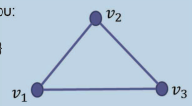
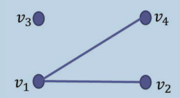
ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ – ΜΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΓΡΑΦΗΜΑ

Ορισμός: Ένα **Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα G** είναι μία διατεταγμένη δυάδα **(V,E)** όπου:
- V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων): $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$
- E είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων): $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή $e_k=[v_i,v_j]$ ή $e_k=\{v_i,v_j\}$ με $v_i,v_j\in V$ για κάθε $k=1,\dots,m$
  - Η ακμή θεωρείται μη διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή $[v_i,v_j]$ είναι ίδια με την ακμή $[v_j,v_i]$), δεν υπάρχει κατεύθυνση).

Παράδειγμα: $G=(V,E)$ όπου:
$V=\{v_1,v_2,v_3\}$
$E=\{[v_1,v_2],[v_1,v_3],[v_3,v_2]\}$

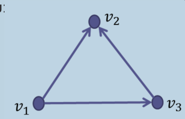


Παράδειγμα: $G=(V,E)$ όπου:
$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$
$E=\{[v_1,v_2],[v_1,v_4]\}$

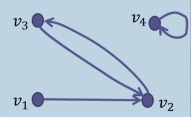


Ορισμός: Ένα **Κατευθυνόμενο Γράφημα G** είναι μία διατεταγμένη δυάδα (V,E) όπου:
- V είναι το σύνολο των κορυφών (ή κόμβων): $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$
- E είναι το σύνολο των ακμών (ή πλευρών ή τόξων): $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή $e_k=(v_i,v_j)$ ή $e_k=<v_i,v_j>$ με $v_i,v_j\in V$ για κάθε $k=1,\dots,m$
  - Η ακμή θεωρείται διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή (v_i,v_j) είναι διαφορετική από την ακμή (v_j,v_i), υπάρχει κατεύθυνση). Η κορυφή v_i καλείται αρχή τη ακμής και η κορυφή v_j λέγεται πέρας της ακμής.

Παράδειγμα: $G=(V,E)$ όπου:
$V=\{v_1,v_2,v_3\}$
$E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_2)\}$



Παράδειγμα: $G=(V,E)$ όπου:
$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$
$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_2),(v_4,v_4)\}$



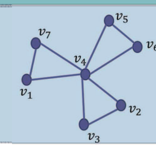
ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ - ΚΥΚΛΟΙ

Ορισμός:
Μονοπάτι P μήκους n από μία κορυφή v_0 σε μία κορυφή v_n είναι
- μια ακολουθία n ακμών (ακολουθώντας τις τυχόν κατευθύνσεις τους)
- (άρα n+1 κορυφών)

που ξεκινά από την κορυφή v_0 και καταλήγει στην v_n
Απλό μονοπάτι είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές (λέγεται και μονοκονδυλιά)

Παράδειγμα:
Μονοπάτι (που δεν είναι απλό):
$v_1-v_4-v_5-v_6-v_4-v_3$

Μονοπάτι (που είναι απλό):
$v_1-v_7-v_4-v_5-v_6$

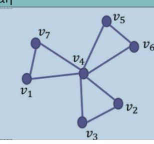


Ορισμός:
Κύκλος είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή
- Επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή.
- Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή.

Απλός Κύκλος είναι ένας κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές
- Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή
- Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή

Παράδειγμα:
Κύκλος (που δεν είναι απλός):
$v_1-v_7-v_4-v_5-v_6-v_4-v_1$

Κύκλος (που είναι απλός):
$v_1-v_7-v_4-v_1$



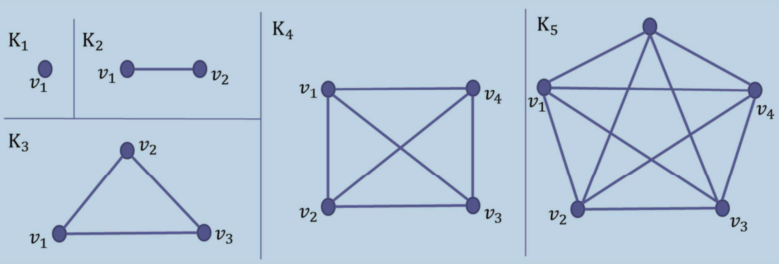
ΠΛΗΡΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑ (ή ΚΛΙΚΑ)

Ορισμός: **Πλήρες γράφημα** ή **κλίκα** n κορυφών (συμβολισμός **K_n**)
- Είναι απλό γράφημα G=(V,E) με n κορυφές που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές.

Τυπικά:
- Για κάθε $v_i,v_j\in V$ με $i\neq j$ η ακμή $[v_i,v_j]\in E$

Σημαντικό:
- Η κλίκα n κορυφών έχει $n(n-1)/2$ ακμές. (Είναι οι συνδυασμοί των n κορυφών ανά 2)

Οι 5 πρώτες κλίκες είναι οι εξής:



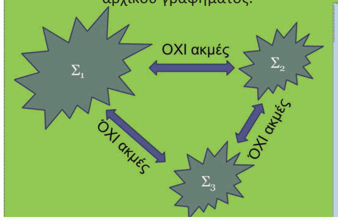
ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΟ ΓΡΑΦΗΜΑ

Ορισμός: **Συνδεόμενο** (ή συνδεδεμένο ή συνεκτικό) θα καλείται ένα Μ.Κ.Γ. που
- Οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι.

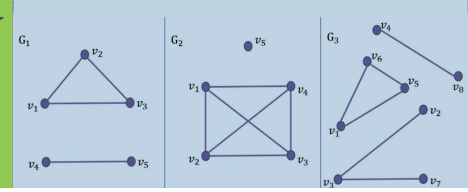
Τυπικά:
- Για κάθε $v_i,v_j\in V$ με $i\neq j$ υπάρχει μονοπάτι από την v_i στην v_j

Ορισμός: Αν ένα γράφημα είναι μη συνδεόμενο:
- Κάθε μεγιστοτικό (ως προς τις κορυφές) συνδεόμενο υπογράφημά του λέγεται **συνεκτική συνιστώσα** ή **ασύνδετο τμήμα**

Πρακτικά, συνεκτική συνιστώσα είναι ένα «κομμάτι» του γραφήματος που μπορούμε να μεταβούμε (μέσω μονοπατιού) από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη.
Γενικά ένα γράφημα θα είναι:
- Είτε συνδεόμενο, οπότε θα αποτελείται από 1 συνεκτική συνιστώσα.
- Είτε μη συνδεόμενο (οπότε θα αποτελείται από τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες)
  - Αν σε μια εκφώνηση συναντήσουμε μη συνδεόμενο γράφημα στο θα πρέπει να οραματιζόμαστε τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες που η κάθε μία είναι ένα συνδεόμενο υπογράφημα του αρχικού γραφήματος:



Παραδείγματα μη συνδεόμενων γραφημάτων:



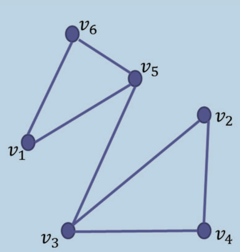
ΣΗΜΕΙΟ ΚΟΠΗΣ και ΓΕΦΥΡΑ

Έστω συνδεόμενο γράφημα:
Ορισμός: Κάθε κορυφή, που αν αφαιρεθεί (μαζί με τις ακμές της) κάνει το γράφημα μη συνδεόμενο λέγεται σημείο κοπής ή σημείο άρθρωσης
Ορισμός: Κάθε ακμή, που αν αφαιρεθεί κάνει το γράφημα μη συνδεόμενο λέγεται γέφυρα ή ακμή τομής

Παράδειγμα:

Σημεία Κοπής:
v_3,v_5

Γέφυρα:
$[v_3-v_5]$



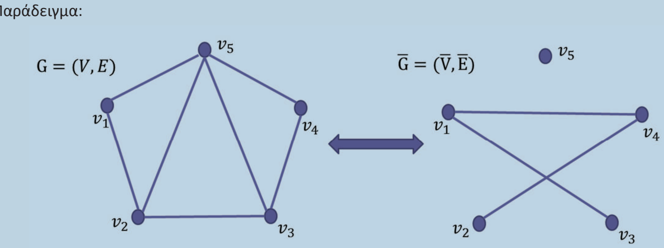
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Ορισμός: Έστω ένα απλό γράφημα $G=(V,E)$. Συμπλήρωμα του G, καλείται το γράφημα $\overline{G}=(\overline{V},\overline{E})$. που
- Έχει τις ίδιες κορυφές με το G
- Έχει ως ακμές αυτές που δεν περιέχονται στο G.

Τυπικά:
- Ισχύει $\overline{V}=V$ και $e\in\overline{E}$ αν και μόνο αν $e\notin E$

Σημαντικό:
- $|E|+|\overline{E}|=n(n-1)/2$

Παράδειγμα:



ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ – ΕΠΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ

Ορισμός: Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. **<u>Υπογράφημα</u>** του G, καλείται το γράφημα $G' = (V', E')$. που
- Περιέχει κάποιες κορυφές του G (1…όλες)
- Περιέχει κάποιες ακμές του G που συνδέουν αυτές τις κορυφές

Τυπικά:
- Ισχύει $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$ και για κάθε $[v_i, v_j] \in E'$ ισχύει ότι $v_i, v_j \in V'$

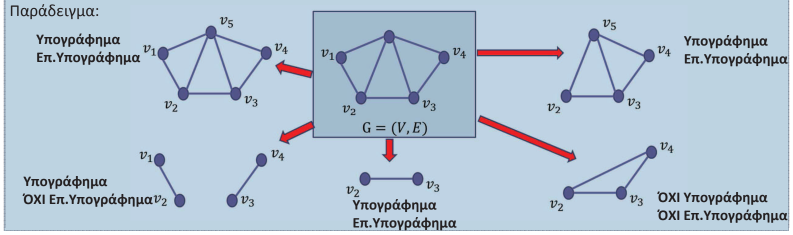
ΠΡΟΣΟΧΗ: Απαγορεύεται στο υπογράφημα να έχουμε ακμή που δεν ανήκει στο αρχικό γράφημα

Ορισμός: Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. **<u>Επαγόμενο Υπογράφημα</u>** του G, καλείται το γράφημα $G' = (V', E')$:
- Περιέχει κάποιες κορυφές του G (1…όλες)
- Περιέχει ΟΛΕΣ τις ακμές του G που συνδέουν αυτές τις κορυφές

Τυπικά:
- Ισχύει $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$ και για κάθε $[v_i, v_j] \in E$ με $v_i, v_j \in V'$ ισχύει $[v_i, v_j] \in E'$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Απαγορεύεται στο επαγόμενο υπογράφημα να μην έχουμε όλες τις ακμές των κορυφών που έχουμε επιλέξει

Παράδειγμα:



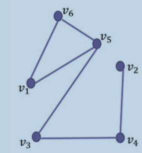
ΒΑΘΜΟΙ ΚΟΡΥΦΩΝ

Ορισμός για μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα:
Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν
- Συμβολίζεται με $d(v_i)$

Ειδικά για μη απλά γραφήματα η ανακύκλωση μετράει κατά 2 στο βαθμό κορυφής.

<u>Παράδειγμα</u>:

$d(v_1) = 2$
$d(v_2) = 1$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 2$
$d(v_5) = 3$
$d(v_6) = 2$

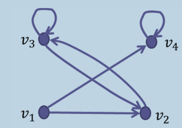


<u>Ορισμός:</u>
Έσω Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφή v_i
- Συμβολίζεται με $d^-(v_i)$

Έξω Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφή v_i
- Συμβολίζεται με $d^+(v_i)$

<u>Παράδειγμα</u>:

$d^-(v_1) = 0$	$d^+(v_1) = 2$
$d^-(v_2) = 2$	$d^+(v_2) = 1$
$d^-(v_3) = 2$	$d^+(v_3) = 2$
$d^-(v_4) = 2$	$d^+(v_4) = 1$



ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΗΣ ΧΕΙΡΑΨΙΑΣ

Θεώρημα Βαθμών Κορυφών (λέγεται και **Λήμμα της Χειραψίας**)

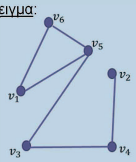
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{d(v_i) = 2m}$$

<u>Πόρισμα 1:</u>
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι άρτιος αριθμός

<u>Πόρισμα 2:</u>
Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα: Το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος αριθμός.

<u>Παράδειγμα</u>:



$d(v_1) = 2$
$d(v_2) = 1$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 2$
$d(v_5) = 3$
$d(v_6) = 2$

Άθροισμα Βαθμών Κορυφών: 12 (άρτιος)
Πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό: 2 (άρτιος)

Το θεώρημα χρησιμοποιείται (μεταξύ άλλων) για τον έλεγχο της ύπαρξης ενός γραφήματος όταν γνωρίζουμε πληροφορίες για τον βαθμό των κορυφών:
- Ελέγχουμε αν το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος.
  - Αν δεν είναι άρτιος, τότε δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα,
  - Αν είναι άρτιος, τότε πρέπει να ελέγξουμε κατασκευαστικά αν υπάρχει τέτοιο γράφημα

ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΓΡΑΦΗΜΑ

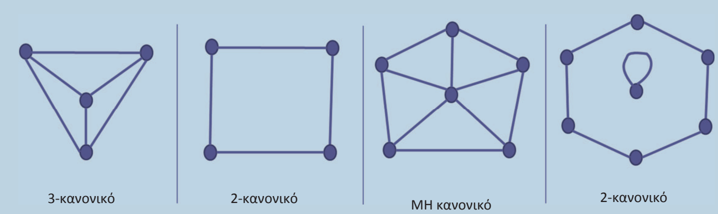
<u>Ορισμός:</u>
Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα θα λέγεται:
- k-κανονικό, ανν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό k.

Ενώ αν μας αναφέρεται ότι το γράφημα είναι κανονικό, αυτό σημαίνει ότι όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό.

Πόρισμα
- **Το Kn είναι (n-1)-κανονικό γράφημα.**

Σημαντικό:
- Ένα k-κανονικό γράφημα n κορυφών έχει $nk/2$ ακμές.

Παραδείγματα:



ΔΙΧΟΤΟΜΙΣΙΜΟ (ΔΙΜΕΡΕΣ) ΓΡΑΦΗΜΑ

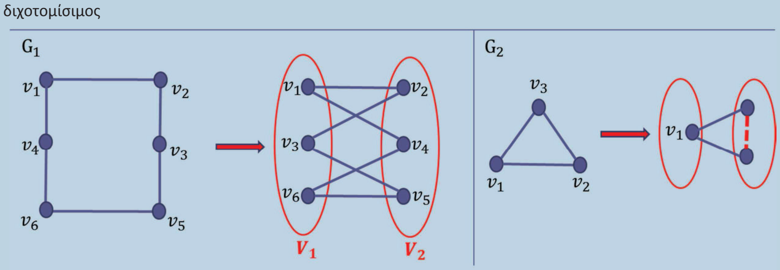
<u>Ορισμός 1:</u> Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **<u>διχοτομίσιμο (ή διμερές)</u>** όταν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν (χωριστούν) σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1 και V_2 (δηλαδή $V_1 \cup V_2 = V$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα της άκρο σε κορυφή του V_1 και το άλλο της άκρο της V_2.

<u>Ορισμός 2:</u> Ένα γράφημα καλείται διχοτομίσιμο αν και μόνο αν οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.

<u>Ορισμός 3:</u> Ένα γράφημα είναι διχοτομίσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους

<u>Παρατηρήσεις:</u>
- Τα σύνολα V_1, V_2 καλούνται μερίδια κορυφών
- Το διμερές γράφημα συμβολίζεται και $G = (V_1, V_2, E)$

<u>Παράδειγμα:</u> Ο G_1 είναι διχοτομίσιμος με την διαμέριση: $V_1 = \{v_1, v_3, v_6\}$ και $V_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$. Ο G_2 δεν είναι διχοτομίσιμος

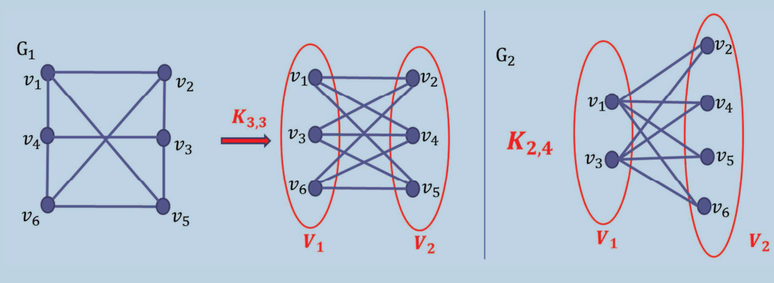


ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΧΟΤΟΜΙΣΙΜΟ (ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΜΕΡΕΣ) ΓΡΑΦΗΜΑ

<u>Ορισμός:</u> Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **<u>πλήρες διχοτομίσιμο</u>** (ή πλήρες διμερές) αν είναι διχοτομίσιμο και περιέχει όλες τις δυνατές ακμές που μπορούν να συνδέουν τις κορυφές του V_1 με τις κορυφές του V_2

<u>Παρατηρήσεις:</u>
- Συμβολίζεται με $\mathbf{K}_{m,n}$ όπου $m = |V_1|$, $n = |V_2|$ και
- Ισχύει ότι:
  - Έχει $|V| = \boldsymbol{m + n}$ **κορυφές**
  - Έχει $|E| = \boldsymbol{m \cdot n}$ **ακμές**

<u>Παράδειγμα:</u> Ο G_1 είναι το $K_{3,3}$. Ο G_2 είναι το $K_{2,4}$



Ορισμός: Σύνολο Ανεξαρτησίας ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που δεν συνδέονται με ακμή

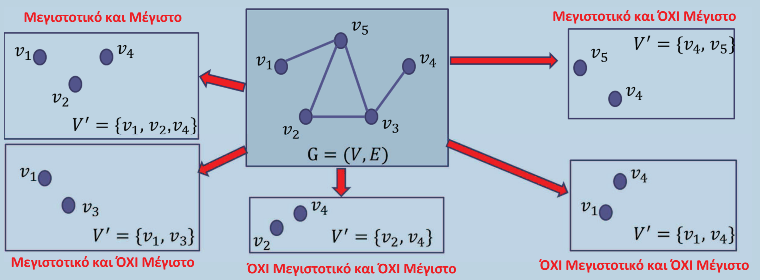
Τυπικά:

- Το σύνολο $V' \subseteq V$ είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας του γραφήματος $G=(V,E)$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος $v_i, v_j \in V'$ με $v_i \neq v_j$ ισχύει ότι $[v_i, v_j] \notin E'$

Ορισμός: Ένα σύνολο ανεξαρτησίας που δεν μπορεί να επαυξηθεί περαιτέρω (προσθέτοντας του ακόμη μία κορυφή) λέγεται **μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας**.

Ορισμός: Το μεγαλύτερο (σε πληθάριθμο) μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας καλείται **μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας**.

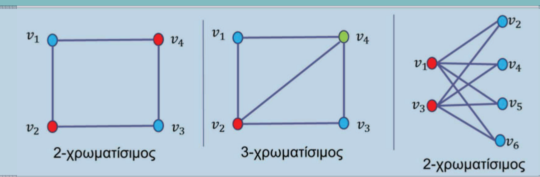
Παράδειγμα:



Ορισμός: Ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι **k-χρωματίσιμο** αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν με k χρώματα ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

- Ή ισοδύναμα αν μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές σε k σύνολα ανεξαρτησίας (με κάθε σύνολο να χρωματίζεται με ένα χρώμα)
- Ένα k-χρωματίσιμο γράφημα θα λέγεται και k-μερές (σε αναλογία το 2-χρωματίσιμο γράφημα έχει 2 σύνολα ανεξαρτησίας, καλείται διμερές)

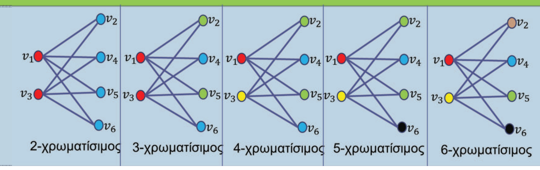
Παράδειγμα:



Σημαντικό:

- Ένας έγκυρος χρωματισμός δεν απαιτεί τον χρωματισμό των κορυφών με το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων.
- Έτσι αν ένα γράφημα είναι π.χ. 2-χρωματίσιμο, τότε θα είναι και 3-χρωματίσιμο, … και n-χρωματίσιμο

Παράδειγμα:

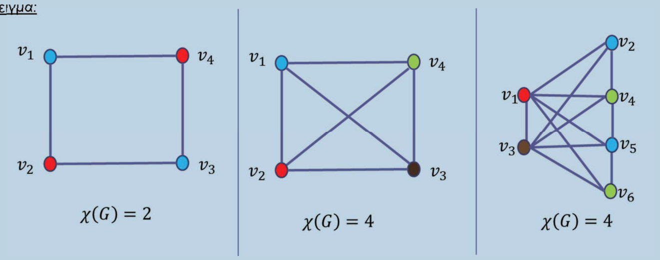


Ορισμός: Χρωματικός Αριθμός ενός γραφήματος $G=(V,E)$ καλείται το ελάχιστο k, για το οποίο ο γράφος είναι k-χρωματίσιμος.

- Συμβολίζεται με $\chi(G)$

Το πρόβλημα της εύρεσης του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (δεν υπάρχει αποδοτικός τρόπος για να βρίσκουμε γρήγορα τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος – το πρόβλημα είναι NP-Complete).

Παράδειγμα:



Ορισμός: Ένας **κύκλος Euler** σε έναν γράφο $G=(V,E)$ είναι ένας κύκλος που:

- Περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος
- Περνάει από κάθε ακμή ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά

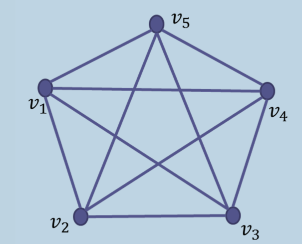
Αν ένας γράφος έχει κύκλο Euler τότε καλείται Ευληριανός Γράφος ή Γράφος Euler.

Θεώρημα Euler για την ύπαρξη του κύκλου Euler:

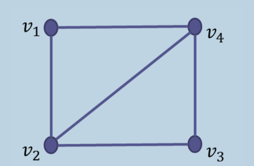
Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν:

- Είναι συνδεόμενο και
- Όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό

Παράδειγμα:



Ο κύκλος Euler είναι:
$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_4 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1$
(και βεβαίως όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό)



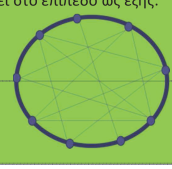
Δεν έχει κύκλο Euler (Η κορυφή v2 έχει περιττό βαθμό)

Ορισμός: Ένας **κύκλος Hamilton** σε έναν γράφο $G=(V,E)$ είναι ένας κύκλος που:

- Περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος
- Περνάει από κάθε κορυφή ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά

Αν ένας γράφος έχει κύκλο Hamilton τότε καλείται Αμιλτονιακός Γράφος ή Γράφος Hamilton.

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Αν ξέρω ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε θα πρέπει να σκέφτομαι ότι το γράφημα μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο ως εξής:



Δηλαδή είναι καθαρός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος

- Ο κύκλος αποτελείται από n ακμές.
- Το γράφημα μπορεί να έχει και οσεσδήποτε επιπλέον ακμές
- Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2

Για να δείξω ότι ένα γράφημα **έχει κύκλο Hamilton** έχω 3 τρόπους:

1. **Καταγράφοντας τον στο γράφημα** (δηλαδή καταγράφω την ακολουθία κορυφών που συνδέονται με διαδοχικές ακμές και δημιουργούν τον κύκλο Hamilton
2. Δείχνοντας ότι ισχύει το **θεώρημα Dirac**:
    1. «*Αν κάθε κορυφή έχει βαθμ ό ≥ n/2 τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton*» (όπου n>3 είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος)
3. Δείχνοντας ότι ισχύει το **θεώρημα Ore**:
    1. «*Αν κάθε ζεύγος κορυφών έχει άθροισμα βαθμών ≥ n τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton*» (όπου n>3 είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος)

Για να δείξω ότι ένα γράφημα **ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton** έχω 4 πολύ απλά και προφανή κριτήρια.

1. Το γράφημα **δεν είναι συνδεόμενο**
2. Το γράφημα περιέχει **σημείο κοπής**
3. Το γραφημα περιέχει **γέφυρα**
4. Έστω **μία κορυφή έχει βαθμό 1**
5. Δείχνοντας κατασκευαστικά ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton
    1. Σε έναν κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2
    2. Αφαιρούμε διαδοχικά ακμές από κάθε κορυφή με βαθμό > 2 μέχρι να αποκτήσει βαθμό 2 με όλους τους δυνατούς τρόπους
    3. Θα πρέπει σε κάθε περίπτωση αφαίρεσης ακμών να οδηγούμαστε ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton.