ΔΙΑΙΡΕΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΛΕΥΕ

Ένας Αλγόριθμος Διαίρει και Βασίλευε συνίσταται στις εξής σχεδιαστικές αποφάσεις:

1. **ΒΗΜΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ:** Διάσπαση του αρχικού προβλήματος σε μικρότερα επιμέρους υποπροβλήματα.
2. **ΒΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΩΝ:** Επίλυση των επιμέρους υποπροβλημάτων (με αναδρομικές κλήσεις του ίδιου αλγόριθμου)
3. **ΒΗΜΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΛΥΣΕΩΝ:** Υπολογισμός της λύσης του αρχικού προβλήματος, από τις επιμέρους λύσεις των υποπροβλημάτων.

Αλγόριθμοι Διαίρει και Βασίλευε:

1. **MergeSort**, για το πρόβλημα ταξινόμησης μιας ακολουθίας n ακεραίων, Αναδρομική Σχέση: $T(n)=2T(n/2)+n$. Πολυπλοκότητα: $O(n\log n)$
2. **QuickSort** για το πρόβλημα της ταξινόμησης μιας ακολουθίας n ακεραίων. Αναδρομική Σχέση: $T(n)=T(k)+T(n-k)+n$, πολυπλοκότητα $O(n^2)$ στην χείριστη περίπτωση.
3. **BinarySearch**, για το πρόβλημα αναζήτησης στοιχείου σε μία ακολουθία n ακεραίων, Αναδρομική Σχέση: $T(n)=T(n/2)+n$. Πολυπλοκότητα: $O(\log n)$
4. **QuickSelect** για την επιλογή του στοιχείου που είναι στην θέση k στην ταξινομημένη ακολουθία. Αναδρομική Σχέση: $T(n)=T(7n/10)+n$. Πολυπλοκότητα: $O(n)$.
5. **Strassen**, για τον πολλαπλασιασμό δύο nxn πινάκων. Αναδρομική Σχέση: $T(n)=7T(n/2)+\Theta(n^2)$. Πολυπλοκότητα: $\Theta(n^{2.81})$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Σχεδιάζουμε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού σε **προβλήματα** που έχουν τα εξής **χαρακτηριστικά**:

- **Ιδιότητα των Βέλτιστων Επιμέρους Δομών:** Οτί για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να υπολογίσουμε την βέλτιστη λύση σε κάποια υποπροβλήματα, συνήθως με αναδρομή.
- **Μικρός Αριθμός Υποπροβλημάτων:** Το πλήθος των υποπροβλημάτων που πρέπει να λύσουμε είναι μικρό (δηλαδή πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος του προβλήματος)
- **Επικαλυπτόμενα Επιμέρους Προβλήματα:** Ότι λύνουμε πολλές φορές τα ίδια υποπροβλήματα με αποτέλεσμα να χάνουμε χρόνο

Βήματα Σχεδίασης Αλγόριθμου Δυναμικού Προγ/μού

1. Περιγράφουμε έναν **αναδρομικό αλγόριθμο** που λύνει το πρόβλημα
2. Δίνουμε την **αναδρομική σχέση** που υπολογίζει την βέλτιστη λύση (επίλυση από πάνω προς τα κάτω)
3. Διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι **τρεις συνθήκες** για την κατασκευή του αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού.
4. Με βάση την αναδρομική σχέση, κατασκευάζουμε την διαδικασία επίλυσης από τα μικρά προβλήματα σε όλο και μεγαλύτερα (**επίλυση από κάτω προς τα πάνω**)
5. Δίνουμε τον **επαναληπτικό αλγόριθμο** που κάνει την επίλυσή του προβλήματος
6. Υπολογίζουμε την **πολυπλοκότητα** του επαναληπτικού αλγορίθμου

Αλγόριθμοι Δυναμικού Προγραμματισμού:

1. **Υπολογισμός Αριθμού Fibonacci**. Πολυπλοκότητα: $O(n)$
2. **Αλυσιδωτός Πολλαπλασιασμός Πινάκων**. Πολυπλοκότητα $O(n^3)$
3. **Μέγιστη Κοινή Υπακολουθία**. Πολυπλοκότητα: $\Theta(nm)$.
4. **Συντομότερο Μονοπάτι σε Άκυκλο Κατευθυνόμενο Γράφημα (DAG)**. Πολυπλοκότητα: $O(n^2)$.

ΑΠΛΗΣΤΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Σχεδιάζουμε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού σε **προβλήματα** που έχουν τα εξής **χαρακτηριστικά**:

- Ιδιότητα της Άπληστης Επιλογής: Μια ακολουθία άπληστων επιλογών οδηγεί στην βέλτιστη λύση.
- Ιδιότητα των Βέλτιστων Επιμέρους Δομών: Οτί για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να υπολογίσουμε την βέλτιστη λύση σε κάποια υποπροβλήματα, συνήθως με αναδρομή.

Συνήθης διαδικασία για την κατασκευή ενός άπληστου αλγορίθμου

1. Ταξινομούμε τα δεδομένα από τα οποία επιλέγουμε την λύση
2. Επιλέγουμε το επόμενο στοιχείο με βάση την ταξινόμηση για να το εισάγουμε στη λύση μας.
   1. Αν η λύση που προκύπτει δεν παραβιάζει τους περιορισμούς του προβλήματος, διατηρούμε το στοιχείο στη λύση
   2. Αν η λύση που προκύπτει παραβιάζει τους περιορισμούς του προβλήματος, τότε απορρίπτουμε το στοιχείο.

   Εωσότου κατασκευαστεί η λύση

Ένας Άπληστος Αλγόριθμος:

Μπορεί να είναι βέλτιστος: Η απόδειξη γίνεται με δύο εναλλακτικούς (και συμπληρωματικούς) τρόπους:

1. Με μαθηματική επαγωγή. Ότι κάθε επιλογή του άπληστου αλγορίθμου είναι βέλτιστη.
2. Με απόδειξη των δύο ιδιοτήτων (βέλτιστες επιμέρους δομές και άπληστη επιλογή)

Μπορεί να μην είναι βέλτιστος: Η απόδειξη γίνεται με κατάλληλο αντιπαράδειγμα:

1. Δείχνουμε ότι ο αλγόριθμος επιστρέφει μία λύση που έχει ένα κόστος, που είναι χειρότερο από
2. Την βέλτιστη λύση.

Παραδείγματα Άπληστων Αλγορίθμων:

1. **Αγλόριθμος Dijkstra** για υπολογισμό συντομότερων μονοπατιών σε γράφημα: Πολυπλοκότητα: $O(n^2)$ και με ειδική δομή δεδομένων: $O(m+n\log n)$
2. **Αλγόριθμος Prim** για υπολογισμό συνδετικού δένδρου ελαχίστου κόστους: Πολυπλοκότητα: $O(n^2)$ και με ειδική δομή δεδομένων: $O(m+n\log n)$
3. **Αλγόριθμος Kruskal** για υπολογισμό συνδετικού δένδρου ελαχίστου κόστους: Πολυπλοκότητα $O(m \log n)$
4. **Επιστροφή Ρέστων.** Πολυπλοκότητα: $O(X)$, όπου X το ποσό επιστροφής

QUICKSORT (ΓΡΗΓΟΡΗ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Πίνακας Στοιχείων

ΕΞΟΔΟΣ: Ταξινομημένος (σε αύξουσα σειρά) πίνακας

ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΙΔΕΑ: Αναδρομικά:
- Βρες Οδηγό Στοιχείο
- Βάλε τα μικρότερα αριστερά και τα μικρότερα δεξιά
- Αναδρομικά ταξινόμησε τους δύο πίνακες.

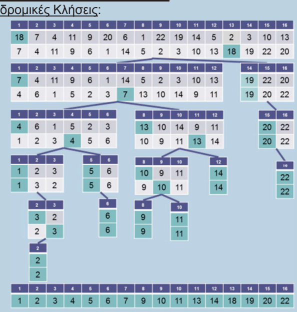
ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

```
procedure QuickSort(A,start,finish)
   if start<finish then
      pos=Partition(A,start,finish)
      QuickSort(A,start,pos-1)
      QuickSort(A,pos+1,finish)
   end if
end procedure
```

```
procedure Partition(A,start,finish)
    odigo=A[start]
    i=start;   j=finish
    for (k=start+1 to finish)
       if (A[k]>odigo)
          B[j]=A[k]; j=j-1
       else
          B[i]=A[k]; i=i+1
    end for
    B[i]=odigo; A=B
    return pos;
end procedure
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ:

Αναδρομικές Κλήσεις:



ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ:
Εξαρτάται από το οδηγό στοιχείο (με βάση αυτό αλλάζει το πλήθος των δεδομένων των αναδρομικών κλήσεων

Χειρότερη Περίπτωση: $T(n)=T(n-1)+\Theta(\mathrm{n})$ → Μέθοδος .... Επανάληψης → $T(n)=O(n^2)$

QUICKSELECT (ΓΡΗΓΟΡΗ ΕΠΙΛΟΓΗ)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Δίνεται ένας αταξινόμητος πίνακας με n στοιχεία. Ζητείται να βρεθεί το k-μικρότερο στοιχείο
ΕΞΟΔΟΣ: Η θέση του k-μικρότερου στοιχείου

ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΙΔΕΑ: Αναδρομικά:
- Βρες Οδηγό Στοιχείο
- Βάλε τα μικρότερα αριστερά και τα μικρότερα δεξιά
- Αναδρομικά επέλεξε τον έναν υποπίνακα.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

```
procedure QuickSelect(A,start,finish,k)
  if start>finish then
    return 0
  else
    Επιλογή στοιχείου m με την διαδικασία των
                                        5-άδων.
    swap(A[m],A[start])
    pos=Partition(A,start,finish)
    if k=pos then
      return A[pos]
    else if k<pos then
      return QuickSelect(A,start,pos-1,k)
    else if k>pos then
      return QuickSelect(A,pos+1,finish,k-pos)
    end if
  end if
end procedure
```

```
procedure Partition(A,start,finish)
    … βλέπε QuickSort …
end procedure
```

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ:
$T(n)=O(n)$ στην χειρότερη περίπτωση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ(Αναζητώ το 12ο μικρότερο)

Αναδρομικές Κλήσεις:

Διαδικασία 5-άδων: (Επιλογή του μεσαίου των μεσαίων …)

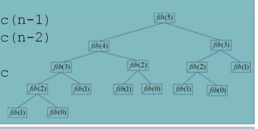
ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI

ΕΙΣΟΔΟΣ: Φυσικός n
ΕΞΟΔΟΣ: Ο n-οστός Fibonacci

$$f_n=\begin{cases}1, & n=1 \text{ ή } n=2\\ f_{n-1}+f_{n-2}, & n>2\end{cases}$$

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΜΕ ΑΝΑΔΡΟΜΗ)

```
procedure FibRec(n)
   if n=1 or n=2 then
      return 1
   else
      a=FibRec(n-1)
      b=FibRec(n-2)
      c=a+b
      return c
   end if
end procedure
```



ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ:

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1), & n=1 \text{ ή } n=2\\ T(n-1)+T(n-2)+\Theta(1), & n>2\end{cases}$$

Κάτω Φράγμα:

$K(n)=2K(n-2)+\Theta(1)$ → … Μέθοδος Επανάληψης → $T(n)=\Omega(2^{\frac{n}{2}})$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:
- Υπολόγισε την λύση επαναληπτικά από 1…n

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ)

```
procedure FibSeq(n)
   A[1]=1
   A[2]=1
   for i=3 to n
      A[i]=A[i-1]+A[i-2]
   end for
   return A[n]
end procedure
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ:

1	2	3	4	5	6	…	n
1	1	2	3	5	8	…	fib(n)

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
$T(n)=\Theta(n)$

Άνω Φράγμα:

$A(n)=2A(n-1)+\Theta(1)$ → … Μέθοδος Επανάληψης → $T(n)=O(2^n)$

ΑΛΥΣΙΔΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΕΙΣΟΔΟΣ: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ όπου ο πίνακας A_i είναι διάστασης d_{i-1} x d_i.
ΕΞΟΔΟΣ: Η σειρά που πολλαπλασιασμών του γινομένου A_1 x A_2 x … x A_n

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ (υπολογισμού της βέλτιστης λύσης):

$$M[i,j]=\begin{cases} 0, & i=j \\ \min\limits_{i\le k<j}\{M[i,k]+M[k+1,j]+d_{i-1}d_k d_j\}, & i<j \end{cases}$$

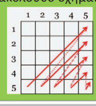
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ: για τον πολλαπλασιασμό πινάκων $A_1A_2A_3A_4$, όταν

A_1: 5x3, A_2: 3x4, A_3: 4x8, A_4:8x2, A_5: 2x3

	1	2	3	4
5				
4				A4 0
3			A3 0	A3A4 4x8x2=64
2		A2 0	A2A3 3x4x8=96	A2A3A4 (A2A3)A4=96+3x8x2=96+48=144 A2(A3A4)=64+3x4x2=64+24=88 88
1	A1 0	A1A2 5x3x4=60	A1A2A3 (A1A2)A3=60+5x4x8=220 A1(A2A3)=96+5x3x8=216 216	A1A2A3A4 A1(A2A3A4):88+5x3x2=88+30=118 (A1A2)(A3A4):60+64+5x4x2=164 (A1A2A3)A4:216+5x8x2=296 118

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Υπολόγισε την αναδρομή επαναληπτικά με βάση τη σειρά σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ)

```
procedure DP_MatMult(A1,A2,…,An)
   for i=1 to n
      m[i,i]=0
   end for
   for p=2 to n
      for i=2 to n-p+1
         j=i+p-1
         m[i,j]=+∞
         for k=1 to j-1
            q=M[i,k]+M[k+1,j]+d[i-1]*d[k]*d[j]
            if (q>M[i,j]) then M[i,j]=q ,
                               s[i,j]=k
         end for
      end for
   end for
   return M[1,n]
end procedure
```

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
$T(n)=O(n^3)$

ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΟΙΝΗ ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ www.psounis.gr

ΕΙΣΟΔΟΣ: Δίδονται ακολουθίες χαρακτήρων $X=x_1x_2x_3\ldots x_n$ και $Y=y_1y_2\ldots y_m$

ΕΞΟΔΟΣ: Το μέγιστο μήκος κοινής τους υπακολουθίας

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ (υπολογισμού της βέλτιστης λύσης):

$$f_n=\begin{cases} 0, & i=0 \;\; ή \;\; j=0 \\ c[i-1,j-1]+1, & i,j>0 \;\; και \; x_i=y_j \\ \max\{c[i,j-1],c[i-1,j]\}, & i,j>0 \;\; και \; x_i\neq y_j \end{cases}$$

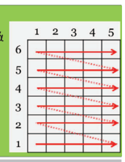
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ: για τις συμβολοσειρές

X=a**b**c**df** και Y=d**bd**a**f**

	1	2	3	4	5
5	X=abcdf Y=d c=1	X=abcdf Y=db c=1	X=abcdf Y=dbd c=2	X=abcdf Y=dbda c=2	X=abcd**f** Y=dbda**f** c=3
4	X=abcd Y=d c=1	X=abcd Y=db c=1	X=abc**d** Y=db**d** c=2	X=abcd Y=dbda c=2	X=abcd Y=dbdaf c=2
3	X=abc Y=d c=0	X=abc Y=db c=1	X=abc Y=dbd c=1	X=abc Y=dbda c=1	X=abc Y=dbdaf c=1
2	X=ab Y=d c=0	X=a**b** Y=d**b** c=1	X=ab Y=dbd c=1	X=ab Y=dbda c=1	X=ab Y=dbdaf c=1
1	X=a Y=d c=0	X=a Y=db c=0	X=a Y=dbd c=0	X=a Y=dbda c=1	X=a Y=dbdaf c=1

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Υπολόγισε την αναδρομή επαναληπτικά με βάση τη σειρά σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ)

```
procedure LCS(X,Y)
   for i=1 to n : c[i,0]=0
   for j=1 to m : c[0,j]=0
   for i=1 to n
      for j=1 to m
         if xi=yj then
           c[i,j]=c[i-1,j-1]+1
         else
            if (c[i-1,j]>c[i,j-1]) then
               c[i,j]=c[i-1,j]
            else
               c[i,j]=c[i,j-1]
            end if
         end if
      end for
   end for
   return c[n,m]
end procedure
```

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
T(n)=O(nm)

ΣΥΝΤΟΜΟΤΕΡΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΣΕ ΑΚΥΚΛΟ ΓΡΑΦΗΜΑ

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ www.psounis.gr

ΕΙΣΟΔΟΣ: Δίνεται άκυκλο κατευθυνόμενο γράφημα G=(V,E,W)

ΕΞΟΔΟΣ: Το συντομότερο μονοπάτι από την αφετηρία στον προορισμό

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ (προϋποθέτει τοπολογική ταξινόμηση των κόμβων 1,2,…,n):

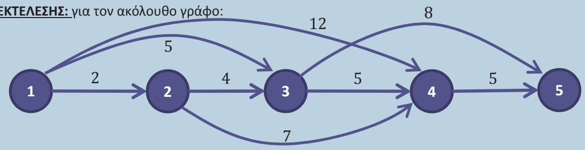
$$OPT[n]=\begin{cases} 0, & n=1 \\ min\{OPT[j]+W[j,n] \mid (j,n)\in E\} & n>1 \end{cases}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Αφού πρώτα γίνει μία ταξινόμηση των κόμβων ώστε στην διάταξη τους κάθε ακμή να είναι (v_i,v_j) με i<j (τοπολογική ταξινόμηση)
- Ο δυναμικός προγραμματισμός υπολογίζει επαναληπτικά την αναδρομή σχέση για i=1,…,n.

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
T(n)=O(n+m)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ: για τον ακόλουθο γράφο:



	1: **0** + 2 = 2	1: **0** + 5 = 5 2: **2** + 4 = 6	1: **0** + 12 = 12 2: **2** + 7 = 9 3: **5** + 5 = 10	3: **5** + 8 = 13 4: **9** + 5 = 14
OPT[1]=**0**	OPT[2]=**2**	OPT[3]=**5**	OPT[4]=**9**	OPT[5]=**13**