

ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ16

Α' ΜΕΡΟΣ: ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Ο αριθμός των διαφορετικών 5άδων που μπορούμε να σχηματίσουμε από 20 παίκτες μπάσκετ, εφόσον έχει σημασία η σειρά που αγωνίζεται ο κάθε παίκτης είναι ίσο με

1. $20!/5!$
2. $20!/15!$
3. Το συντελεστή του x^5 στη παράσταση $(1+x)^{20}$
4. Το συντελεστή του $x^5/5!$ στη παράσταση $(1+x)^{20}$

(2) Έστω A σύνολο με n στοιχεία.

1. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με k στοιχεία είναι όσα ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1+x)^n$
2. Αν το n είναι περιττός, τα υποσύνολα του A με λιγότερα από τα μισά στοιχεία είναι λιγότερα από τα υποσύνολα του A με περισσότερα από τα μισά στοιχεία.
3. Οι τρόποι επιλογής k στοιχείων από το A όταν μετά από κάθε επιλογή το στοιχείο επανατοποθετείται και έχει σημασία η σειρά επιλογής, είναι $n!/(n-k)!$
4. Οι τρόποι επιλογής k στοιχείων από το A όταν μετά από κάθε επιλογή το στοιχείο επανατοποθετείται και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής, είναι $\binom{n+k-1}{k}$

(3) Έστω φ, ψ ικανοποιήσιμοι τύποι της προτασιακής λογικής που δεν είναι ταυτολογίες. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν και ποιες όχι;

1. $\psi \wedge \neg\psi \models \varphi$
2. $\varphi \models \psi \wedge \neg\psi$
3. $\varphi \models \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
4. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi$

(4) Θεωρούμε το αξιωματικό σύστημα του Προτασιακού Λογισμού. Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές και ποιες όχι;

1. Ο τύπος $\neg\neg\phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\neg\phi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ1 με συντακτική αντικατάσταση.
2. Ο τύπος $(\neg\neg\phi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\neg\neg\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow \neg\neg\phi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.
3. Το $\vdash \neg\phi \rightarrow \neg\phi$ προκύπτει άμεσα από το $\neg\phi \vdash \neg\phi$ με εφαρμογή του Θεωρήματος της Απαγωγής.
4. Το $\psi \vdash \neg\neg\psi$ προκύπτει άμεσα από το $\neg\psi \vdash \neg\psi$ με εφαρμογή του Θεωρήματος της Αντιθετοαναστροφής.

(5) Δίδεται πρωτοβάθμια γλώσσα που περιλαμβάνει τα κατηγορηματικά σύμβολα $P/2$, $Q/2$, τα συναρτησιακά σύμβολα $f/2$, $g/3$ και τις σταθερές c, d . Θεωρώντας ότι οι x, y είναι μεταβλητές απαντήστε αν αληθεύουν οι ακόλουθες δηλώσεις:

1. Η έκφραση $P(x, x)$ είναι όρος
2. Η έκφραση $f(x, c, d)$ είναι όρος
3. Η έκφραση $f(f(x, x), y) = g(c, d, c)$ είναι ατομικός τύπος.
4. Η έκφραση $\exists x \forall y (x = y)$ είναι πρόταση

(6) Αποφασίστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς στην γλώσσα της θεωρίας αριθμών όπου $P(x, y)$ αληθεύει αν $x > y$

1. $\forall x \exists y P(x, y)$
2. $\exists x \forall y P(x, y)$
3. $\forall x \exists y \neg P(x, y)$
4. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

Β' ΜΕΡΟΣ: ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Άσκηση 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(Ερώτημα 1)

Σε ένα κυκλικό τραπέζι 6 θέσεων πρόκειται να καθίσουν 3 ζευγάρια (κάθε ζευγάρι αποτελείται από έναν διακεκριμένο άντρα και μια διακεκριμένη γυναίκα). Να υπολογίσετε τους διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης στις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην τοποθέτηση των 6 ατόμων.

ii) Η γυναίκα και ο άντρας που αποτελούν κάθε ζευγάρι πρέπει να τοποθετηθούν σε γειτονικές θέσεις.

Θεωρήστε και στις δύο περιπτώσεις ως μη διαφορετικές τοποθετήσεις αυτές όπου υπάρχει κυκλική μετατόπιση στις θέσεις του τραπέζιού χωρίς να μεταβάλλεται η διάταξη των 6 διακεκριμένων ατόμων.

Άσκηση 2 : ΛΟΓΙΚΗ

Άσκηση 2.1: Προτασιακή Λογική

(Ερώτημα 1)

Να δείξετε ότι $\vdash_{\text{ΠΛ}} [\varphi \rightarrow \chi] \rightarrow [\neg\chi \rightarrow \neg\varphi]$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γνωστά θεωρήματα για τον Προτασιακό Λογισμό (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπον απαγωγή, κλπ.) αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας.

(Ερώτημα 2)

Έστω φ, ψ, χ τυχαίοι προτασιακοί τύποι. Δείξτε ότι αν $\psi \models \chi \vee \varphi$ και $\psi \models \chi \rightarrow \varphi$ τότε $\psi \vdash \varphi$

Άσκηση 2.2: Κατηγορηματική Λογική

(Ερώτημα 1)

Να γράψετε τις ακόλουθες προτάσεις στην γλώσσα της θεωρίας αριθμών

1. Ένας αριθμός που δεν διαιρείται με το 2, δεν διαιρείται με το 4
2. Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος
3. Υπάρχει μοναδικός φυσικός που είναι περιττός και μικρότερος του 2
4. Υπάρχουν ακριβώς δύο πρώτοι αριθμοί.