Η **μέθοδος της επανάληψης** χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha T(n-b) + c}, & \boldsymbol{n > n_0} \\ \boldsymbol{d}, & \boldsymbol{n = n_0} \end{cases}$$

- Όταν το ζητάει ρητά η εκφώνηση
- Προσοχη: $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$

1. Κάνουμε 3 εφαρμογές της αναδρομικής σχέσης (μέχρι να φτάσουμε στη μορφή: $\mathrm{T(n)} = a^3 T(n-bk)$). Χρήσιμο το πρόχειρο

2. Εκτίμηση της σειράς που προκύπτει μετά από k επαναλήψεις (μας καθοδηγεί ο όρος: $T(n-bk)$)

3. Υπολογίζουμε πότε σταματάει η αναδρομή (Θέτουμε $n - bk = n_0$ και λύνουμε ως προς k). Π.χ. αν $n_0 = 0$, τότε $\mathrm{k} = n/b$

4. Αντικατάσταση του k στον τύπο του βήματος 2

5. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμοι οι τύποι: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Πρόχειρο:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(n) &= 3T(n-2)+4 \\ T(n-2) &= 3T(n-4)+4 \\ T(n-4) &= 3T(n-6)+4 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} 3T(n-2)+4 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(n) &= 3T(n-2)+4 = 3[3T(n-4)+4]+4 \\ &= 3^2T(n-4)+3\cdot 4+4 = 3^2[3T(n-6)+4]+3\cdot 4+4 \\ &= 3^3T(n-6)+3^2\cdot 4+3\cdot 4+4 = \\ &= \cdots = \\ &= 3^kT(n-2k)+3^{k-1}\cdot 4+\cdots+3^2\cdot 4+3\cdot 4+4 = \end{aligned}$$

Η αναδρομή σταματά όταν $n - 2k = 0 \Rightarrow \mathrm{k} = n/2$

$$= 3^{\frac{n}{2}}T(0) + 3^{\frac{n}{2}-1}\cdot 4+\cdots+3^2\cdot 4+3\cdot 4+4 =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\left[3^{\frac{n}{2}-1}+\cdots+3^2+3+1\right] =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 3^i =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\frac{3^{\frac{n}{2}}-1}{3-1} =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 2\left[3^{\frac{n}{2}}-1\right] = \Theta\left(3^{\frac{n}{2}}\right)$$

Η **μέθοδος της επανάληψης** (κάνοντας άθροισμα κατά μέλη) χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} T(n-b) + f(n), & n > n_0 \\ c, & n = n_0 \end{cases}$$

1. Γράφουμε όλους τους αναδρομικούς όρους T(n), T(n-1),… μέχρι και την οριακή περίπτωση της αναδρομής

2. Προσθέτουμε τις εξισώσεις κατά μέλη

3. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμοι οι τύποι: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} T(n-1) + 3n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \cancel{T(n-1)} + 3n \\
\cancel{T(n-1)} &= \cancel{T(n-2)} + 3(n-1) \\
\cancel{T(n-2)} &= \cancel{T(n-3)} + 3(n-2) \\
&\dots \\
\cancel{T(2)} &= \cancel{T(1)} + 3\cdot 2 \\
\cancel{T(1)} &= \cancel{T(0)} + 3\cdot 1 \\
\cancel{T(0)} &= 1 \qquad (+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3n + 3(n-1) + 3(n-2) + \dots + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1 \\
&= 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + \dots + 3(n-2) + 3(n-1) + 3n \\
&= 1 + 3[1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n] \\
&= 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 3\frac{n(n+1)}{2} = \\
&= 1{,}5n^2 + 1{,}5n + 1
\end{aligned}$$

Λύση της αναδρομής: $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

1. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$ τότε $\boxed{T(n)=\Theta(f(n))}$ (δραστ.3.6)

2. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ τότε $\boxed{T(n)=\Theta(f(n)\cdot\log n)}$ (δραστ.3.6)

3. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$ τότε η δραστηριότητα 3.6 έχει αποτύχει και πάμε υποχρεωτικά με δένδρο αναδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}<1$ άρα από την δραστ.3.6 ισχύει: $T(n)=\Theta(n^2)$

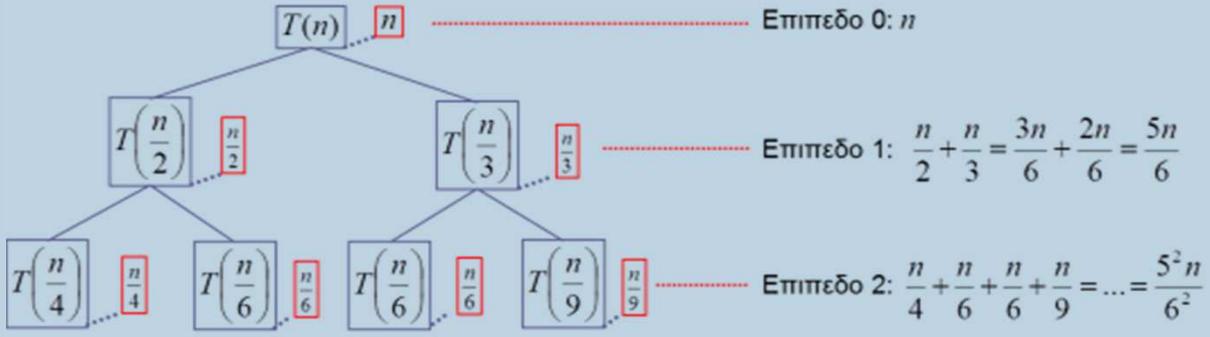
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+n$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ άρα από την δραστ.3.6 ισχύει: $T(n)=\Theta(n\cdot\log n)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$T(n)=\begin{cases} T\left(\frac{n}{2}\right)+T\left(\frac{n}{3}\right)+n, & \alpha\nu\ n>1 \\ 1, & \alpha\nu\ n=1 \end{cases}$$

Λύση:



Άρα στο επίπεδο i γίνονται $\frac{5^i n}{6^i}$ πράξεις

Το ύψος του δένδρου είναι $\log_2 n$ (αν c είναι ο μικρότερος από τους δύο παρονομαστές (δηλ. c=min{a,b}) έπεται ότι το ύψος του δένδρου είναι $\log_c n$.)

$$T(n)=\sum_{i=0}^{\log n}5^i\frac{n}{6^i}=n\sum_{i=0}^{\log n}\frac{5^i}{6^i}=$$

$$=n\sum_{i=0}^{\log n}\left(\frac{5}{6}\right)^i=n\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\log n+1}-1}{\frac{5}{6}-1}=$$

$$=6n\cdot(0,83)^{\log n+1}-6n$$