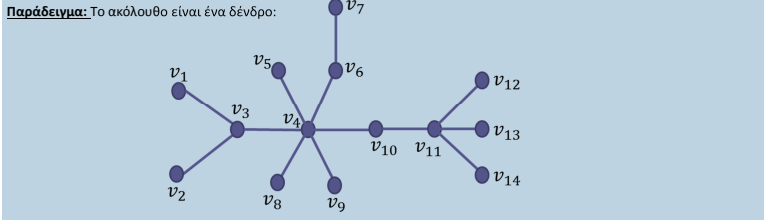


Ορισμός: (Θεώρημα των Δένδρων)
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το γράφημα είναι **δένδρο** (δηλαδή υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή $v_i \in V$ σε κάθε κορυφή $v_j \in V$ ($i \neq j$)).
2. Το γράφημα είναι **συνδεδεμένο και άκυκλο**.
3. Το γράφημα είναι **συνδεδεμένο και έχει $|V| - 1$ ακμές**.
4. Το γράφημα είναι **άκυκλο και έχει $|V| - 1$ ακμές**.
5. Το γράφημα είναι **ελαχιστοτικά συνδεδεμένο** (είναι συνδεδεμένο και αν του αφαιρέσουμε έστω μία ακμή παύει να είναι συνδεδεμένο).
6. Το γράφημα είναι **μεγιστοτικά άκυκλο** (είναι άκυκλο και αν του προσθέσουμε έστω μία ακμή παύει να είναι άκυκλο).

Τελικά το δένδρο είναι ένα άκυκλο συνδεδεμένο γράφημα με $n-1$ ακμές που υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ κάθε δύο διαφορετικών κορυφών



Ορισμός: (Δάσος)
Ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι δάσος αν είναι η ένωση δένδρων
Ή ισοδύναμα είναι ένα μη συνδεδεμένο γράφημα που κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι δένδρο

- Λήμματα που ισχύουν στα δένδρα:**
1. Κάθε **δένδρο** είναι **απλό** γράφημα.
 2. Κάθε **δένδρο** είναι **διχοτομίσμο** γράφημα.
 3. Κάθε **δένδρο** είναι **επίπεδο** γράφημα.
 4. Κάθε **δένδρο** με $|V| \geq 2$ έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.
 5. Κάθε **δένδρο** με $|V| > 2$ έχει τουλάχιστον μία εσωτερική κορυφή.
 6. Αν μια κορυφή έχει βαθμό k , τότε το δένδρο έχει τουλάχιστον k φύλλα.
 7. Κάθε **εσωτερική κορυφή** είναι **σημείο κοπής** και **κάθε ακμή** είναι **γέφυρα**.
 8. Αν αφαιρέσουμε ένα φύλλο από ένα δένδρο, τότε το γράφημα παραμένει δένδρο.
 9. Κάθε **μεγιστοτικό μονοπάτι** ξεκινάει και καταλήγει σε φύλλο.

Σκιαγράφηση Αλγόριθμου Πρώτα κατά Βάθος:
«Βολίδα που εξερευνά το γράφο κατασκευάζοντας το συνδεδετικό δένδρο»
Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεδεμένο γράφημα και παράγει ένα συνδεδετικό δένδρο.
Στην αρχικοποίηση:

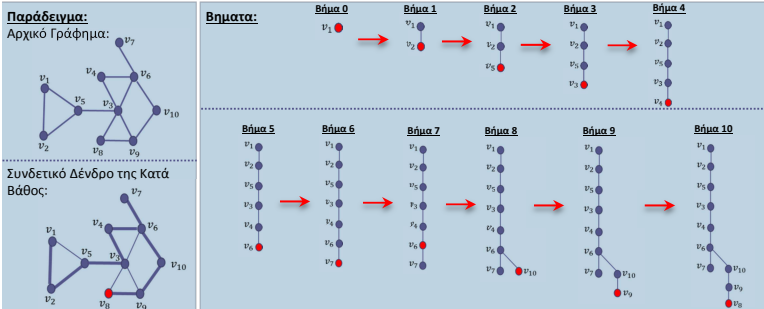
- Τοποθετούμε την βολίδα σε μια (αυθαίρετη) κορυφή. Την κορυφή την τοποθετούμε στο συνδεδετικό δένδρο

Σε κάθε βήμα:

- Αν υπάρχει γειτονική κορυφή που δεν έχει επισκεφθεί, μεταβαίνει και την τοποθετεί στο συνδεδετικό δένδρο μαζί με την ακμή μετάβασης.
- Αν δεν υπάρχει κορυφή που δεν έχει επισκεφθεί, πηγαίνει στην ακριβώς προηγούμενη κορυφή που είχε επισκεφθεί.

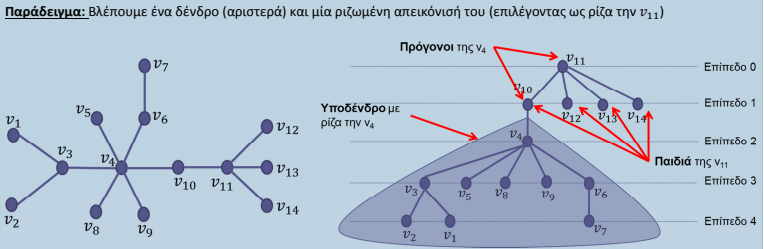
Τερματισμός:

- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.



Ορισμός: (ΡΙζωμένη Απεικόνιση Δένδρου)
Κάθε δένδρο μπορεί να αναπαρασταθεί διατεταγμένα, αν επιλέξουμε μια κορυφή ως τη ρίζα του δένδρου. Με βάση αυτήν την απεικόνιση ορίζουμε:

- Το **επίπεδο** (ή **βάθος**) **κορυφής** που είναι η απόσταση (σε πλήθος ακμών) της κορυφής από τη ρίζα (στο παράδειγμα το επίπεδο της κορυφής v_2 είναι 3)
- Το **ύψος** του δένδρου που είναι το μέγιστο επίπεδο κορυφής (στο παράδειγμα = 4)
- Το **βαθμό του δένδρου** που είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής (στο παράδειγμα = 6 λόγω της v_4)
- Κάθε κορυφή με βαθμό 1 λέγεται **φύλλο** (ή **τερματική κορυφή** ή **μεταγιον**)
- Κάθε κορυφή με βαθμό >1 λέγεται **εσωτερική κορυφή** (ή **κορυφή διακλάδωσης**)
- Ισχύει σε κάθε δένδρο ο τύπος: $n = \phi + \epsilon$
 - Όπου n : πλήθος κορυφών, ϕ : πλήθος φύλλων, ϵ : πλήθος εσωτερικών κορυφών



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ PRIM

ΔΕΝΔΡΑ www.psounis.gr

Ορισμός: Σε ένα συνδεδεμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, W)$ ορίζουμε ως **ελάχιστο συνδεδετικό δένδρο T** (ή αλλιώς **ελάχιστο γεννητορικό** ή **επικαλυπτικό δένδρο**) του γραφήματος:

- Ένα υπογράφημα του G που είναι δένδρο, περιέχει όλες τις κορυφές του G και έχει ελάχιστο βάρος (άθροισμα βαρών των ακμών του)

Σκιαγράφηση Αλγορίθμου Prim:

Στην αρχικοποίηση:

- Τοποθετούμε αυθαίρετα μια κορυφή στο συνδεδετικό δένδρο

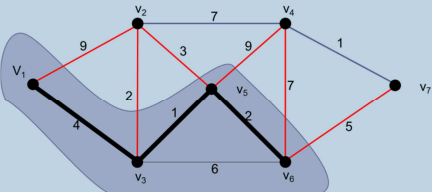
Σε κάθε βήμα:

- Υποψήφιας ακμής για να μπουν στο συνδεδετικό δένδρο είναι εκείνες οι ακμές που έχουν το ένα τους άκρο στο υπο κατασκευη συνδεδετικό δένδρο και το άλλο τους άκρο εκτός του συνδεδετικού δένδρου.
- Επιλέγεται η ακμή με το ελάχιστο βάρος από τις υποψήφιας
- Η ακμή εισάγεται στο δένδρο καθώς και το άκρο της που δεν ανήκε στο δένδρο.

Τερματισμός:

- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

Παράδειγμα: Σχηματική απεικόνιση μετά την εκτέλεση 3 βημάτων σε ένα γράφημα:



Επόμενη ακμή που επιλέγεται είναι η $[v_2, v_3]$

ΣΥΝΟΨΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

ΔΕΝΔΡΑ www.psounis.gr

	Dijkstra	Prim	Κατά Βάθος	Κατά Πλάτος
Συντομότερα Μονοπάτια	✓	×	×	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓
Ελάχιστο Συνδεδετικό Δένδρο	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓	✓	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓
Συνδεδετικό Δένδρο	✓	✓	✓	✓

Αρν.Βάρη:×

Αρν.Βάρη: ✓

(+C)>0: Δεν διατηρείται

(×C)>0: Διατηρείται

(+C)>0: Διατηρείται

(×C)>0: Διατηρείται

ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ και m-ΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

ΔΕΝΔΡΑ www.psounis.gr

Ορισμοί:

- Το **m-αδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει το πολύ m παιδιά
- Το **δυναμικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει το πολύ 2 παιδιά
- Το **πλήρες δυναμικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει 0 ή 2 παιδιά
- Το **πλήρες ισοζυγισμένο δυναμικό δένδρο** είναι πλήρες δυναμικό δένδρο και όλα τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο του δένδρου.

Παράδειγμα: Το ακόλουθο είναι ένα δένδρο:



3-αδικό δένδρο



2-αδικό δένδρο



Πλήρες Δ.Δ.



Πλήρες Ισοζυγισμένο Δ.Δ.

Λήμματα:

- Ένα **πλήρες ισοζυγισμένο δυναμικό δένδρο** με ύψους H έχει συνολικά $2^{H+1} - 1$ κορυφές όπου:
 - οι 2^H είναι φύλλα και
 - οι $2^H - 1$ είναι εσωτερικές κορυφές
- Σε ένα πλήρες δυναμικό ισοζυγισμένο δένδρο ύψους H ισχύει $H = \log_2 t$ (όπου t τα φύλλα του δένδρου)
- Σε ένα πλήρες δυναμικό δένδρο ύψους H ισχύει $H \geq \log_2 t$ (όπου t τα φύλλα του δένδρου)

ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

ΔΕΝΔΡΑ www.psounis.gr

Ορισμός: Ένα **Δυναμικό Δένδρο Αναζήτησης** είναι ένα δυναμικό δένδρο που σε κάθε κορυφή του έχει αποθηκευτεί μια πληροφορία με την ιδιότητα:

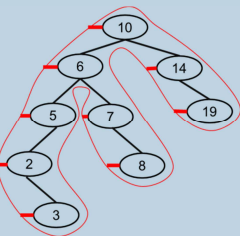
- Στις κορυφές του αριστερού του υποδένδρου έχουν αποθηκευτεί τιμές «μικρότερες» της ρίζας.
- Στις κορυφές του δεξιού του υποδένδρου έχουν αποθηκευτεί τιμές «μεγαλύτερες» της ρίζας.
- Η ίδια ιδιότητα ισχύει σε οποιοδήποτε υποδένδρο του δυναμικού δένδρου αναζήτησης

ΔΙΑΣΧΙΣΙΣ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ:

Την **προδιατεταγμένη διάσχιση**, που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:

- Τρέχουσα Κορυφή, Αριστερό Υποδένδρο, Δεξί Υποδένδρο (Γραμμή Αριστερά)

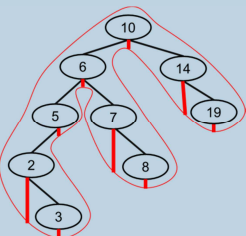
(σειρά επίσκεψης): 10, 6, 5, 2, 3, 7, 8, 14, 19



Την **ενδοδιατεταγμένη διάσχιση**, που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:

- Αριστερό Υποδένδρο, Τρέχουσα Κορυφή, Δεξί Υποδένδρο (Γραμμή Κάτω)

(σειρά επίσκεψης): 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 19



Την **μεταδιατεταγμένη διάσχιση**, που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:

- Αριστερό Υποδένδρο, Δεξί Υποδένδρο, Τρέχουσα Κορυφή (Γραμμή Δεξιά)

(σειρά επίσκεψης): 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 19

