$$\boldsymbol{P} = \{\textbf{Συνολο προβληματων που λυνονται σε πολυωνυμικο ντετερμινιστικο χρονο}\}$$

$$P = \bigcup_k DTIME(n^k)$$

$$\boldsymbol{NP} = \{\textbf{Συνολο προβληματων που λυνονται σε μη ντετερμινιστικο πολυωνυμικο χρονο}\}$$

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

$$\boldsymbol{EXP} = \{\textbf{Συνολο προβληματων που λυνονται σε εκθετικο ντετερμινιστικο χρονο}\}$$

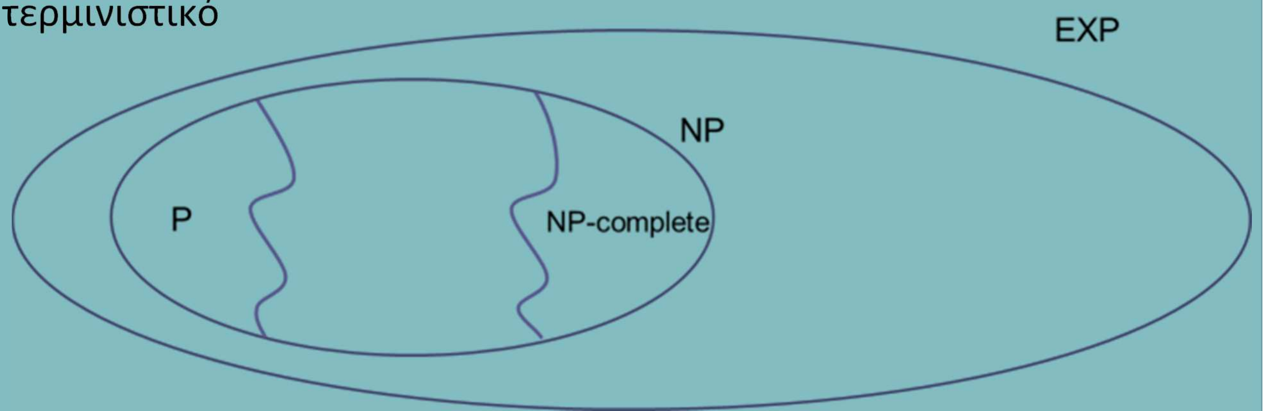
$$EXP = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$$

$DTIME(f(n))$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε ντετερμινιστικό χρόνο $O(f(n))$ τότε:

$NTIME(f(n))$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε μη ντετερμινιστικό χρόνο $O(f(n))$

<u>Θεώρημα:</u> Ισχύει ότι: $\boldsymbol{P \subseteq NP \subseteq EXP}$

- $\boldsymbol{P \subseteq NP}$ είναι προφανές, αφού κάθε ντετερμινιστική Μ.Τ. είναι εξ'ορισμού και μη ντετερμινιστική.
- $\boldsymbol{NP \subseteq EXP}$. Η απόδειξη στηρίζεται στην προσομοίωση μια μη ντετερμινιστικής Μ.Τ. Ν από μία ντετερμινιστική Μ ως εξής:
  - Η Ν είναι πολυωνυμικού χρόνου, άρα κάθε υπολογισμός της έχει πολυωνυμικό μήκος έστω $p=n^k$, όπου n το μέγεθος της εισόδου.
  - Κάθε υπολογισμός της Ν είναι μια ακολουθία από μη ντετερμινιστικές επιλογές. Αν είναι d ο βαθμός του μη ντετερμινισμού, τότε υπάρχουν d^p δυνατοί μη ντετερμινιστικοί υπολογισμοί.
  - Η Μ προσομοιώνει εξαντλητικά κάθε μη ντετερμινιστικό υπολογισμό διαπερνώντας όλο του δένδρο του μη ντετερμινιστικού υπολογισμού.
  - Συνεπώς ο χρόνος λειτουργίας της είναι $p \cdot d^p$, άρα εκθετικός
  - Συνεπώς $\boldsymbol{NP \subseteq EXP}$



Διαισθητικά σε **μια κλάση προβλημάτων C** ορίζουμε:

- **C-πλήρη** (C-Complete) τα προβλήματα της κλάσης που:
  - Είναι τα δυσκολότερα προβλήματα της κλάσης (υπό την έννοια ότι κάθε πρόβλημα της κλάσης είναι το πολύ τόσο δύσκολα όσο αυτά)
  - Είναι ισοδύναμα μεταξύ τους (δηλαδή αντίστοιχης υπολογιστικής δυσκολίας)
- Έτσι για την κλάση NP, ορίζουμε ότι ένα πρόβλημα είναι **NP-πλήρες** (ή NP-Complete):
  - Αν κάθε πρόβλημα στην κλάση NP, είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο αυτό.
    - έχει αποδειχθεί από τον (Cook,1970) ότι: Το **SAT** είναι **NP-πλήρες**
  - Συνεπώς οποιοδήποτε πρόβλημα του NP είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο το SAT!

Τα προβλήματα της κλάσης NP-COMPLETE έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. Λύνονται σε εκθετικό ντετερμινιστικό χρόνο (**ανήκουν στο EXP**)
2. Λύνονται σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο (**ανήκουν στο NP**)
3. Δεν έχει αποδειχθεί ότι δεν λύνονται από ντετερμινιστικό πολυωνυμικό αλγόριθμο.
   - Αν αποδειχθεί ότι ένα από αυτά δεν λύνεται σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο, τότε κανένα δεν λύνεται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο
   - Άρα $\boldsymbol{P \neq NP}$
4. Δεν έχει αποδειχθεί ότι λύνονται από ντετερμινιστικό πολυωνυμικό αλγόριθμο.
   - Αν αποδειχθεί ότι ένα από αυτά λύνεται σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο, τότε όλα λύνονται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο
   - Άρα $\boldsymbol{P = NP}$
5. Όλα τα προβλήματα της κλάσης NP ανάγονται σε αυτά.

Για να αποδειχθεί ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες:

- (Α) Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
- (Β) Δείχνουμε ότι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό

Για να αποδειχθεί ότι ένα πρόβλημα είναι NP-σκληρό (NP-Hard):

- (Α) Δείχνουμε ότι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό

Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Αποδεικνύουμε ότι $\boldsymbol{\Pi \in NP}$
    - Είτε δίνοντας μη ντετερμινιστική μηχανή Turing-μάντη που «μαντεύει» την λύση και έπειτα επαληθεύει ότι είναι όντως λύση του προβλήματος.
    - Είτε δίνοντας ντετερμινιστική μηχανή Turing-επαληθευτή που δεδομένης μιας λύσης (πιστοποιητικό) επαληθεύει σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο ότι είναι λύση του προβλήματος.
2. Δίνουμε μια πολυωνυμική **αναγωγή** από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Π' στο πρόβλημα Π (Η αναγωγή συμβολίζεται με **Π'≤Π**)
    - Όπου δίνουμε έναν κανόνα μετασχηματισμού της εισόδου Ε' του γνωστού προβλήματος Π' σε είσοδο Ε του αγνώστου προβλήματος Π έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο:

Αποτέλεσμα του Π(Ε) **ισοδύναμο** με αποτέλεσμα του Π'(Ε΄)

Και δείχνουμε ότι η κατασκευή θέλει πολυωνυμικό χρόνο