ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ16

ΘΕΜΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Α) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = n\log^2 n + \log^{11} n$$

$$f_2(n) = n^3 \log n + \log^4 n$$

$$f_3(n) = \log^n 2^{\log n}$$

Ο συμβολισμός log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g (f ≡ g), αν f = Θ(g) (ισοδύναμα Θ(f) = Θ(g)). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g (f < g), αν f = o(g).

(Β) Να λύσετε τις αναδρομές:

(1) $T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n$

(2) $T(n) = T\left(\frac{4n}{7}\right) + T\left(\frac{3n}{12}\right) + \log^2 n$

(3) $T(n) = T\left(\frac{4n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{6}\right) + n$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση T(n) = aT(n/b) + f(n), όπου a≥1, b>1 είναι σταθερές, και f(n) είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, και αν υπάρχει σταθερά n_0, τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά c<1, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$L_1 = 1^*001^*001^*001^*$

$L_2 = (01+1011+0)^*$

$L_3 = 1^*00^*0+ 0^*01^*1$

$L_4 = (0+1)^*10^*1^*1(11)^*(00)^*$

$L_5 = (100^*110^*1^*)^*$

<u>Άσκηση 2:</u> Δίδεται η κανονική έκφραση: 1*0*1*

(Α) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΠΑ) της L

(Β) Δώστε το ισοδύναμο Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΝΠΑ) της L

(Γ) Απλοποιήστε το παραπάνω ΝΠΑ

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες:

$\mathrm{L}_1 = \{1^n 0^{2n} |\ n \geq 0\}$

$\mathrm{L}_2 = \{1^m 0^n 1^n 0^m |\ n, m \geq 0\}$

$\mathrm{L}_3 = \{0^m 1^n 0^m 0^n |\ n, m \geq 0\}$

$\mathrm{L}_4 = \{1^{3n} 0^{4n} |\ n, m \geq 0\}$

$\mathrm{L}_5 = \{wcw^R |\ w \in \{a, b\}^*\}$

$\mathrm{L}_6 = \{0^{2n} 1^{3n} |\ n \geq 0\}$

$\mathrm{L}_7 = \{a^n (bc)^{3n} |\ n \geq 0\}$

$\mathrm{L}_8 = \{(ab)^n b^m c^{n+m} |\ n, m \geq 0\}$

$\mathrm{L}_9 = \{a^n b^{n+m} (bc)^m |\ n, m \geq 0\}$

Άσκηση 2

Δίδεται η γλώσσα $L = \{0^n a^n b^m 1^m \mid n, m \geq 0\}$

(Α) Δείξτε ότι η L δεν είναι κανονική

(Β) Δώστε Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της L

(Γ) Δώστε Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοίβας που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L.

Το Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ **για κάθε φυσικό** $m \geq 0$