

ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ24

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Θεωρούμε δύο κληρώσεις ενός ακεραίου αριθμού από το 1 έως το 10. Κάθε αριθμός προκύπτει με πιθανότητα $1/10$ σε κάθε κλήρωση και τα αποτελέσματα των δύο κληρώσεων είναι ανεξάρτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι περιττός και στις δύο κληρώσεις είναι $1/4$
2. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρτιος σε μια κλήρωση και στην άλλη να είναι περιττός είναι $1/2$.
3. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 5 και στις δύο κληρώσεις είναι $1/100$.
4. Η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων και των δύο κληρώσεων να είναι 6 είναι $4/100$.

(2) Πόσοι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης 3×3 υπάρχουν που κάθε στοιχείο είναι 0 ή 1;

1. Όσα τα κατευθυνόμενα γραφήματα με σύνολο κορυφών $\{u_1, u_2, u_3\}$ (δεν επιτρέπεται η αλλαγή του ονόματος των κορυφών) στα οποία μπορεί να υπάρχουν ανακυκλώσεις και αντιπαράλληλες ακμές (π.χ. $(u, v), (v, u)$), αλλά δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες ακμές με την ίδια διεύθυνση (π.χ. $(u, v), (u, v)$)
2. Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 9.
3. Όσο και το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{a, b, c\}$
4. Όσοι ο συντελεστής του $x^9/9!$ στην $(e^x)^2$

(3) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. $\{p_1 \rightarrow \neg p_2, p_1 \rightarrow p_3\} \models \neg p_1 \vee p_1$
2. $\{p_1 \wedge \neg p_1, p_2 \rightarrow p_3\} \models p_1 \wedge p_2$
3. Ο τύπος $(\neg \phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \phi)$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση
4. Ο τύπος $(\neg \phi \rightarrow \neg \neg \psi) \rightarrow ((\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \phi)$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση

(4) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Ο τύπος $\exists x \exists y \exists z \exists w [P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge P(z, w)]$

1. αληθεύει στο γράφημα K_4
2. αληθεύει στο γράφημα P_2
3. αληθεύει στο γράφημα P_3
4. αληθεύει στο γράφημα K_1

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου επιτρέπονται ανακυκλώσεις και αντιπαράλληλες ακμές ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές του γραφήματος, το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την a στη b και το σύμβολο M με τη σχέση όλων των ζευγαριών κορυφών που συνδέονται με μονοπάτι. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε οποιοδήποτε γράφημα της ερμηνείας αυτής;

1. $\forall x \forall y [P(x, y) \rightarrow M(x, y)]$
2. $\forall x \forall y [M(x, y) \rightarrow P(x, y)]$
3. $\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \forall y M(x, y)$
4. $\neg \exists x \exists y P(x, y) \vee \exists x \exists y P(x, y)$

(6) Έστω A ο πίνακας γειτνίασης και M ο πίνακας πρόσπτωσης του γραφήματος K_n . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Το άθροισμα των στοιχείων του A ισούται με $2n$
2. Το πλήθος των στοιχείων του A ισούται με $2n$
3. Το άθροισμα των στοιχείων του M ισούται με $n(n-1)$
4. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του M ισούται με $n-1$.

(7) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| = n$ ($n \geq 4$) και $|E| = m$

1. Αν n άρτιος, τότε το γράφημα έχει κύκλο Euler.
2. Αν όλες οι κορυφές έχουν περιττό βαθμό, τότε το συμπλήρωμα του έχει κύκλο Euler.
3. Αν $m = n(n - 1)/2$ τότε έχει κύκλο Hamilton.
4. Αν $m = n(n - 1)/2$ τότε έχει κύκλο Euler.

(8) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Υπάρχει γράφημα με n κορυφές και n ακμές ($n \geq 3$) που έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler
2. Υπάρχει απλό γράφημα με 2010 κορυφές που τόσο αυτό όσο και το συμπληρωματικό του έχουν κύκλο Euler
3. Αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα γράφημα που έχει κύκλο Euler, τότε το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Euler
4. Το άθροισμα βαθμών των κορυφών κάθε απλού γραφήματος που περιέχει κύκλο Hamilton, είναι τουλάχιστον $2n$.

Β' ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1 (ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ)

(Ερώτημα 1) Ένα διαγώνισμα αποτελείται από 3 διακεκριμένα ερωτήματα . Αν για τη μέγιστη δυνατή βαθμολογία κάθε ερωτήματος επιλέξουμε ανάμεσα σε 8,12,16 ή 20 μονάδες, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των μονάδων ώστε το άριστο γραπτό να βαθμολογηθεί με 40 μονάδες; Επιλύστε το πρόβλημα με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων, σχηματίστε δηλαδή τη γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε το συντελεστή του όρου που δίνει την απάντηση στο ερώτημα.

(Ερώτημα 2) Έχουμε 8 πανομοιότυπα αντίτυπα ενός βιβλίου, 9 αντίτυπα ενός δεύτερου βιβλίου και 11 αντίτυπα ενός τρίτου βιβλίου. Καταστρώστε γεννήτρια συνάρτηση που να δίνει τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν τα βιβλία σε δύο φοιτητές έτσι ώστε κάθε ένας να πάρει 14 βιβλία και το λιγότερο 2 αντίτυπα από κάθε βιβλίο. Σε ποιον συντελεστή της γεννήτριας θα βρίσκεται η απάντηση;

Άσκηση 2 (ΛΟΓΙΚΗ)

(Ερώτημα 1)

Δείξτε ότι $\{\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi), \psi \rightarrow \chi\} \vdash \psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού.

(Ερώτημα 2)

Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε συνδεόμενα μη κατευθυνόμενα απλά γραφήματα και περιλαμβάνει δύο διμελή κατηγορηματικά σύμβολα C και P . Το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή, ενώ το $C(x,y)$ ότι οι κορυφές x και y βρίσκονται μαζί σε απλό κύκλο. Δεν θεωρούμε ότι αληθεύει το $P(x,x)$ για καμία κορυφή x .

- Γράψτε ένα τύπο φ_1 που να αληθεύει μόνο σε άκυκλα γραφήματα (γραφήματα που δεν περιέχουν κύκλο).
- Γράψτε ένα τύπο $\varphi_2(x)$ που να αληθεύει όταν η κορυφή x έχει βαθμό 1.
- Κατασκευάστε ένα συνδεόμενο γράφημα 6 κορυφών που να αληθεύει η πρόταση

$$\varphi_3 = \varphi_1 \wedge \exists x \forall y [x \neq y \wedge \varphi_2(y) \rightarrow P(x,y)]$$

(Ερώτημα 3) Θεωρούμε τους παρακάτω τύπους μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P :

$$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$$

$$\varphi_2 \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow x = y)$$

Ερμηνεύουμε τους τύπους σε κατευθυνόμενα γραφήματα που δεν έχουν παράλληλες ακμές (μπορεί όμως να έχουν ανακυκλώσεις) όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ δηλώνει ότι «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y ».

Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα) τι δηλώνουν οι τύποι φ_1 , φ_2 στην συγκεκριμένη ερμηνεία

Άσκηση 3 (ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΩΝ)

Υπάρχει γράφημα 6 κορυφών G που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες; Εάν ναι, να κατασκευαστεί. Εάν όχι, να αιτιολογηθεί η μη ύπαρξή του:

- (i) Το G περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα 4 κορυφών και ένα σύνολο ανεξαρτησίας 3 κορυφών.
- (ii) Το G περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα 4 κορυφών και ένα σύνολο ανεξαρτησίας 4 κορυφών.