ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-4

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………

Ημερομηνία: …………………………………………………………………

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ (30% του βαθμού)

(1) 5 διακεκριμένες κληρωτίδες κληρώνουν έναν αριθμό από το 1 εώς το 6. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι:

1. Όσα ο συντελεστής του $x^5/5!$ στην παράσταση $(e^x-1)^6$.
2. Όσα ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση e^{5x}.
3. $5\cdot 5^6$, αν μία τουλάχιστον κληρωτίδα έχει τον αριθμό 3.
4. $6^5 - 5^5$, αν μία τουλάχιστον κληρωτίδα έχει τον αριθμό 3.

(2) Ένας καλαθοσφαιριστής εκτελεί 20 διαδοχικές διακεκριμένες βολές. Κάθε βολή μπορεί να είναι εύστοχη ή άστοχη. Ο προπονητής καταγράφει τα αποτελέσματα των βολών το ένα μετά το άλλο. Ο αριθμός των δυνατών καταγραφών που μπορεί να κάνει ο προπονητής είναι:

1. 20!
2. 20^2
3. Τον αριθμό των υποσυνόλων που μπορούν να προκύψουν από ένα σύνολο 20 διακεκριμένων στοιχείων
4. 2^{20}

(3) Ο αριθμός των τρόπων διανομής *n* μη διακεκριμένων αντικειμένων σε *m* διακεκριμένες υποδοχές είναι:

1. Όσες οι διατάξεις *n+m-1* αντικειμένων από τα οποία τα *m-1* αποτελούν μια ομάδα μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων και τα υπόλοιπα μια άλλη.
2. Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους n με $m-1$ μηδενικά
3. Όσες οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $x_1+x_2+\cdots+x_m=n+m$
4. Όσες οι επιλογές μιας n-άδας με δυνατότητα επανάληψης από m διακεκριμένα αντικείμενα.

(4) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. $\varphi \wedge \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.
2. $\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\varphi$.
3. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία.
4. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ είναι αντίφαση.

(5) *Στις παρακάτω προτάσεις τα T_1 και T_2 είναι σύνολα προτασιακών τύπων.*

1. Αν τα T_1 και T_2 δεν είναι ικανοποιήσιμα, τότε δεν είναι ικανοποιήσιμο και το $T_1 \cup T_2$.
2. Αν T_1 είναι ικανοποιήσιμο και T_2 δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε δεν είναι ικανοποιήσιμο και το $T_1 \cup T_2$.
3. Αν το T_1 δεν είναι συνεπές τότε $T_1 \mid\!- \varphi$
4. Αν το T_1 είναι ικανοποιήσιμο και ο φ είναι ταυτολογία, τότε το $T_1 \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

(6) Θεωρούμε τον τύπο $\varphi(x) = \exists y(x \neq y \wedge P(x,y))$.

1. Ο τύπος $\exists x\varphi(x)$ αληθεύει στο σύνολο των άρτιων φυσικών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι το x είναι τριπλάσιο του y
2. Ο τύπος $\forall x\varphi(x)$ αληθεύει σε συνεκτικά (συνδεόμενα) γραφήματα με δύο τουλάχιστον κορυφές όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή
3. Ο τύπος $\exists x\varphi(x)$ αληθεύει σε γραφήματα με δύο τουλάχιστον κορυφές όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή
4. Ο τύπος $\forall x\varphi(x)$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών Ν όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι το x διαιρείται από το y

(7) Δίδεται απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V,E)$ με χρωματικό αριθμό 2

1. Το G μπορεί να περιέχει το C_3 ως υπογράφημα.
2. Το G μπορεί να μην είναι συνδεόμενο.
3. Αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, τότε το G έχει κύκλο Euler.
4. Το συμπλήρωμα του G είναι συνδεόμενο.

(8) Έστω $G = (V,E)$ απλό, μη κατευθυνόμενο k-κανονικό γράφημα.

1. Το G έχει $\mathrm{kn}/2$ ακμές
2. Το $\bar{G}$ έχει $\mathrm{n}(n-k)/2$ ακμές
3. Αν $\mathrm{k} > n/2$ τότε έχει κύκλο Hamilton
4. Αν $\mathrm{k} > 2$ τότε έχει κύκλο Euler

(9) Τα παρακάτω (απλά μη κατευθυνόμενα) γραφήματα είναι δυνατόν να κατασκευασθούν:

1. Γράφημα 6 κορυφών με 2 κορυφές να έχουν βαθμό 5, 2 κορυφές να έχουν βαθμό 3 και 2 κορυφές να έχουν βαθμό 2.
2. Συνδεόμενο γράφημα 6 κορυφών με 4 ακμές.
3. Γράφημα με χρωματικό αριθμό 3 με 6 κορυφές και 6 ακμές.
4. Διχοτομίσιμο γράφημα 5 κορυφών με τουλάχιστον 7 ακμές.

(10) Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε n – 2 ακμές από το K_n (n ≥ 3), ώστε το γράφημα που προκύπτει να μην έχει κύκλο Hamilton
2. Υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε n (n – 3) / 2 ακμές από το K_n (n ≥ 3), ώστε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Hamilton
3. Ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n ≥ 10 κορυφές και τουλάχιστον $\binom{n-1}{2}+1$ ακμές έχει κύκλο Hamilton
4. Κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n ≥ 10 κορυφές και τουλάχιστον $\binom{n-1}{2}+1$ ακμές έχει κύκλο Euler

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

(Α) Δύο διακεκριμένοι συμμαθητές έχουν αγοράσει ο καθένας από 4 τετράδια μπλε χρώματος, 4 τετράδια πράσινου χρώματος και 2 τετράδια κίτρινου χρώματος. Κάθε μαθητής θα επιλέξει ένα τετράδιο από τα 10 τετράδια που έχει αγοράσει για καθένα από τα 10 διακεκριμένα μαθήματά του. Πόσες είναι οι δυνατές επιλογές χρωμάτων τετραδίων για τα 10 μαθήματα και για τους δύο μαθητές;
(Β) 6 ζευγάρια συναντούνται σε ένα σπίτι και ανταλλάσουν χειραψίες. Σε καμία περίπτωση δεν ανταλλάσουν χειραψίες ο άντρας και η γυναίκα που αποτελούν ένα ζευγάρι και κάθε άτομο δεν ανταλλάσει χειραψία με οποιοδήποτε άλλο περισσότερες από μία φορές. Πόιος είναι ο μέγιστος αριθμός χειραψιών που πραγματοποιούνται;
(Γ) Σε μια τάξη ενός νηπιαγωγείου υπάρχουν τέσσερις σακούλες με καραμέλες, κάθε σακούλα περιέχει 12 όμοιες καραμέλες του ίδιου χρώματος και κάθε σακούλα περιέχει καραμέλες διαφορετικού χρώματος από οποιαδήποτε άλλη (έστω μπλε, κόκκινες, κίτρινες, πράσινες). Η νηπιαγωγός ζητά από κάθε ένα από τα n διακεκριμένα παιδιά της τάξης να επιλέξει μια μόνο καραμέλα.
Να σχηματίσετε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο, ο συντελεστής του οποίου δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλέξουν καραμέλες τα n παιδιά αν ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής περιορισμοί:
Θα πρέπει να επιλεγεί άρτιος αριθμός μπλε καραμελών, περιττός αριθμός κόκκινων καραμελών και να μην επιλεγούν καθόλου ή να επιλεγούν τουλάχιστον τρεις πράσινες καραμέλες.

Άσκηση 2 (Μονάδες 35)

(1) Να δειχθεί ότι $\{\varphi \to (\psi \to \chi), (\varphi \to \psi) \to \varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} (\varphi \to \psi) \to \chi$

α) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

β) Χωρίς να γίνει χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

(2) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγόρημα Q. ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q(x,y) ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y»:

A. Διαδοχικά στην ερμηνεία αυτή:

a. Εξηγείστε σε φυσική γλώσσα τι σημαίνει η πρόταση:

$$\varphi = \forall x \exists y \exists z\big(x \neq y \land x \neq z \land \varphi_1(x,y) \land \varphi_2(x,z)\big)$$

όπου: $\varphi_1(x,y) = \neg Q(x,y) \land \neg Q(y,x)$

όπου: $\varphi_2(x,y) = Q(x,y) \ \land Q(y,x)$

b. Εξηγείστε σε φυσική γλώσσα τι σημαίνει η πρόταση:

$$\psi = \forall x\, \psi_1(x) \land \forall x\, \psi_2(x)$$

όπου: $\psi_1(x) = \exists y[Q(x,y) \land \forall z(Q(x,z) \to z = y)]$

όπου: $\psi_2(x) = \exists y[Q(y,x) \land \forall z(Q(z,x) \to z = y)]$

c. Δώστε ερμηνεία που:

i. Αληθεύουν οι τύποι φ και ψ με 4 κορυφές

ii. Αληθεύει ο τύπος φ και δεν αληθεύει ο τύπος ψ

iii. Δεν αληθεύει ο τύπος φ και αληθεύει ο τύπος ψ

iv. Δεν αληθεύει κανένας από τους δύο τύπους.

B. Γράψτε μια πρόταση στην ερμηνεία αυτή που να εκφράζει την παρακάτω ιδιότητα ενός γραφήματος:
«Αν για κάθε τριάδα κορυφών, όποτε η πρώτη με τη δεύτερη ή η δεύτερη με την τρίτη δεν είναι γειτονικές έπεται ότι ούτε η πρώτη με την τρίτη είναι γειτονικές, τότε το γράφημα είναι πλήρες ή το συμπλήρωμά του είναι πλήρες»

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

Έστω Γ κλάση απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων που ορίζεται ως εξής:
Ένα γράφημα G ανήκει στην κλάση Γ αν και μόνο αν:

- είτε αποτελείται από μία μόνο κορυφή,
- είτε σχηματίζεται αν προσθέσουμε μια νέα κορυφή u σε ένα γράφημα G' που ανήκει στην κλάση Γ και συνδέσουμε τη νέα κορυφή u με περισσότερες από τις μισές κορυφές του G'.

Ερωτήματα:

1. Σχεδιάστε όλα τα γραφήματα που ανήκουν στην κλάση Γ με το πολύ 4 κορυφές.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε γράφημα της κλάσης Γ με τουλάχιστον 3 κορυφές έχει κύκλο Hamilton.

Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

1. Να κατασκευάσετε δύο απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα τέτοια ώστε:
α) Το πρώτο να έχει τουλάχιστον 7 κορυφές και μόνο δύο από τις κορυφές του να έχουν τον ίδιο βαθμό.
β) Το δεύτερο να έχει 10 κορυφές, τουλάχιστον 33 ακμές, και χρωματικό αριθμό ίσο με 3.

2.α) Έστω $G(X, Y, E)$ απλό, μη κατευθυνόμενο, διμερές γράφημα, όπου X και Y τα δύο σύνολα ανεξαρτησίας. Να δείξετε ότι το άθροισμα του βαθμού των κορυφών στο σύνολο X ισούται με το άθροισμα του βαθμού των κορυφών στο σύνολο Y.
β) Να δείξετε ότι αν το G είναι ένα k-κανονικό διμερές γράφημα, τότε *για κάθε* διαμέριση των κορυφών του G σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας X και Y, ισχύει ότι $| X | = | Y |$. *Υπενθύμιση*: Ένα γράφημα είναι k-κανονικό αν όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό ίσο με k.