ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-2
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Έστω A σύνολο με n στοιχεία

1. Τα υποσύνολα του A με k στοιχεία είναι όσα τα υποσύνολα με n-k στοιχεία.
   Σωστό. Τα υποσύνολα του A με k στοιχεία είναι $\binom{n}{k}$ και τα υποσύνολα με n-k στοιχεία είναι $\binom{n}{n-k}$.
   Ισχύει: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. Οι λέξεις μήκους k που σχηματίζονται με αλφάβητο το A είναι όσες ο συντελεστής του x^k στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!})^n$.
   Λάθος. Οι λέξεις μήκους k που σχηματίζονται με αλφάβητο το A είναι n^k και ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!})^n$ είναι n^k. Άρα ο συντελεστής του x^k είναι $\frac{n^k}{k!}$
3. Τα υποσύνολα του A με n στοιχεία είναι όσα ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x)^n$.
   Σωστό. Τα υποσύνολα του A με n στοιχεία είναι $\binom{n}{n}$ και ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x)^n$ είναι επίσης $\binom{n}{n}$.
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με k στοιχεία, μειώνεται καθώς μειώνεται το k.
   Λάθος. Π.χ. αν n=3, τότε έχουμε ότι $\binom{3}{1} = 3$, ενώ $\binom{3}{0} = 1$

(2) Τρεις διακεκριμένες κληρωτίδες κληρώνουν τυχαία και ισοπίθανα έναν αριθμό από το 0 εώς το 9

1. Η πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον ένα μηδενικό είναι $9^3/10^3$
   Λάθος. Η πιθανότητα είναι $\frac{10^3-9^3}{10^3}$
2. Η πιθανότητα να μη έρθει μηδενικό είναι $9^3/10^3$
   Σωστό. Η πιθανότητα είναι $\frac{9^3}{10^3}$
3. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι ίσο με 1 είναι $3/10^3$
   Σωστό. Η πιθανότητα είναι $\frac{3}{10^3}$.Ο αριθμητής προκύπει με καταμέτρηση (0-0-1, 0-1-0, 1-0-0)
4. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι το πολύ 2 είναι $1/10^2$
   Σωστό. Η πιθανότητα είναι $\frac{10}{10^3} = \frac{1}{10^2}$.Ο αριθμητής προκύπει με καταμέτρηση (Αποτέλεσμα 0: 0-0-0, Αποτέλεσμα 1: 0-0-1, 0-1-0, 1-0-0, Αποτέλεσμα 2: 0-0-2, 0-2-0, 2-0-0, 1-1-0, 1-0-1, 0-1-1)

(3) Πόσοι διαφορετικοί τετραγωνικοί πίνακες 20 x 20 υπάρχουν στους οποίους κάθε στοιχείο του πίνακα είναι είτε 0 είτε 1;

Κεντρικό: Είναι 2^{400} ως ΔΜΕ

1. $C(400,k)$ αν k από τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 και τα υπόλοιπα είναι 0.
   Σωστό. Ισχύει ότι: $C(400,k)=\frac{400!}{k!(400-k)!}$ ενώ σε ένα τετραγωνικό πίνακα 20 x 20 αν k από τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 και τα υπόλοιπα είναι 0 είναι μεταθέσεις ομάδων ομοίων άρα είναι: $\frac{400!}{k!(400-k)!}$
2. Όσοι ο συντελεστής του $x^{400}/400!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{400}}{400!})^2$.
   Σωστό. Ο ζητούμενος συντελεστής είναι 2^{400}.
3. 2^{100}
   Λάθος.
4. Όσες οι διαφορετικές, μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης: $z_0+z_1=400$
   Λάθος. Οι λύσεις (ως διανομή ομοίων) είναι: $\binom{400+2-1}{400}=\binom{401}{400}$

(4) Έστω $\varphi=p_1\to p_2$ και $\psi=p_2\vee\neg p_1$ όπου p_1,p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές.

Κεντρικό: Κάνοντας τον πίνακα αληθείας των δύο τύπων εξάγουμε ότι οι δύο τύποι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι (αληθεύουν στις ίδιες αποτιμήσεις, άρα φ=ψ). Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι παρατηρώντας ότι ο φ γράφεται από τον 1$^{\text{ο}}$ νόμο της αντικατάστασης $\neg p_1\vee p_2$ και έπειτα από το νόμο της αντιμεταθετικότητας $p_2\vee\neg p_1$

1. $\varphi\vDash\psi$
   Σωστό. Στις αποτιμήσεις που αληθεύει ο φ αληθεύει και ο ψ.
2. $\varphi\vee\neg\psi$ είναι αντίφαση.
   Λάθος. Αφού οι τύποι είναι ισοδύναμοι μπορώ να αντικαταστήσω όπου ψ το φ και έχω τον τύπο $\varphi\vee\neg\varphi$ άρα είναι γνωστή ταυτολογία (ισοδύναμα μπορούμε να το εξακριβώσουμε και από τον πίνακα αληθείας)
3. Το σύνολο τύπων $T=\{\neg\varphi\wedge\psi,\varphi\to\psi,\varphi\vee\neg\varphi\}$ είναι αντιφατικό.
   Σωστό. Ο πρώτος τύπος είναι αντίφαση (κάνοντας αντικατάσταση είναι ο τύπος: $\neg\varphi\wedge\varphi$ που είναι γνωστή ταυτολογία. Άρα δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα. Άρα είναι αντιφατικό.
4. $\neg\varphi\to((\varphi\vee\psi)\to\neg\varphi)\vDash\varphi\vee\neg\psi$
   Σωστό. Ο τύπος στα δεξιά της ταυτολογικής συνεπαγωγής είναι ταυτολογία (διότι με την παραπάνω ανάλυση έχω ότι: $\varphi\vee\neg\psi=\varphi\vee\neg\varphi$). Άρα έχω ... $\vDash A$, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

(5) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Υπάρχει ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος του $p\leftrightarrow(p\vee\neg q)$ που χρησιμοποιεί μόνο τους συνδέσμους $\neg,\to$
   Σωστό. Διότι το σύνολο συνδέσμων $\{\neg,\to\}$ είναι πλήρες.
2. Ισχύει $\vDash(\neg\varphi\to\neg\psi)\to((\neg\varphi\to\psi)\to\varphi)$
   Σωστό. Διότι ο τύπος $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to((\neg\varphi\to\psi)\to\varphi)$ είναι ταυτολογία (είναι το ΑΣ3)
3. Ισχύει $\vdash(\varphi\wedge\psi)\to(\varphi\vee\psi)$
   Σωστό. Ελέγχω αν $\vDash(\varphi\wedge\psi)\to(\varphi\vee\psi)$ (από τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας) δηλαδή αν ο τύπος $(\varphi\wedge\psi)\to(\varphi\vee\psi)$ είναι ταυτολογία. Κάνοντας τον πίνακα αλήθειας διαπιστώνουμε ότι όντως είναι ταυτολογία, άρα το ερώτημα είναι σωστό.
4. Ο τύπος $(\varphi\to(\neg\varphi\to\neg\neg\varphi))\to((\varphi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\neg\neg\varphi))$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 με συντακτική αντικατάσταση.
   Σωστό. Προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 θέτοντας όπου $\varphi{:}\ \varphi$, όπου $\psi{:}\ \neg\varphi$ και όπου $\chi{:}\ \neg\neg\varphi$

(6) *Στις παρακάτω προτάσεις αναφέρονται οι γεννήτριες συναρτήσεις απλών προβλημάτων απαρίθμησης.*

1. Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $x^r(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των υποσυνόλων με $(k-r)$ στοιχεία ($k \geq r$) ενός n-μελους συνόλου

   Σωστό. Παράγουμε με (αλγεβρικές) πράξεις τον όρο x^k στο ανάπτυγμα της γεννήτριας:

$$x^r(1+x)^n = x^r\left(1+x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{k-r}x^{k-r}+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right)$$
$$= x^r + x^{r+1} + \binom{n}{2}x^{r+2}+\cdots+\binom{n}{k-r}x^{k-r+r}+\cdots+\binom{n}{n}x^{n+r}$$
$$= x^r + x^{r+1} + \binom{n}{2}x^{r+2}+\cdots+\binom{n}{k-r}x^{k}+\cdots+\binom{n}{n}x^{n+r}$$

   Συνεπώς ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{n}{k-r}$ που είναι ίσος με τον αριθμό των υποσυνόλων με $(k-r)$ στοιχεία ($k \geq r$) ενός n-μελους συνόλου

2. Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1-x)^{-n}$ δίνει τον αριθμό των συνδυασμών k αντικειμένων από n

   Λάθος. Η γεννήτρια είναι: $(1-x)^{-n} = \frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1^n}{(1-x)^n} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1+x+x^2+\cdots)^n$. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{n+k-1}{k}$ και δεν είναι ισο με τον αριθμός των συνδυασμών k αντικειμένων από n

3. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση e^{nx} δίνει τον αριθμό των διατάξεων k αντικειμένων από n

   Λάθος. Η γεννήτρια είναι: $e^{nx} = (e^x)^n = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^n$. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι n^k που δεν είναι ίσος με τον αριθμός των διατάξεων χωρίς επανάληψη.

4. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση e^{nx} δίνει τον αριθμό των τρόπων διανομής k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές, όταν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές.

   Σωστό. Η γεννήτρια είναι: $e^{nx} = (e^x)^n = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^n$. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι n^k που είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων διανομής k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές, όταν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές.

(7) Το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης: $x_1+x_2+\cdots+x_n = m,\ x_i \in \mathbb{N},\ x_i > 0$ με $m > n$ είναι ίσος με:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ. Δίνουμε πρώτα μία μονάδα σε κάθε μεταβλητή για να ικανοποίησουμε τον περιορισμό. Απομένουν m-n μονάδες που τις διανέμουμε στις n υποδοχές με: $\binom{(m-n)+n-1}{m-n} = \binom{m-1}{m-n}$

1. $\binom{n+m-1}{n}$

Λάθος.

2. m^n

Λάθος.

3. $\binom{m-1}{m-n}$

Σωστό.

4. $\binom{n-1}{n-m}$

Λάθος.

(8) *Το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 6 που μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Α και Β ώστε κάθε σύμβολο να εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά είναι ίσο με:*

ΚΕΝΤΡΙΚΟ. Οι συμβολοσειρές χωρίς περιορισμό είναι: 2^6. Οι συμβολοσειρές που δεν έχουν Α είναι 1 (είναι η συμβολοσειρά μήκους 6 που περιέχει μόνο Β). Οι συμβολοσειρές που δεν έχουν Β είναι 1 (είναι η συμβολοσειρά μήκους 6 που περιέχει μόνο Α). Συνεπώς οι συμβολοσειρές που έχουν τουλάχιστον μία φορά το Α και το Β είναι 2^6-2

1. Το συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}\right)^2$

Σωστό. Ελέγχουμε την μοντελοποίηση της γεννήτριας. Σωστά χρησιμοποιείται εκθετική γεννήτρια (αφού είναι πρόβλημα διατάξεων). Σωστοί είναι οι απαριθμητές (δύο απαριθμητές, ένας για κάθε γράμμα που μπορεί να εμφανιστεί στην διάταξη από 1 εώς 6 φορές). Σωστός είναι ο ζητούμενος συντελεστής (όσες και οι θέσεις της διάταξης)

2. Το συντελεστή του $\frac{x^4}{4!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^5}{5!}\right)^2$

Λάθος. Ο ζητούμενος συντελεστής είναι 2^4.

3. Τα διαφορετικά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν αν ρίξουμε ταυτόχρονα δύο διακεκριμένα ζάρια.

Λάθος. Οι ρίψεις δύο διαφορετικών ζαριών είναι 6^2.

4. Τους τρόπους τοποθέτησης 6 διακεκριμένων βιβλίων σε 2 διακεκριμένα ράφια ώστε σε κάθε ράφι να τοποθετηθεί τουλάχιστον ένα βιβλίο, χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι και με την υπόθεση ότι κάθε ράφι μπορεί να χωρέσει και τα 6 βιβλία.

Σωστό. Οι τοποθετήσεις χωρίς περιορισμό είναι: 2^6 (διανομή διαφορετικών χωρίς σειρά). Οι τοποθετήσεις που στο 1ο ράφι δεν υπάρχει βιβλίο είναι 1 (όλα τα βιβλία στο 2ο ράφι). Οι τοποθετήσεις που στο 2ο ράφι δεν υπάρχει βιβλίο είναι 1 (όλα τα βιβλία στο 1ο ράφι). Συνεπώς οι τοποθετήσεις είναι 2^6-2

(9) Έστω φ, ψ προτασιακοί τύποι. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν;

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όλο το ερώτημα λυνεται με αληθοπίνακα. Παρατίθενται τα συμπεράσματα από την κατασκευή του αληθοπίνακα.

1. $\varphi \vee \psi \models \varphi \to \psi$

Λάθος. Στην αποτίμηση φ=Α,ψ=Ψ, αληθεύει η υπόθεση και δεν αληθεύει το συμπέρασμα.

2. $\neg\psi \to \neg\varphi \models \varphi \to \psi$

Σωστό. Στις αποτιμήσεις που αληθευει η υπόθεση, αληθεύει και το συμπέρασμα.

3. $\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models \neg\varphi$

Σωστό. Η υπόθεση είναι αντίφαση (άρνηση ΑΣ1)

4. $\varphi \to \neg\varphi \models \psi \to \neg\varphi$

Σωστό. Η υπόθεση αληθεύει για φ=Α,ψ=Α και φ=Α,ψ=Ψ. Στις αποτιμήσεις αυτές αληθεύει και το συμπέρασμα της λογικής συνεπαγωγής.

(10) Θεωρούμε το αξιωματικό σύστημα του προτασιακού λογισμού. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο τύπος: $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ1 με συντακτική αντικατάσταση.
   Λάθος. Έχει αντικατασταθεί το φ στο ΑΣ1 και με φ και με $\neg\neg\varphi$
2. Ο τύπος: $(\neg\neg\varphi \to \neg(\psi \to \chi)) \to ((\neg\neg\varphi \to (\psi \to \chi)) \to \neg\varphi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.
   Σωστό με την συντακτική αντικατάσταση: φ: $\neg\varphi$ και ψ: $(\psi \to \chi)$
3. Το $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ προκύπτει άμεσα από το $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ με εφαρμογή του θεωρήματος απαγωγής.\
   Σωστό. Πρόκειται για την ευθεία χρήση του θεωρήματος απαγωγής
4. Το $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ προκύπτει άμεσα από το $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ με εφαρμογή του θεωρήματος αντιθετοαναστροφής.
   Σωστό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

i) Πέντε φίλοι κάθονται σε ένα στρογγυλό τραπέζι για να παίξουν χαρτιά. Οι καρέκλες του τραπεζιού είναι αριθμημένες. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν;
ii) Οι πέντε φίλοι αρχίζουν ένα παιγνίδι χαρτιών έχοντας καθένας στην αρχή 100 ευρώ. Κάθε ποντάρισμα είναι για ποσό πολλαπλάσιο του 1 ευρώ και κανένας παίκτης δεν δανείζεται από άλλους οπότε δεν μπορεί να χάσει παρά το πολύ το αρχικό του ποσό. Στο τέλος του παιγνιδιού το σύνολο των χρημάτων είναι κατανεμημένο στους 5 παίκτες. Πόσα είναι τα πιθανά αποτελέσματα του παιχνιδιού, όταν δύο αποτελέσματα διαφοροποιούνται αν τα χρήματα έστω και ενός παίκτη είναι διαφορετικά;
iii) Όταν το παιχνίδι του (ii) τελειώνει, γνωρίζουμε ότι 2 συγκεκριμένοι παίκτες κέρδισαν χρήματα, ο τρίτος είναι «στα λεφτά του» και οι άλλοι δύο έχασαν. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον εκθέτη ο συντελεστής του οποίου δίνει τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων.
iv) Με πόσους τρόπους μπορεί να μοιραστούν οι φιγούρες της τράπουλας (12 χαρτιά) στους 5 παίκτες έτσι ώστε ο 1ος παίκτης να πάρει μέχρι 4 χαρτιά, ο 2ος κι ο 3ος παίκτης από 2 έως 6 ο καθένας, ο 4ος παίκτης να πάρει τους δυο μαύρους ρηγάδες κι ο 5ος παίκτης τους δυο κόκκινους ρηγάδες; Απαντήστε υποδεικνύοντας το συντελεστή κατάλληλης γεννήτριας συνάρτησης

Λύση:

(i)
Οι τρόποι είναι 5! ως διατάξεις χωρίς επανάληψη (προσοχή: δεν έχει το συνήθη περιορισμό του κυκλικού τραπεζιού ότι θεωρούνται όμοιες δύο μετατοπίσεις αν συναντάμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα, άρα δεν πρέπει να διαιρέσουμε με το πλήθος των θέσεων της διάταξης)

(ii)
Ως διανομή 500 ομοίων αντικειμένων (1 ευρώ) σε υποδοχές (5 παίκτες) οι τρόποι είναι: $\binom{500+5-1}{500}=\binom{504}{500}$

(iii)
Χρησιμοποιούμε απλή γεννήτρια συνάρτηση διότι είναι πρόβλημα διανομής ομοίων αντικειμένων σε υποδοχές:

- Ο απαριθμητης για τους δύο παίκτες που έχασαν χρήματα (άρα τελειωσαν το παιχνίδι με 0…99 ευρώ) θα είναι: $1+x+x^2+\cdots+x^{99}$.
- Ο απαριθμητης για τον παίκτη που είναι στα λεφτά του (άρα τελειωσε το παιχνίδι με 100 ευρώ) θα είναι: x^{100}.
- Ο απαριθμητης για τους δύο παίκτες που κέρδισαν χρήματα (άρα τελειωσαν το παιχνίδι με 101…500 ευρώ) θα είναι:$x^{101}+x^{102}+\cdots+x^{500}$.

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(1+x+x^2+\cdots+x^{99})^2(x^{100})(x^{101}+x^{102}+\cdots+x^{500})^2$

Και το ζητούμενο δίδεται από το συντελεστή του x^{500} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

(iv)
Χρησιμοποιούμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση διότι είναι πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές.

Δεν συνεκτιμούμε τον 4^o και τον 5^o παίκτη γιατί θα πάρουν τα δύο χαρτιά τους με 1 τρόπο. Για τα υπόλοιπα 8 χαρτιά έχουμε:

- Ο απαριθμητης για τον 1^o παίκτη είναι: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$.
- Ο απαριθμητης για τον 2^o παίκτη είναι: $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}$.
- Ο απαριθμητης για τον 3^o παίκτη είναι: $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}$.

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}.\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)^2$

Και το ζητούμενο δίδεται από το συντελεστή του $\frac{x^8}{8!}$ Στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Άσκηση 2 (Μονάδες 25)

(1) Δείξτε ότι $\chi \to (\psi \to \varphi) \vdash (\varphi \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \neg(\varphi \to \chi)) \to \neg\chi)$ όταν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού (αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας)
(2) Αποδείξτε ότι $\{\neg\psi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ χωρίς χρήση των θεωρήματων του προτασιακού λογισμού
(3) Αποδείξτε ότι $\{\neg\varphi \to \neg\psi,\ \neg\varphi \to (\neg\psi \to \psi)\} \vdash \neg\varphi \to \psi$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα γνωστά θεωρήματα του προτασιακού λογισμού

Λύση:
(1)
Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να δείξω ότι:
$\{\chi \to (\psi \to \varphi), \varphi \to \chi\} \vdash ((\psi \to \varphi) \to \neg(\varphi \to \chi)) \to \neg\chi$
Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να δείξω ότι:
$\{\chi \to (\psi \to \varphi), \varphi \to \chi, (\psi \to \varphi) \to \neg(\varphi \to \chi)\} \vdash \neg\chi$
Από το θεώρημα της αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω ότι:
$\{\chi \to (\psi \to \varphi), \chi, (\psi \to \varphi) \to \neg(\varphi \to \chi)\} \vdash \neg(\varphi \to \chi)$
Που έχει τυπική απόδειξη:

1. χ Υπόθεση
2. $\chi \to (\psi \to \varphi)$ Υπόθεση
3. $(\psi \to \varphi) \to \neg(\varphi \to \chi)$ Υπόθεση
4. $\psi \to \varphi$ MP1,2
5. $\neg(\varphi \to \chi)$ MP4,3

(2)
Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \neg\varphi,\ \psi: \psi$
3. $\neg\psi \to \neg\varphi$ MP1,2
4. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \varphi)$ ΑΣ3
5. $(\neg\psi \to \varphi) \to \varphi$ MP3,4
6. $\neg\psi \to \varphi$ Υπόθεση
7. φ MP6,5

(3)
Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \psi)$ Υπόθεση
2. $(\neg\varphi \to (\neg\psi \to \psi)) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \to \psi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου $\varphi: \neg\varphi,\ \psi: \neg\psi, \chi: \psi$
3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \to \psi)$ MP1,2
4. $\neg\varphi \to \neg\psi$ Υπόθεση
5. $\neg\varphi \to \psi$ MP4,3

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

(Ερώτημα 1)
Στη βιβλιοθήκη του ΕΑΠ υπάρχουν 10 διαφορετικά βιβλία τα οποία πρόκειται να τα δανειστούν οι 3 φοιτητές Α, Β, Γ.

(1) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο δανεισμός, αν ο Α δανείστηκε 5 βιβλία, ο Β δανείστηκε 3 βιβλία και ο Γ δανείστηκε 2 βιβλία.
(2) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο δανεισμός, αν ο Α δανείστηκε 4 βιβλία, ο Β δανείστηκε 3 βιβλία και ο Γ δανείστηκε 3 βιβλία.
(3) Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο της γεννήτριας ο συντελεστής του οποίου δείχνει τον τρόπο που μπορεί να γίνει ο δανεισμός αυτός αν κάθε φοιτητής πρόκειται να δανειστεί τουλάχιστον ένα βιβλίο και ο Γ άρτιο αριθμό.

(Ερώτημα 2)

1. Στο μανάβικο της γειτονιάς βρίσκονται 8 μήλα, 12 πορτοκάλια και 10 αχλάδια. Όλα τα φρούτα αγοράστηκαν από δύο πελάτες έτσι ώστε κάθε ένας πήρε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος και 15 φρούτα συντολικά. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνατε την δύναμη της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει η αγορά.
2. Υπολογίστε χωρίς τη χρήση γεννήτριας συνάρτησης τον αριθμό των τρόπων που μπορούν να αγοραστούν όλα τα φρούτα αν οι πελάτες είναι τώρα τρεις και κάθε ένας αγόρασε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος χωρίς συνολικό περιορισμό.

Λύση:
(1.1)

Η επιλογή των βιβλίων του Α γίνεται με $\binom{10}{5}$ τρόπους

Η επιλογή των βιβλίων του Β γίνεται με $\binom{5}{3}$ τρόπους

Η επιλογή των βιβλίων του Γ γίνεται με $\binom{2}{2}$ τρόπους

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$ τρόπους.

(1.2)

Η επιλογή των βιβλίων του Α γίνεται με $\binom{10}{4}$ τρόπους

Η επιλογή των βιβλίων του Β γίνεται με $\binom{6}{3}$ τρόπους

Η επιλογή των βιβλίων του Γ γίνεται με $\binom{3}{3}$ τρόπους

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ τρόπους.

(1.3)
Χρησιμοποιούμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση διότι είναι πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές:

- Ο απαριθμητης για τον Α είναι: $x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}$.
- Ο απαριθμητης για τον Β είναι: $x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}$.
- Ο απαριθμητης για τον Γ είναι: $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}$.

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $\left(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}\right)^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}\right)$

Και το ζητούμενο δίδεται από το συντελεστή του $\frac{x^{10}}{10!}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

(2.1)
Δεδομένης μιας επιλογής του 1ου πελάτη, ο 2ος πελάτης θα επιλέξει τα φρούτα του με 1 τρόπο (όσα απομένουν). Θα γράψουμε λοιπόν γεννήτρια συνάρτηση για τον 1ο πελάτη.

Χρησιμοποιούμε απλή γεννήτρια συνάρτηση διότι είναι πρόβλημα επιλογής:

- Ο απαριθμητης για τα μήλα (2..6 ώστε να μείνουν 2 για τον 2ο πελάτη) είναι: $x^2+x^3+\cdots+x^6$.

- Ο απαριθμητης για τα πορτοκάλια (2..10 ώστε να μείνουν 2 για τον 2ο πελάτη) είναι: $x^2+x^3+\cdots+x^{10}$.
- Ο απαριθμητης για τα αχλάδια (2..8 ώστε να μείνουν 2 για τον 3ο πελάτη) είναι: $x^2+x^3+\cdots+x^8$.

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^2+x^3+\cdots+x^{10})\,(x^2+x^3+\cdots+x^8)$

Και το ζητούμενο δίδεται από το συντελεστή του x^{15} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

(2.2)

Δίνουμε 2 φρούτα από κάθε είδος σε κάθε πελάτη για να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό. Απομένουν:

- 2 μήλα. Τα διανέμουμε με $\binom{2+3-1}{2}=\binom{4}{2}$ τρόπους ως διανομή ομοίων
- 6 πορτοκάλια. Τα διανέμουμε με $\binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}$ τρόπους ως διανομή ομοίων
- 4 αχλάδια. Τα διανέμουμε με $\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}$ τρόπους ως διανομή ομοίων

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{4}{2}\binom{8}{6}\binom{6}{4}$

<u>Άσκηση 4 (Μονάδες 20)</u>

(Ερώτημα 1) Αποδείξτε ότι το σύνολο τύπων: $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$ είναι πλήρες.
(Ερώτημα 2) Έστω φ, χ, ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους δίνεται ότι $\varphi \models \psi$, $\psi \vdash_{ΠΛ} \neg\chi$ *και* $\neg\chi \models \varphi$. Δείξτε ότι οι τύποι φ και ψ είναι ισοδύναμοι.

<u>Λύση:</u>

(1)

- <u>Βάση Επαγωγής:</u> Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p.
  - Απόδειξη: Ο τύπος p ήδη δεν χρησιμοποιεί συνδέσμους.
- <u>Επαγωγική Υπόθεση:</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ, ψ, δηλαδή ότι οι τύποι φ, ψ, μπορούν να γραφούν μόνο με τους δεδομένους συνδέσμους.
- <u>Επαγωγικό Βήμα:</u> Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι:
  - Ο τύποι $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$, χρησιμοποιούν ήδη μόνο τους δεδομένους συνδέσμους.
  - Ο τύπος $(\varphi \wedge \psi)$ γράφεται από τον νόμο διπλής άρνησης: $(\varphi \wedge \neg\neg\psi)$ και από τον νόμο άρνησης συνεπαγωγής:$\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
  - Ο τύπος $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ γράφεται από τον 2ο νόμο αντικατάστασης $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, έπειτα από τον νόμο διπλής άρνησης $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)$, και έπειτα από τον νόμο άρνησης συνεπαγωγής: $\neg\big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi)\big)$.

(2)

Έστω $\varphi \models \psi$ (Υπ1) $\psi \vdash_{ΠΛ} \neg\chi$ (Υπ2) *και* $\neg\chi \models \varphi$ (Υπ3)

Από την (Υπ2) και το θεώρημα εγκυρότητας έπεται ότι: $\psi \models \neg\chi$ άρα στις αποτιμήσεις που αληθεύει ο ψ, αληθεύει και ο $\neg\chi$.
Από την (Υπ3) ισχύει ότι στις αποτιμήσεις που αληθεύει ο $\neg\chi$ αληθεύει και ο φ.
Άρα έχουμε ότι στις αποτιμήσεις που αληθεύει ο ψ αληθεύει και ο φ. Άρα $\psi \models \varphi$. Συνεπώς

Άρα έχουμε ψ|=φ και από (Υπ1) έχουμε ότι φ|=ψ. Συνεπώς φ≡ψ