ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-2

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………………………………

Ημερομηνία: …………………………………………………………………

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ (30% του βαθμού)

(1) Έστω Α σύνολο με n στοιχεία

1. Τα υποσύνολα του Α με k στοιχεία είναι όσα τα υποσύνολα με n-k στοιχεία
2. Οι λέξεις μήκους k που σχηματίζονται με αλφάβητο το Α είναι όσες ο συντελεστής του x^k στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!})^n$.
3. Τα υποσύνολα του Α με n στοιχεία είναι όσα ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x)^n$.
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με k στοιχεία, μειώνεται καθώς μειώνεται το k.

(2) Τρεις διακεκριμένες κληρωτίδες κληρώνουν τυχαία και ισοπίθανα έναν αριθμό από το 0 εώς το 9

1. Η πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον ένα μηδενικό είναι $9^3/10^3$
2. Η πιθανότητα να μη έρθει μηδενικό είναι $9^3/10^3$
3. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι ίσο με 1 είναι $3/10^3$
4. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι το πολύ 2 είναι $1/10^2$

(3) Πόσοι διαφορετικοί τετραγωνικοί πίνακες 20 x 20 υπάρχουν στους οποίους κάθε στοιχείο του πίνακα είναι είτε 0 είτε 1;

1. $C(400,k)$ αν k από τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 και τα υπόλοιπα είναι 0.
2. Όσοι ο συντελεστής του $x^{400}/400!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{400}}{400!})^2$.
3. 2^{100}
4. Όσες οι διαφορετικές, μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης: $z_0+z_1=400$

(4) Έστω $\varphi=p_1\to p_2$ και $\psi=p_2\vee\neg p_1$ όπου p_1,p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές.

1. $\varphi\vDash\psi$
2. $\varphi\vee\neg\psi$ είναι αντίφαση.
3. Το σύνολο τύπων $T=\{\neg\varphi\wedge\psi,\varphi\to\psi,\varphi\vee\neg\varphi\}$ είναι αντιφατικό.
4. $\neg\varphi\to((\varphi\vee\psi)\to\neg\varphi)\vDash\ \varphi\vee\neg\psi$

(5) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Υπάρχει ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος του $p\leftrightarrow(p\vee\neg q)$ που χρησιμοποιεί μόνο τους συνδέσμους $\neg,\to$
2. Ισχύει $\vDash(\neg\varphi\to\neg\psi)\to((\neg\varphi\to\psi)\to\varphi)$
3. Ισχύει $\vdash(\varphi\wedge\psi)\to(\varphi\vee\psi)$
4. Ο τύπος $(\varphi\to(\neg\varphi\to\neg\neg\varphi))\to((\varphi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\neg\neg\varphi))$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 με συντακτική αντικατάσταση.

(6) *Στις παρακάτω προτάσεις αναφέρονται οι γεννήτριες συναρτήσεις απλών προβλημάτων απαρίθμησης.*

1. Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $x^r(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των υποσυνόλων με $(k-r)$ στοιχεία ($k \geq r$) ενός n -μελους συνόλου
2. Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1-x)^{-n}$ δίνει τον αριθμό των συνδυασμών k αντικειμένων από n
3. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση e^{nx} δίνει τον αριθμό των διατάξεων k αντικειμένων από n
4. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση e^{nx} δίνει τον αριθμό των τρόπων διανομής k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές, όταν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές.

(7) Το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,\ x_i \in \mathbb{N},\ x_i > 0$ με $m > n$ είναι ίσος με:

1. $\binom{n+m-1}{n}$
2. m^n
3. $\binom{m-1}{m-n}$
4. $\binom{n-1}{n-m}$

(8) *Το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 6 που μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Α και Β ώστε κάθε σύμβολο να εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά είναι ίσο με:*

1. Το συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}\right)^2$
2. Το συντελεστή του $\frac{x^4}{4!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^5}{5!}\right)^2$
3. Τα διαφορετικά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν αν ρίξουμε ταυτόχρονα δύο διακεκριμένα ζάρια.
4. Τους τρόπους τοποθέτησης 6 διακεκριμένων βιβλίων σε 2 διακεκριμένα ράφια ώστε σε κάθε ράφι να τοποθετηθεί τουλάχιστον ένα βιβλίο, χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι και με την υπόθεση ότι κάθε ράφι μπορεί να χωρέσει και τα 6 βιβλία.

(9) Έστω φ, ψ προτασιακοί τύποι. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν;

1. $\varphi \vee \psi \models \varphi \to \psi$
2. $\neg\psi \to \neg\varphi \models \varphi \to \psi$
3. $\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models \neg\varphi$
4. $\varphi \to \neg\varphi \models \psi \to \neg\varphi$

(10) Θεωρούμε το αξιωματικό σύστημα του προτασιακού λογισμού. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο τύπος: $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ1 με συντακτική αντικατάσταση.
2. Ο τύπος: $(\neg\neg\varphi \to \neg(\psi \to \chi)) \to ((\neg\neg\varphi \to (\psi \to \chi)) \to \neg\varphi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.
3. Το $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ προκύπτει άμεσα από το $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ με εφαρμογή του θεωρήματος απαγωγής.
4. Το $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ προκύπτει άμεσα από το $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ με εφαρμογή του θεωρήματος αντιθετοαναστροφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

i) Πέντε φίλοι κάθονται σε ένα στρογγυλό τραπέζι για να παίξουν χαρτιά. Οι καρέκλες του τραπεζιού είναι αριθμημένες. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν;

ii) Οι πέντε φίλοι αρχίζουν ένα παιγνίδι χαρτιών έχοντας καθένας στην αρχή 100 ευρώ. Κάθε ποντάρισμα είναι για ποσό πολλαπλάσιο του 1 ευρώ και κανένας παίκτης δεν δανείζεται από άλλους οπότε δεν μπορεί να χάσει παρά το πολύ το αρχικό του ποσό. Στο τέλος του παιγνιδιού το σύνολο των χρημάτων είναι κατανεμημένο στους 5 παίκτες. Πόσα είναι τα πιθανά αποτελέσματα του παιχνιδιού, όταν δύο αποτελέσματα διαφοροποιούνται αν τα χρήματα έστω και ενός παίκτη είναι διαφορετικά;

iii) Όταν το παιχνίδι του (ii) τελειώνει, γνωρίζουμε ότι 2 συγκεκριμένοι παίκτες κέρδισαν χρήματα, ο τρίτος είναι «στα λεφτά του» και οι άλλοι δύο έχασαν. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον εκθέτη ο συντελεστής του οποίου δίνει τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων.

iv) Με πόσους τρόπους μπορεί να μοιραστούν οι φιγούρες της τράπουλας (12 χαρτιά) στους 5 παίκτες έτσι ώστε ο 1ος παίκτης να πάρει μέχρι 4 χαρτιά, ο 2ος κι ο 3ος παίκτης από 2 έως 6 ο καθένας, ο 4ος παίκτης να πάρει τους δυο μαύρους ρηγάδες κι ο 5ος παίκτης τους δυο κόκκινους ρηγάδες; Απαντήστε υποδεικνύοντας το συντελεστή κατάλληλης γεννήτριας συνάρτησης.

Άσκηση 2 (Μονάδες 25)

(1) Δείξτε ότι $\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \Big(\big((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \neg\chi\Big)$ όταν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού (αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας)

(2) Αποδείξτε ότι $\{\neg\psi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ χωρίς χρήση των θεωρημάτων του προτασιακού λογισμού

(3) Αποδείξτε ότι $\{\neg\varphi \rightarrow \neg\psi,\ \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \psi)\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα γνωστά θεωρήματα του προτασιακού λογισμού

Άσκηση 3 (Μονάδες 25)

(Ερώτημα 1)
Στη βιβλιοθήκη του ΕΑΠ υπάρχουν 10 διαφορετικά βιβλία τα οποία πρόκειται να τα δανειστούν οι 3 φοιτητές Α, Β, Γ.

(1) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο δανεισμός, αν ο Α δανείστηκε 5 βιβλία, ο Β δανείστηκε 3 βιβλία και ο Γ δανείστηκε 2 βιβλία.
(2) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο δανεισμός, αν ο Α δανείστηκε 4 βιβλία, ο Β δανείστηκε 3 βιβλία και ο Γ δανείστηκε 3 βιβλία.
(3) Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο της γεννήτριας ο συντελεστής του οποίου δείχνει τον τρόπο που μπορεί να γίνει ο δανεισμός αυτός αν κάθε φοιτητής πρόκειται να δανειστεί τουλάχιστον ένα βιβλίο και ο Γ άρτιο αριθμό.

(Ερώτημα 2)
1. Στο μανάβικο της γειτονιάς βρίσκονται 8 μήλα, 12 πορτοκάλια και 10 αχλάδια. Όλα τα φρούτα αγοράστηκαν από δύο πελάτες έτσι ώστε κάθε ένας πήρε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος και 15 φρούτα συντολικά. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνατε την δύναμη της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει η αγορά.
2. Υπολογίστε χωρίς τη χρήση γεννήτριας συνάρτησης τον αριθμό των τρόπων που μπορούν να αγοραστούν όλα τα φρούτα αν οι πελάτες είναι τώρα τρεις και κάθε ένας αγόρασε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος χωρίς συνολικό περιορισμό.

Άσκηση 4 (Μονάδες 25)

(Ερώτημα 1) Αποδείξτε ότι το σύνολο τύπων: $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$ είναι πλήρες.

(Ερώτημα 2) Έστω φ, χ, ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους δίνεται ότι $\varphi \models \psi$, $\psi \vdash_{ΠΛ} \neg\chi$ *και* $\neg\chi \models \varphi$. Δείξτε ότι οι τύποι φ και ψ είναι ισοδύναμοι.