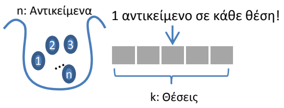
ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ



ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ:
- «επιλέγω αντικείμενα»
- «Η σειρά τοποθέτησης των αντικειμένων στις θέσεις **δεν έχει** σημασία»
- «Μη Διακεκριμένες Θέσεις»

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1) Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3) Επιλέγουμε k από αυτά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί το πολύ μία φορά)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Γνωστά Προβλήματα:
ΛΟΤΤΟ: Σ.Χ.Ε C(49,6)
ΧΑΡΤΙΑ: Σ.Χ.Ε C(52,5)
ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ: με k στοιχεία ενός συνόλου με n στοιχεία: C(n,k). Ισχύει επίσης για τα υποσύνολα:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1) Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3) Συμπληρώνουμε k θέσεις ώστε σε κάθε θέση να μπορεί να επαναληφθεί το ίδιο στοιχείο (στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές – από καμία έως όλες τις θέσεις)

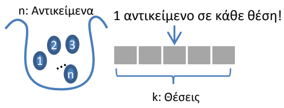
$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Γνωστά Προβλήματα:
ΖΑΡΙΑ: π.χ. 2 ζάρια:
Μη Διακεκριμένα: Σ.Μ.Ε C(6+2-1,2)=C(7,2)
Διακεκριμένα: Δ.Μ.Ε 6^2
ΝΤΟΜΙΝΟ: Σ.Μ.Ε C(7+2-1,2)=C(8,2)

Αριθμητικοί Υπολογισμοί:
$C(A,B) = \binom{A}{B} = \frac{A!}{B!(A-B)!}$ και ένας τύπος: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ www.psounis.gr



ΕΠΙΛΟΓΗ και ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

- **ΟΜΟΙΑ:** 1 τρόπος
- **ΟΜΑΔΕΣ ΟΜΟΙΩΝ:** Βάζουμε στον κουβά 1 από κάθε αντικείμενο και μοντελοποιούμε το πρόβλημα ως συνδυασμό με επανάληψη
- **ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ:** Μοντελοποιούμε το πρόβλημα
  - **Συνδυασμοί Χωρίς Επανάληψη**

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
1) Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3) Επιλέγουμε k από αυτά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί το πολύ μία φορά)
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

  - **Συνδυασμοί με Επανάληψη**

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
1) Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3) Συμπληρώνουμε k θέσεις ώστε σε κάθε θέση να μπορεί να επαναληφθεί το ίδιο στοιχείο (στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές – από καμία έως όλες τις θέσεις)
$$\binom{n+k=1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1: Επιλογή από Ομάδες Ομοίων

Έχω 5 πράσινους, 5 κόκκινους και 5 άσπρους βόλους. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 από αυτούς.

ΛΥΣΗ: Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως συνδυασμοί με επανάληψη με n=3 και k=4. Άρα οι τρόποι είναι: C(3+4-1,4)=C(6,4)=15 τρόποι.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Διαδοχικές Επιλογές ή Χωρισμός σε Ομάδες

Εχω 20 διαφορετικά παιχνίδια που θέλω να τα μοιράσω στα 3 ανίψια μου, ώστε το 1ο να πάρει 6, το 2ο να πάρει 9 και το 3ο να πάρει 5 παιχνίδια. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να γίνει ο χωρισμός;

ΛΥΣΗ:

Για το 1ο ανίψι έχω $\binom{20}{6}$ τρόπους. Για το 2ο ανίψι έχω $\binom{14}{9}$ τρόπους. Για το 3ο ανίψι έχω $\binom{5}{5}$ τρόπους. Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε:

$$\binom{20}{6} \cdot \binom{14}{9} \cdot \binom{5}{5}$$

Σε περίπτωση που η φύση των ομάδων είναι όμοια διαιρούμε με το παραγοντικό του πλήθους των ομάδων (η σειρά επιλογής των ομάδων δεν έχει σημασία).

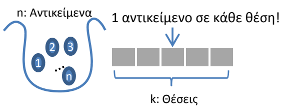
Π.χ: Η δασκάλα χωρίζει 9 παιδια σε ομάδες των τριών ατόμων ώστε
- Να κάνουν την ίδια εργασία: $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} / 3!$
- Να κάνουν διαφορετική εργασία: $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 3: Άλλοι Περιορισμοί

Διακρίνουμε περιπτώσεις (καν. Αθροίσματος) ή επιλύουμε σε φάσεις (καν.γινομένου).

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ www.psounis.gr



ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ:
- «Διατάσσω - βάζω σε σειρά αντικείμενα»
- «Η σειρά τοποθέτησης των αντικειμένων στις θέσεις **έχει** σημασία»
- «Διακεκριμένες Θέσεις»
- «Παύλες και Κανόνας Γινομένου»
- «Συμβολοσειρές – Λέξεις - Αριθμοί – Ακολουθίες»

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφ/κα ανά δύο).
3) Επιλέγουμε k από αυτά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί το πολύ μία φορά)

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφ/κα ανά δύο).
3) Τοποθετούμε ΚΑΙ ΤΑ n σε μια σειρά: (Τα διατάσσουμε ΌΛΑ)

$$n!$$

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφ/κά ανά δύο).
3) Συμπληρώνουμε k θέσεις ώστε σε κάθε θέση να μπορεί να επαναληφθεί το ίδιο στοιχείο (στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές)

$$n^k$$

ΠΡΟ-ΠΟ (αποτελέσματα 1Χ2, 14 αγώνες): Δ.Μ.Ε 3^{14}
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ (π.χ. 5x5 με στοιχεία 0 ή 1): ΔΜΕ: 2^{5x5}
ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ (π.χ. 5 κορυφών): ΔΜΕ: 2^{5x5}
ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΕΣ (π.χ. μήκους 5 του ελλ.αλφαβ.): Δ.Μ.Ε. 24^5
ΔΥΑΔΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΕΣ (πχ. μήκους 10): Δ.Μ.Ε. 2^{10}

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ

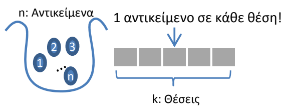
1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n αντικείμενα που χωρίζονται σε k ομάδες ομοίων αντικειμένων (την 1η ομάδα να έχει q_1 αντικείμενα, η 2η ομάδα έχει q_2 αντικείμενα .... η kη ομάδα έχει q_k αντικείμενα).
3) Διατάσσουμε ΌΛΑ τα αντικείμενα

$$\frac{n!}{q_1!\,q_2!\ldots q_k!} = \frac{(q_1+q_2+\cdots+q_k)!}{q_1!\,q_2!\ldots q_k!}$$

ΑΝΑΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΙ ΛΕΞΗΣ (π.χ. ΠΑΡΑΠΟΝΑ): $\frac{8!}{3!2!1!1!1!}$
ΔΥΑΔΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΕΣ με περ/μό (μήκους 10 με 3 άσσους): $\frac{10!}{3!7!}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ www.psounis.gr



ΔΙΑΤΑΞΗ και ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

- **ΟΜΟΙΑ:** 1 τρόπος
- **ΟΜΑΔΕΣ ΟΜΟΙΩΝ:**

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ
1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n αντικείμενα που χωρίζονται σε k ομάδες ομοίων αντικειμένων (την 1η ομάδα να έχει q_1 αντικείμενα, η 2η ομάδα έχει q_2 αντικείμενα .... η kη ομάδα έχει q_k αντικείμενα).
3) Διατάσσουμε ΌΛΑ τα αντικείμενα
$$\frac{n!}{q_1!\,q_2!\ldots q_k!} =$$

- **ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ:** Μοντελοποιούμε το πρόβλημα
  - **Διατάξεις Χωρίς Επανάληψη**

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
1) Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφ/κά ανά δύο).
3) Συμπληρώνουμε k θέσεις ώστε σε κάθε θέση να μπορεί να επαναληφθεί το ίδιο στοιχείο (στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές)
$$n^k$$

  - **Διατάξεις με Επανάληψη**

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφ/κα ανά δύο).
3) Επιλέγουμε k από αυτά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί το πολύ μία φορά)
$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  - **Μεταθέσεις**

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ
1) Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2) Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφ/κα ανά δύο).
3) Τοποθετούμε ΚΑΙ ΤΑ n σε μια σειρά: (Τα διατάσσουμε ΌΛΑ)
$$n!$$

ΑΣΚΗΣΗ 1: Αντικείμενα σε Σειρά

Μετράω τους τρόπους που τα αντικείμενα είναι σε σειρά. Διατάσσω τα υπόλοιπα στις υπόλοιπες θέσεις. Κανόνας γινομένου

ΑΣΚΗΣΗ 2: Αντικείμενα όχι σε Σειρά

Βασικός συλλογισμός: **«Ζητούμενο = Όλα – Αντίθετο από το ζητούμενο»**

Αν 2 αντικείμενα όχι σε σειρά: ΟΛΕΣ ΟΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ μείον ΑΝΤΙΚ/ΝΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Αν >2 αντικείμενα όχι σε σειρά: Εμφύτευση Υποδοχών

ΑΣΚΗΣΗ 3: Διατάξεις με τουλάχιστον ένα αντικείμενο ενός τύπου

Βασικός συλλογισμός: **«Ζητούμενο = Όλα – Αντίθετο από το ζητούμενο»**

ΟΛΕΣ ΟΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ μείον ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΑΝΕΝΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Σημαντικό: όχι (>=1) = κανένα

ΑΣΚΗΣΗ 4: Κυκλικές Διατάξεις

Διατάσσω σε μία σειρά. Διαιρώ με το πλήθος των θέσεων (εφόσον κινούμενοι π.χ. δεξιόστροφα γύρω από το τραπέζι συναντάμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα)

π.χ. κυκλικό τραπέζι n θέσεων για n άτομα όπου θεωρούνται όμοιες δύο διατάξεις, αν κινούμενοι γύρω από το τραπέζι συναντάμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα: Διατάξεις σε σειρά n! Και διαιρώ με n: n!/n = (n-1)!

ΑΣΚΗΣΗ 5: Άλλοι Περιορισμοί

Διακρίνουμε περιπτώσεις (καν. Αθροίσματος) ή επιλύουμε σε φάσεις (καν.γινομένου).

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΣΕ ΥΠΟΔΟΧΕΣ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ www.psounis.gr

«Διανέμω (μοιράζω) αντικείμενα»

Πολλά αντικείμενα σε κάθε υποδοχή!

ΔΙΑΝΟΜΕΣ και ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Σημαντικό: Κάθε υποδοχή μπορεί να πάρει από κανένα έως όλα τα αντικείμενα. Διανέμω ΌΛΑ τα αντικείμενα

ΟΜΟΙΑ: [όλα τα αντικείμενα όμοια μεταξύ τους]

$$\binom{n+m-1}{n} \quad \textit{«πόσα»}$$

ΟΜΑΔΕΣ ΟΜΟΙΩΝ: [βλέπε δίπλα]

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ: [όλα τα αντικείμενα διαφ/κα μεταξύ τους]
- ΔΙΑΝΟΜΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΧΩΡΙΣ ΣΕΙΡΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΔΟΧΗ
$$m^n \quad \textit{«πόσα+ποια»}$$
- ΔΙΑΝΟΜΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΜΕ ΣΕΙΡΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΔΟΧΗ
$$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} \quad \textit{«πόσα+ποια+σειρά»}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ: Είναι διανομή ομοίων. Μοιράζουμε τις όμοιες μονάδες στις μεταβλητές

Π.χ. η εξίσωση: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ έχει $\binom{n+m-1}{n}$ ακέραιες λύσεις όπου οι μεταβλητές $x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,\ldots,m$.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Διανομή Ομάδων Ομοίων

Μοιράζω ξεχωριστά κάθε ομάδα ως διανομή ομοίων και έπειτα κανόνας γινομένου.

Π.χ. 3 άσπρες και 5 μπλέ μπάλες σε 4 υποδοχές.

Άσπρες: Διανομή Ομοίων: $\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$

Μπλε: Διανομή Ομοίων: $\binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}$

ΚΓ: $\binom{6}{3}\binom{8}{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Διανομή υπό περιορισμό

Σπάσιμο του προβλήματος σε υποπροβλήματα και έπειτα συνδυασμός των λύσεων είτε με τον κανόνα του αθροίσματος είτε με τον κανόνα του γινομένου

ΑΣΚΗΣΗ 3: Διατάξεις με Εμφύτευση Υποδοχών

μας ζητείται να έχουμε περισσότερα από 2 αντικείμενα που δεν είναι σε σειρά. Τότε:
Α) Τοποθετούμε τα «προβληματικά» αντικείμενα, έστω τα Α, σε σειρά.
Β) Βάζουμε μια υποδοχή ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικά Α (συχνά και στην αρχή και στο τέλος της σειράς)
Γ) Τοποθετούμε μία θέση σε κάθε υποδοχή για την ικανοποίηση των περιορισμών
Δ) Μοιράζουμε τις υπόλοιπες θέσεις στις υποδοχές ως διανομή ομοίων
Ε) Διατάσσουμε τα «άλλα» αντικείμενα, έστω τα Β, στις θέσεις.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ www.psounis.gr

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ
Έστω μια **επιλογή** (γεγονός) Α που γίνεται με **m τρόπους** και μια **επιλογή** (γεγονός) Β που γίνεται με **n τρόπους**
Τότε
οι τρόποι που μπορεί να γίνει **ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ** είναι **m+n**

Α+Β

- Διακρίνουμε **διαφορετικές περιπτώσεις** για αυτό που μετράμε
- Συμβαίνει **ή το Α ή το Β** στην τελική λύση
- Τα Α και Β είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**

Έχουμε στην βιβλιοθήκη μας 3 βιβλία Φυσικής και 4 βιβλία Μαθηματικών. Θέλουμε να επιλέξουμε δύο βιβλία του ίδιου αντικειμένου. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;
ΛΥΣΗ:
Διακρίνουμε **τις περιπτώσεις**:
- Να επιλέξουμε βιβλία φυσικής: Με καταμέτρηση οι τρόποι είναι: $Φ_1Φ_2, Φ_1Φ_3, Φ_2Φ_3$, άρα 3 τρόποι.
- Να επιλέξουμε βιβλία μαθηματικών: Με καταμέτρηση οι τρόποι είναι: $M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, M_2M_3, M_2M_4, M_3M_4$, άρα 6 τρόποι

Άρα από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι:
3 + 6=9

ΚΑΝΟΝΑΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ
Έστω μια επιλογή (γεγονός) Α που γίνεται με m τρόπους και μια επιλογή (γεγονός) Β που γίνεται με n τρόπους
Τότε
οι τρόποι που μπορεί να γίνουν ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ είναι m•n

Α • Β

- Κατασκευάζουμε τη λύση σε Φάσεις (Στάδια)
- Ερώτηση: Συμβαίνει **και το Α και το Β** στην τελική λύση
- Η λύση αποτελείται από ανεξάρτητα μέρη

Πόσοι 3ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που ξεκινούν με 2, το 2ο ψηφίο τους είναι ζυγός (άρτιος), το 3ο ψηφίο είναι μονός (περιττός)
ΛΥΣΗ:
- Για το 1ο ψηφίο έχουμε 1 τρόπο (υποχρεωτικά το 2)
- Για το 2ο ψηφίο έχουμε 5 τρόπους (με καταμέτρηση θα είναι 0,2,4,6 ή 8)
- Για το 3ο ψηφίο έχουμε 5 τρόπους (με καταμέτρηση θα είναι 1,3,5,7 ή 9)

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι
1 • 5 • 5 = 25

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ – ΔΙΑΝ. ΟΜΟΙΩΝ

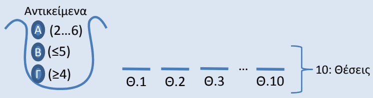
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ(απλή γεννήτρια)

Απαριθμητής: Για κάθε τύπο αντικειμένου

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα μπορούμε να επιλέξουμε από κάθε τύπο αντικειμένου.

Συντελεστής: του όρου x^k όπου k: τα αντικ/να που επιλέγω.

Παράδειγμα:



Επιλέγουμε 10 αντικείμενα από αντικείμενα Α,Β,Γ με τους περιορισμούς να επιλεγούν 2 έως 6 από τα Α, το πολύ 5 από τα Β και τουλάχιστον 4 από τα Γ (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Λύση:

Χρησιμοποιώ **απλή** γεννήτρια (πρόβλημα επιλογής)

- Απαριθμητής για τα A: $\boldsymbol{x^2+x^3+\cdots+x^6}$
- Απαριθμητής για τα B: $\boldsymbol{1+x+x^2+\cdots+x^5}$
- Απαριθμητής για τα Γ: $\boldsymbol{x^4+x^5+\cdots+x^{10}}$

Η γεννήτρια είναι:

$$(x^2+x^3+\cdots+x^6)(1+x+x^2+\cdots+x^5)(x^4+x^5+\cdots+x^{10})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου $\boldsymbol{x^{10}}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

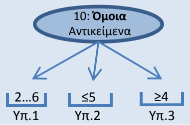
ΔΙΑΝΟΜΗ ΟΜΟΙΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ (απλή γεννήτρια)

Απαριθμητής: Για κάθε υποδοχή.

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιτρέπεται να έχει η υποδοχή.

Συντελεστής: του όρου x^k όπου k: τα αντικ/να που μοιράζω.

Παράδειγμα:



Μοιράζουμε 10 όμοια αντικείμενα σε 3 υποδοχές ώστε η 1η να πάρει 2 έως 6 αντικείμενα, η 2η να πάρει το πολύ 5 αντικείμενα και η 3η τουλάχιστον 4 αντικείμενα (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Λύση:

Χρησιμοποιώ **απλή** γεννήτρια (πρόβλημα διανομής ομοίων)

- Απαριθμητής για την Υπ.1: $\boldsymbol{x^2+x^3+\cdots+x^6}$
- Απαριθμητής για την Υπ.2: $\boldsymbol{1+x+x^2+\cdots+x^5}$
- Απαριθμητής για την Υπ.3: $\boldsymbol{x^4+x^5+\cdots+x^{10}}$

Η γεννήτρια είναι:

$$(x^2+x^3+\cdots+x^6)(1+x+x^2+\cdots+x^5)(x^4+x^5+\cdots+x^{10})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου $\boldsymbol{x^{10}}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ – ΔΙΑΝ. ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ

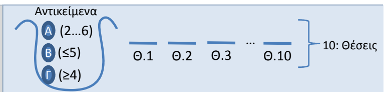
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ www.psounis.gr

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ(εκθετική γεννήτρια)

Απαριθμητής: Για κάθε τύπο αντικειμένου

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα μπορούμε να επιλέξουμε από κάθε τύπο αντικειμένου.

Συντελεστής: του όρου $\frac{x^k}{k!}$ όπου k: τα αντικ/να που διατάσσω(θέσεις).



ΓΕΝΝ: $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}\right)$

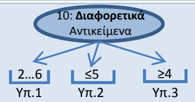
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ: του όρου $\frac{x^{10}}{10!}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

ΔΙΑΝΟΜΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΧΩΡΙΣ ΣΕΙΡΑ (εκθετική γεννήτρια)

Απαριθμητής: Για κάθε υποδοχή.

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιτρέπεται να έχει η υποδοχή.

Συντελεστής: του όρου $\frac{x^k}{k!}$ όπου k: τα αντικ/να που μοιράζω.



Μοντελοποίηση της Διανομής Διαφορετικών Χωρίς Σειρα:

ΓΕΝΝ: $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}\right)$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ:του όρου $\frac{x^{10}}{10!}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

ΔΙΑΝΟΜΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΣΕΙΡΑ (τροποποίηση εκθετικής γεννήτριας)

Απαριθμητής: Για κάθε υποδοχή.

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+2!\frac{x^2}{2!}+3!\frac{x^3}{3!}+\cdots+k!\frac{x^k}{k!}$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιτρέπεται να έχει η υποδοχή.

Συντελεστής: του όρου $\frac{x^k}{k!}$ όπου k: τα αντικ/να που μοιράζω.

Μοντελοποίηση της Διανομής Διαφορετικών Με Σειρά:

Χρησιμοποιούμε Εκθετική Γεννήτρια Συνάρτηση (Διανομή Διαφορετικών Χωρίς Σειρά) αλλά πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο των απαριθμητών με το αντίστοιχο παραγοντικό που εκφράζει τους τρόπους των διατάξεων των αντικειμένων στην υποδοχή.

ΓΕΝΝ: $\left(2!\frac{x^2}{2!}+3!\frac{x^3}{3!}+\cdots+6!\frac{x^6}{6!}\right)\left(1+x+2!\frac{x^2}{2!}+\cdots+5!\frac{x^5}{5!}\right)$
$\left(4!\frac{x^4}{4!}+5!\frac{x^5}{5!}+\cdots+10!\frac{x^{10}}{10!}\right)$

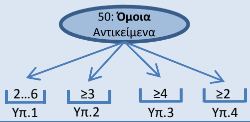
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ: του όρου $\frac{x^{10}}{10!}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΩΝ

ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ www.psounis.gr

Παράδειγμα: Μοιράζουμε 50 όμοια αντικείμενα σε 4 υποδοχές ώστε η 1η να πάρει 2 έως 6 αντικείμενα, η 2η να πάρει τουλάχιστον 3 αντικείμενα, η 3η τουλάχιστον 4 αντικείμενα και η 4η τουλάχιστον 2 αντικείμενα (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Παράδειγμα:



ευθύς

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^3+x^4+\cdots+x^{50})(x^4+x^5+\cdots+x^{50})(x^2+x^3+\cdots+x^{50})$

ΟΡΟΣ: $\boldsymbol{x^{50}}$

large

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^3+x^4+\cdots)(x^4+x^5+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)$

ΟΡΟΣ: $\boldsymbol{x^{50}}$

Μίζερος

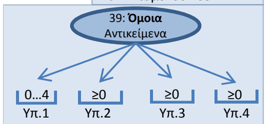
ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^3+x^4+\cdots+x^{42})(x^4+x^5+\cdots+x^{43})(x^2+x^3+\cdots+x^{41})$

ΟΡΟΣ: $\boldsymbol{x^{50}}$

Π.χ. για την Υπ.2
χάνει 2+4+2=8 από τις άλλες
Άρα θα παρει το πολύ 50-8=42

Διαχ/ση Περ/μου

Δίνω 2 στην Υπ1, 3 στην Υπ2, 4 στην Υπ3 και 2 στην Υπ4. Απομένουν 39



ευθύς

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1+x+\cdots+x^4)(1+x+x^2+\cdots+x^{39})^3$

ΟΡΟΣ: $\boldsymbol{x^{39}}$

large

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ:$(1+x+\cdots+x^4)(1+x+x^2+\cdots)^3$

ΟΡΟΣ: $\boldsymbol{x^{39}}$

Μίζερος

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1+x+\cdots+x^4)(1+x+x^2+\cdots+x^{39})^3$

ΟΡΟΣ: $\boldsymbol{x^{39}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΛΩΝ ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ www.psounis.gr

ΑΣΚΗΣΗ 1: Εξίσωση

$$x_1+x_2+x_3=40, x_i\geq 0,\quad i=1,2,3.$$

Λύση: Η εξίσωση μοντελοποιείται ως διανομή ομοίων:

Άρα η γεννήτρια είναι:$(1+x+x^2+\cdots+x^{40})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 2: Εξίσωση με Συντελεστές

$$5x_1+10x_2+20x_3=1000\ x_i\geq 0,\quad i=1,2,3$$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται:

$$z_1+z_2+z_3=1000$$

Όπου z_1 πολλαπλάσιο του 5, z_2 πολλαπλάσιο του 10, z_3 πολλαπλάσιο του 20 με $z_i\geq 0,\quad i=1,2,3$

Άρα η γεννήτρια είναι:$\boldsymbol{(1+x^5+\cdots+x^{1000})\,(1+x^{10}+\cdots+x^{1000})}$ $\boldsymbol{(1+x^{20}+\cdots+x^{1000})}$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου $\boldsymbol{x^{1000}}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 3: Συμβολή στο Ζητούμενο Στόχο

Συνήθεις εκφωνήσεις είναι να επιλέγουμε χαρτονομίσματα που αθροίζουν σε ποσό ή να επιλέγουμε βάρη που αθροίζουν σε ένα συνολικό βάρος. **Π.χ. πόσοι τρόποι να επιλέξουμε 1000 ευρώ από 4ευρα, 10ευρα, 20ευρα.**

Λύση: Η γεννήτρια είναι:$\boldsymbol{(1+x^5+\cdots+x^{1000})}$ $\boldsymbol{(1+x^{10}+\cdots+x^{1000})\,(1+x^{20}+\cdots+x^{1000})}$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου $\boldsymbol{x^{1000}}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

Προσοχή. Άλλη άσκηση: Πόσοι τρόποι να επιλέξουμε 40 χαρτονομίσματα από 5ευρα, 10ευρα και 20ευρα;

Λύση: $(1+x+x^2+\cdots+x^{40})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 4: Επιλογή από έναν

Έχουμε 6 αντίτυπα του βιβλίου Β1, 7 αντίτυπα του Β2, 11 αντίτυπα του Β3. Κατασκευάστε γεννήτρια ώστε δύο φοιτητές να πάρουν 12 βιβλία και το λιγότερο 2 αντίτυπα από κάθε βιβλίο. Σε ποιο συντελεστή της γεννήτριας βρίσκεται η απάντηση?

Λύση: Αρκεί να επιλέξω έναν έγκυρο συνδυασμό 12 βιβλίων για τον έναν φοιτητή. Ο άλλος θα πάρει τα υπόλοιπα. Οι επιλογές του 1ου φοιτητή είναι: Βιβλία Β1 (από 2 εώς 4), Βιβλία Β2 (από 2 εώς 5), Βιβλία Β3 (από 2 εώς 9), άρα η γεννήτρια είναι: $\boldsymbol{(x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^2+x^3+\cdots+x^9)}$ και το ζητούμενο είναι ο συντ. του όρου $\boldsymbol{x^{12}}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 5: Εξίσωση με Περιορισμό Ανίσωσης

$$x_1+x_2+x_3=100\ (1)$$

Υπό $x_1\geq x_2\ (2)\ και\ x_2\geq x_3 (3)\ όπου\ x_i\geq 0,\quad i=1,2,3$

Λύση:

Η (2) γράφεται: $x_2+s_2=x_1 (4)$ όπου $s_2\geq 0$

Η (3) γράφεται: $x_3+s_3=x_2 (5)$ όπου $s_3\geq 0$

Αντικατάσταση της (4) στην (1)…πράξεις…$2x_2+x_3+s_3=100\ (6)$

Αντικατάσταση της (5) στην (6)…πράξεις…$3x_1+2s_2+s_3=100$

Η εξίσωση γράφεται:

$$z_1+z_2+z_3=100$$

Όπου z_1 πολλαπλάσιο του 3, z_2 πολλαπλάσιο του 2, z_3 χωρίς περιορισμό με $z_i\geq 0,\quad i=1,2,3$

Άρα η γεννήτρια είναι:$\boldsymbol{(1+x^3+\cdots+x^{99})\,(1+x^2+\cdots+x^{100})}$ $\boldsymbol{(1+x+\cdots+x^{100})}$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου $\boldsymbol{x^{100}}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΩΝ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ www.psounis.gr

ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ (ΓΝΩΣΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ	ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ	ΟΡΟΣ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ
Διαταξεις k από n χωρίς επανάληψη	$(1+x)^n$	$\frac{x^k}{k!}$	$P(n,k)$
Διαταξεις k από n με επανάληψη	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n$	$\frac{x^k}{k!}$	n^k
Μεταθέσεις Ομάδων Ομοίων	$\frac{x^{q_1}}{q_1!}\cdot\frac{x^{q_2}}{q_2!}\cdot\frac{x^{q_3}}{q_3!}\cdots\frac{x^{q_k}}{q_k!}$	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{n!}{q_1!q_2!q_3!\ldots q_k!}$
Μεταθέσεις Διαφορετικών	x^n	$\frac{x^n}{n!}$	$n!$
Συνδυασμοί k από n χωρίς επανάληψη	$(1+x)^n$	x^k	$\binom{n}{k}$
Συνδυασμοί k από n με επανάληψη	$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n$	x^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Διανομή n ομοίων σε m υποδοχές	$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^m$	x^n	$\binom{n+m-1}{n}$
Διανομή n διαφ/κων σε m υποδοχές (χωρις σειρά)	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^m$	$\frac{x^n}{n!}$	m^n
Διανομή n διαφ/κων σε m υποδοχές (με σειρά)	$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^m$	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΩΝ (σειρές Taylor)

Συμβολισμοί σε Απλή Γεννήτρια: $\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i=1+x+x^2+x^3+\ldots$ | $(1-x)^{-n}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n=(1+x+x^2+\ldots)^n$

Συμβολισμοί σε Εκθετική Γεννήτρια: $e^x=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ | $e^{nx}=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n$ | $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ | $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ σε ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Αν υπάρχουν n **ισοπίθανα** ενδεχόμενα (συνήθως διαφορετικοί τρόποι) να συμβεί ένα γεγονός, τότε η πιθανότητα να προκύψει ένα από αυτά είναι 1/n

Συνεπώς με βάση τον ορισμό αυτό η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός (συνήθως η ικανοποίηση ενός μοντέλου κάτω από έναν περιορισμό) είναι:

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}=\frac{\text{Ευνοϊκά Αποτελέσματα}}{\text{Όλα τα Αποτελέσματα}}=\frac{\text{Αποτελέσματα που ικανοποιούν τον περιορισμό}}{\text{Αποτελέσματα χωρίς τον περιορισμό}}$$

ΖΑΡΙΑ

ΔΥΟ ΟΜΟΙΑ (π.χ. ΛΕΥΚΑ) ΖΑΡΙΑ:

Διαφορετικά Αποτελέσματα: Σ.Μ.Ε $\binom{2+6-1}{2}=\binom{7}{2}=\cdots=21$

Ισοπίθανα Αποτελέσματα: Δ.Μ.Ε $6^2=36$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων:

Ασσόδυο: $\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{36}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{18}}$

Εξάρες: $\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{36}}$

Και τα δύο ζάρια άρτιο αποτέλεσμα: $\boldsymbol{p}=\frac{3\times 3}{6\times 6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

Τουλάχιστον ένα ζάρι άρτιο αποτέλεσμα: $\boldsymbol{p}=\frac{6\times 6-3\times 3}{6\times 6}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

ΚΛΗΡΩΤΙΔΕΣ:

Π.χ. 4 κληρωτίδες που κληρώνουν έναν αριθμό από το 1 έως το 10.

Όλα τα αποτελέσματα: $\boldsymbol{10\times 10\times 10\times 10=10^4}$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων:

Όλες οι κληρωτίδες άρτιο αποτέλεσμα:

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{5\times 5\times 5\times 5}}{\boldsymbol{10\times 10\times 10\times 10}}=\frac{\boldsymbol{5^4}}{\boldsymbol{10^4}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{16}}$$

Καμία κλήρωση άρτιο αποτέλεσμα:

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{5\times 5\times 5\times 5}}{\boldsymbol{10\times 10\times 10\times 10}}=\frac{\boldsymbol{5^4}}{\boldsymbol{10^4}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{16}}$$

Τουλάχιστον μία κλήρωση άρτιο αποτέλεσμα:

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{10^4-5^4}}{\boldsymbol{10^4}}$$