

ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μάθημα 1.7:
Πιθανότητες

Δημήτρης Ψούνης



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Πιθανότητες

Γ. Θεωρία

1. Ζάρια

2. Κληρώσεις

Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης

2. Ερωτήσεις

3. Εφαρμογές

A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο A

- Οι πιθανότητες και η μοντελοποίηση τους μέσω της επίλυσης 2 συνδυαστικών προβλημάτων.
- Τα ζάρια και η διαχείρισή τους για τον υπολογισμό μιας πιθανότητας.

Επίπεδο B

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

B. Θεωρία Πιθανότητες

Ορισμός:

- Αν υπάρχουν n ισοπίθانا ενδεχόμενα (συνήθως διαφορετικοί τρόποι) να συμβεί ένα γεγονός, τότε η πιθανότητα να προκύψει ένα από αυτά είναι $1/n$

Συνεπώς για να μετρήσουμε την πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός:

1. Μετράμε όλα τα ισοπίθانا ενδεχόμενα, έστω ότι είναι n
 2. Μετράμε τα ενδεχόμενα να συμβεί το γεγονός, έστω ότι είναι m
- Τότε η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός είναι **$p=m/n$**

Ενώ στην συνήθη εκφώνηση «ποια η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός όταν ισχύει ένας περιορισμός»

1. Μετράμε τα ενδεχόμενα χωρίς τον περιορισμό, έστω ότι είναι n
 2. Μετράμε τα ενδεχόμενα με τον περιορισμό, έστω ότι είναι m
- Τότε η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός είναι **$p=m/n$**

Γ. Μεθοδολογία

1. Ζάρια

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Προσοχή στα ΖΑΡΙΑ:

- Γνωρίζουμε ότι τα διαφορετικά αποτελέσματα είναι 21 (ως Συνδυασμοί Με Επανάληψη). Ωστόσο αυτά δεν είναι ισοπίθανα ενδεχόμενα (Η ζαρία ασόδυο μπορεί να έρθει με 2 τρόπους: 1-2 και 2-1, ενώ η ζαριά εξάρεις με ένα τρόπο: 6-6)
- Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα προκύπτουν από έναν απλό κανόνα γινομένου ως $6 \cdot 6 = 36$ (δηλαδή 6 επιλογές για το 1^ο ζάρι και 6 επιλογές για το 2^ο ζάρι)

Άρα γενικά όταν υπολογίζω πιθανότητα για ΖΑΡΙΑ πρέπει να δουλέψω με απλό κανόνα γινομένου, δηλαδή σαν τα ζάρια να είναι διακεκριμένα

Παράδειγμα: Ποια η πιθανότητα να φέρω διπλές?

ΛΥΣΗ: Η πιθανότητα είναι $6/36 = 1/6$

Παράδειγμα: Ποια η πιθανότητα να φέρω ασόδυο?

ΛΥΣΗ: Η πιθανότητα είναι $2/36 = 1/18$

Παράδειγμα: Ποια η πιθανότητα να φέρω τουλάχιστον έναν άσσο?

ΛΥΣΗ: Η πιθανότητα είναι $\frac{6 \cdot 6 - 5 \cdot 5}{36} = \frac{11}{36}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Κληρώσεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Συνήθης άσκηση είναι να γίνεται κλήρωση αριθμού με επανατοποθέτηση

- Είναι σημαντικό ΠΑΝΤΑ να δουλεύουμε με απλό κανόνα γινομένου (με μία παύλα-θέση για κάθε κλήρωση):
 - Στον παρονομαστή όλοι οι τρόποι
 - Στον αριθμητή βάζω τους τρόπους που ικανοποιούν τον περιορισμό

Στο τελικό αποτέλεσμα ίσως να χρειαστεί κάποια απλή πράξη απλοποίησης των κλασμάτων.

Παράδειγμα: Γίνονται 2 κληρώσεις ενός αριθμού από το 1 έως το 10

A) Ποια η πιθανότητα να έρθει 5 στην 1^η κλήρωση και άρτιος στην 2^η κλήρωση

$$\frac{1 \cdot 5}{10 \cdot 10} = \frac{5}{100}$$

B) Ποια η πιθανότητα να μην έρθει 3 σε καμία κλήρωση:

$$\frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 10} = \frac{81}{100}$$

Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε τα αποτελέσματα της ταυτόχρονης ρίψης δύο ιδίων ζαριών (ένα ζάρι μπορεί να φέρει 1, 2, 3, 4, 5, ή 6, όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων είναι 36.
- Η πιθανότητα τουλάχιστον ένα ζάρι να φέρει 1 είναι ίση με $11/36$.
- Η πιθανότητα τα δύο ζάρια να φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα είναι ίση με $1/6$.
- Η πιθανότητα κάποιο ζάρι να φέρει 5 και το άλλο ζάρι να φέρει 6 είναι ίση με $1/36$.

Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 2

Τέσσερις αριθμοί από το 0 μέχρι το 9 κληρώνονται τυχαία (και ισοπίθανα) από τέσσερις διακεκριμένες κληρωτίδες. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων της κλήρωσης είναι ίσος με 4^{10} .
- Υπάρχουν $10^4 - 9^4$ διαφορετικά αποτελέσματα όπου κληρώνεται τουλάχιστον ένα 0.
- Υπάρχουν 9^4 διαφορετικά αποτελέσματα όπου δεν κληρώνεται κανένα 0.
- Η πιθανότητα το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών να είναι ίσο με 1 είναι ίση με $4/10^4$.



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 3

Θεωρούμε δύο κληρώσεις ενός ακέрайου αριθμού από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός προκύπτει με πιθανότητα $1/10$ σε κάθε κλήρωση και τα αποτελέσματα των δύο κληρώσεων είναι ανεξάρτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- 1. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός και στις δύο κληρώσεις είναι $1/4$.**
- 2. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρπος αριθμός σε τουλάχιστον μία από τις δύο κληρώσεις είναι $3/4$.**
- 3. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 10 και στις δύο κληρώσεις είναι $1/100$.**
4. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 10 σε τουλάχιστον μία από τις δύο κληρώσεις είναι $19/100$.