ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 3.7:
Η Γλώσσα των Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Όλο το μάθημα είναι απόλυτα SOS για τις τελικές εξετάσεις.

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία

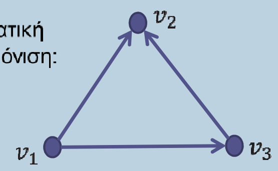
1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

1. Κατευθυνόμενο Γράφημα

Ορισμός: Ένα Κατευθυνόμενο Γράφημα G είναι μία διατεταγμένη δυάδα (V, E) όπου:
- V είναι το σύνολο των κορυφών: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Ε είναι το σύνολο των ακμών: $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή $e_k = (v_i, v_j)$ ή $e_k = < v_i, v_j >$ με $v_i, v_j \in \mathrm{V}$ για κάθε $k = 1, \dots, m$
  - Η ακμή θεωρείται διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή (v_i, v_j) είναι διαφορετική από την ακμή (v_j, v_i), δηλαδή υπάρχει κατεύθυνση. Η κορυφή v_i καλείται αρχή τη ακμής και η κορυφή v_j λέγεται πέρας της ακμής.

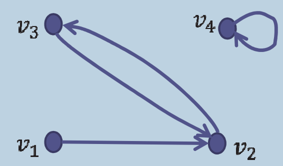
Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3\}$
$\mathrm{E} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2)\}$

Σχηματική Απεικόνιση:



Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$\mathrm{E} = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_4)\}$

Σχηματική Απεικόνιση:



Β. Θεωρία

1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

1. Κατευθυνόμενο Γράφημα (Τύποι Ακμών)

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα:

- Έχει τουλάχιστον 1 κορυφή (Δεν υπάρχει γράφημα χωρίς κορυφές)
- Οι ακμές που έχουμε χαρακτηρίζονται ως:
  - **Ανακυκλώσεις** (Είναι ακμές με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή)

  - **Παράλληλες Ακμές** (Είναι ακμές με κοινά άκρα και κοινή φορά)

  - **Αντιπαράλληλες ακμές** (Είναι ακμές με κοινά άκρα και αντίθετη φορά)

Β. Θεωρία

1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

1. Κατευθυνόμενο Γράφημα

Άσκηση 1: Κατασκευάστε το κατευθυνόμενο γράφημα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_2), (v_2, v_5), (v_3, v_3), (v_3, v_5)\}$

Άσκηση 2: Κατασκευάστε το κατευθυνόμενο γράφημα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2\}$
$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_2)\}$

Άσκηση 3: Κατασκευάστε το κατευθυνόμενο γράφημα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1\}$
$E = \emptyset$

Β. Θεωρία

1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

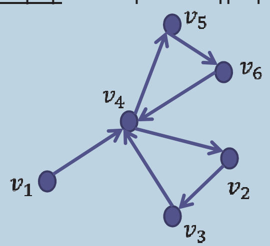
2. Μονοπάτια

Ορισμός:

- **Μονοπάτι** P μήκους n από μία κορυφή v_0 σε μία κορυφή v_n είναι
  - μια ακολουθία n ακμών (ακολουθώντας τις κατευθύνσεις τους)
  - (άρα n+1 κορυφών)

  που ξεκινά από την κορυφή v_0 και καταλήγει στην v_n
- **Απλό μονοπάτι** είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

Άσκηση: Στο παρακάτω γράφημα



1. Καταγράψτε ένα μονοπάτι μήκους 2
2. Καταγράψτε ένα μονοπάτι μήκους 6
3. Ποιο είναι το μέγιστο μήκος απλού μονοπατιού;

Β. Θεωρία

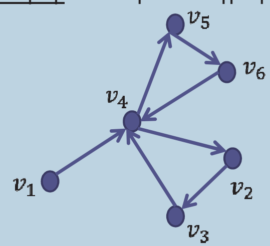
1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

3. Κύκλοι

Ορισμός:

- **Κύκλος** είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή
  - Επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή.
  - Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή.
- **Απλός Κύκλος** είναι ένας κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές
  - Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια κορυφή
  - Δεν επιτρέπεται να περάσουμε από την ίδια ακμή

Άσκηση: Στο παρακάτω γράφημα



1. Καταγράψτε ένα κύκλο μήκους 3
2. Καταγράψτε ένα κύκλο μήκους 6
3. Ποιος από τους παράπανω κύκλους είναι απλός;

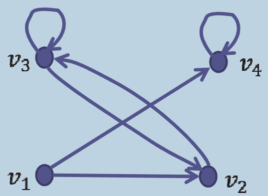
Β. Θεωρία

1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

4. Έσω και Έξω Βαθμός Κορυφής

Ορισμός:
- **Έσω Βαθμός** της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφη v_i
  - Συμβολίζεται με $d^-(v_i)$
- **Έξω Βαθμός** της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφη v_i
  - Συμβολίζεται με $d^+(v_i)$

Άσκηση: Στο παρακάτω γράφημα υπολογίστε τον έσω και τον έξω βαθμό κάθε κορυφής:



Β. Θεωρία

1. Ορισμοί Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

5. Απομονωμένη Κορυφή

Ορισμός:
- Μία κορυφή θα χαρακτηρίζεται **απομονωμένη κορυφή** αν δεν εισέρχονται ούτε εξέχονται ακμές από άλλες κορυφές.
- Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι σε μια απομονωμένη κορυφή επιτρέπεται να έχουμε ανακυκλώσεις.

Άσκηση: Κατασκευάστε κατευθυνόμενο γράφημα 4 κορυφών και 6 ακμών με 2 απομονωμένες κορυφές.

Β. Θεωρία

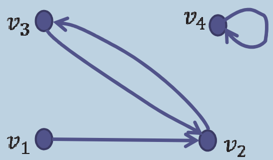
2. Η Γλώσσα των Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

1. Η Γλώσσα των Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Ορισμός: Ορίζουμε τη γλώσσα των κατευθυνόμενων γραφημάτων να συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που περιλαμβάνουν τα εξής στοιχεία:

- Το σύμπαν είναι το σύνολο κορυφών |A|={1,2,…,n} (Γράφημα με n κορυφές)
- Το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) είναι αληθές αν υπάρχει η κατευθυνόμενη ακμή από το x στο y.

Σημαντικό! Μία συγκεκριμένη ερμηνεία της γλώσσας είναι ένα συγκεκριμένο κατευθυνόμενο γράφημα:
Παράδειγμα:
Η ερμηνεία $A = \{$
|A|= $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,
$P^A = \{(v_1, v_2),(v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_4)\}$
}
Αντιστοιχεί στο γράφημα με 4 κορυφές και τις κατευθυνόμενες ακμές του P^A όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



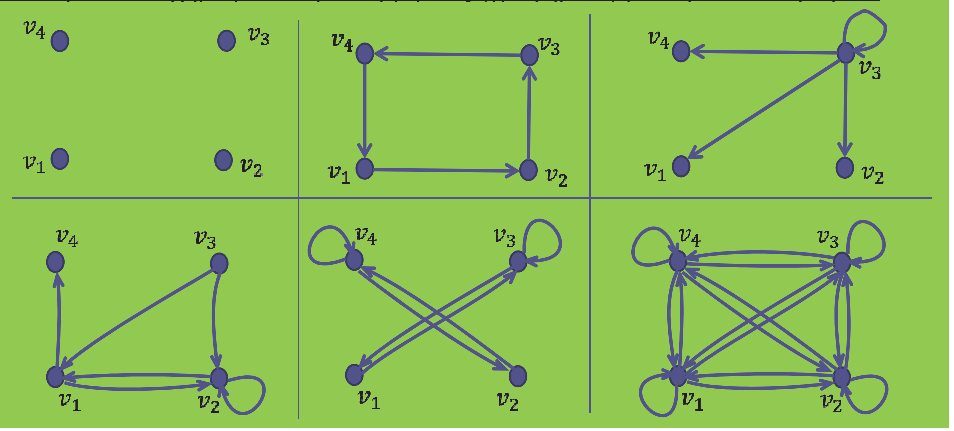
!!! Παρατηρούμε ότι σε ένα γράφημα της ερμηνείας αυτής μπορούν να περιλαμβάνονται αντιπαράλληλες ακμές και ανακυκλώσεις (οχι όμως παραλληλες ακμές)!!!

Β. Θεωρία

2. Η Γλώσσα των Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

2. Ερμηνείες της Γλωσσας των Κ.Γ.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε 6 ερμηνείες (γραφήματα) με σύμπαν 4 κορυφών:



Υπάρχουν $4 \cdot 4 = 16$ δυνατές ακμές. Κάθε ακμή υπάρχει ή δεν υπάρχει στο γράφημα, άρα υπάρχουν 2^{16} δυνατά γραφήματα. **Γενικεύοντας υπάρχουν $2^{n \cdot n}$ γραφήματα n κορυφών.**

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

Μία πρόταση κατηγορηματικής λογικής στην ερμηνεία αυτή εκφράζει μία γραφοθεωρητική ιδιότητα. Συνεπώς ως μορφή άσκησης ζητείται :

1. Να μεταφράσουμε μία πρόταση της κατηγορηματικής λογικής στα ελληνικά.
2. Να εκφράσουμε μία πρόταση των ελληνικών σε κατηγορηματική λογική.
3. Να βρούμε αν αληθεύει μια πρόταση κατηγορηματικής λογικής σε ένα συγκεκριμένο γράφημα.
4. Να βρούμε ένα γράφημα στο οποίο αληθεύει ένας ή περισσότεροι τύποι.
5. Να γράψουμε συντομογραφίες και να τις χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε περίπλοκες προτάσεις

Βασικό μας εργαλείο παραμένει ο μεταφραστικός πίνακας, όπου τώρα το «στοιχείο» μεταφράζεται σε «κορυφή» και το κατηγόρημα P(x,y) εκφράζει την ύπαρξη ακμής από μία κορυφή σε μια άλλη κορυφή.

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

1. Μετάφραση στα Ελληνικά

Μετάφραση από Κατηγορηματική Λογική στα Ελληνικά
Και πάλι το βασικό μας εργαλείο είναι ο μεταφραστικός πίνακας και η πρόταση μεταφράζεται «από έξω προς τα μέσα»

- Πρώτα εξωτερικοί ποσοδείκτες
- Μετά το πεδίο εφαρμογής αναδρομικά κ.λπ.

Στο μυαλό μας έχουμε:

- Μία μεταβλητή αντιστοιχίζεται σε στοιχείο του σύμπαντος, άρα σε κορυφή
- Το κατηγόρημα P(x,y) αληθεύει αν υπάρχει ακμή από την κορυφή του 1ου ορίσματος (x) στην κορυφή του 2ου ορίσματος (y)

Η μετάφραση μιας πρότασης θα εκφράζει μια ιδιότητα γραφημάτων!

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

1. Μετάφραση στα Ελληνικά

Άσκηση 1: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή *x* στην κορυφή *y*». Να μεταφράσετε στα ελληνικά τις ακόλουθες στοιχειώδεις προτάσεις ποσοδεικτών:

	Τύπος	Μετάφραση
1	$\forall x P(x,x)$	
2	$\exists x P(x,x)$	
3	$\forall x \forall y P(x,y)$	
4	$\exists x \exists y P(x,y)$	
5	$\forall x \exists y P(x,y)$	
6	$\exists x \forall y P(x,y)$	
7	$\forall y \forall x P(x,y)$	
8	$\exists y \exists x P(x,y)$	
9	$\exists y \forall x P(x,y)$	

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

1. Μετάφραση στα Ελληνικά

Άσκηση 2: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή *x* στην κορυφή *y*».

1. $\forall x \neg P(x,x)$
2. $\exists x \neg P(x,x) \wedge \exists x P(x,x)$
3. $\forall x[P(x,x) \rightarrow \exists y(x \neq y \wedge P(x,y))]$
4. $\forall x \forall y \neg P(x,y)$
5. $\neg \forall x \forall y P(x,y)$
6. $\exists x[P(x,x) \wedge \forall y(P(y,y) \rightarrow x \approx y)]$

Β. Θεωρία
3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.
2. Μετάφραση σε Κατηγορηματική λογική

Μετάφραση από τα Ελληνικά στην Κατηγορηματική Λογική

Το στήσιμο της πρότασης από τα ελληνικά στην κατηγορηματική λογική γίνεται από έξω προς τα μέσα, δηλαδή:

- Εντοπίζουμε τους εξωτερικούς ποσοδείκτες που καθορίζουν το νόημα της πρότασης
- Εξειδικεύουμε με τους συνδέσμους και γράφουμε τις υπο-προτάσεις.

Η διαδικασία λοιπόν είναι όμοια με αυτά που είδαμε και σε άλλες ερμηνείες.

Η επόμενη άσκηση είναι σημαντική γιατί εκφράζει τις βασικές ιδιότητες που είδαμε ότι ορίζονται στα κατευθυνόμενα γραφήματα:

- Ανακυκλώσεις
- Αντιπαράλληλες Ακμές
- Μονοπάτια (απλά και μη απλά)
- Κύκλοι (απλοί και μη απλοί)
- Πλήρες Γράφημα

Οι έννοιες των βαθμών κορυφής εκφράζονται μέσω συντομογραφιών που θα δούμε αμέσως μετά.

Β. Θεωρία
3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.
2. Μετάφραση σε Κατηγορηματική Λογική

Άσκηση 3: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y».

1. Όλες οι κορυφές έχουν ανακύκλωση
2. Υπάρχει ζεύγος κορυφών που συνδέονται με αντιπαράλληλες ακμές.
3. Υπάρχει μονοπάτι μήκους 2
4. Υπάρχει απλό μονοπάτι μήκους 2
5. Υπάρχει κύκλος μήκους 3
6. Υπάρχει απλός κύκλος μήκους 3
7. Το γράφημα είναι πλήρες

Β. Θεωρία
3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.
3. Εύρεση αλήθειας προτάσεων

Εύρεση Αλήθειας Προτάσεων

Όπως είδαμε και από τα προηγούμενα παραδείγματα μία πρόταση κατηγορηματικής λογικής στη γλώσσα αυτή, εκφράζει μια ιδιότητα γραφημάτων.

- Άρα το αν είναι αληθής ή ψευδής εξαρτάται από την ερμηνεία (=συγκεκριμένο γράφημα).

Συνεπώς στην άσκηση αυτή, μας δίδονται:

- Μία πρόταση ΚΛ
- και ένα (ή περισσότερα) συγκεκριμένα γραφήματα

Στην περίπτωση αυτή:

- Μεταφράζουμε την πρόταση κατηγορηματικής λογικής και
- Μελετώντας το γράφημα αποφασίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής.

Β. Θεωρία
3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.
3. Εύρεση Αλήθειας Προτάσεων

Άσκηση 4: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y».

Δεδομένων των εξής ερμηνειών της γλώσσα αυτής:

I. $A = \{|A| = \{1,2\},\ P^A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\}$

II. $A = \{|A| = \{1,2,3\},\ P^A = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}\}$

Εξετάστε αν αληθεύουν οι τύποι:

1. $\forall x \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z]$
2. $\exists x \forall y[x \neq y \rightarrow P(x,y)]$

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

4. Εύρεση ερμηνείας που ικανοποιεί τύπο

Σε αυτό τον τύπο άσκησης:
- Μας δίνονται ένας ή περισσότεροι τύποι κατηγορηματικής λογικής
- Μας ζητείται να βρούμε ερμηνεία που κάνει αληθείς όλους τους τύπους του συνόλου.

Στην περίπτωση αυτή μεταφράζουμε τις προτασεις, βρίσκουμε τις ιδιότητες και κατασκευάζουμε ένα γράφημα που ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που έχουμε.

Σημειώστε ότι η εύρεση μιας ερμηνείας που ικανοποιεί προτάσεις είναι ζητούμενο στους ορισμούς του μαθήματος 6. Όπως είδαμε η γλώσσα των κατευθυνόμενων γραφημάτων είναι η καλύτερη δυνατή για να:
- Αποδείξουμε ότι ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος
- Αποδείξουμε ότι ένα σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο
- Αποδείξουμε ότι ένας τύπος δεν είναι λογικά έγκυρος
- Αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μια λογική συνεπαγωγή.

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

4. Εύρεση Ερμηνείας που ικανοποιεί τύπο

Ασκηση 5

1. Αποδείξτε ότι ο τύπος $\forall x \forall y[x \neq y \rightarrow P(x,y) \wedge P(y,x)]$ είναι ικανοποιήσιμος.
2. Αποδείξτε ότι το σύνολο τύπων $\{\exists x P(x,x),\ \forall x \exists y P(x,y)\}$ είναι ικανοποιήσιμο.
3. Αποδείξτε ότι ο τύπος $\mathrm{P(c,c)} \rightarrow \forall x P(x,x)$ δεν είναι λογικά έγκυρος
4. Αποδείξτε ότι δεν ισχύει η λογική συνεπαγωγή: $\{\forall x \exists y P(x,y), \exists y \forall x P(x,y)\} \vDash \forall x P(x,x)$

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

5. Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Σημαντικές Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορίζουμε τις ακόλουθες συντομογραφίες (απ'ευθείας στο τυπολόγιο) για να μπορούμε να κατασκευάζουμε εύκολα τύπους που έκφραζουν αυτές τις ιδιότητες:

- Την συντομογραφία K(x) να αληθεύει αν η x είναι απομονωμένη
  $K(x) \equiv \forall y[P(x,y) \vee P(y,x) \rightarrow x \approx y]$
- Την συντομογραφία $\mathrm{out}_0(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 0
  $out_0(x) \equiv \forall y[\neg P(x,y)]$
- Την συντομογραφία $\mathrm{out}_{\geq 1}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό τουλ. 1
  $\mathrm{out}_{\geq 1}(x) \equiv \exists y[P(x,y)]$
- Την συντομογραφία $\mathrm{out}_1(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 1
  $\mathrm{out}_1(x) \equiv \exists y[P(x,y) \wedge \forall z(P(x,z) \rightarrow z \approx y)]$
- Την συντομογραφία $\mathrm{out}_{\leq 1}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό το πολύ 1
  $\mathrm{out}_{\leq 1}(x) \equiv out_0(x) \vee \mathrm{out}_1(x)$
- Την συντομογραφία $\mathrm{out}_{\geq 2}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό τουλ. 2
  $\mathrm{out}_{\geq 2}(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z]$
- Την συντομογραφία $\mathrm{out}_2(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 2
  $\mathrm{out}_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z \wedge \forall w(P(x,w) \rightarrow w \approx y \vee w \approx z)]$

Β. Θεωρία

3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.

5. Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Σημαντικές Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Εντελώς συμμετρικά (αντιστρέφοντας τη σειρά των ορισμάτων στα κατηγορήματα) έχουμε ένα πακέτο συντομογραφιών που εκφράζουν έσω βαθμο κορυφής:
Π.χ. τροποποιούμε την συντομογραφία $\mathrm{out}_2(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 2

$\mathrm{out}_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z \wedge \forall w(P(x,w) \rightarrow w \approx y \vee w \approx z)]$

ως εξής:

$\mathrm{in}_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(y,x) \wedge P(z,x) \wedge y \neq z \wedge \forall w(P(w,x) \rightarrow w \approx y \vee w \approx z)]$

και έχουμε συντομογραφία που εκφράζει τον έσω βαθμό κορυφής 2

Φυσικά μπορούμε να ορίσουμε και οποιαδήποτε άλλη συντομογραφία θέλουμε. Θα εκφράζει ιδιότητα των κορυφών που δέχεται σαν όρισμα. Π.χ. η συντομογραφία:
$path(x,y) \equiv \exists z[P(x,z) \wedge P(z,y) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z]$
αληθεύει αν υπάρχει απλό μονοπάτι μήκους 2 από την κορυφή x στην κορυφή y.

Β. Θεωρία
3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Κ.Γ.
5. Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

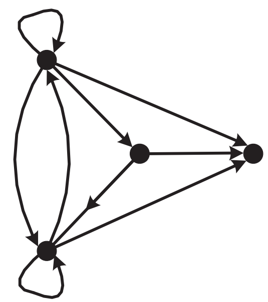
Άσκηση 6: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y».

1. Ορίστε μια συντομογραφία $\mathrm{I}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έσω βαθμό 2
2. Ορίστε μια συντομογραφία $\mathrm{O}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 2
3. Ορίστε μία συντομογραφία $\mathrm{R}(x)$ που αληθεύει αν η κορυφή x έχει έσω και έξω βαθμό 2
4. Έναν τύπο $\mathrm{M}(x,y)$ να αληθεύει αν δύο διαφορετικές κορυφές x,y συνδέονται με αντιπαράλληλες ακμές.
5. Ορίστε την πρόταση: «Όλες οι κορυφές έχουν έσω και έξω βαθμό 2 και κάθε κορυφή συνδέεται με μόνο μία άλλη κορυφή με αντιπαράλληλες ακμές»
6. Δώστε παράδειγμα γραφήματος που αληθεύει η προηγούμενη πρόταση

Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή στο κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές του γραφήματος και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την a στη b. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε αυτή την ερμηνεία;

1. **$\exists x \forall y \neg P(x,y)$**
2. **$\forall x \forall y \neg P(x,y)$**
3. **$\exists x \forall y\, P(x,y)$**
4. $\forall x \forall y \exists z (P(z,x) \wedge P(z,y))$



Γ. Ασκήσεις
1. Θέματα Εξετάσεων
Θέμα Εξετάσεων 2006Β

Δίνεται η πρόταση

$$\varphi = \forall x \exists y \varphi_1(x,y) \wedge \forall x \exists y \varphi_2(x,y)$$

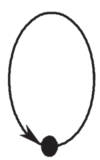
όπου

$$\varphi_1(x,y) = P(x,y) \wedge \forall z (P(x,z) \to z \approx y)$$

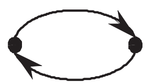
και

$$\varphi_2(x,y) = P(y,x) \wedge \forall z (P(z,x) \to z \approx y).$$

Ερμηνεύουμε την πρόταση σε κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή το σύμπαν είναι οι κορυφές ενός γραφήματος και η ερμηνεία του κατηγορηματικού συμβόλου $P(x,y)$ είναι «υπάρχει ακμή από την x κορυφή στην κορυφή y»).
(Α) Εξετάστε σε ποια από τα παρακάτω γραφήματα αληθεύει η πρόταση .



(i)



(ii)

(iii)

Γ. Ασκήσεις
1. Θέματα Εξετάσεων
Θέμα Εξετάσεων 2006Β

(Β) Δώστε μια δομή που επαληθεύει την φ με τουλάχιστον 5 κορυφές. Εξηγήστε (με λόγια, στη φυσική γλώσσα) ποιες δομές επαληθεύουν την φ.
(Γ) Στην συνέχεια βρείτε μια κανονική ποσοδεικτική μορφή του τύπου φ.

Γ. Ασκήσεις

1. Θέματα Εξετάσεων

Θέμα Εξετάσεων 2007Β

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $Q(x, y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y».

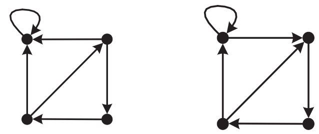
1) Δίνεται η πρόταση $\theta = \exists x\, \exists x_1\, \exists x_2\, \exists x_3\, \exists y\, [\ Q(x, x_1) \wedge Q(x_1, x_2) \wedge Q(x_2, x_3) \wedge Q(x_3, y)\ ]$. Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα) ποια γραφήματα επαληθεύουν την θ. Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 4 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ. Να δώσετε μια δομή με το πολύ 3 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ.

Γ. Ασκήσεις

1. Θέματα Εξετάσεων

Θέμα Εξετάσεων 2007Β

(2) Να διατυπώσετε μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) παραπλεύρως και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii).



(3) Δίνεται η πρόταση $\varphi = \exists x \{ \neg Q(x, x) \wedge \forall y\, [\, x \neq y \rightarrow (\, Q(x, y) \wedge \forall z \neg Q(y, z)\,)\,]\, \}$.
Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιώντας την έννοια του έξω-βαθμού κορυφής) ποια γραφήματα επαληθεύουν την φ. Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 5 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση φ.

Υπόδειξη: Σκεφθείτε ποιες κορυφές ικανοποιούν τον τύπο $\psi(x) = \forall y\, [\, x \neq y \rightarrow (\, Q(x, y) \wedge \forall z \neg Q(y, z)\,)\,]$.
Υπενθύμιση: Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, ο έξω-βαθμός μιας κορυφής u είναι ο αριθμός των ακμών που ξεκινούν από την u.