

ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ 9

ΘΕΜΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Α) Ιεραρχήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας:

$$f_1(n) = n^{2\log n} \quad f_2(n) = 2^{\log^2 n} \quad f_3(n) = 5^{n^{\log n}} \quad f_4(n) = n^{-1}$$

(B) Να λύσετε τις αναδρομές:

$$(1) \quad T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{2n}{5}\right) + \log n$$

$$(2) \quad T(n) = 128T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{7/4}$$

$$(3) \quad T(n) = 5T\left(\frac{n}{25}\right) + \sqrt{n}$$

$$(4) \quad T(n) = T(n-1) + 2n^5$$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, όπου $a \geq 1$, $b > 1$ είναι σταθερές, και $f(n)$ είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

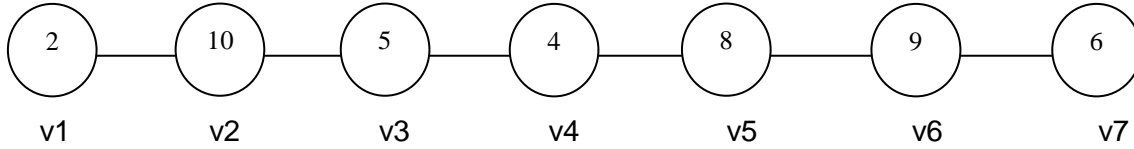
(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$, και αν υπάρχει σταθερά n_0 , τέτοια

ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε γνωστό ότι: $\sum_{i=1}^n i^5 = \Theta(n^6)$

ΘΕΜΑ 2: ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Ένα υποσύνολο κορυφών $I \subseteq V$ ονομάζεται ανεξάρτητο αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του I δεν συνδέονται με ακμή, και ονομάζεται μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο αν έχει τη μέγιστη συνολική βαρύτητα μεταξύ όλων των υποσυνόλων του V . Θεωρήστε, για παράδειγμα, την παρακάτω βεβαρυμμένη διαδρομή 7 κορυφών (οι αριθμοί εντός των κορυφών συμβολίζουν βαρύτητες)



όπου τα υποσύνολα $I_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, $I_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, $I_3 = \{v_2, v_5, v_7\}$ είναι ανεξάρτητα με βαρύτητες 21, 23, και 24 αντίστοιχα. Το I_3 είναι το μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο για την παραπάνω βεβαρυμμένη διαδρομή 7 κορυφών.

(Α) Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος, δεδομένης μιας βεβαρυμμένης διαδρομής n κορυφών, βρίσκει τη βαρύτητα του μέγιστου ανεξάρτητου υποσυνόλου (κόστος βέλτιστης λύσης). Η περιγραφή του αλγορίθμου μπορεί να είναι σε άτυπη μορφή, αλλά πρέπει να περιλαμβάνει οπωσδήποτε την/τις αναδρομική/-κες σχέση/-εις που διέπουν τον αλγόριθμο και συμπληρώνουν τον πίνακα δυναμικού προγραμματισμού. Δώστε τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σας, ο οποίος πρέπει να είναι πολυωνυμικός ως προς το n και ανεξάρτητος των τιμών των βαρυτήτων των κορυφών.

(Β) Εκτελέστε τον αλγόριθμό σας στο παραπάνω παράδειγμα δίνοντας τις τιμές του πίνακα δυναμικού προγραμματισμού σε κάθε βήμα.

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Κατασκευάστε Κανονικές Εκφράσεις για τις Γλώσσες του αλφαβήτου $\{0,1\}$:

- $L_1 = \{ w \mid w \text{ αρχίζει με } 0 \text{ και τελειώνει με } 0 \}$
- $L_2 = \{ w \mid w \text{ αρχίζει με } 01 \text{ περιέχει το } 001 \text{ και τελειώνει με } 00 \}$
- $L_3 = \{ w \mid w \text{ αρχίζει με } 0 \text{ και περιέχει δύο τουλάχιστον φορές το } 11 \}$
- $L_4 = \{ w \mid w \text{ δεν αρχίζει με } 1 \}$
- $L_5 = \{ w \mid w \text{ δεν περιέχει } 0 \}$
- $L_6 = \{ w \mid \text{τα } 0 \text{ της } w \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3 \}$
- $L_7 = \{ w \mid w \text{ δεν περιέχει το } 11 \}$