ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-1
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Ένα παιχνίδι παίζεται με 6 παίκτες, καθένας από τους οποίους επιλέγει έναν αριθμό από το 1 εώς το 10. Οι διαφορετικοί τρόποι επιλογής των αριθμών είναι:
Κεντρικό: Πρόκειται για διατάξεις 10 στοιχείων σε 6 θέσεις με επανάληψη άρα οι τρόποι είναι 10^6

1. Όσοι ο συντελεστής του $x^{10}/10!$ στην παράσταση $(e^x-1)^{10}$
   Λάθος. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι $((1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)-1)^{10}=(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^{10}$ και είναι λάθος, αφού ναι μεν πρέπει να γράψω έναν απαριθμητή για κάθε αντικείμενο που έχω να επιλέξω, άλλά κάθε ένας από αυτούς μπορεί να επιλεγεί από 0 εως οσεσδήποτε φορες (και όχι από 1 εώς οσεσδήποτε φορές που έχει καταγραφεί στους όρους)
2. Όσοι ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση e^{10x}
   Σωστό. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^{10}$. Ο συντελεστής του όρου $\frac{x^6}{6!}$ από το τυπολόγιο είναι ίσος με 10^6
3. $4\cdot 10^5$ αν τουλάχιστον ένας παίκτης έχει τον αριθμό 10.
   Λάθος. Έχω περιορισμό «τουλάχιστον ένα», άρα από όλους τους τρόπους που είναι 10^6 αφαιρώ το αντίθετο από το ζητούμενο, που είναι κανένας παίκτης να μην επιλέξει το 10, άρα 9^6 τρόποι. Συνεπώς οι τρόποι είναι 10^6-9^6
4. 10^6-10^5 αν τουλάχιστον ένας παίκτης έχει τον αριθμό 10.
   Λάθος. Όπως υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα οι τρόποι είναι: 10^6-9^6

(2) Έχουμε m διακεκριμένες υποδοχές στις οποίες θέλουμε να διανείμουμε n μη διακεκριμένα σφαιρίδια, έτσι ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον 1 σφαιρίδιο. Οι τρόποι είναι ίσοι με:
Κεντρικό: Πρόκειται για διανομή ομοίων με περιορισμό. Δίνω από 1 σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή (Δίνω m συνολικά) με 1 τρόπο και απομένουν n-m προς διανομή στις m υποδοχές. Οι τρόποι ως διανομή ομοίων είναι: $\binom{(n-m)+m-1}{n-m}=\binom{n-1}{n-m}=\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}$

1. Το συντελεστή του $x^n/n!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})^m$.
   Λάθος. Ο δεδομένος συντελεστής (βλέπε τυπολόγιο) είναι: m^n
2. Το συντελεστή του $x^n/n!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+x^2+\cdots+x^n)^m$.
   Λάθος. Ο συντελεστή του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+x^2+\cdots+x^n)^m$ είναι (από τυπολόγιο) $\binom{n+m-1}{n}$. Άρα του $\frac{x^n}{n!}$ είναι $n!\binom{n+m-1}{n}=n!\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}=\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!}$
3. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης: $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ όπου $x_i\in\mathbb{N}, x_i\geq 1$
   Σωστό. Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως η διανομή n αντικειμένων (όμοιες μονάδες) σε m διακεκριμένες μεταβλητές (υποδοχές) ώστε κάθε υποδοχή να πάρει τουλάχιστον 1 αντικείμενο (αφού $x_i\geq 1$)
4. $C(n-1,n-m)$
   Σωστό. Όπως προέκυψε από την λύση του κεντρικού ερωτήματος.

(3) Πόσες είναι οι διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους n, που αποτελούνται από άρτιο πλήθος Α, περιττό πλήθος Β και τουλάχιστον 1Γ;

1. Όσες και ο συντελεστής του $x^n/n!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $e^x \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
   Λάθος. Κάνω αντικατάσταση από το τυπολόγιο των απαριθμητών και έχω την γεννήτρια συνάρτηση $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)$. Η επιλογή εκθετικής συνάρτησης είναι σωστή γιατί πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων. Σημειώστε ότι ο 1ος απαριθμητής είναι **λάθος** (διότι το Γ είναι τουλάχιστον 1, ενώ ο απαριθμητής ξεκινά από το 0) και παρατηρήστε οτί ο 2ος απαριθμητής είναι σωστός (άρτια – αντιστοιχεί στα Β) και ο 3ος απαριθμητής είναι σωστός (περιττά – αντιστοιχεί στα Γ). Ο όρος που έχει σημειωθεί είναι σωστός, διότι η συμβολοσειρά που έχω να επιλέξω έχει μήκος n.
2. Όσες και ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+x^2+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)$
   Λάθος. Έχει επιλεγεί απλή γεννήτρια, ενώ θα έπρεπε να έχει επιλεγεί εκθετική, αφού πρόκειται για πρόβλημα διάταξης.
3. 3, αν n=3
   Σωστό. Το Γ είναι τουλάχιστον 1. Τα Β πρέπει να είναι υποχρεωτικά 1 (αν είναι 3, τότε μαζί με το 1 υποχρεωτικό Γ, θα έχω 4 αντικείμενα που δεν γίνεται). Τα Α πρέπει να είναι υποχρεωτικά 0 (αν είναι 2, τότε μαζί με το 1 υποχρεωτικό Β και το 1 υποχρεωτικό Γ δεν γίνεται). Άρα τα Γ πρέπει να είναι ακριβώς 2. Συνεπώς το πρόβλημα είναι μετάθεση ομάδων ομοίων αντικειμένων με 0Α,1Β,2Γ, συνεπώς οι τρόποι είναι 3!/(1!2!)=3.
4. Το πλήθος των τρόπων να διανείμουμε n αριθμημένες μπάλες σε 3 διακεκριμένες υποδοχές, ώστε η 1η υποδοχή να έχει άρτιο αριθμό μπαλών, η 2η περιττό αριθμό μπαλών και η 3η τουλάχιστον μία μπάλα.
   Σωστό. Ως διανομή διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές χρησιμοποιείται εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Ο απαριθμητής για την 1η υποδοχή είναι $(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)$ ίδιος με τον απαριθμητή για τα Α που είναι άρτια. Ο απαριθμητής για την δεύτερη υποδοχή είναι $(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)$ ίδιος με τον απαριθμητή για τα Β που είναι περιττά. Ο απαριθμητής για την 3η υποδοχή είναι $(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)$ ίδιος με τον απαριθμητή για τα Γ που είναι τουλάχιστον 1. Αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^n}{n!}$ ίσος με τον συντελεστή του κεντρικού προβλήματος που είναι όσες οι θέσεις.

(4) *Έστω Α σύνολο με n στοιχεία*

1. Τα υποσύνολα του Α με *k* στοιχεία είναι όσα τα υποσύνολα με *n-k* στοιχεία.
   Σωστό. Τα υποσύνολα του Α με k στοιχεία είναι $\binom{n}{k}$ ενώ τα υποσύνολα με n-k στοιχεία είναι $\binom{n}{n-k}$.
   Ισχύει ότι: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
2. Τα υποσύνολα του Α είναι 2^n.
   Σωστό. Από θεωρία
3. Οι λέξεις μήκους *k* που σχηματίζονται με αλφάβητο το Α είναι όσες ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^k}{k!}\right)^n$
   Λάθος. Οι λέξεις μήκους *k* που σχηματίζονται με αλφάβητο το Α είναι n^k, ενώ ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$ στην παράσταση $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^k}{k!}\right)^n$ είναι επίσης n^k (από πίνακα υπολογισμού συντελεστών). Προσοχή όμως ότι ζητά το συντελεστή του x^k. Άρα αφού στο ανάπτυγμα της γεννήτριας έχουμε τον όρο: $n^k\,\frac{x^k}{k!}$ θα είναι: $\frac{n^k}{k!}x^k$. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι του $\frac{n^k}{k!}$.
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με k στοιχεία αυξάνει καθώς το k αυξάνει.
   Λάθος. Π.χ. $\binom{3}{2}=3$, ενώ $\binom{3}{3}=1$.

(5) *Έχουμε 20 διαφορετικά περιοδικά και 5 διαφορετικά ράφια. Οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των περιοδικών στα ράφια είναι:*

1. $20!\binom{20+5-1}{20}$, αν έχει σημασία η σειρά τους στα ράφια.

   Σωστό. Κάνουμε πράξεις: $20!\binom{20+5-1}{20} = 20!\binom{24}{20} = 20!\frac{24!}{20!*4!} = \frac{24!}{4!}$. Αφου έχει σημασία η σειρά τους στα ράφια πρόκειται για διανομή 20 διαφορετικών σε 5 υποδοχές με σειρά στις υποδοχές. Οι τρόποι είναι:$\frac{(20+5-1)!}{(5-1)!} = \frac{24!}{4!}$

2. *ίσοι με τον συντελεστή του $x^{20}/20!$ στην $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^5$, αν έχει σημασία η σειρά τους στα ράφια.*

   Λάθος. Από το πινακάκι υπολογισμού συντελεστών έχουμε (Γραμμή ΔΜΕ): 5^{20} ενώ η λύση αν έχει σημασία η σειρά ειναι: $\frac{24!}{4!}$

3. $\frac{20!}{4!^5}$, αν το κάθε ράφι θα πάρει 4 περιοδικά και δεν έχει σημασία η σειρά.

   Σωστό. Για το 1^o ράφι είναι: $C(20,4)$ για το 2^o ράφι είναι $C(16,4)$ για το 3^o ράφι είναι $C(12,4)$ για το 4^o ράφι είναι $C(8,4)$ για το 5^o ράφι είναι: $C(4,4)$. Συνεπώς από τον κανόνα. Άρα από τον ΚΓ οι τρόποι είναι:

$$\frac{20!}{16!\,4!}\frac{16!}{12!\,4!}\frac{12!}{8!\,4!}\frac{8!}{4!\,4!}\frac{4!}{4!\,0!} = \frac{20!}{4!^5}$$

4. ίσοι με τον συντελεστή του $x^{20}/20!$ στην $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^5$, αν δεν έχει σημασία η σειρά τους.

   Από το πινακάκι υπολογισμού συντελεστών έχουμε (Γραμμή ΔΜΕ): 5^{20}.
   Σωστό. Από το πινακάκι υπολογισμού συντελεστών έχουμε (Γραμμή ΔΜΕ): 5^{20} ενώ η λύση αν δεν έχει σημασία η σειρά (διανομή διαφορετικών χωρίς σειρά ειναι επίσης: 5^{20}

(6) Μια τετραόροφη πολυκατοικία έχει 3 διακεκριμένα παράθυρα σε κάθε όροφο. Το φως σε ένα παράθυρο μπορεί να είναι αναμμένο ή όχι.

1. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να φωτίζονται τα παράθυρα είναι 2^{12}
   Σωστό. Το πρόβλημα είναι διατάξεις 2 αντικειμένων (Αναμμένο ή Όχι) σε 12 θέσεις (Προκύπτει και με απλό κανόνα γινομένου.
2. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να φωτίζονται 5 παράθυρα είναι όσα ο συντελεστής του x^5 στην παράσταση $(1+x)^{12}$.
   Σωστό. Έχω 5 αναμμένα και 7 σβηστά σε 10 θέσεις, άρα πρόκειται για πρόβλημα μεταθέσεων ομάδων ομοίων και η λύση του είναι: $\frac{12!}{5!7!}$. Ο ζητούμενος συντελεστής ισούται με $\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!}$
3. Όλα τα παράθυρα είναι σκοτεινά και 5 από αυτά φωτίζονται ένα-ένα διαδοχικά. Οι τρόποι που μπορεί να συμβεί αυτό είναι C(12,5).
   Λάθος. Το πρόβλημα είναι διατάξεις χωρίς επανάληψη, αφού για το 1^o που φωτίζεται έχω 12 επιλογές, για το 2^o έχω 11 επιλογές … για το 5^o έχω 8 επιλογές, άρα είναι P(12,5).
4. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να φωτίζονται k παράθυρα αν σε κάθε όροφο έχει σημασία μόνο ο αριθμός των φωτισμένων παραθύρων, είναι όσοι ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1+x+x^2+x^3)^4$.
   Σωστό. Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με την διανομή k όμοιων αντικειμένων σε 4 υποδοχές όπου κάθε υποδοχή μπορεί να πάρει από κανένα εώς 3 αντικείμενα. Η μοντελοποίηση με γεννήτρια συνάρτηση είναι σωστή.

(7) Το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,\ x_i \in \mathbb{N}$ είναι ίσος με:
ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Πρόκειται για την διανομή m ομοίων μονάδων σε n υποδοχές, άρα είναι $\binom{m+n-1}{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$.

1. $\binom{n+m-1}{n}$
   Λάθος. Από την επίλυση του κεντρικού ερωτήματος.
2. m^n
   Λάθος. Από την επίλυση του κεντρικού ερωτήματος.
3. Το συντελεστή του όρου x^{m-1} στην παράσταση $(1+x)^{n+m-1}$
   Λάθος. Ο συντελεστής (βλ.πινακακι συντελεστών) είναι $\binom{n+m-1}{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!}$
4. Το συντελεστή του όρου x^{m-1} στην παράσταση $(1+x+x^2+\cdots)^{n+2}$
   Λάθος. Ο συντελεστής (βλ.πινακακι συντελεστών) είναι $\binom{(n+2)+(m-1)-1}{m-1} = \binom{n+m}{m-1} = \frac{(n+m)!}{(m-1)!n!}$

(8) Θεωρούμε 4 κληρώσεις ενός ακεραίου από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός προκύπτει με πιθανότητα 1/10 σε κάθε κλήρωση και τα αποτελέσματα των 4 κληρώσεων είναι ανεξάρτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρτιος αριθμός σε τουλάχιστον μία κλήρωση είναι $5^4/10^4$
   Λάθος. Είναι: $p = \frac{10^4-5^4}{10^4}$
2. Η πιθανότητα όλα τα αποτελέσματα να είναι πολλαπλάσια του 3 είναι $3^4/10^4$
   Σωστό. Τα πολλαπλάσια του 3 από το 1 εώς το 10 είναι: 3,6,9. Συνεπώς η πιθανότητα είναι: $p = \frac{3^4}{10^4}$
3. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι 5, είναι $4/10^4$
   Σωστό. Με καταμέτρηση οι τρόποι είναι: 1-1-1-2,1-1-2-1,1-2-1-1,2-1-1-1. Άρα η πιθανότητα είναι: $p = \frac{4}{10^4}$
4. Η πιθανότητα να μην έρθει περιττός αριθμός είναι 1/16
   Σωστό. Θα είναι όλοι άρτιοι, άρα η πιθανότητα είναι: $p = \frac{5^4}{10^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(9) Στην τελετή αποφοίτησης ενός Δημοτικού Σχολείου, οι 100 (διακεκριμένοι) μαθητές περιμένουν σε 3 διαφορετικές σειρές για να πάρουν το απολυτήριο (η θέση κάθε μαθητή στη σειρά έχει σημασία). Οι διαφορετικοί τρόποι να συμβεί αυτό είναι:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Πρόκειται για την διανομή 100 διαφορετικών μαθητών σε 3 υποδοχές (σειρές), με την σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία άρα είναι $\frac{(3+100-1)!}{(3-1)!}=\frac{102!}{2!}$.

1. 3^{100}
   Λάθος.
2. $\frac{102!}{2!}$
   Σωστό.
3. Όσοι ο συντελεστής του $x^{100}/100!$ στην παράσταση $\left(x^5+x^6+x^7+\cdots\right)^3$, αν πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 παιδιά σε κάθε σειρά.
   Σωστό. Η γεννήτρια αυτή μοντελοποιεί σωστά το πρόβλημα της διανομής διαφορετικών με σειρά στις υποδοχές.
4. Όσοι ο συντελεστής του x^{100} στην παράσταση $\left(x^5+x^6+x^7+\cdots\right)^3$, αν πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 παιδιά σε κάθε σειρά.
   Λάθος. Η γεννήτρια αυτή μοντελοποιεί το πρόβλημα της διανομής ομοίων αντικειμένων σε υποδοχές.

(10) Οι διαφορετικές δυαδικές συμβολοσειρές μήκους $k+n-1$ με k άσσους και $n-1$ μηδενικά είναι:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Πρόκειται για μεταθέσεις ομάδων ομοίων άρα οι λύσεις είναι: $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$.

1. Όσα τα διαφορετικά υποσύνολα με k στοιχεία ενός συνόλου με $k+n-1$ στοιχεία.
   Σωστό. Τα διαφορετικά υποσύνολα είναι: $\binom{k+n-1}{k}=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$
2. Όσες οι διαφορετικές μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $z_1+\cdots+z_n=k$.
   Σωστό. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $\binom{k+n-1}{k}=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$
3. Όσες οι διαφορετικές μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $z_1\cdots+z_k=n$.
   Λάθος. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $\binom{n+k-1}{n}=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$
4. Όσες ο συντελεστής του x^{n-1} στην παράσταση $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^{k+1}$
   Λάθος. Ο ζητούμενος συντελεστής (υπολογισμός συντελεστών, γραμμή ΣΜΕ) είναι: $\binom{(k+1)+(n-1)-1}{n-1}=\binom{k+n-1}{n-1}=\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\,k!}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

1. 100 πελάτες ενός ταξιδιωτικού γραφείου (που θεωρούνται μη διακεκριμένοι) πρόκειται να επιλέξουν προορισμό για τις θερινές τους διακοπές, από τρεις διαθέσιμους προορισμούς, έστω Α, Β και Γ. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τη δύναμη του x της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων να γίνει αυτό, όταν:
   a. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των πελατών που θα επιλέξουν κάθε προορισμό.
   b. Στον προορισμό Α μπορούν να πάνε το πολύ 25 πελάτες, το πλήθος των πελατών που θα πάνε στον προορισμό Β πρέπει να είναι διπλάσιο από το πλήθος των επιβατών που θα πάνε στον προορισμό Α και το πλήθος των επιβατών που θα πάνε στον προορισμό Γ είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των επιβατών που θα πάνε στον προορισμό Β.
2. Μια σχολική τάξη αποτελείται από 30 διακεκριμένους μαθητές, 15 αγόρια και 15 κορίτσια. Εξετάζουμε τους διαφορετικούς τρόπους να χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες, ώστε κάθε μαθητής να ανήκει σε μία ομάδα, και να τους αναθέσουμε εργασίες για το μάθημα της Πληροφορικής.
   Να υπολογισθεί το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων αν:
   a. Κάθε ομάδα αποτελείται από 2 άτομα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.
   b. Κάθε ομάδα αποτελείται από 5 άτομα, ανεξαρτήτως φύλου, και υπάρχουν 6 θέματα εργασιών από τα οποία κάθε ομάδα επιλέγει ένα θέμα διαφορετικό από αυτό των άλλων ομάδων.
   c. Κάθε ομάδα αποτελείται είτε από 5 αγόρια είτε από 5 κορίτσια, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.

<u>Λύση</u>:

(1.α)
Το πρόβλημα ως διανομή 100 ομοίων αντικειμένων (πελάτες) σε 3 διακεκριμένες υποδοχές μοντελοποιείται με απλή γεννήτρια συνάρτηση.

Οι απαριθμητές για τις υποδοχές είναι:
- Απαριθμητής για τον προορισμό Α(0..100): $(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$
- Απαριθμητής για τον προορισμό Β(0..100): $(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$
- Απαριθμητής για τον προορισμό Γ(0..100): $(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$

Άρα η γεννήτρια είναι: $(1+x+x^2+\cdots+x^{100})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

(1.β)
Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με την εξίσωση:
$$A+B+\Gamma=100 \quad (1)$$
Υπο τους περιορισμούς:
- $A \le 25$
- $B=2A \quad (2)$
- $\Gamma > B$ η οποία μοντελοποιείται ως $B+S=\Gamma \quad (3)$ όπου $S>0$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) έχω:
$A+B+(B+S)=100 \implies$
$2B+S+A=100$
Στην οποία αντικαθιστώ την (2) και έχω:
$2(2A)+S+A=100 \implies$
$5A+S=100$
Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί:
$z_1+z_2=100$
Την οποία μπορούμε να μοντελοποίησουμε με απλή γεννήτρια συνάρτηση (εξίσωση, άρα διανομή ομοίων):
- Απαριθμητής για το z_1(0 εώς 100 και πολλαπλάσιο του 5): $(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{100})$
- Απαριθμητής για το z_2(Αντιστοιχεί στο S, άρα >0): $(x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})$

Άρα η γεννήτρια είναι: $(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{100})(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.
[Σημείωση: Το γεγονός ότι πρέπει $A \leq 25$, έχει συνεκτιμηθεί στην παραπάνω επίλυση. Πρέπει $A \leq 25$ άρα $5A \leq 5 * 25$ άρα $5A \leq 125$ δηλαδή $z_1 \leq 125$ που ούτως ή άλλως προκύπτει αφού στο z_1 θα αποδοθούν το πολύ 100 μονάδες]

Άσκηση 2 (Μονάδες 25)

Μια σχολική τάξη αποτελείται από 30 διακεκριμένους μαθητές, 15 αγόρια και 15 κορίτσια. Εξετάζουμε τους διαφορετικούς τρόπους να χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες, ώστε κάθε μαθητής να ανήκει σε μία ομάδα, και να τους αναθέσουμε εργασίες για το μάθημα της Πληροφορικής.

Να υπολογισθεί το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων αν:

a. Κάθε ομάδα αποτελείται από 2 άτομα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.
b. Κάθε ομάδα αποτελείται από 5 άτομα, ανεξαρτήτως φύλου, και υπάρχουν 6 θέματα εργασιών από τα οποία κάθε ομάδα επιλέγει ένα θέμα διαφορετικό από αυτό των άλλων ομάδων.
c. Κάθε ομάδα αποτελείται είτε από 5 αγόρια είτε από 5 κορίτσια, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες

<u>**Λύση:**</u>

(2.α)

Για την κατασκευή της $1^{ης}$ ομάδας έχω 15 επιλογές για αγόρι και 15 για κορίτσι. Άρα $15\cdot 15$ τρόπους
Για την κατασκευή της $2^{ης}$ ομάδας έχω 14 επιλογές για αγόρι και 14 για κορίτσι. Άρα $14\cdot 14$ τρόπους
….
Για την κατασκευή της $15^{ης}$ ομάδας έχω 1 επιλογή για αγόρι και 1 για κορίτσι. Άρα $1\cdot 1$ τρόπο.

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι $15\cdot 15\cdot 14\cdot 14\cdot \ldots\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 15!\cdot 15!$

Οι ομάδες είναι όμοιες (κοινό θέμα εργασίας) άρα πρέπει να διαιρέσω το τελικό αποτέλεσμα με το παραγοντικό του πλήθους των ομάδων. Συνεπώς οι τρόποι είναι $\frac{15!\cdot 15!}{15!} = 15!$

(2.β)

Για την κατασκευή της ομάδας που θα της ανατεθεί το $1^{ο}$ θέμα έχω $\binom{30}{5}$ τρόπους

Για την κατασκευή της ομάδας που θα της ανατεθεί το $2^{ο}$ θέμα έχω $\binom{25}{5}$ τρόπους
….
Για την κατασκευή της ομάδας που θα της ανατεθεί το $6^{ο}$ θέμα έχω $\binom{5}{5}$ τρόπους

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι $\binom{30}{5}\cdot\binom{25}{5}\cdot\ldots\cdot\binom{5}{5}$

Οι ομάδες είναι διακεκριμένες (διαφορετικό θέμα) άρα δεν πρέπει να γίνει διαίρεση με παραγοντικό.

(2.γ)

Σπάω το πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα. Τον χωρισμό των κοριτσιών σε 3 ομάδες και τον χωρισμό των αγοριών σε 3 ομάδες.

<u>Για τον χωρισμό των κοριτσιών:</u>

Για την κατασκευή της $1^{ης}$ ομάδας έχω $\binom{15}{5}$ τρόπους

Για την κατασκευή της $2^{ης}$ ομάδας έχω $\binom{10}{5}$ τρόπους

Για την κατασκευή της $3^{ης}$ ομάδας έχω $\binom{5}{5}$ τρόπους

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}$

Οι ομάδες είναι όμοιες (κοινό θέμα εργασίας) άρα πρέπει να διαιρέσω το τελικό αποτέλεσμα με το παραγοντικό του πλήθους των ομάδων (3). Συνεπώς οι τρόποι είναι $\frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}}{3!}$

<u>Για τον χωρισμό των αγοριών.</u>

Ομοίως οι τρόποι είναι: $\frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}}{3!}$

Συνεπώς από τον κανόνα του γινομένου το τελικό αποτέλεσμα είναι: $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}$ … $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}$

Άσκηση 3 (Μονάδες 25)

(Ερώτημα 1)
Το κόστος της αγοράς ενός πράσινου βόλου είναι 15€, ενός κόκκινου βόλου είναι 10€ και ενός άσπρου βόλου είναι 5€. Διαθέτουμε 200€ και θέλουμε να αγοράσουμε συνολικά 20 βόλους. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση και δώστε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους τρόπους αγοράς των βόλων.
(Ερώτημα 2)
Πόσες 3μελείς επιτροπές μπορούν να κατασκευαστούν από ένα σύνολο n διακεκριμένων ατόμων αν:
(α) Τα μέλη είναι ισότιμα
(β) Η επιτροπή διαθέτει πρόεδρο, γραμματέα και ταμία.
(γ) Η επιτροπή διαθέτει πρόεδρο και δύο ισότιμα μέλη

Λύση:

(1)

Συμβόλιζω με x_1, x_2, x_3 το πλήθος των πράσινων, κόκκινων και άσπρων βόλων. Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με την εξίσωση:

$$15x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 200 \quad (1)$$

Όπου: $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ (2)

Η (2) γράφεται $x_3 = 20 - x_1 - x_2$ την οποία αντικαθιστώ στην (1), άρα γίνεται:

$$15x_1 + 10x_2 + 5(20 - x_1 - x_2) = 200 \Rightarrow$$
$$15x_1 + 10x_2 + 100 - 5x_1 - 5x_2 = 200 \Rightarrow$$
$$10x_1 + 5x_2 = 100 \Rightarrow$$
$$2x_1 + x_2 = 20$$

(Η απλοποίηση με την διαίρεση με το 5 είναι προαιρετική). Η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$z_1 + z_2 = 20$$

Γράφουμε απλή γεννήτρια:

- Απαριθμητής για το z_1 (πολλαπλάσια του 2) : $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{20})$
- Απαριθμητής για το z_2 (χωρίς περιορισμό) : $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{20})$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{20})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{20})$
και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{20} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

(2)

(α) Είναι συνδυασμοί χωρίς επανάληψη, άρα είναι: $C(n,3)$
(β) Είναι διατάξεις χωρίς επανάληψη, άρα είναι: $P(n,3)$
(γ) Η επιλογή του προέδρου γίνεται με n τρόπους. Η επιλογή των δύο μελών γίνεται με $C(n-1,2)$. Συνεπώς οι τρόποι είναι: $n \cdot C(n-1,2)$

Άσκηση 4 (Μονάδες 25)

(Ερώτημα 1) Ένα φορτηγό περιέχει 100 συσκευασίες των 10kg και 100 συσκευασίες των 20kg ενός συγκεκριμένου προϊόντος. Το φορτηγό πρόκειται να εξυπηρετήσει τις ανάγκες δύο διακεκριμένων supermarket που είναι ακριβώς 1000kg και 2000kg αντίστοιχα. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα εξυπηρετηθούν τα δύο supermarket, αν από το πρώτο υπάρχει η απαίτηση να παραλάβει τουλάχιστον 20 συσκευασίες των 10kg και 10 συσκευασίες των 20kg, ενώ από το δεύτερο δεν τίθεται κανένας περιορισμός (Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή).

(Ερώτημα 2) B) Ένα διαγώνισμα αποτελείται από 3 διακεκριμένα ερωτήματα . Αν για τη μέγιστη δυνατή βαθμολογία κάθε ερωτήματος επιλέξουμε ανάμεσα σε 8,12,16 ή 20 μονάδες, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των μονάδων ώστε το άριστο γραπτό να βαθμολογηθεί με 40 μονάδες; Επιλύστε το πρόβλημα με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων, σχηματίστε δηλαδή τη γεννήτρια συνάρτηση και υπολογίστε το συντελεστή του όρου που δίνει την απάντηση στο ερώτημα.

Λύση:

(Ερώτημα 1) Παρατηρώ ότι το φορτηγό περιέχει συσκευασίες συνολικού βάρους 100*10+100*20=3000 κιλών. Οι συνολικές ανάγκες των δύο supermarket είναι ακριβώς 3000 κιλά. Συνεπώς αν σχηματίσουμε γεννήτρια συνάρτηση για την επιλογή των συσκευασιών για το 1ο supermarket, η επιλογή των συσκευασιών για το 2ο supermarket γίνεται με 1 τρόπο (αφού θα πάρει τις συσκευασίες που απομένουν).

Χρησιμοποιούμε απλή γεννήτρια συνάρτηση αφού πρόκειται για πρόβλημα επιλογής:

- Απαριθμητής για τις συσκευασίες των 10kg: Η επιλογή μιας συσκευασίας των 10kg συμβάλλει κατά 10 στην επιλογή των 1000kg και πρέπει να επιλεχθούν τουλάχιστον 20 συσκευασίες συνεπώς ο απαριθμητής είναι: $x^{200}+x^{210}+\cdots+x^{1000}$
- Απαριθμητής για τις συσκευασίες των 20kg: Η επιλογή μιας συσκευασίας των 20kg συμβάλλει κατά 20 στην επιλογή των 1000kg και πρέπει να επιλεχθούν τουλάχιστον 10 συσκευασίες συνεπώς ο απαριθμητής είναι: $x^{200}+x^{220}+\cdots+x^{2000}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι $(x^{200}+x^{210}+\cdots+x^{1000})\cdot(x^{200}+x^{220}+\cdots+x^{2000})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης

(Ερώτημα 2)

Χρησιμοποιώ απλή γεννήτρια συνάρτηση διότι πρόκειται για πρόβλημα επιλογής βαθμολογίας για κάθε ένα από τα τρία ερωτήματα.

- Ο απαριθμητής για το 1ο ερώτημα είναι: $x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}$
- Ο απαριθμητής για το 2ο ερώτημα είναι: $x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}$
- Ο απαριθμητής για το 3ο ερώτημα είναι: $x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}$

Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $(x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.