

ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 2.4:
Το αξιωματικό Σύστημα ΠΛ

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Το αξιωματικό σύστημα ΠΛ

1. Ορισμός του αξιωματικού συστήματος ΠΛ

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε μία τυπική απόδειξη

1. Υποθέσεις του Συνόλου Τύπων

2. Ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3

1. Το αξιωματικό Σχήμα 1

2. Το Αξιωματικό Σχήμα 2

3. Το αξιωματικό Σχήμα 3

4. Προς τα Εμπρός Συλλογιστική

5. Προς τα Πίσω Συλλογιστική

4. Τυπικά Θεωρήματα

5. Τυπικές Συνεπαγωγές που δίνονται από την εκφώνηση της άσκησης

Γ. Μεθοδολογία

1. «Προς τα εμπρός» συλλογιστική

2. «Προς τα πίσω» συλλογιστική

Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης

2. Ερωτήσεις

3. Εφαρμογές

A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Όλες οι πληροφορίες του μαθήματος είναι SOS για τις εξετάσεις. Είναι ένα δύσκολο μάθημα που με πολλή εξάσκηση μπορεί κάποιος να το ξέρει στο 100%

Επίπεδο Β

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

B. Θεωρία

1. Το αξιωματικό Σύστημα ΠΛ

1. Ορισμός του αξιωματικού συστήματος ΠΛ

Με το που μεταβαίνουμε στον προτασιακό λογισμό (ΠΛ) δεν ισχύει τίποτα από όσα μάθαμε στον προτασιακή λογική και χτίζουμε μία καινούρια θεωρία από την αρχή στηριζόμενοι στον πυρήνα της μαθηματικής σκέψης:

$$\text{ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ-ΘΕΩΡΙΑ} = \{\text{Αξιώματα} + \text{Αποδεικτικοί Κανόνες}\}$$

Ορισμός:

Ο ΠΛ (προτασιακός λογισμός) είναι το αξιωματικό σύστημα που:

- Έχει ως αξιώματα (αξιωματικά σχήματα) τα:
 - ΑΣ1: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
 - ΑΣ2: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$
 - ΑΣ3: $(\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$
- Και ως αποδεικτικό κανόνα τον Modus Ponens (M.P.)

Σε αυτό το αξιωματικό σύστημα μελετάμε αν ισχύουν:

- $T \vdash_{\text{ΠΛ}} \phi$ δηλαδή όταν ισχύουν οι υποθέσεις του T αν εξάγεται με διαδοχικές εφαρμογές του MP ο τύπος ϕ
- $\vdash_{\text{ΠΛ}} \phi$ δηλαδή αν εξάγεται ο τύπος ϕ με διαδοχικές εφαρμογές MP

Το $\vdash_{\text{ΠΛ}} \phi$ διαβάζεται συνεπάγεται τυπικά στον ΠΛ και θα συμβολίζεται και με \vdash

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

Η εκφώνηση της άσκησης είναι να αποδείξουμε ότι:

$$\Gamma \vdash \varphi$$

όπου Γ είναι ένα σύνολο τύπων (που θα αναφέρουμε και ως σύνολο υποθέσεων)

Και φ ένας τύπος (που θα αναφέρουμε ως ο προς απόδειξη τύπος)

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει η τυπική συνεπαγωγή \vdash στο αξιωματικό σύστημα ΠΛ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε:

1. Τις υποθέσεις του συνόλου τύπων (εφόσον υπάρχουν)
2. Τον αποδεικτικό κανόνα Modus Ponens
3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 και συντακτικές αντικαταστάσεις σε αυτά
4. Τυπικά θεωρήματα (εφόσον τα αποδείξουμε)
5. Τυπικές Συνεπαγωγές (εφόσον δίνονται από την εκφώνηση)

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

1. Υποθέσεις του συνόλου τύπων

Οι υποθέσεις του συνόλου τύπων ισχύουν άρα μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε την απόδειξή μας:

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι:

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), \neg \psi \rightarrow \varphi\} \vdash \neg \psi \rightarrow \varphi$$

Απάντηση:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg \psi \rightarrow \varphi$ Υπόθεση

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

2. Ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens

Ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens ορίζεται ως εξής:

Ορισμός Modus Ponens

Αν ισχύει ο τύπος: Φ

Και ο τύπος: $\Phi \rightarrow \Psi$

Τότε ισχύει και ο τύπος Ψ

Παρατήρηση: Τα παραπάνω ισχύουν ακόμη και με συντακτικές αντικαταστάσεις στα Φ, Ψ (δηλαδή αν όπου Φ και Ψ θέσουμε άλλους τύπους)

Π.χ.

Αν ισχύει ο τύπος: $p \wedge q$

Και ισχύει ο τύπος: $p \wedge q \rightarrow \neg r$

Τότε από τον modus ponens έπεται ότι ισχύει και ο τύπος $\neg r$

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

2. Ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι:

$$\{(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi, \psi \rightarrow \varphi\} \vdash \varphi$$

Απάντηση:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\psi \rightarrow \varphi$ Υπόθεση
2. $(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ Υπόθεση
3. φ MP1,2

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

2. Ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens

Παράδειγμα 3:

Να αποδείξετε ότι:

$$\{ (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), \neg \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi), \neg \psi \} \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Απάντηση:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg \psi$ Υπόθεση
2. $\neg \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
3. $\varphi \rightarrow \chi$ MP1,2
4. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ Υπόθεση
5. $\psi \rightarrow \varphi$ MP3,4

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (1. Το αξιωματικό σχήμα 1)

Τα αξιωματικά σχήματα παράγουν ένα σύνολο από τύπους που ισχύουν:

Ορισμός: Το αξιωματικό σχήμα 1 (ΑΣ1) ορίζεται ως:

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Και ισχύει πάντα στον ΠΛ, ακόμη και αν εφαρμόσουμε την διαδικασία της συντακτικής αντικατάστασης, δηλαδή αντικαταστήσουμε τα φ, ψ με τυχόντες προτασιακούς τύπους

Για παράδειγμα: Ο τύπος:

$$(p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$$

Προκύπτει με ΣΑ στο ΑΣ1 θέτοντας όπου φ το $p \wedge q$ και όπου ψ το q

2ο παράδειγμα: Ο τύπος:

$$(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$$

Προκύπτει με ΣΑ στο ΑΣ1 θέτοντας όπου φ το $\varphi \rightarrow \varphi$ και όπου ψ το φ

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (2. Το αξιωματικό σχήμα 2)

Τα αξιωματικά σχήματα παράγουν ένα σύνολο από τύπους που ισχύουν:

Ορισμός: Το αξιωματικό σχήμα 2 (ΑΣ2) ορίζεται ως:

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

Και ισχύει πάντα στον ΠΛ, ακόμη και αν εφαρμόσουμε την διαδικασία της συντακτικής αντικατάστασης, δηλαδή αντικαταστήσουμε τα φ, ψ, χ με τυχόντες προτασιακούς τύπους

Για παράδειγμα: Ο τύπος:

$$(p \wedge q \rightarrow (q \rightarrow q)) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow q))$$

Προκύπτει με ΣΑ στο ΑΣ2 θέτοντας όπου φ το $p \wedge q$, όπου ψ το q και όπου χ το q

2ο παράδειγμα: Ο τύπος:

$$((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi))$$

Προκύπτει με ΣΑ στο ΑΣ2 θέτοντας όπου φ το $\varphi \rightarrow \varphi$ και όπου ψ το φ και όπου χ το φ

Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (3. Το αξιωματικό σχήμα 3)

Τα αξιωματικά σχήματα παράγουν ένα σύνολο από τύπους που ισχύουν:

Ορισμός: Το αξιωματικό σχήμα 3 (ΑΣ3) ορίζεται ως:

$$(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

Και ισχύει πάντα στον ΠΛ, ακόμη και αν εφαρμόσουμε την διαδικασία της συντακτικής αντικατάστασης, δηλαδή αντικαταστήσουμε τα φ, ψ, χ με τυχόντες προτασιακούς τύπους

Για παράδειγμα: Ο τύπος:

$$(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$$

Προκύπτει με ΣΑ στο ΑΣ3 θέτοντας όπου φ το ψ και όπου ψ το φ

2ο παράδειγμα: Ο τύπος:

$$(\neg \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow ((\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg \varphi)$$

Προκύπτει με ΣΑ στο ΑΣ3 θέτοντας όπου φ το $\neg \varphi$ και όπου ψ το φ



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3

Αν ο προς απόδειξη τύπος δεν εξάγεται απευθείας από τις υποθέσεις με Modus Ponens

Τότε χρησιμοποιούμε τα Αξιωματικά Σχήματα (ή συντακτικές αντικαταστάσεις σε αυτά) για να οδηγηθούμε στο ότι ισχύει ο προς απόδειξη τύπος.

Κάνουμε προς τα εμπρός συλλογιστική:

- όταν ο προς απόδειξη τύπος είναι σχετικά «μικρός» (σε μήκος σε σχέση με τις υποθέσεις)

Κάνουμε προς τα πίσω συλλογιστική:

- όταν ο προς απόδειξη τύπος είναι σχετικά «μεγάλος» (σε μήκος σε σχέση με τις υποθέσεις)

Υπάρχει και η περίπτωση να απαιτηθεί και προς τα εμπρός και προς τα πίσω συλλογιστική στην ίδια άσκηση!



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (4. Προς τα Εμπρός Συλλογιστική)

Κάνουμε προς τα εμπρός συλλογιστική όταν ο προς απόδειξη τύπος είναι σχετικά μικρός σε σχέση με τις υποθέσεις.

Επιλέγουμε μία από τις υποθέσεις που παρατηρούμε ότι μπορεί να προκύψει με συντακτική αντικατάσταση στο αριστερό μέρος ενός από τα αξιωματικά σχήματα:

ΑΣ1: $\underline{\varphi} \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ2: $\underline{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))} \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

ΑΣ3: $\underline{(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi)} \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

Γράφουμε ολοκληρωμένη την συντακτική αντικατάσταση. Κάνουμε modus ponens με την υπόθεση που είχαμε επιλέξει και προκύπτει νέος τύπος που ισχύει.

Αν είναι το συμπέρασμα της τυπικής συνεπαγωγής έχουμε τελειώσει, αλλιώς επαναλαμβάνουμε καθοδηγούμενοι πάντα και από τον τύπο που θέλουμε να αποδείξουμε.



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (4. Προς τα Εμπρός Συλλογιστική)

Παράδειγμα 4: Να αποδειχθεί ότι

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

Σκέψεις: Παρατηρούμε ότι οι υποθέσεις δεν συνδυάζονται με modus ponens.

Ωστόσο η υπόθεση $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ είναι το αριστερό μέρος του ΑΣ2.

Συνεπώς από τους τύπους

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ και

$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ εξάγεται με modus ponens ο τύπος:

$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

Ο τύπος αυτός με την 2^η υπόθεση $\varphi \rightarrow \psi$ και modus ponens εξάγει τον προς απόδειξη τύπο.

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ΑΣ2
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ MP1,2
4. $\varphi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
5. $\varphi \rightarrow \chi$ MP4,3



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (4. Προς τα Εμπρός Συλλογιστική)

Παράδειγμα 5: Να αποδειχθεί ότι

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ΑΣ2
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ MP1,2
4. ψ Υπόθεση
5. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \psi$ και όπου $\psi: \varphi$
6. $\varphi \rightarrow \psi$ MP4,5
7. $\varphi \rightarrow \chi$ MP6,3

Η προς τα εμπρός συλλογιστική απαιτεί εμπειρία με τις τυπικές αποδείξεις και άψογη γνώση της μορφής των αξιωματικών σχημάτων. Πρέπει παρατηρώντας τις υποθέσεις να είμαστε σε θέση να εντοπίζουμε ποια από αυτές μπορεί να ταυτιστεί με αριστερό μέρος Αξιωματικών Σχημάτων



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (5. Προς τα Πίσω Συλλογιστική)

Κάνουμε προς τα πίσω συλλογιστική όταν ο προς απόδειξη τύπος είναι σχετικά μεγάλος (σε μήκος) σε σχέση με τις υποθέσεις.

Προσπαθούμε να ταυτίσουμε τον προς απόδειξη τύπο με το δεξί μέρος ενός από τα αξιωματικά σχήματα (δηλαδή να μπορεί να προκύψει ο προς απόδειξη τύπος από το δεξί μέρος με συντακτική αντικατάσταση)

ΑΣ1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
ΑΣ2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
ΑΣ3: $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

Αρκεί να δείξουμε το αριστερό μέρος της Συντακτικής Αντικατάστασης που έχουμε επιλέξει. Αν υπάρχει ήδη στις υποθέσεις έχουμε τελειώσει. Αλλιώς επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία.



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (5. Προς τα Πίσω Συλλογιστική)

Παράδειγμα 5: Να αποδειχθεί ότι

$$\varphi \vdash \neg \varphi \rightarrow \varphi$$

Σκέψεις: Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να κάνουμε modus ponens στις υποθέσεις.

Ο προς απόδειξη τύπος είναι «μεγάλος» σε σχέση με τις υποθέσεις, οπότε θα δοκιμάσουμε προς τα πίσω συλλογισμό.

Ο τύπος $\neg \varphi \rightarrow \varphi$ μπορεί να προκύψει από το δεξί μέρος του ΑΣ1 $\psi \rightarrow \varphi$ θέτοντας όπου φ : φ και όπου ψ : $\neg \varphi$. Η συντακτική αντικατάσταση στο ΑΣ1 είναι:

$\varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 θέτοντας όπου φ : φ και όπου ψ : $\neg \varphi$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε τον τύπο φ . (που ισχύει από τις υποθέσεις)

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. φ Υπόθεση
2. $\varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ : φ , ψ : $\neg \varphi$
3. $\neg \varphi \rightarrow \varphi$ MP1,2



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

3. Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ3 (5. Προς τα Πίσω Συλλογιστική)

Παράδειγμα 6: Να αποδειχθεί ότι

$$\neg \varphi \vdash (\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$$

Σκέψεις:

Ο τύπος $(\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ προκύπτει με ΣΑ στο δεξί μέρος του ΑΣ3 $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

ΣΑ στο ΑΣ3: $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ έχουμε θέσει: φ : ψ , ψ : φ

Αρα αρκεί να δείξουμε το $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$

Ο τύπος $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$ προκύπτει με ΣΑ στο δεξί μέρος του ΑΣ1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

ΣΑ στο ΑΣ1: $\neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$ έχουμε θέσει: φ : $\neg \varphi$, ψ : $\neg \psi$

Αρα αρκεί να δείξουμε το $\neg \varphi$ (ισχύει από υπόθεση)

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg \varphi$ Υπόθεση
2. $\neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ : $\neg \varphi$, ψ : $\neg \psi$
3. $\neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ MP1,2
4. $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου φ : ψ , ψ : φ
5. $(\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ MP3,4



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

4. Τυπικά Θεωρήματα

Επαναλαμβάνουμε τον ορισμό:

Λέμε ότι ένας τύπος είναι τυπικό θεώρημα αν $\vdash \varphi$ (δηλαδή ισχύει άνευ υποθέσεων)

Συνεπώς για να αποδείξουμε ένα τυπικό θεώρημα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο συντακτικές αντικαταστάσεις σε αξιωματικά σχήματα.

Είναι σαφώς η πιο δύσκολη απόδειξη που μπορεί να μας ζητηθεί

Παράδειγμα 7: Να αποδειχθεί ότι

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ : φ , ψ : $\varphi \rightarrow \varphi$
2. $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου φ : φ , ψ : $\varphi \rightarrow \varphi$, χ : φ
3. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ MP1,2
4. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ : ψ , ψ : φ
5. $\varphi \rightarrow \varphi$ MP3,4



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

4. Τυπικά Θεωρήματα

Σημαντικό!!

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τυπικό θεώρημα, καθώς και συντακτικές αντικαταστάσεις σε αυτά σε μία τυπική απόδειξη!! Ωστόσο θα πρέπει να παραθέτουμε και την απόδειξη του τυπικού θεωρήματος.

Τα πιο σημαντικά τυπικά θεωρήματα που μπορεί να φανούν χρήσιμα είναι τα:

1. $\vdash \phi \rightarrow \phi$
2. $\vdash \phi \rightarrow \neg\neg\phi$
3. $\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$

Τα 2,3 θα τα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα με χρήση των θεωρημάτων του Προτασιακού Λογισμού.

Παράδειγμα 8: Να αποδειχθεί ότι

$$\vdash (\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg\phi \rightarrow \neg\phi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \phi \rightarrow \phi$ όπου $\phi: \neg\phi$
2. $(\neg\phi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\phi: \phi, \psi: \phi$
3. $(\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ MP1,2

Και παραθέτουμε έπειτα την απόδειξη του τυπικού θεωρήματος $\vdash \phi \rightarrow \phi$



Β. Θεωρία

2. Τι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

5. Τυπικές Αποδείξεις που μας δίνονται στην εκφώνηση

Αν στην εκφώνηση μας δίνεται ότι ισχύουν και κάποιες τυπικές συνεπαγωγές, αυτό σημαίνει ότι επεται το συμπέρασμα της τυπικής συνεπαγωγής, αν ισχύουν οι υποθέσεις τους.

Παράδειγμα 9: Δεδομένου ότι ισχύει $\phi \vdash \psi$ δείξτε ότι ισχύει η ακόλουθη τυπική συνεπαγωγή:

$$\{\phi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \neg\chi \rightarrow \chi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. ϕ Υπόθεση
2. ψ έπεται λόγω της τυπ. συνεπαγωγής $\phi \vdash \psi$
3. $\psi \rightarrow \chi$ Υπόθεση
4. χ MP2,3
5. $\chi \rightarrow (\neg\chi \rightarrow \chi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\phi: \chi$ και όπου $\psi: \neg\chi$
6. $\neg\chi \rightarrow \chi$ MP4,5



Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 1

Να αποδείξετε τις ακόλουθες τυπικές συνεπαγωγές:

$$1. \{r \rightarrow q, p \rightarrow r, p\} \vdash q$$

$$2. \{p \rightarrow r, (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p), p\} \vdash q \rightarrow p$$

Υπόδειξη: Όλες οι παραπάνω αποδείξεις μπορούν να εξαχθούν μόνο με χρήση των υποθέσεων και του αποδεικτικού κανόνα MP



Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 2

Να αποδείξετε τις ακόλουθες τυπικές συνεπαγωγές:

$$1. \{\neg p \rightarrow p, r, \neg\neg r \rightarrow q, q \rightarrow \neg p, r \rightarrow \neg\neg r\} \vdash p$$

$$2. \{p, r \rightarrow (r \rightarrow \neg\neg r), p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \vdash \neg\neg r$$

Υπόδειξη: Όλες οι παραπάνω αποδείξεις μπορούν να εξαχθούν μόνο με χρήση των υποθέσεων και του αποδεικτικού κανόνα MP



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Δίδεται το αξιωματικό σχήμα ΑΣ3: $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο τύπος $(\neg\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\phi)$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.
2. Ο τύπος $(\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\phi)$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.
3. Ο τύπος $(\neg\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi)$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.
4. Ο τύπος $(\neg\phi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \phi)$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 2

Δίδεται το αξιωματικό σχήμα ΑΣ2: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο τύπος $(\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \psi))$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 με συντακτική αντικατάσταση.
2. Ο τύπος $(\psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\neg\psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\neg\psi))$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 με συντακτική αντικατάσταση.
3. Ο τύπος $(\psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\neg\psi))$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 με συντακτική αντικατάσταση.
4. Ο τύπος $((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi))$ προκύπτει άμεσα από το ΑΣ2 με συντακτική αντικατάσταση.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε την ακόλουθη τυπική συνεπαγωγή

$$\{\neg\psi \rightarrow \neg\phi, \neg\psi \rightarrow \phi\} \vdash \psi$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε προς τα εμπρός συλλογιστική.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε την ακόλουθη τυπική συνεπαγωγή

$$\{\psi \rightarrow \neg\phi, \psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \phi)\} \vdash \psi \rightarrow \phi$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε προς τα εμπρός συλλογιστική.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε την ακόλουθη τυπική συνεπαγωγή

$$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε προς τα πίσω συλλογιστική.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 4

Να αποδείξετε την ακόλουθη τυπική συνεπαγωγή

$$\{p, \neg(p \wedge q)\} \vdash (\neg q \rightarrow p \wedge q) \rightarrow q$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε προς τα πίσω συλλογιστική.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 5

Θεωρώντας ότι ισχύει το τυπικό θεώρημα $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ αποδείξτε ότι ισχύει η τυπική συνεπαγωγή:

$$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$$