# ΣΥΝΟΛΟ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΩΝ ΤΥΠΩΝ

### **ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ** www.psounis.gr

ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ  $T \models \phi$ 

# ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ www.psounis.gr

Ένα σύνολο τύπων Τ θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

• Πιο τυπικά αν υπάρχει αποτίμηση α: α(φ)=Α ∀φ∈Τ

Παράδειγμα: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{p \rightarrow q, p \lor \neg q\}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee \neg q$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A

Παρατηρούμε ότι στην αποτίμηση p=A,q=A αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων, άρα είναι ικανοποίησιμο

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το συνεπές σύνολο τύπων

#### ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΣΥΝΕΠΕΣ

(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

Ένα σύνολο τύπων Τ θα λέμε ότι είναι μη ικανοποιήσιμο αν δεν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

...δηλαδή δεν είναι ικανοποίησιμο!

Παράδειγμα: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{ q \to p, p \land \neg q, p \leftrightarrow q \}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$q \rightarrow p$	$p \land \neg q$	$p \leftrightarrow q$
A	A	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους Α ταυτόχρονα, άρα είναι ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το αντιφατικό σύνολο τύπων

#### ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟ

(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

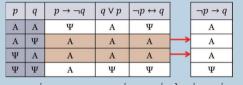
Έστω Σύνολο Τύπων Τ και τύπος φ. Θα λέμε ότι :

- το σύνολο τύπων Τ ταυτολογικά συνεπάγεται τον τύπο φ
- Ο φ είναι σημασιολογική συνέπεια του Τ
- και συμβολίζουμε με  $\mathbf{T} \models \boldsymbol{\varphi}$ αν και μόνο αν
- για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του Τ ικανοποιείται και ο φ
- Αν ο φ είναι ταυτολογία ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
- Αν το Τ είναι αντιφατικό ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
- Εξετάζουμε με βάση τον ορισμό. Βρίσκουμε τις αποτιμήσεις που 2. ικανοποιούνται οι τύποι του Τ (όλοι ταυτόχρονα). Σε αυτές πρέπει να αληθεύει και ο φ για να ισχύει η ταυτ.συνεπαγωγή.

Παράδειγμα 1: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπανωνή

$$\{p o \neg q, q \lor p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash \neg p \to q$$
  
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:



Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ό τύπος φ είναι αληθής, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπανωνή.

Ο συμβολισμός: ⊨ ω

- Θα σημαίνει ότι ο τύπος φ αληθεύει ανεξαρτήτως υποθέσεων
- που σημαίνει ότι ο τύπος φ είναι ταυτολογία.( $\emptyset \models φ$ )

Ο συμβολισμός: $oldsymbol{\phi} \equiv oldsymbol{\psi}$ 

- Θα σημαίνει ότι οι τύποι φ και ψ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι
  - Ορίζεται ως: φ ⊨ ψ και ψ ⊨ φ

Θα ισχύει ότι  $\phi \equiv \psi$  αν οι  $\phi$ , $\psi$  έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας

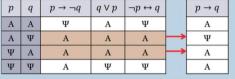
Πιο εποπτικά:

- ... ⊨ A.
- Ψ ⊨ ....
- Εφαρμογή του ορισμού

Παράδειγμα 2: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπανωνή

$$\{p \to \neg q, q \lor p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash p \to q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:



Στην  $2^{\eta}$  αποτίμηση (p=A, q=Ψ) ικανοποιούνται οι τύποι του T, αλλά δεν ικανοποιείται ο φ. Άρα δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπανωνή.