ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-6
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Ο αριθμός των ακμών σε κάθε κλίκα n κορυφών (n≥3) είναι άρτιος αριθμός.

   Λάθος. Π.χ. η κλίκα 3 έχει 3 ακμές

2. Ο αριθμός των ακμών σε κάθε πλήρες διμερές γράφημα με τουλάχιστον n κορυφές (n≥5), είναι άρτιος αριθμός.

   Λάθος. Π.χ. το γράφημα $K_{1,5}$ (που έχει 6 κορυφές) έχει 5 ακμές

3. Ο αριθμός των υπογραφημάτων του K_{10} που είναι ισόμορφα με το K_3 είναι άρτιος αριθμός.

   Σωστό. Ο αριθμός των υπογραφημάτων είναι $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10*9*8*7!}{3!7!} = \frac{10*9*8}{3*2*1} = 5*3*8 = 2*(5*3*4)$ άρα είναι άρτιος αριθμός.

4. Ο αριθμός των υπογραφημάτων του K_{50} που είναι ισόμορφα με το $K_{2,2}$ είναι άρτιος αριθμός.

   Λάθος. Ο αριθμός των υπογραφημάτων είναι $\binom{50}{4}\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} = \frac{50!}{4!46!} * \frac{4!}{2!2!2!} = \frac{50*49*48*47*46!}{4!46!} * \frac{4!}{2!2!2!} = \frac{50*49*48*47}{2!2!2!} = 25*49*12*47 = 2*(25*49*6*47)$ άρα είναι άρτιος αριθμός.

(2) Ρίχνουμε δύο μη διακεκριμένα ζάρια

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Ως συνδυασμοί με επανάληψη οι τρόποι είναι: $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!}$

1. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων είναι όσες οι επιλογές, χωρίς επανάληψη, 2 αντικειμένων από 6

   Λάθος. Ως συνδυασμοί χωρίς επανάληψη οι τρόποι είναι: $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!}$

2. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων είναι όσες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + \cdots + x_6 = 2, x_i \geq 0, i = 1, \dots 6$

   Σωστό. Ως διανομή σε υποδοχές οι τρόποι είναι: $\binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!}$

3. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων που το άθροισμα τους είναι k είναι όσες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 = k, x_1, x_2 \geq 0$

   Λάθος. Προσοχή εδώ έχει αναδιατυπωθεί η εκφώνηση του κεντρικού ερωτήματος. Θέλουμε το άθροισμα των αποτελεσμάτων των ζαριών να είναι k. Από την μοντελοποίηση κατανοούμε ότι είναι λάθος αφού τα αποτελεσματα των δύο ζαριών είναι από 1 εώς 6 ενώ από την άλλη οι τιμές που παίρνουν οι δύο μεταβλητές είναι από 0 εώς k.

   Επίσης μπορούμε να δοκιμάσουμε τιμές. Π.χ. αν θέσουμε k=4, με απαρίθμηση τα διαφορετικά αποτελέσματα που το άθροισμα είναι 4 είναι 2 (οι ζαριές 2-2 και 1-3) ενώ οι λύσεις της εξίσωσης είναι όσες οι διανομές 4 αντικειμένων σε 2 υποδοχές, δηλαδή $\binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$.

4. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων που το άθροισμα τους είναι k είναι όσος ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$

   Λάθος. Αποτελεί λανθασμένη μοντελοποίηση του προβλήματος με γεννήτρια συνάρτηση. Μπορούμε να δούμε το πρόβλημα ως μια διανομή k ομοίων αντικειμένων (τα αποτελέσματα των ζαριών ως μονάδες) σε 2 υποδοχές (τα ζάρια) όπου κάθε υποδοχή (Ζάρι) παίρνει από 1 εώς 6 μονάδες. Ωστόσο είναι λάθος γιατί οι υποδοχές είναι πάντα διαφορετικές ένω τα ζάρια είναι όμοια. [Σημείωση: Το συγκεκριμένο σωστό/λάθος είναι το μοναδικό που έχει απαντηθεί με λάθος τρόπο από το ΕΑΠ στις ενδεικτικές λύσεις της Α’ εξεταστικής του 2010]

(3) Το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 6 που μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Α και Β ώστε κάθε σύμβολο να εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά είναι ίσο με:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 6 που δεν έχουν Α είναι 1 (περιέχει μόνο Β)
Το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 6 που δεν έχουν Β είναι 1 (περιέχει μόνο Α). Όλες οι συμβολοσειρες που περιέχουν μόνο Α και Β είναι 2^6. Άρα οι συμβολοσειρες που περιέχουν τουλάχιστον ένα Α και ένα Β είναι: 2^6-2

1. Το συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^6}{6!}\right)^2$

Σωστό. Χρησιμοποιείται εκθετική γεννήτρια διότι έχουμε πρόβλημα διατάξεων. Έχουμε δύο απαριθμητές, έναν για τα Α και έναν για τα Β. Ο απαριθμητής είναι $x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}$ που συμβολίζει την επιλογή του αντίστοιχου γράμματος από 1 εώς 6 φορές. Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του όρου $\frac{x^6}{6!}$ όσες και οι θέσεις της διάταξης.

2. Το συντελεστή του $\frac{x^4}{4!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^5}{5!}\right)^2$

Λάθος. Η παραπάνω μοντελοποίηση αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα διάταξης σε 4 θέσεις των γραμμάτων Α και Β με κάθε γράμμα να μπορεί να επιλεγεί 0...5 φορές. Οι διαφορετικές τέτοιες διατάξεις είναι 2^4

3. Τα διαφορετικά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν αν ρίξουμε ταυτόχρονα δύο διακεκριμένα ζάρια.

Λάθος. Οι διαφορετικές ζαριές δύο διακεκριμένων ζαριών είναι 6^2 ως διατάξεις με επανάληψη

4. Τους τρόπους τοποθέτησης 6 διακεκριμένων βιβλίων σε 2 διακεκριμένα ράφια ώστε σε κάθε ράφι να τοποθετηθεί τουλάχιστον ένα βιβλίο, χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι και με την υπόθεση ότι κάθε ράφι μπορεί να χωρέσει και τα 6 βιβλία.

Σωστό. Οι τρόποι τοποθέτησης όλων των βιβλίων στο 1^o ράφι είναι 1.
Οι τρόποι τοποθέτησης όλων των βιβλίων στο 2^o ράφι είναι 1.
Όλοι οι τρόποι τοποθέτησης των βιβλίων είναι 2^6 ως διανομή 6 διαφορετικών σε 2 υποδοχές χωρίς σειρά στις υποδοχές.Άρα οι τρόποι που κάθε ράδι έχει τουλάχιστον ένα βιβλίο είναι 2^6-2

(4) Έστω $T = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ ένα αντιφατικό σύνολο προτασιακών τύπων.

1. Για κάθε προτασιακό τύπο ψ, ισχύει ότι $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$.

Σωστό. Το Τ είναι αντιφατικό συνεπώς κάθε δήλωση της μορφής: Ψ |-... είναι σωστή.

2. $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}\} \vdash \neg\varphi_n$

Σωστό. Αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος απαγωγής σε άτοπο.

3. Ο προτασιακός τύπος $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n)$ είναι ταυτολογία.

Σωστό. Αφού το σύνολο τύπων $T = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ ο τύπος: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n$ είναι αντίφαση, συνεπώς ο τύπος: $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n)$ είναι ταυτολογία

4. Για κάθε προτασιακό τύπο ψ, το $T \cup \{ \psi \}$ είναι αντιφατικό

Σωστό. Αφού το σύνολο τύπων $T = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ ο τύπος: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n$ είναι αντίφαση, συνεπώς ο τύπος: $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n)$ είναι ταυτολογία

(5) Θεωρούμε τις προτάσεις $\varphi \equiv \neg\forall x \exists y (x \neq y \wedge \neg P(x,y))$ *και* $\psi \equiv \exists x \forall y (x \neq y \to P(x,y))$.

1. Οι προτάσεις φ και ψ είναι λογικά ισοδύναμες.

Σωστό. Εφαρμόζουμε νόμους προτασιακής-κατηγορηματικής λογικής για να πάμε από τον τύπο φ στον τύπο ψ. Διαισθητικά κάνουμε αυτήν την μετατροπή έτσι ώστε να είναι και οι δύο σε ποσοδεικτική μορφή και να είναι πιο εύκολα συγκρίσιμοι.

$\neg\forall x \exists y [x \neq y \wedge \neg P(x,y)]$ (Εφαρμόζω νόμο αρνησης ποσοδείκτη)
$\exists x \neg\exists y [x \neq y \wedge \neg P(x,y)]$ (Εφαρμόζω νόμο αρνησης ποσοδείκτη)
$\exists x \forall y \neg[x \neq y \wedge \neg P(x,y)]$ (Εφαρμόζω νόμο άρνησης συνεπαγωγής)
$\exists x \forall y \neg\neg[x \neq y \to P(x,y)]$ (Εφαρμόζω νόμο διπλής άρνησης)
$\exists x \forall y [x \neq y \to P(x,y)]$

2. Η πρόταση φ είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.

Λάθος. Δεν είναι σε κανονική ποσοδεικτικη μορφή, αφού έχουμε την άρνηση μπροστά από τους ποσοδείκτες.

3. Η πρόταση ψ είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.

Σωστό. Οι ποσοδείκτες είναι μπροστά και δεσμεύουν όλην την πρόταση.

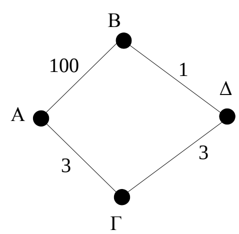
4. Η πρόταση φ αληθεύει στους φυσικούς, αν το $P(x, y)$ δηλώνει ότι «ο x είναι μικρότερος του y».

Σωστό. Μεταφράζω την ισοδύναμη πρόταση φ που είναι πιο εύκολη: «Υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος από όλους τους υπόλοιπους φυσικούς» και αληθεύει για x=0.

(6) Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Σε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές για όλα τα ζευγάρια κορυφών s,t η ακμή ελαχίστου βάρους εμφανίζεται στο συντομότερο s-t μονοπάτι.

   Λάθος. Στο ακόλουθο γράφημα η ακμή ελαχίστου βάρους (που είναι 1) δεν περιλαμβάνεται στο ελάχιστο μονοπάτι από την Α στην Δ που είναι το Α-Γ-Δ



2. Σε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές η ακμή ελαχίστου βάρους εμφανίζεται σε κάθε ελάχιστο συνδετικό δένδρο.

   Σωστό. Θεωρώντας την εκτέλεση του αλγορίθμου Prim όταν η ακμή ελαχίστου βάρους γίνει υποψήφια προς ένταξη στο ελάχιστο συνδετικο δένδρο θα επιλεγεί σίγουρα διότι ο αλγόριθμος επιλέγει στο επαναληπτικό του βήμα την ακμή ελαχίστου βάρους από τις υποψήφιες.

3. Υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 14 κορυφές.

   Λάθος. Οι ακμές ενός αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος είναι 4k, ή 4k+1 όπου k είναι φυσικός.

4. Ένα απλό επίπεδο 4-κανονικό γράφημα με 14 ακμές έχει 9 όψεις.

   Σωστό. Αφού είναι 4-κανονικό, ισχύει ότι m=4n/2 άρα m=2n άρα n=7. Κατασκευαστικά παρατηρούμε ότι το γράφημα είναι συνδεόμενο (αλλιώς δεν είναι 4 κανονικό) συνεπώς από τον τύπο του Euler έχω o=m-n+2=14-7+2=9.

(7) Για τις ερωτήσεις 1-3 θεωρήστε τον γράφο $K_{n,m}$ με κρυφές των συνόλων ανεξαρτησίας $\{v_1,..,v_n\}$, $\{u_1,\ldots,u_m\}$ αντίστοιχα και $1\leq n<m$. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1. Είναι δυνατόν να διαγράψουμε $(n-1)(m-1)$ ακμές έτσι ώστε ο γράφος που απομένει να είναι συνδετικό δένδρο του $K_{n,m}$.

   Σωστό. Σβήνουμε όλες τις ακμές που συνδέουν τις κορυφές $\{v_2,..,v_n\}$, $\{u_2,\ldots,u_m\}$ άρα αφαιρούνται (n-1)(m-1) ακμές το γράφημα που απομένει είναι συνδετικό δένδρο, αφού η v1 συνδεεται με όλες τις κορυφές $\{u_1,\ldots,u_m\}$ και η v2 συνδέεται με τις κορυφές $\{u_1,\ldots,u_m\}$

2. Η κατά-πλάτος διάσχιση του δέντρου ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος 3 (το βάθος της v_1 είναι 0).

   Λάθος. Το βάθος(=υψος του δένδρου) είναι 2

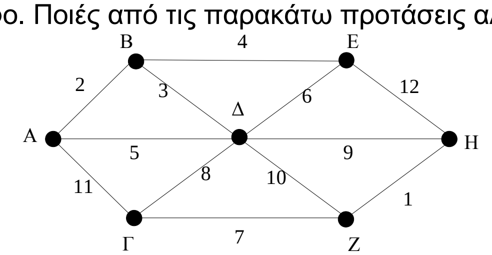
3. Η κατά-βάθος διάσχιση του δέντρου ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος $2n$-1 (το βάθος της v_1 είναι 0).

   Σωστό. Το δένδρο της κατά βάθος θα έναλάσσει τις κορυφές των δύο μεριδίων κορυφών (οι έξτρα κορυφές του 2^{ου} μεριδίου θα μπουν σαν παιδιά της τελευταίας κορυφής του 1^{ου} μεριδίου)

4. Σε ένα συνδεδεμένο γράφο G μια ακμή που το ένα άκρο της είναι μια κορυφή βαθμού ένα, υπάρχει σε κάθε συνδετικό δένδρο του G.

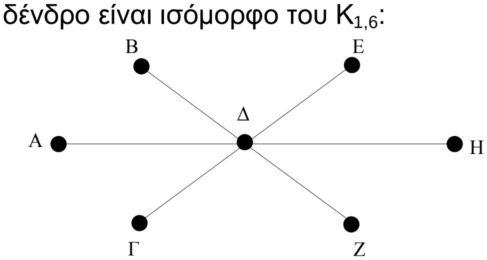
   Σωστό. Διότι η ακμή που προσπίπτει στην κορυφή βαθμού 1 είναι γέφυρα και πρέπει να υπάρχει σε κάθε συνδετικό δένδρο. Αν δεν υπήρχε, τότε το δένδρο δεν θα ήταν συνδεόμενο (άτοπο)).

(8) Θεωρήσατε τον ακόλουθο γράφο. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

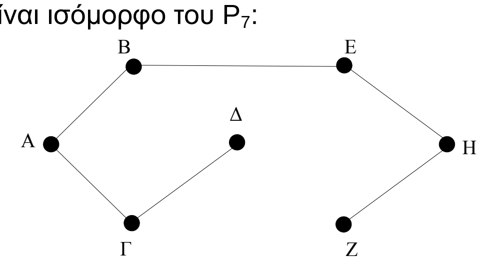


1. Δυο από τα συνδετικά δένδρα του γράφου είναι ο $K_{1,6}$ και ο P_7.

   Σωστό. Το ακόλουθο συνδετικό δένδρο είναι ισόμορφο του $K_{1,6}$:



   Το ακόλουθο συνδετικό δένδρο είναι ισόμορφο του P_7:

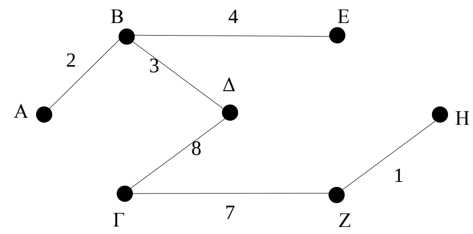


2. Έχει μόνο ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο.

   Σωστό. Διότι όλα τα βάρη είναι διαφορετικά

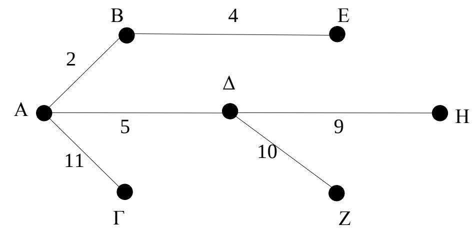
3. Ο αλγόριθμος του Prim με αρχική κορυφή την A θα κατασκευάσει ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο μία από τις ακμές του οποίου θα είναι η (Δ, E).

   Λάθος. Εκτελώντας τον αλγόριθμο του Prim, διαδοχικά στο Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο θα μπουν οι ακμές (Α,Β),(Β,Δ),(Β,Ε),(Γ,Δ),(Γ,Ζ),(Ζ,Η). Συνεπώς το ελάχιστο συνδετικό δένδρο που προκύπτει είναι το :



4. Ο αλγόριθμος του Dijkstra για την εύρεση των συντομότερων μονοπατιών από την κορυφή *Α* προς όλες τις άλλες θα κατασκευάσει το ίδιο δένδρο με τον αλγόριθμο του Prim με αρχική κορυφή την *Α*.

Λάθος. Εκτελώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra, διαδοχικά στο Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο θα μπουν οι ακμές (Α,Β),(Α,Δ),(Β,Ε),(Α,Γ),(Δ,Η), (Δ,Ζ)



Τα δύο συνδετικά δένδρα δεν είναι ίδια.

(9) Θεωρούμε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Ένα συνδεόμενο επίπεδο γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν έχει μία μόνο όψη.

   Σωστό. Αν έχει μόνο μία όψη, θα είναι υποχρεωτικά άκυκλο, άρα ως συνδεόμενο και άκυκλο θα είναι δένδρο.

2. Ένα επίπεδο γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν έχει *n* κορυφές και *n* – 1 ακμές

   Λάθος. Διότι μπορεί να μην είναι συνδεόμενο. Π.χ. το γράφημα που αποτελείται από 4 κορυφές εκ των οποίων οι 3 κατασκευάζουν ένα κυκλο 3 κορυφών και 1 απομονωμένη κορυφή.

3. Όλα τα δέντρα με τουλάχιστον 2 κορυφές είναι διχοτομίσιμα γραφήματα.

   Σωστό. Άμεσα από τα λήμματα των δένδρων.

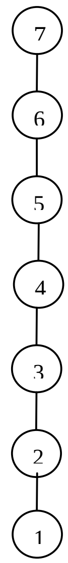
4. Όλα τα δέντρα με τουλάχιστον 2 κορυφές έχουν περιττό πλήθος φύλλων.

   Λάθος. Π.χ. το ριζωμένο δένδρο 3 κορυφών που η ρίζα έχει ακριβώς 2 παιδιά, έχει 2 φύλλα.

(10) Δίδεται το σύνολο Α με τους φυσικούς αριθμούς Α={1,2,3,4,5,6,7}

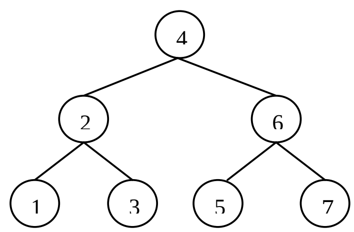
1. Αν η σειρά εισαγωγής σε ένα Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης είναι 7,6,5,4,3,2,1 τότε το δένδρο έχει το μέγιστο δυνατό ύψος

   Σωστό. Το δένδρο που προκύπτει θα έχει ύψος 6 που είναι το μέγιστο δυνατό (εκφυλισμένο σε αλυσίδα)



2. Υπάρχει σειρά εισαγωγής των στοιχείων του συνόλου ώστε το δένδρο που προκύπτει να έχει ύψος 2.

   Σωστό. Το ελάχιστο ύψος που μπορεί να προκύψει είναι αν το δένδρο είναι πλήρως ισοζυγισμένο. Το δένδρο που θα προκύψει είναι το:



   Συνεπώς μία σειρά εισαγωγής είναι η: 4,2,5,1,3,6,7.

3. Υπάρχει σειρά εισαγωγής των στοιχείων του συνόλου ώστε το δένδρο που προκύπτει να έχει ύψος 7.

   Λάθος. Από το ερώτημα 1, το δένδρο με το μέγιστο δυνατό ύψος, έχει ύψος=6.

4. Στο δυαδικό δένδρο αναζήτησης με το ελάχιστο δυνατό ύψος, η αναζήτηση του αριθμού 2, απαιτεί περισσότερες συγκρίσεις από την αναζήτηση του αριθμού 6.

   Λάθος. Απαιτούν ίσο πλήθος συγκρίσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

1) Μια εταιρία αναθέτει σε τρεις διακεκριμένους μηχανικούς την επίβλεψη 3n διακεκριμένων έργων. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η ανάθεση αν:

(i) δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των έργων που θα αναλάβει κάθε μηχανικός.

(ii) κάθε μηχανικός θα αναλάβει την επίβλεψη ακριβώς n έργων.

(iii) Ο 1ος μηχανικός θα αναλάβει 2n έργα.

2) Ένα φορτηγό περιέχει 100 συσκευασίες των 10kg και 100 συσκευασίες των 20kg ενός συγκεκριμένου προϊόντος. Το φορτηγό πρόκειται να εξυπηρετήσει τις ανάγκες δύο διακεκριμένων supermarket που είναι ακριβώς 1000kg και 2000kg αντίστοιχα. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα εξυπηρετηθούν τα δύο supermarket, αν από το πρώτο υπάρχει η απαίτηση να παραλάβει τουλάχιστον 20 συσκευασίες των 10kg και 10 συσκευασίες των 20kg, ενώ από το δεύτερο δεν τίθεται κανένας περιορισμός (Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή).

3) Σε μια αποθήκη που χωρίζεται σε τρία διακεκριμένα μέρη πρόκειται να τοποθετηθούν 100 λίτρα λάδι που θα αγοραστούν σε δοχεία των 5 και 10 λίτρων (τα δοχεία κάθε συσκευασίας είναι όμοια). Να σχηματίσετε γεννήτρια συνάρτηση και να υπολογίσετε το συντελεστή του όρου που δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα δοχεία, ώστε σε κάθε μέρος της αποθήκης να τοποθετηθούν τουλάχιστον δύο συσκευασίες των 5 λίτρων και τουλάχιστον δύο συσκευασίες των 10 λίτρων.

Λύση:

(Υποερώτημα 1.i)

Ως διανομή 3n διαφορετικών εργων χωρίς σειρά στις 3 υποδοχές οι τρόποι είναι: 3^{3n}

(Υποερώτημα 1.ii)

Ο 1ος μηχανικός επιλέγει τα έργα του με: $\binom{3n}{n}$ τρόπους

Ο 2ος μηχανικός επιλέγει τα έργα του με: $\binom{2n}{n}$ τρόπους

Ο 3ος μηχανικός επιλέγει τα έργα του με: $\binom{n}{n}$ τρόπους

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{3n}{n} \times \binom{2n}{n} \times \binom{n}{n}$

(Υποερώτημα 1.iii)

Ο 1ος μηχανικός επιλέγει τα έργα του με: $\binom{3n}{2n}$ τρόπους

Τα υπόλοιπα έργα διανέμονται με 2^n τρόπους ως διανομή n διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές.

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{3n}{2n} \times 2^n$

(Υποερώτημα 2)

Παρατηρώ ότι το φορτηγό περιέχει συσκευασίες συνολικού βάρους 100*10+100*20=3000 κιλών. Οι συνολικές ανάγκες των δύο supermarket είναι ακριβώς 3000 κιλά. Συνεπώς αν σχηματίσουμε γεννήτρια συνάρτηση για την επιλογή των συσκευασιών για το 1ο supermarket, η επιλογή των συσκευασιών για το 2ο supermarket γίνεται με 1 τρόπο (αφού θα πάρει τις συσκευασίες που απομένουν).

Χρησιμοποιούμε απλή γεννήτρια συνάρτηση αφού πρόκειται για πρόβλημα επιλογής:

- Απαριθμητής για τις συσκευασίες των 10kg: Η επιλογή μιας συσκευασίας των 10kg συμβάλλει κατά 10 στην επιλογή των 1000kg και πρέπει να επιλεχθούν τουλάχιστον 20 συσκευασίες συνεπώς ο απαριθμητής είναι: $x^{200} + x^{210} + \cdots + x^{1000}$
- Απαριθμητής για τις συσκευασίες των 20kg: Η επιλογή μιας συσκευασίας των 20kg συμβάλλει κατά 20 στην επιλογή των 1000kg και πρέπει να επιλεχθούν τουλάχιστον 10 συσκευασίες συνεπώς ο απαριθμητής είναι: $x^{200} + x^{220} + \cdots + x^{2000}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι $(x^{200}+x^{210}+\cdots+x^{1000})\cdot(x^{200}+x^{220}+\cdots+x^{2000})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης

(Υποερώτημα 3)
<u>Α΄τρόπος:</u> Έχω ένα πρόβλημα επιλογής αντικειμένων, άρα χρησιμοποιούμε απλή γεννήτρια. Γράφουμε έναν απαριθμητή για κάθε τύπο αντικειμένων που μπορεί να επιλεχθεί:

- Επιλογή για τα δοχεία 5 λίτρων για την 1η αποθήκη: Θα επιλεχθούν τουλάχιστον 2 δοχεία, άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{100}$
- Επιλογή για τα δοχεία 10 λίτρων για την 1η αποθήκη: Θα επιλεχθούν τουλάχιστον 2 δοχεία, άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{20}+x^{30}+\cdots+x^{100}$
- Επιλογή για τα δοχεία 5 λίτρων για την 2η αποθήκη: Θα επιλεχθούν τουλάχιστον 2 δοχεία, άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{100}$
- Επιλογή για τα δοχεία 10 λίτρων για την 2η αποθήκη: Θα επιλεχθούν τουλάχιστον 2 δοχεία, άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{20}+x^{30}+\cdots+x^{100}$
- Επιλογή για τα δοχεία 5 λίτρων για την 3η αποθήκη: Θα επιλεχθούν τουλάχιστον 2 δοχεία, άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{100}$
- Επιλογή για τα δοχεία 10 λίτρων για την 3η αποθήκη: Θα επιλεχθούν τουλάχιστον 2 δοχεία, άρα ο απαριθμητής είναι: $x^{20}+x^{30}+\cdots+x^{100}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{100})^3(x^{20}+x^{30}+\cdots+x^{100})^3$ και το ζητούμενο δίδεται από τον συντελεστή του x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

<u>Β΄τρόπος:</u> Δίνω πρώτα τις απαραίτητες ποσότητες (Δηλαδή 2 δοχεία 5 λίτρων και 2 δοχεία 10 λίτρων σε κάθε αποθήκη για να ικανοποιήσω τον περιορισμό). Έδωσα έτσι 30 λίτρα σε κάθε αποθήκη, άρα συνολικά 90 λίτρα. Έπειτα πρέπει να δώσω ακόμη 10 λίτρα. Έχω ένα πρόβλημα επιλογής αντικειμένων, άρα χρησιμοποιούμε απλή γεννήτρια. Γράφουμε έναν απαριθμητή για κάθε τύπο αντικειμένων που μπορεί να επιλεχθεί:

- Επιλογή για τα δοχεία 5 λίτρων για την 1η αποθήκη: Ο απαριθμητής είναι: $1+x^5+x^{10}$
- Επιλογή για τα δοχεία 10 λίτρων για την 1η αποθήκη: : Ο απαριθμητής είναι: $1+x^{10}$
- Επιλογή για τα δοχεία 5 λίτρων για την 2η αποθήκη: Ο απαριθμητής είναι: $1+x^5+x^{10}$
- Επιλογή για τα δοχεία 10 λίτρων για την 2η αποθήκη: : Ο απαριθμητής είναι: $1+x^{10}$,
- Επιλογή για τα δοχεία 5 λίτρων για την 3η αποθήκη: Ο απαριθμητής είναι: $1+x^5+x^{10}$
- Επιλογή για τα δοχεία 10 λίτρων για την 3η αποθήκη: : Ο απαριθμητής είναι: $1+x^{10}$,

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(1+x^5+x^{10})^3(1+x^{10})^3$ και το ζητούμενο δίδεται από τον συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

__Άσκηση 2 (Μονάδες 35)__

α) Έστω p_1, p_2, …, p_n προτασιακές μεταβλητές, με $n \geq 2$. Να διερευνήσετε αν ο παρακάτω προτασιακός τύπος είναι ταυτολογία:

$$\big((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n)\big) \to (p_1 \to p_n)$$

β) Να δείξετε ότι $\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi) \vdash (\neg\varphi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα, εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ δηλώνει ότι «*οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή*». Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

(i) Τύπο $\psi_1(x, y)$ που δηλώνει ότι κάθε κορυφή, διαφορετική από τις x και y, είναι γειτονική προς μία (ακριβώς) από τις x και y.

(ii) Τύπο $\psi_2(x, y)$ που δηλώνει ότι οι κορυφές x και y έχουν μοναδική κοινή γειτονική κορυφή.

(iii) Πρόταση που δηλώνει ότι το γράφημα δεν έχει απλό κύκλο μήκους 3.

δ) Να βρείτε ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα με 7 κορυφές και όχι περισσότερες από 12 ακμές για το οποίο, στην ερμηνεία του (γ), αληθεύει η παρακάτω πρόταση:

$$\forall x \forall y (x \neq y \to \exists z (z \neq x \wedge z \neq y \wedge P(x,z) \wedge P(z,y)))$$

Λύση:

(Υποερώτημα α)

Εξετάζουμε αν είναι δυνατόν να είναι ψευδής ο τύπος, δηλαδή να είναι αληθής η υπόθεσή του και ψευδές το συμπέρασμά του.

Η υπόθεση είναι αληθής, άρα (επειδή είναι σύζευξη υποτύπων) θα είναι επίσης αληθείς και οι τύποι:
p_1->p_2, p_2->p_3, …, p_{n-1}->p_n.

Το συμπέρασμά του είναι ψευδές μόνο όταν p_1=Α και p_n=Ψ.

Αν p_1=Α, τότε αφου p_1->p_2=Α, άρα p_2=Α,…, άρα αφου p_{n-1}->p_n=Α, άρα p_n=Α, συνεπώς p_1=p_2=…=p_n=Α. Άρα το συμπέρασμα δεν είναι ψευδές.

Αν p_n=Ψ, τότε αφου p_{n-1}->p_n=Ψ, άρα p_{n-1}=Ψ,…, άρα αφου p_1->p_2=Ψ, άρα p_1=Ψ, συνεπώς p_1=p_2=…=p_n=Ψ. Άρα το συμπέρασμα δεν είναι ψευδές.

Συνεπώς δεν υπάρχει τρόπος να είναι αληθής η υπόθεση και ψευδές το συμπέρασμα, άρα ο τύπος είναι ταυτολογία.

(Υποερώτημα β)

Αποδεικνύουμε τυπικά ότι:

$\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi) \vdash (\neg\varphi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$.

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$\{\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi), \neg\varphi \to \chi\} \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to \varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$\{\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi), \neg\varphi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \varphi$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$ Υπόθεση
2. $\neg\varphi \to \chi$ Υπόθεση
3. $\neg\varphi \to \psi$ Υπόθεση

4. $(\neg\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου $\varphi{:}\ \neg\varphi$, $\psi{:}\chi$, $\chi{:}\neg\psi$
5. $(\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ MP1,4
6. $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$ MP2,5
7. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$ ΑΣ3
8. $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ MP6,7
9. φ MP3,8

(Υποερώτημα γ.i)

$\psi_1(x,y) \equiv \forall z\big(z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow \big(\big(P(x,z) \vee P(y,z)\big) \wedge \neg\big(P(x,z) \wedge P(y,z)\big)\big)\big)$ ή ισοδύναμα

$\psi_1(x,y) \equiv \forall z\big(z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow \big(P(x,z) \leftrightarrow \neg P(y,z)\big)\big)$

(Υποερώτημα γ.ii)

$\psi_2(x,y) \equiv \exists z\big(P(x,z) \wedge P(y,z) \wedge \forall w\big(P(x,w) \wedge P(y,w) \rightarrow z = w\big)\big)$

(Υποερώτημα γ.iii)

$\neg\exists x\exists y\exists z\big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge P(x,z) \wedge P(z,y) \wedge P(y,x)\big)$

(Υποερώτημα δ)

Η πρόταση δηλώνει ότι κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών συνδέεται με απλό μονοπάτι μήκους 2. Αυτό αληθεύει π.χ. στο διπλανό γράφημα, που έχει 7 κορυφές και 9 ακμές.

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

Ένα δυαδικό δένδρο με ρίζα ονομάζεται ισορροπημένο όταν για κάθε εσωτερική κορυφή v :
i) αν η v έχει δύο παιδιά, τα ύψη των δύο υποδένδρων με ρίζες τα παιδιά της διαφέρουν το πολύ κατά 1.
ii) αν η v έχει μόνο ένα παιδί, αυτό είναι κατ' ανάγκη φύλλο.

1) Σχεδιάστε τα ισορροπημένα δυαδικά δένδρα *με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών* με ύψος από $h = 0$ έως $h = 4$. Επιβεβαιώστε ότι ο αριθμός των κορυφών n_h των ισορροπημένων δυαδικών δένδρων που κατασκευάσατε, επαληθεύει την ισότητα:

$$n_h = f_{h+3} - 1$$

όπου f_{h+3} είναι ο $h+3$ -οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci.

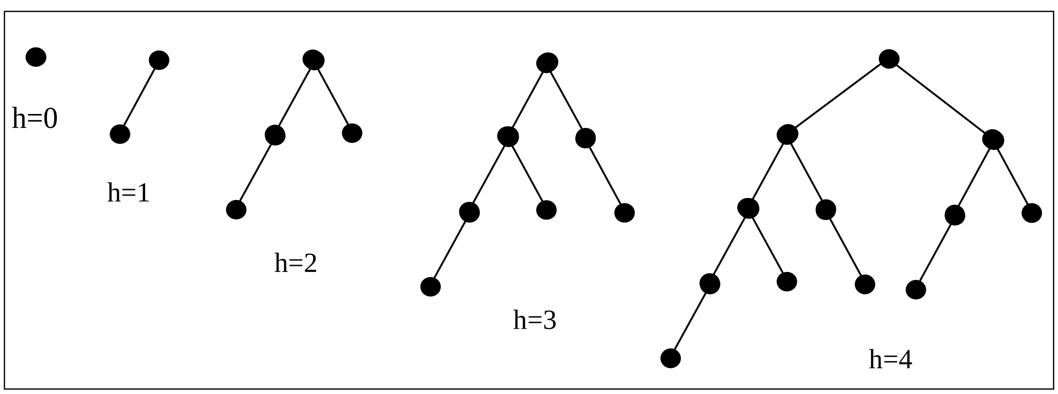
2) Δείξτε με επαγωγή στο ύψος h, ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει για τον ελάχιστο αριθμό κορυφών n_h κάθε ισορροπημένου δυαδικού δένδρου ύψους h.

Υπενθύμιση: Η ακολουθία Fibonacci έχει πρώτους όρους $f_1 = f_2 = 1$ και για κάθε φυσικό $k \geq 3$, ο k-οστός της όρος δίνεται από την αναδρομική σχέση $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$.

Λύση [Όπως απαντήθηκε από το ΕΑΠ. Αναλυτική Λύση στην Επαναληψη 09: Επιπεδότητα και Δένδρα]:

(Υποερώτημα 1)

Ένα δένδρο ύψους k με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών θα απαρτίζεται από την ρίζα του και τα δύο υποδένδρα της ρίζας του θα διαφέρουν στο ύψος κατά 1, ώστε να έχει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κορυφών. Κατά συνέπεια το ένα υποδένδρο θα έχει ύψος $k-1$ και το άλλο $k-2$, θα πρόκειται δε για δένδρα με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών για τα δεδομένα ύψη. Ειδικά για το δένδρο ύψους 1, έχουμε μόνο ένα παιδί στη ρίζα όπως προβλέπει το τμήμα (ii) του ορισμού. Τα δένδρα με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών για ύψη μέχρι 4, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρήστε ότι εφαρμόσαμε στην σχεδίαση τις παραπάνω σκέψεις: Ένα δένδρο ύψους k έχει σαν υποδένδρα της ρίζας τα δύο προηγούμενα δένδρα ύψους $k-1$ και $k-2$.



(Υποερώτημα 2)

Ο αριθμός των κορυφών των δένδρων καθώς και οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci μέχρι τον 7ο φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, ο οποίος επιβεβαιώνει την δοθείσα σχέση για τα ύψη ισορροπημένων δένδρων μέχρι $h = 4$.

h	0	1	2	3	4
n_h	1	2	4	7	12
f_{h+3}	2	3	5	8	13

2) Για την γενική απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο ύψος του δένδρου. Ο παραπάνω πίνακας δείχνει επίσης και τη βάση της επαγωγής. Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός κορυφών ενός ισορροπημένου δυαδικού δένδρου ύψους ίσου ή μικρότερου του $k-1$($k \geq 1$) πληροί την σχέση $n_k = f_{k+3} - 1$. Από την προηγούμενη παρατήρηση (ως προς το ότι τα δύο υποδένδρα της ρίζας ενός δένδρου με ύψος k είναι τα υποδένδρα με ελάχιστο αριθμό κορυφών ύψους $k-1$ και $k-2$), έχουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός κορυφών ενός ισορροπημένου δυαδικού δένδρου ύψους k είναι $n_k = 1 + n_{k-1} + n_{k-2}$ (και με την υπόθεση της επαγωγής) $n_k = 1 + (f_{k+2} - 1) + (f_{k+1} - 1) = f_{k+2} + f_{k+1} - 1$. Στη συνέχεια η σχέση $f_{k+3} = f_{k+2} + f_{k+1}$ δίνει το ζητούμενο.

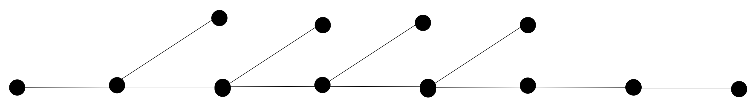
<u>Άσκηση 4</u> <u>(Μονάδες 20)</u>

Μία κάμπια είναι ένα δένδρο το οποίο περιέχει ένα μονοπάτι στο οποίο προσπίπτει τουλάχιστον μία κορυφή για κάθε ακμή του δένδρου.

1. Κατασκευάστε μία κάμπια 12 κορυφών, στην οποία το μέγιστο μονοπάτι έχει μήκος 7.
2. Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι σε κάθε κάμπια n κορυφών που το μέγιστο μονοπάτι της είναι 7, έχει n-6 φύλλα.

Λύση:

(Υποερώτημα α)



(Υποερώτημα β)

Δείχνουμε με επαγωγή ότι κάθε κάμπια n κορυφών που το μέγιστο μονοπάτι της είναι 7 έχει n-6 φύλλα.

- **Βάση Επαγωγής:** Δείχνουμε ότι ισχύει για n=8, δηλαδή κάθε κάμπια 8 κορυφών που το μέγιστο μονοπάτι της είναι 7 έχει 2 φύλλα.
  <u>Απόδειξη:</u> Η κάμπια 8 κορυφών με μέγιστο μονοπάτι 7 είναι η ακόλουθη:

  και έχει 2 φύλλα

- **Επαγωγική Υπόθεση:** Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=k, δηλαδή κάθε κάμπια k κορυφών που το μέγιστο μονοπάτι της είναι 7 έχει k-6 φύλλα.

- **Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε ότι ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι κάθε κάμπια k+1 κορυφών που το μέγιστο μονοπάτι της είναι 7 έχει (k+1)-6=k-5 φύλλα.
  <u>Απόδειξη.</u> Έστω μια κάμπια k κορυφών με μέγιστο μονοπάτι 7. Από την επαγωγική υπόθεση, έχει k-6 φύλλα. Για να κατασκευάσουμε κάμπια k+1 κορυφών προσθέτουμε στην κάμπια k κορυφών μία νέα κορυφή. Για να σεβαστούμε τον ορισμό, πρέπει να συνδέσουμε την κορυφή αυτή με μία από τις κορυφές του μονοπατιού. Δεν μπορούμε να την συνδέσουμε με τις δύο ακριανές κορυφές διότι τότε το μέγιστο μονοπάτι της κάμπιας θα είναι 8 και όχι 7. Επίσης δεν μπορεί να συνδέεται με κάποιο από τα φύλλα, διότι η ακμή αυτή δεν θα προσπίπτει σύμφωνα με τον ορισμό σε μία από τις κορυφές του μονοπατιού. Συνεπώς θα συνδέεται με μία από τις υπόλοιπες 6 κορυφές και θα είναι φύλλο. Συνεπώς το γράφημα θα έχει k-6 φύλλα (από την επαγωγική υπόθεση) συν την κορυφή που προσθέσαμε η οποία είναι επίσης φύλλο. Άρα θα έχει (k-6)+1=k-5 φύλλα.