



Ο ΠΛ (προτασιακός λογισμός) είναι το αξιωματικό σύστημα που:

- Έχει ως **αξιώματα** (αξιωματικά σχήματα) τα: ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3.
- Και ως αποδεικτικό κανόνα τον **Modus Ponens** (Μ.Ρ.)

Σε αυτό το αξιωματικό σύστημα μελετάμε αν ισχύουν:

- Τυπική Συνεπαγωγή $T \vdash \varphi$**
όταν ισχύουν οι υποθέσεις του T αν εξάγεται με διαδοχικές εφαρμογές του ΜΡ ο τύπος φ
- Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi$**
δηλαδή αν εξάγεται ο τύπος φ με διαδοχικές εφαρμογές ΜΡ

Στις τυπικές αποδείξεις επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε:

1) ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ του συνόλου τύπων

2) ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ και Συντακτικές αντικ/σεις σε αυτά:

ΑΣ1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

ΑΣ3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

3) MODUS PONENS

Αν ισχύει Φ
Και ισχύει $\Phi \rightarrow \Psi$

.....

Τότε ισχύει Ψ (από Modus Ponens)

4) ΤΥΠΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Έχουμε αποδείξεις για:

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

5) ΤΥΠΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ

Εφόσον δίνονται από την εκφώνηση

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
- $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ΑΣ2
- $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ ΜΡ1,2
- $\varphi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
- $\varphi \rightarrow \chi$ ΜΡ4,3

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\neg \varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

- $\neg \varphi$ Υπόθεση
- $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \neg\varphi, \psi: \neg\psi$
- $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ ΜΡ1,2
- $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\varphi: \psi, \psi: \varphi$
- $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ ΜΡ3,4

ΤΥΠΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

- $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\psi: \chi$
- $(\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου $\psi: \chi$
- $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ ΜΡ1,2