ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-3
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν 10 όμοιες (μη διακεκριμένες) καραμέλες σε 3 διακεκριμένα παιδιά είναι:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Ως διανομή 10 ομοίων σε 3 υποδοχές οι τρόποι είναι: $\binom{n+m-1}{n}=\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{10}=\frac{12!}{10!2!}$

1. Ίσος με τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 10 από 12 παιδιά όπου έχει σημασία η σειρά επιλογής

   Λάθος. Οι τρόποι ως διατάξεις με επανάληψη είναι: $P(12,10)=\frac{12!}{10!}$

2. Ίσος με τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 10 από 12 παιδιά χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής

   Σωστό. Οι τρόποι ως συνδυασμοί με επανάληψη είναι: $C(12,10)=\frac{12!}{10!2!}$

3. Ίσος με τους τρόπους επιλογής 10 χρωμάτων από 3 χρώματα όπου επιτρέπεται η επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής

   Σωστό. Οι τρόποι ως συνδυασμοί με επανάληψη είναι: $\binom{n+k-1}{k}=\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{10}=\frac{12!}{10!2!}$

4. Ίσος με τους τρόπους επιλογής 3 χρωμάτων από 10 χρώματα όπου επιτρέπεται η επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής

   Λάθος. Οι τρόποι ως συνδυασμοί με επανάληψη είναι: $\binom{n+k-1}{k}=\binom{10+3-1}{3}=\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!9!}$

(2) Έστω Α σύνολο με *n* στοιχεία

1. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α είναι ίσος με n^2

   Λάθος. Ο αριθμός των υποσυνόλων είναι: 2^n

2. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με *k* στοιχεία είναι ίσος με το συντελεστή του x^{n-k} στην παράσταση $(1+x)^n$

   Σωστό. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με *k* στοιχεία είναι ίσος με $\binom{n}{k}$

   Ο συντελεστή του x^{n-k} στην παράσταση $(1+x)^n$ είναι ίσος με $\binom{n}{n-k}$

   Ισχύει ότι: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

3. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με *k* στοιχεία είναι ίσος με τους συνδυασμούς *k* στοιχείων από *n-k*+1 στοιχεία με επανάληψη.

   Σωστό. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με *k* στοιχεία είναι ίσος με $\binom{n}{k}$

   Οι συνδυασμοί k στοιχείων από n+k-1 με επανάληψη είναι ίσος με $\binom{(n-k+1)+k-1}{k}=\binom{n}{k}$

   Συνεπώς είναι ίσα

4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α είναι ίσος με το άθροισμα όλων των συντελεστών του πολυωνύμου $(1+x)^n$

   Σωστό. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α είναι ίσος με 2^n

   Το ανάπτυγμα του πολυωνύμου $(1+x)^n$ είναι (βλέπε διωνυμικό ανάπτυγμα) $\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\cdots+\binom{n}{n}x^n$ συνεπώς το άθροισμα των αντίστοιχων συντελεστών είναι: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$ που ισούται με το 2^n από το διωνυμικό ανάπτυγμα.

(3)Θεωρούμε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετήσουμε 8 διακεκριμένα αντικείμενα σε 2 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να πάρει τουλάχιστον 2 αντικείμενα, όταν δεν ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των αντικειμένων στις υποδοχές. Αυτός ο αριθμός είναι ίσος με:

1. Το συντελεστή του x^8 στη γεννήτρια συνάρτηση $(x^2+x^3+x^4)^2$.
   Λάθος. Χρησιμοποιείται απλή γεννήτρια, ενώ θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί εκθετική γεννήτρια (πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές).
2. Το συντελεστή του $x^8/8!$ στη γεννήτρια συνάρτηση $(e^x - 1 - x)^2$.
   Σωστό. Η γεννήτρια είναι ισοδύναμη με την $\left(\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-1-x\right)^2=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$ που είναι η σωστή γεννήτρια συνάρτηση για αυτό το πρόβλημα, αφού έχει δύο απαριθμητές (έναν για κάθε υποδοχή) που σέβονται τον περιορισμό κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα. Επίσης ο ζητούμενος συντελεστής είναι σωστός, αφού διανέμονται 8 αντικείμενα στις υποδοχές.
3. Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 με τουλάχιστον 2 μηδέν και τουλάχιστον 2 άσσους.
   Σωστό. Η μοντελοποίηση του προβλήματος με εκθετική γεννήτρια (ως πρόβλημα διατάξεων) είναι $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$ αφού πρέπει να γράψουμε 2 απαριθμητές έναν για κάθε ψηφίο (0 και 1) που σέβεται τον περιορισμό να έχουμε τουλάχιστον 2 από κάθε αντικείμενο. Επίσης ο ζητούμενος συντελεστής είναι σωστός, αφού η διάταξη έχει μήκος 8.
4. Όσοι οι 2x4 πίνακες με κάθε στοιχείο να είναι 0 ή 1 με τουλάχιστον δύο μηδενικά και τουλάχιστον 2 άσσους.
   Σωστό. Ένας 2x4 πίνακας έχει 8 θέσεις. Η μοντελοποίηση του προβλήματος με εκθετική γεννήτρια (ως πρόβλημα διατάξεων) είναι $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$ αφού πρέπει να γράψουμε 2 απαριθμητές έναν για κάθε στοιχείο (0 και 1) που σέβεται τον περιορισμό να έχουμε τουλάχιστον 2 από κάθε αντικείμενο. Επίσης ο ζητούμενος συντελεστής είναι σωστός, αφού η διάταξη έχει μήκος 8.

(4) Θεωρούμε το σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{p_1 \vee \neg p_2,\ p_1 \wedge p_2,\ p_1 \vee p_3\}$. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν και ποιες όχι;
ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Κατασκευάζοντας τον αληθοπίνακα των τριών τύπων του συνόλου τύπων εντοπίζουμε τις αποτιμήσεις στις οποίες αληθεύουν και οι τρείς τύποι και είναι οι εξής: 1η αποτίμηση: $p_1 = A, p_2 = A, p_3 = A$. 2η αποτίμηση: $p_1 = A, p_2 = A, p_3 = \Psi$.

1. $T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$
   Σωστό. Ο τύπος αληθεύει και στις 2 αποτιμήσεις
2. $T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$
   Λάθος. Ο τύπος δεν αληθεύει στην δεύτερη αποτίμηση
3. $T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$
   Λάθος. Ο τύπος δεν αληθεύει στην δεύτερη αποτίμηση
4. $T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$
   Σωστό. Ο τύπος αληθεύει και στις 2 αποτιμήσεις

(5) Για τους προτασιακούς τύπους f, g και h ισχύει: $f \models g$, $g \vdash_{ΠΛ} \neg h$ και $\neg h \models f$. Τότε πάντα ισχύει επίσης και ότι:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Από τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας έχουμε ότι $f \models g$, $g \models \neg h$ και $\neg h \models f$, άρα οι τύποι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι δηλαδή $f \equiv g \equiv \neg h$, άρα όταν $f = g = A$ έχω $h = \Psi$ και όταν $f = g = \Psi$ έχω $h = A$

1. Ο τύπος $f \vee h$ είναι ταυτολογία

   Σωστό. Αφού οι f,h έχουν αντίθετες αποτιμήσεις, άρα αληθεύει τουλάχιστον ένας από αυτούς.

2. Ο τύπος $f \vee g$ είναι ταυτολογία

   Λάθος. Αφού ενδέχεται οι τύποι f,g να είναι και οι δύο ψευδείς.

3. Και οι τρεις τύποι f, g και h, περιλαμβάνουν τις ίδιες ακριβώς προτασιακές μεταβλητές

   Λάθος. Οι 3 τύποι μπορούν να έχουν διαφορετικές μεταβλητές. (Π.χ. f,g μπορεί να είναι οποιεσδήποτε ταυτολογίες και h να είναι οποιαδήποτε αντίφαση.

4. Ισχύει ότι $\{f, g\} \vdash_{ΠΛ} \neg h$, αλλά δεν ισχύει ότι $\{f, g\} \models \neg h$

   Λάθος. Ελέγχουμε την πρώτη πρόταση ως $\{f, g\} \models \neg h$ (θεώρημα εγκυρότητας) αφού όταν $f = g = A$, έχω $\neg h = A$. Συνεπώς ισχύει. Συνεπώς ισχύει και η 2η πρόταση.

(6) Οι παρακάτω δομές ικανοποιούν την πρόταση $\forall x \forall y [P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y]$

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με $P(x, y)$ να σημαίνει $x \leq y$
   Σωστό. Η πρόταση ερμηνεύεται «Για κάθε ζεύγος φυσικών αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$» που ισχύει (γνωστή ιδιότητα των φυσικών αριθμών – βλέπε και τυπολόγιο)
2. Το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{1,2,3\}$ με $P(x, y)$ να σημαίνει $x \subseteq y$
   Σωστό. Η πρόταση ερμηνεύεται «Για κάθε ζεύγος συνόλων αν $x \subseteq y$ και $y \subseteq x$ τότε $x = y$» που ισχύει (ο ορισμός της ισότητας συνόλων: δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου)
3. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με $P(x, y)$ να σημαίνει $x \leq y$
   Σωστό. Η πρόταση ερμηνεύεται «Για κάθε ζεύγος πραγματικών αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$» που ισχύει (γνωστή ιδιότητα των φυσικών αριθμών – βλέπε και τυπολόγιο)
4. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με $P(x, y)$ να σημαίνει $x < y$
   Σωστό. Η πρόταση ερμηνεύεται «Για κάθε ζεύγος πραγματικών αν $x < y$ και $y < x$ τότε $x = y$» που ισχύει διότι η υπόθεση είναι ψευδής για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών (Ψ->...)

(7) Ρίχνουμε 4 φορές ένα ζάρι

1. Τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν η σειρά δεν έχει σημασία, είναι όσα ο συντελεστής του x^4 στην $\left(x+x^2+....+x^6\right)^4$.

   Λάθος. Η γεννήτρια είναι απλή διότι πρόκειται για πρόβλημα συνδυασμών. Οι απαριθμητές πρέπει να είναι 6 (όσα και τα αντικείμενα του κουβά που είναι 1…6). Κάθε απαριθμητής πρέπει να έχει στους εκθέτες από το 0 έως το 4 (Αφού κάθε αποτέλεσμα μπορεί να υπάρχει σε κανένα εώς σε όλα τα ζάρια).Συνεπώς η σωστή γεννήτρια είναι $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^6$ ενώ ο ζητούμενος συντελεστής είναι του του x^4 αφού επιλέγουμε 4 αντικείμενα).

2. Τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν η σειρά δεν έχει σημασία είναι C(9, 4).

   Σωστό. Ως συνδυασμοί με επανάληψη οι τρόποι είναι: $\binom{n+k-1}{k}=\binom{6+4-1}{4}=\binom{9}{4}$

3. Τα διαφορετικά αποτελέσματα είναι 4^6 όταν η σειρά έχει σημασία.

   Λάθος. Ως διατάξεις με επανάληψη οι τρόποι είναι: $n^k=6^4$

4. Τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν η σειρά δεν έχει σημασία, είναι όσα ο συντελεστής του x^4 στην $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^6$

   Σωστό. Βλέπε απάντηση υποερωτήματος 1.

(8) Οι διαφορετικές δεκαδικές συμβολοσειρές μήκους n με k (ακριβώς) μηδενικά είναι:

ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Επιλέγω τις θέσεις των μηδενικών με C(n,k) τρόπους. Στις υπολοιπες n-k θέσεις έχω 9 επιλογές (για κάθε θέση) άρα οι επιλογές είναι 9^{n-k}. Από τον κανόνα γινόμενου: C(n,k)* 9^{n-k}

1. $C(n+k-1,k)$

   Λάθος.

2. 10^n-9^{n-k}

   Λάθος.

3. $9^{n-k}\cdot C(n,k)$

   Σώστο.

4. Όσες ο συντελεστής του $x^n/n!$ στην παράσταση e^{10x} .

   Λάθος. 10^n

(9) *Στους παρακάτω τύπους τα p_1, p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές*

1. Κάθε τύπος συνεπάγεται ταυτολογικά μια αντίφαση
   Λάθος. Δεν ισχύει το ... $\vDash \Psi$ (δεν ισχύει όταν η υπόθεση είναι αληθής)
2. Κάθε τύπος συνεπάγεται ταυτολογικά μια ταυτολογία
   Σωστό. Ισχύει πάντα: ... $\vDash A$
3. Υπάρχει μία μόνο αποτίμηση των p_1, p_2 που δεν ικανοποιεί τον τύπο $(p_1 \wedge \neg p_2) \to p_1$.
   Λάθος. Ο τύπος είναι ταυτολογία.
4. Ο τύπος $(\neg p_1 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \neg p_1$ είναι ταυτολογία
   Λάθος. Δεν αληθεύει για $p_1=\Psi$. Έχω: $(\neg p_1 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \neg p_1 = (\neg\Psi \leftrightarrow \Psi) \leftrightarrow \neg\Psi = \Psi \leftrightarrow A = \Psi$

(10) Θεωρούμε γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P

1. Ο τύπος $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x < y$.
   Λάθος. Η πρόταση γράφεται $\forall x \exists y ((x<y) \wedge (y<x))$ και περαιτέρω $\forall x \exists y (x<y<x)$ και ερμηνεύεται: για κάθε φυσικό υπάρχει ένας φυσικός που είναι και μεγαλύτερος και μικρότερος του. Είναι ψευδής.
2. Ο τύπος $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x \le y$.
   Σωστό. Η πρόταση γράφεται $\forall x \exists y ((x \le y) \wedge (y \le x))$ και περαιτέρω $\forall x \exists y (x \le y \le x)$ και ερμηνεύεται: για κάθε φυσικό υπάρχει ένας φυσικός που είναι και μεγαλύτερος ή ίσος και μικρότερος ή ίσος του. Είναι αληθής (για y=x).
3. Ο τύπος $\forall x \exists y \exists z (P(y,x) \wedge P(x,z))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x < y$.
   Λάθος. Η πρόταση γράφεται $\forall x \exists y \exists z ((y<x) \wedge (x<z))$ και περαιτέρω $\forall x \exists y \exists z (y<x<z)$ και ερμηνεύεται: κάθε φυσικός έχει κάποιον μικρότερο από αυτόν και κάποιον μεγαλύτερο από αυτόν. Είναι ψευδής (δεν ισχύει για x=0).
4. Ο τύπος $\forall x \exists y \exists z (P(y,x) \wedge P(x,z))$ αληθεύει στο σύνολο των πραγματικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x < y$
   Σωστό. Η πρόταση γράφεται $\forall x \exists y \exists z ((y<x) \wedge (x<z))$ και περαιτέρω $\forall x \exists y \exists z (y<x<z)$ και ερμηνεύεται: κάθε πραγματικός έχει κάποιον μικρότερο από αυτόν και κάποιον μεγαλύτερο από αυτόν. Είναι αληθής (το σύνολο των πραγματικών δεν έχει ούτε ελάχιστο, ούτε μέγιστο στοιχείο).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

α) Στο γειτονικό βιβλιοπωλείο υπάρχουν 5 βιβλία Α που το καθένα κοστίζει 10 ευρώ, 8 βιβλία Β που το καθένα κοστίζει 5 ευρώ και 5 βιβλία Γ που το καθένα κοστίζει 4 ευρώ. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο της γεννήτριας ο συντελεστής του οποίου δίχνει τον τρόπο που μπορεί να γίνει η αγορά των βιβλίων έτσι ώστε:

(i) Να αγοραστούν 6 βιβλία με τον περιορισμό να επιλεχθούν άρτια Α και περιττά Β.

(ii) Να αγοραστούν βιβλία αξίας 35 ευρώ με τον περιορισμό να επιλεχθούν περιττά Γ, τουλάχιστον ένα Β και το πολύ 2Α.

β) 100 πρωτοετείς και 50 δευτεροετείς φοιτητές παρακολουθούν το μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά»

(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους χωρίσουμε σε ομάδες των 10 ατόμων για να πραγματοποιήσουν μια εργασία (κάθε ομάδα έχει το ίδιο θέμα)

(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους χωρίσουμε σε ομάδες των 10 ατόμων για να πραγματοποιήσουν μια εργασία (κάθε ομάδα έχει διαφορετικό θέμα)

(iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε μία σειρά, αν οι πρωτοετείς θεωρούνται μη διακεκριμένοι και δεν πρέπει να βρίσκονται δευτεροετείς φοιτητές σε διαδοχικές θέσεις.

Λύση:

(Υποερώτημα α.i)

Χρησιμοποιώ απλή γεννήτρια συνάρτηση γιατί είναι πρόβλημα επιλογής:

Ο απαριθμητής για τα Α (0 εώς 5, άρτιο πλήθος): $(1+x^2+x^4)$

Ο απαριθμητής για τα Β (0 εώς 8, περιττό πλήθος): $(x+x^3+x^5+x^7)$

Ο απαριθμητής για τα Γ (0 εώς 5): $(1+x+x^2+\cdots+x^5)$

Η γεννήτρια είναι: $(1+x^2+x^4)(x+x^3+x^5+x^7)(1+x+x^2+\cdots+x^5)$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

(Υποερώτημα α.ii)

Χρησιμοποιώ απλή γεννήτρια συνάρτηση γιατί είναι πρόβλημα επιλογής:

Ο απαριθμητής για τα Α (το πολύ 2, αξία 10 κάθε αντικειμένου): $(1+x^{10}+x^{20})$

Ο απαριθμητής για τα Β (τουλάχιστον 1, το πολύ 8, αξία 5 κάθε αντικειμένου): $(x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{40})$

Ο απαριθμητής για τα Γ (0 εώς 5, περιττό πλήθος, αξία 4 ευρώ): $(x^4+x^{12}+x^{20})$

Η γεννήτρια είναι: $(1+x^{10}+x^{20})(x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{40})(x^4+x^{12}+x^{20})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{35} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

(Υποερώτημα β.i)

Για την 1η ομάδα έχουμε $\binom{150}{10}$ τρόπους

Για την 2η ομάδα έχουμε $\binom{140}{10}$ τρόπους

…

Για την 15η ομάδα έχουμε $\binom{10}{10}$ τρόπους

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{150}{10}\cdot\binom{140}{10}\cdot\ldots\cdot\binom{10}{10}$ τρόπους.

Στην παραπάνω λύση κάθε τρόπος έχει μετρηθεί 15! φορες διότι κάθε όμάδα έχει κοινό θέμα. Άρα οι τρόποι τελικά είναι:

$$\frac{\binom{150}{10}\cdot\binom{140}{10}\cdot\ldots\cdot\binom{10}{10}}{15!}$$

(Υποερώτημα β.ii)

Για την 1η ομάδα έχουμε $\binom{150}{10}$ τρόπους

Για την 2η ομάδα έχουμε $\binom{140}{10}$ τρόπους

…

Για την 15η ομάδα έχουμε $\binom{10}{10}$ τρόπους

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{150}{10} \cdot \binom{140}{10} \cdot \ldots \cdot \binom{10}{10}$ τρόπους.

(Υποερώτημα β.iii)

Τοποθετούμε τους δευτεροετείς σε μία σειρά με 50! τρόπους ως μεταθέσεις.

Τοποθετούμε μία υποδοχή μεταξύ κάθε δύο δευτεροετών φοιτητών και μία στην αρχή και μία στο τέλος της σειράς. Τοποθετώ έτσι 51 υποδοχές.

Τοποθετώ έναν πρωτοετή σε κάθε ενδιάμεση υποδοχή για να ικανοποιήσω τον περιορισμό. Τοποθετούνται έτσι 49 πρωτοετείς και απομένουν ακόμη 100-49=51 τους οποίους διανέμω στις 51 υποδοχές με $\binom{51+51-1}{51} = \binom{101}{51}$ τρόπους.

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $50! \cdot \binom{101}{51}$

Άσκηση 2 (Μονάδες 35)

α) Έστω φ, χ, ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους δίνεται ότι φ |- ψ , ψ |- $\neg\chi$ *και* $\neg\chi$ |= φ. Δείξτε ότι οι τύποι φ και ψ είναι ισοδύναμοι.

β) Δώστε τυπική απόδειξη του τύπου $(\varphi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\varphi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Δώστε κανονική ποσοδεικτική μορφή του τύπου $\forall x P(x,y) \to [\forall x P(y,x) \to P(x,y)]$

δ) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x\,(Q(x) \lor P(x)) \to (\exists x\, Q(x) \lor \forall x\, P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x\, Q(x) \lor \forall x\, P(x)) \to \forall x\,(Q(x) \lor P(x))$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Η μία από τις παραπάνω προτάσεις είναι λογικά έγκυρη ενώ η άλλη όχι.

α) Ποια πρόταση ***δεν είναι*** λογικά έγκυρη; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας διατυπώνοντας μια ερμηνεία (δομή) στην οποία αυτή η πρόταση δεν αληθεύει.

β) Να δείξετε ότι η άλλη πρόταση ***είναι*** λογικά έγκυρη χρησιμοποιώντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski. ***Υπόδειξη****: Μπορείτε να δείξετε πως δεν μπορεί να αληθεύει η υπόθεση του τύπου και να μην αληθεύει το συμπέρασμά του.*

Λύση:

(Υποερώτημα α)

Αφού φ |- ψ από το θεώρημα εγκυρότητας έπεται ότι φ |= ψ (1)

Αφού ψ |- $\neg\chi$ από το θεώρημα εγκυρότητας έπεται ότι ψ |= $\neg\chi$ άρα όταν αληθεύει ο ψ αληθεύει και ο $\neg\chi$. Επίσης αφού $\neg\chi$ |= φ έπεται ότι όταν αληθεύει ο $\neg\chi$, αληθεύει και ο φ. Συνεπώς όταν αληθεύει ο ψ, αληθεύει και ο φ. Άρα ψ |= φ (2)

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\varphi \equiv \psi$

(Υποερώτημα β)

Πρέπει να δείξουμε ότι $\vdash (\varphi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\varphi)$

Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να δείξω ότι:

$$\varphi \to \chi \vdash \neg\chi \to \neg\varphi$$

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω ότι:

$$\{\varphi \to \chi, \neg\chi\} \vdash \neg\varphi$$

Από το θεώρημα αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω ότι:

$$\{\varphi \to \chi, \varphi\} \vdash \neg\neg\chi$$

Που έχει τυπική απόδειξη:

1.	φ	Υπόθεση
2.	$\varphi \to \chi$	Υπόθεση
3.	χ	MP1,2
4.	$\chi \to \neg\neg\chi$	Τυπικό Θεώρημα
5.	$\neg\neg\chi$	MP3,4

Η τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος $\vdash \chi \to \neg\neg\chi$ είναι:

Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $\chi \vdash \neg\neg\chi$

Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $\neg\chi \vdash \neg\chi$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\chi$ υπόθεση

(Υποερώτημα γ)

$\forall x P(x,y) \to [\forall x P(y,x) \to P(x,y)]$ (αλφαβητική παραλλαγή)

$\equiv \forall z P(z,y) \to [\forall w P(y,w) \to P(x,y)]$ (ν.μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \forall z P(z,y) \to \exists w [P(y,w) \to P(x,y)]$ (ν.μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \exists w [\forall z P(z,y) \to [P(y,w) \to P(x,y)]]$ (ν.μετακίνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \exists w \exists z [P(z,y) \to [P(y,w) \to P(x,y)]]$

(Υποερώτημα δ.α)

Ο τύπος ψ δεν είναι λογικά εγκυρός. Ένα παράδειγμα ερμηνείας που δεν αληθεύει ο τύπος είναι η ακόλουθη:
|A|: Φυσικοί Αριθμοί

$Q^A(x)$ αληθές αν x=0
$P^A(x)$ αληθές αν x: περιττός

Η πρόταση εκφράζει ότι:
Υπάρχει φυσικός που είναι ίσος με το 0 (που αληθέυει) ή όλοι οι φυσικοί είναι περιττοί (που είναι ψευδής)
Το συμπέρασμα εκφράζει ότι:
Για κάθε φυσικό ισχύει ότι (είναι ίσος με το 0 ή είναι περιττός) που δεν αληθεύει.

(Υποερώτημα δ.β)

Ο τύπος φ είναι λογικά εγκυρός. Εστω τυχούσα δομή A και αποτίμηση v:

Αν για κάθε α∈|A|: $Q^A(\alpha)$ αληθές ή $P^A(\alpha)$ αληθές
Τότε υπάρχει α∈|A|: $Q^A(\alpha)$ αληθές ή για κάθε α∈|A|: $P^A(\alpha)$ αληθές

Απόδειξη: Έστω για κάθε α∈|A|: $Q^A(\alpha)$ αληθές ή $P^A(\alpha)$ αληθές.
Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

- Αν $Q^A(\alpha)$ αληθές έστω για μία τιμή του α, τότε αληθεύει ότι υπάρχει α∈|A|: $Q^A(\alpha)$ αληθές, άρα αληθεύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής.
- Αν $Q^A(\alpha)$ δεν αληθεύει για καμία τιμή του α, τότε λόγω της αλήθειας της υπόθεσης, το $P^A(\alpha)$ αληθές είναι αληθές για κάθε τιμή του α ∈|A|. Άρα αληθεύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής.

Συνεπώς ο τύπος είναι λογικά έγκυρος.

<u>Άσκηση 3 (Μονάδες 25)</u>

1. Θέλουμε να γεμίσουμε ένα ράφι βιβλιοθήκης που έχει μήκος 1 μέτρο με βιβλία των οποίων το πάχος (μήκος της ράχης) είναι 10 εκατοστά ή 5 εκατοστά. Να διατυπώσετε γεννήτρια συνάρτηση και να επισημάνετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δείχνει τον αριθμό των τρόπων να γεμίσει το ράφι, αν δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων, τα βιβλία κάθε μεγέθους θεωρούνται μη διακεκριμένα, και πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα βιβλίο κάθε μεγέθους στο ράφι. Να υπολογίσετε τον συγκεκριμένο συντελεστή.
2. Έχουμε στη διάθεσή μας 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μέτρου το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.
3. Έχουμε στη διάθεσή μας 3 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γεμίσει ένα ράφι μήκους 1 μέτρου, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι.

Λύση:

(Υποερώτημα 1)

Έχουμε να γράψουμε μια γεννήτρια συνάρτηση που κάθε επιλογή που κάνουμε συμβάλλει διαφορετικά στον ζητούμενο στόχο, δηλαδή να καλύψουμε το 1 μέτρο (=100 εκατοστά) της βιβλιοθήκης μας.
Γράφουμε απλή γεννήτρια διότι πρόκειται για απλή γεννήτρια.
Οι απαριθμητές είναι:

- Απαριθμητής για τα βιβλία 5 cm: $(x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{100})$
- Απαριθμητής για τα βιβλία 10 cm: $(x^{10}+x^{20}+x^{30}+\cdots+x^{100})$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{100})(x^{10}+x^{20}+x^{30}+\cdots+x^{100})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Υπολογισμός Συντελεστή: Ο όρος x^{100} θα προκύψει αν πολλαπλάσιασουμε αντίστοιχα από τους δύο απριθμητές:
Τον όρο x^{10} και τον όρο x^{90}
Τον όρο x^{20} και τον όρο x^{80}
…
Τον όρο x^{90} και τον όρο x^{10}
Συνεπώς ο ζητούμενος συντελεστής είναι 9.

(Υποερώτημα 2)

Το πρόβλημα είναι διανομή 20 διαφορετικών με σειρά στις 3 υποδοχές. Άρα οι τρόποι είναι: $\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}=\frac{(3+20-1)!}{(3-1)!}=\frac{22!}{2!}$
[Παρατήρηση: Ο τύπος βρίσκει εφαρμογή διότι σε κάθε υποδοχή (ράφι) χωράνε από κανένα εώς όλα τα αντικείμενα]

(Υποερώτημα 3)

Διακρίνω περιπτώσεις διότι στο ράφι χωράνε βιβλία 100 εκατοστών συνολικά, άρα υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1. Να έχω 0 βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 βιβλία με πάχος 5 εκατοστά. Το πρόβλημα είναι μεταθέσεις 20 διαφορετικών, άρα οι τρόποι είναι: 20!
2. Να έχω 1 βιβλίο με πάχος 10 εκατοστά και 18 βιβλία με πάχος 5 εκατοστά. Επιλέγω τα 18 διαφορετικά με $\binom{20}{18}$ τρόπους και έπειτα διατάσσω 19 διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα με 19! Τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{20}{18}\cdot 19!$
3. Να έχω 2 βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 16 βιβλία με πάχος 5 εκατοστά. Επιλέγω τα 16 διαφορετικά με $\binom{20}{16}$ τρόπους και έπειτα διατάσσω 16 διαφορετικά + 2 όμοια που ως διατάξεις ομάδων ομοίων οι τρόποι είναι: $\frac{18!}{1!1!\ldots1!2!}=\frac{18!}{2!}$. Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{20}{16}\cdot\frac{18!}{2!}$

4. Να έχω 3 βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 14 βιβλία με πάχος 5 εκατοστά. Επιλέγω τα 14 διαφορετικά με $\binom{20}{14}$ τρόπους και έπειτα διατάσσω 14 διαφορετικά + 3 όμοια που ως διατάξεις ομάδων ομοίων οι τρόποι είναι: $\frac{17!}{1!1!\ldots1!3!}=\frac{17!}{3!}$. Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι: $\binom{20}{14}\cdot\frac{17!}{3!}$

Από τον κανόνα του αθροίσματος οι συνολικοί τρόποι είναι:

$$20!+\binom{20}{18}\cdot 19!+\binom{20}{16}\cdot\frac{18!}{2!}+\binom{20}{14}\cdot\frac{17!}{3!}$$

Άσκηση 4 (Μονάδες 15)

α) Χωρίς να επικαλεστείτε ούτε το θεώρημα Πληρότητας αλλά ούτε και γνωστά θεωρήματα (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπον απαγωγή κλπ) δείξτε ότι $\{\neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γνωστά θεωρήματα για τον Προτασιακό Λογισμό (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπον απαγωγή κλπ.) αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας.

γ) Δείξτε ότι δεν είναι λογικά έγκυρος ο τύπος $\forall x \exists y \varphi(x,y) \to \exists x \forall y \varphi(x,y)$, περιγράφοντας μια ερμηνεία της γλώσσας της Θεωρίας Αριθμών που να μην τον ικανοποιεί.

Λύση:

(Υποερώτημα α)

Η τυπική απόδειξη είναι:

6. $\neg\varphi$	Υπόθεση
7. $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	ΣΑ στο ΑΣ1 θέτοντας $\varphi : \neg\varphi$ και $\psi : \neg\psi$
8. $\neg\psi \to \neg\varphi$	ΜΡ1,2
9. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	ΣΑ στο ΑΣ3 θέτοντας $\varphi : \psi$ και $\psi : \varphi$
10. $(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	ΜΡ3,4

(Υποερώτημα β)

Πρέπει να δείξουμε ότι $\vdash \big((\varphi \to \psi) \to \neg\chi\big) \to \big(\chi \to \neg(\varphi \to \psi)\big)$

Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να δείξω ότι:

$$(\varphi \to \psi) \to \neg\chi \vdash \chi \to \neg(\varphi \to \psi)$$

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω ότι:

$$\{(\varphi \to \psi) \to \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$$

Από το θεώρημα αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω ότι:

$$\{(\varphi \to \psi) \to \neg\chi, \varphi \to \psi\} \vdash \neg\chi$$

Που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\varphi \to \psi$	Υπόθεση
2. $(\varphi \to \psi) \to \neg\chi$	Υπόθεση
3. $\neg\chi$	ΜΡ1,2

(Υποερώτημα γ)

Ερμηνεύω τον τύπο φ(x,y) ως ο φυσικός x είναι μικρότερος από τον y. Οπότε η πρόταση ερμηνεύεται ως: «Αν κάθε φυσικός είναι μικρότερος από τουλάχιστον ένα φυσικό τότε υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος από όλους τους φυσικούς» και είναι ψευδής διότι αληθεύει η υπόθεση (κάθε φυσικός έχει έναν επόμενο) ενώ δεν αληθεύει το συμπέρασμα (δεν αληθεύει ούτε για x=0, αφου το 0 δεν είναι μικρότερο από τον εαυτό του).