Ορισμός:

Μία **γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα** είναι μια τετράδα: $G = (V, \Sigma, S, P)$:

- V το σύνολο των μεταβλητών
- Σ το σύνολο των τερματικών συμβόλων ($V \cap \Sigma = \emptyset$)
- $S \in V$ είναι η αρχική μεταβλητή
- P το σύνολο κανόνων με κάθε κανόνα να είναι της μορφής $W \to w$ με
  - $W \in V$ (είναι μία μεταβλητή) και
  - $w \in (V \cup \Sigma)^*$ (παράθεση μεταβλητών και μη τερματικών συμβόλων)

Παράδειγμα 1: Η Γραμματική Ανεξάρτητη Συμφραζομένων για την γλώσσα $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$$\begin{cases} S \to 0S1 \\ S \to \varepsilon \end{cases}$$

Σχόλια:

- Τα παραπάνω λέγονται κανόνες της γραμματικής διότι ξεκινώντας από την μεταβλητή S μπορούμε να παράγουμε με διαδοχική χρήση των κανόνων οποιαδήποτε συμβολοσειρά της γλώσσας.
- Ο 1ος κανόνας $S \to 0S1$ λέγεται και αναδρομικός κανόνας διότι επανεμφανίζει την μεταβλητή S
- Ο 2ος κανόνας $S \to \varepsilon$ λέγεται και τερματικός κανόνας διότι σταματά τις εμφανίζεις μεταβλητών.

Παραδείγματα Παραγωγών:

S $\Rightarrow \varepsilon$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 0\varepsilon 1 = 01$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 00S11$ $\Rightarrow 00\varepsilon 11 = 0011$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 00S11$ $\Rightarrow 000S111$ $\Rightarrow 000\varepsilon 111 = 000111$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 00S11$ $\Rightarrow 000S111$ $\Rightarrow 0000S1111$ $\Rightarrow 0000\varepsilon 1111 = 00001111$	……

Παράδειγμα 2: Η Γραμματική για την γλώσσα $L = \{0^n 1^m 0^m 1^n \mid n, m \geq 0\}$

$$\begin{cases} S \to 0S1 \mid X \\ X \to 1X0 \mid \varepsilon \end{cases}$$

Σχόλια: Το | διαβάζεται ή (ή διαζευκτικό)

Ιδιότητα	Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα
Ισότητα $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$	$S \to 0S1 \mid \varepsilon$
Αναλογία $\{0^{2n} 1^{3n} \mid n \geq 0\}$	$S \to 00S111 \mid \varepsilon$
Παλινδρομ/τα $\{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$	$S \to aSa \mid bSb \mid c$
Ανισότητα $\{a^n b^m \mid n \leq m\}$	$S \to aSb \mid X, X \to bX \mid \varepsilon$
$\{a^n b^m \mid n < m\}$	$S \to aSb \mid X, X \to bX \mid b$
$\{a^n b^m \mid n > m\}$	$S \to aSb \mid X, X \to aX \mid a$
Συμμετρία στο Κέντρο $\{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$	$S \to aSd \mid X, X \to bXc \mid \varepsilon$
$\{a^{n+m} b^m c^n \mid n, m \geq 0\}$ $\{a^i b^j c^k \mid i = j + k\}$	$S \to aSc \mid X, X \to aXb \mid \varepsilon$
$\{a^i b^j c^k \mid i > j + k\}$	$S \to aSc \mid X, X \to aXb \mid Y$ $Y \to aY \mid a$
Παράθεση $\{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 0\}$	$S \to XY$ $X \to aXb \mid \varepsilon$ $Y \to cYd \mid \varepsilon$
$\{a^n b^{n+m} c^m \mid n, m \geq 0\}$ $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$	$S \to XY$ $X \to aXb \mid \varepsilon$ $Y \to bYc \mid \varepsilon$
Διάζευξη Συμβ/ρών $\{a^i b^j c^k \mid i = j \;\eta\; j = k\}$	$S \to S_1 \mid S_2$ $S_1 \to X_1 X_2 \quad X_1 \to aX_1 b \mid \varepsilon \quad X_2 \to cX_2 \mid \varepsilon$ $S_2 \to Y_1 Y_2 \quad Y_1 \to aY_1 \mid \varepsilon \quad Y_2 \to bY_2 c \mid \varepsilon$
Κανονικές $\{a^n \mid n \geq 0\}$	$S \to aS \mid \varepsilon$
$\{a^n \mid n > 0\}$	$S \to aS \mid a$

Ορισμός Κανονικής Γραμματικής:

- Μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα θα λέγεται **Κανονική Γραμματική** αν και μόνο αν οι κανόνες της έχουν αποκλειστικά και μόνο τη μορφή:

$$\mathbf{X \to \sigma \quad ή \quad X \to \sigma Y}$$

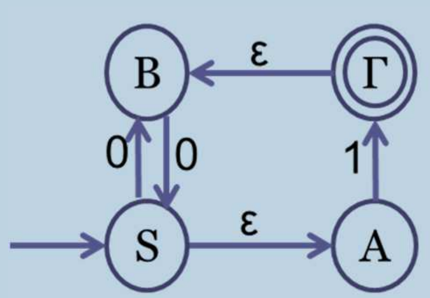
- όπου
  - $X, Y \in V$ (είναι μεταβλητές)
  - $\sigma \in \Sigma$ (είναι τερματικά σύμβολα, δηλαδή σύμβολα του αλφαβήτου ή η κενή συμβολοσειρά)

Λήμμα: Κάθε Κανονική Γραμματική είναι και Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα

Κανόνες Μετατροπής ΜΠΑε,ΜΠΑ,ΝΠΑ σε Κανονική Γραμματική

- Κάθε κατάσταση γίνεται μεταβλητή. Ειδικά την αρχική κατάσταση την ονομάζουμε S.
- Βάζουμε τον κανόνα $X \to \sigma Y$ αν και μόνο αν από την κατάσταση X μεταβαίνουμε στην Y με το σύμβολο σ
- Βάζουμε τον κανόνα $X \to Y$ αν και μόνο αν από την κατάσταση X μεταβαίνουμε στην Y με ε−κίνηση
- Βάζουμε τον κανόνα $X \to \varepsilon$ αν η X είναι τελική κατάσταση.

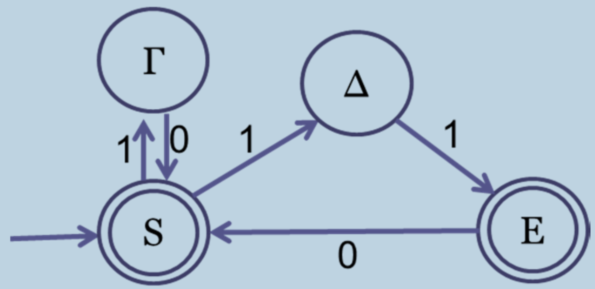
Παράδειγμα: Στο ακόλουθο ΜΠΑ-ε



αντιστοιχεί η κανονική γραμματική

$$\begin{cases} S \to A \mid 0B \\ A \to 1\Gamma \\ B \to 0S \\ \Gamma \to B \mid \varepsilon \end{cases}$$

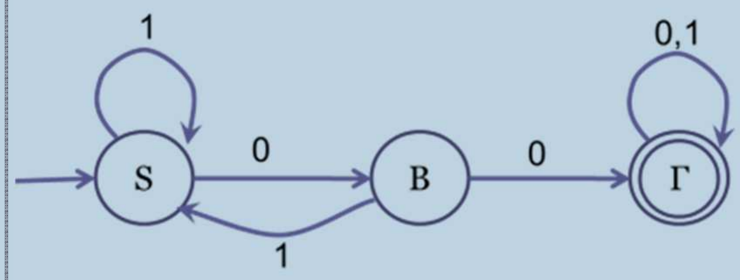
Παράδειγμα: Στο ακόλουθο ΜΠΑ



αντιστοιχεί η κανονική γραμματική

$$\begin{cases} S \to 1\Gamma \mid 1\Delta \mid \varepsilon \\ \Gamma \to 0S \\ \Delta \to 1E \\ E \to 0S \mid \varepsilon \end{cases}$$

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο ΝΠΑ



αντιστοιχεί η κανονική γραμματική

$$\begin{cases} S \to 0B \mid 1S \\ B \to 0\Gamma \mid 1S \\ \Gamma \to 0\Gamma \mid 1\Gamma \mid \varepsilon \end{cases}$$