

ΠΛΗ20

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-1

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ (30% του βαθμού)

(1) Ένα παιχνίδι παίζεται με 6 παίκτες, καθένας από τους οποίους επιλέγει έναν αριθμό από το 1 έως το 10. Οι διαφορετικοί τρόποι επιλογής των αριθμών είναι:

1. Όσοι ο συντελεστής του $x^{10}/10!$ στην παράσταση $(e^x - 1)^{10}$
2. Όσοι ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση e^{10x}
3. $4 \cdot 10^5$ αν τουλάχιστον ένας παίκτης έχει τον αριθμό 10.
4. $10^6 - 10^5$ αν τουλάχιστον ένας παίκτης έχει τον αριθμό 10.

(2) Έχουμε m διακεκριμένες υποδοχές στις οποίες θέλουμε να διανείμουμε n μη διακεκριμένα σφαιρίδια, έτσι ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον 1 σφαιρίδιο. Οι τρόποι είναι ίσοι με:

1. Το συντελεστή του $x^n/n!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!})^m$.
2. Το συντελεστή του $x^n/n!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^m$.
3. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ όπου $x_i \in \mathbb{N}, x_i \geq 1$
4. $C(n - 1, n - m)$

(3) Πόσες είναι οι διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους n , που αποτελούνται από άρτιο πλήθος A , περιττό πλήθος B και τουλάχιστον 1Γ;

1. Όσες και ο συντελεστής του $x^n/n!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $e^x \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. Όσες και ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας $(1 + x + x^2 + \dots)(x + x^3 + x^5 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)$
3. 3, αν $n=3$
4. Το πλήθος των τρόπων να διανείμουμε n αριθμημένες μπάλες σε 3 διακεκριμένες υποδοχές, ώστε η 1^η υποδοχή να έχει άρτιο αριθμό μπαλών, η 2^η περιττό αριθμό μπαλών και η 3^η τουλάχιστον μία μπάλα.

(4) Έστω A σύνολο με n στοιχεία

1. Τα υποσύνολα του A με k στοιχεία είναι όσα τα υποσύνολα με $n-k$ στοιχεία.
2. Τα υποσύνολα του A είναι 2^n .
3. Οι λέξεις μήκους k που σχηματίζονται με αλφάβητο το A είναι όσες ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}\right)^n$
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με k στοιχεία αυξάνει καθώς το k αυξάνει.

(5) Έχουμε 20 διαφορετικά περιοδικά και 5 διαφορετικά ράφια. Οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των περιοδικών στα ράφια είναι:

1. $20! \binom{20+5-1}{20}$, αν έχει σημασία η σειρά τους στα ράφια.
2. ίσοι με τον συντελεστή του $x^{20}/20!$ στην $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^5$, αν έχει σημασία η σειρά τους στα ράφια.
3. $\frac{20!}{4!^5}$, αν το κάθε ράφι θα πάρει 4 περιοδικά και δεν έχει σημασία η σειρά.
4. ίσοι με τον συντελεστή του $x^{20}/20!$ στην $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^5$, αν δεν έχει σημασία η σειρά τους.

- (6) Μια τετραόροφη πολυκατοικία έχει 3 διακεκριμένα παράθυρα σε κάθε όροφο. Το φως σε ένα παράθυρο μπορεί να είναι αναμμένο ή όχι.
1. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να φωτίζονται τα παράθυρα είναι 2^{12}
 2. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να φωτίζονται 5 παράθυρα είναι όσα ο συντελεστής του x^5 στην παράσταση $(1+x)^{12}$.
 3. Όλα τα παράθυρα είναι σκοτεινά και 5 από αυτά φωτίζονται ένα-ένα διαδοχικά. Οι τρόποι που μπορεί να συμβεί αυτό είναι $C(12,5)$.
 4. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να φωτίζονται k παράθυρα αν σε κάθε όροφο έχει σημασία μόνο ο αριθμός των φωτισμένων παραθύρων, είναι όσοι ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1+x+x^2+x^3)^4$.
- (7) Το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$, $x_i \in \mathbb{N}$ είναι ίσος με:
1. $\binom{n+m-1}{n}$
 2. m^n
 3. Το συντελεστή του όρου x^{m-1} στην παράσταση $(1+x)^{n+m-1}$
 4. Το συντελεστή του όρου x^{m-1} στην παράσταση $(1+x+x^2+\dots)^{n+2}$
- (8) Θεωρούμε 4 κληρώσεις ενός ακεραίου από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός προκύπτει με πιθανότητα $1/10$ σε κάθε κλήρωση και τα αποτελέσματα των δύο κληρώσεων είναι ανεξάρτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;
1. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρτιος αριθμός σε τουλάχιστον μία κλήρωση είναι $5^4/10^4$
 2. Η πιθανότητα όλα τα αποτελέσματα να είναι πολλαπλάσια του 3 είναι $3^4/10^4$
 3. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι 5, είναι $4/10^4$
 4. Η πιθανότητα να μην έρθει περσιτός αριθμός είναι $1/16$
- (9) Στην τελετή αποφοίτησης ενός Δημοτικού Σχολείου, οι 100 (διακεκριμένοι) μαθητές περιμένουν σε 3 διαφορετικές σειρές για να πάρουν το απολυτήριο (η θέση κάθε μαθητή στη σειρά έχει σημασία). Οι διαφορετικοί τρόποι να συμβεί αυτό είναι:
1. 3^{100}
 2. $\frac{102!}{2!}$
 3. Όσοι ο συντελεστής του $x^{100}/100!$ στην παράσταση $(x^5 + x^6 + x^7 + \dots)^3$, αν πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 παιδιά σε κάθε σειρά.
 4. Όσοι ο συντελεστής του x^{100} στην παράσταση $(x^5 + x^6 + x^7 + \dots)^3$, αν πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 παιδιά σε κάθε σειρά.
- (10) Οι διαφορετικές δυαδικές συμβολοσειρές μήκους $k+n-1$ με k άσσους και $n-1$ μηδενικά είναι:
1. Όσα τα διαφορετικά υποσύνολα με k στοιχεία ενός συνόλου με $k+n-1$ στοιχεία.
 2. Όσες οι διαφορετικές μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $z_1 + \dots + z_n = k$.
 3. Όσες οι διαφορετικές μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $z_1 \dots + z_k = n$.
 4. Όσες ο συντελεστής του x^{n-1} στην παράσταση $(1+x+x^2+x^3+\dots)^{k+1}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)**Άσκηση 1 (Μονάδες 25)**

100 πελάτες ενός ταξιδιωτικού γραφείου (που θεωρούνται μη διακεκριμένοι) πρόκειται να επιλέξουν προορισμό για τις θερινές τους διακοπές, από τρεις διαθέσιμους προορισμούς, έστω Α, Β και Γ. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τη δύναμη του x της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων να γίνει αυτό, όταν:

- a. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των πελατών που θα επιλέξουν κάθε προορισμό.
- b. Στον προορισμό Α μπορούν να πάνε το πολύ 25 πελάτες, το πλήθος των πελατών που θα πάνε στον προορισμό Β πρέπει να είναι διπλάσιο από το πλήθος των επιβατών που θα πάνε στον προορισμό Α και το πλήθος των επιβατών που θα πάνε στον προορισμό Γ είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των επιβατών που θα πάνε στον προορισμό Β.

Άσκηση 2 (Μονάδες 25)

Μια σχολική τάξη αποτελείται από 30 διακεκριμένους μαθητές, 15 αγόρια και 15 κορίτσια. Εξετάζουμε τους διαφορετικούς τρόπους να χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες, ώστε κάθε μαθητής να ανήκει σε μία ομάδα, και να τους αναθέσουμε εργασίες για το μάθημα της Πληροφορικής.

Να υπολογισθεί το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων αν:

- a. Κάθε ομάδα αποτελείται από 2 άτομα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.
- b. Κάθε ομάδα αποτελείται από 5 άτομα, ανεξαρτήτως φύλου, και υπάρχουν 6 θέματα εργασιών από τα οποία κάθε ομάδα επιλέγει ένα θέμα διαφορετικό από αυτό των άλλων ομάδων.
- c. Κάθε ομάδα αποτελείται είτε από 5 αγόρια είτε από 5 κορίτσια, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.

Άσκηση 3 (Μονάδες 25)

(Ερώτημα 1)

Το κόστος της αγοράς ενός πράσινου βόλου είναι 15€, ενός κόκκινου βόλου είναι 10€ και ενός άσπρου βόλου είναι 5€. Διαθέτουμε 200€ και θέλουμε να αγοράσουμε συνολικά 20 βόλους. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση και δώστε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους τρόπους αγοράς των βόλων.

(Ερώτημα 2)

Πόσες 3μελείς επιτροπές μπορούν να κατασκευαστούν από ένα σύνολο n διακεκριμένων ατόμων αν:

- (α) Τα μέλη είναι ισότιμα
- (β) Η επιτροπή διαθέτει πρόεδρο, γραμματέα και ταμία.
- (γ) Η επιτροπή διαθέτει πρόεδρο και δύο ισότιμα μέλη

Άσκηση 4 (Μονάδες 25)

(Ερώτημα 1) Ένα φορτηγό περιέχει 100 συσκευασίες των 10kg και 100 συσκευασίες των 20kg ενός συγκεκριμένου προϊόντος. Το φορτηγό πρόκειται να εξυπηρετήσει τις ανάγκες δύο διακεκριμένων supermarket που είναι ακριβώς 1000kg και 2000kg αντίστοιχα. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα εξυπηρετηθούν τα δύο supermarket, αν από το πρώτο υπάρχει η απαίτηση να παραλάβει τουλάχιστον 20 συσκευασίες των 10kg και 10 συσκευασίες των 20kg, ενώ από το δεύτερο δεν τίθεται κανένας περιορισμός (Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή).

(Ερώτημα 2) Ένα διαγώνισμα αποτελείται από 3 διακεκριμένα ερωτήματα . Αν για τη μέγιστη δυνατή βαθμολογία κάθε ερωτήματος επιλέξουμε ανάμεσα σε 8,12,16 ή 20 μονάδες, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των μονάδων ώστε το άριστο γραπτό να βαθμολογηθεί με 40 μονάδες; Επιλύστε το πρόβλημα με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων, σχηματίστε δηλαδή τη γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε το συντελεστή του όρου που δίνει την απάντηση στο ερώτημα.