ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ21

ΘΕΜΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Άσκηση 1) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i)$$

$$f_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(2^i + i^2\right)$$

$$f_3(n) = \log^n n$$

Ο συμβολισμός log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g (f ≡ g), αν f = Θ(g) (ισοδύναμα Θ(f) = Θ(g)). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g (f < g), αν f = o(g).

(Ασκηση 2) Να λύσετε τις αναδρομές:

(1) $T(n) = 5T\left(\dfrac{n}{25}\right) + \log^2 n$

(2) $T(n) = 0.5T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση T(n) = aT(n/b) + f(n), όπου a≥1, b>1 είναι σταθερές, και f(n) είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, τότε T(n) = $\Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε T(n) = $\Theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, και αν υπάρχει σταθερά n_0, τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά c<1, τότε T(n) = $\Theta(f(n))$.

ΘΕΜΑ 2: ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Έστω x,n δύο ακέραιοι με $n \geq 1$. Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο τύπου «διαίρει και βασίλευε» που να υπολογίζει την τιμή x^n και να υπολογίσετε την πολυπλοκότητα του.

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$L_1 = (0+1)1(0+1)0$

$L_2 = (111+01)^*$

$L_3 = 01^*0^*+10^*1^*$

$L_4 = (010+0)^*(00+1)^*\ 1^*0^*$

$L_5 = (0^*10^*1+10^*11^*)^*$

Άσκηση 2:

Δίδεται η κανονική έκφραση: 0(0+1)*+1(0+1)*1

(Α) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΠΑ) της L με 4 καταστάσεις

(Β) Δώστε το ισοδύναμο Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΝΠΑ) της L

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΑ

Άσκηση 1: Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες:

$\mathrm{L}_1 = \{\alpha^{3n+1}b^{2n+1} \mid n \geq 0\}$

$\mathrm{L}_2 = \{a^{2m+1}d^{3n+1}a^{2n+1}d^{m+2} \mid n, m \geq 0\}$

$\mathrm{L}_3 = \{a^{2n}b^{3n} \mid n \geq 1\}$

$\mathrm{L}_4 = \{\, wxw^R \mid w \in \{0,1\}^*, x \in \{01,110\}\}$

$\mathrm{L}_5 = \{a^n b^m c^m d^n a^k b^k \mid n, m, k \geq 0\}$

$\mathrm{L}_6 = \{a^k b^n a^m b^k \mid n > m, k \geq 0\}$

$\mathrm{L}_7 = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

Άσκηση 2

Έστω Σ το αλφάβητο Σ={0,1} και L η γλώσσα που σχηματίζεται ακριβώς και μόνον με τους κανόνες

- $1111 \in L$
- Αν $x \in L$, τότε και $0x1 \in L$

(Α) Δείξτε ότι η L δεν είναι κανονική.

(Β) Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της L.

(Γ) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοίβας που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L

(Δ) Δώστε Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοίβας που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L

<u>Το Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες:</u>

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ **για κάθε φυσικό** $m \geq 0$

ΘΕΜΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Να κατασκευάσετε ντετερμινιστική μηχανή Turing M, με αλφάβητο Σ = {0, 1, #, $, Y, N}, που να αποφασίζει την γλώσσα **της προηγούμενης άσκησης**

Θεωρήστε ότι η M με είσοδο $x \in \{0,1\}^*$ ξεκινά την λειτουργία της από τον σχηματισμό #x#. Οι χαρακτήρες Y (YES) και N (NO) χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την σηματοδότηση της αποδοχής ή της απόρριψη της εισόδου, αντίστοιχα.

(1) Δώστε μια άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της M (έναν αλγόριθμο διαχείρισης της ταινίας της).

(2) Δώστε το γράφημα ροής της M (σχηματική αναπαράσταση με χρήση γνωστών μηχανών).