ΠΛΗ20

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-3

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………………

Ημερομηνία: …………………………………………………………………………

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ (30% του βαθμού)

(1) Οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν 10 όμοιες (μη διακεκριμένες) καραμέλες σε 3 διακεκριμένα παιδιά είναι:

1. Ίσος με τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 10 από 12 παιδιά όπου έχει σημασία η σειρά επιλογής
2. Ίσος με τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 10 από 12 παιδιά χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής
3. Ίσος με τους τρόπους επιλογής 10 χρωμάτων από 3 χρώματα όπου επιτρέπεται η επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής
4. Ίσος με τους τρόπους επιλογής 3 χρωμάτων από 10 χρώματα όπου επιτρέπεται η επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής

(2) Έστω A σύνολο με *n* στοιχεία

1. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A είναι ίσος με n^2
2. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με *k* στοιχεία είναι ίσος με το συντελεστή του x^{n-k} στην παράσταση $(1+x)^n$
3. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με *k* στοιχεία είναι ίσος με τους συνδυασμούς *k* στοιχείων από *n*-*k*+1 στοιχεία με επανάληψη.
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A είναι ίσος με το άθροισμα όλων των συντελεστών του πολυωνύμου $(1+x)^n$

(3)Θεωρούμε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετήσουμε 8 διακεκριμένα αντικείμενα σε 2 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να πάρει τουλάχιστον 2 αντικείμενα, όταν δεν ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των αντικειμένων στις υποδοχές. Αυτός ο αριθμός είναι ίσος με:

1. Το συντελεστή του x^8 στη γεννήτρια συνάρτηση $(x^2+x^3+x^4)^2$.
2. Το συντελεστή του $x^8/8!$ στη γεννήτρια συνάρτηση $(e^x-1-x)^2$.
3. Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 με τουλάχιστον 2 μηδέν και τουλάχιστον 2 άσσους.
4. Όσοι οι 2x4 πίνακες με κάθε στοιχείο να είναι 0 ή 1 με τουλάχιστον δύο μηδενικά και τουλάχιστον 2 άσσους.

(4) Θεωρούμε το σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{ p_1 \vee \neg p_2,\ p_1 \wedge p_2,\ p_1 \vee p_3 \}$. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν και ποιες όχι;

1. $T \models \neg p_1 \to (p_1 \wedge p_2)$
2. $T \models (p_1 \wedge p_2) \to p_3$
3. $T \models (p_2 \vee p_3) \to (p_1 \wedge p_3)$
4. $T \models (p_1 \vee p_2) \to (\neg p_1 \to \neg p_3)$

(5) *Για τους προτασιακούς τύπους* f, g *και* h *ισχύει:* $f \models g$, $g \vdash_{\Pi\Lambda} \neg h$ *και* $\neg h \models f$. *Τότε πάντα ισχύει επίσης και ότι:*

1. Ο τύπος $f \vee h$ είναι ταυτολογία
2. Ο τύπος $f \vee g$ είναι ταυτολογία
3. Και οι τρεις τύποι f, g και h, περιλαμβάνουν τις ίδιες ακριβώς προτασιακές μεταβλητές
4. Ισχύει ότι $\{f, g\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg h$, αλλά δεν ισχύει ότι $\{f, g\} \models \neg h$

(6) Οι παρακάτω δομές ικανοποιούν την πρόταση $\forall x \forall y [P(x,y) \wedge P(y,x) \to x = y]$

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με $P(x,y)$ να σημαίνει $x \leq y$
2. Το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{1,2,3\}$ με $P(x,y)$ να σημαίνει $x \subseteq y$
3. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με $P(x,y)$ να σημαίνει $x \leq y$
4. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με $P(x,y)$ να σημαίνει $x < y$

(7) Ρίχνουμε 4 φορές ένα ζάρι

1. Τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν η σειρά δεν έχει σημασία, είναι όσα ο συντελεστής του x^4 στην $\left(x + x^2 + ... + x^6\right)^4$.
2. Τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν η σειρά δεν έχει σημασία είναι C(9, 4).
3. Τα διαφορετικά αποτελέσματα είναι 4^6 όταν η σειρά έχει σημασία.
4. Τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν η σειρά δεν έχει σημασία, είναι όσα ο συντελεστής του x^4 στην $\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)^6$

(8) Οι διαφορετικές δεκαδικές συμβολοσειρές μήκους n με k (ακριβώς) μηδενικά είναι:

1. $C(n+k-1,k)$
2. $10^n - 9^{n-k}$
3. $9^{n-k} \cdot C(n,k)$
4. Όσες ο συντελεστής του $x^n / n!$ στην παράσταση e^{10x} .

(9) *Στους παρακάτω τύπους τα p_1, p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές*

1. Κάθε τύπος συνεπάγεται ταυτολογικά μια αντίφαση
2. Κάθε τύπος συνεπάγεται ταυτολογικά μια ταυτολογία
3. Υπάρχει μία μόνο αποτίμηση των p_1, p_2 που δεν ικανοποιεί τον τύπο $(p_1 \wedge \neg p_2) \to p_1$.
4. Ο τύπος $(\neg p_1 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \neg p_1$ είναι ταυτολογία

(10) Θεωρούμε γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P

1. Ο τύπος $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x < y$.
2. Ο τύπος $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x \leq y$.
3. Ο τύπος $\forall x \exists y \exists z (P(y,x) \wedge P(x,z))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x < y$.
4. Ο τύπος $\forall x \exists y \exists z (P(y,x) \wedge P(x,z))$ αληθεύει στο σύνολο των πραγματικών όπου $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x < y$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

α) Στο γειτονικό βιβλιοπωλείο υπάρχουν 5 βιβλία Α που το καθένα κοστίζει 10 ευρώ, 8 βιβλία Β που το καθένα κοστίζει 5 ευρώ και 5 βιβλία Γ που το καθένα κοστίζει 4 ευρώ. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο της γεννήτριας ο συντελεστής του οποίου δίχνει τον τρόπο που μπορεί να γίνει η αγορά των βιβλίων έτσι ώστε:

(i) Να αγοραστούν 6 βιβλία με τον περιορισμό να επιλεχθούν άρτια Α και περιττά Β.

(ii) Να αγοραστούν βιβλία αξίας 35 ευρώ με τον περιορισμό να επιλεχθούν περιττά Γ, τουλάχιστον ένα Β και το πολύ 2Α.

β) 100 πρωτοετείς και 50 δευτεροετείς φοιτητές παρακολουθούν το μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά»

(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους χωρίσουμε σε ομάδες των 10 ατόμων για να πραγματοποιήσουν μια εργασία (κάθε ομάδα έχει το ίδιο θέμα)

(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους χωρίσουμε σε ομάδες των 10 ατόμων για να πραγματοποιήσουν μια εργασία (κάθε ομάδα έχει διαφορετικό θέμα)

(iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε μία σειρά, αν οι πρωτοετείς θεωρούνται μη διακεκριμένοι και δεν πρέπει να βρίσκονται δευτεροετείς φοιτητές σε διαδοχικές θέσεις.

Άσκηση 2 (Μονάδες 35)

α) Έστω φ, χ, ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους δίνεται ότι $\varphi \vdash \psi$, $\psi \vdash \neg\chi$ *και* $\neg\chi \models \varphi$. Δείξτε ότι οι τύποι φ και ψ είναι ισοδύναμοι.

β) Δώστε τυπική απόδειξη του τύπου $(\varphi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\varphi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Δώστε κανονική ποσοδεικτική μορφή του τύπου $\forall x P(x,y) \to [\forall x P(y,x) \to P(x,y)]$

δ) Δίνονται οι προτάσεις *φ* και *ψ*:

$$\varphi \equiv \forall x\,(Q(x) \vee P(x)) \to (\exists x\, Q(x) \vee \forall x\, P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x\, Q(x) \vee \forall x\, P(x)) \to \forall x\,(Q(x) \vee P(x))$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Η μία από τις παραπάνω προτάσεις είναι λογικά έγκυρη ενώ η άλλη όχι.

α) Ποια πρόταση ***δεν είναι*** λογικά έγκυρη; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας διατυπώνοντας μια ερμηνεία (δομή) στην οποία αυτή η πρόταση δεν αληθεύει.

β) Να δείξετε ότι η άλλη πρόταση ***είναι*** λογικά έγκυρη χρησιμοποιώντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski. ***Υπόδειξη***: *Μπορείτε να δείξετε πως δεν μπορεί να αληθεύει η υπόθεση του τύπου και να μην αληθεύει το συμπέρασμά του.*

Άσκηση 3 (Μονάδες 25)

1. Θέλουμε να γεμίσουμε ένα ράφι βιβλιοθήκης που έχει μήκος 1 μέτρο με βιβλία των οποίων το πάχος (μήκος της ράχης) είναι 10 εκατοστά ή 5 εκατοστά. Να διατυπώσετε γεννήτρια συνάρτηση και να επισημάνετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δείχνει τον αριθμό των τρόπων να γεμίσει το ράφι, αν δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων, τα βιβλία κάθε μεγέθους θεωρούνται μη διακεκριμένα, και πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα βιβλίο κάθε μεγέθους στο ράφι. Να υπολογίσετε τον συγκεκριμένο συντελεστή.
2. Έχουμε στη διάθεσή μας 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μέτρου το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.
3. Έχουμε στη διάθεσή μας 3 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γεμίσει ένα ράφι μήκους 1 μέτρου, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι.

Άσκηση 4 (Μονάδες 15)

α) Χωρίς να επικαλεστείτε ούτε το θεώρημα Πληρότητας αλλά ούτε και γνωστά θεωρήματα (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπον απαγωγή κλπ) δείξτε ότι $\{\neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γνωστά θεωρήματα για τον Προτασιακό Λογισμό (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπον απαγωγή κλπ.) αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας.

γ) Δείξτε ότι δεν είναι λογικά έγκυρος ο τύπος $\forall x \exists y \varphi(x, y) \to \exists x \forall y \varphi(x, y)$, περιγράφοντας μια ερμηνεία της γλώσσας της Θεωρίας Αριθμών που να μην τον ικανοποιεί.