



**Ένα σύνολο τύπων T** θα λέμε ότι είναι **ικανοποιήσιμο** αν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- Πιο τυπικά αν υπάρχει αποτίμηση  $\alpha: \phi \mapsto A \ \forall \phi \in T$

**Παράδειγμα:** Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{p \rightarrow q, p \vee \neg q\}$$

είναι ικανοποιήσιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \vee \neg q$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A

Παρατηρούμε ότι στην αποτίμηση  $p=A, q=A$  αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων, άρα είναι ικανοποιήσιμο

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το συνεπές σύνολο τύπων

**ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΣΥΝΕΠΕΣ**  
(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

**Ένα σύνολο τύπων T** θα λέμε ότι είναι **μη ικανοποιήσιμο** αν δεν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- ...δηλαδή δεν είναι ικανοποιήσιμο!

**Παράδειγμα:** Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{q \rightarrow p, p \wedge \neg q, p \leftrightarrow q\}$$

είναι ικανοποιήσιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

$p$	$q$	$q \rightarrow p$	$p \wedge \neg q$	$p \leftrightarrow q$
A	A	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους A ταυτόχρονα, άρα είναι ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το αντιφατικό σύνολο τύπων

**ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟ**  
(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

Έστω Σύνολο Τύπων T και τύπος  $\phi$ . Θα λέμε ότι :

- το σύνολο τύπων T **ταυτολογικά συνεπάγεται** τον τύπο  $\phi$  ή
  - Ο  $\phi$  είναι **σημασιολογική συνέπεια** του T
  - και συμβολίζουμε με  $T \models \phi$
- αν και μόνο αν
- **για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του T ικανοποιείται και ο  $\phi$**

1. Αν ο  $\phi$  είναι **ταυτολογία** ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
2. Αν το T είναι **αντιφατικό** ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
3. **Εξετάζουμε με βάση τον ορισμό.** Βρίσκουμε τις αποτιμήσεις που ικανοποιούνται οι τύποι του T (όλοι ταυτόχρονα). Σε αυτές πρέπει να αληθεύει και ο  $\phi$  για να ισχύει η ταυτ.συνεπαγωγή.

**Παράδειγμα 1:** Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \rightarrow \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \models \neg p \rightarrow q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

$p$	$q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$
A	A	Ψ	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	A	A
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ

Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ο τύπος  $\phi$  είναι αληθής, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.



Ο συμβολισμός:  $\models \phi$

- Θα σημαίνει ότι ο τύπος  $\phi$  αληθεύει ανεξαρτήτως υποθέσεων
- που σημαίνει ότι ο τύπος  $\phi$  είναι **ταυτολογία**. ( $\emptyset \models \phi$ )

Ο συμβολισμός:  $\phi \equiv \psi$

- Θα σημαίνει ότι οι τύποι  $\phi$  και  $\psi$  είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι**
- Ορίζεται ως:  $\phi \models \psi$  και  $\psi \models \phi$

Θα ισχύει ότι  $\phi \equiv \psi$  αν οι  $\phi, \psi$  έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας

Πιο εποπτικά:

1. ...  $\models A$ .
2.  $\Psi \models \dots$ .
3. Εφαρμογή του ορισμού

**Παράδειγμα 2:** Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \rightarrow \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \models p \rightarrow q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

$p$	$q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
A	A	Ψ	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	A	Ψ
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A

Στην 2<sup>η</sup> αποτίμηση ( $p=A, q=\Psi$ ) ικανοποιούνται οι τύποι του T, αλλά δεν ικανοποιείται ο  $\phi$ . Άρα δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.