Πίνακας Αλήθειας Λογικών Συνδέσμων:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Προτεραιότητα λογικών συνδέσμων:

(1) $\neg$ **(2)** $\vee$, $\wedge$ **(3)** $\to$, $\leftrightarrow$

Ταυτολογία: είναι τύπος που είναι Α για όλες τις αποτιμήσεις

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg p \to q$ είναι ταυτολογία

Λύση:

p	q	$(p \wedge \neg p) \to q$
Α	Α	$(A \wedge \neg A) \to A = \Psi \to A = A$
Α	Ψ	$(A \wedge \neg A) \to \Psi = \Psi \to \Psi = A$
Ψ	Α	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \to A = \Psi \to A = A$
Ψ	Ψ	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \to \Psi = \Psi \to \Psi = A$

Γνωστες Ταυτολογίες είναι οι μορφές τύπων:

1. $\boldsymbol{\varphi} \vee \neg\boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
2. $\varphi \to \psi$ όπου φ=Αντίφαση (Μορφή $\boldsymbol{\Psi} \to \cdots$) ή ψ=Ταυτολογία (Μορφή ... $\to \mathbf{A}$)
3. $\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
4. $\boldsymbol{\varphi} \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
5. Όλες οι μορφές τύπων νόμων της προτασιακής λογικής
6. Όλες οι μορφές τύπων συντακτικών αντικατάσεων στα αξιωματικά σχήματα του προτασιακού λογισμού

Αντίφαση: είναι τύπος που είναι Ψ για όλες τις αποτιμήσεις

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg(q \to p)$ είναι αντίφαση

Λύση:

p	q	$p \wedge \neg(q \to p)$
Α	Α	$A \wedge \neg(A \to A) = A \wedge \neg A = \Psi$
Α	Ψ	$A \wedge \neg(\Psi \to A) = A \wedge \neg A = \Psi$
Ψ	Α	$\Psi \wedge \neg(A \to \Psi) = \Psi \wedge \neg \Psi = \Psi$
Ψ	Ψ	$\Psi \wedge \neg(\Psi \to \Psi) = \Psi \wedge \neg A = \Psi$

Γνωστές Αντιφάσεις είναι οι μορφές τύπων

- $\boldsymbol{\varphi} \wedge \neg\boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
- $\varphi \to \psi$ όπου φ=Ταυτολογία και ψ=Αντίφαση (Μορφή $\mathbf{A} \to \boldsymbol{\Psi}$)
- $\neg\varphi$ όπου φ=Ταυτολογία
- $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος

Ικανοποιήσιμος: είναι τύπος που είναι Α σε τουλάχιστον μία αποτίμηση

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \to (p \to q)$ είναι ικανοποιήσιμος

Λύση:

p	q	$p \to (p \to q)$
Α	Α	$p \to (p \to q) = A \to (A \to A) = A \to A = A$
Α	Ψ	$p \to (p \to q) = A \to (A \to \Psi) = A \to \Psi = \Psi$
Ψ	Α	$p \to (p \to q) = \Psi \to (\Psi \to A) = \Psi \to A = A$
Ψ	Ψ	$p \to (p \to q) = \Psi \to (\Psi \to \Psi) = \Psi \to A = A$

Κανονική Διαζευκτική Μορφή:
Ένας τύπος είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή (ΚΔΜ), αν είναι της μορφής:

$$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$$

όπου κάθε ψ_i είναι της μορφής:

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$$

Και τα x_{ij} είναι μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών

Βήματα κατασκευής κανονικής διαζευκτικής μορφής

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου.
2. Εκφράζουμε σαν σύζευξη (and) κάθε γραμμή που αληθεύει. Στην σύζευξη θέτουμε p αν $\alpha(p) = \text{A}$ και $\neg p$ αν $\alpha(p) = \Psi$.
3. Ο τύπος είναι η διάζευξη (or) όλων των συζεύξεων.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η Κ.Δ.Μ. του τύπου: $p \to \neg(q \to r)$
Λύση:
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	r	$p \to \neg(q \to r)$
Α	Α	Α	$p \to \neg(q \to r) = \text{A} \to \neg(\text{A} \to \text{A}) = \text{A} \to \Psi = \Psi$
Α	Α	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \text{A} \to \neg(\text{A} \to \Psi) = \text{A} \to \text{A} = \text{A}$
Α	Ψ	Α	$p \to \neg(q \to r) = \text{A} \to \neg(\Psi \to \text{A}) = \text{A} \to \Psi = \Psi$
Α	Ψ	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \text{A} \to \neg(\Psi \to \Psi) = \text{A} \to \Psi = \Psi$
Ψ	Α	Α	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\text{A} \to \text{A}) = \Psi \to \Psi = \text{A}$
Ψ	Α	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\text{A} \to \Psi) = \Psi \to \text{A} = \text{A}$
Ψ	Ψ	Α	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\Psi \to \text{A}) = \Psi \to \Psi = \text{A}$
Ψ	Ψ	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\Psi \to \Psi) = \Psi \to \Psi = \text{A}$

- Η 2η γραμμή: $p \wedge q \wedge \neg r$
- Η 5η γραμμή: $\neg p \wedge q \wedge r$
- Η 6η γραμμή: $\neg p \wedge q \wedge \neg r$
- Η 7η γραμμή: $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
- Η 8η γραμμή: $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Άρα η Κανονική Διαζευκτική Μορφή του τύπου είναι:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Ένα σύνολο τύπων Τ θα λέμε ότι είναι **ικανοποιήσιμο** αν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- Πιο τυπικά αν υπάρχει αποτίμηση α: α(φ)=Α ∀φ∈Τ

Παράδειγμα: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{p \to q, p \vee \neg q\}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$p \to q$	$p \vee \neg q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Παρατηρούμε ότι στην αποτίμηση p=A,q=A αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων, άρα είναι ικανοποίησιμο

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το συνεπές σύνολο τύπων

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΣΥΝΕΠΕΣ

(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

Ένα σύνολο τύπων Τ θα λέμε ότι είναι **μη ικανοποιήσιμο** αν δεν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- …δηλαδή δεν είναι ικανοποίησιμο!

Παράδειγμα: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{q \to p, p \wedge \neg q, p \leftrightarrow q\}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$q \to p$	$p \wedge \neg q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους Α ταυτόχρονα, άρα είναι ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το αντιφατικό σύνολο τύπων

ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟ

(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ $\mathrm{T} \vDash \varphi$

Έστω Σύνολο Τύπων Τ και τύπος φ. Θα λέμε ότι :
- το σύνολο τύπων Τ **ταυτολογικά συνεπάγεται** τον τύπο φ ή
- Ο φ είναι **σημασιολογική συνέπεια** του Τ
- και συμβολίζουμε με $\mathbf{T} \vDash \boldsymbol{\varphi}$

αν και μόνο αν
- **για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του Τ ικανοποιείται και ο φ**

Ο συμβολισμός: $\vDash \boldsymbol{\varphi}$
- Θα σημαίνει ότι ο τύπος φ αληθεύει ανεξαρτήτως υποθέσεων
- που σημαίνει ότι ο τύπος **φ είναι ταυτολογία**.($\emptyset \vDash \boldsymbol{\varphi}$)

Ο συμβολισμός: $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\psi}$
- Θα σημαίνει ότι οι τύποι φ και ψ είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι**
- Ορίζεται ως: $\varphi \vDash \psi$ και $\psi \vDash \varphi$

Θα ισχύει ότι $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\psi}$ αν οι φ,ψ έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας

1. Αν ο **φ είναι ταυτολογία** ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
2. Αν το **Τ είναι αντιφατικό** ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
3. **Εξετάζουμε με βάση τον ορισμό**. Βρίσκουμε τις αποτιμήσεις που ικανοποιούνται οι τύποι του Τ (όλοι ταυτόχρονα). Σε αυτές πρέπει να αληθεύει και ο φ για να ισχύει η ταυτ.συνεπαγωγή.

Πιο εποπτικά:
1. … $\vDash$ Α.
2. Ψ $\vDash \cdots$.
3. Εφαρμογή του ορισμού

Παράδειγμα 1: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \to \neg q, q \lor p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash \neg p \to q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

p	q	$p \to \neg q$	$q \lor p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$\neg p \to q$
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ

Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ό τύπος φ είναι αληθής, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

Παράδειγμα 2: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \to \neg q, q \lor p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash p \to q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

p	q	$p \to \neg q$	$q \lor p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$p \to q$
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α

Στην $2^{η}$ αποτίμηση (p=Α, q=Ψ) ικανοποιούνται οι τύποι του Τ, αλλά δεν ικανοποιείται ο φ. Άρα δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

ΝΟΜΟΙ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Οι Νόμοι της Προτασιακής Λογικής:

- Είναι ταυτολογίες.
- Τους χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε έναν τύπο σε έναν ισοδύναμό του.

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση
1	Αντιμεταθετικότητα	$\varphi \lor \psi \leftrightarrow \psi \lor \varphi$ $\varphi \land \psi \leftrightarrow \psi \land \varphi$
2	Προσεταιριστικότητα	$\varphi \land (\psi \land \chi) \leftrightarrow (\varphi \land \psi) \land \chi$ $\varphi \lor (\psi \lor \chi) \leftrightarrow (\varphi \lor \psi) \lor \chi$
3	Επιμεριστικότητα	$\varphi \lor (\psi \land \chi) \leftrightarrow (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$ $\varphi \land (\psi \lor \chi) \leftrightarrow (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)$
4	Διπλή Άρνηση	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
5	Άρνηση Συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \land \neg\psi$
6	De Morgan	$\neg(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \land \neg\psi$ $\neg(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \lor \neg\psi$
7	Αντιθετοαναστροφή	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$
8	Εξαγωγή	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow (\varphi \land \psi \to \chi)$
9	1ος νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \psi)$
10	2ος νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$
11	Αποκλεισμός Τρίτου	$\varphi \lor \neg\varphi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος του τύπου:

$$(p_1 \land \neg p_2) \to \neg(p_1 \lor p_2)$$

που χρησιμοποιεί μόνο τους σύνδεσμους $\{\neg, \to\}$

Λύση: Στον τύπο:

$$\underline{(p_1 \land \neg p_2)} \to \neg(p_1 \lor p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο άρνησης συνεπαγωγής:

$$\neg(p_1 \to p_2) \to \neg(\underline{p_1} \lor p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης:

$$\neg(p_1 \to p_2) \to \neg(\underline{\neg\neg p_1 \lor p_2})$$

Εφαρμόζω το 1ο νόμο αντικατάστασης:

$$\neg(p_1 \to p_2) \to \neg(\neg p_1 \to p_2)$$

Χρήσιμος για την χρήση των τύπων μπορεί να φανεί ο παρακάτω πίνακας:

Μετατροπή συνδέσμων	Χρήση του νόμου	Νόμος
Από → σε ∨ και αντίστροφα	1ος νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \psi)$
Από → σε ∧ και αντίστροφα	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \land \neg\psi$
Από ∨ σε ∧ και αντίστροφα	Νόμοι De Morgan	$\neg(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \land \neg\psi$ $\neg(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \lor \neg\psi$
Από ↔ σε ∧, →και αντίστροφα	2ος νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$

ΠΡΟΤΑΣΗ(φ): που θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο

- Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p, δηλαδή ότι ισχύει η ΠΡΟΤΑΣΗ(p)
  - Κάνουμε απόδειξη ότι ισχύει η πρόταση για μια προτασιακή μεταβλητή.
- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ,ψ, δηλαδή ότι ισχύουν ΠΡΟΤΑΣΗ(φ), ΠΡΟΤΑΣΗ(ψ)
- Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι ισχύουν:

  ΠΡΟΤΑΣΗ($\neg\varphi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \vee \psi$),
  ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \wedge \psi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \rightarrow \psi$)
  ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \leftrightarrow \psi$)

Ορισμός: Ένα σύνολο συνδέσμων θα λέγεται **πλήρες σύνολο συνδέσμων** (ή επαρκές σύνολο συνδέσμων) ανν κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να μετατραπεί σε έναν ισοδύναμό που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο.

- Εμπειρικά για να είναι ένα σύνολο συνδέσμων πλήρες, απαιτείται να υπάρχει σε αυτό το ¬ και τουλάχιστον ένας ακόμη διμελής σύνδεσμος.
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων είναι πλήρες κάνω επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων:
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων ΔΕΝ είναι πλήρες κατασκευάζω έναν τύπο που δεν μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει ίδιο αριθμο αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Λύση:

Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p, δηλαδή ότι ο τύπος p έχει ίσες αριστερές και δεξιές παρενθέσεις

- *Απόδειξη:* Ο τύπος p έχει 0 αριστερές και 0 δεξιές παρενθέσεις. Συνεπώς ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ, ψ, δηλαδή ότι ισχύει $L_\varphi = R_\varphi$ και $L_\psi = R_\psi$.
(Συμβολίζουμε με L_x το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων του τύπου x, και με R_x το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων του τύπου x)

Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι:

- Ο τύπος $(\neg\varphi)$ έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\neg\varphi)$ έχει $L_\varphi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $\mathrm{R}_\varphi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\varphi = R_\varphi$ άρα και $L_\varphi + 1 = R_\varphi + 1$
- Ο τύπος $(\varphi \vee \psi)$ έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\varphi \vee \psi)$ έχει $L_\varphi + \mathrm{L}_\psi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $\mathrm{R}_\varphi + \mathrm{R}_\psi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\varphi = R_\varphi$ και $L_\psi = R_\psi$, άρα και $L_\varphi + L_\psi + 1 = R_\varphi + R_\psi + 1$.
- Η απόδειξη για τους τύπους $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ είναι όμοια με την $(\varphi \vee \psi)$.

Ο ΠΛ (προτασιακός λογισμός) είναι το αξιωματικό σύστημα που:

- Έχει ως **αξιώματα** (αξιωματικά σχήματα) τα: ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3.
- Και ως αποδεικτικό κανόνα τον **Modus Ponens** (M.P.)

Σε αυτό το αξιωματικό σύστημα μελετάμε αν ισχύουν:

- **Τυπική Συνεπαγωγή** $T \vdash \varphi$
  όταν ισχύουν οι υποθέσεις του Τ αν εξάγεται με διαδοχικές εφαρμογές του ΜΡ ο τύπος φ
- **Τυπικό Θεώρημα** $\vdash \varphi$
  δηλαδή αν εξάγεται ο τύπος φ με διαδοχικές εφαρμογές ΜΡ

Στις τυπικές αποδείξεις επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε:

1) ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ του συνόλου τύπων

2)ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ και Συντακτικές αντικ/σεις σε αυτα:

ΑΣ1: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

ΑΣ2: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

ΑΣ3: $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$

3) MODUS PONENS

Αν ισχύει Φ

Και ισχύει Φ→Ψ

Τότε ισχύει Ψ (από Modus Ponens)

4) ΤΥΠΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Έχουμε αποδείξεις για:

$\vdash \phi \rightarrow \phi$ $\quad\vdash \phi \rightarrow \neg\neg\phi$ $\quad\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$

5) ΤΥΠΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ

Εφόσον δίνονται από την εκφώνηση

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\{\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \phi \rightarrow \psi\} \vdash \phi \rightarrow \chi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
2. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$ ΑΣ2
3. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)$ ΜΡ1,2
4. $\phi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
5. $\phi \rightarrow \chi$ ΜΡ4,3

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\neg\phi \vdash (\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg\phi$ Υπόθεση
2. $\neg\phi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ¬φ, ψ:¬ψ
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$ ΜΡ1,2
4. $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου φ: ψ, ψ:φ
5. $(\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$ ΜΡ3,4

ΤΥΠΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\vdash (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\phi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου ψ: χ
2. $(\phi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου ψ: χ
3. $(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ ΜΡ1,2

Θεώρημα (Απαγωγής):

Αν $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ τότε $T \vdash \varphi \to \psi$

Ευθεία χρήση:
Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
Τότε από το θεώρημα απαγωγής «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $T \vdash \varphi \to \psi$
Αντίστροφη χρήση:
Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi \to \psi$
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Θεώρημα (Αντιθετοαναστροφής):

$T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ αν και μόνο αν $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

Θεώρημα (Εις Άτοπο Απαγωγής):

Αν $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό τότε $T \vdash \neg\varphi$

Ευθεία χρήση:
Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό
Τότε από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $T \vdash \neg\varphi$
Αντίστροφη χρήση:
Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \neg\varphi$
Από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό.

Αντιφατικό Σύνολο Τύπων :
Ένα σύνολο τύπων T καλείται αντιφατικό αν υπάρχει ένας τύπος ψ τέτοιος ώστε να ισχύει:
$T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$
Συνεπές σύνολο τύπων:
Σύνολο τύπων που δεν είναι αντιφατικό

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι:
$\vdash ((\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\psi \to \neg\psi))$
Απάντηση:
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi \vdash \chi \to \neg(\psi \to \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\psi \to \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi, \psi \to \neg\psi\} \vdash \neg\chi$$

που έχει τυπική απόδειξη:
1. $\psi \to \neg\psi$ Υπόθεση
2. $(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi$ Υπόθεση
3. $\neg\chi$ MP1,2

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι:

$$\{\chi \to \neg\psi, \phi\} \vdash \chi \to \neg(\phi \to \psi)$$

Απάντηση:
Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι:
$\{\chi \to \neg\psi, \phi, \chi\} \vdash \neg(\phi \to \psi)$
Από το θ.απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο τύπων:
$T=\{\chi \to \neg\psi, \phi, \chi, \phi \to \psi\}$ είναι αντιφατικό.
Και ακολουθούν οι τυπικές αποδείξεις: $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$

Θεώρημα (Εγκυρότητας): Αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \vDash \varphi$

- (ευθεία χρήση) Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $T \vdash \varphi$. Τότε από το θεώρημα εγκυρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $T \vDash \varphi$
- (αντίστροφη χρήση) Για να δείξουμε ότι: $T \vDash \varphi$. Από το θεώρημα εγκυρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$

Θεώρημα (Πληρότητας): Αν $T \vDash \varphi$ τότε $T \vdash \varphi$

- (ευθεία χρήση) Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $T \vDash \varphi$. Τότε από το θεώρημα πληρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $T \vdash \varphi$
- (αντίστροφη χρήση) Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$. Από το θεώρημα πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vDash \varphi$

⊢ φ → φ

Απόδειξη 1 (χωρίς Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ:φ, ψ: $\phi \to \phi$
2. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου φ:φ, ψ: $\phi \to \phi$,χ: φ
3. $(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$ MP1,2
4. $\phi \to (\phi \to \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ψ, ψ:φ
5. $\phi \to \phi$ MP3,4

Απόδειξη 2 (με Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση

⊢ φ → ¬¬φ

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\varphi$ Υπόθεση

⊢ ¬¬ φ → φ

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: $\neg\neg\varphi$, ψ: $\neg\varphi$
3. $\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ MP1,2
4. $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου φ: $\neg\varphi$, ψ: φ
5. $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$ MP3,4
6. $\neg\varphi \to \neg\varphi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \to \varphi$ όπου φ: $\neg\varphi$
7. φ MP6,5

Και παραθέτουμε την τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος $\vdash \varphi \to \varphi$