ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Μάθημα 3.4:
Κλειστότητα Πράξεων των Κανονικών Γλωσσών

Δημήτρης Ψούνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- Κλειστότητες Κανονικών Γλωσσών

Επίπεδο Β
- Απλοποίηση των ΝΠΑ

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα

Η έννοια της κλειστότητας είναι κοινή στα μαθηματικά και αφορά το γεγονός αν το αποτέλεσμα μιας πράξης συντηρεί την ιδιότητα που έχουν τα στοιχεία στα οποία εφαρμόσαμε την πράξη.

Π.χ. λέμε ότι έχουμε κλειστότητα στην πράξη της πρόσθεσης στους φυσικούς αριθμούς.

- Διότι αν έχουμε δύο φυσικούς x,y τότε το αποτέλεσμα x+y είναι και πάλι φυσικός

Αλλά και στην πράξη του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς:

- Διότι αν έχουμε δύο φυσικούς x,y τότε το αποτέλεσμα x*y είναι και πάλι φυσικός

Αλλά όχι στην πράξη της αφαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς:

- Διότι αν έχουμε δύο φυσικούς x,y τότε το αποτέλεσμα x-y δεν είναι κατ' ανάγκην φυσικός αριθμός

Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

Η έννοια της κλειστότητας βρίσκει εφαρμογή και στις γλώσσες.

Θεωρούμε δύο γλώσσες L_1 και L_2 που είναι κανονικές.

- Η <u>ένωση</u> τους είναι κανονική (θα το αποδείξουμε μέσω Κ.Ε.)
- Η <u>παράθεση</u> τους είναι κανονική (θα το αποδείξουμε μέσω Κ.Ε)
- Το <u>αστέρι Kleene</u> της L_1 είναι κανονική (θα το αποδείξουμε μέσω Κ.Ε)
- Το <u>συμπλήρωμα</u> της L_1 είναι κανονική (θα το αποδείξουμε με ΝΠΑ)
- Η <u>τομή</u> τους είναι κανονική (θα το αποδείξουμε με ΝΠΑ)

Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

1. Κλειστότητα στην Ένωση

Θεώρημα (Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην Ένωση)

Αν η L_1 είναι Κανονική Γλώσσα και η L_2 είναι Κανονική Γλωσσα τότε και η $L_1 \cup L_2$ είναι Κανονική Γλώσσα

Απόδειξη

Η L_1 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_1

Η L_2 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_2

Η $L_1 \cup L_2$ περιγράφεται από την κανονική έκφραση r_1+r_2, άρα είναι κανονική γλώσσα.

Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

2. Κλειστότητα στην Παράθεση

Θεώρημα (Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην Παράθεση)

Αν η L_1 είναι Κανονική Γλώσσα και η L_2 είναι Κανονική Γλωσσα τότε και η L_1L_2 είναι Κανονική Γλώσσα.

Απόδειξη

Η L_1 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_1
Η L_2 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_2

Η L_1L_2 περιγράφεται από την κανονική έκφραση r_1r_2, άρα είναι κανονική γλώσσα.

Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

3. Κλειστότητα στο Αστέρι Kleene

Θεώρημα (Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στο Αστέρι Kleene)

Αν η L είναι Κανονική Γλώσσα τότε και η L^* είναι Κανονική Γλώσσα.

Απόδειξη

Η L είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r

Η L^* περιγράφεται από την κανονική έκφραση r^*, άρα είναι κανονική γλώσσα.

Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

4. Κλειστότητα στο Συμπλήρωμα

Θεώρημα (Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στο Συμπλήρωμα)

Αν η L είναι Κανονική Γλώσσα τότε και η $\overline{L}$ είναι Κανονική Γλώσσα.

Απόδειξη

Η L είναι κανονική άρα υπάρχει ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M που αποφασίζει την γλώσσα.

Κατασκευάζουμε M΄ ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο για την $\overline{L}$ ως εξής: Το M' είναι το ίδιο με το M, αλλά:

- Κάθε τελική κατάσταση του M γίνεται μη τελική στο M΄
- Κάθε μη τελική κατάσταση του M' γίνεται τελική στο M

Μία συμβολοσειρά w που ανήκει στην L, θα οδηγείται σε τελική κατάσταση στο M, άρα σε μη τελική στο M', άρα θα απαντάει ΌΧΙ στο M' αφού η w δεν ανήκει στην $\overline{L}$.

Μία συμβολοσειρά w που δεν ανήκει στην L, θα οδηγείται σε μη τελική κατάσταση στο M, άρα σε τελική στο M', άρα θα απαντάει ΝΑΙ στο M' αφού η w ανήκει στην $\overline{L}$.

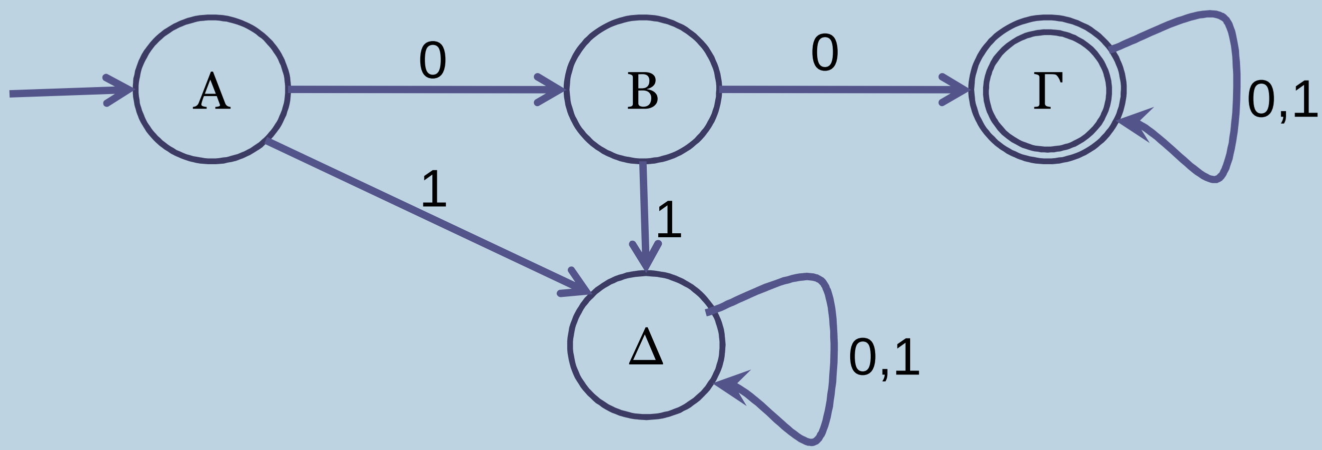
Συνεπώς το M΄ αποφασίζει την $\overline{L}$, άρα η $\overline{L}$ είναι κανονική

Β. Θεωρία

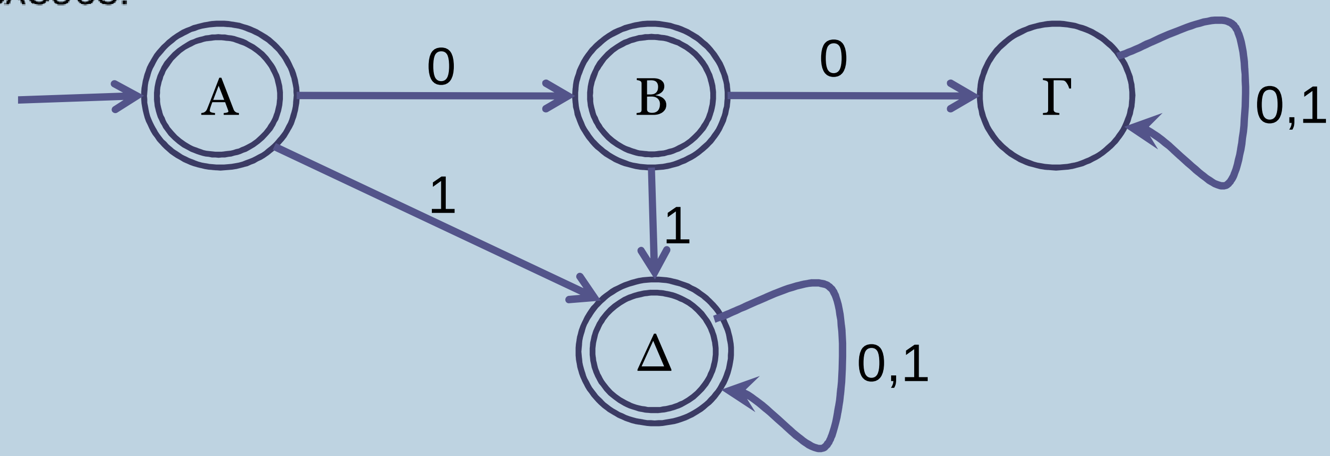
1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

4. Κλειστότητα στο Συμπλήρωμα

Παράδειγμα: Το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας L={w∈{0,1}*| w αρχίζει με 00} είναι το ακόλουθο:



Συνεπώς το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας $\overline{L}$ ={w∈{0,1}*| w δεν αρχίζει με 00} είναι το ακόλουθο:



Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

5. Κλειστότητα στην Τομή

Θεώρημα (Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην Τομή)

Αν η L_1 είναι Κανονική Γλώσσα και η L_2 είναι Κανονική Γλωσσα τότε και η $L_1 \cap L_2$ είναι Κανονική Γλώσσα.

Απόδειξη

Οι L_1, L_2 είναι κανονικές, άρα υπάρχουν ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα που τις αποφασίζουν, έστω M_1, M_2.

Κατασκευάζουμε M΄ ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο για την $L_1 \cap L_2$ που προσομοιώνει την εκτέλεση των M_1, M_2 ως εξής:

- Έχει ως καταστάσεις όλους τους συνδυασμούς των καταστάσεων των M_1, M_2 (καρτεσιανό γινόμενο των καταστάσεων των δύο αυτομάτων)
- Η συνάρτηση μετάβασης μεταβαίνει από ένα ζεύγος καταστάσεων σε επόμενο προσομοιώνοντας ταυτόχρονα και τις δύο κινήσεις των αυτομάτων
- Αρχική Κατάσταση είναι το ζεύγος αρχικών καταστάσεων των δύο αυτομάτων
- Τελικές Καταστάσεις είναι τα ζεύγη τελικών καταστάσεων των δύο αυτομάτων.

Επειδή το αυτόματο προσομοιώνει την ταυτόχρονη λειτουργία των δύο αυτομάτων, αποφασίζει την γλώσσα $L_1 \cap L_2$, άρα αυτή είναι κανονική.

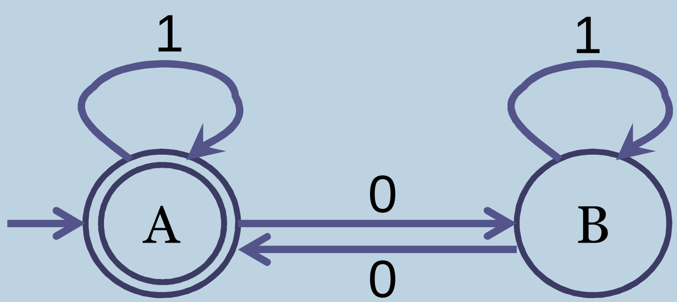
Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

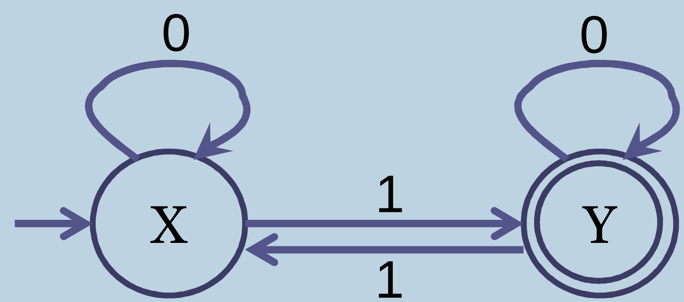
5. Κλειστότητα στην Τομή

Παράδειγμα:

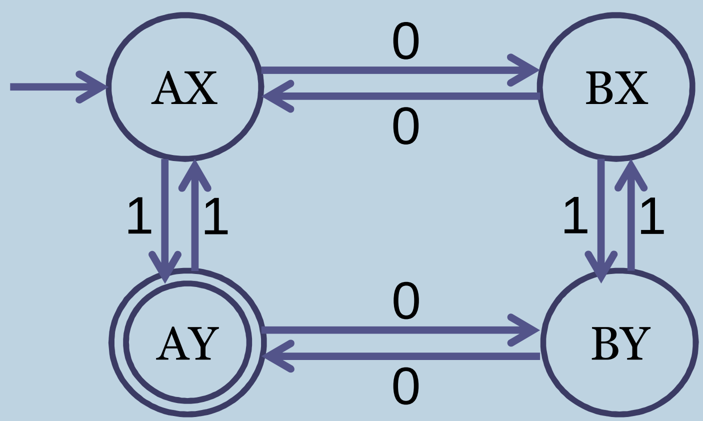
$L_1=\{w\in\{0,1\}^* |$ w περιέχει αρτια 0$\}$



$L_2=\{w\in\{0,1\}^* |$ w περιέχει περιττά 1$\}$



Συνεπώς το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας $L_1 \cap L_2 = \{w\in\{0,1\}^* |$ w περιέχει άρτια 0 και περιττά 1$\}$ είναι το ακόλουθο:



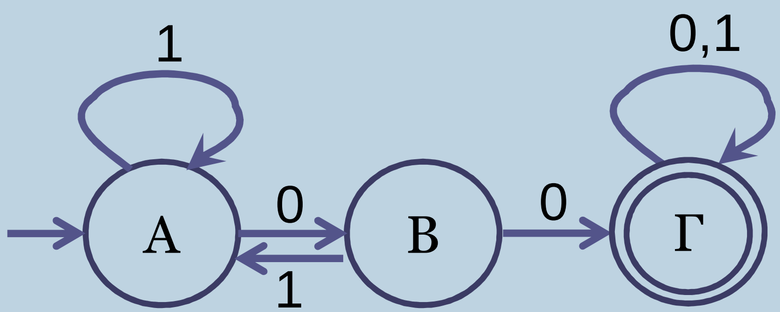
Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

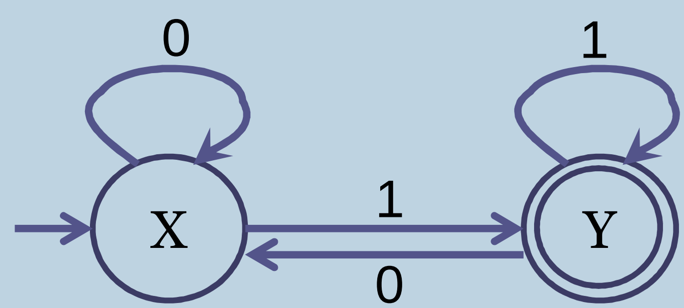
5. Κλειστότητα στην Τομή

Παράδειγμα 2:

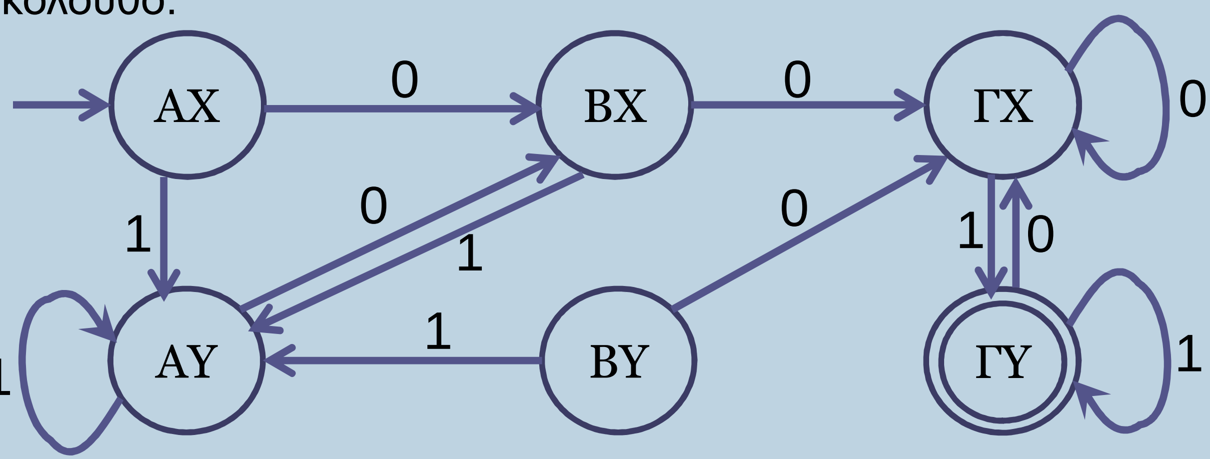
$L_1=\{w\in\{0,1\}^*|$ w περιέχει το 00$\}$



$L_2=\{w\in\{0,1\}^*|$ w τελειώνει με 1$\}$



Συνεπώς το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας $L_1 \cap L_2 = \{w\in\{0,1\}^*|$ w περιέχει το 00 και τελειώνει με 1$\}$ είναι το ακόλουθο:

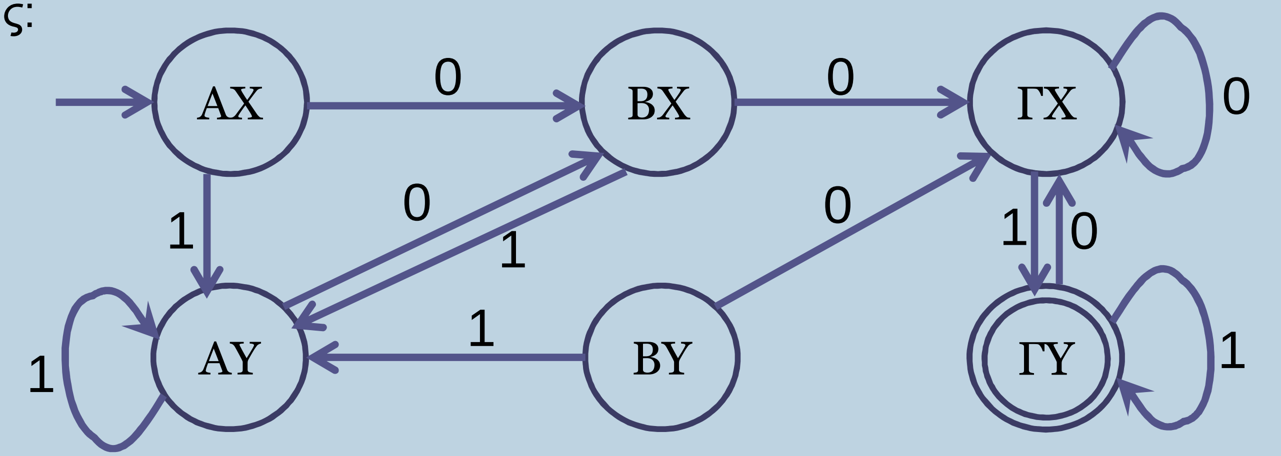


Β. Θεωρία

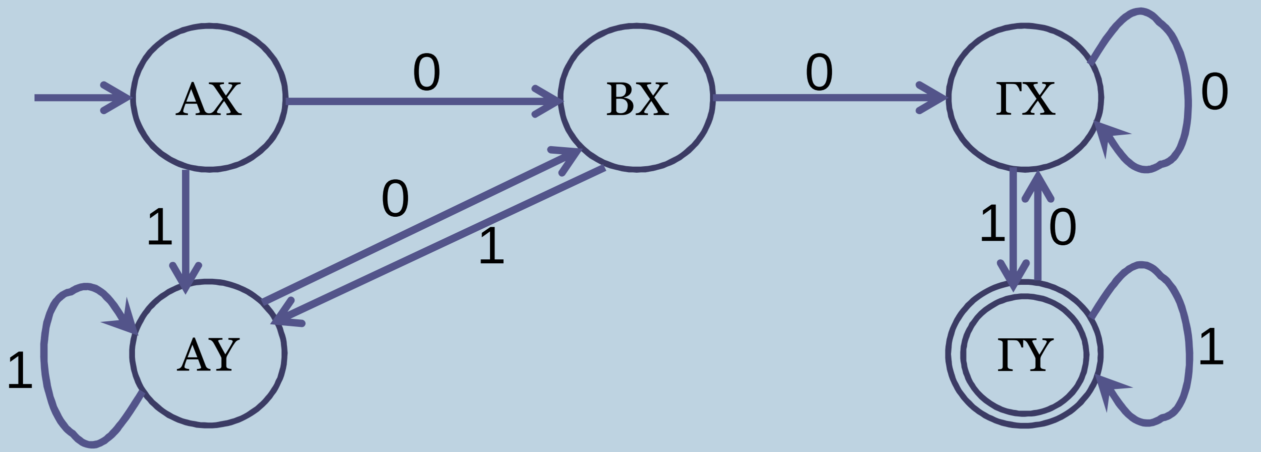
1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

5. Κλειστότητα στην Τομή (απλοποίηση ΝΠΑ – κανόνας 1)

Το αυτόματο που προκύπτει από τον αλγόριθμο κατασκευής ΝΠΑ για την τομή επιδέχεται απλοποιήσεις:



Κανόνας Απλοποιήσης 1: Καταστάσεις που δεν έχουν εισερχόμενο βέλος μπορούν να καταργηθούν (άρα η κατάσταση ΒΥ μπορεί να καταργηθεί):

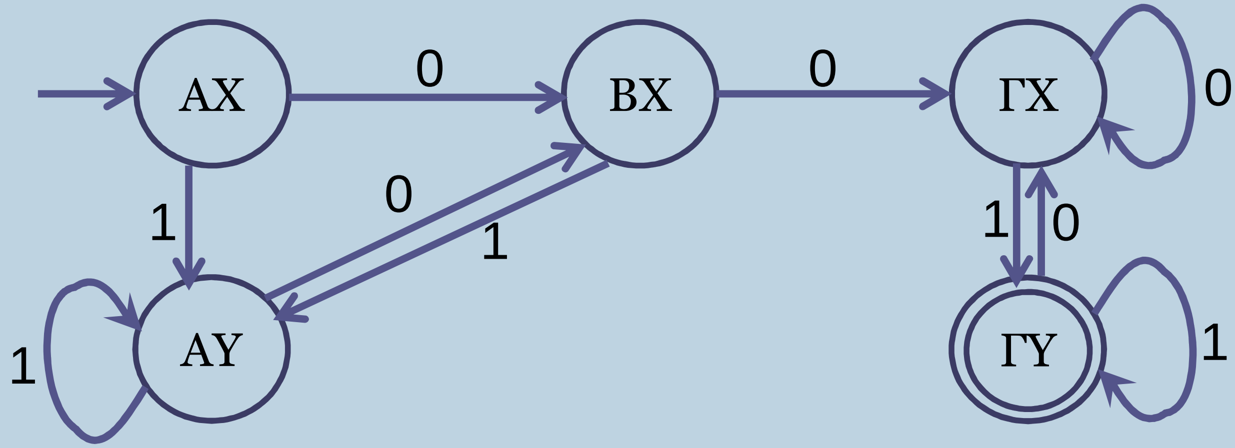


Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

5. Κλειστότητα στην Τομή (απλοποίηση ΝΠΑ – κανόνας 2)

Στο αυτόματο που προέκυψε μπορούμε να εφαρμόσουμε και τον δεύτερο κανόνα απλοποίησης

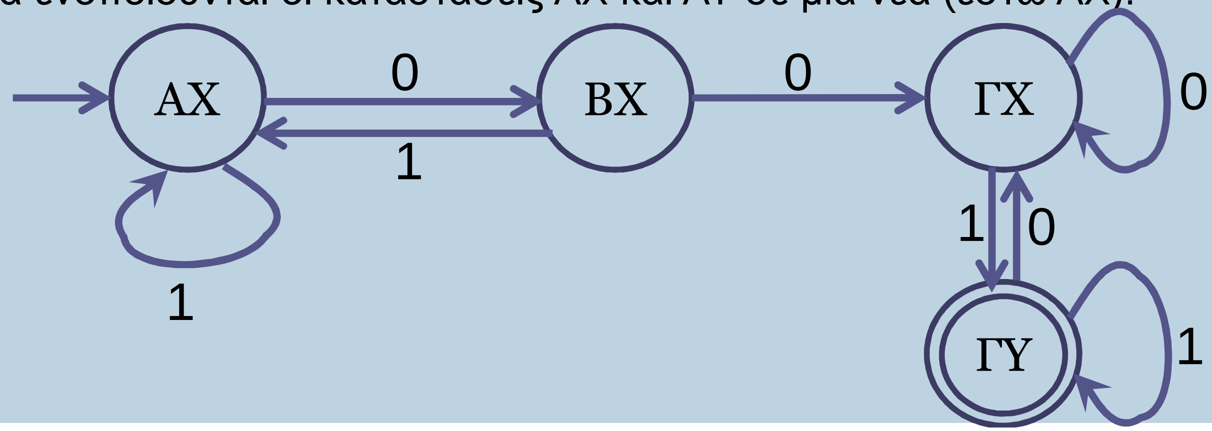


Κανόνας Απλοποιήσης 2: Καταστάσεις που έχουν την ίδια συμπεριφορα, δηλαδή:

- είναι και οι δύο τελικές (ή μη τελικές)
- Πηγαίνουν στις ίδιες καταστάσεις με το ίδιο σύμβολο

Μπορούν να συμπτυχθούν σε μία.

Στο παράδειγμα ενοποιούνται οι καταστάσεις ΑΧ και ΑΥ σε μία νέα (έστω ΑΧ):

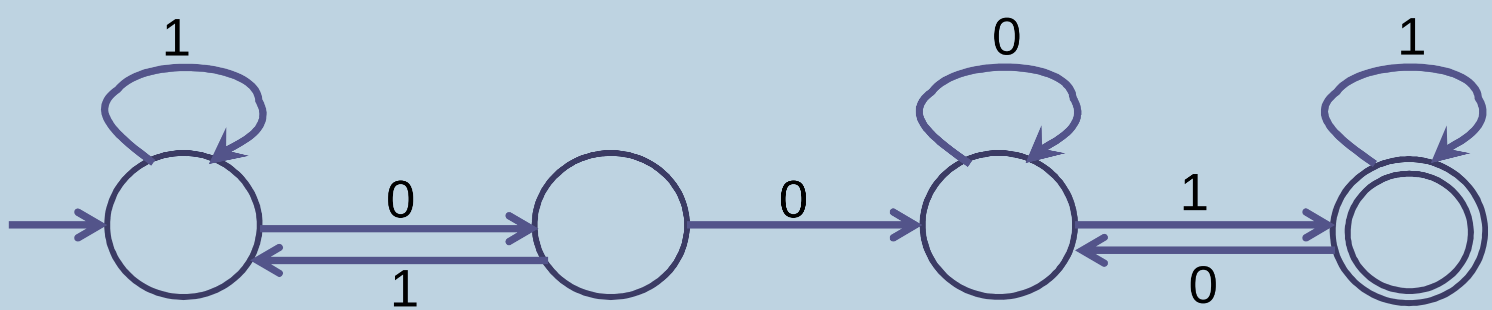


Β. Θεωρία

1. Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών

5. Κλειστότητα στην Τομή (απλοποίηση ΝΠΑ – κανόνας 2)

Το τελικό αυτόματο που προκύπτει για την γλώσσα είναι $L_1 \cap L_2 = \{w \in \{0,1\}^* |$ w περιέχει το 00 και τελειώνει με 1}:



Οι δύο κανόνες απλοποίησης δρουν επαναληπτικά, δηλαδή όσο βρίσκουν εφαρμογή, συνεχίζουμε να τους εφαρμόζουμε. Όταν δεν βρίσκουν πλέον εφαρμογή, θα έχει προκύψει ΝΠΑ με το ελάχιστο δυνατό πλήθος καταστάσεων.

<u>Η ελαχιστοποίηση των καταστάσεων του αυτομάτου δεν είναι υποχρεωτική! Την εφαρμόζουμε μόνο εφόσον μας το ζητάει η εκφώνηση της άσκησης.</u>

Β. Θεωρία

2. Επιπλέον Κατασκευές

Στηριζόμαστε στην κατασκευή του ΝΠΑ για την τομή.

Συγκεκριμένα ακολουθούμε ακριβώς τους ίδιους κανόνες για:

- Την κατασκευή καταστάσεων (ως το καρτεσιανό γινόμενο των καταστάσεων των δύο αυτομάτων)
- Τις μεταβάσεις να προσομοιώνουν την λειτουργία των δύο αυτομάτων
- Την αρχική ως τον συνδυασμό αρχικών καάστάσεων των δύο αυτομάτων.

Τροποποιούμε την επιλογή των τελικών καταστάσεων:

- Επιλέγουμε ως τελικές αυτές που περιέχουν τουλάχιστον μία τελική κατάσταση (του πρώτου ή του δεύτερου ή και των δύο)
  - Και έχουμε ΝΠΑ για την <u>ένωση των δύο γλωσσών L1 U L2</u>
- Επιλέγουμε ως τελικές αυτές που περιέχουν τελική κατάσταση του Μ1 και μη τελική κατάσταση του Μ2
  - Και έχουμε ΝΠΑ για την <u>διαφορά των δύο γλωσσών L1 - L2</u>

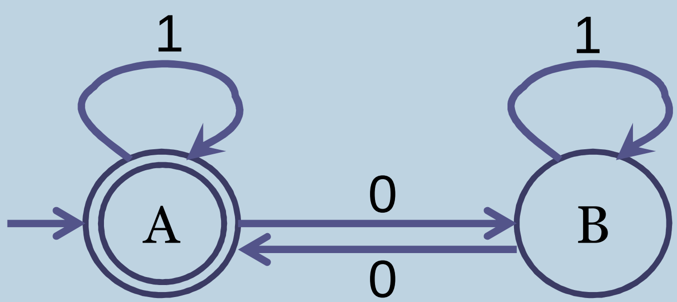
Β. Θεωρία

2. Επιπλέον Κατασκευές

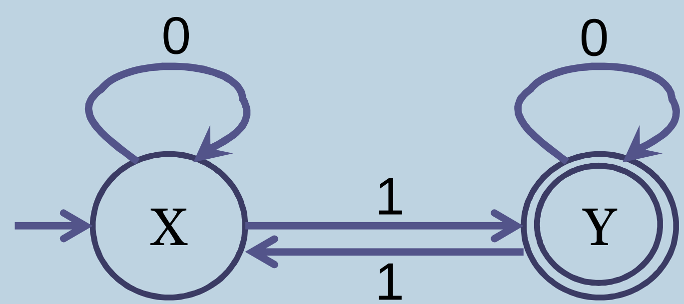
5. Κατασκευή ΝΠΑ για την Ένωση

Παράδειγμα:

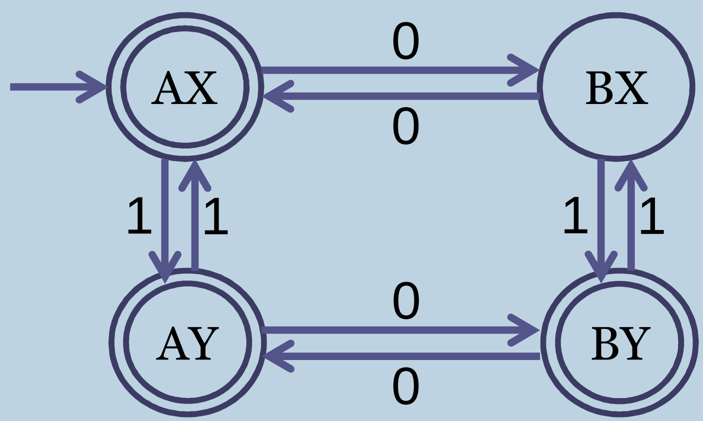
L_1={w∈{0,1}*| w περιέχει αρτια 0}



L_2={w∈{0,1}*| w περιέχει περιττά 1}



Συνεπώς το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας L_1 U L_2 = {w∈{0,1}*| w περιέχει άρτια 0 ή περιττά 1} είναι το ακόλουθο:



Τελικές του L1 (A) και
Μη τελικές του L2 (Y)

Νέες τελικές να περιέχεται μία τουλάχιστον από αυτές
Άρα τελικές είναι οι AX,AY,BY

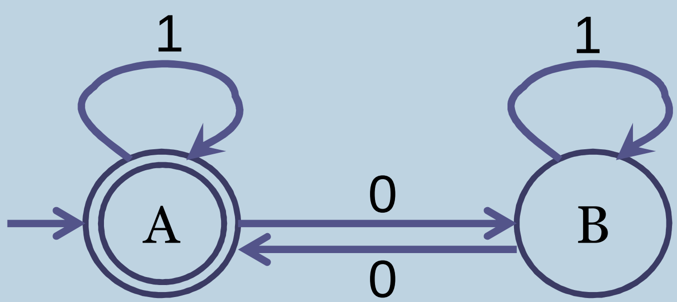
Β. Θεωρία

2. Επιπλέον Κατασκευές

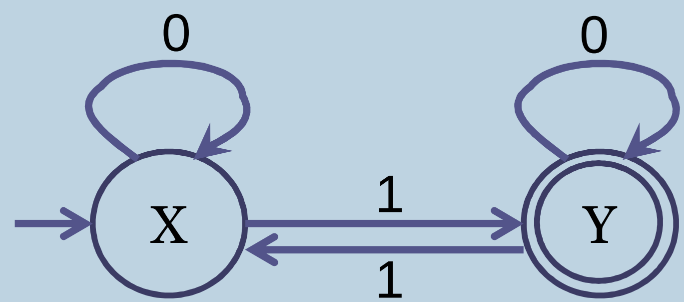
5. Κατασκευή ΝΠΑ για την Διαφορά

Παράδειγμα:

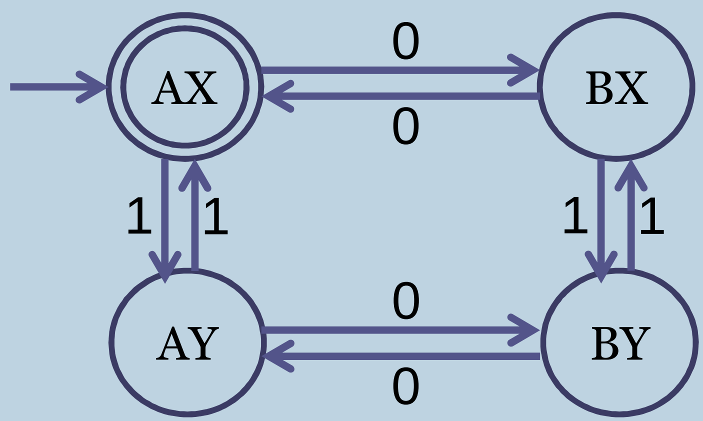
$L_1=\{w\in\{0,1\}^*|$ w περιέχει αρτια 0$\}$



$L_2=\{w\in\{0,1\}^*|$ w περιέχει περιττά 1$\}$



Συνεπώς το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας L_1 - L_2 = $\{w\in\{0,1\}^*|$ w περιέχει άρτια 0 και όχι περιττά 1$\}$ είναι το ακόλουθο:



Τελικές του L_1 (A) και
Μη τελικές του L_2 (X)
Άρα τελική είναι η ΑΧ

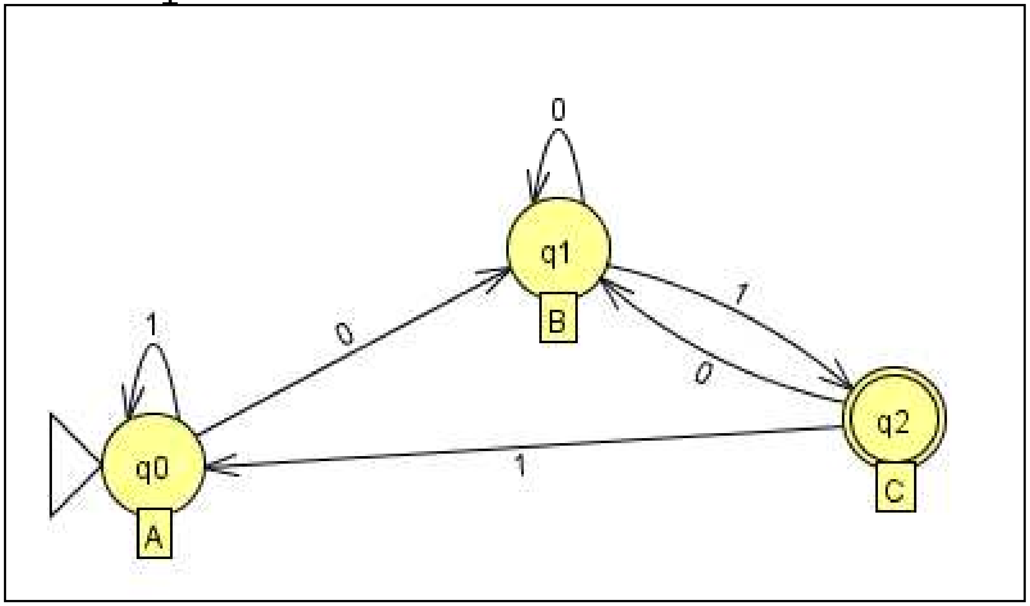
Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

(A) Δώστε ΝΠΑ για την γλώσσα $L=\{w\in\{0,1\}^*|$ w περιέχει τουλάχιστον έναν 1$\}$
(B) Δώστε ΝΠΑ για την γλώσσα $L=\{w\in\{0,1\}^*|$ w αρχίζει με 0$\}$
(Γ) Κατασκευάστε ΝΠΑ για την $L_1\cap L_2$ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο κλειστότητας της τομής

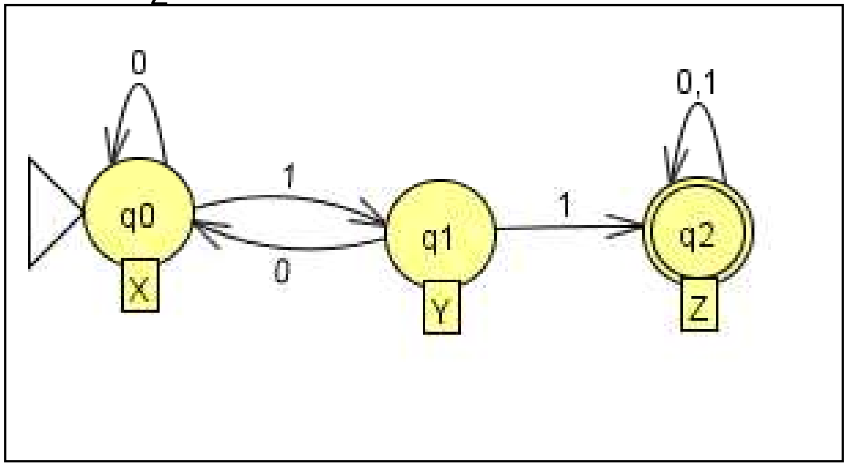
Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Δίδονται τα ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα M_1 και M_2 που αναγνωρίζουν τις γλώσσες L_1 και L_2 αντίστοιχα

M_1



M_2



(Α) Περιγράψτε τις γλώσσες που αναγνωρίζονται από τα δύο αυτόματα.

(Β) Δώστε τις αντίστοιχες κανονικές εκφράσεις.

(Γ) κατασκευάστε ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα που να αναγνωρίζουν τις γλώσσες $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_2$.

(Δ) Απλοποιήστε το ΝΠΑ της τομής.