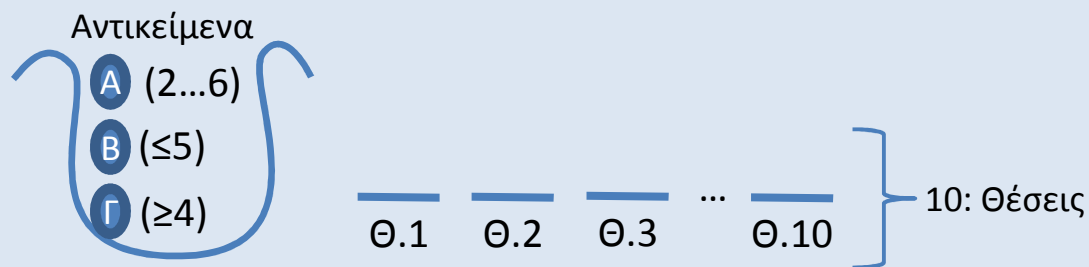


ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ (απλή γεννήτρια)**Απαριθμητής:** Για κάθε τύπο αντικειμένου**Όροι Απαριθμητών:** Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα μπορούμε να επιλέξουμε από κάθε τύπο αντικειμένου.**Συντελεστής:** του όρου x^k όπου k : τα αντικ/να που επιλέγω.**Παράδειγμα:**

Επιλέγουμε 10 αντικείμενα από αντικείμενα Α, Β, Γ με τους περιορισμούς να επιλεγούν 2 έως 6 από τα Α, το πολύ 5 από τα Β και τουλάχιστον 4 από τα Γ (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

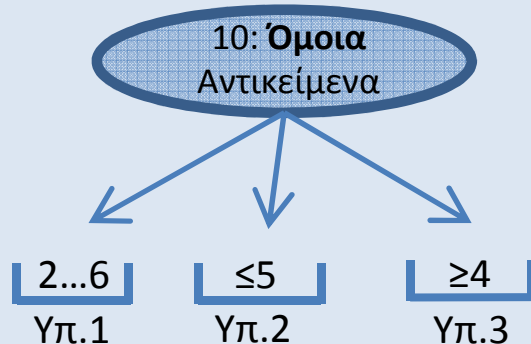
Λύση:Χρησιμοποιώ **απλή** γεννήτρια (πρόβλημα επιλογής)

- Απαριθμητής για τα Α: $x^2 + x^3 + \dots + x^6$
- Απαριθμητής για τα Β: $1 + x + x^2 + \dots + x^5$
- Απαριθμητής για τα Γ: $x^4 + x^5 + \dots + x^{10}$

Η γεννήτρια είναι:

$$(x^2 + x^3 + \dots + x^6)(1 + x + x^2 + \dots + x^5)(x^4 + x^5 + \dots + x^{10})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{10} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

ΔΙΑΝΟΜΗ ΟΜΟΙΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ (απλή γεννήτρια)**Απαριθμητής:** Για κάθε υποδοχή.**Όροι Απαριθμητών:** Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιτρέπεται να έχει η υποδοχή.**Συντελεστής:** του όρου x^k όπου k : τα αντικ/να που μοιράζω.**Παράδειγμα:**

Μοιράζουμε 10 όμοια αντικείμενα σε 3 υποδοχές ώστε η 1^η να πάρει 2 έως 6 αντικείμενα, η 2^η να πάρει το πολύ 5 αντικείμενα και η 3^η τουλάχιστον 4 αντικείμενα (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Λύση:Χρησιμοποιώ **απλή** γεννήτρια (πρόβλημα διανομής ομοίων)

- Απαριθμητής για την Υπ.1: $x^2 + x^3 + \dots + x^6$
- Απαριθμητής για την Υπ.2: $1 + x + x^2 + \dots + x^5$
- Απαριθμητής για την Υπ.3: $x^4 + x^5 + \dots + x^{10}$

Η γεννήτρια είναι:

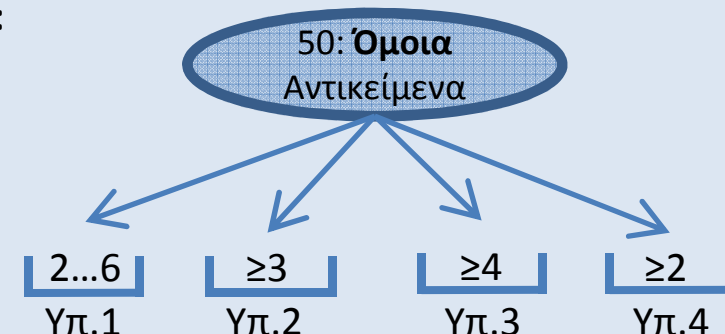
$$(x^2 + x^3 + \dots + x^6)(1 + x + x^2 + \dots + x^5)(x^4 + x^5 + \dots + x^{10})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{10} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.



Παράδειγμα: Μοιράζουμε 50 όμοια αντικείμενα σε 4 υποδοχές ώστε η 1^η να πάρει 2 έως 6 αντικείμενα, η 2^η να πάρει τουλάχιστον 3 αντικείμενα, η 3^η τουλάχιστον 4 αντικείμενα και η 4^η τουλάχιστον 2 αντικείμενα (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Παράδειγμα:



ευθύς

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2 + x^3 + \dots + x^6)(x^3 + x^4 + \dots + x^{50})(x^4 + x^5 + \dots + x^{50})(x^2 + x^3 + \dots + x^{50})$
ΟΡΟΣ: x^{50}

large

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2 + x^3 + \dots + x^6)(x^3 + x^4 + \dots)(x^4 + x^5 + \dots)(x^2 + x^3 + \dots)$
ΟΡΟΣ: x^{50}

Μίζερος

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2 + x^3 + \dots + x^6)(x^3 + x^4 + \dots + x^{42})(x^4 + x^5 + \dots + x^{43})(x^2 + x^3 + \dots + x^{41})$
ΟΡΟΣ: x^{50}

Π.χ. για την Υπ.2
χάνει $2+4+2=8$ από τις άλλες
Άρα θα πάρει το πολύ $50-8=42$

Διαχ/ση
Περ/μου

Δίνω 2 στην Υπ1, 3 στην Υπ2, 4 στην Υπ3 και 2 στην Υπ4. Απομένουν 39

ευθύς

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1 + x + \dots + x^4)(1 + x + x^2 + \dots + x^{39})^3$
ΟΡΟΣ: x^{39}

large

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1 + x + \dots + x^4)(1 + x + x^2 + \dots)^3$
ΟΡΟΣ: x^{39}

Μίζερος

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1 + x + \dots + x^4)(1 + x + x^2 + \dots + x^{39})^3$
ΟΡΟΣ: x^{39}

39: Όμοια
Αντικείμενα



ΑΣΚΗΣΗ 1: Εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40, x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.$$
Λύση: Η εξίσωση μοντελοποιείται ως διανομή ομοίων:
Άρα η γεννήτρια είναι: $(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 2: Εξίσωση με Συντελεστές

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 1000, x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3$$
Λύση: Η εξίσωση γράφεται:
$$z_1 + z_2 + z_3 = 1000$$

Όπου z_1 πολλαπλάσιο του 5, z_2 πολλαπλάσιο του 10, z_3 πολλαπλάσιο του 20 με $z_i \geq 0, \quad i = 1,2,3$
Άρα η γεννήτρια είναι: $(1 + x^5 + \dots + x^{1000})(1 + x^{10} + \dots + x^{1000})(1 + x^{20} + \dots + x^{1000})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 3: Συμβολή στο Ζητούμενο Στόχο

Συνήθεις εκφωνήσεις είναι να επιλέγουμε χαρτονομίσματα που αθροίζουν σε ποσό ή να επιλέγουμε βάρη που αθροίζουν σε ένα συνολικό βάρος. **Π.χ. πόσοι τρόποι να επιλέξουμε 1000 ευρώ από 4ευρα, 10εύρα, 20εύρα.**
Λύση: Η γεννήτρια είναι: $(1 + x^5 + \dots + x^{1000})(1 + x^{10} + \dots + x^{1000})(1 + x^{20} + \dots + x^{1000})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας
Προσοχή. Άλλη άσκηση: Πόσοι τρόποι να επιλέξουμε 40 χαρτονομίσματα από 5ευρα, 10ευρα και 20ευρα;
Λύση: $(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 4: Επιλογή από έναν

Έχουμε 6 αντίτυπα του βιβλίου B1, 7 αντίτυπα του B2, 11 αντίτυπα του B3. Κατασκευάστε γεννήτρια ώστε δύο φοιτητές να πάρουν 12 βιβλία και το λιγότερο 2 αντίτυπα από κάθε βιβλίο. Σε ποιο συντελεστή της γεννήτριας βρίσκεται η απάντηση?
Λύση: Αρκεί να επιλέξω έναν έγκυρο συνδυασμό 12 βιβλίων για τον έναν φοιτητή. Ο άλλος θα πάρει τα υπόλοιπα. Οι επιλογές του 1ου φοιτητή είναι: Βιβλία B1 (από 2 έως 4), Βιβλία B2 (από 2 έως 5), Βιβλία B3 (από 2 έως 9), άρα η γεννήτρια είναι:
 $(x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + \dots + x^9)$ και το ζητούμενο είναι ο συντ. του όρου x^{12} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 5: Εξίσωση με Περιορισμό Ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100 \quad (1)$$

Υπό $x_1 \geq x_2 \quad (2)$ και $x_2 \geq x_3 \quad (3)$ όπου $x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3$
Λύση:
Η (2) γράφεται: $x_2 + s_2 = x_1 \quad (4)$ όπου $s_2 \geq 0$
Η (3) γράφεται: $x_3 + s_3 = x_2 \quad (5)$ όπου $s_3 \geq 0$
Αντικατάσταση της (4) στην (1)...πράξεις... $2x_2 + x_3 + s_3 = 100 \quad (6)$
Αντικατάσταση της (5) στην (6)...πράξεις... $3x_1 + 2s_2 + s_3 = 100$
Η εξίσωση γράφεται:
$$z_1 + z_2 + z_3 = 100$$

Όπου z_1 πολλαπλάσιο του 3, z_2 πολλαπλάσιο του 2, z_3 χωρίς περιορισμό με $z_i \geq 0, \quad i = 1,2,3$
Άρα η γεννήτρια είναι: $(1 + x^3 + \dots + x^{99})(1 + x^2 + \dots + x^{100})(1 + x + \dots + x^{100})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας