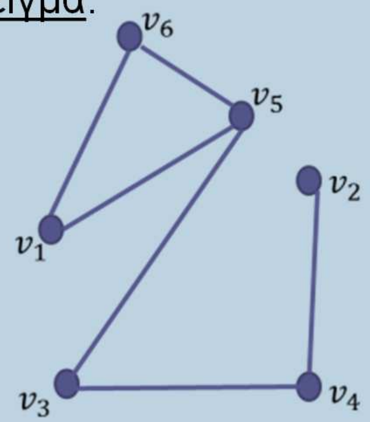
Πόρισμα 1:

Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι άρτιος αριθμός

Πόρισμα 2:

Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα: Το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα:



$d(v_1) = 2$
$d(v_2) = 1$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 2$
$d(v_5) = 3$
$d(v_6) = 2$

Άθροισμα Βαθμών Κορυφών: 12 (άρτιος)
Πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό: 2 (άρτιος)

Το θεώρημα χρησιμοποιείται (μεταξύ άλλων) για τον έλεγχο της ύπαρξης ενός γραφήματος όταν γνωρίζουμε πληροφορίες για τον βαθμό των κορυφών:

- Ελέγχουμε αν το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος.
    - Αν δεν είναι άρτιος, τότε δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα,
    - Αν είναι άρτιος, τότε πρέπει να ελέγξουμε κατασκευαστικά αν υπάρχει τέτοιο γράφημα

Ορισμός:

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα θα λέγεται:

- k-κανονικό, ανν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό k.

Ενώ αν μας αναφέρεται ότι το γράφημα είναι κανονικό, αυτό σημαίνει ότι όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό.

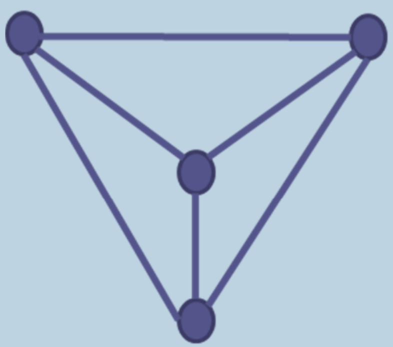
Πόρισμα

- **Το Kn είναι (n-1)-κανονικό γράφημα.**

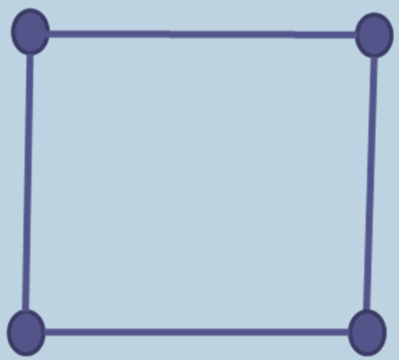
Σημαντικό:

- Ένα k-κανονικό γράφημα n κορυφών έχει $n\mathrm{k}/2$ ακμές.

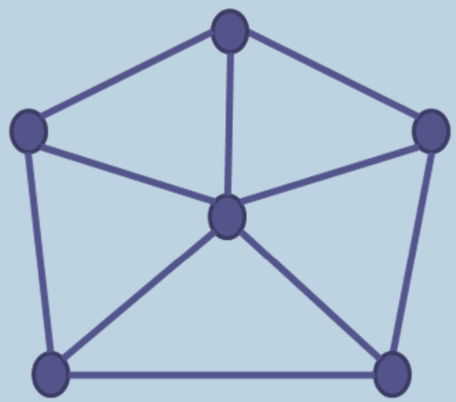
Παραδείγματα:



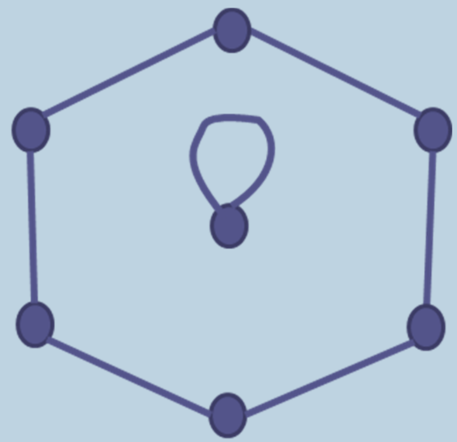
3-κανονικό



2-κανονικό



ΜΗ κανονικό



2-κανονικό

ΔΙΧΟΤΟΜΙΣΙΜΟ (ΔΙΜΕΡΕΣ) ΓΡΑΦΗΜΑ

<u>Ορισμός 1:</u> Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ είναι **<u>διχοτομίσιμο (ή διμερές)</u>** όταν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν (χωριστούν) σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1 και V_2 (δηλαδή $\mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$ και $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 = \emptyset$), έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα της άκρο σε κορυφή του V_1 και το άλλο της άκρο της V_2.

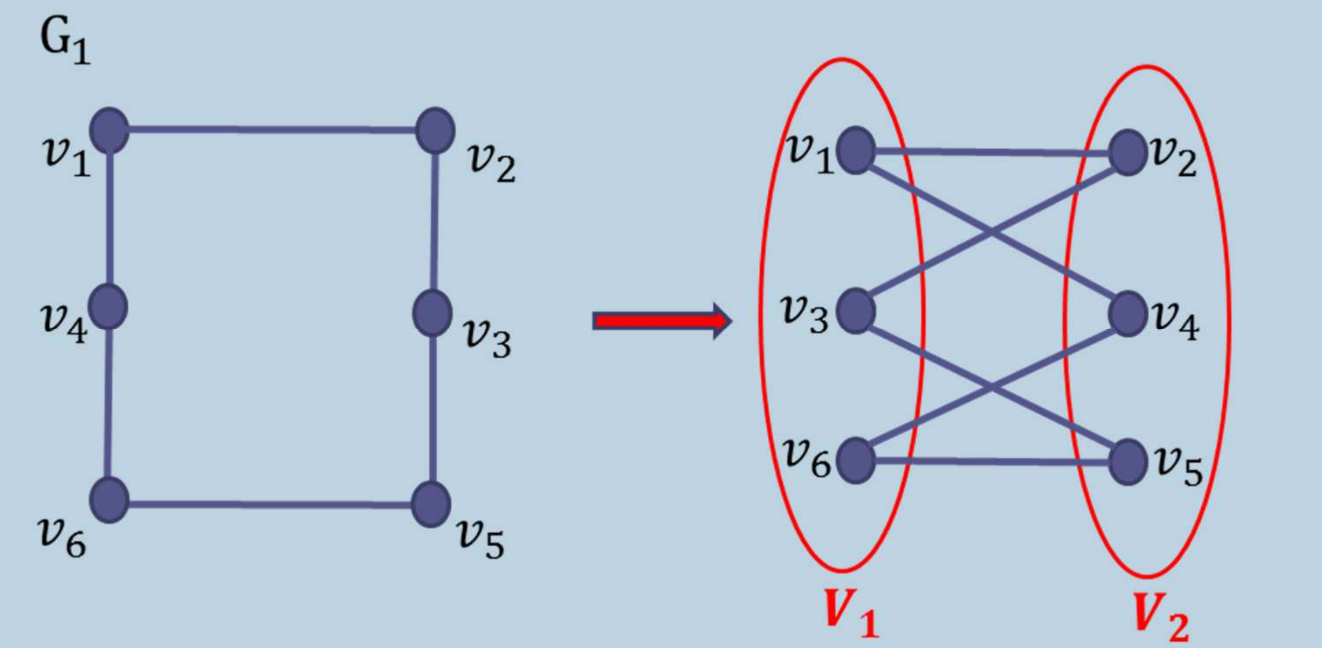
<u>Ορισμός 2:</u> Ένα γράφημα καλείται διχοτομίσιμο αν και μόνο αν οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.

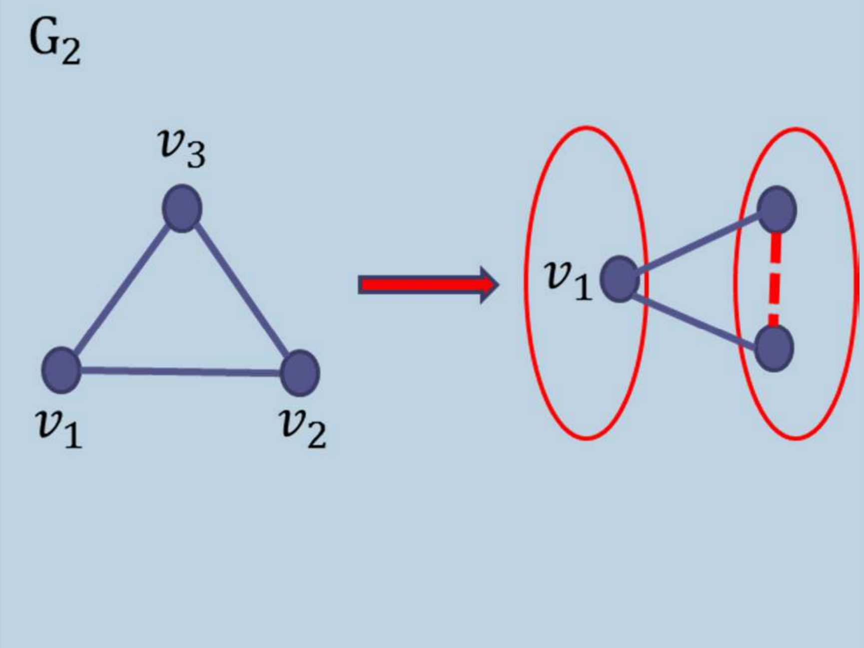
<u>Ορισμός 3:</u> Ένα γράφημα είναι διχοτομίσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Τα σύνολα $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ καλούνται μερίδια κορυφών
- Το διμερές γράφημα συμβολίζεται και $\mathrm{G} = (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{E})$

<u>Παράδειγμα:</u> Ο G_1 είναι διχοτομίσιμος με την διαμέριση: $\mathrm{V}_1 = \{v_1, v_3, v_6\}$ και $\mathrm{V}_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$. Ο G_2 δεν είναι διχοτομίσιμος



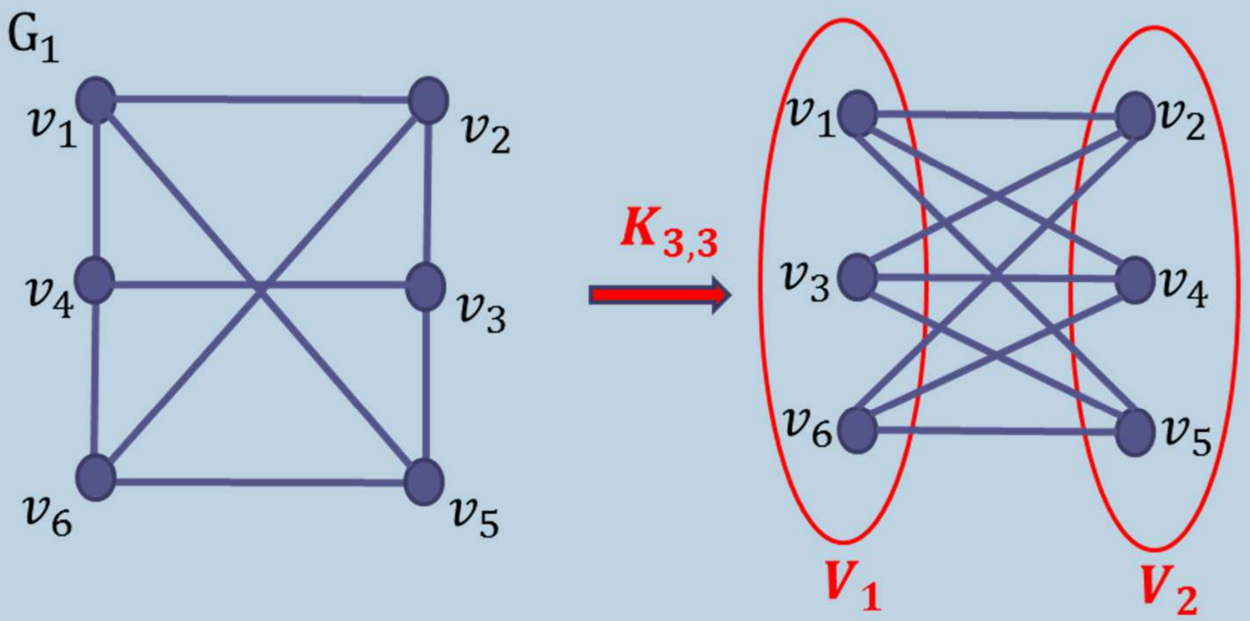


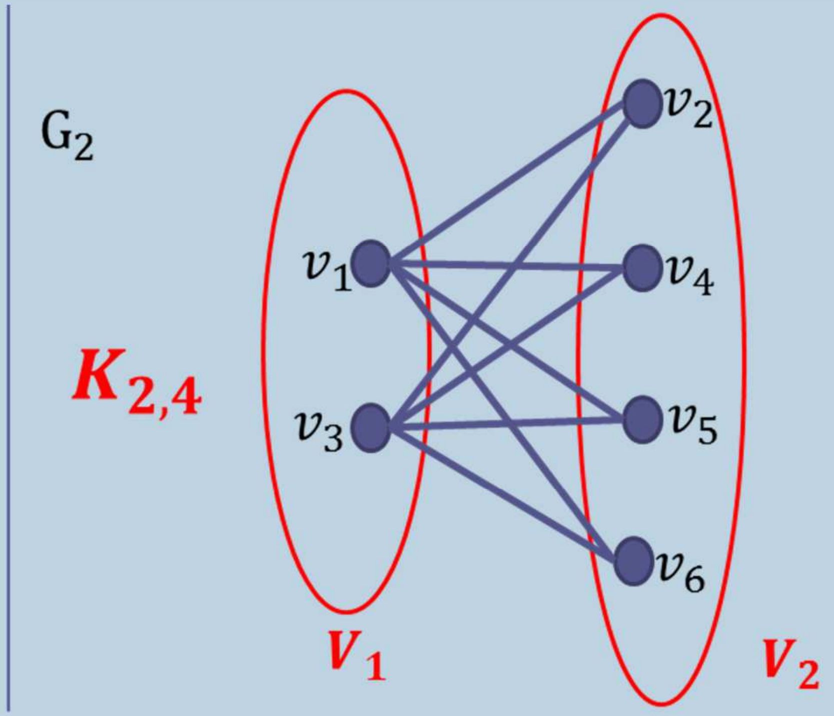
<u>Ορισμός:</u> Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **<u>πλήρες διχοτομίσιμο</u>** (ή πλήρες διμερές) αν είναι διχοτομίσιμο και περιέχει όλες τις δυνατές ακμές που μπορούν να συνδέουν τις κορυφές του V_1 με τις κορυφές του V_2

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Συμβολίζεται με $\mathbf{K}_{m,n}$ όπου $m = |V_1|$, $n = |V_2|$ και
- Ισχύει ότι:
  - Έχει $|V| = \boldsymbol{m + n}$ **κορυφές**
  - Έχει $|E| = \boldsymbol{m \cdot n}$ **ακμές**

<u>Παράδειγμα:</u> Ο G_1 είναι το $K_{3,3}$. Ο G_2 είναι το $K_{2,4}$





Ορισμός: Σύνολο Ανεξαρτησίας ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που δεν συνδέονται με ακμή

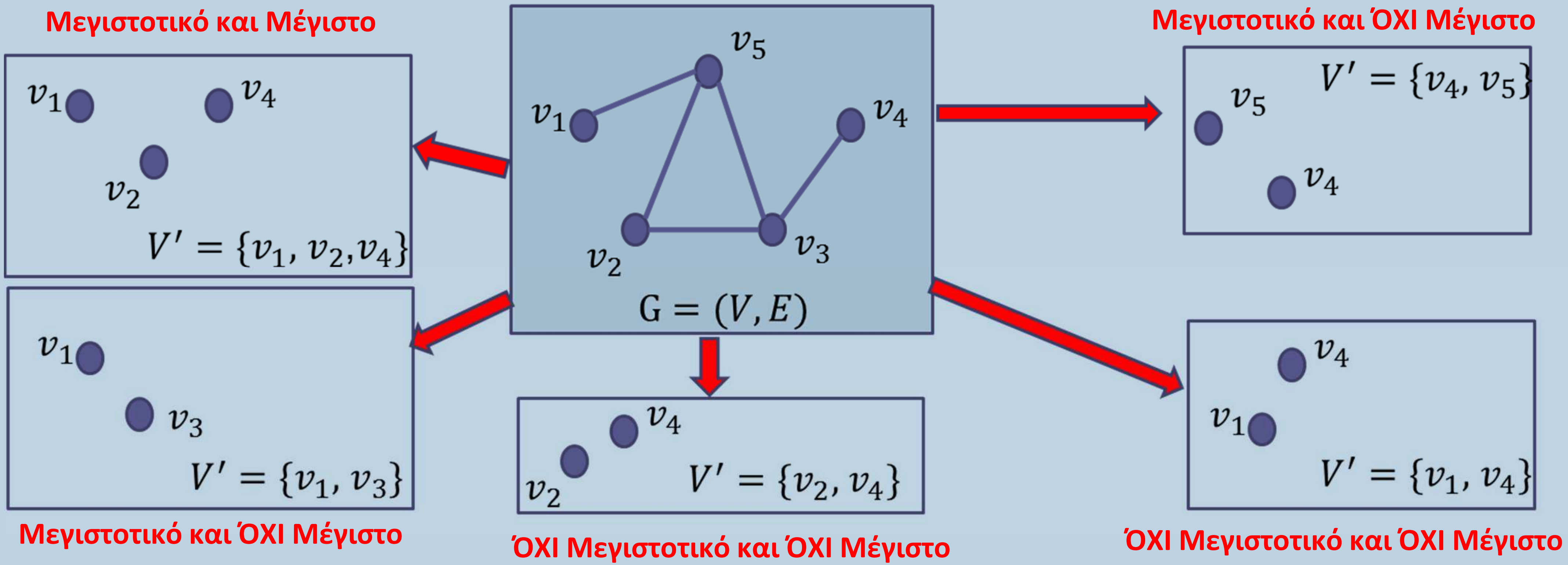
Τυπικά:

- Το σύνολο $V' \subseteq V$ είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας του γραφήματος $G = (V, E)$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος $v_i, v_j \in V'$ με $v_i \neq v_j$ ισχύει ότι $[v_i, v_j] \notin E'$

Ορισμός: Ένα σύνολο ανεξαρτησίας που δεν μπορεί να επαυξηθεί περαιτέρω (προσθέτοντας του ακόμη μία κορυφή) λέγεται **μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας**.

Ορισμός: Το μεγαλύτερο (σε πληθάριθμο) μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας καλείται **μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας**.

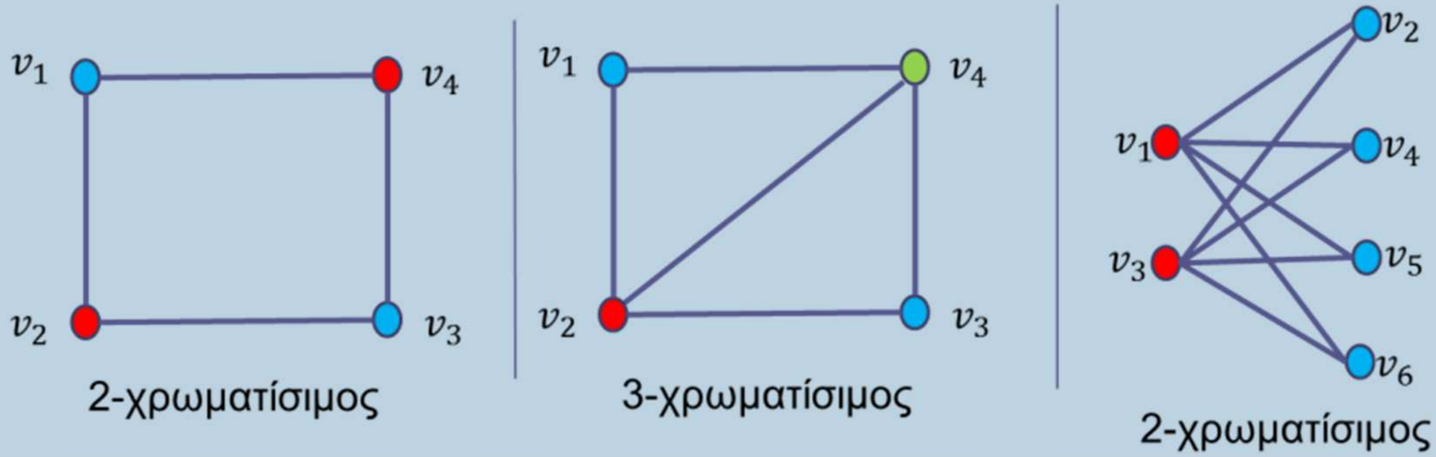
Παράδειγμα:



Ορισμός: Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι **k-χρωματίσιμο** αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν με k χρώματα ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

- Ή ισοδύναμα αν μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές σε k σύνολα ανεξαρτησίας (με κάθε σύνολο να χρωματίζεται με ένα χρώμα)
- Ένα k-χρωματίσιμο γράφημα θα λέγεται και k-μερές (σε αναλογία το 2-χρωματίσιμο γράφημα έχει 2 σύνολα ανεξαρτησίας, καλείται διμερές)

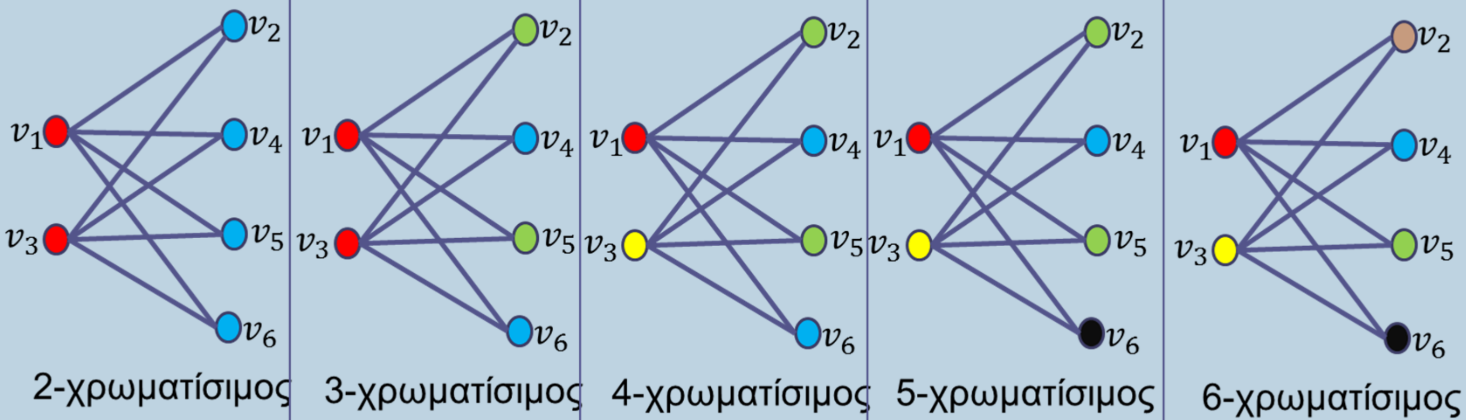
Παράδειγμα:



Σημαντικό:

- Ένας έγκυρος χρωματισμός δεν απαιτεί τον χρωματισμό των κορυφών με το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων.
- Έτσι αν ένα γράφημα είναι π.χ. 2-χρωματίσιμο, τότε θα είναι και 3-χρωματίσιμο, … και n-χρωματίσιμο

Παράδειγμα:

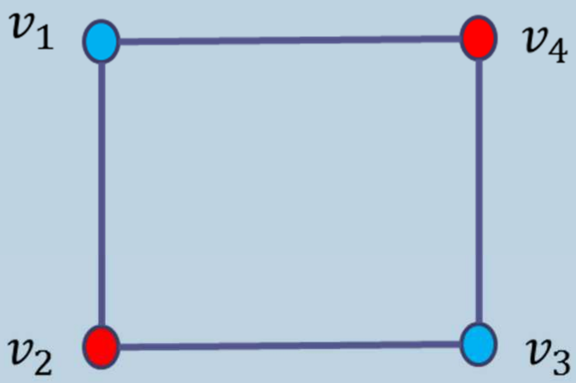


Ορισμός: Χρωματικός Αριθμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται το ελάχιστο k, για το οποίο ο γράφος είναι k-χρωματίσιμος.

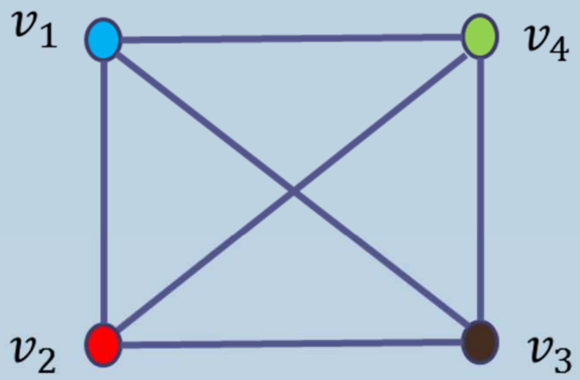
- Συμβολίζεται με $\chi(G)$

Το πρόβλημα της εύρεσης του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (δεν υπάρχει αποδοτικός τρόπος για να βρίσκουμε γρήγορα τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος – το πρόβλημα είναι NP-Complete).

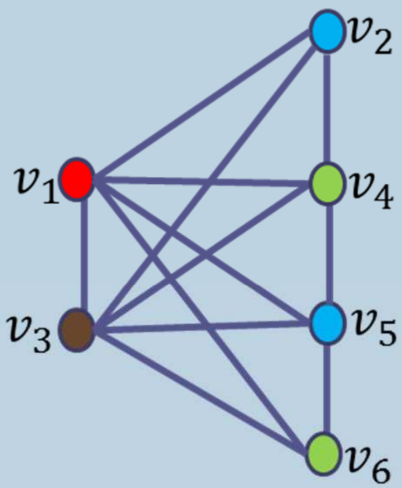
Παράδειγμα:



$\chi(G) = 2$



$\chi(G) = 4$



$\chi(G) = 4$

Ορισμός: Ένας **κύκλος Euler** σε έναν γράφο $G = (V, E)$ είναι ένας κύκλος που:

- Περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος
- Περνάει από κάθε ακμή ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά

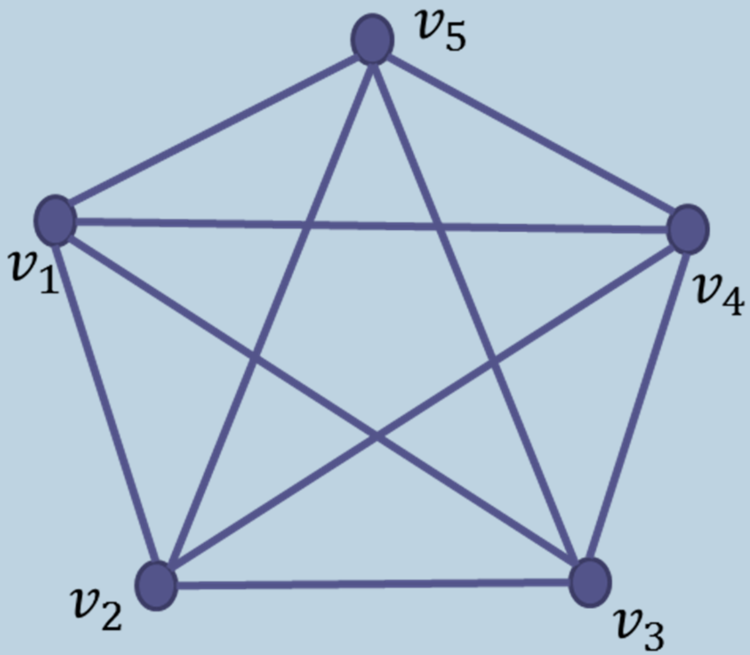
Αν ένας γράφος έχει κύκλο Euler τότε καλείται Ευληριανός Γράφος ή Γράφος Euler.

Θεώρημα Euler για την ύπαρξη του κύκλου Euler:

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν:

- Είναι συνδεόμενο και
- Όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό

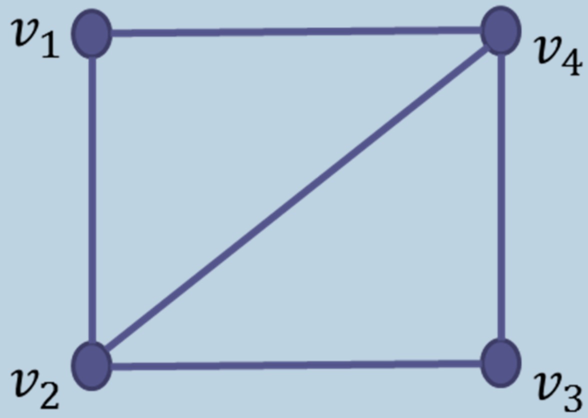
Παράδειγμα:



Ο κύκλος Euler είναι:

$$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_4 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1$$

(και βεβαίως όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό)



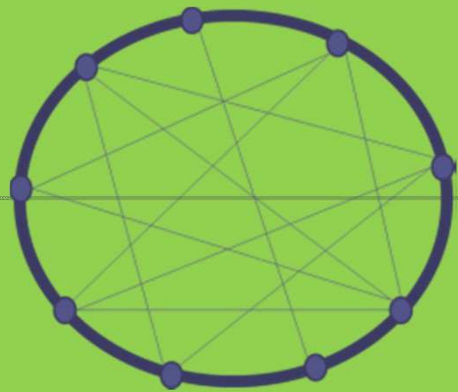
Δεν έχει κύκλο Euler (Η κορυφή v2 έχει περιττό βαθμό)

<u>Ορισμός:</u> Ένας **<u>κύκλος Hamilton</u>** σε έναν γράφο $G = (V, E)$ είναι ένας κύκλος που:

- Περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος
- Περνάει από κάθε κορυφή ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά

Αν ένας γράφος έχει κύκλο Hamilton τότε καλείται Αμιλτονιακός Γράφος ή Γράφος Hamilton.

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Αν ξέρω ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε θα πρέπει να σκέφτομαι ότι το γράφημα μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο ως εξής:



Δηλαδή είναι καθαρός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος

- Ο κύκλος αποτελείται από n ακμές.
- Το γράφημα μπορεί να έχει και οσεσδήποτε επιπλέον ακμές
- Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2

<u>Για να δείξω ότι ένα γράφημα **έχει κύκλο Hamilton** έχω 3 τρόπους:</u>

1. **<u>Καταγράφοντας τον στο γράφημα</u>** (δηλαδή καταγράφω την ακολουθία κορυφών που συνδέονται με διαδοχικές ακμές και δημιουργούν τον κύκλο Hamilton
2. <u>Δείχνοντας ότι ισχύει το **θεώρημα Dirac**:</u>
    1. «*Αν κάθε κορυφή έχει βαθμό ≥ n/2 τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton*» (όπου n>3 είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος)
3. <u>Δείχνοντας ότι ισχύει το **θεώρημα Ore**:</u>
    1. «*Αν κάθε ζεύγος κορυφών έχει άθροισμα βαθμών ≥ n τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton*» (όπου n>3 είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος)

<u>Για να δείξω ότι ένα γράφημα **ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton** έχω 4 πολύ απλά και προφανή κριτήρια.</u>

1. <u>Το γράφημα **δεν είναι συνδεόμενο**</u>
2. <u>Το γράφημα περιέχει **σημείο κοπής**</u>
3. <u>Το γραφημα περιέχει **γέφυρα**</u>
4. <u>Έστω **μία κορυφή έχει βαθμό 1**</u>
5. <u>Δείχνοντας κατασκευαστικά ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton</u>
    1. Σε έναν κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2
    2. Αφαιρούμε διαδοχικά ακμές από κάθε κορυφή με βαθμό > 2 μέχρι να αποκτήσει βαθμό 2 με όλους τους δυνατούς τρόπους
    3. Θα πρέπει σε κάθε περίπτωση αφαίρεσης ακμών να οδηγούμαστε ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton.