



# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 0: ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Μάθημα 0.3:  
Σχέσεις και Συναρτήσεις

Δημήτρης Ψούνης



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### A. Θεωρία

#### 1. Συναρτήσεις

1. Συνάρτηση «1-1»
2. Συνάρτηση «επί»
3. Συνάρτηση «αντιστοιχία»

#### 2. Μαθηματικές Σχέσεις

1. Ανακλαστική Σχέση
2. Συμμετρική Σχέση
3. Αντισυμμετρική Σχέση
4. Μεταβατική Σχέση
5. Σχέση Ισοδυναμίας

#### 3. Σχέση Συναρτήσεων με Μαθηματικές Σχέσεις

### B. Ασκήσεις



## B. Θεωρία

### 1. Συναρτήσεις

- Μία μαθηματική συνάρτηση  $f$  από το σύνολο  $A$  στο σύνολο  $B$  είναι ένας κανόνας που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του  $A$  ένα μοναδικό στοιχείο του  $B$ .

- Γράφουμε:

$$f: A \rightarrow B$$

για να δηλώσουμε ότι η  $f$  είναι μια συνάρτηση από το  $A$  στο  $B$ .

- Το σύνολο  $A$  λέγεται πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Για κάθε  $a \in A$  το  $f(a) \in B$  είναι το μοναδικό στοιχείο του  $B$  που αντιστοιχεί στο  $a$  και λέγεται εικόνα του  $a$ .
- Το σύνολο των εικόνων στο  $B$  λέγεται σύνολο τιμών της  $f$ .



## B. Θεωρία

### 1. Συναρτήσεις

Στα παρακάτω παραδείγματα θεωρούμε ότι  $A$  είναι το σύνολο των ανθρώπων:

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  με  $f(x) = x^2 + 1$
- $f: A \rightarrow \mathbb{N}$  με  $f(x) = \text{ηλικία του } x$
- $f: A \rightarrow A$  με  $f(x) = \text{πατέρας του } x$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x}$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x}$

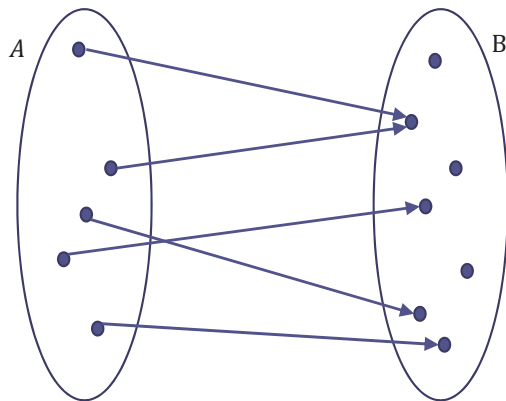
Σημαντικό! Σε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$

- Σε κάθε στοιχείο του  $A$  αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του  $B$ .
- Μπορεί περισσότερα από ένα στοιχεία του  $A$  να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του  $B$ .
- Μπορεί να υπάρχουν στοιχεία του  $B$  στα οποία δεν απεικονίζονται στοιχεία του  $A$ .

## Β. Θεωρία

### 1. Συναρτήσεις

Η συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  μπορεί να απεικονιστεί μέσω των αντίστοιχων συνόλων:



➤ Παράδειγμα Συνάρτησης  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  με  $f(x) = x^2$

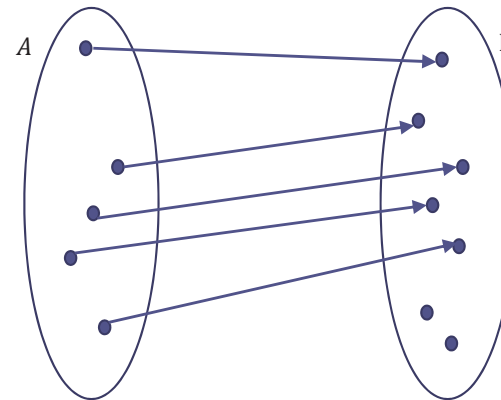
## Β. Θεωρία

### 1. Συναρτήσεις

#### 1. Συνάρτηση «1-1»

Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  θα είναι «1-1» αν για κάθε  $a, b \in A$  με  $a \neq b$  ισχύει  $f(a) \neq f(b)$ .

- Δηλαδή ποτέ δύο (ή περισσότερα) στοιχεία του A δεν δείχνουν στο ίδιο στοιχείο του B



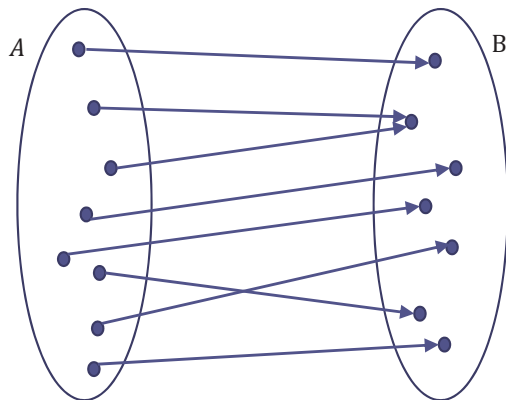
➤ Παράδειγμα Συνάρτησης 1-1 με  $f(x) = x^3$

## Β. Θεωρία

### 1. Συναρτήσεις

#### 2. Συνάρτηση «επί»

Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  θα είναι «επί» αν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A. Με άλλα λόγια πρέπει να καλύπτεται ΟΛΟ το B



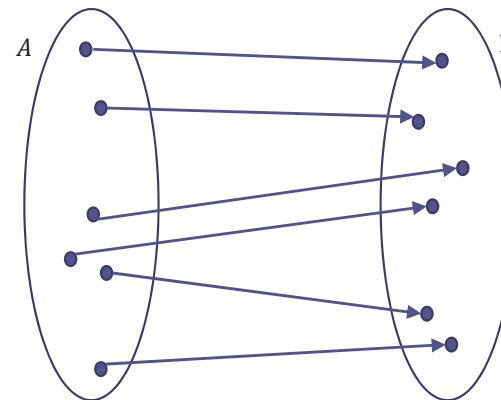
➤ Παράδειγμα Συνάρτησης επί  $f(x) = x, f(x) = 1 - x$

## Β. Θεωρία

### 1. Συναρτήσεις

#### 3. Συνάρτηση «αντιστοιχία»

Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$  θα είναι «αντιστοιχία» αν είναι 1-1 και επί.



➤ Παράδειγμα Συνάρτησης αντιστοιχία με  $f(x) = x$



## Β. Θεωρία

### 2. Μαθηματικές Σχέσεις

Μία διμελής σχέση  $P \subseteq A \times A$  (και τα δύο ορίσματα στο ίδιο σύνολο):

- Εφόσον για κάθε  $x \in A$  : ισχύει  $(x, x) \in P$ , θα χαρακτηρίζεται ανακλαστική.
- Εφόσον για κάθε  $x, y \in A$  : Όταν  $(x, y) \in P$  έπεται  $(y, x) \in P$  θα χαρακτηρίζεται συμμετρική.
- Εφόσον για κάθε  $x, y \in A$  : Όταν  $(x, y) \in P$  έπεται  $(y, x) \notin P$  θα χαρακτηρίζεται αντισυμμετρική.
- Εφόσον για κάθε  $x, y, z \in A$  : Όταν  $(x, y) \in P$  και  $(y, z) \in P$  έπεται  $(x, z) \in P$  θα χαρακτηρίζεται μεταβατική.
- Εφόσον είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, θα χαρακτηρίζεται ισοδυναμία.

## Β. Θεωρία

### 3. Σχέση Συναρτήσεων με Μαθηματικές Σχέσεις

Εκτός της ουσιαστικής διαφοράς που έχουμε δει ήδη:

- Η μαθηματική συνάρτηση δέχεται ορίσματα και επιστρέφει μία τιμή
  - Η μαθηματική σχέση δέχεται ορίσματα και επιστρέφει αληθές/ψευδές
- Μπορούμε να θεωρήσουμε και την απεικόνιση μιας συνάρτησης μέσω ενός συνόλου:
- Για παράδειγμα η συνάρτηση:  $f(x) = x^2$  ορισμένη ως:  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  μπορεί να ειδωθεί ως το σύνολο διατεταγμένων ζευγών με πρώτο στοιχείο την τιμή του  $x$  και δεύτερο την τιμή του  $f(x)$ . Άρα η παραπάνω συνάρτηση είναι το σύνολο:  $\{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$
  - Με τον συμβολισμό αυτό,
    - Το σύνολο ζευγών της συνάρτησης έχει την ιδιότητα ότι σε κάθε  $x$  αντιστοιχούμε ακριβώς ένα  $y$  για να κατασκευάσουμε το ζεύγος  $(x,y)$  της σχέσης.
    - Αντίθετα στην μαθηματική σχέση δεν τίθεται αυτός ο περιορισμός.
  - Υπό την έννοια αυτή η σχέση είναι η γενίκευση της συνάρτησης!

## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 1

- Δίνονται οι σχέσεις  $P, Q$  ως υποσύνολα του  $A \times A$  με  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 
  - $P = \{(1,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,3), (4,4)\}$
  - $Q = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3,3), (4,1)\}$
- 1. Εξετάστε αν οι παραπάνω σχέσεις είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, αντισυμμετρικές, μεταβατικές ή σχέσεις ισοδυναμίας.

## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 2

- Εξετάστε αν οι σχέσεις των φυσικών αριθμών:  $=, >, <, \leq, \geq$  είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, αντισυμμετρικές, μεταβατικές ή σχέσεις ισοδυναμίας.