ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 2.1:
Προτασιακοί Τύποι

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Η προτασιακή γλώσσα
- Προτασιακοί τύποι και χαρακτηρισμοί τους
- Κανονική Διαζευκτική Μορφή Τύπου

Επίπεδο Β

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

Β. Θεωρία
Μαθηματική Λογική

- Η Μαθηματική Λογική είναι η προσπάθεια να μοντελοποιήθουν με μαθηματικά:
  - Η ανθρώπινη γλώσσα, και το συντακτικό της.
  - Ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζουμε επιχειρήματα προκειμένου να εξάγουμε συμπεράσματα.

- Προκειμένου να επιτευχθεί αυτός ο (δύσκολος) στόχος, κατασκευάζονται σε στάδια γλώσσες που μπορούν να μοντελοποιήσουν ολοένα και πιο περίπλοκες δομές της συμπερασματολογίας, αλλά και της περιγραφής του κόσμου:
  - Η Προτασιακή Γλώσσα ($Γ_0$-Γλώσσα Βαθμού 0) είναι απλή λογική που μοντελοποιεί προτάσεις που είναι Α(ληθείς) ή Ψ(ευδείς).
  - Η Γλώσσα της Κατηγορηματικής Λογικής ($Γ_1$-Γλώσσα Βαθμού 1) είναι προχωρημένη λογική που μπορεί να μοντελοποιήσει περίπλοκες προτάσεις των μαθηματικών.
  - ….και πολλές ακόμη που είναι εκτός ύλης….

Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

1. Προτασιακή Γλώσσα

- Στην προτασιακή γλώσσα:
  - Σχετίζουμε προτάσεις που είναι Α(ληθείς) ή Ψ(ευδείς) με προτασιακές μεταβλητές (συμβολίζονται με μικρό λατινικό γράμμα π.χ. p,q,r)

  - Κατασκευάζουμε σύνθετες προτάσεις με χρήση των προτασιακών συνδέσμων:
    - (…) ΚΑΙ (…) (AND συμβ. $\wedge$)
    - (…) Ή (…) (OR συμβ. $\vee$)
    - ΟΧΙ (…) (NOT συμβ. $\neg$)
    - Αν (…) τότε (…) (συνεπαγωγή συμβ. $\rightarrow$)
    - (…) αν και μόνο αν (…) (ισοδυναμία συμβ. $\leftrightarrow$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Αν συμβολίσουμε με p την πρόταση «Βρίσκομαι στο μάθημα» και με q την πρόταση «Μου αρέσει το μάθημα» τότε οι προτάσεις:
«Αν βρίσκομαι στο μάθημα τότε μου αρέσει το μάθημα» συμβολίζεται στην προτασιακή λογική: $p \rightarrow q$
«Ή δεν βρίσκομαι στο μάθημα ή μου αρέσει το μάθημα» συμβολίζεται στην προτασιακή λογική: $\neg p \vee q$

Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

2. Προτασιακοί Τύποι

Η Προτασιακή Γλώσσα (συμβολιζεται με $Γ_0$) αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

- Τις προτασιακές μεταβλητές (π.χ. p,q,r)
- Τον μονομέλή (ισοδύναμα μονοθέσιο) σύνδεσμο: $\neg$
- Τους διμελείς (ισοδύναμα διθέσιους) συνδέσμους: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Παρενθέσεις που καθορίζουν προτεραίοτητα πράξεων: (,)

Ένας Προτασιακός Τύπος:

1. Είτε είναι μια προτασιακή μεταβλητή
2. Είτε είναι μια παράσταση της μορφής $(\neg \phi),\quad (\phi \vee \psi),\quad (\phi \wedge \psi),\quad (\phi \rightarrow \psi),\quad (\phi \leftrightarrow \psi)$ όπου φ,ψ είναι προτασιακοί τύποι.

Το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων συμβολίζεται με $T(Γ_0)$ και
Το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών συμβολίζεται με $M(Γ_0)$

Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

2. Προτασιακοί Τύποι (1.Προτεραιότητα συνδέσμων)

- Καθορίζεται προτεραιότητα των λογικών τελεστών, ώστε να μην είναι αναγκαία η πλήρης παρενθετοποίηση των προτασιακών τύπων:

Η προτεραιότητα των λογικών συνδέσμων είναι:

- Μεγαλύτερη προτεραιότητα έχει το: $\neg$
- Αμέσως μετά με ίση προτεραιότητα είναι τα : $\wedge$, $\vee$
- Μικρότερη προτεραιότητα έχουν οι σύνδεσμοι: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

- Παραδείγματα:

1. Ο τύπος $\neg p \wedge q$ με βάση την προτεραιότητα των συνδέσμων παρενθετοποιείται: $((\neg p) \wedge q)$
2. Ο τύπος $p \rightarrow q \vee r$ με βάση την προτεραιότητα των συνδέσμων παρενθετοποιείται: $(p \rightarrow (q \vee r))$
3. Ο τύπος $p \wedge \neg q \leftrightarrow q \vee \neg r$ με βάση την προτεραιότητα των συνδέσμων παρενθετοποιείται ως εξής: $((p \wedge (\neg q)) \leftrightarrow (q \vee (\neg r)))$

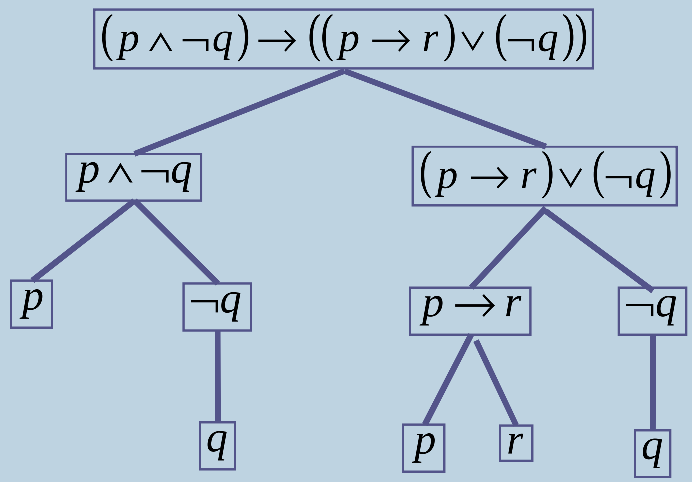
Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

2. Προτασιακοί Τύποι (2.Δενδροδιάγραμμα Τυπου)

- Η προτεραιότητα των λογικών συνδέσμων υποδεικνύεται και με το <u>δενδροδιάγραμμα του τύπου</u> που υποδεικνύει την προτεραιότητα των λόγικών πράξεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να κατασκευαστεί το δενδροδιάγραμμα του τύπου: $p \wedge \neg q \rightarrow (p \rightarrow r) \vee \neg q$



- Πρακτικά στο δενδροδιάγραμμα σε κάθε μετάβαση «διώχνουμε» τον λογικό σύνδεσμο με την χαμηλότερη προτεραιότητα.

Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

3. Αποτίμηση Τύπου

Αποτίμηση των μεταβλητών είναι να αναθέσουμε τιμές Α (=αλήθεια) ή Ψ (=Ψέμα) στις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου. Είναι δηλαδή μια συνάρτηση α που δίνει τιμές στις προτασιακές μεταβλητές: $a : M(\Gamma_0) \to \{\mathrm{A}, \Psi\}$

Η αποτίμηση ενός τύπου είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε προκειμένου να καταλήξουμε ότι ένας τύπος είναι Αληθής ή Ψευδής ανάλογα με την αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών.

- Με μια αποτίμηση των μεταβλητών, μπορούμε να αποτιμήσουμε έναν προτασιακό τύπο, με βάση τον αληθοπίνακα των προτασιακών συνδέσμων:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

3. Αποτίμηση Τύπου

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi\vee\psi$	$\phi\wedge\psi$	$\phi\rightarrow\psi$	$\phi\leftrightarrow\psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

- Χρήσιμες παρατηρήσεις για τον αληθοπίνακα των συνδέσμων:
  - Ο τύπος $\neg\phi$ έχει την αντίθετη τιμή από τον τύπο ϕ
  - Ο τύπος $\phi\vee\psi$ είναι Ψ μόνο όταν $\phi=\psi=\Psi$
    είναι Α αν έστω ένα από τα ϕ,ψ είναι Α
  - Ο τύπος $\phi\wedge\psi$ είναι Α μόνο όταν $\phi=\psi=A$
    είναι Ψ αν έστω ένα από τα ϕ,ψ είναι Ψ
  - Ο τύπος $\phi\rightarrow\psi$ είναι Ψ μόνο όταν $\phi=A,\psi=\Psi$ (δηλαδή $A\rightarrow\Psi=\Psi$)
    είναι Α σε κάθε άλλη περίπτωση και ισχύουν:
    $\Psi\rightarrow\ldots=A$ και $\ldots\rightarrow A=A$
  - Ο τύπος $\phi\leftrightarrow\psi$ είναι Α όταν $\phi=\psi$ (έχουν την ίδια τιμή)
    είναι Ψ όταν $\phi\neq\psi$ (έχουν διαφορετική τιμή)

Β. Θεωρία

1. Προτασιακή Λογική

3. Αποτίμηση Τύπου

- Με χρήση του πίνακα αλήθειας των προτασιακών συνδέσμων μπορούμε να αποτιμήσουμε οποιονδήποτε προτασιακό τύπο, όταν έχουμε γνώση της αποτίμησης των προτασιακών μεταβλητών:
  - Χρήσιμη θα φανεί η προτεραιότητα των τελεστών έτσι ώστε να κάνουμε σωστά την σειρά των λογικών πράξεων:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να αποτιμηθεί ο τύπος: $p \wedge \neg q \rightarrow q \vee \neg r$ υπό την αποτίμηση των μεταβλητών: $a(p)=\mathrm{A},\quad a(q)=\Psi,\quad a(r)=\Psi$

Λύση:

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee \neg r) = (\mathrm{A} \wedge \neg \Psi) \rightarrow (\Psi \vee \neg \Psi) = (\mathrm{A} \wedge \mathrm{A}) \rightarrow (\Psi \vee \mathrm{A}) = \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{A}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Να αποτιμηθεί ο τύπος: $p \wedge \neg q \rightarrow q \vee \neg r$ υπό την αποτίμηση των μεταβλητών: $a(p)=\Psi,\quad a(q)=\mathrm{A},\quad a(r)=\Psi$

Λύση:

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee \neg r) = (\Psi \wedge \neg \mathrm{A}) \rightarrow (\mathrm{A} \vee \neg \Psi) = (\Psi \wedge \Psi) \rightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{A}) = \Psi \rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{A}$$

Β. Θεωρία
2. Χαρακτηρισμός Τύπων

- Ένας προτασιακός τύπος θα χαρακτηρίζεται:
  - Ταυτολογία: Αν είναι Αληθής για κάθε αποτίμηση
  - Αντίφαση: Αν είναι Ψευδής για κάθε αποτίμηση
  - Ικανοποιήσιμος: Αν υπάρχει αποτίμηση για την οποία είναι αληθής.

Β. Θεωρία

2. Χαρακτηρισμός Τύπων

1. Ταυτολογία

Ορισμός:
Ένας προτασιακός τύπος είναι ταυτολογία αν είναι αληθής για όλες τις αποτιμήσεις των μεταβλητών.

- Για να εξακριβώσουμε ότι ένας τύπος είναι ταυτολογία, πρέπει:
  - Είτε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας.
    - Θα πρέπει ο τύπος να είναι σε κάθε γραμμή: Α(ληθής)
  - Είτε να ισχύει κάποια παρατήρηση για την δομή του τύπου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ο τύπος $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ είναι ταυτολογία

Α' τρόπος:

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
Α	Α	$(A \wedge \neg A) \rightarrow A = \Psi \rightarrow A = A$
Α	Ψ	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Psi = \Psi \rightarrow \Psi = A$
Ψ	Α	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow A = \Psi \rightarrow A = A$
Ψ	Ψ	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow \Psi = \Psi \rightarrow \Psi = A$

Συνεπώς είναι ταυτολογία

Β' τρόπος: Παρατηρούμε ότι $(p \wedge \neg p)$ είναι πάντα Ψ, άρα ο τύπος είναι $\Psi \rightarrow \ldots$ άρα είναι πάντα αληθής

Β. Θεωρία

2. Χαρακτηρισμός Τύπων

2. Αντίφαση

Ορισμός:
Ένας προτασιακός τύπος είναι αντίφαση αν είναι ψευδής για όλες τις αποτιμήσεις των μεταβλητών.

- Για να εξακριβώσουμε ότι ένας τύπος είναι αντίφαση, πρέπει:
  - Είτε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας.
    - Θα πρέπει ο τύπος να είναι σε κάθε γραμμή: Ψ(ευδής)
  - Είτε να ισχύει κάποια παρατήρηση για την δομή του τύπου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ο τύπος $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ είναι αντίφαση

Α' τρόπος:
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	$p \wedge \neg(q \rightarrow p)$
Α	Α	$\mathrm{A} \wedge \neg(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}) = \mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A} = \Psi$
Α	Ψ	$\mathrm{A} \wedge \neg(\Psi \rightarrow \mathrm{A}) = \mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A} = \Psi$
Ψ	Α	$\Psi \wedge \neg(\mathrm{A} \rightarrow \Psi) = \Psi \wedge \neg\Psi = \Psi$
Ψ	Ψ	$\Psi \wedge \neg(\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \wedge \neg\mathrm{A} = \Psi$

Συνεπώς είναι αντίφαση

Β' τρόπος:
Αν p=Ψ, τότε ο τύπος είναι $\Psi \wedge \ldots = \Psi$
Αν p=Α, τότε ο τύπος είναι $\mathrm{A} \wedge \neg(q \rightarrow \mathrm{A}) = \mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A} = \Psi$. 'Αρα είναι αντίφαση.

Β. Θεωρία

2. Χαρακτηρισμός Τύπων

3. Ικανοποιήσιμος Τύπος

Ορισμός: Ένας προτασιακός τύπος είναι ικανοποιήσιμος αν είναι αληθής για τουλάχιστον μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών.

- Για να εξακριβώσουμε ότι ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος, πρέπει:
  - Είτε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας.
    - Θα πρέπει ο τύπος να είναι σε τουλάχιστον μία γραμμή: Α(ληθής)
  - Είτε να ισχύει κάποια παρατήρηση για την δομή του τύπου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ο τύπος $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ είναι ικανοποιήσιμος

Λύση:

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$
Α	Α	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}) = \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{A}$
Α	Ψ	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{A} \rightarrow \Psi) = \mathrm{A} \rightarrow \Psi = \Psi$
Ψ	Α	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow \mathrm{A}) = \Psi \rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{A}$
Ψ	Ψ	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{A}$

Άρα είναι ένας ικανοποιήσιμος τύπος (γιατί π.χ. ικανοποιείται με την αποτίμηση p=A, q=A)

Σημαντικό! Κάθε ταυτολογία είναι ικανοποιήσιμος τύπος!

Β. Θεωρία

3. Κανονική Διαζευκτική Μορφή

Ορισμός:
Ένας τύπος είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή (ΚΔΜ), αν είναι της μορφής:

$$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$$

όπου κάθε ψ_i είναι της μορφής:

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$$

Και τα x_{ij} είναι μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών

- Κάθε τύπος γράφεται σε κανονική διαζευκτική μορφή με την εξής διαδικασία:

Βήματα κατασκευής κανονικής διαζευκτικής μορφής

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου.
2. Εκφράζουμε σαν σύζευξη (and) κάθε γραμμή που αληθεύει. Στην σύζευξη θέτουμε p αν $\alpha(p) = \text{Α}$ και $\neg p$ αν $\alpha(p) = \Psi$.
3. Ο τύπος είναι η διάζευξη (or) όλων των συζεύξεων.

Β. Θεωρία

3. Κανονική Διαζευκτική Μορφή

Βήμα 1: Κατασκευή Αληθοπίνακα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί η Κ.Δ.Μ. του τύπου: $p \to \neg(q \to r)$

Λύση:

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	r	$p \to \neg(q \to r)$
Α	Α	Α	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\mathrm{A} \to \mathrm{A}) = \mathrm{A} \to \Psi = \Psi$
Α	Α	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\mathrm{A} \to \Psi) = \mathrm{A} \to \mathrm{A} = \mathrm{A}$
Α	Ψ	Α	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\Psi \to \mathrm{A}) = \mathrm{A} \to \Psi = \Psi$
Α	Ψ	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\Psi \to \Psi) = \mathrm{A} \to \Psi = \Psi$
Ψ	Α	Α	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\mathrm{A} \to \mathrm{A}) = \Psi \to \Psi = \mathrm{A}$
Ψ	Α	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\mathrm{A} \to \Psi) = \Psi \to \mathrm{A} = \mathrm{A}$
Ψ	Ψ	Α	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\Psi \to \mathrm{A}) = \Psi \to \Psi = \mathrm{A}$
Ψ	Ψ	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\Psi \to \Psi) = \Psi \to \Psi = \mathrm{A}$

Ο πίνακας αληθεύει στην 2^{η}, την 5^{η}, την 6^{η}, την 7^{η} και την 8^{η} γραμμή.

Β. Θεωρία

3. Κανονική Διαζευκτική Μορφή

Βήματα 2-3: Εξαγωγή Κανονικής Διαζευκτικής Μορφής

(…συνέχεια…)
Γράφουμε κάθε γραμμή που αληθεύει ο τύπος σαν σύζευξη:

- Η 2η γραμμή: $p \wedge q \wedge \neg r$
- Η 5η γραμμή: $\neg p \wedge q \wedge r$
- Η 6η γραμμή: $\neg p \wedge q \wedge \neg r$
- Η 7η γραμμή: $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
- Η 8η γραμμή: $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Συνεπώς η κανονική διαζευκτική μορφή του τύπου $p \to \neg(q \to r)$ είναι:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Γ. Μεθοδολογία

1. Γνωστές Μορφές Τύπων

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Κυρίως στα Σ/Λ ζητείται να βρίσκουμε γρήγορα αν ένας τύπος είναι ταυτολογία ή αντίφαση. Μερικές μορφές ταυτολογιών είναι πολύ συνηθισμένες στις ασκήσεις και καλό είναι να τις έχουμε κατά νου.

Ωστόσο ποτέ δεν ξεχνάμε ότι ο πιο ασφαλής τρόπος είναι να κάνουμε τον πίνακα αληθειας και να εξάγουμε από τον αληθοπίνακα ότι ο τύπος είναι ταυτολογία.

Γνωστες Ταυτολογίες είναι οι μορφές τύπων:
1) $\varphi \vee \neg\varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
2) $\varphi \rightarrow \psi$ όπου φ=Αντίφαση (Μορφή $\Psi \rightarrow \cdots$) ή ψ=Ταυτολογία (Μορφή ... $\rightarrow \mathrm{A}$)
3) $\varphi \rightarrow \varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
4) $\varphi \leftrightarrow \varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
5) Όλες οι μορφές τύπων νόμων της προτασιακής λογικής (Μάθημα 2.3)
6) Όλες οι μορφές τύπων συντακτικών αντικατάσεων του προτασιακού λογισμού (Μάθημα 2.5)

Γνωστές Αντιφάσεις είναι οι μορφές τύπων
1) $\varphi \wedge \neg\varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
2) $\varphi \rightarrow \psi$ όπου φ=Ταυτολογίακαι ψ=Αντίφαση (Μορφή $\mathrm{A} \rightarrow \Psi$)
3) $\neg\varphi$ όπου φ=Ταυτολογία
4) $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος

Γ. Μεθοδολογία

1. Γνωστές Μορφές Τύπων

Παραδείγματα:

Ελέγξτε αν οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες, αντιφάσεις ή ικανοποιήσιμοι(αλλά όχι ταυτολογίες)

- $\neg(p \vee \neg p)$
  Ο τύπος $p \vee \neg p$ είναι ταυτολογία. Άρα ο τύπος ως άρνηση ταυτολογίας είναι αντίφαση.
- $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$
  Ο τύπος $p \leftrightarrow \neg p$ είναι αντίφαση. Άρα ο τύπος ως άρνηση αντίφασης είναι ταυτολογία.
- $\mathrm{q} \vee \neg p \rightarrow (p \vee \neg p)$
  Ο τύπος $(p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία. Άρα ο τύπος έχει τη μορφή: ... $\rightarrow A$ άρα είναι ταυτολογία.
- $(\mathrm{q} \vee \neg p) \rightarrow ((r \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow q))$
  Ο τύπος $(r \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow q)$ είναι ταυτολογία. Άρα ο τύπος έχει τη μορφή: ... $\rightarrow A$ άρα είναι ταυτολογία.
- $(\mathrm{p} \wedge \neg p) \rightarrow (q \wedge \neg r \rightarrow q)$
  Ο τύπος $(\mathrm{p} \wedge \neg p)$ είναι αντίφαση. Άρα ο τύπος έχει τη μορφή: $\Psi \rightarrow \cdots$ άρα είναι ταυτολογία.

Γ. Μεθοδολογία

1. Γνωστές Μορφές Τύπων

- $\neg\neg\neg\neg p \vee \neg\neg\neg p$

  Διώχνοντας ανά δύο τις αρνήσεις προκύπτει ο τύπος $p \vee \neg p$ που είναι γνωστή ταυτολογία.
- $\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

  Ο τύπος είναι ταυτολογία ως συντακτική αντικατάσταση στο Αξιωματικό Σχήμα 1 (βλέπε Μάθημα 5) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ όπου $\varphi = \neg p$ και $\psi = q$
- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

  Ο τύπος είναι ταυτολογία ως εφαρμογή του νόμου αντιμεταθετικότητας της προτασιακής λογικής (βλέπε Μάθημα 3)
- $((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q))$

  Ο τύπος $((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q))$ είναι αντίφαση. Ο τύπος $((p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q))$ είναι ταυτολογία. Άρα ο τύπος είναι: $A \leftrightarrow \Psi = \Psi$ άρα είναι αντίφαση.
- $(q \leftrightarrow \neg p) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$

  Ο τύπος είναι της μορφής: $\varphi \rightarrow \varphi$ άρα είναι ταυτολογία.
- $p \vee q \vee \neg p$

  Ο τύπος είναι ταυτολογία διότι στα διαδοχικά or έχουμε την p και την άρνησή της.
- $p \wedge q \wedge \neg p$

  Ο τύπος είναι αντίφαση διότι στα διαδοχικά and έχουμε την p και την άρνησή της.

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 1

1. Να αποτιμηθεί ο τύπος:

   $$p \wedge \neg p \leftrightarrow (r \rightarrow \neg q)$$

   Δεδομένης της αποτίμησης α(p)=Α, α(q)=Ψ, α(r)=Ψ

2. Να αποτιμηθεί ο τύπος:

   $$(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$$

   Δεδομένης της αποτίμησης α(p)=Ψ, α(q)=Ψ, α(r)=Ψ

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Να κατασκευάσετε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

Α) $\phi_1 = (p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$

Β) $\phi_2 = (p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow p))$

Γ) $\phi_3 = (p \wedge \neg r) \vee (r \rightarrow q)$

Και με βάση τον πίνακα αλήθειας να εξετάσετε για κάθε τύπο, αν είναι ταυτολογία, αντίφαση ή ικανοποιήσιμος.

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Να εξετάσετε αν ο ακόλουθος τύπος είναι ταυτολογία, αντίφαση ή ικανοποιήσιμος κατασκευάζοντας τον πίνακα αλήθειας του:

$$\phi_1 = p \to (q \to r)$$

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 4

Να βρείτε την κανονική διαζευκτική μορφή του τύπου:

$$\phi_1 = p \vee q \rightarrow p \wedge q$$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες.

1. $(p_1 \vee p_2) \to p_1$

2. $p_1 \to (p_1 \vee p_2)$

3. $p_1 \leftrightarrow (p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$

4. $p_1 \to (p_1 \to p_2)$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Στους παρακάτω τύπους τα p_1, p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές

1. **Ο τύπος** $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_1$ **είναι ταυτολογία**

2. **Ο τύπος** $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_1$ **είναι ταυτολογία**

3. **Ο τύπος** $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$ **είναι ταυτολογία**

4. **Ο τύπος** $p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ **είναι ταυτολογία**

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

(Α) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι **τύποι** της ΠΛ:

i) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \neg q)$
ii) $p \wedge q \rightarrow (p \rightarrow r) \vee \neg q$
iii) $p \rightarrow (\neg q \rightarrow r \vee q)$
iv) $p \vee (\neg q \leftrightarrow (p \vee q))$
v) $p \rightarrow q \rightarrow r$
vi) $p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow r \wedge q)$

(Β) Ποιές από τις εκφράσεις του ερωτήματος 1 που είναι τύποι, είναι της μορφής: i) $\varphi \rightarrow \psi$, ii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$. Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις, εξηγείστε ποιοι είναι οι αντίστοιχοι **υποτύποι** φ, χ, ψ.

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Βρείτε μία αποτίμηση που να ικανοποιεί την πρόταση

$$((p_3 \vee \neg p_3) \rightarrow p_1) \wedge ((p_1 \vee \neg p_1) \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow p_4)$$
$$\wedge (p_1 \wedge p_4 \rightarrow \neg p_2) \wedge (p_2 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge \neg p_6 \rightarrow p_3) \wedge (p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_6 \rightarrow \neg p_5)$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.