ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-5
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) 6 ζευγάρια συναντούνται σε ένα σπίτι και ανταλλάσουν χειραψίες. Κάθε άτομο δεν ανταλλάσει χειραψία με οποιοδήποτε άλλο περισσότερες από μία φορές.
ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΗ: Το μέγιστο πλήθος θα είναι αν ανταλάσσουν χειραψία όλοι με όλους ακριβώς μια φορά.

1. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών είναι 120.
   Λάθος. Το μέγιστο δυνατό πλήθος είναι αν ανταλλάξουν χειραψίες όλα τα άτομα (είναι 12 αφού είναι 6 ζευγάρια) ανά δύο, άρα ως συνδυασμοί χωρίς επανάληψη οι τρόποι είναι: $\binom{12}{2}=\frac{12!}{2!10!}=\frac{12*11}{2}=66$
2. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών ανάμεσα σε άτομα διαφορετικού φύλου είναι 36.
   Σωστό. Προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου: $6*6=36$
3. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών ανάμεσα σε άτομα ίδιου φύλου είναι ίσο με τον αριθμό των υποσυνόλων που αποτελούνται από 2 ή 4 στοιχεία, τα οποία επιλέγονται από ένα σύνολο που αποτελείται από 6 διακεκριμένα στοιχεία.
   Σωστό. Οι χειραψίες μεταξύ ανδρών είναι $\binom{6}{2}$ και ομοίως μεταξύ γυναικών είναι $\binom{6}{2}$. Συνεπώς από τον κανόνα του αθροίσματος είναι συνολικά $\binom{6}{2}+\binom{6}{2}$.
   Ισχύει για τα υποσύνολα με 2 ή 4 στοιχεία ότι αυτά είναι: $\binom{6}{2}+\binom{6}{4}$.
   Αφού $\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$ οι δύο παραπάνω ποσότητες είναι μεταξύ τους ίσες.
4. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών στις οποίες μετέχουν 4 άτομα είναι 38.
   Σωστό. Τέσσερα συγκεκριμένα άτομα θα συμμετέχουν σε $\binom{4}{2}=\cdots=6$ χειραψίες (αυτές που κάνουν μεταξύ τους) και ακόμη $4*8=32$ χειραψίες (αυτές που κάνουν με τα υπόλοιπα άτομα) άρα από τον κανόνα του αθροίσματος οι συνολικές χειραψίες είναι $6+32=38$

(2) Έστω A σύνολο με n στοιχεία

1. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A είναι ίσος με n^2
   Λάθος. Είναι: 2^n
2. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με *k* στοιχεία είναι ίσος με το συντελεστή του x^{n-k} στην παράσταση $(1+x)^n$
   Σωστό. Ο αριθμός των υποσυνόλων με k στοιχεία είναι: $\binom{n}{k}$ ενώ ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{n}{n-k}$ Γνωρίζουμε ότι: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
3. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με *k* στοιχεία είναι ίσος με τους συνδυασμούς *k* στοιχείων από *n-k*+1 στοιχεία με επανάληψη.
   Σωστό. Ο αριθμός των υποσυνόλων με k στοιχεία είναι: $\binom{n}{k}$ ενώ οι ζητούμενοι συνδυασμοί (εφαρμόζοντας τον τύπο των ΣΜΕ θέτοντας όπου n το n-k+1) είναι $\binom{(n-k+1)+k-1}{k}=\binom{n}{k}$
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A είναι ίσος με το άθροισμα όλων των συντελεστών του πολυωνύμου $(1+x)^n$
   Σωστό. Το πολυώνυμο (από το διωνυμικό ανάπτυγμα) είναι: $\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$ άρα το άθροισμα των συντελεστών είναι: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

(3) Ένα Σούπερ-μάρκετ προμηθεύεται σε καθημερινή βάση 2000 λίτρα γάλακτος σε συσκευασίες του ενός λίτρου και των δύο λίτρων. Από αυτές τουλάχιστον 100 είναι συσκευασίες του ενός λίτρου και τουλάχιστον 100 συσκευασίες των δύο λίτρων. Οι διαφορετικοί τρόποι προμήθειας της συγκεκριμένης ποσότητας των 2000 λίτρων δίνονται:

1. Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+...\right)\left(x^{200}+x^{201}+x^{202}+...\right)$

   Λάθος. Ο δεύτερος απαριθμητής αναπαριστά σωστά τις συσκευασίες των δύο λίτρων ξεκινώντας από το x^{200} (100 συσκευασίες Χ 2 λίτρα η κάθε μία). Ωστόσο οι επόμενοι όροι είναι οι x^{201}, x^{202}, x^{203} κ.λ.π., δηλαδή το βήμα αύξησης στον εκθέτη είναι μοναδιαίο ενώ θα έπρεπε να είναι ανά δύο (x^{202}, x^{204}, x^{206} κ.λ.π.)Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+...\right)\left(x^{200}+x^{202}+x^{204}+...\right)$

2. Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+...\right)\left(x^{200}+x^{202}+x^{204}+...\right)$

   Σωστό. Για τον λόγο που περιγράφηκε παραπάνω (και οι δύο συσκευασίες ξεκινούν με 100 τουλάχιστον εμφανίσεις, ενώ η συσκευασία των 2 λίτρων συνεισφέρει διπλάσια λίτρα από τον εκθέτη του αντίστοιχου όρου)

3. Από το συντελεστή του όρου x^{1700} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(1+x+x^2+...\right)\left(1+x^2+x^4+x^6+...\right)$

   Σωστό. Επιλέγω πρώτα 100 συσκευασίες του 1 λίτρου και 100 συσκευασίες των δύο λίτρων για να ικανοποιήσω τον περιορισμό. Πρέπει να συμπληρώσω ακόμη 1700 λίτρα χωρίς πλέον κάποιον περιορισμό, αλλά με διαφορετική συμβολή στο στόχο. Ο πρώτος απαριθμητής συμβολίζει την επιλογή συσκευασιών του 1 λίτρου και ο 2[ος] απαριθμητής συμβολίζει την επιλογή συσκευασιών των 2 λίτρων. Ο ζητούμενος απαριθμητής είναι σωστός αφού πρέπει να επιλέξουμε πλέον συσκευασίες συνολικού όγκου 200 λίτρων

4. Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+...+x^{1800}\right)\left(x^{200}+x^{202}+x^{204}+...x^{1800}\right)$

   Λάθος. Είναι εσφαλμένη εφαρμογή του «μίζερου» τρόπου. Για τις συσκευασίες του 1 λίτρου έχουμε ότι πάνε μεχρι 1800 (αφού από τις συσκευασίες των 2 λίτρων θα δεσμεύσουμε σίγουρα 200 λίτρα) ενώ για τις συσκευασίες των 2 λίτρων έχουμε ότι θα έπρεπε να πάνε μέχρι 1900 (αφού από τις συσκευασίες του 1 λίτρου θα δεσμεύσουμε σίγουρα 100 λίτρα)

(4) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. $\varphi \wedge \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.

   Σωστό. Αφού στα αριστερά της ταυτολογικής συνεπαγωγής έχω αντίφαση.

2. $\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

   Σωστό. Αφού στα δεξιά της ταυτολογικής συνεπαγωγής έχω ταυτολογία

3. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία.

   Σωστό. Με πίνακα αλήθειας (ή παρατηρώντας ότι είναι εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαναστροφής της προτασιακής λογικής)

4. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ είναι αντίφαση.

   Λάθος. Με την αποτίμηση φ=Α, ψ=Ψ έχω ότι ο τύπος βγαίνει αληθής.

(5) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές και ποιες όχι:

1. Το $\psi \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \theta$, προκύπτει από το $\{\psi,\varphi,\chi)\} \vdash \theta$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.

   Λάθος. Στην πρώτη εφαρμογή προκύπτει $\chi\rightarrow\theta$, είτε $\varphi\rightarrow\theta$, είτε $\psi\rightarrow\theta$ οπότε δεν μπορούμε να πάρουμε το ζητούμενο

2. Το $\{\varphi,\psi\} \vdash \neg\neg\psi$, προκύπτει από το $\{\psi,\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.

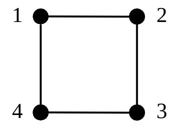
   Σωστό. Προκύπτει με άμεση εφαρμογή του θεωρήματος

3. Το $\varphi \vdash \psi \rightarrow \neg\chi$, προκύπτει από το $\{\psi,\chi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.

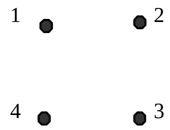
   Σωστό. Πρώτα προκύπτει $\{\psi,\varphi\} \vdash \neg\chi$ και στη συνέχεια $\{\varphi\} \vdash \psi\rightarrow\neg\chi$

4. Το $\varphi \vdash \neg\psi \to \chi$, προκύπτει από το $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   Λάθος. Δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής καθώς στο συμπέρασμα δεν υπάρχει άρνηση

(6) Δίνονται τα γραφήματα



Γράφημα Α



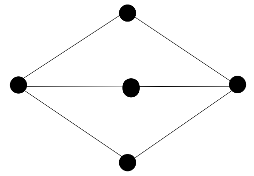
Γράφημα Β

Οι παρακάτω δομές ικανοποιούν την πρόταση ∀x∀y[P(x, y) → ∃z(P(x,z) ∧ P(z,y))]

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ με το *P*(*x*, *y*) να σημαίνει ότι *x* ≤ *y*.
   Σωστό. Η πρόταση ερμηνεύεται ως «Για κάθε ζεύγος φυσικών x,y αν x≤y τότε υπάρχει z έτσι ώστε x≤z≤y και είναι αληθής.
2. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών Z με το *P*(*x*,*y*) να σημαίνει ότι τα *x* και *y* είναι αντίθετοι αριθμοί (δηλ.ότι *x* + *y* = 0).
   Λάθος. Η πρόταση ερμηνεύεται ως «Για κάθε ζεύγος ακεραίων x,y αν x αντίθετος του y τότε υπάρχει z που είναι αντίθετος και του x και του y». Είναι λάθος, αφου π.χ. για το ζεύγος x=4 και y=-4, το z θα πρέπει να είναι αντίθετος του x (άρα να είναι ίσος με -4) αλλά και του y (άρα να είναι ίσος με 4).
3. Το γράφημα Α με το *P*(*x*, *y*) να σημαίνει ότι τα *x* και *y* συνδέονται με ακμή.
   Λάθος. Η ερμηνεία της πρότασης είναι «Κάθε ζεύγος κορυφών αν συνδεόνται με ακμή τότε συνδέονται και με μονοπάτι μήκους 2» και δεν αληθεύει π.χ. για τις κορυφές 1 και 2 που συνδέονται με ακμή αλλά όχι με μονοπάτι μήκους 2.
4. Το γράφημα Β που αποτελείται από *4* απομονωμένες κορυφές με το *P*(*x*, *y*) να σημαίνει ότι τα *x* και *y* συνδέονται με ακμή.
   Σωστό. Η ερμηνεία της πρότασης είναι ίδια με το προηγούμενο ερώτημα. Ωστόσο η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ψευδής για κάθε ζεύγος κορυφών, άρα η πρόταση είναι αληθής.

(7) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν την επιπεδότητα αληθεύουν;

1. Κάθε απλό επίπεδο γράφημα περιέχει αναγκαστικά μια τουλάχιστον κορυφή βαθμού μικρότερου ή ίσου του 5.
   Σωστό. Αν δεν περιέχει κορυφή βαθμού μικρότερου ή ίσου του 5, τότε όλες οι κορυφές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 6, άρα από το λήμμα της χειραψίας έχουμε $2m \geq 6n$ και ισοδύναμα $m \geq 3n$. Ωστόσο στα απλά γραφήματα γνωρίζουμε ότι $m \leq 3n-6$. Άτοπο.
2. Όλες οι αποτυπώσεις επίπεδου γραφήματος έχουν ίδιο αριθμό όψεων.
   Σωστό. Από τον τύπο του Euler, οι όψεις κάθε αποτύπωσης θα έχουν ίσο πλήθος όψεων (αφού οι ακμές και οι κορυφές παραμένουν ίδιες). Προσοχή: Αφού αναφερόμαστε στο ίδιο γράφημα δεν χρειάζεται το γράφημα να είναι συνδεόμενο. Ισχύει αναδρομικά η πρόταση σε κάθε συνεκτική συνιστώσα.
3. Ένα μη επίπεδο γράφημα περιέχει σαν υπογράφημα το K_5 ή/και το $K_{3,3}$.
   Λάθος. Μπορεί να μην περιέχει το K5, ή/και το K3,3 και να περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K5 ή του K3,3.
4. Ένα γράφημα που δεν έχει κύκλο Hamilton είναι αναγκαστικά μη επίπεδο
   Λάθος. Π.χ. το ακόλουθο γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton και είναι επίπεδο:



(8) *Έστω Α ο πίνακας γειτνίασης και Π ο πίνακας πρόσπτωσης ενός μη κατευθυντικού (μη κατευθυνόμενου) απλού γραφήματος.*

1. Το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης γραμμής του Α είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης στήλης
   Σωστό. Και τα δύο ισούνται με το βαθμό της κορυφής v_i
2. Ο αριθμός των άσσων του Α είναι άρτιος.
   Σωστό. Διότι είναι ίσο με το 2m (που είναι πάντα άρτιος)
3. Δύο ισόμορφα γραφήματα έχουν ίσους πίνακες γειτνίασης.
   Λάθος. Οι πίνακες γειτνίασης δύο ισόμορφων γραφημάτων δεν είναι ίσοι. Υπάρχει μετάθεση των κορυφών που κάνει τους πίνακες γειτνίασης να είναι ίσοι.
4. Είναι δυνατόν να υπάρχει στήλη στον Π μόνο με άσσους.
   Λάθος. Υποχρεωτικά έχει μόνο δύο άσσους, διότι κάθε ακμή προσπίπτει σε δύο ακριβώς κορυφές.

(9) Τα παρακάτω (απλά μη κατευθυνόμενα) γραφήματα είναι δυνατόν να κατασκευασθούν:

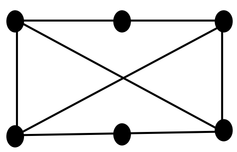
1. Διχρωματίσιμο γράφημα με 6 κορυφές και 9 ακμές
   Σωστό. Είναι το $K_{3,3}$
2. Επίπεδο γράφημα με 6 κορυφές και 14 ακμές
   Λάθος. Το ζητούμενο γράφημα είναι το K_6 (που έχει 6*5/2=15 ακμές) αν του αφαιρέσουμε μία ακμή. Άρα υποχρεωτικά θα περιέχει το Κ άρα δεν θα είναι επίπεδο.
3. Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 11 κορυφές
   Λάθος. Τα αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα έχουν πολλαπλάσια του 4 (4,8,12,16,...) ή πολλαπλάσια του 4 συν ένα (1,5,9,13,...) κορυφές.
4. Επίπεδο και διχοτομίσιμο γράφημα με 8 κορυφές και 15 ακμές.
   Λάθος. Το ζητούμενο γράφημα είναι έιτε το $K_{3,5}$ (που δεν είναι επίπεδο αφού περιέχει το $K_{3,3}$) είτε το $K_{4,4}$ μείον μία ακμή (που περιέχει το $K_{3,3}$). Σε κάθε περίπτωση δεν είναι επίπεδο γράφημα.

(10) Έστω G και H απλά μη κατευθυντικά γραφήματα που είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

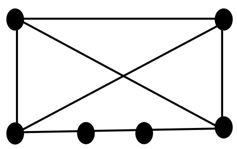
Διευκρίνιση: Σε όλα τα επόμενα ερωτήματα θεωρούμε ως G' και H' τα ισόμορφα γραφήματα που προκύπτουν αν κάνουμε όλες τις δυνατές απλοποιήσεις σειράς στα G και H.

1. Αν το G είναι επίπεδο γράφημα, πρέπει και το H να είναι επίπεδο γράφημα.
   Σωστό. Ακόμη και αν εφαρμόσουμε όλες τις δυνατές απλοποιήσεις σειράς στα γραφήματα δεν αίρεται η επιπεδότητα (από θεώρημα Kuratowski)
2. Αν το G είναι δέντρο, πρέπει και το H να είναι δένδρο.
   Σωστό. Αφού με απλοποίηση σειράς δεν καταργούνται οι κύκλοι του γραφήματος
3. Αν τα G,H είναι επίπεδα γραφήματα τότε πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος όψεων.
   Σωστό. Αφού με απλοποίηση σειράς δεν επηρεάζεται το πλήθος των κύκλων του γραφήματος
4. Αν τα G,H έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών πρέπει να είναι ισομορφικά μεταξύ τους.
   Λάθος. Π.χ. τα παρακάτω δύο γραφήματα αν και ομοιομορφικά με το ίδιο πλήθος κορυφών δεν είναι ισομορφικά μεταξύ τους:

G



H



(Σημειώστε ότι δεν είναι ισομορφικά μεταξύ τους, διότι στο μεν πρώτο οι κορυφές βαθμού 2 δεν συνδέονται μεταξύ τους, ενώ στο H οι κορυφές βαθμού 2 συνδέονται μεταξύ τους)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

Μελετάται η κατασκευή ενός πρότυπου οικισμού που αποτελείται από 9 κατοικίες τύπου Χ και 9 κατοικίες τύπου Υ. Οι δύο τύποι κατοικιών θεωρούνται διακεκριμένοι

Α) Έστω ότι οι κατοικίες κάθε τύπου είναι διακεκριμένες.

i) Με πόσους τρόπους μπορεί ένας υποψήφιος αγοραστής να επιλέξει μια κατοικία που μπορεί να είναι είτε τύπου Χ είτε τύπου Υ;

ii) Με πόσους τρόπους μπορεί ό υποψήφιος αγοραστής να επιλέξει τρεις κατοικίες από τις οποίες μία τουλάχιστον να είναι τύπου Χ;

iii) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχεδιαστεί ο οικισμός αν ανά τρεις οι κατοικίες κάθε τύπου έχουν κοινή αυλή και δεν παίζει ρόλο η σχετική θέση των κατοικιών που μοιράζονται την ίδια αυλή και η σχετική θέση των τριάδων κατοικιών στον οικισμό;

iv) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχεδιαστεί ο οικισμός αν κάθε κατοικία τύπου Χ έχει κοινή αυλή με μια ακριβώς κατοικία τύπου Υ και δεν παίζει ρόλο η σχετική θέση των κατοικιών που μοιράζονται την ίδια αυλή και η σχετική θέση των κατοικιών με κοινή αυλή στον οικισμό;

Β) Έστω ότι οι κατοικίες κάθε τύπου δεν είναι διακεκριμένες. Οι κατοικίες τύπου Χ κοστίζουν 100.000€ και οι κατοικίες τύπου Υ κοστίζουν 200.000€. Μια εταιρία επενδύσεων έχει στη διάθεσή της 2.000.000€. Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε το συντελεστή του όρου που δίνει τον πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επενδυθεί **το συνολικό ή μέρος του ποσού** των 2.000.000€, αν αγοραστούν τουλάχιστον μια κατοικία τύπου Χ και το πολύ 7 κατοικίες τύπου Υ. Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή.

Λύση:
(Υποερώτημα Α.i)
Από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι 9+9=18

(Υποερώτημα Α.ii)
Α' τρόπος:
Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις κατοικίες τύπου Χ:

- Να έχει 1 κατοικία τύπου Χ, άρα 2 κατοικίες τύπου Υ. Οι τρόποι είναι: $\binom{9}{1}\binom{9}{2}$
- Να έχει 2 κατοικίες τύπου Χ, άρα 1 κατοικία τύπου Υ. Οι τρόποι είναι: $\binom{9}{2}\binom{9}{1}$
- Να έχει 3 κατοικίες τύπου Χ. Οι τρόποι είναι: $\binom{9}{3}$

Από τον κανόνα του αθροίσματος οι συνολικοί τρόποι είναι: $\binom{9}{1}\binom{9}{2}+\binom{9}{2}\binom{9}{1}+\binom{9}{3}$

Β' τρόπος: Με Αφαίρεση.

Από όλους του δυνατούς τρόπους επιλογής κατοικιών (που είναι $\binom{18}{3}$) αφαιρούμε τους τρόπους να επιλέξουμε κατοικιές που (δεν είναι τουλάχιστον ένα Χ, άρα κανένα Χ) συνεπώς είναι όλες Υ. Οι τρόποι είναι $\binom{9}{3}$

Άρα τελικά οι τρόποι είναι: $\binom{18}{3}-\binom{9}{3}$

(Υποερώτημα Α.iii)
Για τις κατοικίες τύπου Χ:

- Μία τριάδα κατοικιών επιλέγεται με $\binom{9}{3}$ τρόπους (αφού η σχετική θεση των κατοικιών δεν έχει σημασία είναι συνδυασμός και όχι διάταξη)
- Η επόμενη τριάδα κατοικιών επιλέγεται με $\binom{6}{3}$ τρόπους.
- Η τελευταία τριάδα κατοικιών επιλέγεται με $\binom{3}{3}$ τρόπους

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$. Ωστόσο οι ομάδες είναι των τρίων κατοικιών Χ και η σχετική θέση τους στον οικισμό δεν έχει σημασία, άρα πρέπει να διαιρέσουμε με 3!. Άρα οι τρόποι είναι: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!}$.

Όμοια οι τρόποι να επιλέξουμε τις κατοικίες τύπου Υ είναι: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!}$.

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου ως: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!}\cdot\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!}$.

(Υποερώτημα Α.iv)
Για την 1η ομάδα επιλέγουμε μια κατοικία Χ και μια κατοικία Υ με $9*9$ τρόπους
Για την 2η ομάδα επιλέγουμε μια κατοικία Χ και μια κατοικία Υ με $8*8$ τρόπους
...
Για την 9η ομάδα επιλέγουμε μια κατοικία Χ και μια κατοικία Υ με $1*1$ τρόπο.

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $9*9*8*8*\ldots*1*1=9!*9!$

Επειδή η σχετική θέση των κατοικιών με κοινή αυλή στον οικισμό δεν έχει σημασία πρέπει να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με 9!. Αρα οι τρόποι είναι: $\frac{9!*9!}{9!}=9!$

(Υποερώτημα Β)
Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η διανομή 2.000.000 όμοιων μονάδων σε 3 υποδοχές Χ,Υ,Ζ όπου:

- Η υποδοχή Χ παίρνει μονάδες που είναι πολλαπλάσιο των 100.000, και τουλάχιστον 1 κατοικία (αλλά και το πολύ 9 λόγω της κεντρικής εκφώνησης), άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{100.000}+x^{200.000}+\ldots+x^{900.000}$
- Η υποδοχή Υ παίρνει μονάδες που είναι πολλαπλάσιο των 200.000, και το πολύ 1.400.000 μονάδες (αφού οι κατοικίες έίναι το πολύ 7), άρα ο απαριθμητής είναι: $1+x^{200.000}+\ldots+x^{1.400.000}$
- Η υποδοχή Ζ παίρνει οσεσδήποτε μονάδες, ώστε να μπορεί να δοθεί οποιοδήποτε ποσό που πληρεί τους περιορισμούς στις δύο πρώτες υποδοχές και τα υπόλοιπα, που θα τοποθετηθούν στην υποδοχή Ζ να μην επενδυθούν, άρα ο απαριθμητής είναι: $1+x+x^2+\ldots+x^{2.000.000}$

Άρα η γεννήτρια είναι:
$\left(x^{100.000}+x^{200.000}+\ldots+x^{900.000}\right)\cdot\left(1+x^{200.000}+\ldots+x^{1.400.000}\right)\cdot\left(1+x+x^2+\ldots+x^{2.000.000}\right)$και ο ζητούμενος συντελεστής είναι του όρου $x^{2.000.000}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Άσκηση 2 (Μονάδες 35)

α) Δίδεται ο προτασιακός τύπος $\varphi = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{n-1} \rightarrow p_n$ ορισμένος σε n προτασιακές μεταβλητές. Έστω α_1 και α_2 δύο αποτιμήσεις των n μεταβλητών $p_1, p_2, \ldots, p_n$ που ικανοποιούν τον φ. Δείξτε ότι ο φ ικανοποιείται επίσης και από την αποτίμηση α η οποία αποδίδει στην μεταβλητή $p_i, i=1,\ldots,n$, την σύζευξη των τιμών που αποδίδουν στην p_i οι α_1 και α_2.

β) Δώστε τυπική απόδειξη του τύπου $\neg\neg\varphi \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Δείξτε ότι η κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου δεν είναι μοναδική.

Υπόδειξη: Εξετάστε τον τύπο $\forall x\ P(x) \rightarrow \forall y\ Q(y)$.

δ) Έστω L μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος P κι ένα σύμβολο σταθεράς c.

(1) Περιγράψτε μια ερμηνεία της γλώσσας που να ικανοποιεί και τις δύο προτάσεις $\exists x \exists y(P(x,c) \wedge P(c,y))$ και $\forall x(P(x,c) \rightarrow \exists y(P(x,y) \wedge P(y,c)))$

(2) Εξετάστε αν οι δυο παραπάνω προτάσεις αληθεύουν στο τροχό W_n .
(Ο τροχός W_n είναι το γράφημα με n+1 κορυφές 1,2,3,…,n+1 και με ακμές {1,2}, {2,3},…,{n-1,n}, {n,1}, {n+1,1}, {n+1,2},…, {n+1,n} όπου γράφοντας {α,β} ή {β,α} θεωρούμε ότι υπάρχει η ακμή (α,β)).

Λύση:

(Υποερώτημα α)

Λόγω της μορφής του τύπου για μια αποτίμηση που ικανοποιεί τον τύπο θα ισχύουν δύο περιπτώσεις:

- Είτε θα ισχύει $p_1=p_2=\ldots=p_n$=Α (ώστε ο τύπος να έχει τη μορφή Α->Α=Α.
- Είτε τουλάχιστον ένα από τα p_i, i=1,…,n-1 θα είναι Ψ.

Θεωρώ δύο διαφορετικές αποτιμήσεις που ικανοποιούν τον τύπο φ. Σε μία από τις δύο αποτιμήσεις τουλάχιστον ένα από τα p_i, i=1,…,n-1 θα είναι Ψ. Συνεπώς η σύζευξη του με την αντίστοιχη μεταβλητή της άλλης αποτίμησης θα είναι Ψ. Συνεπώς η νέα αποτίμηση θα έχει τουλάχιστον ένα από τα p_i, i=1,…,n-1 θα είναι Ψ, άρα θα ικανοποιεί τον τύπο φ.

(Υποερώτημα β)

Αποδεικνύουμε τυπικά ότι:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi\} \vdash \varphi$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ Τυπικό Θεώρημα
3. φ ΜΡ1,2

Δίνουμε την τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ¬¬φ, ψ: ¬φ
3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ ΜΡ1,2

4. $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\varphi: \neg\varphi,\ \psi: \varphi$
5. $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$ MP3,4
6. $\neg\varphi \to \neg\varphi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \to \varphi$ όπου $\varphi: \neg\varphi$
7. φ MP6,5

(Υποερώτημα γ)

Πράγματι ο παραπάνω τύπος έχει δύο ποσοδεικτικές μορφές

Εξαγωγή 1ης κανονικής ποσοδεικτικής μορφής:

$\forall x P(x) \to \forall y Q(y)$ (εφαρμόζω νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \exists x[P(x) \to \forall y Q(y)]$ (εφαρμόζω νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \exists x \forall y[P(x) \to Q(y)]$

Εξαγωγή 2ης κανονικής ποσοδεικτικής μορφής:

$\forall x P(x) \to \forall y Q(y)$ (εφαρμόζω νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \forall y[\forall x P(x) \to Q(y)]$ (εφαρμόζω νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \forall y \exists x[P(x) \to Q(y)]$

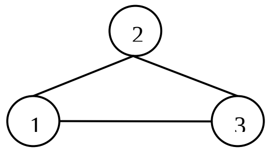
(Υποερώτημα δ1)

Ερμηνεύω τις προτάσεις σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Η 1η πρόταση ερμηνεύεται ως: Η c συνδέεται με τουλάχιστον 2 κορυφές (μπορεί να συνδέεται και με μία διότι δεν έχει y διάφορο z)

Η 2η πρόταση ερμηνεύεται ως: Από κάθε κορυφή που συνδέεται με την c, ξεκινάει μονοπάτι μήκους 2 προς την κορυφή c.

Στο παρακάτω γράφημα αληθεύουν και οι δύο προτάσεις:



Θέτοντας την κορυφή c=1, οπότε η πρώτη πρόταση αληθεύει για y=2,z=3 και η δεύτερη πρόταση αληθεύει αφού για τις δύο κορυφές που συνδέονται με την c ισχύει ότι υπάρχει μονοπάτι 2 κορυφών μέσω της τρίτης κορυφής.

(Υποερώτημα δ2)

Η 1η πρόταση αληθεύει θέτοντας ως c την κεντρική κορυφή του τροχού.

Η 2η πρόταση αληθεύει θέτοντας ως c την κεντρική κορυφή του τροχού. Κάθε περιφερειακή κορυφή του κύκλου συνδέεται με την κεντρική κορυφή του τροχού και υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 από την περιφερειακή κορυφή του τροχού πηγαίνοντας σε μία γειτονική της και έπειτα στην κεντρική κορυφή.

[Παρατήρηση: Σύμφωνα με το Μάθημα 3.6, μία σταθερα παίρνει ως τιμή, ένα στοιχείο του συμπαντος. Εδώ το σύμπαν έχει κορυφές, άρα ως σταθερά πρέπει να προσδιοριστεί μια σταθερά]

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

k-κανονικό γράφημα είναι ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που όλες οι κορυφές έχουν βαθμό k.

α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλό 5-κανονικό γράφημα με *2m+1* κορυφές, για κάθε *m≥3*.

β) Θεωρήστε ένα απλό 5-κανονικό γράφημα με τριάντα (30) ακμές. Αν το γράφημα αυτό είναι συνδεδεμένο και επίπεδο, ποιος ο αριθμός των όψεών του;

γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλό 5-κανονικό γράφημα με διάμετρο ένα (1) που να είναι επίπεδο.

Ορισμός: Διάμετρος ενός γραφήματος ορίζεται η ποσότητα max{d(u,v) | u,v∈V}, όπου d(u,v) είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από την κορυφή u στην κορυφή v.

Λύση:

(Υποερώτημα α)

Έστω ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα. Σε ένα 5-κανονικό γράφημα ισχύει ότι όλες οι κορυφές έχουν περιττό βαθμό. Ωστόσο οι κορυφές περιττού βαθμού είναι άρτιος αριθμός. Από την εκφώνηση ωστόσο οι κορυφές είναι περιττός αριθμός (2m+1). Άτοπο.

(Υποερώτημα β)

Αφού το γράφημα είναι 5-κανονικό ισχύει ότι: $m=\frac{5n}{2}$, άρα αφού $m=30$, θα έχω ότι:

$$30=\frac{5n}{2}\Longrightarrow 60=5n\Longrightarrow n=12$$

Αφού το γράφημα είναι επίπεδο και συνδεόμενο ισχύει ο τύπος του Euler, άρα ισχύει

$$o=m-n+2=30-12+2=20$$

Συνεπώς μία επίπεδη αποτύπωσή του θα έχει 20 όψεις.

(Υποερώτημα γ)

Αφού η διάμετρος είναι 1, αυτό σημαίνει ότι οποιεσδήποτε δύο κορυφές του γραφήματος έχουν απόσταση 1, δηλαδή 1 ακμή. Αυτό όμως γίνεται μόνο αν το γράφημα είναι κλίκα.

Το γράφημα είναι επίσης 5-κανονικό, άρα όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 5. Η κλίκα που όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 5 είναι η K_6. Η K_6 περιέχει την K_5 ως υπογράφημα, άρα δεν είναι επίπεδο από το θεώρημα Kuratowski.

Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

Για ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G=(V,E) με m ακμές και n κορυφές συμβολίζουμε με Δ τον μέγιστο βαθμό των κορυφών του G και δ τον ελάχιστο βαθμό των κορυφών του G.

(α) Κατασκευάστε γράφημα 10 κορυφών για το οποίο να ισχύει δ=Δ=5

(β) Κατασκευάστε γράφημα 9 κορυφών για το οποίο να ισχύει δ>2, Δ<7 και δ=Δ/2.

(γ) Να δειχθεί ότι δ≤2m/n≤Δ

Λύση:

(α) Είναι το $K_{5,5}$

(β) Είναι το $K_{3,6}$

(γ) Για το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ισχύει από το λήμμα της χειραψίας:

$$\sum_{\iota=1}^{n} d(v_i) = 2m \quad (1)$$

Ισχύει ότι κάθε βαθμός κορυφής του γραφήματος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον ελάχιστο βαθμό κορυφής δ, συνεπώς για το άθροισμα των βαθμών των κορυφών θα ισχύει:

$$\sum_{\iota=1}^{n} d(v_i) \geq n\delta \quad (2)$$

Από τις (1),(2) έπεται ότι: $2m \geq n\delta$ και λύνοντας ως προς δ: $\delta \leq \frac{2m}{n} \quad (3)$

Όμοίως ισχύει ότι κάθε βαθμός κορυφής του γραφήματος είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο βαθμό κορυφής Δ, συνεπώς για το άθροισμα των βαθμών των κορυφών θα ισχύει:

$$\sum_{\iota=1}^{n} d(v_i) \leq n\Delta \quad (3)$$

Από τις (1),(3) έπεται ότι: $2m \leq n\Delta$ και λύνοντας ως προς Δ: $\Delta \geq \frac{2m}{n} \quad (4)$

Από τις (3),(4) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο: $\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$