



# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μάθημα 4.1:  
Βασικοί Ορισμοί Θεωρίας Γραφημάτων

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### A. Σκοπός του Μαθήματος

#### B. Θεωρία

##### 1. Ορισμοί Γραφημάτων

1. Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα
2. Κατευθυνόμενο Γράφημα
3. Τύποι Ακμών
4. Μονοπάτια
5. Κύκλοι

##### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

1. Απλό Γράφημα
2. Πλήρες Γράφημα
3. Συνδεδεμένο Γράφημα
  1. Συνεκτικές Συνιστώσες
  2. Γέφυρες και Σημεία Κοπής
4. Συμπλήρωμα

##### 3. Μέρη Γραφήματος

1. Υπογράφημα
2. Εξαγόμενο Υπογράφημα

#### Γ. Ασκήσεις

1. Ερωτήσεις
2. Εφαρμογές



## A. Σκοπός του Μαθήματος

### Επίπεδο A

- Οι εισαγωγικοί ορισμοί των γραφημάτων που είναι αντικείμενο του μαθήματος αυτού, αποτελούν την βάση για όλα τα επόμενα μαθήματα της θεωρίας γραφών.

### Επίπεδο B

- (-)

### Επίπεδο Γ

- (-)



## B. Θεωρία

### 1. Ορισμοί Γραφημάτων

#### 1. Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα

**Ορισμός:** Ένα Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα  $G$  είναι μία διατεταγμένη δυάδα  $(V, E)$  όπου:

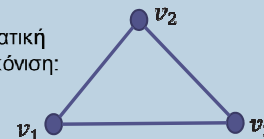
- $V$  είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων):  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- $E$  είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων):  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή  $e_k = [v_i, v_j]$  ή  $e_k = \{v_i, v_j\}$  με  $v_i, v_j \in V$  για κάθε  $k = 1, \dots, m$
  - Η ακμή θεωρείται μη διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή  $[v_i, v_j]$  είναι ίδια με την ακμή  $[v_j, v_i]$ ), δηλαδή δεν υπάρχει κατεύθυνση.

**Παράδειγμα:**  $G = (V, E)$  όπου:

$V = \{v_1, v_2, v_3\}$

$E = \{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_3, v_2]\}$

Σχηματική  
Απεικόνιση:

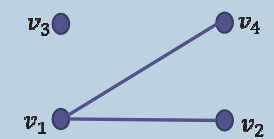


**Παράδειγμα:**  $G = (V, E)$  όπου:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{[v_1, v_2], [v_1, v_4]\}$

Σχηματική  
Απεικόνιση:



## B. Θεωρία

### 1. Ορισμοί Γραφημάτων

### 2. Κατευθυνόμενο Γράφημα

**Ορισμός:** Ένα Κατευθυνόμενο Γράφημα  $G$  είναι μία διατεταγμένη δυάδα  $(V, E)$  όπου:

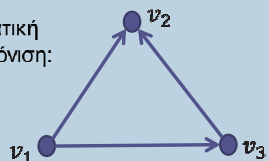
- $V$  είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων):  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- $E$  είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων):  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή  $e_k = (v_i, v_j)$  ή  $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$  με  $v_i, v_j \in V$  για κάθε  $k = 1, \dots, m$
  - Η ακμή θεωρείται διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή  $(v_i, v_j)$  είναι διαφορετική από την ακμή  $(v_j, v_i)$ , δηλαδή υπάρχει κατεύθυνση. Η κορυφή  $v_i$  καλείται αρχή της ακμής και η κορυφή  $v_j$  λέγεται πέρας της ακμής.

**Παράδειγμα:**  $G = (V, E)$  όπου:

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2)\}$$

Σχηματική  
Απεικόνιση:

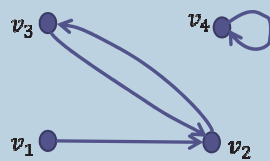


**Παράδειγμα:**  $G = (V, E)$  όπου:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_4)\}$$

Σχηματική  
Απεικόνιση:



## B. Θεωρία

### 1. Ορισμοί Γραφημάτων

### 3. Τύποι Ακμών

Σε ένα γράφημα (κατευθυνόμενο ή μη)

- Συμβολίζουμε συνήθως με  $n=|V|$  το πλήθος (πληθάριθμο) των κορυφών.
- Συμβολίζουμε συνήθως με  $m=|E|$  το πλήθος (πληθάριθμο) των ακμών.
- Ένα γράφημα έχει τουλάχιστον 1 κορυφή (Δεν υπάρχει γράφημα χωρίς κορυφές)
- Οι ακμές που έχουμε χαρακτηρίζονται ως:
  - Ανακυκλώσεις (Είναι ακμές με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή)

Σε Κ.Γ:



Σε Μ.Κ.Γ.



- Παράλληλες Ακμές (Είναι ακμές με κοινά άκρα και κοινή φορά)

Σε Κ.Γ.



Σε Μ.Κ.Γ.



- Αντιπαράλληλες ακμές (Είναι ακμές με κοινά άκρα και αντίθετη φορά)

Σε Κ.Γ.



Σε Μ.Κ.Γ. δεν υπάρχουν  
αντιπαράλληλες ακμές

## B. Θεωρία

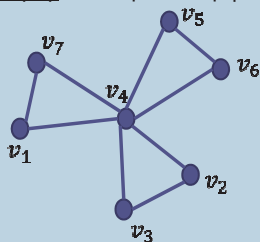
### 1. Ορισμοί Γραφημάτων

### 4. Μονοπάτια

**Ορισμός** (Εμπίπτει και σε Κ.Γ και σε Μ.Κ.Γ.):

- Μονοπάτι  $P$  μήκους  $n$  από μία κορυφή  $v_0$  σε μία κορυφή  $v_n$  είναι
  - μια ακολουθία  $n$  ακμών (ακολουθώντας τις τυχόν κατευθύνσεις τους)
  - (άρα  $n+1$  κορυφών)
 που ξεκινά από την κορυφή  $v_0$  και καταλήγει στην  $v_n$
- Απλό μονοπάτι είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές (λέγεται και μονοκονδυλιά)

**Άσκηση:** Στο παρακάτω μη κατευθυνόμενο γράφημα



1. Ποιο είναι το μέγιστο μήκος μονοπατιού

2. Ποιο είναι το μέγιστο μήκος απλού μονοπατιού

## B. Θεωρία

### 1. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

### 5. Κύκλοι

**Ορισμός** (Εμπίπτει και σε Κ.Γ και σε Μ.Κ.Γ.):

- Κύκλος είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή
  - Επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή.
  - Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή.
- Απλός Κύκλος είναι ένας κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές
  - Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή
  - Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή

**Άσκηση:** Κατασκευάστε:

1. Ένα γράφημα 6 κορυφών που περιέχει έναν απλό κύκλο μήκους 6

2. Ένα γράφημα 5 κορυφών που περιέχει έναν μη απλό κύκλο μήκους 6

## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Οι ακόλουθοι ορισμοί αφορούν μόνο μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Ένα γράφημα θα χαρακτηρίζεται:

- Απλό: Ένα γράφημα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές
- Πλήρες (ή κλίκα): Ένα απλό γράφημα με όλες τις δυνατές ακμές.
- Συνδεόμενο (ή συνδεδεμένο): Αν κάθε δύο κορυφές του γραφήματος συνδέονται με μονοπάτι.

Σε όλα τα επόμενα μαθήματα ασχολούμαστε κυρίως με μη κατευθυνόμενα γραφήματα και θα μελετήσουμε και άλλους ορισμούς (διχοτομισμό, κ-χρωματισμο, επίπεδο, κ.α.)

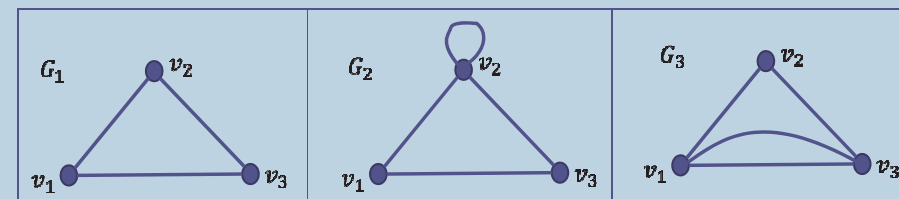
## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 1. Απλό Γράφημα

Ορισμός: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα θα λέγεται απλό αν δεν περιέχει ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές.

Παραδείγματα:



Το  $G_1$  είναι απλό

Το  $G_2$  δεν είναι απλό (περιέχει ανακύκλωση)

Το  $G_3$  δεν είναι απλό (περιέχει παράλληλες ακμές)

## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 2. Πλήρες Γράφημα (ή κλίκα)

Ορισμός: **Πλήρες γράφημα** ή **κλίκα** η κορυφών (συμβολισμός  $K_n$ )

➤ Είναι απλό γράφημα  $G=(V,E)$  με  $n$  κορυφές που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές.

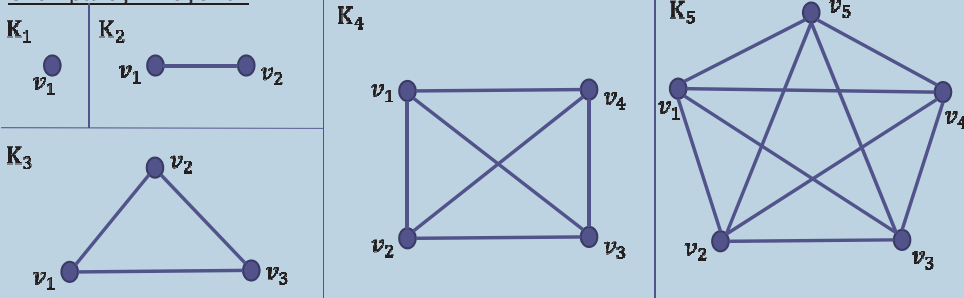
Τυπικά:

- Για κάθε  $v_i, v_j \in V$  με  $i \neq j$  η ακμή  $[v_i, v_j] \in E$

Σημαντικό:

- Η κλίκα  $n$  κορυφών έχει  $n(n-1)/2$  ακμές. (Είναι οι συνδυασμοί των  $n$  κορυφών ανά 2)

Οι 5 πρώτες κλίκες είναι:

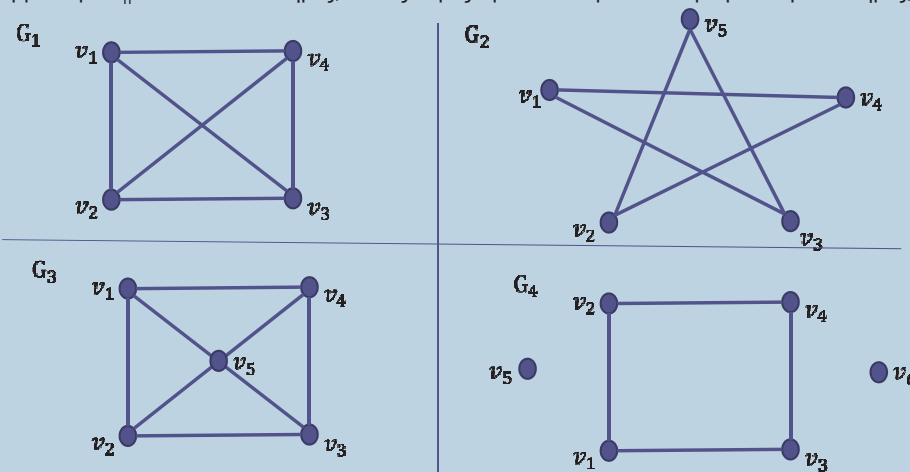


## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 2. Πλήρες Γράφημα (ή κλίκα)

Άσκηση: Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι πλήρη; Αν είναι πλήρες δώστε τον αντίστοιχο συμβολισμό  $K_n$ . Αν δεν είναι πλήρες, πόσες ακμές πρέπει να προσθέσουμε για να γίνει πλήρες;



## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 3. Συνδεόμενο Γράφημα

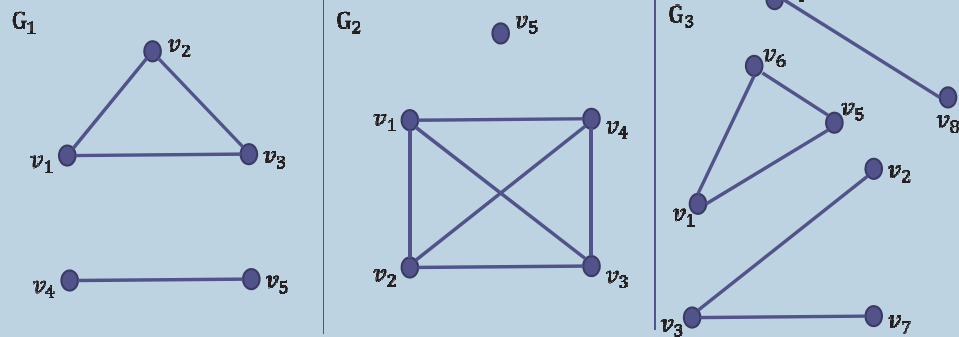
**Ορισμός:** **Συνδεόμενο (ή συνδεδεμένο)** θα καλείται ένα Μ.Κ.Γ. που

➤ Οποιοσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι.

**Τυπικά:**

- Για κάθε  $v_i, v_j \in V$  με  $i \neq j$  υπάρχει μονοπάτι από την  $v_i$  στην  $v_j$

Σχεδόν όλα τα γραφήματα που είδαμε μέχρι τώρα ήταν συνδεόμενα. Παραδείγματα μη συνδεόμενων Γραφημάτων:



## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 3. Συνδεόμενο Γράφημα (Συνεκτικές Συνιστώσες)

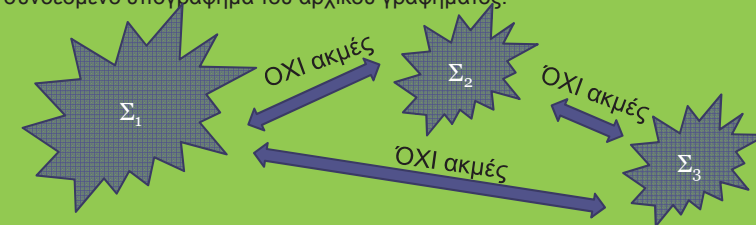
**Ορισμός:** Αν ένα γράφημα είναι μη συνδεόμενο:

➤ Κάθε μεγιστοτικό (ως προς τις κορυφές) συνδεόμενο υπογράφημά του λέγεται **συνεκτική συνιστώσα** ή **ασύνδετο τμήμα**

Πρακτικά, συνεκτική συνιστώσα είναι ένα «κομμάτι» του γραφήματος που μπορούμε να μεταβούμε (μέσω μονοπατιού) από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη.

Γενικά ένα γράφημα θα είναι:

- Είτε συνδεόμενο, οπότε θα αποτελείται από 1 συνεκτική συνιστώσα.
- Είτε μη συνδεόμενο (οπότε θα αποτελείται από τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες)
  - Αν σε μια εκφώνηση συναντήσουμε μη συνδεόμενο γράφημα στο θα πρέπει να οραματιζόμαστε τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες που η κάθε μία είναι ένα συνδεόμενο υπογράφημα του αρχικού γραφήματος:

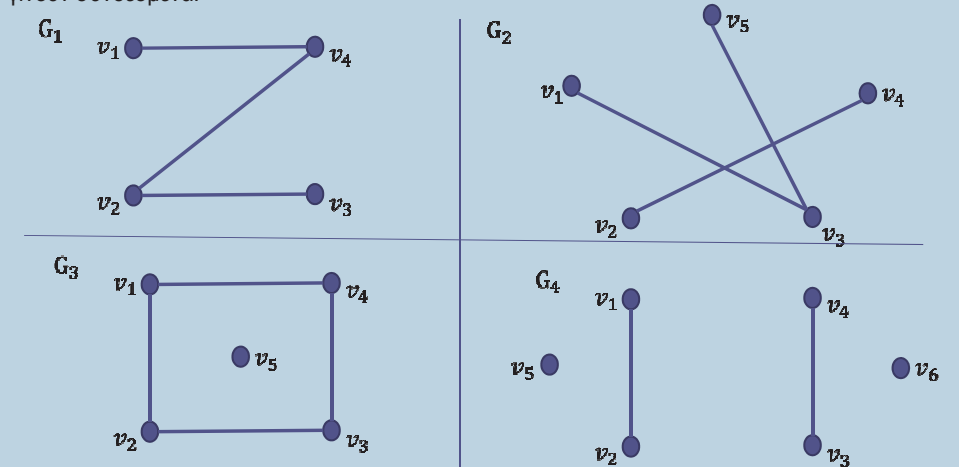


## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 2. Πλήρες Γράφημα (ή κλίκα)

**Άσκηση:** Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι συνδεόμενα; Αν δεν είναι συνδεόμενα, από πόσες συνεκτικές συνιστώσες αποτελούνται και πόσες ακμές πρέπει να προσθέσουμε για να γίνουν συνδεόμενα.



## Β. Θεωρία

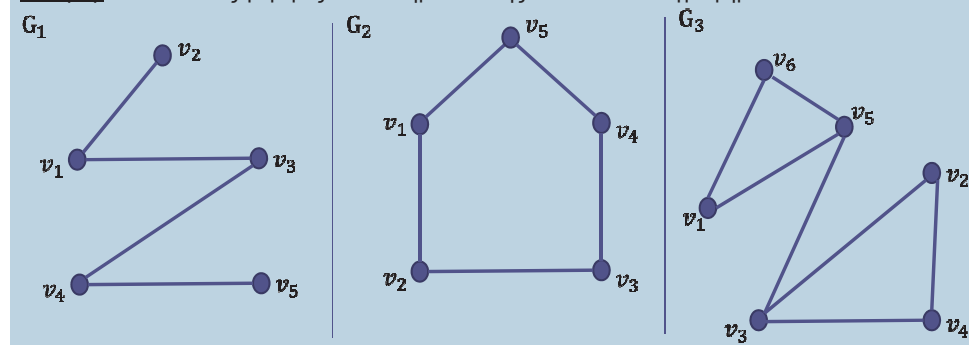
### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 3. Συνδεόμενο Γράφημα (Γέφυρες και Σημεία Κοπής)

**Ορισμός:** Σε ένα συνδεόμενο γράφημα:

- Κάθε κορυφή, που αν αφαιρεθεί (μαζί με τις ακμές της) κάνει το γράφημα μη συνδεόμενο λέγεται **σημείο κοπής** ή **σημείο άρθρωσης**
- Κάθε ακμή, που αν αφαιρεθεί κάνει το γράφημα μη συνδεόμενο λέγεται **γέφυρα** ή **ακμή τομής**

**Άσκηση:** Εντοπίστε τις γέφυρες και τα σημεία κοπής στα ακόλουθα γραφήματα:



## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 4. Συμπλήρωμα Γραφήματος

**Ορισμός:** Έστω ένα απλό γράφημα  $G = (V, E)$ . **Συμπλήρωμα του  $G$** , καλείται το γράφημα  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ , που

- Έχει τις ίδιες κορυφές με το  $G$
- Έχει ως ακμές αυτές που δεν περιέχονται στο  $G$ .

**Τυπικά:**

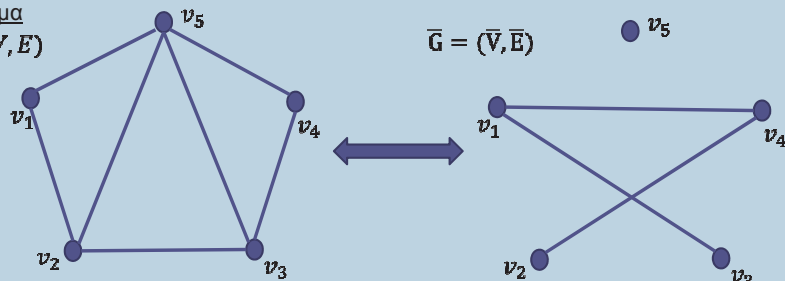
- Ισχύει  $\bar{V} = V$  και  $e \in \bar{E}$  αν και μόνο αν  $e \notin E$

**Σημαντικό:** Ακμές Γραφήματος + Ακμές Συμπληρώματος = Ακμές Κλίκας

- $|E| + |\bar{E}| = n(n-1)/2$

**Παράδειγμα**

$G = (V, E)$

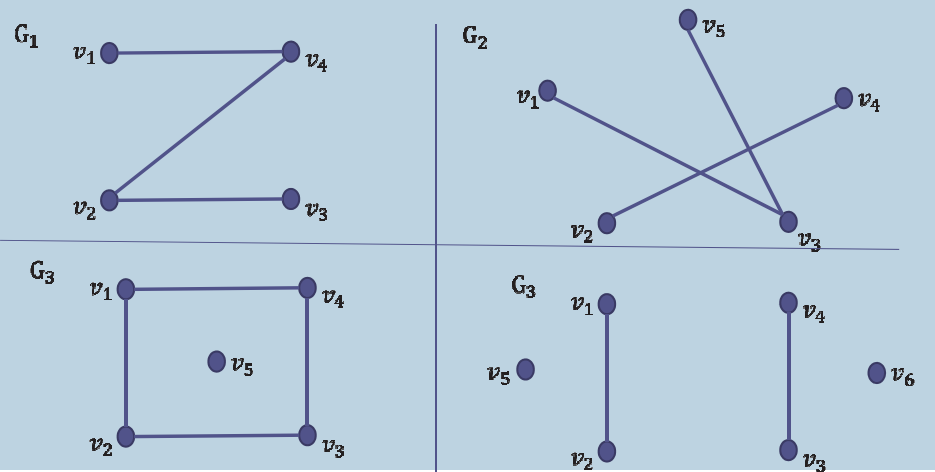


## Β. Θεωρία

### 2. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

#### 4. Συμπλήρωμα Γραφήματος

**Άσκηση:** Σχεδιάστε το συμπλήρωμα σε κάθε ένα από τα ακόλουθα γραφήματα και επαληθεύστε με τον τύπο ότι όντως έχετε βάλει όλες τις ακμές που απαιτούνται.



## Β. Θεωρία

### 3. Μέρη Γραφήματος

Δύο σημαντικοί ορισμοί απαιτούνται για να αναφερθούμε σε ένα κομμάτι ενός γραφήματος

- **Υπογράφημα:** Είναι οποιοδήποτε «κομμάτι» του γραφήματος
  - Επιλέγουμε όποιες κορυφές θέλουμε
  - Επιλέγουμε όποιες ακμές θέλουμε
- **Επαγόμενο Υπογράφημα:** Είναι κομμάτι του γραφήματος που
  - Επιλέγουμε όποιες κορυφές θέλουμε
  - Υποχρεωτικά επιλέγουμε τις ακμές που συνδέουν αυτές τις κορυφές στο αρχικό γράφημα.

## Β. Θεωρία

### 3. Μέρη Γραφήματος

#### 1. Υπογράφημα

**Ορισμός:** Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$ . **Υπογράφημα του  $G$** , καλείται το γράφημα  $G' = (V', E')$ , που

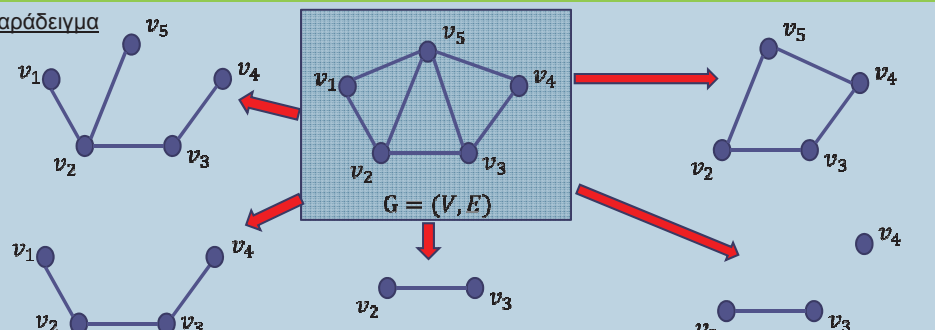
- Περιέχει κάποιες κορυφές του  $G$  (1...όλες)
- Περιέχει κάποιες ακμές του  $G$  που συνδέουν αυτές τις κορυφές

**Τυπικά:**

- Ισχύει  $V' \subseteq V$  και  $E' \subseteq E$  και για κάθε  $[v_i, v_j] \in E'$  ισχύει ότι  $v_i, v_j \in V'$

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Απαγορεύεται στο υπογράφημα να έχουμε ακμή που δεν ανήκει στο αρχικό γράφημα

**Παράδειγμα**



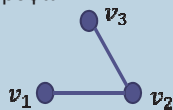


## Β. Θεωρία

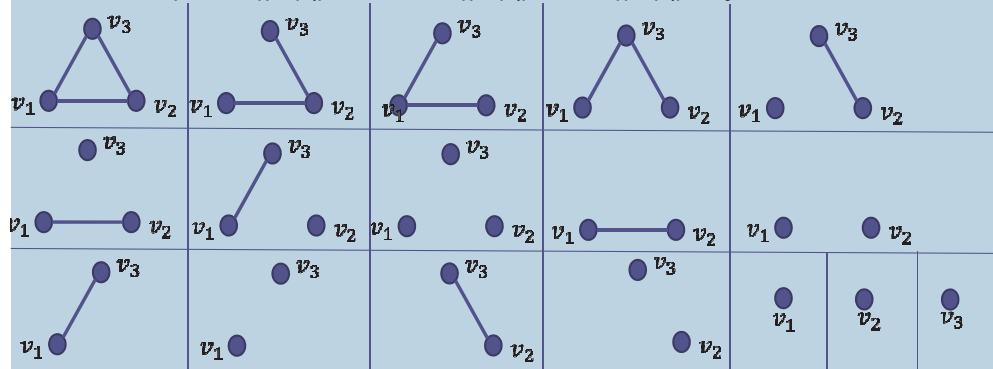
### 3. Μέρη Γραφήματος

#### 1. Υπογράφημα

Άσκηση: Δίνεται το γράφημα 3 κορυφών:



Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι υπογραφήματα του γραφήματος;



## Β. Θεωρία

### 3. Μέρη Γραφήματος

#### 2. Επαγόμενο Υπογράφημα

Ορισμός: Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$ . **Επαγόμενο Υπογράφημα του  $G$** , καλείται το γράφημα  $G' = (V', E')$ , που

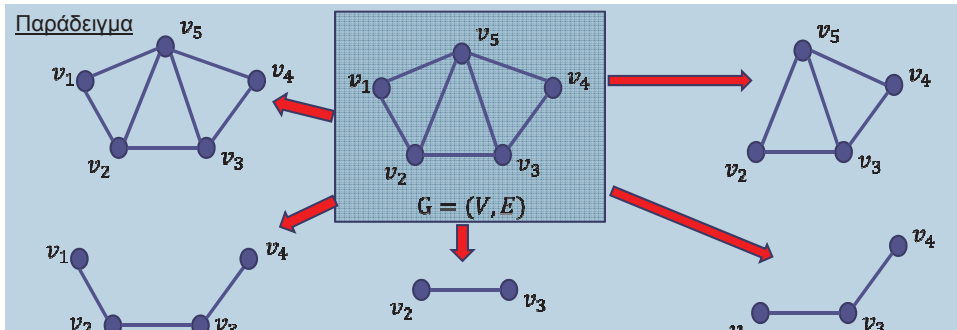
- Περιέχει κάποιες κορυφές του  $G$  (1...όλες)
- Περιέχει ΟΛΕΣ τις ακμές του  $G$  που συνδέουν αυτές τις κορυφές

Τυπικά:

- Ισχύει  $V' \subseteq V$  και  $E' \subseteq E$  και για κάθε  $[v_i, v_j] \in E$  με  $v_i, v_j \in V'$  ισχύει  $[v_i, v_j] \in E'$

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Απαγορεύεται στο επαγόμενο υπογράφημα να μην έχουμε όλες τις ακμές των κορυφών που έχουμε επιλέξει

Παράδειγμα

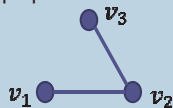


## Β. Θεωρία

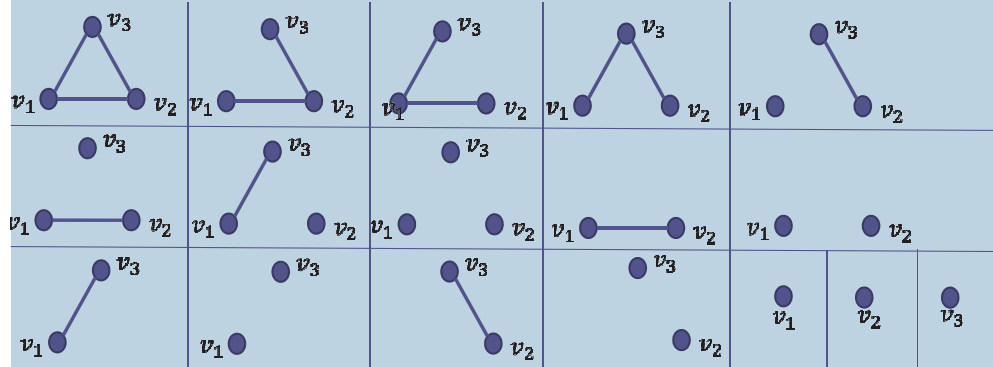
### 3. Μέρη Γραφήματος

#### 1. Υπογράφημα

Άσκηση: Δίνεται το γράφημα 3 κορυφών:



Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι επαγόμενα υπογραφήματα του γραφήματος;



## Γ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 1

Κατασκευάστε όλα τα δυνατά απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα 4 κορυφών με ακριβώς 2 ακμές (υπόδειξη: είναι  $C(6,2)=15$ )  
Και για κάθε ένα από αυτά εξετάστε αν είναι συνδεόμενα.

## Γ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 2

Κατασκευάστε όλα τα δυνατά επαγόμενα υπογραφήματα του γραφήματος που είναι ένας κύκλος 4 κορυφών  
Υπόδειξη: Είναι  $2^4-1$

## Γ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 3

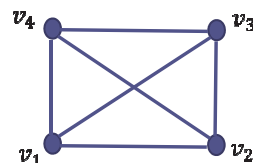
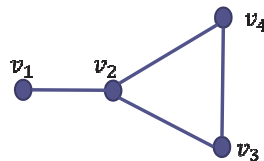
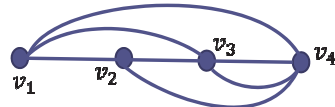
Κατασκευάστε όλα τα δυνατά επαγόμενα υπογραφήματα του  $K_4$  με 3 κορυφές

## Γ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 4

Για τα ακόλουθα 3 γραφήματα:

- Εξετάστε αν είναι
  - Απλό
  - Πλήρες
  - Συνδεόμενο.
- Αν έχουν κύκλο 3 κορυφών
  - Σαν υπογράφημα
  - Σαν επαγόμενο υπογράφημα
- Αν έχουν μονοπάτι 3 κορυφών
  - Σαν υπογράφημα
  - Σαν επαγόμενο υπογράφημα
- Ποιο είναι το πλήθος των ακμών:
  - Του μέγιστου μονοπατιού;
  - Του μέγιστου απλού μονοπατιού;
  - Του μέγιστου κύκλου;
  - Του μέγιστου απλού κύκλου;
- Αν περιέχουν:
  - Γέφυρα
  - Σημείο κοπής

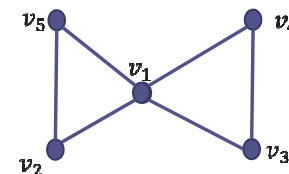
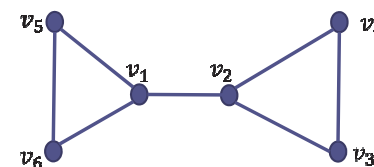
 $G_1$  $G_2$  $G_3$ 

## Γ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 5

Για τα ακόλουθα 3 γραφήματα:

- Εξετάστε αν είναι
  - Απλό
  - Πλήρες
  - Συνδεόμενο.
- Αν έχουν κύκλο 3 κορυφών
  - Σαν υπογράφημα
  - Σαν επαγόμενο υπογράφημα
- Αν έχουν μονοπάτι 3 κορυφών
  - Σαν υπογράφημα
  - Σαν επαγόμενο υπογράφημα
- Ποιο είναι το πλήθος των ακμών:
  - Του μέγιστου μονοπατιού;
  - Του μέγιστου απλού μονοπατιού;
  - Του μέγιστου κύκλου;
  - Του μέγιστου απλού κύκλου;
- Αν περιέχουν:
  - Γέφυρα
  - Σημείο κοπής

 $G_4$  $G_5$  $G_6$ 



## Γ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 1

Έστω απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα 5 κορυφών:

1. Αν το γράφημα είναι κλίκια, τότε έχει 10 ακμές.
2. Αν το γράφημα είναι συνδεόμενο τότε έχει τουλάχιστον 4 ακμές.
3. Αν το γράφημα έχει 5 ακμές, τότε το συμπλήρωμά του έχει 4 ακμές.
4. Αν το γράφημα είναι πλήρες, τότε κάθε επαγόμενο υπογράφημά του είναι επίσης πλήρες.



## Γ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 2

Εξετάστε αν οι ακόλουθες προτάσεις που αφορούν απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι αληθείς ή όχι.

1. Κάθε απλό γράφημα είναι συνδεόμενο.
2. Κάθε πλήρες γράφημα είναι συνδεόμενο.
3. Κάθε πλήρες γράφημα είναι απλό
4. Κάθε συνδεόμενο γράφημα είναι πλήρες.



## Γ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 3

Εξετάστε αν οι ακόλουθες προτάσεις που αφορούν απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι αληθείς ή όχι.

1. Υπάρχει πλήρες γράφημα που περιέχει γέφυρα.
2. Υπάρχει συνδεόμενο γράφημα που περιέχει σημείο κοπής.
3. Υπάρχει μη συνδεόμενο γράφημα που είναι πλήρες.
4. Υπάρχει γράφημα 6 κορυφών που δεν είναι συνδεόμενο και έχει 6 ακμές.