

# ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ22

## ΘΕΜΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Άσκηση 1) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = 5n^{7/3}$$

$$f_2(n) = 2^{2 \log n^n}$$

$$f_3(n) = 2^{\sqrt{(\log n)^3}}$$

$$f_4(n) = n^{\log \log n}$$

$$f_5(n) = 2^{2^n}$$

Ο συμβολισμός  $\log$  παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση  $f$  έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την  $g$  ( $f \equiv g$ ), αν  $f = \Theta(g)$  (ισοδύναμα  $\Theta(f) = \Theta(g)$ ). Η συνάρτηση  $f$  έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την  $g$  ( $f < g$ ), αν  $f = o(g)$ .

(Ασκηση 2) Να λύσετε τις αναδρομές:

(B) Να λύσετε τις αναδρομές:

$$(1) \quad T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{2n}{5}\right) + \log n$$

$$(2) \quad T(n) = 128T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{7/4}$$

$$(3) \quad T(n) = 5T\left(\frac{n}{25}\right) + \sqrt{n}$$

$$(4) \quad T(n) = T(n-1) + 2n^5$$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

**Θεώρημα Κυριαρχίας:** Έστω η αναδρομική εξίσωση  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ , όπου  $a \geq 1$ ,  $b > 1$  είναι σταθερές, και  $f(n)$  είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν  $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ , για κάποια σταθερά  $\epsilon > 0$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) αν  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ , για κάποια σταθερά  $\epsilon > 0$ , και αν υπάρχει σταθερά  $n_0$ , τέτοια

ώστε, για κάθε  $n \geq n_0$ ,  $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$  για κάποια σταθερά  $c < 1$ , τότε  $T(n) = \Theta(f(n))$ .

Υπόδειξη:  $\sum_{i=1}^n i^5 = \Theta(n^6)$

**ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ**

Άσκηση 1: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$$L_1 = 1(0+1)^*1(0+1)^*(0+1)0$$

$$L_2 = (110+01)^*$$

$$L_3 = 00^*00+10^*11^*$$

$$L_4 = 0^*1^*0^*(0+01+011+0111)^*0^*$$

$$L_5 = (00^*1+11^*0)^*$$

### Άσκηση 2:

Δίδονται οι γλώσσες του αλφαβήτου  $\{a,b\}$ :  $L_1 = \{ww^R, |w| \leq 2\}$ ,  $L_2 = \{ww^R, |w| \geq 2\}$

εκ των οποίων η μία είναι κανονική και η άλλη δεν είναι κανονική.

(A) Επιλέξτε την γλώσσα που είναι κανονική και αποδείξτε το, δίνοντας κανονική έκφραση που παράγει τις συμβολοσειρές της

(B) Για την γλώσσα που δεν είναι κανονική: Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της

## **ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΑ**

Άσκηση 1: Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες:

$$L_1 = \{0^{4n+2}b^{2n+4} \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{0^{m+2}1^{2n+1}2^{3n+2}3^{2m+4} \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_3 = \{a^{3n}b^n \mid n \geq 1\}$$

$$L_4 = \{wxw^R \mid w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}^*, |x| \leq 1\}$$

$$L_5 = \{a^n b^k c^m d^m a^k b^n \mid n, m, k \geq 0\}$$

$$L_6 = \{b^n a^m b^k \mid n = m + k\}$$

$$L_7 = \{a^n b^m \mid n < m < 2\}$$

## Άσκηση 2

Έστω  $\Sigma$  το αλφάβητο  $\Sigma=\{0,1,b\}$  και  $L$  η γλώσσα που σχηματίζεται ακριβώς και μόνον με τους κανόνες

- $11 \in L$
- $\text{Αν } x \in L, \text{ τότε και } 0xbb \in L$

(Α) Δείξτε ότι η  $L$  δεν είναι κανονική.

(Β) Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της  $L$ .

(Γ) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοιβάς που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της  $L$

(Δ) Δώστε Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοιβάς που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της  $L$

### Το Λήμμα Αντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω  $L$  μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός  $n$  (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε  $x \in L$  με  $|x| \geq n$  να μπορεί να γραφεί στην μορφή  $x = uvw$  όπου για τις συμβολοσειρές  $u, v$  και  $w$  ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$  για κάθε φυσικό  $m \geq 0$

## **ΘΕΜΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ**

Άσκηση 1: Να κατασκευάσετε ντετερμινιστική μηχανή Turing  $M$ , με αλφάβητο  $\Sigma = \{0, 1, b, \#, \$, Y, N\}$ , που να αποφασίζει την γλώσσα της προηγούμενης άσκησης

Θεωρήστε ότι η  $M$  με είσοδο  $x \in \{0, 1, b\}^*$  ξεκινά την λειτουργία της από τον σχηματισμό  $\#x\#$ . Οι χαρακτήρες  $Y$  (YES) και  $N$  (NO) χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την σηματοδότηση της αποδοχής ή της απόρριψη της εισόδου, αντίστοιχα.

(1) Δώστε μια άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της  $M$  (έναν αλγόριθμο διαχείρισης της ταινίας της).

(2) Δώστε το γράφημα ροής της  $M$  (σχηματική αναπαράσταση με χρήση γνωστών μηχανών).