ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ29

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Θεωρούμε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετήσουμε 4 διακεκριμένα αντικείμενα σε 2 διακεκριμένες υποδοχές ώστε η πρώτη υποδοχή να πάρει τουλάχιστον 2 αντικείμενα, όταν δεν ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των αντικειμένων στις υποδοχές. Αυτός ο αριθμός είναι ίσος με:

1. Το συντελεστή του x^4 στη γεννήτρια συνάρτηση $(x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

2. Το συντελεστή του $x^4 / 4!$ στη γεννήτρια συνάρτηση $e^x(e^x – 1 – x)$.

3. Τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους 4 που περιέχουν τουλάχιστον ένα 1 και τουλάχιστον ένα 0.

4. Τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους 4 που περιέχουν τουλάχιστον δύο 1.

(2) Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διατάξουμε 4 άσπρες, 5 κόκκινες και 3 μπλε μπάλες είναι ίσος με:

1. $12! / (4!\,5!\,3!)$, όταν δεν υπάρχουν περιορισμοί.

2. $10! / (4!\,5!\,3!)$, όταν η διάταξη πρέπει να αρχίζει με άσπρη και να τελειώνει με κόκκινη μπάλα.

3. Το συντελεστή του $x^{12} / 12!$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{x^5}{5!}\cdot\frac{x^3}{3!}$, όταν δεν υπάρχουν περιορισμοί.

4. $10! / (4!\,5!\,3!)$, όταν οι 3 μπλε μπάλες πρέπει να εμφανίζονται διαδοχικά (χωρίς να υπάρχουν άλλοι περιορισμοί).

(3) Έστω φυσικοί αριθμοί m, n με $m \le n$, και έστω $f(x) = (x+x^2+x^3+ \dots)^m$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι.

1. Ο συντελεστής του x^n στην $f(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων να τοποθετήσουμε n ίδιους βόλους σε m διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή να μη μείνει κενή

2. Ο συντελεστής του x^n στην $f(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων να τοποθετήσουμε n ίδιους βόλους σε m+1 διακεκριμένες υποδοχές ώστε η πρώτη υποδοχή να πάρει m βόλους

3. Ο συντελεστής του x^n στην $f(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων να τοποθετήσουμε n διακεκριμένους βόλους σε m μη διακεκριμένες υποδοχές

4. Ο συντελεστής του x^n στην $f(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων να τοποθετήσουμε n ίδιους βόλους σε m διακεκριμένες υποδοχές

(4) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. $\neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \vDash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$

2. $\neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \vDash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \vDash \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

4. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \vDash \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

(5) Οι παρακάτω δομές ικανοποιούν την πρόταση: $\exists x \forall y[x \neq y \rightarrow P(x,y)]$

1. Το γράφημα C_5 όταν το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) σημαίνει ότι οι κορυφές x,y συνδέονται με ακμή.

2. Το γράφημα C_5 όταν το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) σημαίνει ότι οι κορυφές x,y συνδέονται με μονοπάτι.

3. Το γράφημα K_5 όταν το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) σημαίνει ότι οι κορυφές x,y συνδέονται με ακμή.

4. Το γράφημα $K_{5,5}$ όταν το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) σημαίνει ότι οι κορφές x,y συνδέονται με ακμή.

(6) Ο τύπος $\forall x \exists y P(x,y)$ ικανοποιείται στις παρακάτω δομές:

1. Το γράφημα C_5 όταν το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x,y συνδεόνται με ακμή.

2. Το γράφημα $\overline{K_{1,3}}$ όταν το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x,y συνδεόνται με ακμή.

3. Το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ όπου το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x > y$

4. Το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ όπου το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x > y$

(7) Ένα γράφημα είναι δένδρο αν και μόνο αν:

1. Υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη κορυφή.
2. Είναι συνδεόμενο και δεν έχει κύκλους μήκους ≥ 3
3. Οι ακμές είναι μία λιγότερες από τις κορυφές και δεν περιέχει κύκλους
4. Υπάρχει μονοπάτι από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη κορυφή και δεν περιέχει κύκλους.

(8) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Αν ένα γράφημα είναι επίπεδο, τότε κάθε ισόμορφό του γράφημα είναι επίσης επίπεδο.
2. Αν ένα γράφημα είναι διχοτομίσιμο, τότε κάθε ισόμορφό του γράφημα είναι επίσης διχοτομίσιμο.
3. Όλα τα δένδρα είναι ισόμορφα μεταξύ τους.
4. Οι πίνακες γειτνίασης δύο οποιωνδήποτε ισόμορφων γραφημάτων είναι ίσοι.

(9) Δίδεται το μη επίπεδο γράφημα G=(V,E)

1. Το γράφημα περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$
2. Κάθε υπογράφημά του είναι μη επίπεδο.
3. Κάθε ισόμορφό του γράφημα H=(V’,E’) είναι μη επίπεδο.
4. Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του είναι τουλάχιστον 18.

Β'ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1

1. Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το P_2 έχει το K_{100};
2. Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το P_3 έχει το K_{100};
3. Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το $K_{3,3}$ έχει το K_{100};
4. Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το $K_{4,4}$ έχει το K_{100};

Άσκηση 2

1. Να αποδείξετε ότι $\{\varphi \to \chi\} \vdash (\varphi \to (\chi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γνωστά θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπο απαγωγή κ.λπ.) αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας.

2. Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγόρημα P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές του γραφήματος και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) που συνδέονται με ακμή. Σε αυτήν την γλώσσα να γράψετε μία πρόταση που να εκφραζει την ακόλουθη ιδιότητα:

   1. Ορίστε μια συντομογραφία φ να αληθεύει αν ο γράφημα δεν έχει απομονωμένες κορυφές.
   2. Ορίστε τη συντομογραφία K(x) να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 2.
   3. Ορίστε τη συντομογραφία ψ να αληθεύει αν το γράφημα δεν έχει απομονωμένες κορυφές και περιέχει ακριβώς μία κορυφή με βαθμό 2.

\

Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι σε κάθε δένδρο ισχύει ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ισούται με 2n-2:

a. Χρησιμοποιώντας τύπους
b. Με μαθηματική Επαγωγή