ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μάθημα 4.3:
Διαμερίσεις και Χρωματισμοί

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Νέοι Ορισμοί (Διχοτομίσιμο, Πλήρες Διχοτομίσιμο, κ-χρωματίσιμο, σύνολο ανεξαρτησίας)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

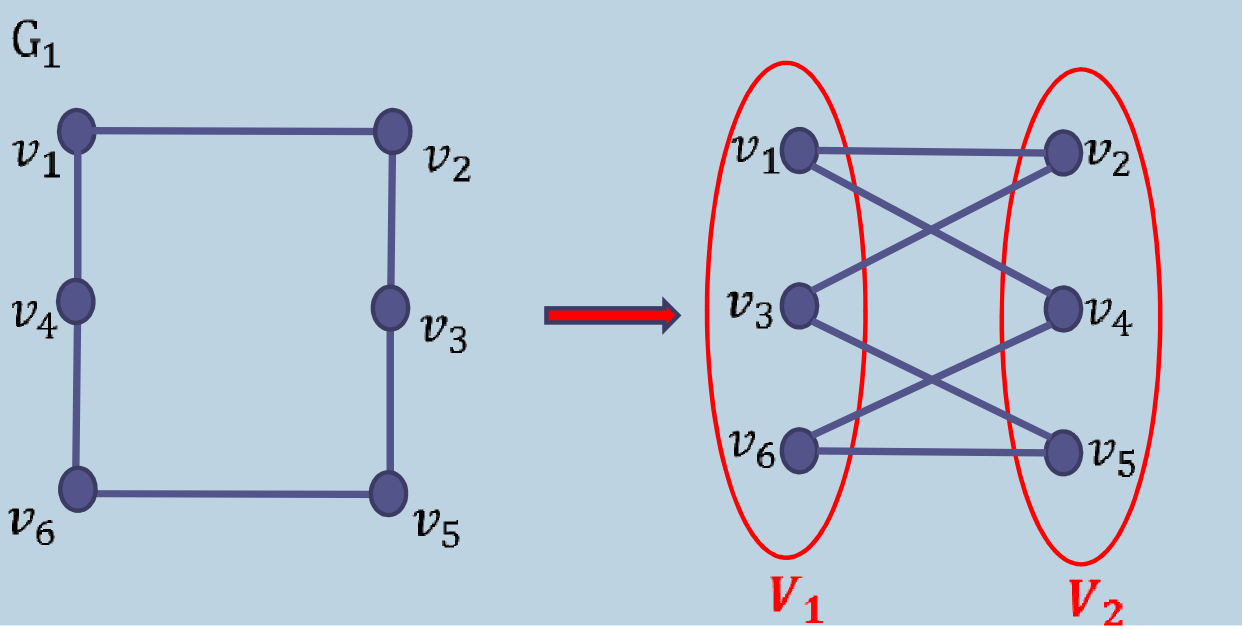
1. Διχοτομίσιμο Γράφημα

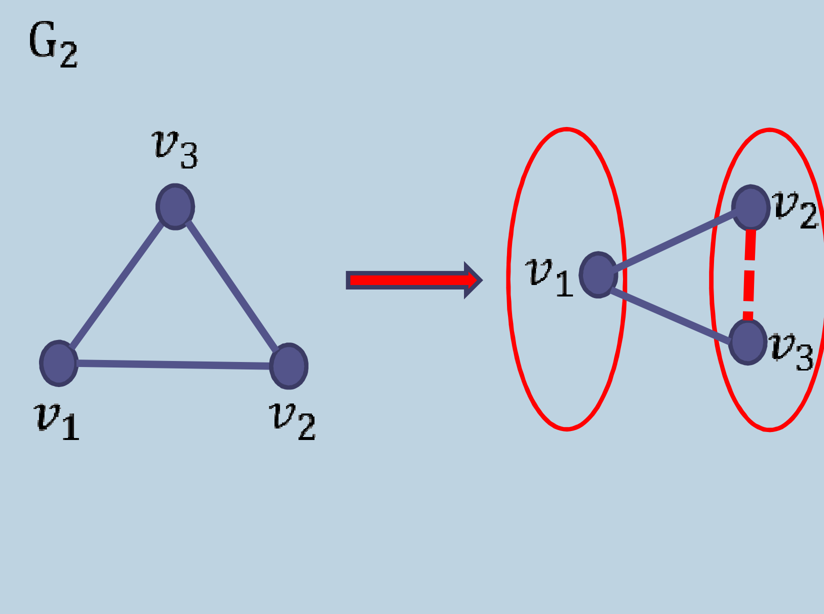
Ορισμός 1 για διχοτομίσιμο γράφημα:

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ είναι **διχοτομίσιμο** (ή **διμερές**) όταν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν (χωριστούν) σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1 και V_2 (δηλαδή $V_1 \cup V_2 = V$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα της άκρο σε κορυφή του V_1 και το άλλο της άκρο της V_2

- Τα σύνολα V_1, V_2 καλούνται **μερίδια κορυφών**.

Παράδειγμα: Ο G_1 είναι διχοτομίσιμος με την διαμέριση: $V_1=\{v_1,v_3,v_6\}$ και $V_2=\{v_2,v_4,v_5\}$. Ο G_2 δεν είναι διχοτομίσιμος.



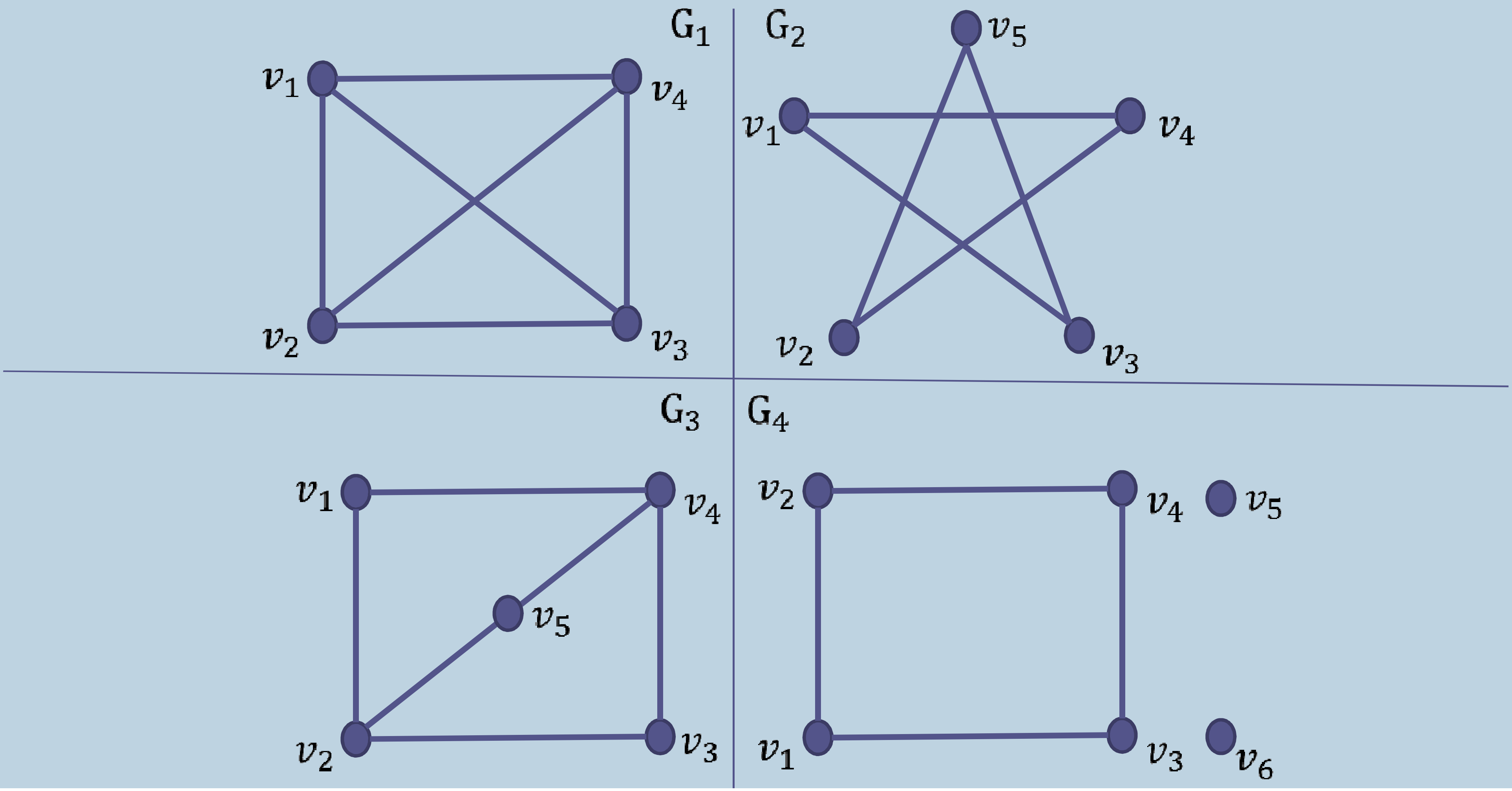


Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

1. Διχοτομίσιμο Γράφημα

Άσκηση: Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι διχοτομίσιμα;



Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

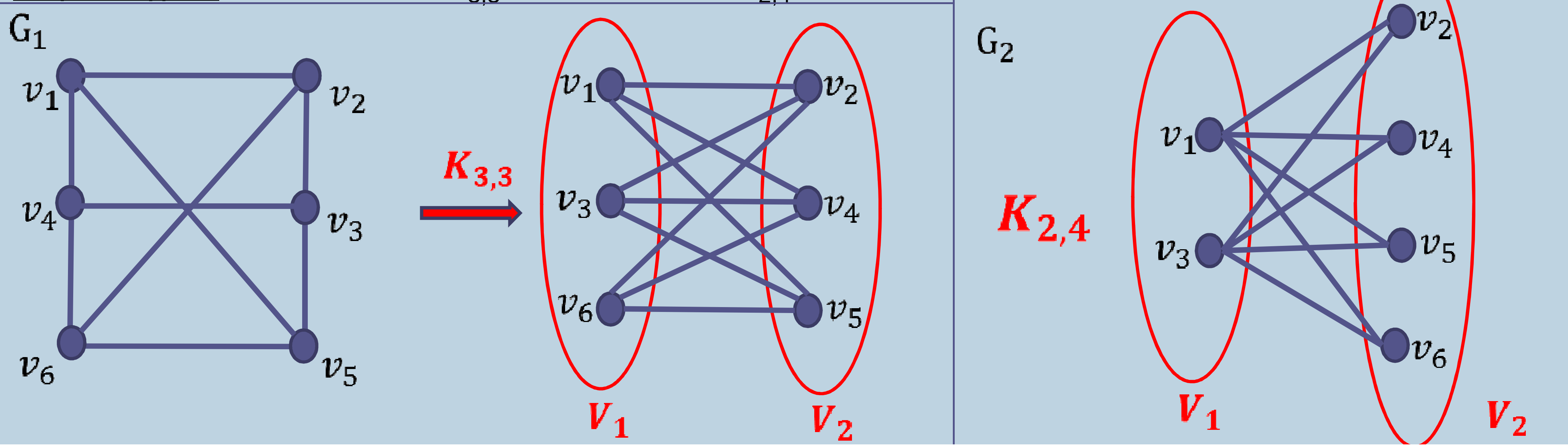
2. Πλήρες ΔιχοτομίσιμοΓράφημα

Ορισμός για πλήρες διχοτομίσιμο γράφημα:

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ είναι **πλήρες διχοτομίσιμο** (ή **πλήρες διμερές**) αν είναι διχοτομίσιμο και περιέχει όλες τις δυνατές ακμές που μπορούν να συνδέουν τις κορυφές του V_1 με τις κορυφές του V_2

- Συμβολίζεται με $\mathbf{K}_{m,n}$ όπου $\mathrm{m}=|\mathrm{V}_1|$, $\mathrm{n}=|\mathrm{V}_2|$ και ισχύει ότι:
  - Έχει $|V|=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ **κορυφές**
  - Έχει $|E|=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ **ακμές**

Παράδειγμα: Ο G1 είναι το $K_{3,3}$. Ο G2 είναι το $K_{2,4}$

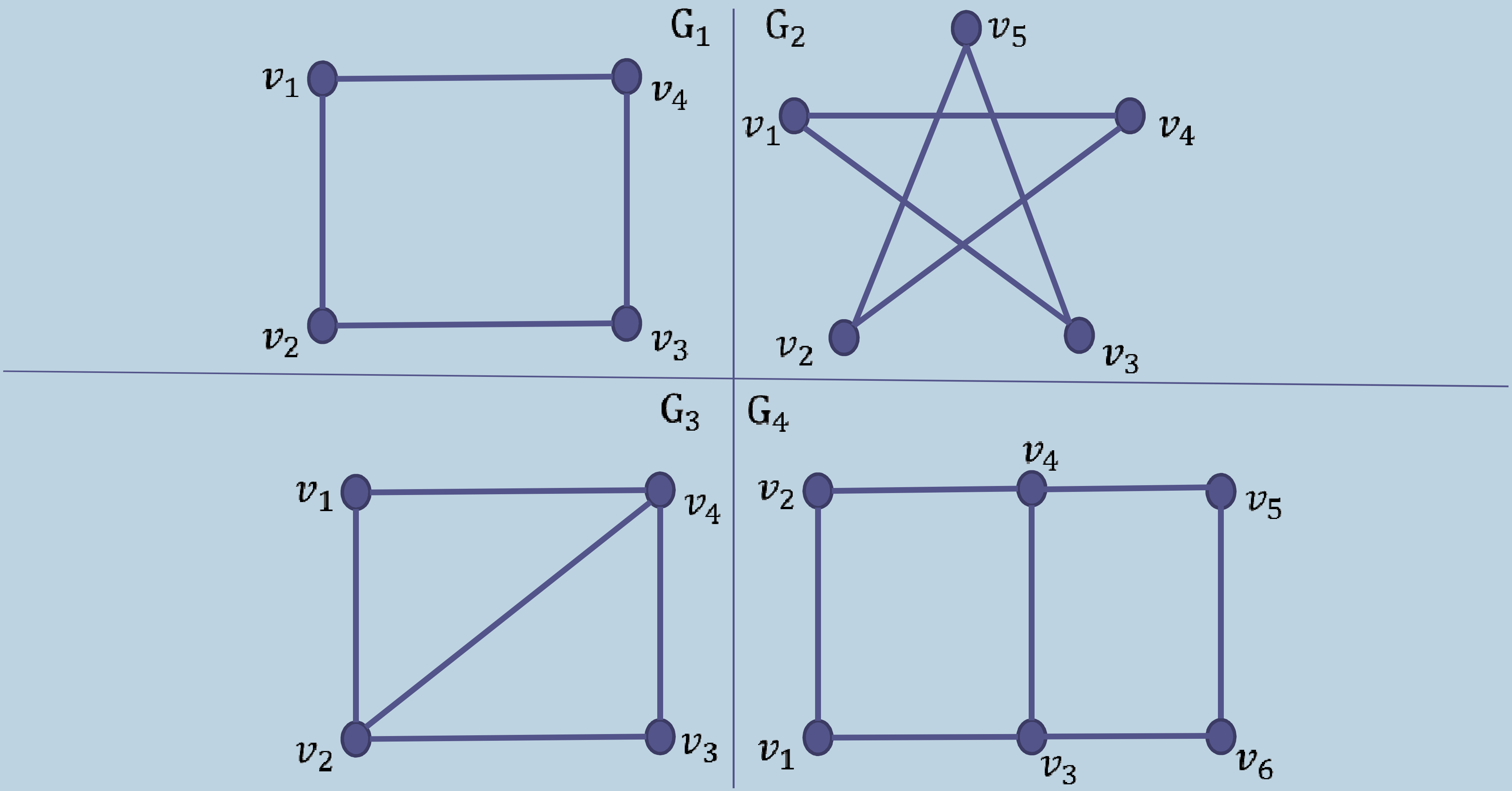


Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

2. Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

Άσκηση: Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι πλήρη διχοτομίσιμα;



Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

3. Σύνολο Ανεξαρτησίας (1. Ορισμός)

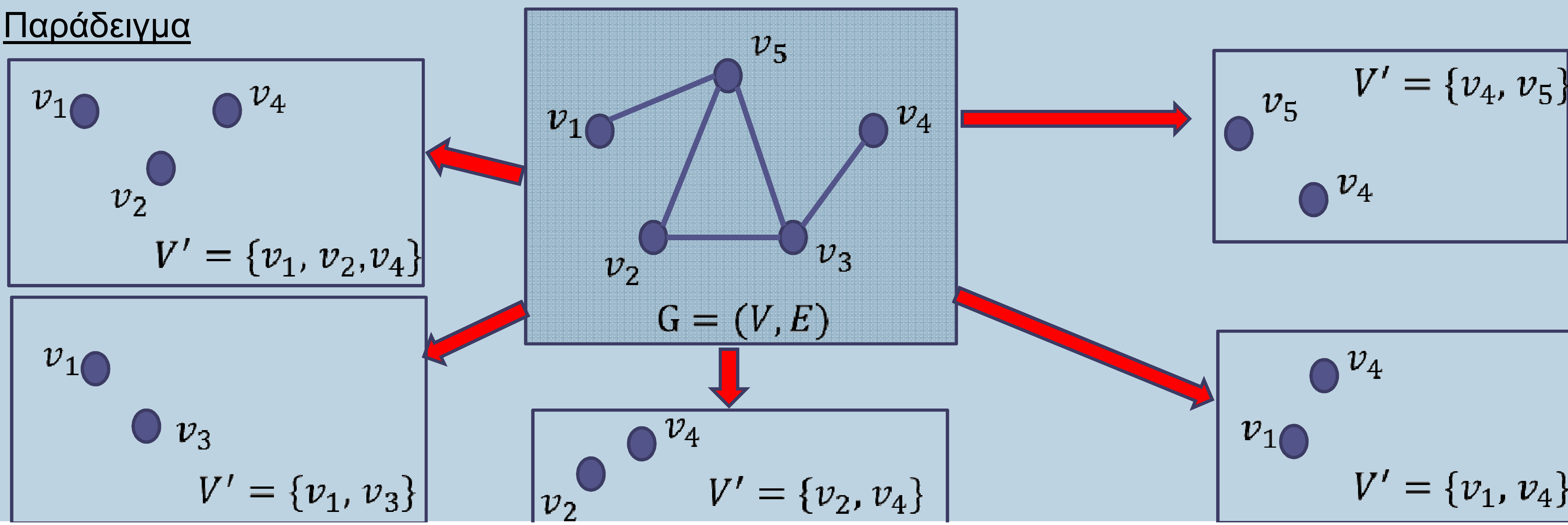
Ορισμός: **Σύνολο Ανεξαρτησίας** ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που δεν συνδέονται με ακμή

Τυπικά:

- Το σύνολο $V' \subseteq V$ είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας του γραφήματος $G = (V, E)$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος $v_i, v_j \in V'$ με $v_i \neq v_j$ ισχύει ότι $[v_i, v_j] \notin E'$

Ουσιαστικά: Για να κατασκευάσουμε ένα σύνολο ανεξαρτησίας επιλέγουμε κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα. Ένα γράφημα έχει πολλά σύνολα ανεξαρτησιάς.

Παράδειγμα



Β. Θεωρία

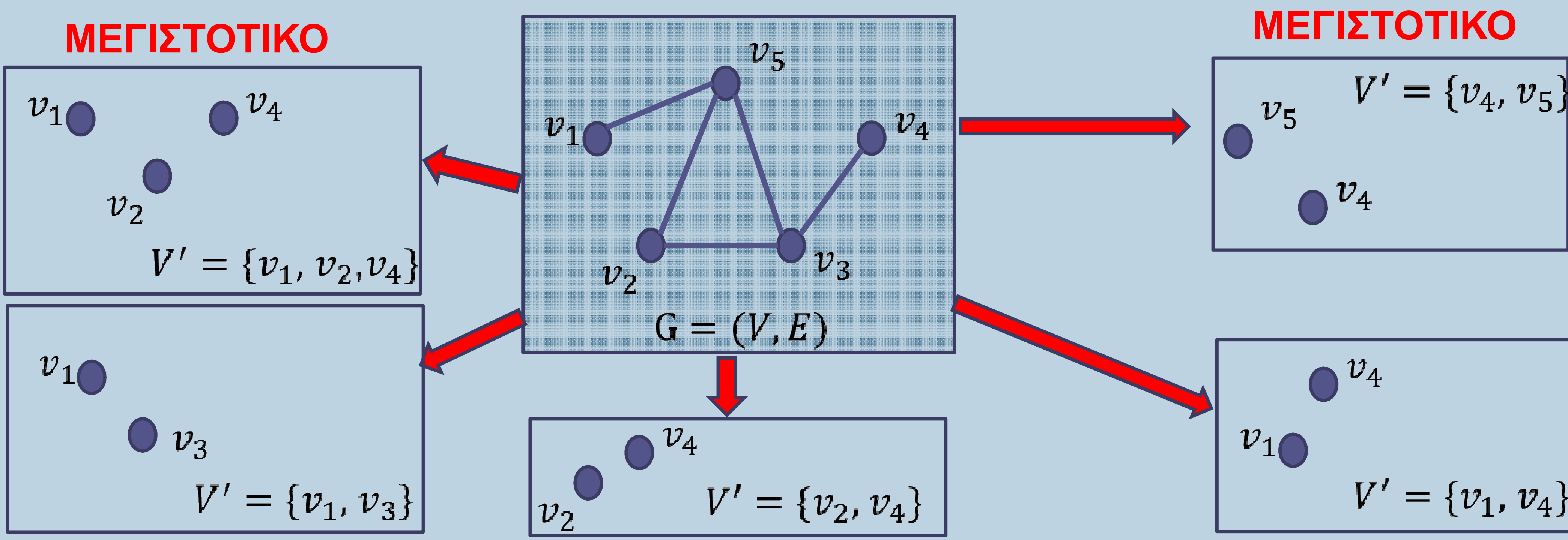
1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

3. Σύνολο Ανεξαρτησίας (2. Μεγιστοτικό Σύνολο Ανεξαρτησίας)

Ένα σύνολο ανεξαρτησίας που δεν μπορεί να επαυξηθεί περαιτέρω (προσθέτοντας του ακόμη μία κορυφή) λέγεται **μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας**.

- Γενικότερα η έννοια του «μεγιστοτικού» είναι μίας δομής που αν την επαυξήσουμε, χάνει την ιδιότητα στην οποία αναφέρεται

Παραδείγματα Μεγιστοτικών Συνόλων



Οχι Μεγιστοτικό (επαυξάνεται με τη v1)

Οχι Μεγιστοτικό (επαυξάνεται με τη v2)

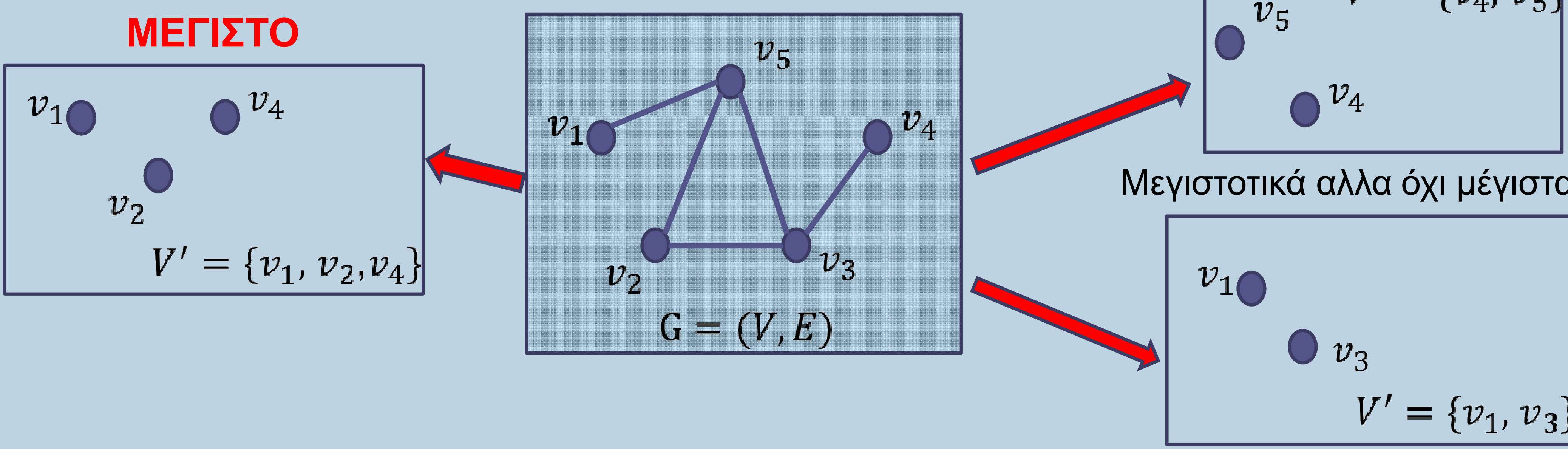
Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

3. Σύνολο Ανεξαρτησίας (3. Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας)

Το μεγαλύτερο (σε πληθάριθμο) μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας καλείται **μεγιστο σύνολο ανεξαρτησίας**.

Παράδειγματα



- Ένα γράφημα μπορεί να έχει πολλά μέγιστα σύνολα ανεξαρτησίας.
- Π.χ. το K_n έχει n μέγιστα σύνολα ανεξαρτησίας (κάθε κορυφή είναι ένα μεγιστοτικό και μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας)
- Το πρόβλημα εύρεσης του μεγίστου συνόλου ανεξαρτησίας σε έναν τυχαίο γράφο είναι πολύ δύσκολο πρόβλημα (NP-Complete, βλ. ΠΛΗ30)

Β. Θεωρία

1. Διχοτομίσιμο και Πλήρες Διχοτομίσιμο Γράφημα

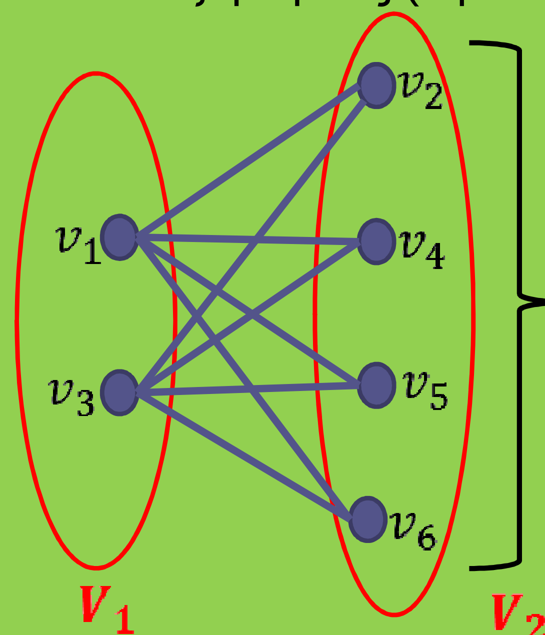
4. Πρόσθετοι Ορισμοί για Διχοτομίσιμα Γραφήματα

Β' Ορισμός Διχοτομίσιμου Γραφήματος

Ένα γράφημα καλείται **διχοτομίσιμο** αν και μόνο αν **οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.**

Πράγματι σε ένα γράφημα που είναι διχοτομίσιμο τα μερίδια των κορυφών V1 και V2 στα οποία διαμερίζονται οι κορυφές του V είναι σύνολα ανεξαρτησίας (αφου οι κορυφές κάθε συνόλου δεν συνδέονται με ακμή:

Το $V_1 = \{v_1, v_3\}$ είναι σύνολο ανεξαρτησίας



Το $V_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ είναι σύνολο ανεξαρτησίας

Γ' Ορισμός Διχοτομίσιμου Γραφήματος

Ένα γράφημα είναι **διχοτομίσιμο** αν και μόνο αν **δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους** (για την απόδειξη βλέπε εφαρμογή 3)

Β. Θεωρία

2. Χρωματισμοί Κορυφών

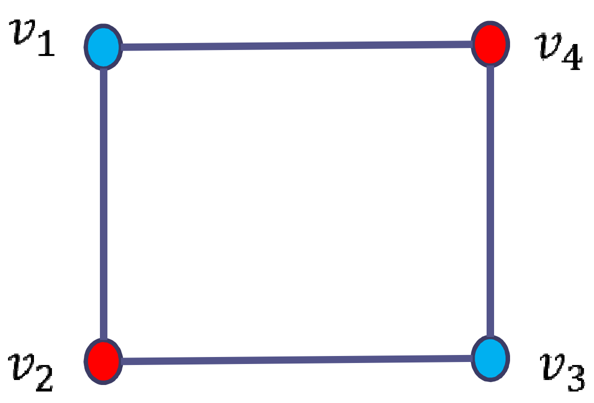
1. k-Χρωματίσιμο (ή k-μερές) Γράφημα

Ορισμός:

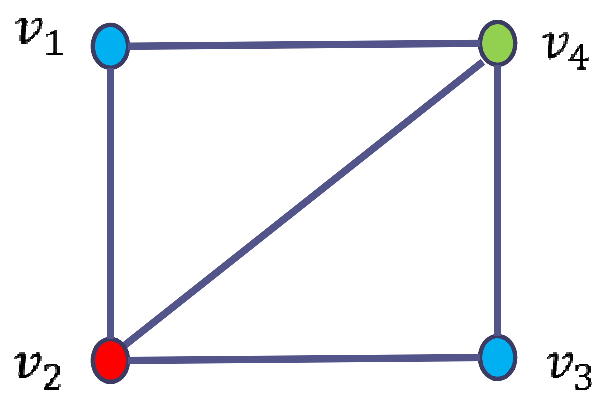
Ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι **k-χρωματίσιμο** αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν με k χρώματα ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

- Ή ισοδύναμα αν μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές σε k σύνολα ανεξαρτησίας (με κάθε σύνολο να χρωματίζεται με ένα χρώμα)
- Ένα k-χρωματίσιμο γράφημα θα λέγεται και **k-μερές** (σε αναλογία το 2-χρωματίσιμο γράφημα έχει 2 σύνολα ανεξαρτησίας, καλείται διμερές)

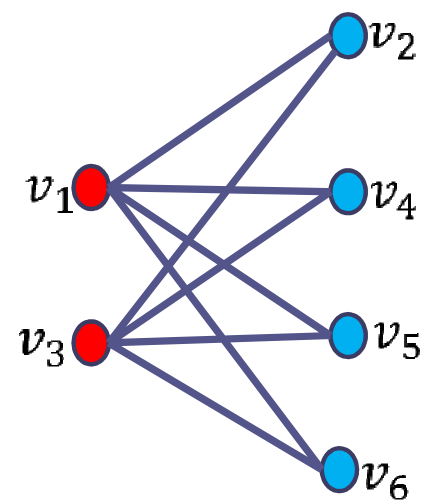
Παράδειγματα:



2-χρωματίσιμος



3-χρωματίσιμος



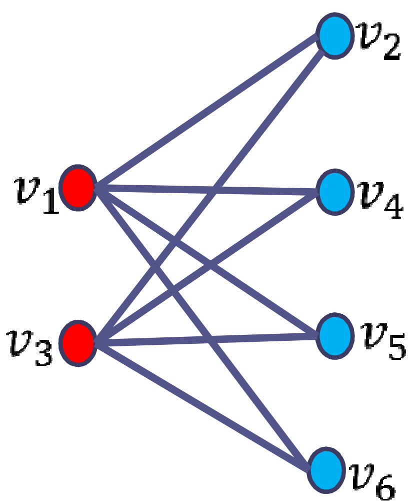
2-χρωματίσιμος

Β. Θεωρία

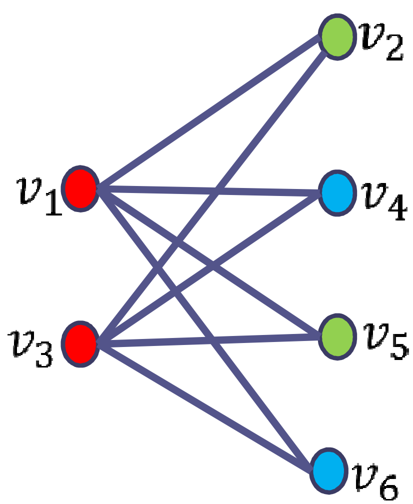
2. Χρωματισμοί Κορυφών

1. k-Χρωματίσιμο (ή k-μερές) Γράφημα

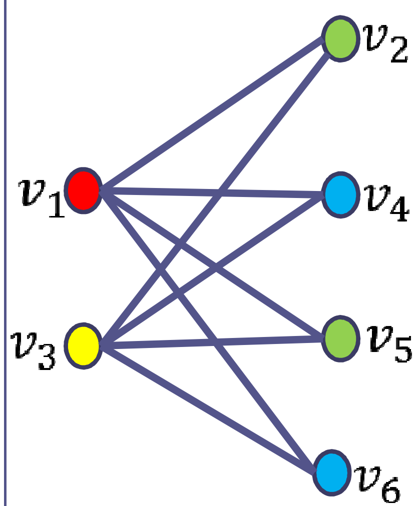
- Ένας έγκυρος χρωματισμός <u>δεν απαιτεί τον χρωματισμό των κορυφών με το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωματών.</u>
- Έτσι αν ένα γράφημα είναι π.χ. 2-χρωματίσιμο, τότε θα είναι και 3-χρωματίσιμο και 4 – χρωματίσιμο, … και n-χρωματίσιμο (βλέπε παράδειγμα)
- <u>Γενικεύοντας ένα k-χρωματίσιμο γράφημα θα είναι και:</u>
    - (k+1)-χρωματίσιμο
    - (k+2)-χρωματίσιμο
    - ….
    - n-χρωματίσιμο



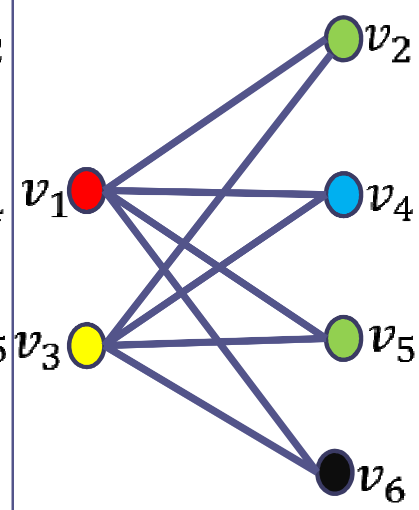
2-χρωματίσιμος



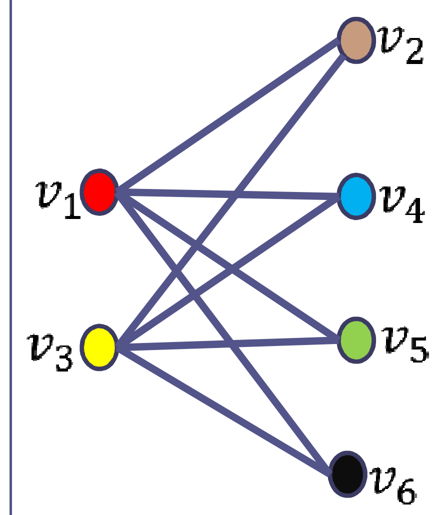
3-χρωματίσιμος



4-χρωματίσιμος



5-χρωματίσιμος



6-χρωματίσιμος

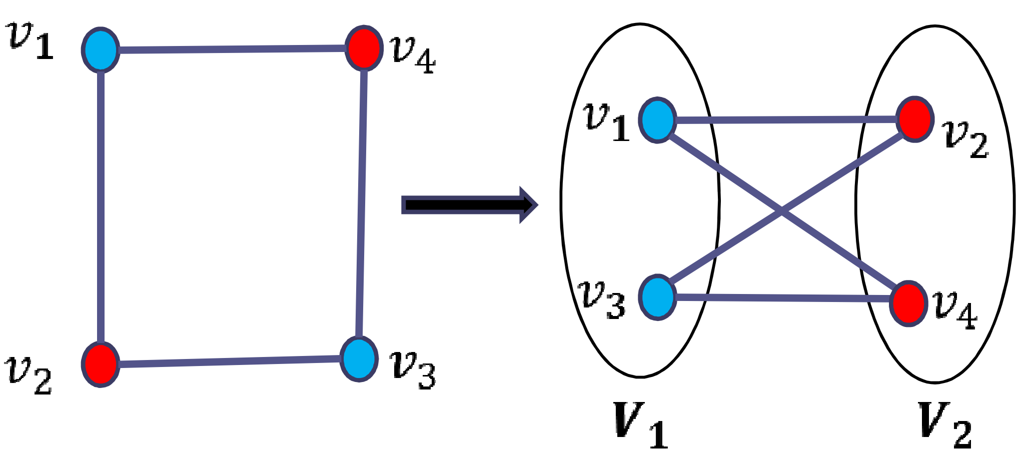
Β. Θεωρία

2. Χρωματισμοί Κορυφών

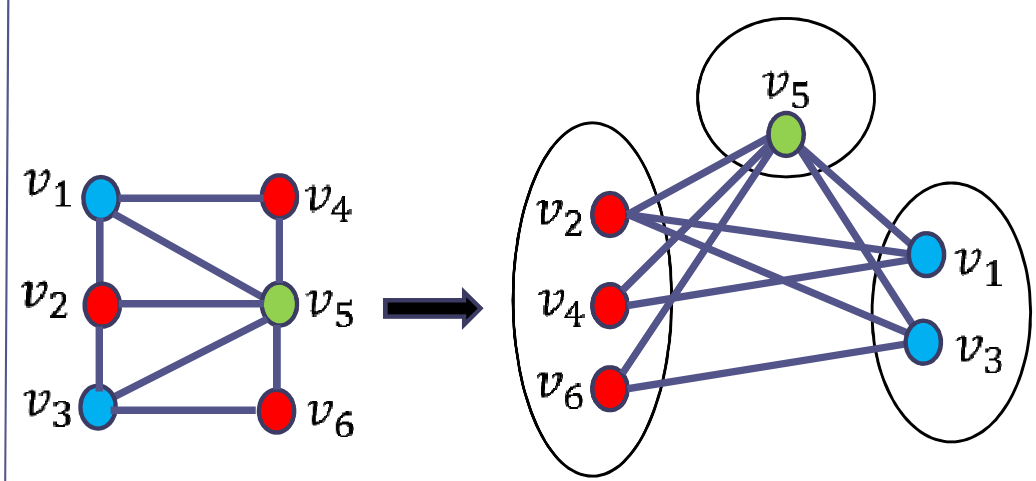
1. k-Χρωματίσιμο (ή k-μερές) Γράφημα

- Το 2-χρωματίσιμο γράφημα λέγεται και 2-μερές (διότι δεδομένου ενός 2-χρωματισμού μπορούμε να χωρίσουμε τις κορυφές σε δύο σύνολα ανεξαρτησιας που οι κορυφές κάθε συνόλου είναι χρωματισμένες με το ίδιο χρώμα.
- Το k-χρωματίσιμο γράφημα λέγεται και k-μερές (διότι δεδομένου ενός k-χρωματισμού μπορούμε να χωρίσουμε τις κορυφές σε k σύνολα ανεξαρτησιας που οι κορυφές κάθε συνόλου είναι χρωματισμένες με το ίδιο χρώμα.

Παράδειγματα



2-χρωματίσιμος άρα και διμερής



3-χρωματίσιμος άρα και τριμερής

Β. Θεωρία

2. Χρωματισμοί Κορυφών

3. Χρωματικός Αριθμός

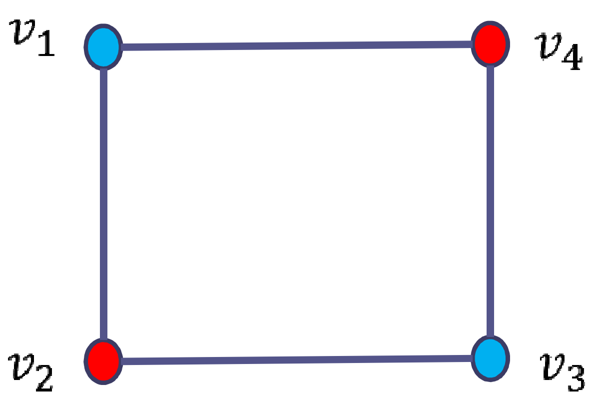
Ορισμός:

Χρωματικός Αριθμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται το ελάχιστο k, για το οποίο ο γράφος είναι k-χρωματίσιμος.

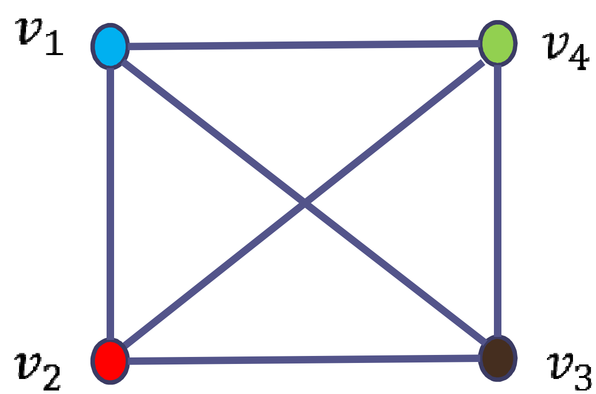
- Συμβολίζεται με $\chi(G)$

Το πρόβλημα της εύρεσης του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (δεν υπάρχει αποδοτικός τρόπος για να βρίσκουμε γρήγορα τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος – το πρόβλημα είναι NP-Complete – βλ. ΠΛΗ30).

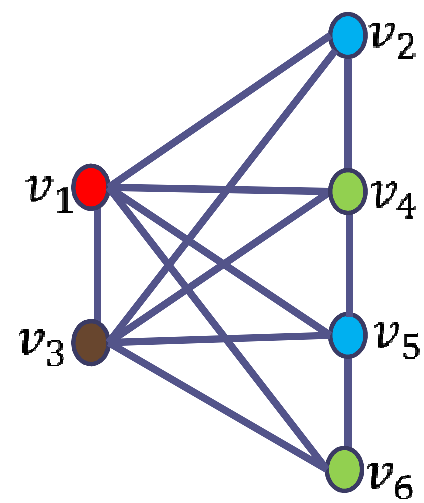
Παράδειγματα:



$\chi(G) = 2$



$\chi(G) = 4$



$\chi(G) = 4$

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 1

Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$. Συμβολίζουμε με $\chi(G)$ τον χρωματικό αριθμό του G, και συμβολίζουμε με G_u το γράφημα που απομένει αν αφαιρέσουμε από το G την κορυφή u και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή.

α) Να κατασκευάσετε γράφημα $G(V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε κορυφή $u \in V$, $\chi(G_u) < \chi(G)$.

β) Να δείξετε ότι κάθε μη συνδεόμενο γράφημα G έχει κορυφή u τέτοια ώστε $\chi(G_u) = \chi(G)$.

γ) Να δείξετε ότι αν για κάθε κορυφή u ενός γραφήματος $G(V, E)$, $\chi(G_u) < \chi(G)$, τότε το γράφημα G είναι συνδεόμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ένα τέτοιο γράφημα είναι το $G=K_3$ (τρίγωνο). Για κάθε κορυφή του u το γράφημα G_u αποτελείται από δύο κορυφές και την ακμή που τις συνδέει. Προφανώς ο χρωματικός αριθμός του G είναι 3, ενώ ο χρωματικός αριθμός για κάθε G_u είναι 2 και η σχέση $\chi(G_u) < \chi(G)$ ισχύει.

β) Εάν ο χρωματικός αριθμός του G είναι n τότε υπάρχει συνεκτική συνιστώσα που έχει αυτόν χρωματικό αριθμό. Θεωρώντας λοιπόν ως u μια κορυφή που δεν ανήκει σ' αυτήν τη συνεκτική συνιστώσα, η αφαίρεσή της (μαζί με τις προσπίπτουσες ακμές) δεν θα επηρεάσει το χρωματικό αριθμό. Συνεπώς θα ισχύει $\chi(G_u) = \chi(G)$.

γ) Ουσιαστικά πρόκειται για ισοδύναμη πρόταση της β) (αντιθετοαντίστροφη). Ο ισχυρισμός είναι ο εξής:

Έστω ότι για κάθε κορυφή u ενός γραφήματος $G(V, E)$, $\chi(G_u) < \chi(G)$. Τότε το γράφημα G είναι συνδεόμενο διότι αν δεν ήταν, σύμφωνα με το β) θα υπήρχε κορυφή u τέτοια ώστε $\chi(G_u) = \chi(G)$, άτοπο.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 2

α) Να δείξετε ότι κάθε διμερές γράφημα με *n* κορυφές περιέχει σύνολο ανεξαρτησίας με τουλάχιστον *n* / 2 κορυφές.

β) Έστω *G* απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με *n* κορυφές οι οποίες μπορούν να χρωματιστούν με *k* χρώματα ώστε καμία ακμή να μην έχει άκρα του ίδιου χρώματος. Να δείξετε ότι το *G* περιέχει σύνολο ανεξαρτησίας με τουλάχιστον *n* / *k* κορυφές.

ΛΥΣΗ

α) Κάθε δέντρο είναι διμερές (διχοτομίσιμο) γράφημα. Συνεπώς μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές του σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας. Το μεγαλύτερο από αυτά περιλαμβάνει τουλάχιστον *n* / 2 κορυφές.

β) Θεωρούμε ένα χρωματισμό των κορυφών του *G* με *k* χρώματα ώστε καμία ακμή να μην έχει άκρα του ίδιου χρώματος. Παρατηρούμε ότι οι κορυφές του ίδιου χρώματος αποτελούν ένα σύνολο ανεξαρτησίας. Επομένως μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές του *G* σε *k* σύνολα ανεξαρτησίας. Το μεγαλύτερο από αυτά περιλαμβάνει τουλάχιστον *n* / *k* κορυφές. Πράγματι, αν κάθε σύνολο ανεξαρτησίας περιείχε λιγότερες από *n* / *k* κορυφές θα είχαμε συνολικά λιγότερες από *k* (*n* / *k*) = *n* κορυφές, άτοπο.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 3

Έστω G ένα (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα με χρωματικό αριθμό $k \geq 2$. Με αφετηρία το G, κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα G' προσθέτοντας μια νέα κορυφή u, την οποία συνδέουμε με k-1 αυθαίρετα επιλεγμένες κορυφές του G.

α) Να δείξετε ότι ο χρωματικός αριθμός του G' είναι k.

β) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των κορυφών, να δείξετε ότι για κάθε $k \geq 1$, κάθε (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα G με τουλάχιστον k+1 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής k, έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του k+1.

ΛΥΣΗ:

α) Θεωρούμε έναν χρωματισμό του G με k χρώματα. Χρωματίζουμε τη νέα κορυφή u με ένα χρώμα που είναι διαφορετικό από αυτά των $k - 1$ κορυφών με τις οποίες η u συνδέεται στο G'. Έτσι έχουμε έναν χρωματισμό με k χρώματα. Άρα ο χρωματικός αριθμός του G' είναι μικρότερος ή ίσος του k. Εάν το νέο γράφημα G' μπορούσε να χρωματιστεί με λιγότερα από k χρώματα, τότε και το υπογράφημα G θα μπορούσε να χρωματιστεί με λιγότερα από k χρώματα, άτοπο. Άρα, ο χρωματικός αριθμός του G' είναι ίσος με k.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 3

β) Θεωρούμε αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $k \geq 1$. Με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος θα δείξουμε την ελαφρά ισχυρότερη πρόταση: «για κάθε $k \geq 1$, κάθε (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα G με τουλάχιστον k+1 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής το πολύ k, έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του k+1».

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για γράφημα k+1 κορυφών, καθώς μπορούμε να χρωματίσουμε κάθε κορυφή με διαφορετικό χρώμα.

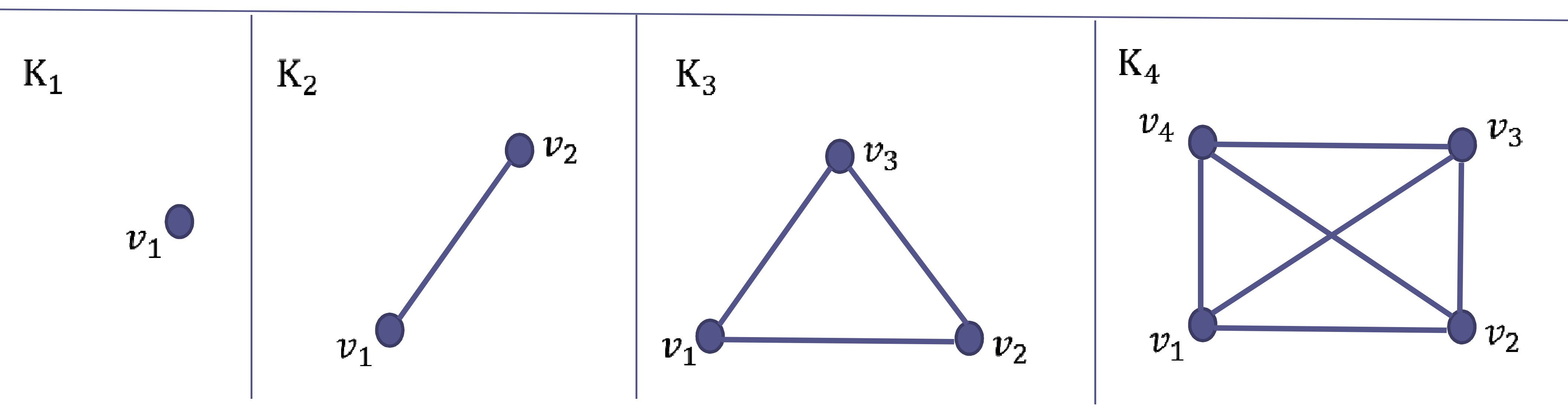
Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq k+1$, και υποθέτουμε επαγωγικά ότι κάθε γράφημα με n κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής το πολύ k, έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του k+1.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα G με n+1 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής k. Έστω u μια οποιαδήποτε κορυφή του G, και έστω G_u το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της κορυφής u και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή. Το G_u έχει n κορυφές, και μέγιστο βαθμό κορυφής μικρότερο ή ίσο του k. Άρα, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, οι κορυφές του G_u μπορούν να χρωματιστούν με k+1 χρώματα το πολύ. Το αρχικό γράφημα G προκύπτει από το G_u με την προσθήκη της u, η οποία συνδέεται με k το πολύ κορυφές του G_u. Συνεπώς, λόγω του (α), το G, όπως και το G_u, έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του k+1.

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων K_n (κλίκα τάξης n). Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

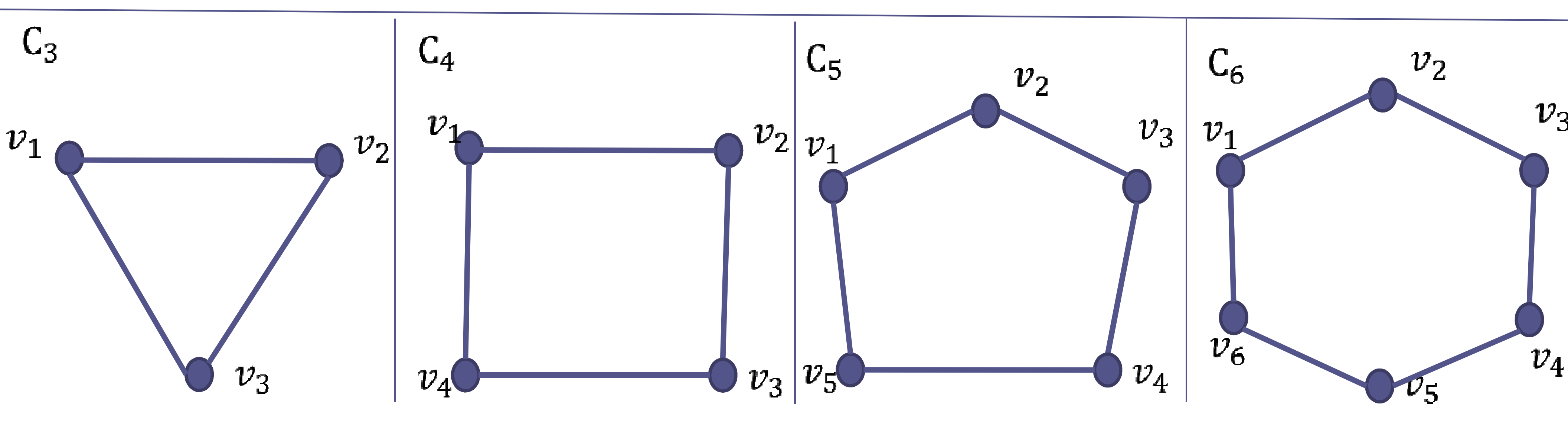
1. Είναι διχοτομίσιμο;
2. Πόσες είναι οι κορυφές του μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας;
3. Ποιος είναι ο χρωματικός του αριθμός;



Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων C_n (κύκλος τάξης n) για n≥3 πού αποτελείται από n κορυφές κατά μήκος ενός απλού κύκλου. Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

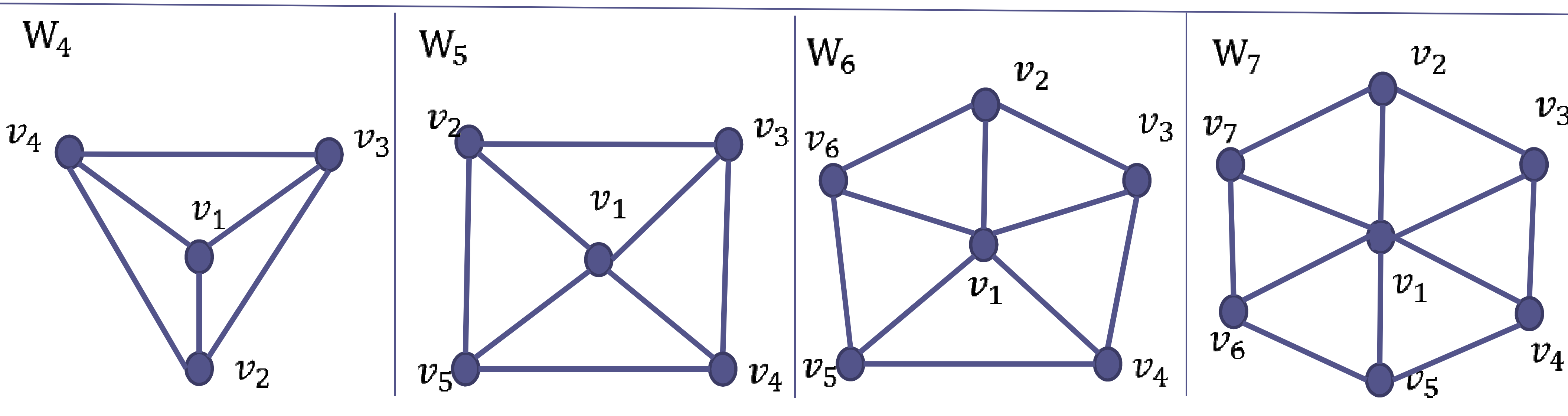
1. Είναι διχοτομίσιμο;
2. Πόσες είναι οι κορυφές του μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας;
3. Ποιος είναι ο χρωματικός του αριθμός;



Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων W_n (τροχός τάξης n) για n≥4 που αποτελείται από μία κορυφή (κέντρο) που συνδέεται με ακμή (ακτίνα) με όλες τις υπόλοιπες κορυφές οι οποίες και δημιουργούν ένα απλό κύκλο (βλέπε σχήμα). Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

1. Είναι διχοτομίσιμο;
2. Πόσες είναι οι κορυφές του μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας;
3. Ποιος είναι ο χρωματικός του αριθμός;

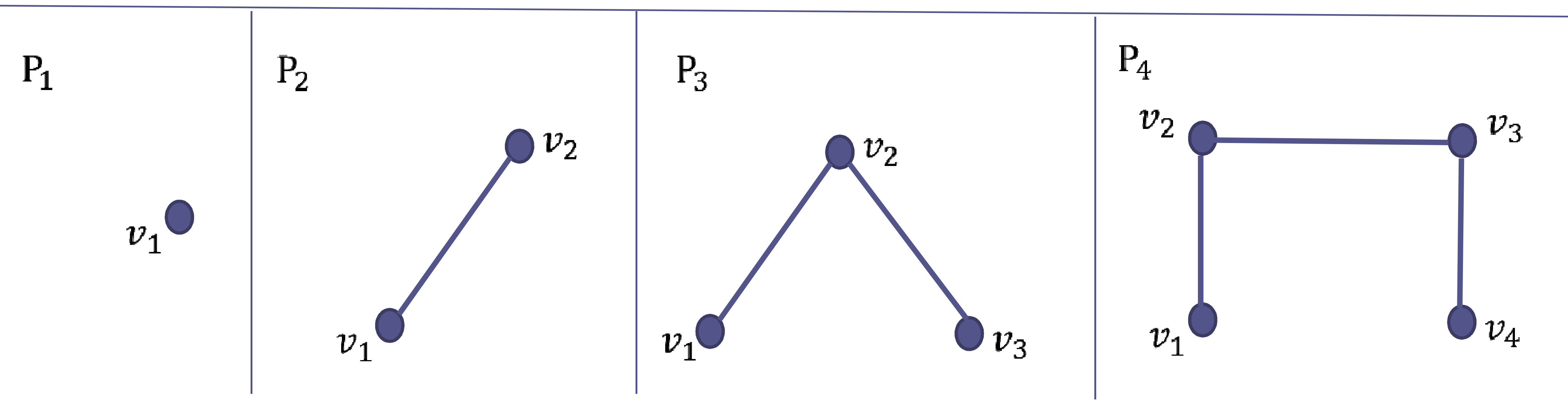


Γ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 4

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων P_n (μονοπάτι μήκους n) ως το γράφημα που είναι ένα απλό μονοπάτι μήκους n (βλέπε σχήμα). Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

1. Είναι διχοτομίσιμο;
2. Πόσες είναι οι κορυφές του μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας;
3. Ποιος είναι ο χρωματικός του αριθμός;



Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Ποες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι αληθείς;

1. $\chi(\mathrm{K}_n) = n$

2. $\chi(\mathrm{K}_{m,n}) = 2$

3. $\chi(\overline{K_{m,n}}) = m + n$

4. $\chi(\overline{K_n}) = 0$

Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Ποες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι αληθείς;

1. Κάθε διχοτομίσιμο γράφημα είναι συνδεόμενο

2. Υπάρχει γράφημα που είναι πλήρες και πλήρες διχοτομίσιμο.

3. Αν ένα γράφημα έχει 5 κορυφές και είναι πλήρες διχοτομίσιμο, τότε έχει το πολύ 6 ακμές.

4. Υπάρχει πλήρες διχοτομίσιμο γράφημα που περιέχει γέφυρα.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι το γράφημα $K_{n,n}$ έχει n^2 ακμές

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Να δείξετε ότι σε κάθε απλό μη κατευθυνόμενο διχοτομίσιμο γράφημα με n κορυφές, το άθροισμα του μέγιστου βαθμού κορυφής και του ελάχιστου βαθμού κορυφής είναι μικρότερο ή ίσο του n.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Να δείξετε ότι ένα απλό γράφημα είναι διχοτομίσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.