ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ και ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Μάθημα 5.5: Απαριθμησιμότητα και Διαγωνοποίηση

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- (-)

Επίπεδο Β
- (-)

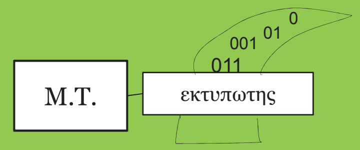
Επίπεδο Γ
- Απαριθμησιμότητα
- Διαγωνοποίηση

Β. Θεωρία

1. Απαριθμησιμότητα

1. Σκεπτικό: Η Μηχανή Turing ως Απαριθμητής

Υπάρχει μια ειδική οικογένεια μηχανών Turing που λέγονται **απαριθμητές**.
- Είναι μία μηχανή Turing στην οποία έχουμε συνδέσει έναν εκτυπωτή!



- Ο ρόλος της μηχανής αυτής είναι **να εκτυπώνει συμβολοσειρές μίας γλώσσας**
- Π.χ. μπορούμε να κατασκευάσουμε μία Μ.Τ.-απαριθμητή για την γλώσσα 0^n1^n που θα εκτυπώνει διαδοχικά της συμβολοσειρές ε,01,0011,000111 κ.λπ.
- Προσοχή! Αυτή η μηχανή Turing δεν σταματά ποτέ! Δουλεύει επ' άπειρον παράγοντας διαδοχικά τις συμβολοσειρές της γλώσσας.

Β. Θεωρία
1. Απαριθμησιμότητα
1. Σκεπτικό: Η Μηχανή Turing ως Απαριθμητής

Υπενθύμιση: **Λεξικογραφική Σειρά**

- Όταν λέμε λεξικογραφική σειρά συμβολοσειρών μία γλώσσας, ορίζουμε ότι είναι ταξινόμηση των συμβολοσειρών:
  - Πρώτα κατά μήκος συμβολοσειρών
  - Έπειτα κατά αλφαβητική σειρά.
- Π.χ. για την γλώσσα $L = \{w \in \{0,1\}^* | w\ \pi\varepsilon\rho\iota\varepsilon\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ 00\}$ η λεξικογραφική σειρά είναι:
  - Μήκος 0:
  - Μήκος 1:
  - Μήκος 2: 00
  - Μήκος 3: 000,001,100
  - Μήκος 4: 0000,0001,1000,1001
  - κ.ο.κ.
- Ενώ η λεξικογραφική σειρά των συμβολοσειρών του αλφαβήτου Σ={0,1} είναι:
  - Μήκος 0: ε
  - Μήκος 1: 0,1
  - Μήκος 2: 00,01,10,11
  - Μήκος 3: 000,001,010,011,100,101,110,111
  - κ.οκ.

Β. Θεωρία
1. Απαριθμησιμότητα
2. Λεξικογραφικά Turing Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Ορισμός:
- Μία γλώσσα θα λέξεται **λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν διαθέτει λεξικογραφικό Turing-Απαριθμητή
- **Λεξικογραφικός Turing Απαριθμητής** είναι μία Μ.Τ. που εκτυπωνει μία-μία τις συμβολοσειρές της γλώσσας με λεξικογραφική σειρά

Π.χ αν εμπλουτίσουμε την μηχανή Turing με μία εντολή «τύπωσε» τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τον εξής λεξικογραφικό απαριθμητή για την γλώσσα L = { 0^n1^n | n≥0 }

- Ξεκίνα με είσοδο #<u>#</u>

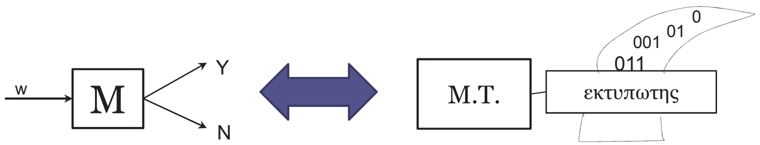
- Επανέλαβε τα εξής:
  - Τύπωσε την συμβολοσειρά
  - Γράψε ένα μηδενικό αριστερα
  - Γράψε έναν άσσο δεξιά
  - Κάνε μία δεξιά ολίσθηση για να εχει την μορφή #w#

Συνεπώς η γλώσσα είναι Λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη

Β. Θεωρία
1. Απαριθμησιμότητα
3. Λεξικογραφικά Απαριθμήσιμες = Αποφασίσιμες Γλώσσες

Θεώρημα:
- Μία γλώσσα είναι **λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν είναι **Turing-Αποφασίσιμη** γλώσσα

➢ Έτσι έχουμε ισοδυναμία των δύο κατασκευασμάτων



Μ.Τ. που αποφασίζει

Λεξικογραφικός Απαριθμητής

➢ Θα αποδείξουμε το ευθύ και το αντίστροφο, δηλαδή:
  ➢ Αν μια γλώσσα είναι Λεξικογραφικά Απαριθμήσιμη τότε είναι και Αποφασίσιμη
  ➢ Αν μια γλώσσα είναι Αποφασίσιμη τότε είναι Λεξικογραφικά Απαριθμήσιμη

Β. Θεωρία
1. Απαριθμησιμότητα
3. Λεξικογραφικά Απαριθμήσιμες = Αποφασίσιμες Γλώσσες

«ευθύ» Απόδειξη της πρότασης:
Αν μία γλώσσα είναι **λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη** τότε είναι **Turing-Αποφασίσιμη** γλώσσα

Απόδειξη:
Έστω ότι υπάρχει λεξικογραφικός απαριθμητής. Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing M η οποία αποφασίζει την γλώσσα ως εξής:

Δεδομένης της εισόδου w, τρέχουμε τον απαριθμητή
- Αν εκτυπωθεί η συμβολοσειρά w απαντάμε ΝΑΙ.
- Αν η w δεν έχει εκτυπωθεί, και εκτυπωθεί συμβολοσειρά με μήκος > |w| απαντάμε ΌΧΙ

Κατασκευάσαμε μηχανή Turing που αποφασίζει την γλώσσα άρα αυτή είναι αποφασίσιμη.

Β. Θεωρία

1. Απαριθμησιμότητα

3. Λεξικογραφικά Απαριθμήσιμες = Αποφασίσιμες Γλώσσες

«αντίστροφο» Απόδειξη της πρότασης:
Αν μία γλώσσα είναι **Turing-Αποφασίσιμη** τότε είναι **λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη** γλώσσα

Απόδειξη:
Έστω ότι υπάρχει μηχανή Turing που αποφασίζει την γλώσσα Μ.

Κατασκευάζουμε έναν απαριθμητή της γλώσσας ως εξής
- Επαναληπτικά παράγουμε λεξικογραφικά όλες τις συμβολοσειρές του Σ* και κάθε μία από αυτές την περνάμε ως είσοδο στην Μ.
  - Αν η Μ απαντήσει ΝΑΙ εκτυπώνουμε την συμβολοσειρά
  - Αν η Μ απαντήσει ΌΧΙ δεν εκτυπώνουμε την συμβολοσειρά.

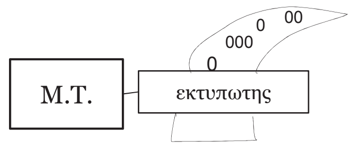
Κατασκευάσαμε λεξικογραφικό απαριθμητή για την γλώσσα, άρα αυτή είναι λεξικογραφικά απαριθμήσιμη.

Β. Θεωρία

1. Απαριθμησιμότητα

4. Turing Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Ορισμός:
- Μία γλώσσα θα λέγεται **Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν διαθέτει Turing-Απαριθμητή
- **Turing Απαριθμητής** είναι μία Μ.Τ. που και πάλι εκτυπώνει όλες τις συμβολοσειρές της γλώσσας:
  - Ωστόσο τις εκτυπώνει με τυχαία σειρά και πιθανώς με επαναλήψεις
  - Όμως αν μια συμβολοσειρα ανήκει στην γλώσσα, τότε εγγυημένα σε κάποιο βήμα εκτύπωσης αυτή θα εκτυπωθεί!



Απαριθμητής για την 0*

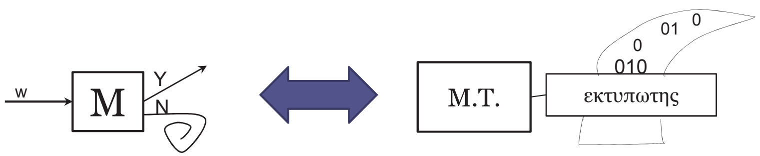
Β. Θεωρία

1. Απαριθμησιμότητα

5. Απαριθμήσιμες = Αποδεκτές Γλώσσες

Θεώρημα:
- Μία γλώσσα είναι **Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν είναι **Turing-Αποδεκτή** γλώσσα

➢ Έτσι έχουμε ισοδυναμία των δύο κατασκευασμάτων



Μ.Τ. που αποδέχεται   Απαριθμητής

➢ Θα αποδείξουμε το ευθύ και το αντίστροφο, δηλαδή:
  ➢ Αν μια γλώσσα είναι Απαριθμήσιμη τότε είναι και Αποδεκτή
  ➢ Αν μια γλώσσα είναι Αποδεκτή τότε είναι Απαριθμήσιμη

Β. Θεωρία

1. Απαριθμησιμότητα

5. Απαριθμήσιμες = Αποδεκτές Γλώσσες

«ευθύ» Απόδειξη της πρότασης:
Αν μία γλώσσα είναι **Turing-Απαριθμήσιμη** τότε είναι **Turing-Αποδεκτή** γλώσσα

Απόδειξη:
Έστω ότι υπάρχει απαριθμητής. Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing M η οποία αποδέχεται την γλώσσα ως εξής:

Δεδομένης της εισόδου w, τρέχουμε τον απαριθμητή
- Αν η είσοδος w ανήκει στην γλώσσα, τότε σε κάποιο βήμα θα εκτυπωθεί από τον απαριθμητή. Μόλις εκτυπωθεί τερματίζουμε την εκτέλεση της M.
- Αν η είσοδος w δεν ανήκει στην γλώσσα, τότε δεν θα εκτυπωθεί από τον απαριθμητή. Η M δεν τερματίζει.

Κατασκευάσαμε μηχανή Turing που ημι-αποφασίζει την γλώσσα άρα αυτή είναι αποδεκτή.

Β. Θεωρία
1. Απαριθμησιμότητα
5. Απαριθμήσιμες = Αποδεκτές Γλώσσες

«αντίστροφο» Απόδειξη της πρότασης:
Αν μία γλώσσα είναι **Turing-Αποδεκτή** τότε είναι **Turing-Απαριθμήσιμη** γλώσσα

Απόδειξη:
Έστω M η μηχανή που αποδέχεται την γλώσσα. Κατασκευάζουμε απαριθμητή της γλώσσας με την διαδικασία της **χελιδονοουράς** ως εξής:
- Επαναλαμβάνουμε σε φάσεις:
  - Στην $1^η$ φάση παράγουμε την πρώτη συμβολοσειρά του Σ*
  - Στην $2^η$ φάση παράγουμε τις 2 πρώτες συμβολοσειρές του Σ*
  - Στην $3^η$ φάση παράγουμε τις 3 πρώτες συμβολοσειρές του Σ*
  - Κ.οκ.
- Στην n-οστή φάση προσομοιώνουμε την M κατά n βήματα στις n πρώτες συμβολοσειρές.
  - Κάθε συμβολοσειρά με την οποία η M τερματίζει, την τυπώνουμε και προχωράμε στην επόμενη φάση.

Συνεπώς;
- Αν μία συμβολοσειρά ανήκει στην γλώσσα, μετά από κάποιο (μεγάλο, αλλά πεπερασμένο) χρόνο θα εκτυπωθεί (και όχι μία αλλά άπειρες φορές). Άρα η L είναι Turing-Απαριθμήσιμη.

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
1. Διαίσθηση

Ένα σημαντικό ερώτημα των μαθηματικών είναι ο διαχωρισμός των συνόλων ανάλογα με το πλήθος των στοιχείων που περιέχουν.

Ήδη γνωρίζουμε ότι:
- Ένα σύνολο είναι **πεπερασμένο** αν έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.
- Ένα σύνολο είναι **άπειρο** αν έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

Και τώρα θα μάθουμε ότι υπάρχουν δύο ειδών άπειρα σύνολα:
- Το άπειρο των φυσικών (παρατηρείστε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών δεν μπορεί να υπάρξει άλλος φυσικός αριθμός)

Σε αντίθεση με:
- Το άπειρο των πραγματικών (παρατηρείστε ότι μεταξύ δύο πραγματικών παρεμβάλλεται πάντα κι άλλος πραγματικός αριθμός)

Θα διαχωρίσουμε τα δύο άπειρα ώστε να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:
- Το άπειρο των πραγματικών είναι μεγαλύτερο από το άπειρο των φυσικών

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
1.Διαίσθηση

Ορίζουμε ότι:

- Ένα σύνολο είναι **μετρήσιμα άπειρο** αν δεν είναι πεπερασμένο και τα στοιχεία του μπορούν να διαταχθούν (δηλαδή υπάρχει τρόπος απεικόνισης με έναν μαθηματικό φορμαλισμό που να υπονοείται η σειρά τους)
  - Παραδείγματα τέτοιων συνόλων είναι οι φυσικοί, οι περιττοί, οι ρητοί αριθμοί, οι μηχανές Turing κ.λπ.

- Ένα σύνολο είναι **μη μετρήσιμα άπειρο** αν δεν είναι πεπερασμένο και τα στοιχεία του ΔΕΝ μπορούν να διαταχθούν (δηλαδή ΔΕΝ υπάρχει τρόπος απεικόνισης με έναν μαθηματικό φορμαλισμό που να υπονοείται η σειρά τους)
  - Παραδείγματα τέτοιων συνόλων είναι οι πραγματικοί, οι γλώσσες ενός αλφαβήτου κ.λπ.

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
2. Απόδειξη ότι ένα σύνολο είναι μετρήσιμα άπειρο

Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο είναι μετρήσιμα άπειρο, αρκεί να προτείνουμε έναν συστηματικό τρόπο καταγραφής των μελών του έτσι ώστε ένα στοιχείο του συνόλου να παίρνει με μοναδικό τρόπο την θέση του στην ακολουθία.
Με απλά λόγια πρέπει να υπάρχει τρόπος συστηματικής διάταξης των μελών του.

Παράδειγμα 1:
Οι φυσικοί είναι μετρήσιμα άπειροι.
Πράγματι τα στοιχεία των φυσικών μπορούν να αναπαρασταθούν N={0,1,2,….}

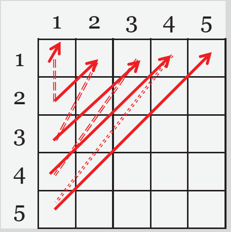
Παράδειγμα 2:
Οι περιττοί είναι μετρήσιμα άπειροι.
Πράγματι τα στοιχεία των περιττών μπορούν να αναπαρασταθούν A={1,3,5,….}

Παράδειγμα 3:
Η γλώσσα L={w|w αρχίζει με 0} είναι μετρήσιμα άπειρη.
Πράγματι τα στοιχεία μπορούν να αναπαρασταθούν A={0,00,01,000,001,010,011,…}

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
2. Απόδειξη ότι ένα σύνολο είναι μετρήσιμα άπειρο

Παράδειγμα 4:
Οι ρητοί είναι μετρήσιμα άπειροι.

Μπορούμε να προτείνουμε την εξής μεθοδολογία καταγραφής των ρητών:



Η σειρά καταγραφής των ρητών που ανακύπτει είναι: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \dots.$

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
3. Απόδειξη ότι ένα σύνολο δεν είναι μετρήσιμα άπειρο

Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο δεν είναι μετρήσιμα άπειρο:
- υποθέτουμε ότι είναι μετρήσιμα άπειρο.
- Υποθέτουμε δηλαδή ότι υπάρχει μια σειρά καταγραφής των μελών του.
- Δίνουμε έπειτα ένα μέλος του συνόλου που δεν έχει απεικονιστεί στην σειρά καταγραφής
  - Η κατασκευή του μέλους γίνεται ως εξής:
    - Διαφέρει από το 1ο μέλος της καταγραφής στο 1ο στοιχείο
    - Από το 2ο μέλος της καταγραφής στο 2ο στοιχείο
    - Κ.ο.κ.
- Άρα το σύνολο δεν είναι μετρήσιμα άπειρο.

Η τεχνική της παραπάνω απόδειξης αναφέρεται ως **διαγωνοποίηση**.

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
3. Απόδειξη ότι ένα σύνολο δεν είναι μετρήσιμα άπειρο

Παράδειγμα 1:
Οι πραγματικοί του διαστήματος [0,1] δεν είναι μετρήσιμα άπειροι.
Απόδειξη:
Έστω ότι είναι μετρήσιμα άπειροι. Τότε υπάρχει μια σειρά καταγραφής τους έστω $x_1, x_2, x_3, \dots$ Κατασκευάζω έναν πραγματικό αριθμό x' που διαφέρει από το αριθμό x_i στο i-οστό δεκαδικό ψηφίο

	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	5ο ψηφίο	....
X_1	7	9	9	2	5	...
X_2	6	4	6	0	9	...
X_3	1	0	0	0	1	...
X_4	4	8	8	8	9	...
X_5	3	9	9	2	1	...
...	...	....	...	....	....	....
X'	6	5	1	9	2	....

Κατασκευάσαμε το X' που δεν είναι στην παραπάνω καταγραφή. Άτοπο.

Β. Θεωρία
2. Διαγωνοποίηση
3. Απόδειξη ότι ένα σύνολο δεν είναι μετρήσιμα άπειρο

Παράδειγμα 2:
Οι γλώσσες του αλφαβήτου {0,1} δεν είναι μετρήσιμα άπειρες.
Απόδειξη:
Έστω ότι είναι μετρήσιμα άπειρες. Τότε υπάρχει μια σειρά καταγραφής τους έστω $L_1, L_2, L_3, \dots$ Κατασκευάζω μία γλώσσα L' που διαφέρει από το αριθμό L_i στην i-οστή συμβολοσειρά με βάση την λεξικογραφική σειρά του {0,1}

	ε	0	1	00	01	....
L_1	√	√	√			...
L_2	√				√	...
L_3	√	√	√	√		...
L_4			√	√	√	...
L_5	√	√		√		...
...	...	....	...	....	....	....
L'		√			√	....

Κατασκευάσαμε την L' που δεν είναι στην παραπάνω καταγραφή. Άτοπο.

Β. Θεωρία

2. Διαγωνοποίηση

Τελικό Συμπέρασμα

Αποδεικνύεται ότι:
- Οι μηχανές Turing είναι μετρήσιμα άπειρες.

Αποδείξαμε ότι:
- Οι γλώσσες δεν είναι μετρήσιμα άπειρες.

Συνεπως οι γλώσσες είναι «περισσότερες» από τις μηχανές Turing.

Άρα θα υπάρχουν γλώσσες για τις οποίες δεν μπορούν να κατασκευαστούν μηχανές Turing, άρα υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να αποφασιστούν από μηχανή Turing.

Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

(2007Α) Έχουμε γνωρίσει γλώσσες που είναι Turing-αποδεκτές και Turing-αποφασίσιμες. Υπάρχουν όμως γλώσσες που δεν είναι ούτε καν Turing-αποδεκτές. Εξετάστε για παράδειγμα τις παρακάτω δύο γλώσσες:
A = {<M> | M δέχεται το πολύ 2007 διαφορετικές συμβολοσειρές }
B = {<M> | M δέχεται περισσότερες από 2007 διαφορετικές συμβολοσειρές }
Μία από αυτές είναι Turing αποδεκτή ενώ η άλλη δεν είναι. Βρείτε ποία από τις δύο δεν είναι.