ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 3.1:
Εισαγωγή στην Κατηγορηματική Λογική

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Όλοι οι ορισμοί και άριστη γνώση του συντακτικού κατηγορηματικής λογικής.
- Ο μεταφραστικός πίνακας είναι απαραίτητος σε όλη τη διάρκεια της ενότητας της κατηγορηματικής λογικής.

Επίπεδο Β
- Κατασκευή δενδροδιαγράμματος.

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία
1. Η πρωτοβάθμια Γλώσσα

Η Πρωτοβάθμια Γλώσσα (συμβολίζεται με $Γ_1$) αποτελείται από τα εξής στοιχεία:
- Όλα όσα χρησιμοποιεί η προτασιακή λογική:
  - Μεταβλητές (π.χ. $x_1, x_2, \dots$)
  - Λογικοί Σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Παρενθέσεις: ( )
- Επαυξημένο με τα εξής στοιχεία:
  - Το σύμβολο της ισότητας: $\approx$
  - Τους ποσοδείκτες για κάθε: $\forall$ και υπάρχει: $\exists$
  - Το σύνολο των κατηγορηματικών συμβόλων: P_1/m_1, $P_2/m_2, \dots$
  - Το σύνολο των συναρτησιακών συμβόλων: f_1/m_1, $f_2/m_2, \dots$
  - Το σύνολο των σταθερών: c_1, $c_2, \dots$

Επίσης:
Το σύνολο των μεταβλητών συμβολίζεται με $M(Γ_1)$
Το σύνολο των σταθερών συμβολίζεται με $Στ(Γ_1)$
Ο συμβολισμός P_i / m_i απεικονίζει ότι το P_i είναι ένα κατηγορηματικό σύμβολο βαθμού m_i
Ο συμβολισμός f_i / m_i απεικονίζει ότι το f_i είναι ένα συναρτησιακό σύμβολο βαθμού m_i
Βαθμός είναι το πλήθος των ορισμάτων του κατηγορήματος ή συν.συμβόλου.

Β. Θεωρία
2. Νέα στοιχεία σε σχέση με την προτασιακή γλωσσα
1. Τα συναρτησιακά σύμβολα

Τα συναρτησιακά σύμβολα της κατηγορηματικής λογικής:
- Αντιστοιχούν σε μαθηματικές συναρτήσεις
  - Άρα όπως μία μαθηματική συνάρτηση δέχεται ένα όρισμα και επιστρέφει μία τιμή
  - Ένα συναρτησιακό σύμβολο θα λειτουργεί όπως μία συνάρτηση, δηλαδή θα δέχεται ένα όρισμα και θα επιστρέφει μία τιμή.

Παραδείγματα Συναρτησιακών Συμβόλων:
Θα ορίσουμε σε επόμενα μαθήματα:
- Το συναρτησιακό σύμβολο fatherOf(x)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να δέχεται ως όρισμα ένα άτομο και να επιστρέφει τον πατέρα του.
- Το συναρτησιακό σύμβολο mult(x,y)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να δέχεται ως όρισμα δύο φυσικούς και να επιστρέφει το γινόμενό τους.
- Το συναρτησιακό σύμβολο sum(x,y)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να δέχεται ως όρισμα δύο φυσικούς και να επιστρέφει το άθροισμά τους.

Β. Θεωρία
2. Νέα στοιχεία σε σχέση με την προτασιακή γλωσσα
2. Τα κατηγορηματικα σύμβολα

Τα κατηγορηματικά σύμβολα της κατηγορηματικής λογικής:
- Αντιστοιχούν σε μαθηματικές σχέσεις
  - Άρα δεδομένων των ορισμάτων τους θα επιστρέφουν Αληθές ή Ψευδές

Παραδείγματα ΚατηγορηματικώνΣυμβόλων:
Θα ορίσουμε σε επόμενα μαθήματα:
- Το κατηγορηματικό σύμβολο less(x,y)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να αληθεύει αν το $x<y$
- Το κατηγορηματικό σύμβολο greater_equal(x,y)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να αληθεύει αν το $x\geq y$
- Το κατηγορηματικό σύμβολο odd(x)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να αληθεύει αν το x είναι περιττός
- Το κατηγορηματικό σύμβολο likes(x,y)
  - που θα το ερμηνεύσουμε να δέχεται ως όρισμα δύο άτομα και να αληθεύει αν το άτομο που αντιστοιχεί στο 1° όρισμα συμπαθεί το άτομο που αντιστοιχεί στο 2° όρισμα

Β. Θεωρία
2. Νέα στοιχεία σε σχέση με την προτασιακή γλωσσα
3. Ο ποσοδείκτης ∀

Ο ποσοδείκτης ∀ εκφράζει το «για κάθε» των μαθηματικών.

Μια μαθηματική έκφραση της μορφής «για κάθε x ισχύει πρόταση» γράφεται σε κατηγορηματική λογική:

$$\forall x[\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}] \text{ ή } \forall x \text{ ΠΡΟΤΑΣΗ}$$

- Όπου x οποιαδήποτε μεταβλητή
- Και ΠΡΟΤΑΣΗ η διατύπωση της πρότασης σε κατηγορηματική λογική

Σημαντικό!! Μια πρόταση της μορφής: $\forall x[\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}]$
- Είναι Αληθής αν η ΠΡΟΤΑΣΗ είναι αληθής για όλες τις τιμές που παίρνει το x
  - Για να το αποδείξουμε απαιτείται γενική επιχειρηματολογία που να καλύπτει όλες τις τιμές του x
- Είναι Ψευδής αν η ΠΡΟΤΑΣΗ είναι ψευδής για έστω μία τιμή του x
  - Για να το αποδείξουμε δίνουμε συγκεκριμένη τιμή του x που η πρόταση είναι ψευδής.

Παραδείγματα:
- «Κάθε αριθμός γράφεται ως κλάσμα». Είναι ψευδής (π.χ. δεν ισχύει για το $\sqrt{2}$)
- «Κάθε άνθρωπος έχει μόνο μία φυσική μητέρα». Είναι αληθής

Β. Θεωρία
2. Νέα στοιχεία σε σχέση με την προτασιακή γλωσσα
4. Ο ποσοδείκτης ∃

Ο ποσοδείκτης ∃ εκφράζει το «υπάρχει» των μαθηματικών.

Μια μαθηματική έκφραση της μορφής «υπάρχει x ώστε να ισχύει πρόταση» γράφεται σε κατηγορηματική λογική:

$$\exists x[\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}] \text{ ή } \exists x \text{ ΠΡΟΤΑΣΗ}$$

- Όπου x οποιαδήποτε μεταβλητή
- Και ΠΡΟΤΑΣΗ η διατύπωση της πρότασης σε κατηγορηματική λογική

Σημαντικό!! Μια πρόταση της μορφής: $\exists x[\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}]$
- Είναι Αληθής αν η ΠΡΟΤΑΣΗ είναι αληθής για έστω μία τιμή του x
  - Για να το αποδείξουμε δίνουμε συγκεκριμένη τιμή του x που η πρόταση είναι αληθής.
- Είναι Ψευδής αν η ΠΡΟΤΑΣΗ είναι ψευδής για όλες τις τιμές που παίρνει το x
  - Για να το αποδείξουμε απαιτείται γενική επιχειρηματολογία που να καλύπτει όλες τις τιμές του x

Παραδείγματα:
- «Υπάρχει πρώτος αριθμός που είναι πολ/σιο του 2». Είναι αληθής (για x=2)
- «Υπάρχει φυσικός που δεν διαιρείται με το 1». Είναι ψευδής

Β. Θεωρία

2. Νέα στοιχεία σε σχέση με την προτασιακή γλωσσα

5. Το σύμβολο ισότητας ≈

Το σύμβολο της ισότητας ≈ συντάσσεται:

$$A \approx B$$

Και θα ελέγχει αν τα στοιχεία αριστερά και δεξία του έχουν την ίδια τιμή.
Η αποτίμησή του θα είναι:
- Αληθές, αν τα A και B έχουν την ίδια τιμή.
- Ψευδές, αν τα A και B έχουν διαφορετική τιμή.

Σημαντικό!! Μία παράσταση της μορφής $A \approx B$ ελέγχει αν δύο τιμές είναι ίσες.

- Έτσι τα A,B μπορούν να είναι μόνο
  - Σταθερές
  - Μεταβλητές
  - Συναρτησιακά Σύμβολα
- Τα οποία αποτιμώνται σε συγκεκριμένες τιμές.

Β. Θεωρία

3. Το συντακτικό της Κατηγορηματικής Λογικής

1. Εισαγωγή

Το συντακτικό της Κατηγορηματικής Λογικής είναι ιδιαίτερα αυστηρό και οτιδήποτε γράφουμε σε κατηγορηματική λογική θα πρέπει να σεβεται τους κανόνες που θα θέσουμε.

Έκφραση κατηγορηματικής λογικής ορίζεται οποιαδήποτε παράσταση συμβόλων της πρωτοβάθμιας γλώσσας (ακόμη και ασύντακτη!)

Οι ακόλουθοι ορισμοί θα κατασκευάσουν το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής:
- Όρος: να είναι μεταβλητή, σταθερα και συναρτησιακό σύμβολο.
- Ατομικός Τύπος: να είναι ισότητα όρων ή κατηγόρημα
- Μη Ατομικός Τύπος να είναι παράσταση που χρησιμοποιεί ποσοδείκτες ή προτασιακούς σύνδεσμούς.

Και περαιτέρω θα ορίσουμε:
- Δεσμευμένες Μεταβλητές: Μεταβλητές που δεσμεύονται από ποσοδείκτη
- Ελεύθερες Μεταβλητές: Μεταβλητές που δεν δεσμεύονται από ποσοδείκτη
- Πρόταση: Ένας τύπος που δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

Β. Θεωρία

3. Το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής

2. Όρος

Ορισμός: Όρος α είναι:

- Είτε $\alpha \in \mathrm{M}(\Gamma_1) \cup \Sigma\tau(\Gamma_1)$
  - δηλαδή είναι μεταβλητή είτε σταθερά
- Είτε $\alpha = f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ όπου f είναι συναρτησιακό σύμβολο βαθμού n με τα $b_i,\ i = 1, \ldots, n$ είναι όροι.
  - Δηλαδή είναι συναρτησιακό σύμβολο.
  - Επίσης έπεται ότι ένα συναρτησιακό σύμβολο μπορεί να δεχθεί ως όρισμα σταθερά ή μεταβλητή ή συναρτησιακό σύμβολο

Σημαντικό!! Ένας όρος αν υπολογιστεί μας επιστρέφει μία τιμή:
- Μία σταθερά θα έχει μια τιμή
- Μία μεταβλητή θα έχει μία τιμή
- Ένα συναρτησιακό σύμβολο θα επιστρέψει μία τιμή

Παραδείγματα:
- 5, x, y, sum(5,4), mult(sum(5,3),2), fatherOf(fatherOf(fatherOf(x)))

Β. Θεωρία

3. Το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής

3. Ατομικός Τύπος

Ορισμός: Ατομικός Τύπος είναι:

- Είτε $t_1 \approx t_2$ όπου $t_1,\ t_2$ είναι όροι.
  - Παρατηρούμε ότι η ισότητα εφαρμόζεται μόνο σε όρους
- Είτε $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ όπου P είναι κατηγορηματικό σύμβολο βαθμού n με τα $t_i,\ i = 1, \ldots, n$ είναι όροι.
  - Δηλαδή είναι σωστή εφαρμογή κατηγορηματικού συμβόλου.
  - Επίσης έπεται ότι ένα κατηγορηματικό σύμβολο μπορεί να δεχθεί ως όρισμα σταθερά ή μεταβλητή ή συναρτησιακό σύμβολο

Παραδείγματα ατομικών τύπων:
- $x \approx 3$
- $bob \approx fatherOf(john)$
- $greater\_than(3,5)$
- $less(sum(2,2), mult(1,3))$

Β. Θεωρία

3. Το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής

4. Μη Ατομικός Τύπος

Ορισμός: Μη Ατομικός Τύπος είναι:

- Είτε $\neg\alpha,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\wedge\beta,\ \alpha\rightarrow\beta,\ \alpha\leftrightarrow\beta$ όπου α,β είναι τύποι.
  - Παρατηρούμε ότι οι προτασιακοί τύποι μπορούν να συνδέσουν μόνο τύπους (ατομικούς ή μη ατομικούς), παραστάσεις δηλαδή που επιστρέφουν Αληθές ή Ψευδές.
- Είτε $\forall x\ \Pi,\ \exists x\ \Pi$ όπου Π είναι τύπος.
  - Επίσης έπεται ότι ένας ποσοδείκτης εφαρμόζεται μόνο σε ατομικό ή μη ατομικό τύπο

Παραδείγματα μη ατομικών τύπων:

- $P(x,y)\wedge Q(z,c)$ όπου P/2, Q/2 είναι κατηγορηματικά σύμβολα
- $\neg(bob\approx fatherOf(john))$
- $\forall x\ [Q(x)\rightarrow P(x)\vee R(x)]$ όπου P/1, Q/1, R/1 είναι κατηγορηματικά σύμβολα
- $\forall x[\exists y P(x,y)]$ όπου P/2 κατηγορηματικό σύμβολο

Σημαντικό!! Ένας τύπος (ατομικός ή μη ατομικός) αν υπολογιστεί μας επιστρέφει Αληθές ή Ψευδές:

Β. Θεωρία

3. Το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής

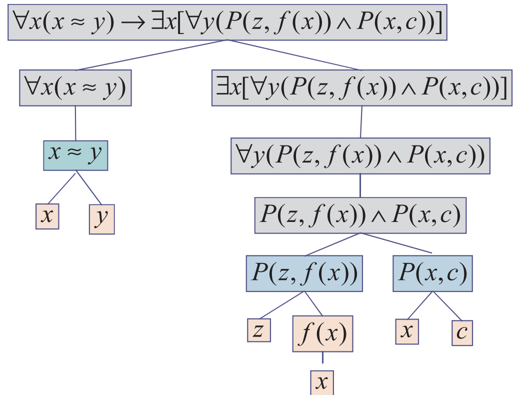
5. Δενδροδιάγραμμα Τύπου και Προτεραιότητα Τελεστών

Η προτεραιότητα των τελεστών της κατηγορηματικής λογικής είναι:
- Μεγαλύτερη προτεραιότητα έχουν τα: $\neg,\forall,\exists$
- Αμέσως μετά με ίση προτεραιότητα είναι τα : $\wedge,\vee$
- Μικρότερη προτεραιότητα έχουν οι σύνδεσμοι: $\rightarrow,\leftrightarrow$

Το δενδροδιάγραμμα ενός τύπου υποδεικνύει την προτεραιότητα των πράξεων

Παράδειγμα Δενδροδιαγράμματος:

Στον τύπο έχω
P/2 κατηγορηματικό σύμβολο
f/1 συναρτησιακό σύμβολο
c: σταθερά
x,y: μεταβλητές
Παρατηρούμε:
Μη ατομικός Τύπος
Ατομικός Τύπος
Όρος



Β. Θεωρία

3. Το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής

6. Πρόταση

Ορισμοί:
Μία μεταβλητή είναι ελεύθερη αν δεν είναι στο πεδίο εφαρμογής ενός ποσοδείκτη.
Μια μεταβλητή είναι δεσμευμένη αν είναι στο πεδίο εφαρμογής ενός ποσοδείκτη.
Ένας τύπος είναι πρόταση αν δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές

Παραδείγματα:
- $\forall x[Q(x)\rightarrow P(y)]$ όπου P/1,Q/1 κατηγορηματικά σύμβολα
  - Η x είναι δεσμευμένη. Δεσμεύεται από τον ποσοδείκτη $\forall x$
  - Η y είναι ελεύθερη. Δεν δεσμεύεται από ποσοδείκτη
- $\exists x[f(x)\approx y]\wedge\forall y Q(x,y)$ όπου f/1 συναρτησιακό, Q/2 κατηγορηματικό
  - Η εμφάνιση της x στο $\exists x[f(x)\approx y]$ είναι δεσμευμένη
  - Η εμφάνιση της y στο $\exists x[f(x)\approx y]$ είναι ελεύθερη
  - Η εμφάνιση της x στο $\forall y Q(x,y)$είναι ελεύθερη.
  - Η εμφάνιση της y στο $\forall y Q(x,y)$ είναι δεσμευμένη
- $\forall x\exists y[Q(x,y)]$ όπου Q/2 κατηγορηματικά σύμβολα
  - Η x είναι δεσμευμένη. Δεσμεύεται από τον ποσοδείκτη $\forall x$
  - Η y είναι δεσμευμένη. Δεσμεύεται από τον ποσοδείκτη $\exists y$

Β. Θεωρία

4. Δομές και Αποτιμήσεις

1. Δομή (ή ερμηνεία)

Δεδομένης μιας παράστασης κατηγορηματικής λογικής που σέβεται το συντακτικό που ορίσαμε, θέλουμε να:
- Υπολογίζουμε την τιμή της (αν είναι όρος)
- Υπολογίζουμε αν είναι αληθής / ψευδής (αν είναι τύπος)

Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να μας δίδεται από την εκφώνηση:
- Την δομή (ή ερμηνεία) η οποία:
  - Ορίζει το πεδίο ορίσμού των μεταβλητών
  - Δίνει νόημα στα συναρτησιακά και τα κατηγορηματικά σύμβολα
  - Δίνει τιμές στις σταθερές.
- Την αποτίμηση η οποία:
  - Δίνει τιμή στις ελεύθερες μεταβλητές.

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
1. Δομή (ή ερμηνεία)

Ορισμός: Η δομή (ή ερμηνεία) Α αποτελείται από τα εξής:

- Το σύμπαν της A (συμβολίζεται με $|A|$) που είναι το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.
- Σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο f/n αντιστοιχούμε μια συνάρτηση: f^A: $|A|^n \rightarrow |A|$
- Σε κάθε κατηγορηματικό σύμβολο P/n αντιστοιχούμε μια σχέση: $P^A \subseteq |A|^n$
- Σε κάθε σύμβολο σταθεράς c αντιστοιχούμε μια τιμή: $c^A \in |A|$

Δηλαδή η ερμηνεία αποδίδει νόημα σε όλα τα σύμβολα που εμφανίζονται στον τύπο (ή στον όρο)

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
1. Δομή (ή ερμηνεία)

Παράδειγμα 1: Να αποτιμηθεί ο όρος:

$$f(c_1, c_2)$$

Δεδομένης της ερμηνείας:

- Το σύμπαν είναι $|\mathrm{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της $f/2$ είναι $f^{\mathrm{A}}(x, y) = x + y$
- Η ερμηνεία της c_1 είναι ${c_1}^{\mathrm{A}} = 9$
- Η ερμηνεία της c_2 είναι ${c_2}^{\mathrm{A}} = 4$

Λύση
Η αποτίμηση του όρου είναι: 9+4=13

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
1. Δομή (ή ερμηνεία)

Παράδειγμα 2: Να αποτιμηθεί ο τύπος:

$$c_3 \approx f(c_1, c_2)$$

Δεδομένης της ερμηνείας:

- Το σύμπαν είναι $|\mathrm{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της $f/2$ είναι $f^{\mathrm{A}}(x, y) = x + y$
- Η ερμηνεία της c_1 είναι ${c_1}^{\mathrm{A}} = 9$
- Η ερμηνεία της c_2 είναι ${c_2}^{\mathrm{A}} = 4$
- Η ερμηνεία της c_3 είναι ${c_3}^{\mathrm{A}} = 11$

Λύση
Η αποτίμηση του όρου είναι: 11=13, άρα είναι ψευδής.

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
1. Δομή (ή ερμηνεία)

Παράδειγμα 3: Να αποτιμηθεί ο τύπος:

$$\forall x Q(x, c_1)$$

Δεδομένης της ερμηνείας:

- Το σύμπαν είναι $|\mathrm{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της Q/2 είναι $Q^{\mathrm{A}}(x, y)$ αληθεύει αν x<y
- Η ερμηνεία της c_1 είναι ${c_1}^{\mathrm{A}} = 5$

Λύση
Ο τύπος γράφεται $\forall x[x < 5]$ άρα ερμηνεύεται ως «Κάθε φυσικός είναι μικρότερος του 5» άρα είναι ψευδής (π.χ. δεν ισχύει για x=6)

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
1. Δομή (ή ερμηνεία)

Παράδειγμα 4: Να αποτιμηθεί ο τύπος:

$$\forall x Q(x, c_1)$$

Δεδομένης της ερμηνείας:
- Το σύμπαν είναι $|\mathrm{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της $\mathrm{Q}/2$ είναι $Q^{\mathrm{A}}(x, y)$ αληθεύει αν x>y
- Η ερμηνεία της c_1 είναι $c_1{}^{\mathrm{A}} = 0$

Λύση
Ο τύπος γράφεται $\forall x[x > 0]$ άρα ερμηνεύεται ως «Κάθε φυσικός είναι μεγαλύτερος του 0» άρα είναι ψευδής (δεν ισχύει για x=0)

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
2. Αποτίμηση

Ορισμός: Η αποτίμηση v είναι μία συνάρτηση που δίνει τιμή από το σύμπαν σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή.
- Άρα είναι μία συνάρτηση: $\mathrm{v}: \mathrm{M}(\Gamma_1) \to |A|$

Η αποτίμηση των ελευθέρων μεταβλητών:
- Είναι απαραίτητη αν πρέπει να
  - Υπολογίσουμε έναν όρο ή
  - Αποφασίσουμε αν ένας τύπος είναι αληθής ή ψευδής

  που περιλαμβάνει ελεύθερες μεταβλητές.
- Αντίθετα δεν απαιτείται αν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητες (δηλαδή αν ο τύπος είναι πρόταση)

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
2. Αποτίμηση

Παράδειγμα 5: Να αποτιμηθεί ο τύπος:

$$\exists x Q(x, y)$$

Δεδομένης της ερμηνείας:
- Το σύμπαν είναι $|\mathrm{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της $\mathrm{Q}/2$ είναι $Q^{\mathrm{A}}(x, y)$ αληθεύει αν x<y

Και της αποτίμησης
- v(y)=1

Λύση
Ο τύπος γράφεται $\exists x[x < 1]$ άρα ερμηνεύεται ως «Υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος του 1» άρα είναι αληθής (Ισχύει για x=0)

Β. Θεωρία
4. Δομές και Αποτιμήσεις
2. Αποτίμηση

Παράδειγμα 6: Να αποτιμηθεί ο τύπος:

$$\exists x Q(x, y) \wedge \exists y[z \approx f(y, z)]$$

Δεδομένης της ερμηνείας:
- Το σύμπαν είναι $|\mathrm{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της $\mathrm{Q}/2$ είναι $Q^{\mathrm{A}}(x, y)$ αληθεύει αν x<y
- Η ερμηνεία της $\mathrm{f}/2$ είναι $f^{\mathrm{A}}(x, y) = x + y$

Και της αποτίμησης
- v(y)=1, v(z)=2

Λύση
Ο τύπος γράφεται $\exists x[x < 1] \wedge \exists y[2 \approx y + 2]$ άρα ερμηνεύεται ως «Υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος του 1 και υπάρχει φυσικός που αν προστεθεί στο 2, κάνει 2» άρα είναι αληθής (Ισχύει για x=0 και για y=0)

Β. Θεωρία
5. Συντομογραφίες Τύπων

Χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία που περιγράψαμε μπορούμε να κατασκευάζουμε συντομογραφίες τύπων που θα συμπεριφέρονται σαν κατηγορηματικά σύμβολα.
- Δηλαδή δεδομένων των ορισμάτων τους θα παίρνουν τιμή αληθές ή ψευδές.

<u>Παράδειγμα:</u>
Αν στο σύμπαν των φυσικών αριθμών ορίσουμε τα συναρτησιακά σύμβολα sum/2 και mult/2 να επιστρέφουν αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ορισμάτων τους, μπορούμε να ορίσουμε τις συντομογραφίες:
- Την συντομογραφία Ε(x) να αληθεύει αν ο x είναι άρτιος:

$$\mathrm{E}(x) \equiv \exists y[x \approx mult(2,y)]$$

- Την συντομογραφία O(x) να αληθεύει αν ο x είναι περιττός:

$$\mathrm{O}(x) \equiv \exists y[x \approx sum(mult(2,y),1)]$$

Με χρήση αυτών των συντομογραφιών μπορούμε να ορίσουμε πιο περίπλοκες προτάσεις:

Β. Θεωρία
5. Συντομογραφίες Τύπων

Με χρήση αυτών των συντομογραφιών μπορούμε να ορίσουμε πιο περίπλοκες προτάσεις. Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε τις εξής προτάσεις:

- «Κάθε φυσικός είναι άρτιος ή περιττός»

$$\forall \mathrm{x}[E(x) \vee O(x)]$$

- «Κάθε φυσικός αν είναι άρτιος τότε δεν είναι περιττός»

$$\forall \mathrm{x}[E(x) \rightarrow \neg O(x)]$$

- «Υπάρχει φυσικός που είναι άρτιος και περιττός»

$$\exists \mathrm{x}[E(x) \wedge O(x)]$$

- «Κάθε άρτιος αριθμός γράφεται σαν άθροισμα δύο περιττών αριθμών»

$$\forall \mathrm{x}[E(x) \rightarrow \exists y \exists z(O(y) \wedge O(z) \wedge x \approx sum(y,z))]$$

- κ.ο.κ.

Β. Θεωρία
6. Μεταφραστικός Πίνακας

	Μορφή Πρότασης	Μετάφραση
1	$\neg\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$	**Δεν ισχύει η** $\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$
2	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots} \wedge \binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$ **και** $\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$
3	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots} \vee \binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$ **ή** $\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$
4	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots} \rightarrow \binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$	**Αν** $\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$ **τότε** $\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$
5	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots} \leftrightarrow \binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$	$\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$ **αν και μόνο αν** $\binom{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\dots}$

Β. Θεωρία
6. Μεταφραστικός Πίνακας

	Μορφή Πρότασης	Μετάφραση
6	$\exists x\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x}{\dots}$	**Υπάρχει στοιχείο για το οποίο ισχύει η** $\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha}{\dots}$ **Υπάρχει στοιχείο που ισχύει η** $\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha}{\dots}$ **Υπάρχει στοιχείο τέτοιο ώστε να ισχύει η** $\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha}{\dots}$
7	$\forall x\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x}{\dots}$	**Κάθε στοιχείο έχει την** $\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha}{\dots}$ **Για κάθε στοιχείο ισχύει η** $\binom{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha}{\dots}$
8	$\exists x \exists y\binom{x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y}{\dots}$	**Υπάρχει ζεύγος στοιχείων για το οποίο ισχύει η** $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$ **Υπάρχει ζεύγος στοιχείων τέτοιο ώστε να ισχύει η** $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$
9	$\forall x \forall y\binom{x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y}{\dots}$	**Κάθε ζεύγος στοιχείων έχει την** $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$ **Για κάθε ζεύγος στοιχείων ισχύει η** $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$

Β. Θεωρία

6. Μεταφραστικός Πίνακας

	Μορφή Πρότασης	Μετάφραση
10	$\exists x \forall y \binom{x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y}{\dots}$	**Υπάρχει στοιχείο που έχει τη $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$ με όλα τα στοιχεία**
11	$\forall x \exists y \binom{x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y}{\dots}$	**Κάθε στοιχείο έχει τη $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$ με τουλάχιστον ένα στοιχείο**
12	$\exists x \exists y \left(x \neq y \wedge \binom{x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y}{\dots} \right)$	**Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών στοιχείων για το οποίο ισχύει η $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$** **Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών στοιχείων τέτοιο ώστε να ισχύει η $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$**
13	$\forall x \forall y \left(x \neq y \rightarrow \binom{x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y}{\dots} \right)$	**Κάθε ζεύγος διαφ/κών στοιχείων έχει την $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$** **Για κάθε ζεύγος διαφ/κων στοιχείων ισχύει η $\binom{\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta}{\dots}$**

Β. Θεωρία

6. Μεταφραστικός Πίνακας

	Μορφή Πρότασης
14	$\exists x \left[\binom{\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ x}{\dots} \wedge \forall y \left(\binom{o\mu o\iota\alpha\ \iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ y}{\dots} \rightarrow x \approx y \right) \right]$ **Υπάρχει μοναδικό στοιχείο με την ιδιότητα** **ή** **Υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο με την ιδιότητα**
15	$\exists x \exists y \left[\binom{\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ x}{\dots} \wedge \binom{o\mu o\iota\alpha\ \iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ y}{\dots} \wedge x \neq y \wedge \forall z \left(\binom{o\mu o\iota\alpha\ \iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ z}{\dots} \rightarrow z \approx x \vee z \approx y \right) \right]$ **Υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία με την ιδιότητα**

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 1

Κατασκευάστε δενδροδιαγράμματα για τους τύπους:

1. $\exists x[\forall y(Q(f(x), f(y)) \rightarrow x \approx c \wedge y \approx d)]$
2. $Q(c,d) \wedge \exists x \forall y Q(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x(x \approx d \rightarrow y \approx f(x))$

όπου Q/2 είναι κατηγορηματικό σύμβολο, f/1 είναι συναρτησιακό σύμβολο, c,d είναι σταθερές.

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 2

Στους παρακάτω τύπους P/2 και Q/3 είναι κατηγορηματικά σύμβολα, f/2,g/3 είναι συναρτησιακά σύμβολα, τα c,d είναι σταθερές και τα x,y,z είναι μεταβλητές. Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι εκφράσεις, όροι, ατομικοί τύποι, μη ατομικοί τύποι ή προτάσεις:

1. $\exists x \forall y P(x,y)$
2. $\exists x \forall y Q(x,y)$
3. $P(f(x,y), g(x, f(x,y), c))$
4. $Q(x,c,d) \approx P(x,y)$
5. $Q(x, f(x,y), y) \rightarrow \exists z P(x,x)$
6. $g(x, f(x,y), c) \approx \exists x \exists y P(x,y)$
7. $P(f(x,x), Q(x, g(x,x,x), x))$