# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ/2

Μάθημα 5.4:
Ο αλγόριθμος του Dijkstra

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ





# Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Νέοι Ορισμοί (Αλγόριθμος Dijkstra, Ιδιότητες Βελτίστων Μονοπατιών)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β
- Ασκήσεις: Εφαρμογές

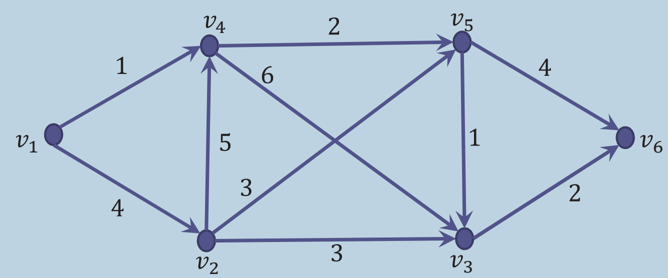
Επίπεδο Γ
- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις



# Β. Θεωρία
## 1. Συντομότερα Μονοπάτια
### 1. Γράφος με Βάρη

Ορισμός:
- Ένα **γράφημα με βάρη** (ισοδύναμα **βεβαρημένο γράφημα**) είναι ένας γράφος που σε κάθε ακμή έχει αντιστοιχηθεί ένα βάρος (που συνήθως συμβολίζει χιλιομετρική απόσταση, χρόνο διέλευσης κ.λπ.)
- Τυπικά ένας γράφος με βάρη ορίζεται ως $\boldsymbol{G(V,E,W)}$ προσθέτοντας μια συνάρτηση αντιτοίχισης κάθε ακμής σε ένα βάρος, δηλαδή $\boldsymbol{W}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$

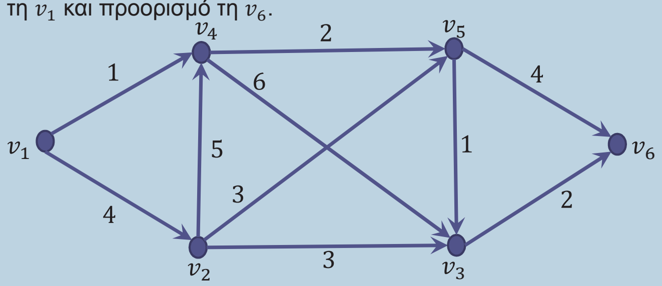
Παράδειγμα: Στο ακόλουθο γράφημα έχουν αντιστοιχηθεί βάρη στις ακμές μέσω της συνάρτησης W. Ισχύει π.χ. ότι $\mathrm{w}(v_1,v_4)=1, \mathrm{w}(v_1,v_2)=4$ κ.λπ)



# Β. Θεωρία
## 1. Συντομότερα Μονοπάτια
### 2. Συντομότερο Μονοπάτι

Ορισμός:
- **Βάρος ενός μονοπατιού** είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών του μονοπατιού.

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο γράφημα σημειώνουμε όλα τα μονοπάτια με τα βάρη τους με αφετηρία τη $v_1$ και προορισμό τη $v_6$.




Τα μονοπάτια είναι:

$v_1 - v_4 - v_5 - v_6$ Βαρος:7
$v_1 - v_4 - v_5 - v_3 - v_6$ Βαρος:6
$v_1 - v_4 - v_3 - v_6$ Βαρος:9
$v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_6$ Βαρος:15
$v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_3 - v_6$ Β.:14
$v_1 - v_2 - v_4 - v_3 - v_6$ Βαρος:17
$v_1 - v_2 - v_5 - v_6$ Βαρος:11
$v_1 - v_2 - v_5 - v_3 - v_6$ Βαρος:10
$v_1 - v_2 - v_3 - v_6$ Βαρος:9

Ορισμός:
- **Συντομότερο μονοπάτι** είναι το μονοπάτι με το ελάχιστο βάρος.
- (στο παράδειγμα μας το $v_1 - v_4 - v_5 - v_3 - v_6$ με βάρος 6)



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 1. Διατύπωση του προβλήματος

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ**: Δίνεται γράφος G=(V,E,W), αφετηρία s∈V, τερματισμός t ∈V. Ζητείται το συντομότερο μονοπάτι από την s στην t.
- Θα μελετήσουμε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει το συντομότερο μονοπάτι:
- Είναι **ο αλγόριθμος του Dijkstra!**
- Σε κάθε βήμα «οριστικοποιεί» και έναν κόμβο του γραφήματος
  - Δηλαδή βρίσκει το συντομότερο μονοπάτι για να πάμε από την αφετηρία στον κόμβο αυτό.
- ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν καθοδηγούμαστε από τον προορισμό, αλλά όταν με το καλό οριστικοποιηθεί ο τερματισμός, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει!



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 2. Ψευδογλώσσα του Αλγορίθμου

Σκιαγράφηση Αλγόριθμου Dijkstra:
Κατά την διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου σημειώνουμε σε κάθε κορυφή v:
- L[v] το κόστος του καλύτερου μονοπατίου για να πάμε από την αφετηρία s στην κορυφή v
- P[v] είναι η κορυφή μέσω της οποίας καταλήγουμε στην κορυφή v

- Στην αρχικοποίηση:
  - Θέτουμε όλες τις ετικέτες L[v]=+∞ εκτός της αφετηρίας που έχει L[s]=0
- Σε κάθε βήμα:
  - Οριστικοποιείται η κορυφή με το μικρότερο κόστος από τις μη οριστικοποιημένες
  - Διορθώνονται οι ετικέτες των γειτονικών μη οριστικοποιημένων κορυφών (σε περίπτωση που βρεθεί καλύτερο μονοπάτι από την κορυφή που οριστικοποιήθηκε)
- Τερματισμός:
  - Όταν οριστικοποιηθεί η κορυφή τερματισμού t.



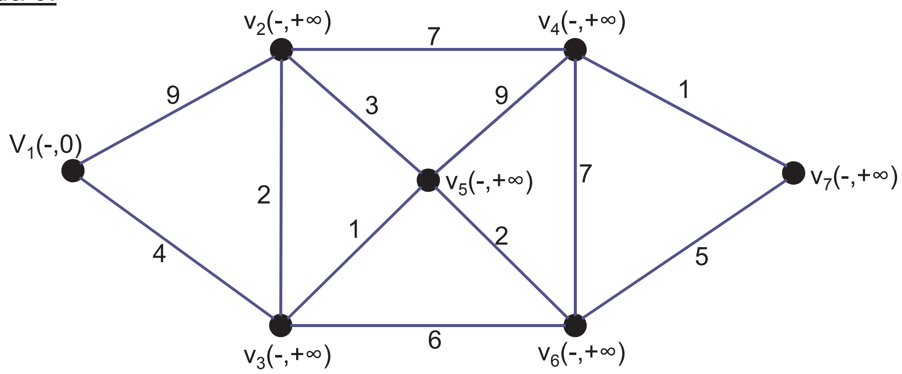
# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 2. Ψευδογλώσσα του Αλγορίθμου

```
procedure Dijkstra(G=(V,E,W), s, t)
   L[s]=0
   T=V
   for all x∈V-{s}
      L[x]=+∞
   end for

   while t∈T do
      Επέλεξε v∈T με ελάχιστο L[v]
      T=T-{v}
      for all x∈T γειτονική της v:
         if (L[v]+W[v,x]<L[x])
            L[x]=L[v]+W[v,x]
            P[x]=v
         end if
     end for
   end while

   return L[t]

end procedure
```

# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

Ψάχνουμε το συντομότερο μονοπάτι από την $v_1$ στην $v_7$

- Βήμα 0:

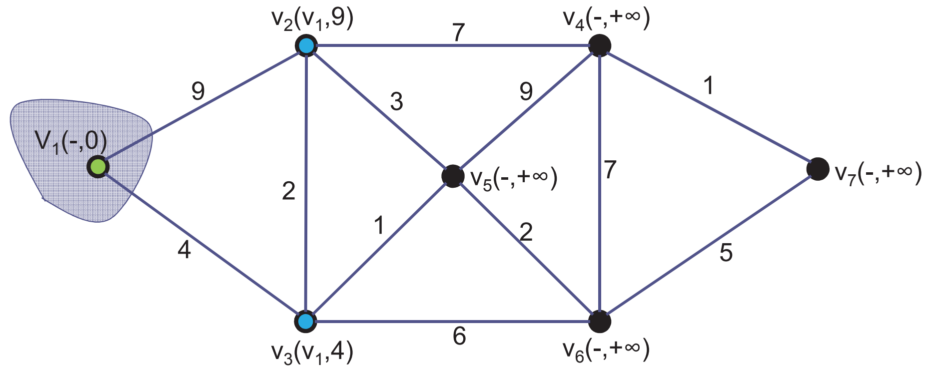



Αρχικοποίηση ετικετών κορυφών



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Βήμα 1:



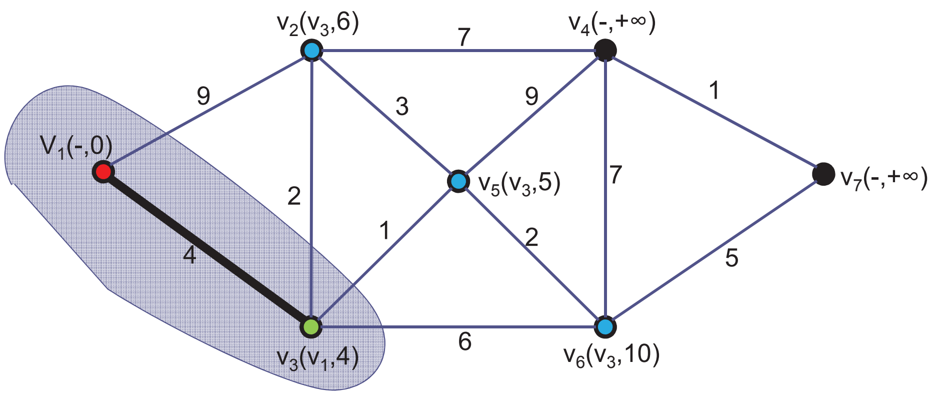

Οριστικοποίηση κορυφής $v_1$

Εξεταση κορυφών $v_2,v_3$. Διόρθωση ετικετών $v_2,v_3$



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Βήμα 2:



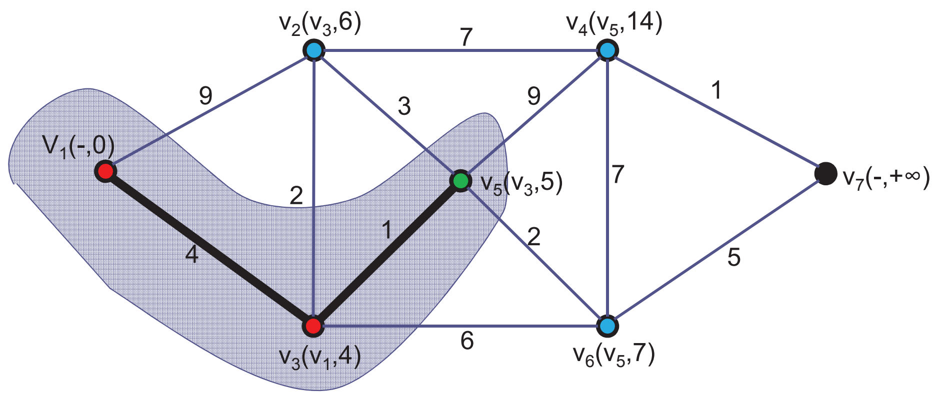

Οριστικοποίηση κορυφής $v_3$

Εξεταση κορυφών $v_2,v_5,v_6$. Διόρθωση ετικετών $v_2,v_5,v_6$



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Βήμα 3:

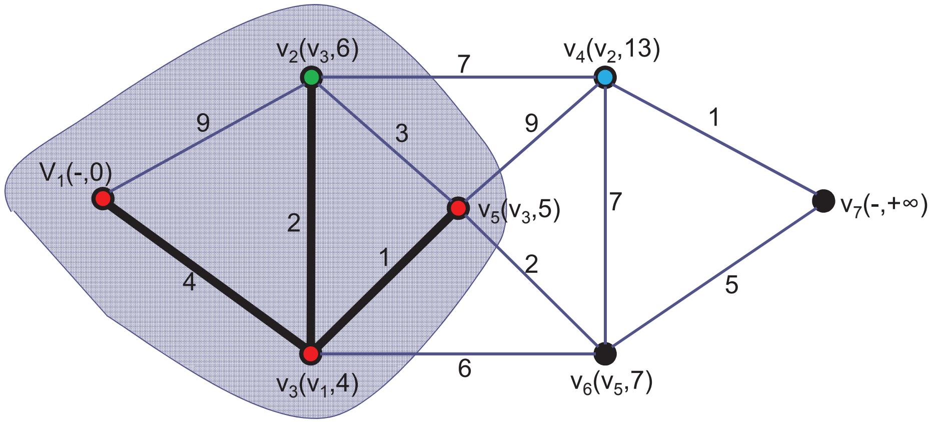



Οριστικοποίηση κορυφής $v_5$

Εξεταση κορυφών $v_2,v_4,v_6$. Διόρθωση ετικετών $v_4,v_6$

# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Βήμα 4:

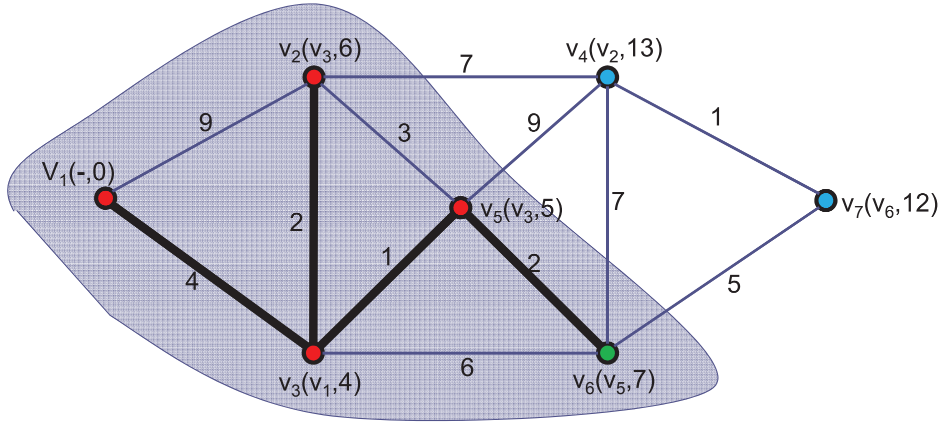



Οριστικοποίηση κορυφής $v_2$
Εξεταση κορυφής $v_4$. Διόρθωση ετικέτας $v_4$



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Βήμα 5:

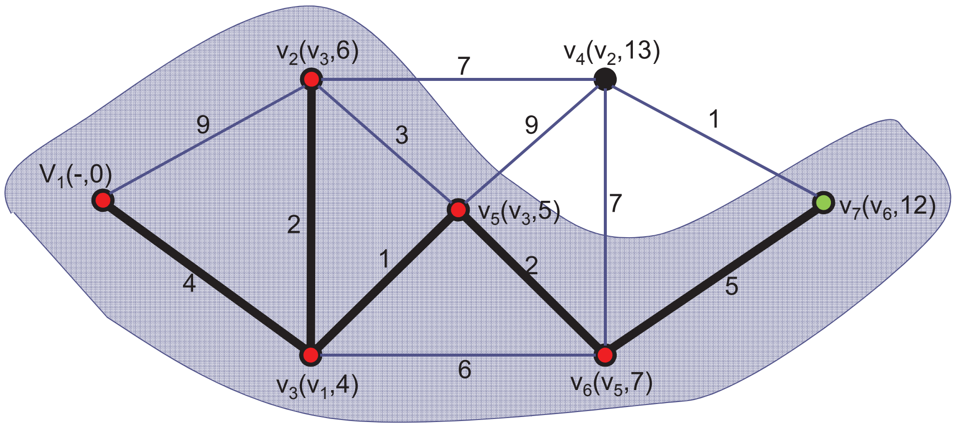



Οριστικοποίηση κορυφής $v_6$
Εξεταση κορυφών $v_4$,$v_7$. Διόρθωση ετικετας $v_7$



# Β. Θεωρία
## 2. Ο αλγόριθμος του Dijkstra
### 3. Παράδειγμα Εκτέλεσης

- Βήμα 6:

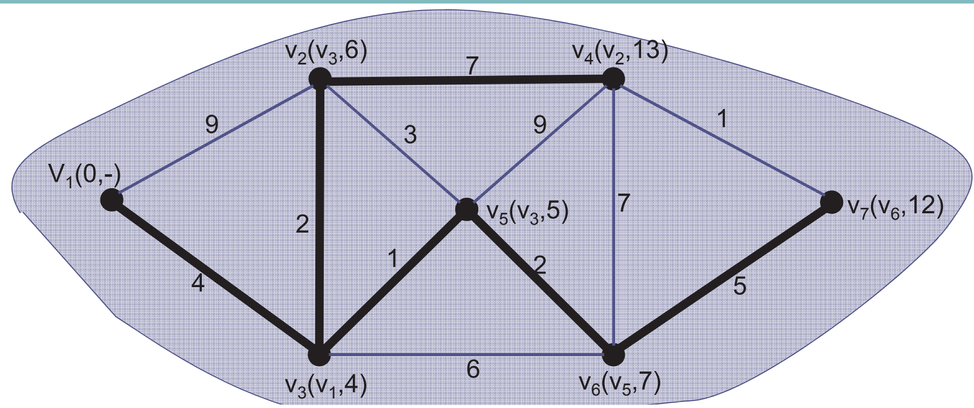



Οριστικοποίηση κορυφής $v_7$
Τέλος Αλγορίθμου. Συντομότερο μονοπάτι $v_1$-$v_3$-$v_5$-$v_6$-$v_7$ με βάρος 4+1+2+5=12



# Β. Θεωρία
## 3. Παρατηρήσεις στον αλγόριθμο του Dijkstra
### 1. Δένδρο Συντομότερων Μονοπατιών

- Ταυτόχρονα με το s-t συντομότερο μονοπάτι υπολογίζεται και το συντομότερο μονοπάτι από την αφετηρία προς κάθε κορυφή που οριστικοποιήθηκε.
- Αν αφήσουμε τον αλγόριθμο να τρέξει μέχρι να οριστικοποιηθούν όλες οι κορυφές, υπολογίζεται το δένδρο συντομότερων μονοπατιών από την αφετηρία προς όλες τις κορυφές του γραφήματος!

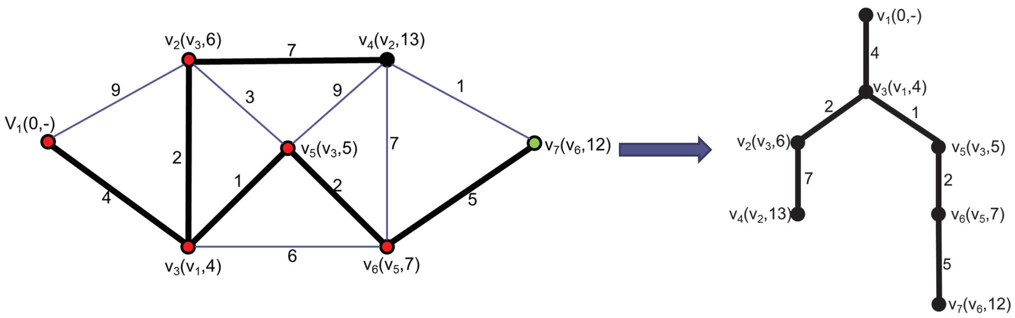


# Β. Θεωρία

## 3. Παρατηρήσεις στον αλγόριθμο του Dijkstra

### 1. Δένδρο Συντομότερων Μονοπατιών

Συνεπώς στο γράφο – παράδειγμα του σχήματος το δένδρο συντομότερων μονοπατιών είναι:




**δένδρο συντομότερων μονοπατιών**



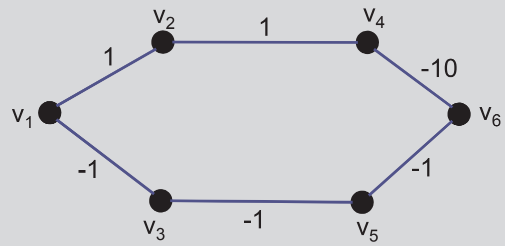
# Β. Θεωρία

## 3. Παρατηρήσεις στον αλγόριθμο του Dijkstra

### 2. Αρνητικά Βάρη

Ο αλγόριθμος του Dijkstra **δεν δουλεύει αν έχω αρνητικά βάρη**

Απόδειξη: Θα το δείξουμε με ένα αντιπαράδειγμα:




Στο ακόλουθο γράφημα αναζητούμε το συντομότερο μονοπάτι από την $v_1$ στην $v_6$

- Ο αλγόριθμος του Dijkstra θα επιστρέψει το v1-v3-v5-v6 με βάρος -3
- Το συντομότερο μονοπάτι είναι το v1-v2-v4-v6 με βάρος -8

Άρα δεν υπολογίζει το συντομότερο μονοπάτι όταν έχω αρνητικά βάρη.



# Β. Θεωρία

## 3. Παρατηρήσεις στον αλγόριθμο του Dijkstra

### 3. Ιδιότητες Συντομότερων Μονοπατιών

Οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν για τα συντομότερα μονοπάτια:

1. Αν **προσθέσουμε** σε κάθε ακμή του γραφήματος το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος το συντομότερο μονοπάτι **δεν είναι απαραίτητο ότι διατηρείται**! (βλέπε Εφαρμογή1)
2. Αν **πολλαπλασιάσουμε** κάθε ακμή του γραφήματος με το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το συντομότερο μονοπάτι **διατηρείται**! (βλέπε Εφαρμογή2)
3. Κάθε υπο-μονοπάτι ενός βέλτιστου μονοπατιού είναι το ίδιο βέλτιστο! (βλέπε Εφαρμογή 3)



# Γ. Λυμένες Ασκήσεις

## Ασκηση 1

Έστω συνδεόμενο απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$.

α) Έστω ότι όλες οι ακμές του $G$ έχουν μήκος 1. Θεωρούμε συντομότερο μονοπάτι $p = s, u_1, \ldots, u_k, t$, $k \geq 1$, μεταξύ δυο κορυφών $s$ και $t$ που δεν συνδέονται με ακμή. Να δείξετε ότι οι μόνες ακμές μεταξύ κορυφών του συνόλου $V_p = \{s, u_1, \ldots, u_k, t\}$ είναι οι ακμές του μονοπατιού $p$.

β) Να δείξετε ότι αν κάθε επαγόμενο υπογράφημα του $G$ έχει πλήθος ακμών διαφορετικό του 2, τότε το $G$ είναι πλήρες. ***Υπόδειξη****: Αν το $G$ δεν είναι πλήρες, περιέχει κορυφές $s$, $t$ που δεν συνδέονται με ακμή.*

ΛΥΣΗ:

α) Για διευκόλυνση, ας ονομάσουμε τις κορυφές $s$ και $t$, $u_0$ και $u_{k+1}$ αντίστοιχα. Αν μεταξύ των κορυφών του συνόλου $V_p$ υπάρχει ακμή που δεν ανήκει στο μονοπάτι $p$, έστω μεταξύ των κορυφών $u_i$ και $u_j$, όπου $0 \leq i \leq k$-1 και $i$+2 $\leq j \leq k$+1, τότε το μονοπάτι

$$p' = s, u_1, \ldots, u_i, u_j, \ldots, u_k, t$$

συνδέει τις κορυφές $s$ και $t$ και είναι συντομότερο του $p$, το οποίο είναι άτοπο.

# Γ. Λυμένες Ασκήσεις
## Ασκηση 1

β) Ας υποθέσουμε ότι κάθε επαγόμενο υπογράφημα του $G$ έχει πλήθος ακμών διαφορετικό του 2. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι το $G$ δεν είναι πλήρες. Τότε το $G$ περιέχει κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή. Έστω $s$, $t$ δύο τέτοιες κορυφές. Θεωρούμε το συντομότερο μονοπάτι $p = s, u_1, \ldots, u_k, t$, $k \geq 1$, μεταξύ των κορυφών $s$ και $t$. Το επαγόμενο υπογράφημα που ορίζεται από τις κορυφές $\{s, u_1, u_2\}$ είναι το μονοπάτι $s, u_1, u_2$ καθώς οι κορυφές $s$, $u_2$ δε συνδέονται με ακμή λόγω του (α). Έτσι καταλήξαμε ότι το $G$ περιέχει επαγόμενο υπογράφημα με δυο ακμές, το οποίο είναι άτοπο.



# Γ. Λυμένες Ασκήσεις
## Ασκηση 2

Έστω συνδεόμενο γράφημα όπου κάθε ακμή έχει βάρος 1 και s μια οποιαδήποτε κορυφή του.
α) Δείξτε ότι αν p είναι ένα συντομότερο μονοπάτι από την s σε μια οποιαδήποτε κορυφή u το οποίο διέρχεται από μια άλλη κορυφή v, τότε το s-v τμήμα του p είναι ένα συντομότερο s - v μονοπάτι.
β) Δείξτε ότι υπάρχει τρόπος να βρούμε συντομότερα μονοπάτια από την s προς κάθε άλλη κορυφή του G, έτσι ώστε η ένωση όλων αυτών των μονοπατιών να είναι δένδρο.

ΛΥΣΗ:
α) Αν το s-v τμήμα του p δεν είναι ένα ελάχιστο s-v μονοπάτι τότε θα υπάρχει ένα άλλο μονοπάτι p' από την s στην v με μικρότερο βάρος από το s-v τμήμα του p. Τότε όμως το s-u μονοπάτι που φθάνει από την s στην v μέσω του p' και στην συνέχεια από την v στην u μέσω του p, είναι ένα s-u μονοπάτι με μικρότερο βάρος από το p, άτοπο. Παρατηρήστε ότι το ίδιο συμβαίνει ακόμα και αν το p' τέμνει το v-u τμήμα του p: φθάνουμε μέσω του p' στην πλησιέστερη προς την u κοινή κορυφή, παραλείποντας το υπόλοιπο τμήμα του προς την v (που είναι θετικό) και στη συνέχεια συνεχίζουμε μέσω του p.



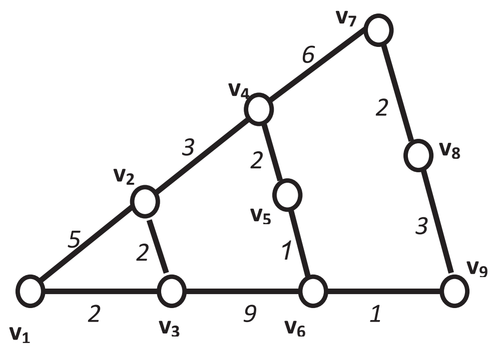
# Γ. Λυμένες Ασκήσεις
## Ασκηση 2

β) Έστω ότι έχουμε τα ελάχιστα μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ από την $s$ προς τις υπόλοιπες κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το ζητούμενο δένδρο προσθέτοντας και μετασχηματίζοντας ένα-ένα τα μονοπάτια.
Ξεκινάμε από τα $p_1$ και $p_2$. Αν η μόνη κοινή τους κορυφή είναι η $s$ τότε δεν έχουμε τίποτε να κάνουμε. Γενικά όμως τα $p_1$ και $p_2$ θα συναντώνται σε κάποια κοινά τμήματα, θα ξαναχωρίζουν κλπ. Έστω $u$ η τελευταία κοινή κορυφή τους. Δηλαδή το τμήμα $u$-$v_1$ του $p_1$ και το τμήμα $u$-$v_2$ του $p_2$ δεν ξανασυναντώνται πια. Σύμφωνα με το (α) όμως τα $s$-$u$ τμήματα και των δύο μονοπατιών είναι ελάχιστα $s$-$u$ μονοπάτια άρα έχουν ίδιο βάρος.
Κρατάμε λοιπόν μόνο το $s$-$u$ τμήμα του $p_1$ το οποίο μαζί με τα τμήματα $u$-$v_1$ του $p_1$ και $u$-$v_2$ του $p_2$ μας δίνει δένδρο. Γενικά, έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα δένδρο $T_k$ ελάχιστων μονοπατιών προς τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$ και θέλουμε να προσθέσουμε το $p_{k+1}$ που είναι το ελάχιστο μονοπάτι προς την $v_{k+1}$. Σύμφωνα με τον παραπάνω συλλογισμό μας, προσθέτουμε στο $T_k$ μόνο το τελευταίο τμήμα του $p_{k+1}$ από την τελευταία κοινή κορυφή του με το $T_k$ προς την $v_{k+1}$ και παίρνουμε το $T_{k+1}$.
Συνεχίζουμε μέχρι να προσθέσουμε όλα τα μονοπάτια.



# Δ. Ασκήσεις
## Άσκηση Κατανόησης 1

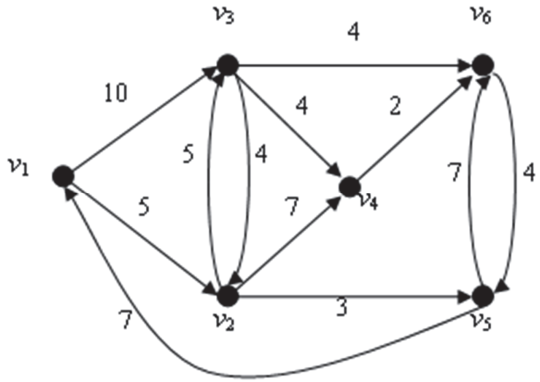
Θεωρήστε το παρακάτω γράφημα.




Να βρείτε το συντομότερο $v_1$ - $v_8$ μονοπάτι χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra.

# Δ. Ασκήσεις
## Άσκηση Κατανόησης 2

Θεωρήστε το παρακάτω γράφημα.

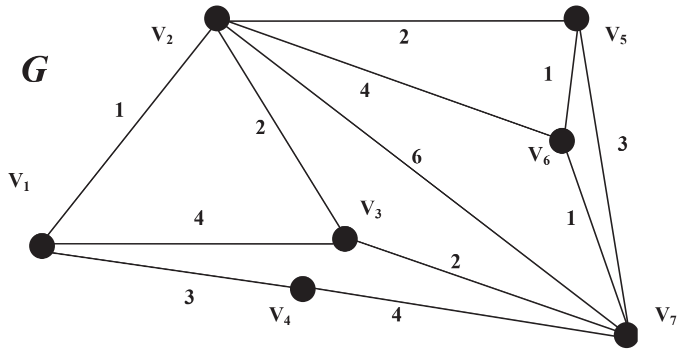



Να βρείτε το συντομότερο $v_1$ – $v_6$ μονοπάτι χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra.



# Δ. Ασκήσεις
## Άσκηση Κατανόησης 3

Θεωρήστε το παρακάτω γράφημα.

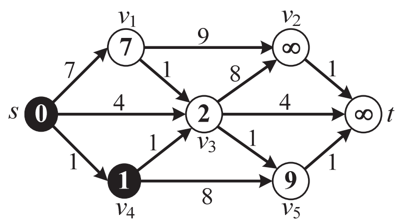



Να βρείτε το συντομότερο $v_1$ – $v_7$ μονοπάτι χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra.



# Δ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 1

Στο διπλανό σχήμα εικονίζονται οι ετικέτες των κορυφών (οι αριθμοί στους αντίστοιχους κύκλους) μετά τα πρώτα βήματα της εκτέλεσης του αλγόριθμου του Dijkstra για τον υπολογισμό του συντομότερου μονοπατιού από την κορυφή *s* στην κορυφή *t*. Σε αυτή τη φάση οι κορυφές *s* και $v_4$ (και μόνο αυτές) έχουν αποκτήσει μόνιμη ετικέτα και οι ετικέτες των γειτόνων τους έχουν ενημερωθεί. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με την εξέλιξη του αλγόριθμου είναι αληθείς και ποιες όχι;

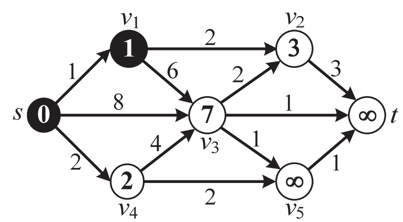



1. Όταν η *t* αποκτάει μόνιμη ετικέτα, η ετικέτα της $v_2$ είναι ∞.
2. Η $v_5$ αποκτάει μόνιμη ετικέτα πριν από την *t*.
3. Η μόνιμη ετικέτα της $v_5$ είναι 9.
4. Η $v_1$ αποκτάει μόνιμη ετικέτα πριν από την *t*.



# Δ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 2

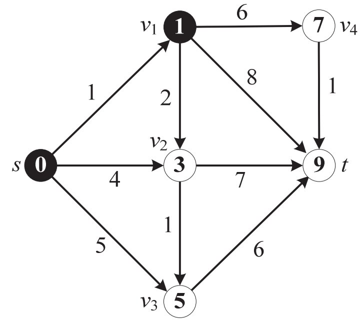
Στο διπλανό σχήμα εικονίζονται οι ετικέτες των κορυφών (οι αριθμοί στους αντίστοιχους κύκλους) μετά τα πρώτα βήματα της εκτέλεσης του αλγόριθμου του Dijkstra για τον υπολογισμό του συντομότερου μονοπατιού από την κορυφή *s* στην κορυφή *t*. Σε αυτή τη φάση οι κορυφές *s* και $v_1$ (και μόνον αυτές) έχουν αποκτήσει μόνιμη ετικέτα και οι ετικέτες των γειτόνων τους έχουν ενημερωθεί. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με την εξέλιξη του αλγόριθμου είναι αληθείς και ποιες όχι;




1. Η επόμενη κορυφή που θα αποκτήσει μόνιμη ετικέτα είναι η $v_4$.
2. Όταν η *t* αποκτάει μόνιμη ετικέτα, η ετικέτα της $v_3$ είναι 6.
3. Η $v_5$ αποκτά μόνιμη ετικέτα πριν η $v_2$ αποκτήσει μόνιμη ετικέτα.
4. Κάθε κορυφή αλλάζει ετικέτα το πολύ μία φορά κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου.

# Δ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 3

Στο διπλανό σχήμα εικονίζονται οι ετικέτες των κορυφών (οι αριθμοί στους αντίστοιχους κύκλους) μετά τα πρώτα βήματα της εκτέλεσης του αλγόριθμου του Dijkstra για τον υπολογισμό του συντομότερου μονοπατιού από την κορυφή *s* στην κορυφή *t*. Σε αυτό το βήμα, οι κορυφές *s* και $v_1$ (και μόνον αυτές) έχουν αποκτήσει μόνιμη ετικέτα και οι ετικέτες των γειτόνων τους έχουν ενημερωθεί. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με την εξέλιξη του αλγόριθμου είναι αληθείς;




1. Το συντομότερο $s – t$ μονοπάτι έχει μήκος 8.
2. Όταν η κορυφή *t* αποκτά μόνιμη ετικέτα, η ετικέτα της κορυφής $v_3$ είναι 5.
3. Σε κάποιο από τα επόμενα βήματα του αλγόριθμου, η ετικέτα της κορυφής *t* θα γίνει 10.
4. Ο αλγόριθμος πρώτα θα μονιμοποιήσει τις ετικέτες των κορυφών $v_2$ και $v_3$, και έπειτα θα μονιμοποιήσει την ετικέτα της κορυφής $v_4$.



# Δ. Ασκήσεις
## Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για την ακόλουθη πρόταση: «Σε ένα γράφημα με βάρη, το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών δεν μεταβάλλεται αν όλα τα βάρη πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο θετικό αριθμό»



# Δ. Ασκήσεις
## Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για την ακόλουθη πρόταση: «Σε ένα γράφημα με βάρη, το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών δεν μεταβάλλεται αν σε όλα τα βάρη προστεθεί ο ίδιος θετικός αριθμός»



# Δ. Ασκήσεις
## Εφαρμογή 3

Να δείξετε ότι σε ένα γράφημα με θετικά βάρη στις ακμές, για οποιοδήποτε μονοπάτι P ελαχίστου μήκους, οποιοδήποτε τμήμα του μονοπατιού P είναι επίσης ελαχίστου μήκους.