



Ορισμός 1: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **διχοτομίσιμο (ή διμερές)** όταν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν (χωριστούν) σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1 και V_2 (δηλαδή $V_1 \cup V_2 = V$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα της άκρο σε κορυφή του V_1 και το άλλο της άκρο της V_2 .

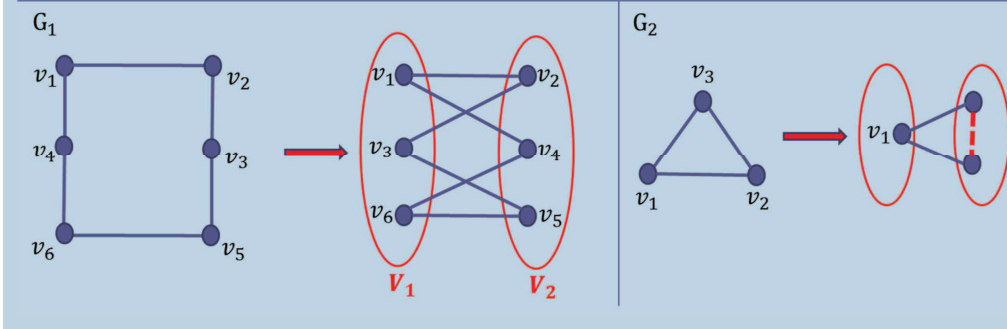
Ορισμός 2: Ένα γράφημα καλείται διχοτομίσιμο αν και μόνο αν οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.

Ορισμός 3: Ένα γράφημα είναι διχοτομίσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους

Παρατηρήσεις:

- Τα σύνολα V_1, V_2 καλούνται μερίδια κορυφών
- Το διμερές γράφημα συμβολίζεται και $G = (V_1, V_2, E)$

Παράδειγμα: Ο G_1 είναι διχοτομίσιμος με την διαμέριση: $V_1 = \{v_1, v_3, v_6\}$ και $V_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$. Ο G_2 δεν είναι διχοτομίσιμος

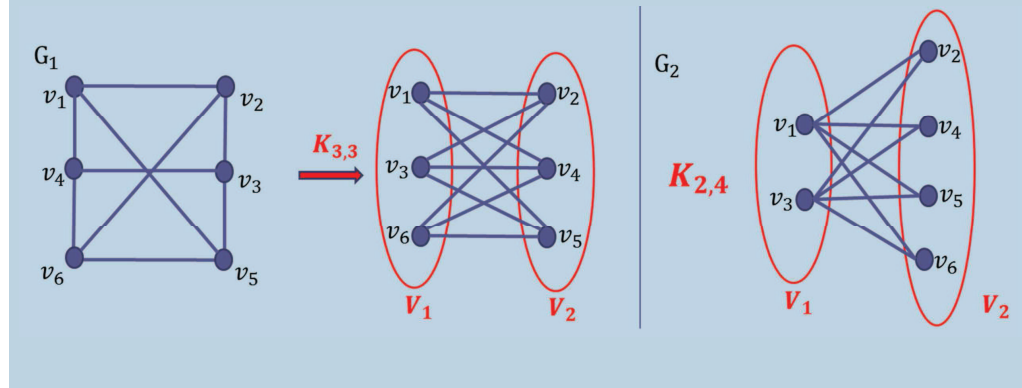


Ορισμός: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **πλήρες διχοτομίσιμο (ή πλήρες διμερές)** αν είναι διχοτομίσιμο και περιέχει όλες τις δυνατές ακμές που μπορούν να συνδέουν τις κορυφές του V_1 με τις κορυφές του V_2

Παρατηρήσεις:

- Συμβολίζεται με $K_{m,n}$ όπου $m = |V_1|$, $n = |V_2|$ και
- Ισχύει ότι:
 - Έχει $|V| = m + n$ κορυφές
 - Έχει $|E| = m \cdot n$ ακμές

Παράδειγμα: Ο G_1 είναι το $K_{3,3}$, Ο G_2 είναι το $K_{2,4}$



Ορισμός: Σύνολο Ανεξαρτησίας ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που δεν συνδέονται με ακμή

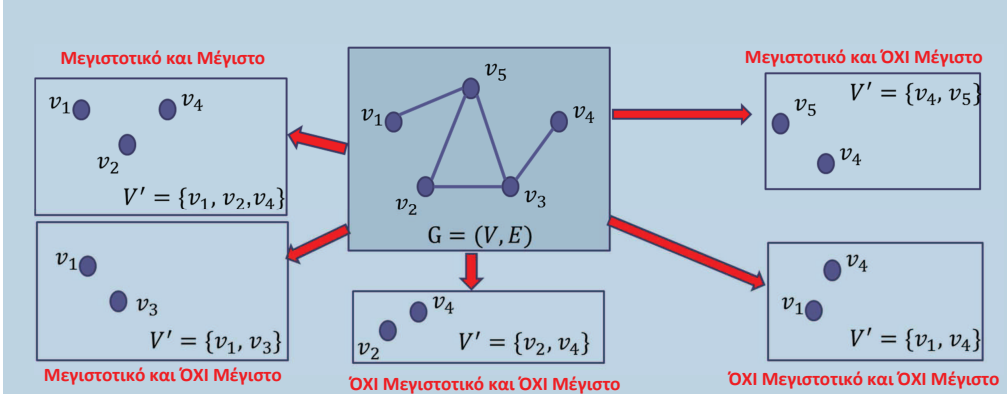
Τυπικά:

- Το σύνολο $V' \subseteq V$ είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας του γραφήματος $G = (V, E)$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος $v_i, v_j \in V'$ με $v_i \neq v_j$ ισχύει ότι $[v_i, v_j] \notin E$

Ορισμός: Ένα σύνολο ανεξαρτησίας που δεν μπορεί να επαυξηθεί περαιτέρω (προσθέτοντας του ακόμη μία κορυφή) λέγεται **μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας**.

Ορισμός: Το μεγαλύτερο (σε πληθάνημο) μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας καλείται **μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας**.

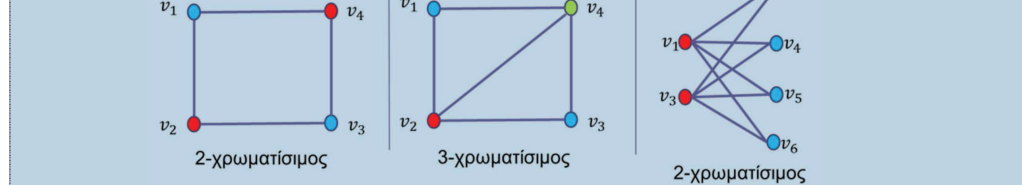
Παράδειγμα:



Ορισμός: Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι **k-χρωματίσιμο** αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν με k χρώματα ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

- Ή ισοδύναμα αν μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές σε k σύνολα ανεξαρτησίας (με κάθε σύνολο να χρωματίζεται με ένα χρώμα)
- Ένα k-χρωματίσιμο γράφημα θα λέγεται και k-μερές (σε αναλογία το 2-χρωματίσιμο γράφημα έχει 2 σύνολα ανεξαρτησίας, καλείται διμερές)

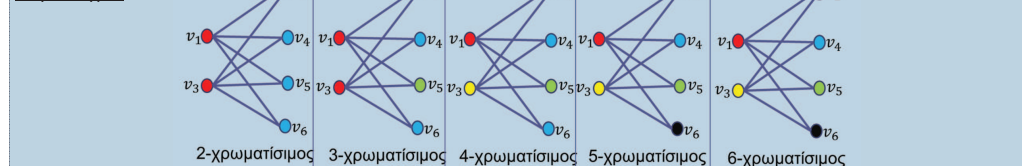
Παράδειγμα:



Σημαντικό:

- Ένας έγκυρος χρωματισμός δεν απαιτεί τον χρωματισμό των κορυφών με το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων.
- Έτσι αν ένα γράφημα είναι π.χ. 2-χρωματίσιμο, τότε θα είναι και 3-χρωματίσιμο, ... και n-χρωματίσιμο

Παράδειγμα:



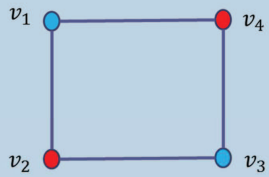


Ορισμός: Χρωματικός Αριθμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται το ελάχιστο k , για το οποίο ο γράφος είναι k -χρωματίσιμος.

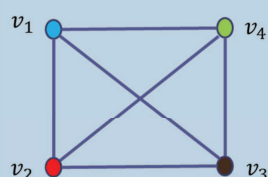
- Συμβολίζεται με $\chi(G)$

Το πρόβλημα της εύρεσης του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (δεν υπάρχει αποδοτικός τρόπος για να βρίσκουμε γρήγορα τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος – το πρόβλημα είναι NP-Complete).

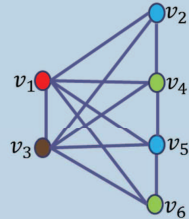
Παράδειγμα:



$$\chi(G) = 2$$



$$\chi(G) = 4$$



$$\chi(G) = 2$$