ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Μάθημα 1.3:
Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- Ερμηνεία των ασυμπτωτικών συμβολισμών (να ξέρουμε πως μεταφράζεται κάθε συμβολισμός)

Επίπεδο Β
- Χρήση των ορίων για την απόδειξη ότι ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός

Επίπεδο Γ
- Ορισμοί των ασυμπτωτικών συμβολισμών και απόδειξη με τον ορισμό ότι ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός

Β. Θεωρία
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

- Εισάγουμε τους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς ο,Ο,Θ,Ω,ω για να μπορούμε να περιγράψουμε την πολυπλοκότητα αγορίθμων μέσω άνω και κάτω φραγμάτων.
- Έστω δύο συναρτήσεις πολυπλοκότητας f(n) και g(n). Τότε:

Συμβολίζουμε	Διαβάζουμε	Εμπειρικά καταλαβαίνουμε ότι
$f=o(g)$	Ασυμπτωτικά, η f έχει ως γνήσιο άνω φράγμα την g	$f<g$
$f=O(g)$	Ασυμπτωτικά, η f έχει ως άνω φράγμα την g	$f\leq g$
$f=\Theta(g)$	Ασυμπτωτικά, η f έχει ως άνω και κάτω φράγμα την g	$f=g$
$f=\Omega(g)$	Ασυμπτωτικά, η f έχει ως κάτω φράγμα την g	$f\geq g$
$f=\omega(g)$	Ασυμπτωτικά, η f έχει ως γνήσιο κάτω φράγμα την g	$f>g$

Β. Θεωρία

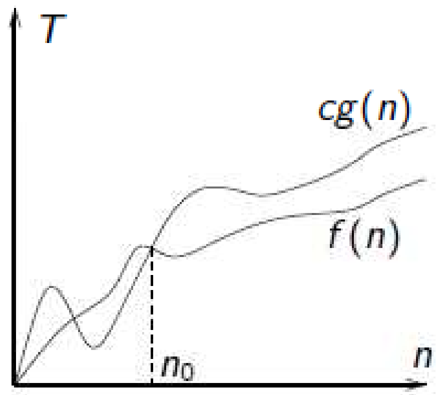
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

1. Ο συμβολισμός Ο

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε f=O(g), καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά : f≤g.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n) = O(g(n))$ αν και μόνο αν $\exists n_0 > 0, c > 0 : \quad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ για κάθε $n \geq n_0$

- Που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι μετά από κάποια σταθερά n_0, η f(n) είναι πάντα μικρότερη ή ίση από την cg(n) για κάποια κατάλληλη σταθερά c.



- Η σχέση f(n)=O(g(n)) θα διαβάζεται «η f έχει ως άνω φράγμα την g»

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

1. Ο συμβολισμός Ο

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 1
Να αποδείξετε ότι: $2n=O(n^3)$

Απόδειξη:
Έχουμε $f(n)=2n$, $g(n)=n^3$

Επιλέγουμε $n_0=1$, $c=2$.

$$f(n) \le cg(n) \Rightarrow$$

$$2n \le 2n^3 \Rightarrow$$

$$1 \le n^2$$

που ισχύει για κάθε $n \ge 1$

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

2. Ο συμβολισμός ο

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε f=o(g), καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά : f<g.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n)=o(g(n))$ αν και μόνο αν $\forall c>0 : \exists n_0 : \quad 0 \le f(n) < c \cdot g(n)$ για κάθε $n \ge n_0$

  - που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι για κάθε θετική σταθερά c η f(n) είναι πάντα μικρότερη από την cg(n) μετά από κάποια σταθερά n_0
  - Η σχέση f(n)=o(g(n)) θα διαβάζεται «η f έχει ως ΓΝΗΣΙΟ άνω φράγμα την g»
- Προσοχή!!
  - n=O(n)
  - n≠o(n)
  - $n=o(n^2)$
  - $n=o(n^3)$
  - …κ.ο.κ.
- Η απόδειξη είναι πιο δύσκολη γιατί πρέπει να γίνεται για κάθε σταθερά c>0.

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

2. Ο συμβολισμός ο

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι: $2n=o(n^2)$

Απόδειξη:

Έστω c>0:

$$f(n) < cg(n) \Rightarrow$$

$$2n < cn^2 \Rightarrow$$

$$2 < cn \Rightarrow$$

$$2/c < n$$

Άρα υπάρχει επιλέγουμε ως n_0 το $\lceil 2/c \rceil$

Β. Θεωρία

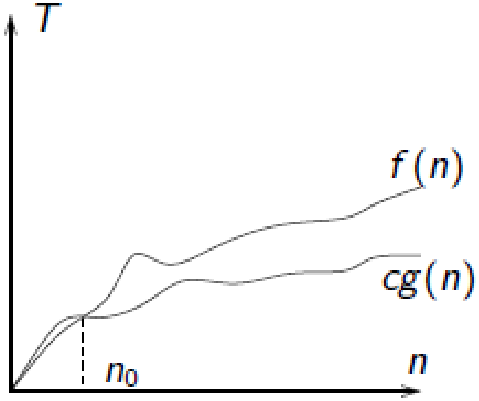
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

4. Ο συμβολισμός Ω

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε f=Ω(g), καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά : f≥g.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n)=\Omega(g(n))$ αν και μόνο αν $\exists n_0>0, c>0: \quad f(n)\geq c\cdot g(n)\geq 0$ για κάθε $n\geq n_0$

- Που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι μετά από κάποια σταθερά n_0, η f(n) είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την cg(n) για κάποια κατάλληλη σταθερά c.



- Η σχέση f(n)=Ω(g(n)) θα διαβάζεται «η f έχει ως κάτω φράγμα την g»

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

4. Ο συμβολισμός Ω

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι: 4n=Ω(logn)

Απόδειξη:

Έχουμε f(n)=4n, g(n)=logn

Επιλέγουμε $n_0=1$, c=4.

$$f(n) \geq cg(n) \Rightarrow$$

$$4n \geq 4\log n \Rightarrow$$

$$n \geq \log n$$

που ισχύει για κάθε n≥1

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός ω

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε f=ω(g), καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά: f>g.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n)=\omega(g(n))$ αν και μόνο αν $\forall c>0 : \exists n_0 : \quad f(n)>c\cdot g(n)\geq 0$ για κάθε $n\geq n_0$

  - που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι για κάθε θετική σταθερά c η f(n) είναι πάντα μεγαλύτερη από την cg(n) μετά από κάποια σταθερά n_0
  - Η σχέση f(n)=ω(g(n)) θα διαβάζεται «η f έχει ως ΓΝΗΣΙΟ κάτω φράγμα την g»
- Προσοχή!!
  - n=Ω(n)
  - n≠ω(n)
  - n=ω(logn)
  - n=ω(loglogn)
  - …κ.ο.κ.
- Η απόδειξη είναι πιο δύσκολη γιατί πρέπει να γίνεται για κάθε σταθερά c>0.

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός ω

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι: $0.5n^2=\omega(n)$

Απόδειξη:

Έστω c>0:

$$f(n) > cg(n) \Rightarrow$$

$$0.5n^2 > cn \Rightarrow$$

$$n > \frac{c}{0.5} \Rightarrow$$

$$n > 2c$$

Άρα υπάρχει επιλέγουμε ως n_0 το $2c$

Β. Θεωρία

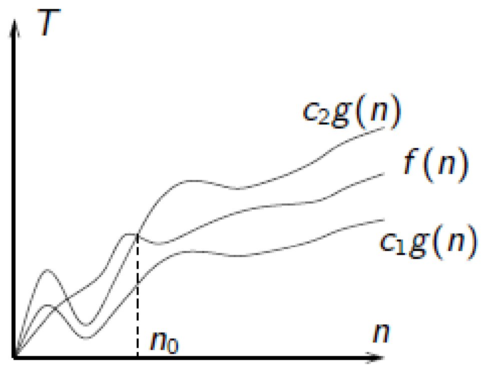
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός Θ

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε f=Θ(g), καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά f=g.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n)=\Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $\exists n_0>0, c_1, c_2>0: \quad 0<c_1 g(n)\le f(n)\le c_2 g(n)$
για κάθε $n\ge n_0$

  - Που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι μετά από κάποια σταθερά n_0, η f(n) φράσσεται από πάνω και από κάτω από την g(n), όταν αυτή πολλαπλασιάζεται αντίστοιχα με κάποιες κατάλληλες σταθερές:



$f(n)=\Theta(g(n))$

  - Η σχέση f(n)=Θ(g(n)) θα διαβάζεται «η f είναι ασυμπτωτικά ίση με την g»

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός Θ

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 5
Να αποδείξετε ότι: 4n=Θ(n)

Απόδειξη:
Έχουμε f(n)=4n, g(n)=n

Επιλέγουμε n_0=1, c1=2.

$$f(n) \geq c_1 g(n) \Rightarrow$$

$$4n \geq 2n \Rightarrow$$

$$4 \geq 2$$

που ισχύει για κάθε n≥1

Επιλέγουμε n_0=1, c_2=6.

$$f(n) \leq cg(n) \Rightarrow$$

$$4n \leq 6n \Rightarrow$$

$$4 \leq 6$$

που ισχύει για κάθε n≥1

Β. Θεωρία

2. Όρια και Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

- Για να αποδείξουμε ότι ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός μεταξύ 2 συναρτήσεων:
  - Είτε χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο ορισμό,
  - Είτε κάνουμε χρήση του ακόλουθου θεωρήματος:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases} c\neq 0, & \text{τότε } f(n)=\Theta(g(n)) \\ 0, & \text{τότε } f(n)=o(g(n)) \\ +\infty, & \text{τότε } f(n)=\omega(g(n)) \end{cases}$$

- Συνεπώς ένας εναλλακτικός (και πιο εύκολος) τρόπος να εξετάσουμε αν ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός είναι:
  - Υπολογίζουμε το παραπάνω όριο
  - Ανάλογα με το αποτέλεσμά του να αποφασίσουμε αν ισχύει ή όχι ο αντίστοιχος ασυμπτωτικός συμβολισμός

Β. Θεωρία
2. Όρια και Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 6
Να αποδείξετε ότι: $0.5n^2=\omega(n)$

Απόδειξη:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{0.5n^2}{n}=\lim_{n\to+\infty}(0.5n)=+\infty$$

Συνεπώς $0.5n^2=\omega(n)$

Παράδειγμα 6
Να αποδείξετε ότι: $2^n=o(3^n)$

Απόδειξη:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}(0.66)^n=0$$

Συνεπώς $2^n=o(3^n)$

Β. Θεωρία
3. Λήμματα στους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς

- Ισχύουν οι ακόλουθες προφανείς προτάσεις για τους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς:

Λήμμα 1: $f(n)=\Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n)=O(g(n))$ και $f(n)=\Omega(g(n))$

  - Διαισθητικά: f=g αν και μόνο αν f≤g και f≥g
  - Θα ξέρουμε ότι όταν ισχύει το Θ ισχύει και το Ο και το Ω

Λήμμα 2: Αν $f(n)=o(g(n))$ τοτε $f(n)=O(g(n))$

  - Διαισθητικά: Αν f<g τότε f≤g
  - Θα ξέρουμε ότι όταν ισχύει το ο ισχύει και το Ο
  - (Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Λήμμα 3: Αν $f(n)=\omega(g(n))$ τοτε $f(n)=\Omega(g(n))$

  - Διαισθητικά: Αν f>g τότε f≥g
  - Θα ξέρουμε ότι όταν ισχύει το ω ισχύει και το Ω
  - (Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Β. Θεωρία

4. Οι ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί ως Σύνολα

- Έστω η παράσταση $O(n^2)$:
- Ισχύουν τα εξής:
  - $1=O(n^2)$
  - $n+2=O(n^2)$
  - $\log n=O(n^2)$
  - $\log n+5\log\log n=O(n^2)$
  - $3n^2=O(n^2)$
- Στην πραγματικότητα ο συμβολισμός $O(n^2)$ εκφράζει όλες τις συναρτήσεις που είναι ασυμπτωτικά μικρότερες ή ίσες από την n^2.
- Άρα το $O(n^2)$ θα έπρεπε να απεικονίζεται ως σύνολο συναρτήσεων και να γράφουμε αντίστοιχα:
  - $1\in O(n^2)$
  - $n+2\in O(n^2)$
- Αλλά ευτυχώς έχει επικρατήσει ο συμβολισμός με την ισότητα.

Γ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 1

- Στον πίνακα που ακολουθεί για κάθε ζευγάρι συναρτήσεων f και g σημειώστε με √ αν ισχύει η σχέση του αντίστοιχου συμβολισμού της f με την g.

f(n)	g(n)	o	O	Θ	Ω	ω
n^2	n^3	√	√			
$n^{1.5}$	n					
4logn	8logn					
$5n^2$	$0.5n^2$					
n^3-5n	8^{logn}					

- Π.χ. έχει σημειωθεί με √ το 1^o κελί, διότι n^2=o(n^3)

Γ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 2

- Στον πίνακα που ακολουθεί για κάθε ζευγάρι συναρτήσεων f και g σημειώστε με Θ ή ο ή ω ανάλογα με το ποιος από τους 3 ασυμπτωτικούς συμβολισμούς ισχύει μεταξύ της f και της g

	g(n)=5	g(n)=logn	$g(n)=n^2$	$g(n)=2^n$	$g(n)=5^n$	$g(n)=n^n$
f(n)=loglogn	ω					
f(n)=4logn						
f(n)=n						
$f(n)=2n^2$						
$f(n)=6n^5+n$						
$f(n)=3^n$						
f(n)=n!						

- Π.χ. στο 1^o κελί έχει σημειωθεί ω αφού loglogn=ω(1)

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε, κάνοντας χρήση του αντιστοιχου ορισμού ασυμπτωτικού συμβολισμού ότι:

1. $n = O(n \log n)$
2. $4n^2 + n = \Theta(n^2)$
3. $\log^2 n = \Omega(\log n)$
4. $6n + 4 = \Theta(n)$
5. $2^n = o(3^n)$
6. $n^n = \omega(n^2)$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε, κάνοντας χρήση του ορισμού των ορίων ότι:

1. $n = O(n \log n)$
2. $4n^2 + n = \Theta(n^2)$
3. $\log^2 n = \Omega(\log n)$
4. $6n + 4 = \Theta(n)$
5. $2^n = o(3^n)$
6. $n^n = \omega(n^2)$