ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

Μάθημα 4.4:
Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ. – Α.Σ.
Κλειστότητα Πράξεων στις Γλώσσες Α.Σ.

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α

- Μετατροπή Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα σε Αυτόματο Στοίβας

Επίπεδο Β

- Κλειστότητα Πράξεων των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

Επίπεδο Γ

- Μετατροπή Αυτομάτου Στοίβας σε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

Ορισμός Γλώσσας Ανεξάρτητης Συμφραζομένων:

- Μία γλώσσα θα λέγεται **Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων (ή Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα)** αν και μόνο αν
  - Υπάρχει Γραμματική Ανεξάρτητη Συμφραζομένων (Γρ.Χ.Σ) που παράγει τις συμβολοσειρές της.
  - Υπάρχει Αυτόματο Στοίβας (Α.Σ) που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της γλώσσας.

- Η έννοια της ισοδυναμίας των παραπάνω κατασκευασμάτων θα αποδειχθεί ως εξής:
  - Θα δούμε αλγόριθμο που μετατρέπει Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.
  - Θα δούμε αλγόριθμο που μετατρέπει Γρ.Χ.Σ. σε Α.Σ.

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

1. Μετατροπή Γρ.Χ.Σ. σε Α.Σ.

Θεώρημα:

- Κάθε Γραμματική Ανεξάρτητη Συμφραζομένων (Γρ.Χ.Σ) μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο Αυτόματο Στοίβας

- Οι κανόνες μετατροπής μελετήθηκαν στο Μάθημα 4.3 που είδαμε πως μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα μπορεί να προσομοιωθεί από ένα μη ντετερμινιστικό αυτόματο στοίβας.

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

Θεώρημα:

➢ Κάθε Αυτόματο Στοίβας μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα

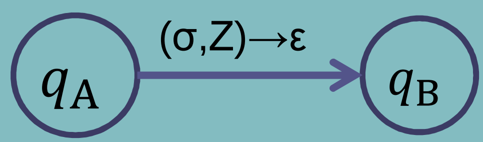
Κανόνες Μετατροπής:

Έστω Σ αλφάβητο εισόδου, Γ αλφάβητο στοίβας, Q σύνολο καταστάσεων, q_0 η αρχική κατάσταση του αυτομάτου.

- Οι μεταβλητές της γραμματικής που θα κατασκευάσουμε θα είναι:
  - S η αρχική μεταβλητή
  - $[p, Z, q]$ για κάθε ζεύγος $p, q \in Q$ και $\mathrm{Z} \in \Gamma$
- Οι κανόνες της γραμματικής θα κατασκευαστούν ως εξής:
  1. Για κάθε κατάσταση $\boldsymbol{q} \in Q$ προσθέτουμε τον κανόνα:

     $$S \rightarrow [q_0, Z_0, \boldsymbol{q}]$$

  2. Για κάθε κίνηση της μορφής:



(δηλαδή κίνηση αφαίρεσης συμβόλου από την στοίβα) έχουμε τον κανόνα:

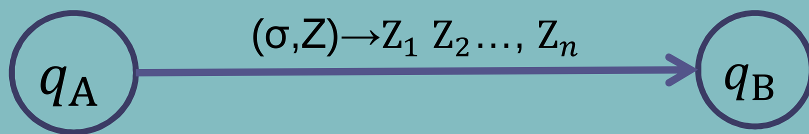
$$[q_\mathrm{A}, \mathrm{Z}, q_\mathrm{B}] \rightarrow \sigma$$

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

- Οι κανόνες της γραμματικής θα κατασκευαστούν ως εξής:
  3. Για κάθε κίνηση της μορφής:



(δηλαδή κίνηση αντικατάστασης συμβόλων στην στοίβα) έχουμε τον ομάδα κανόνων:

$$[q_A, Z, A] \rightarrow \sigma[q_B, Z_1, a_1]\,[a_1, Z_2, a_2]\,[a_2, Z_3, a_3] \ldots .\,[a_{n-1}, Z_n, A]$$

όπου $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί καταστάσεων
και Α αντικαθίσταται από οποιαδήποτε κατάσταση.

  4. Για κάθε τελική κατάσταση q προσθέτουμε τον κανόνα

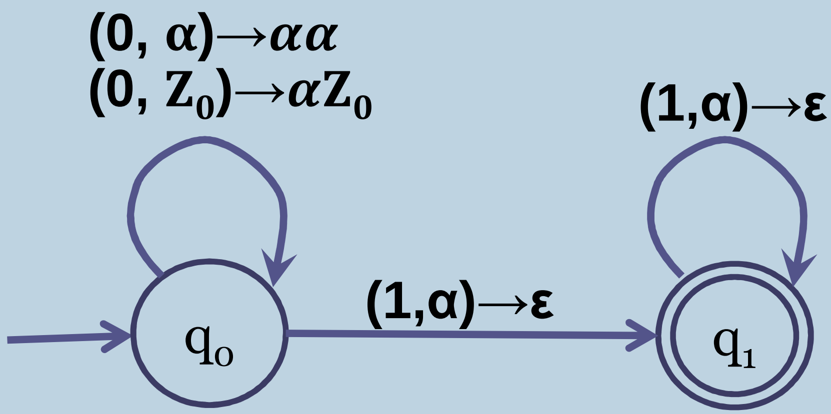
$$S \rightarrow [\boldsymbol{q}, Z_0, \boldsymbol{q}]$$

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

Παράδειγμα: Θα μετατρέψουμε το εξής αυτόματο (το οποίο αναγνωρίζει τη γλώσσα L=$\{\mathbf{0^n 1^n} | \boldsymbol{n \geq 0}\}$:



Οι μεταβλητές θα είναι

$$S,$$
$$[q_0,a,q_0],[q_0,a,q_1],[q_1,a,q_0],[q_1,a,q1]$$
$$[q_0,Z_0,q_0],[q_0,Z_0,q_1],[q_1,Z_0,q_0],[q_1,Z_0,q1]$$

Οι κανόνες της γραμματικής θα είναι:

1. Προσθέτουμε τους εξής κανόνες (ένας κανόνας για κάθε κατάσταση)

$$\mathrm{S} \rightarrow [q_0,Z_0,q_0]$$
$$\mathrm{S} \rightarrow [q_0,Z_0,q_1]$$

Β. Θεωρία

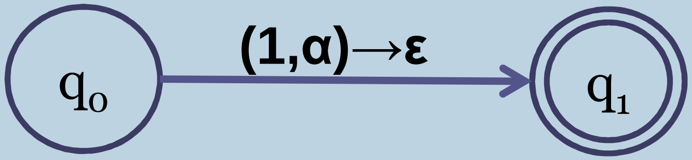
1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

(…συνέχεια…)

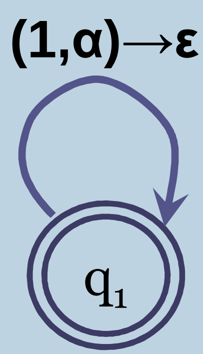
2) Προσθέτουμε τους κανόνες που προκύπτουν από τις κινήσεις αφαίρεσης συμβόλου από τη στοιβά:

2.α) Για την κίνηση



$[q_0, \alpha, q_1] \rightarrow 1$

2.β) Για την κίνηση



$[q_1, \alpha, q_1] \rightarrow 1$

Β. Θεωρία

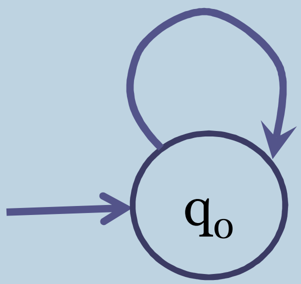
1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

(…συνέχεια…)

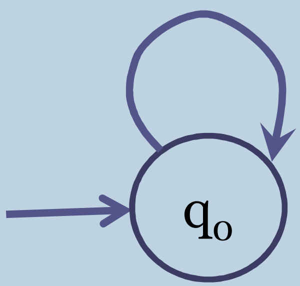
3) Προσθέτουμε τους κανόνες που προκύπτουν από τις κινήσεις τροποποίησης της στοίβας

3.α) Για την κίνηση $\mathbf{(0,\ Z_0)}\rightarrow \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Z_0}$



$$[q_0, \mathrm{Z}_0, q_0] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_0][q_0, \mathrm{Z}_0, q_0]$$
$$[q_0, \mathrm{Z}_0, q_0] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_1][q_1, \mathrm{Z}_0, q_0]$$
$$[q_0, \mathrm{Z}_0, q_1] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_0][q_0, \mathrm{Z}_0, q_1]$$
$$[q_0, \mathrm{Z}_0, q_1] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_1][q_1, \mathrm{Z}_0, q_1]$$

3.β) Για την κίνηση $\mathbf{(0,\ \alpha)}\rightarrow \boldsymbol{\alpha\alpha}$



$$[q_0, \alpha, q_0] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_0][q_0, \alpha, q_0]$$
$$[q_0, \alpha, q_0] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_1][q_1, \alpha, q_0]$$
$$[q_0, \alpha, q_1] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_0][q_0, \alpha, q_1]$$
$$[q_0, \alpha, q_1] \rightarrow 0[q_0, \alpha, q_1][q_1, \alpha, q_1]$$

4) Για τις τελικές καταστάσεις προσθέτουμε τους κανόνες:

$$[q_0, \mathrm{Z}_0, q_0] \rightarrow \varepsilon$$
$$[q_1, \mathrm{Z}_0, q_1] \rightarrow \varepsilon$$

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

(…συνέχεια…)
Συνοψίζοντας οι κανόνες μπορούν να συμπτηχθούν ως εξής (κάνοντας κατάλληλες μετονομασίες των μεταβλητών για να είναι πιο εύκλοα αναγνώσιμες):

$S \rightarrow Y_1 \mid Y_2$
$X_2 \rightarrow 1$
$X_4 \rightarrow 1$
$Y_1 \rightarrow 0X_1Y_1 \mid 0X_2Y_3$
$Y_2 \rightarrow 0X_1Y_2 \mid 0X_2Y_4$
$X_1 \rightarrow 0X_1X_1 \mid 0X_2X_3$
$X_2 \rightarrow 0X_1X_2 \mid 0X_2X_4$
$Y_1 \rightarrow \varepsilon$
$Y_4 \rightarrow \varepsilon$

Η παραπάνω γραμματική είναι ιδιαίτερα περίπλοκή, παρόλα αυτά αναγνωρίζει την γλώσσα.

<u>Απλοποίηση Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα:</u>
Θα κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις για να την φέρουμε σε μια πιο κατανοητή μορφή.

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

(…συνέχεια…)
(1) Αν για μια μεταβλητή δεν έχει οριστεί κανόνας που να παράγει άλλη συμβολοσειρα, μπορούμε να εξαφανίσουμε κάθε εμφάνιση της, εξαφανίζοντας και κάθε κανόνα που αυτή εμφανίζεται. Στο παράδειγμα διώχνουμε τις μεταβλητές X_3 και Y_3
(2) Αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση της Y_4 με ε και του X_4 με 1.

$S \rightarrow Y_1 \mid Y_2$
$Y_1 \rightarrow 0X_1Y_1 \mid \varepsilon$
$Y_2 \rightarrow 0X_1Y_2 \mid 0X_2$
$X_1 \rightarrow 0X_1X_1$
$X_2 \rightarrow 0X_1X_2 \mid 0X_21 \mid 1$

(3) Αν για μια μεταβλητή δεν έχει οριστεί τερματικός κανόνας και δεν είναι δυνατόν να έχουμε παραγωγή κάποιας συμβολοσειράς, τότε εξαφανίζουμε την μεταβλητή και κάθε κανόνα που αυτή εμφανίζεται. Στο παράδειγμα όλοι οι κανόνες με το X_1 αφαιρούνται.

$S \rightarrow Y_1 \mid Y_2$
$Y_1 \rightarrow \varepsilon$
$Y_2 \rightarrow 0X_2$
$X_2 \rightarrow 0X_21 \mid 1$

Β. Θεωρία

1. Ισοδυναμία Γρ.Χ.Σ με Α.Σ.

2. Μετατροπή Α.Σ. σε Γρ.Χ.Σ.

(…συνέχεια…)
(4) Μπορούμε να ενσωματώσουμε απευθείας το Y_1 στον κεντρικό κανόνα ως εξής:

$S \rightarrow Y_2 | \varepsilon$
$Y_2 \rightarrow 0X_2$
$X_2 \rightarrow 0X_2 1 \mid 1$

Και ομοίως και το Y_2:

$S \rightarrow 0X_2 | \varepsilon$
$X_2 \rightarrow 0X_2 1 \mid 1$

Άρα τελική γραμματική που παράγεται (αλλάζοντας το όνομα της μεταβλητής X_2 σε X) είναι::

$\boldsymbol{S \rightarrow 0X | \varepsilon}$
$\boldsymbol{X \rightarrow 0X1 \mid 1}$

Που όντως είναι μια σωστή γραμματική για την γλώσσα του αυτομάτου **L=**$\{\boldsymbol{0^n 1^n | n \geq 0}\}$

Β. Θεωρία

2. Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

Έστω δύο γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα

- Η ένωση τους είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (θα το αποδείξουμε μέσω Γραμματικών Χ.Σ.)
- Η παράθεση τους είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (θα το αποδείξουμε μέσω Γραμματικών Χ.Σ.)
- Το αστέρι Kleene μίας γλώσσας θα είναι χωρίς συμφραζόμενα (θα το αποδείξουμε μέσω Γραμματικών Χ.Σ.)

Άρα έχουμε κλειστότητα στις 3 αυτές πράξεις στις Γ.Χ.Σ.

Αντίθετα δεν έχουμε κλειστότητα στις Γ.Χ.Σ. στις πράξεις:

- Στο συμπλήρωμα μίας γλώσσας
- Στην τομή δύο γλωσσών

Και θα το αποδείξουμε μέσω της κατασκευής κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων.

Β. Θεωρία

2. Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

1. Κλειστότητα στην Ένωση

Θεώρημα (Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα στην Ένωση)

Αν η L_1 είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων και η L_2 είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων τότε και η $L_1 \cup L_2$ είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων

Απόδειξη
Η L_1 είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα S_1
Η L_2 είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα S_2

Η $L_1 \cup L_2$ παράγεται από την γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αρχικό κανόνα $\boldsymbol{S \rightarrow S_1 \mid S_2}$ άρα είναι χωρίς συμφραζόμενα.

Άρα έχουμε έναν κανόνα για να κάνουμε την ένωση δύο γλωσσών
Π.χ. η γλώσσα $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ παράγεται από την γραμματική: $S_1 \rightarrow 0S_1 1 | \varepsilon$
Και η γλώσσα $L_2 = \{1^m 0^m \mid m \geq 0\}$ παράγεται από την γραμματική: $S_2 \rightarrow 1S_2 0 | \varepsilon$

Άρα η γλώσσα $L' = L_1 \cup L_2$ παράγεται από την γραμματική:
$S \rightarrow S_1 \mid S_2$
$S_1 \rightarrow 0S_1 1 | \varepsilon$
$S_2 \rightarrow 1S_2 0 | \varepsilon$

Β. Θεωρία

2. Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

2. Κλειστότητα στην Παράθεση

Θεώρημα (Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα στην Παράθεση)

Αν η L_1 είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων και η L_2 είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων τότε και η L_1L_2 είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων

Απόδειξη

Η L_1 είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα S_1

Η L_2 είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα S_2

Η L_1L_2 παράγεται από την γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αρχικό κανόνα $\boldsymbol{S \to S_1S_2}$ άρα είναι χωρίς συμφραζόμενα.

Άρα έχουμε έναν κανόνα για να κάνουμε την παράθεση δύο γλωσσών

Π.χ. η γλώσσα $L_1 = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ παράγεται από την γραμματική: $S_1 \to 0S_11|\varepsilon$

Και η γλώσσα $L_2 = \{1^m0^m \mid m \geq 0\}$ παράγεται από την γραμματική: $S_2 \to 1S_20|\varepsilon$

Άρα η γλώσσα $L' = \{0^n1^n1^m0^m \mid n,m \geq 0\} = L_1L_2$ παράγεται από την γραμματική:

$S \to S_1S_2$

$S_1 \to 0S_11|\varepsilon$

$S_2 \to 1S_20|\varepsilon$

Β. Θεωρία

2. Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

3. Κλειστότητα στο Αστέρι Kleene

Θεώρημα (Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα στο αστέρι Kleene)

Αν η L είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων τότε και η L* είναι Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων.

Απόδειξη

Η L είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα S_1

Η L* παράγεται από την γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αρχικό κανόνα $\boldsymbol{S \to S_1 S | \varepsilon}$ άρα είναι χωρίς συμφραζόμενα.

Άρα έχουμε έναν κανόνα για να κάνουμε την γραμματική του αστεριού Kleene μιας γλώσσας.

Π.χ. η γλώσσα $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ παράγεται από την γραμματική: $S_1 \to 0S_1 1|\varepsilon$

Άρα η γλώσσα $L' = \{(0^n 1^n)^m \mid n, m \geq 0\} = L^*$ παράγεται από την γραμματική:

$S \to S_1 S|\varepsilon$

$S_1 \to 0S_1 1|\varepsilon$

Β. Θεωρία

2. Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

4. ΌΧΙ Κλειστότητα στην Τομή

Δεν έχουμε κλειστότητα στην πράξη της τομής

Για να το αποδείξουμε πρέπει να δείξουμε ότι η τομή δύο γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (δηλαδή να βρούμε ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα):

Πράγματι αν:

- $\mathrm{L}_1 = \{a^n b^n c^m | n, m \geq 0\}$
- $\mathrm{L}_2 = \{a^m b^n c^n | n, m \geq 0\}$

Που είναι και οι δύο χωρίς συμφραζόμενα (γιατί;)

Η τομή τους είναι η γλώσσα:
$\mathrm{L}_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$
που όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα (θα το αποδείξουμε με το λήμμα της άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα).

Προσοχή! Η σωστή ερμηνεία του γεγονότος ότι δεν έχουμε κλειστότητα στην πράξη της τομής είναι ότι αν έχουμε δύο γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα, τότε η τομή τους:

- Μπορεί να είναι χωρίς συμφραζόμενα
- Μπορεί να μην είναι χωρίς συμφραζόμενα

Δεν σημαίνει δηλαδή ότι «σώνει και καλά» δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα.

Β. Θεωρία

2. Κλειστότητα των Γλωσσών Χωρίς Συμφραζόμενα

5. ΌΧΙ Κλειστότητα στο συμπλήρωμα

Δεν έχουμε κλειστότητα στην πράξη του συμπληρώματος

Για να το αποδείξουμε πρέπει να δείξουμε το συμπλήρωμα μιας γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (δηλαδή να βρούμε ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα):

Πράγματι αν:

- $\mathrm{L}_1 = \{w \in \{\alpha, b, c\}^* \mid w$ δεν έχει ίσα a και b}
- $\mathrm{L}_2 = \{w \in \{\alpha, b, c\}^* \mid w$ δεν έχει ίσα b και c}

που είναι και οι δύο χωρίς συμφραζόμενα (γιατί;).
Τότε η ένωση τους είναι η γλώσσα
$\mathrm{L}' = \{w \in \{\alpha, b, c\}^* \mid w$ δεν έχει ίσα a και b ή δεν έχει ίσα b και c }
Και είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Τότε το συμπλήρωμα της L' είναι η γλώσσα:
$\overline{\mathrm{L}'} = \{w \in \{\alpha, b, c\}^* \mid w$ έχει ίσα a, b και c }
που όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα (θα το αποδείξουμε με το λήμμα της άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα).

Προσοχή! Η σωστή ερμηνεία του γεγονότος ότι δεν έχουμε κλειστότητα στην πράξη του συμπληρώματος, σημαίνει ότι το συμπλήρωμα μιας γλώσσας ανεξάρτητης συμφραζομένων:

- Μπορεί να είναι χωρίς συμφραζόμενα
- Μπορεί να μην είναι χωρίς συμφραζόμενα

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Εξετάστε αν έχουμε κλειστότητα στην πράξη της διαφοράς δύο γλωσσών στις γλώσσες ανεξάρτητες συμφραζομένων.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Δεδομένου ότι η γλώσσα L_1 παράγεται από μία γραμματική ανεξάρτητη συμφραζομένων με αρχικό κανόνα S_1 και η γλώσσα L_2 παράγεται από μία γραμματική ανεξάρτητη συμφραζομένων με αρχικό κανόνα S_2

Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες γλώσσες είναι ανεξάρτητες συμφραζομένων:

1. $(L_1 \cup L_2)^*$

2. $(L_1L_2)^* \cup (L_2L_1)^*$