# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

### Μάθημα 3.8:
### Η Γλώσσα των Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Όλο το μάθημα είναι απόλυτα SOS για τις τελικές εξετάσεις.

Επίπεδο Β

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

# Β. Θεωρία

## 1. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

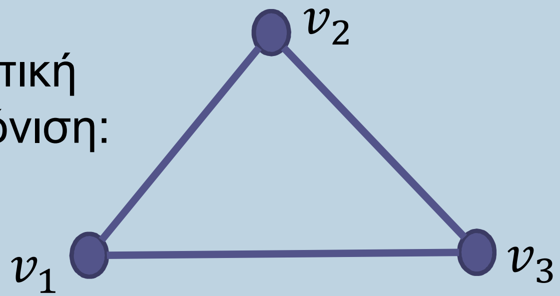
### 1. Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα

Ορισμός: Ένα Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα $G$ είναι μία διατεταγμένη δυάδα $(\mathrm{V},\mathrm{E})$ όπου:

- $V$ είναι το σύνολο των κορυφών: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- $\mathrm{E}$ είναι το σύνολο των ακμών: $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$
  - Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, δηλαδή $e_k = [v_i, v_j]$ ή $e_k = \{v_i, v_j\}$ με $v_i, v_j \in \mathrm{V}$ για κάθε $k = 1, \dots, m$
  - Η ακμή θεωρείται μη διατεταγμένη (δηλαδή η ακμή $[v_i, v_j]$ είναι ίδια με την ακμή $[v_j, v_i]$ ), δηλαδή δεν υπάρχει κατεύθυνση.

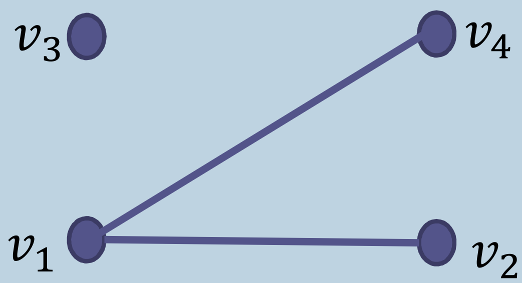
Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3\}$
$\mathrm{E} = \{[v_1, v_2],[v_1, v_3], [v_3, v_2]\}$

Σχηματική Απεικόνιση:




Παράδειγμα: $G = (V, E)$ όπου:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$\mathrm{E} = \{[v_1, v_2],[v_1, v_4]\}$

Σχηματική Απεικόνιση:



# Β. Θεωρία

## 1. Ορισμοί Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

### 2. Συμπληρωματικοί Ορισμοί

Συμπληρωματικοί Ορισμοί για Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

- Θα χρειαστούμε τους ακόλουθους ορισμούς στις προτάσεις κατηγορηματικής λογικής που θα ακολουθήσουν:
  - **Απλό Γράφημα:** Γράφημα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές
  - **Πλήρες Γράφημα (ή Κλίκα):** Απλό Γράφημα που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές.
  - **Μονοπάτι:** είναι ακολουθία διαδοχικών μη κατευθυνόμενων ακμών (απλό ή μη απλό μονοπάτι)
  - **Κύκλος:** είναι κλειστό μονοπάτι (απλός ή μη απλός κύκλος)
  - **Βαθμός** Μιας Κορυφής: Πλήθος ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή.
  - **Απομονωμένη Κορυφή:** Κορυφή η οποία δεν συνδέεται με άλλες κορυφές

# Β. Θεωρία

## 2. Η Γλώσσα των Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

### 1. Η Γλώσσα των Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

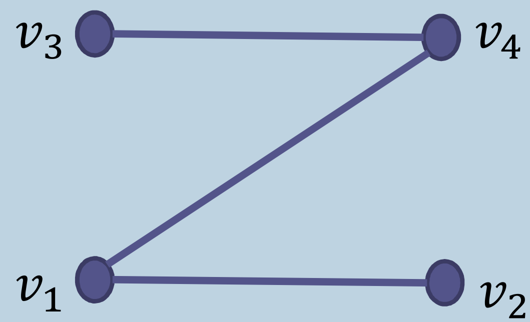
Ορισμός: Ορίζουμε τη γλώσσα των μη κατευθυνόμενων γραφημάτων να συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που περιλαμβάνουν τα εξής στοιχεία:

- Το σύμπαν είναι το σύνολο κορυφών |A|={1,2,…,n} (Γράφημα με n κορυφές)
- Το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) είναι αληθές αν υπάρχει η μη κατευθυνόμενη ακμή που συνδέει τις κορυφές x και y.

Σημαντικό! Μία συγκεκριμένη ερμηνεία της γλώσσας είναι ένα συγκεκριμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα:

Παράδειγμα:

Η ερμηνεία A = {
|A|= $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,
$P^A = \{(v_1,v_2),(v_2,v_1),(v_1,v_4),(v_4,v_1),(v_3,v_4),(v_4,v_3)\}$
}




Αντιστοιχεί στο γράφημα με 4 κορυφές και τις μη κατευθυνόμενες ακμές του $P^A$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Παρατήρηση: Η μη κατευθυνόμενη ακμή [x,y] δηλώνεται στο $P^A$ μέσω των ζευγών (x,y) και (y,x)

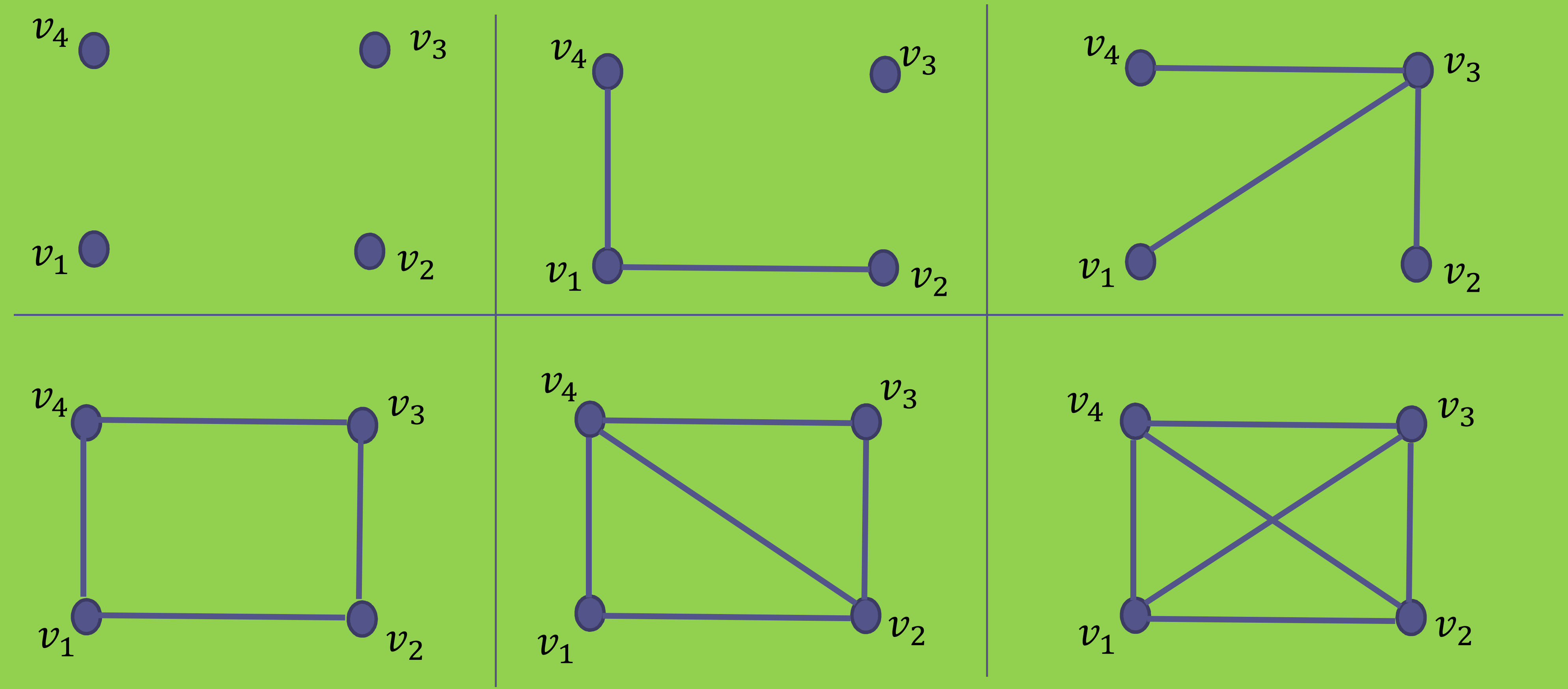
!!! Συνήθως στην εκφώνηση των ασκήσεων αναφέρεται ότι εργαζόμαστε σε απλά γραφήματα !!!

# Β. Θεωρία

## 2. Η Γλώσσα των Μη Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

### 2. Ερμηνείες της Γλωσσας των Μ.Κ.Γ.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε 6 ερμηνείες (γραφήματα) με σύμπαν 4 κορυφών:




Υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ δυνατές ακμές. Κάθε ακμή υπάρχει ή δεν υπάρχει στο γράφημα, άρα υπάρχουν $2^6$ δυνατά γραφήματα. **Γενικεύοντας υπάρχουν $2^{\binom{n}{2}}$ γραφήματα $n$ κορυφών.**

# Β. Θεωρία
## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

Μία πρόταση κατηγορηματικής λογικής στην ερμηνεία αυτή εκφράζει μία γραφοθεωρητική ιδιότητα. Συνεπώς ως μορφή άσκησης ζητείται :

1. Να μεταφράσουμε μία πρόταση της κατηγορηματικής λογικής στα ελληνικά.
2. Να εκφράσουμε μία πρόταση των ελληνικών σε κατηγορηματική λογική.
3. Να βρούμε αν αληθεύει μια πρόταση κατηγορηματικής λογικής σε ένα συγκεκριμένο γράφημα.
4. Να βρούμε ένα γράφημα στο οποίο αληθεύει ένας ή περισσότεροι τύποι.
5. Να γράψουμε συντομογραφίες και να τις χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε περίπλοκες προτάσεις

Βασικό μας εργαλείο παραμένει ο μεταφραστικός πίνακας, όπου τώρα το «στοιχείο» μεταφράζεται σε «κορυφή» και το κατηγόρημα $P(x,y)$ εκφράζει ότι οι κορυφές $x$ και $y$ συνδέονται με ακμή

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 1. Μετάφραση στα Ελληνικά

Μετάφραση από Κατηγορηματική Λογική στα Ελληνικά

Και πάλι το βασικό μας εργαλείο είναι ο μεταφραστικός πίνακας και η πρόταση μεταφράζεται «από έξω προς τα μέσα»

- Πρώτα εξωτερικοί ποσοδείκτες
- Μετά το πεδίο εφαρμογής αναδρομικά κ.λπ.

Στο μυαλό μας έχουμε:

- Μία μεταβλητή αντιστοιχίζεται σε στοιχείο του σύμπαντος, άρα σε κορυφή
- Το κατηγόρημα P(x,y) αληθεύει αν οι κορυφές x,y συνδέονται με ακμή. Είναι σημαντικό ότι εδώ δεν έχουμε πρόβλημα με το διάβασμα της σειράς των ορισμάτων διότι αν η x συνδέεται με την y, τότε και η y συνδέεται με την x. Συνεπώς το κατηγόρημα P(x,y) μπορεί να διαβαστεί:
  - Η x συνδέεται με την y.
  - Η y συνδέεται με την x.

Η μετάφραση μιας πρότασης θα εκφράζει μια ιδιότητα γραφημάτων!

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 1. Μετάφραση στα Ελληνικά

Άσκηση 1: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.

1. $\forall x \forall y P(x,y)$
2. $\forall x \forall y [x \neq y \rightarrow P(x,y)]$
3. $\forall x \exists y \exists z [P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z]$
4. $\exists x \forall y [x \neq y \rightarrow P(x,y)]$
5. $\forall x \exists y P(x,y)$
6. $\exists x [\forall y \neg P(x,y) \wedge \forall z (\forall y \neg P(z,y) \rightarrow x \approx z)]$

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 2. Μετάφραση σε Κατηγορηματική λογική

Μετάφραση από τα Ελληνικά στην Κατηγορηματική Λογική

Το στήσιμο της πρότασης από τα ελληνικά στην κατηγορηματική λογική γίνεται από έξω προς τα μέσα, δηλαδή:

- Εντοπίζουμε τους εξωτερικούς ποσοδείκτες που καθορίζουν το νόημα της πρότασης
- Εξειδικεύουμε με τους συνδέσμους και γράφουμε τις υπο-προτάσεις.

Η διαδικασία λοιπόν είναι όμοια με αυτά που είδαμε και σε άλλες ερμηνείες.

Η επόμενη άσκηση είναι σημαντική γιατί εκφράζει τις βασικές ιδιότητες που είδαμε ότι ορίζονται στα κατευθυνόμενα γραφήματα:

- Μονοπάτια (απλά και μη απλά)
- Κύκλοι (απλοί και μη απλοί)
- Πλήρες Γράφημα

Οι έννοιες των βαθμών κορυφής και της απομονωμένης κορυφής εκφράζονται μέσω συντομογραφιών που θα δούμε αμέσως μετά.

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 2. Μετάφραση σε Κατηγορηματική Λογική

Άσκηση 2: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P$. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.

1. Υπάρχει μονοπάτι μήκους 2
2. Υπάρχει απλό μονοπάτι μήκους 2
3. Υπάρχει κύκλος μήκους 3
4. Υπάρχει απλός κύκλος μήκους 3
5. Το γράφημα είναι πλήρες
6. Υπάρχει μοναδική απομονωμένη κορυφή
7. Κάθε κορυφή ανήκει σε κύκλο μήκους 3.

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 3. Εύρεση αλήθειας προτάσεων

Εύρεση Αλήθειας Προτάσεων

Όπως είδαμε και από τα προηγούμενα παραδείγματα μία πρόταση κατηγορηματικής λογικής στη γλώσσα αυτή, εκφράζει μια ιδιότητα γραφημάτων.

- Άρα το αν είναι αληθής ή ψευδής εξαρτάται από την ερμηνεία (=συγκεκριμένο γράφημα).

Συνεπώς στην άσκηση αυτή, μας δίδονται:

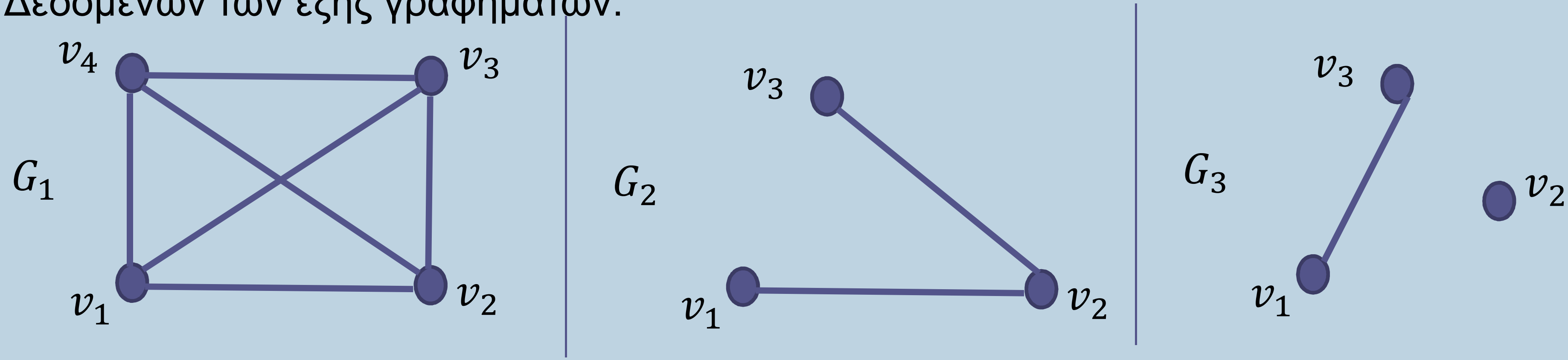
- Μία πρόταση ΚΛ
- και ένα (ή περισσότερα) συγκεκριμένα γραφήματα

Στην περίπτωση αυτή:

- Μεταφράζουμε την πρόταση κατηγορηματικής λογικής και
- Μελετώντας το γράφημα αποφασίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής.

# Β. Θεωρία
## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.
### 3. Εύρεση Αλήθειας Προτάσεων

Άσκηση 3: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.
Δεδομένων των εξής γραφημάτων:




Εξετάστε αν αληθεύουν οι τύποι:

1. $\forall x \forall y[x \neq y \rightarrow \exists z(P(x,z) \land P(z,y) \land x \neq z \land y \neq z)]$

2. $\forall x \exists y \exists z[P(x,y) \land P(x,y) \land x \neq y \land x \neq z \land y \neq z]$

3. $\exists x \exists y \exists z[P(x,y) \land \neg P(x,z) \land x \neq y \land x \neq z \land y \neq z]$

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 4. Εύρεση ερμηνείας που ικανοποιεί τύπο

Σε αυτό τον τύπο άσκησης:

- Μας δίνονται ένας ή περισσότεροι τύποι κατηγορηματικής λογικής
- Μας ζητείται να βρούμε ερμηνεία που κάνει αληθείς όλους τους τύπους του συνόλου.

Στην περίπτωση αυτή μεταφράζουμε τις προτασεις, βρίσκουμε τις ιδιότητες και κατασκευαζουμε ένα γράφημα που ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που έχουμε.

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 4. Εύρεση Ερμηνείας που ικανοποιεί τύπο

Ασκηση 4: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.

Να βρεθεί μια ερμηνεία της γλώσσας αυτής που να αληθεύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω τύποι:

1. $\exists x \exists y [x \neq y \land \forall w (w \approx x \lor w \approx y)]$
2. $\exists x \neg \exists y \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 5. Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Σημαντικές Συντομογραφίες στα Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορίζουμε τις ακόλουθες συντομογραφίες (απ'ευθείας στο τυπολόγιο) για να μπορούμε να κατασκευάζουμε εύκολα τύπους που έκφραζουν αυτές τις ιδότητες:

- Την συντομογραφία K(x) να αληθεύει αν η x είναι απομονωμένη
  $K(x) \equiv \neg\exists y[P(x,y)]$
- Την συντομογραφία $\deg_0(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 0
  $deg_0(x) \equiv \forall y[\neg P(x,y)]$
- Την συντομογραφία $\deg_{\geq 1}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό τουλ. 1
  $\deg_{\geq 1}(x) \equiv \exists y[P(x,y)]$
- Την συντομογραφία $\deg_1(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 1
  $\deg_1(x) \equiv \exists y[P(x,y) \land \forall z(P(x,z) \to z \approx y)]$
- Την συντομογραφία $\deg_{\leq 1}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό το πολύ 1
  $\deg_{\leq 1}(x) \equiv deg_0(x) \lor \deg_1(x)$
- Την συντομογραφία $\deg_{\geq 2}(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό τουλ. 2
  $\deg_{\geq 2}(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \land P(x,z) \land y \neq z]$
- Την συντομογραφία $\deg_2(x)$ να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 2
  $\deg_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \land P(x,z) \land y \neq z \land \forall w(P(x,w) \to w \approx y \lor w \approx z)]$

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις στην Γλώσσα των Μ.Κ.Γ.

### 5. Συντομογραφίες στα Κατευθυνόμενα Γραφήματα

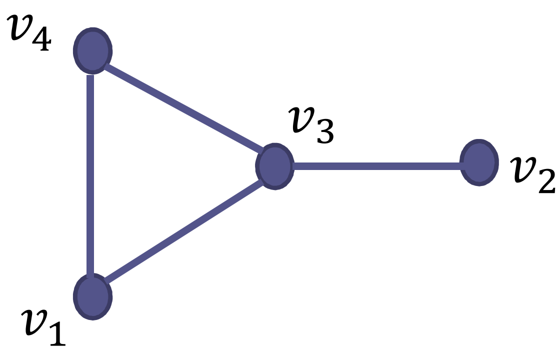
Ασκηση 5: Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P$. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.

1. Όλες οι κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον 2
2. Υπάρχει μοναδική κορυφή με βαθμό 2
3. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορυφές με βαθμό το πολύ 1
4. Υπάρχει το πολύ μία κορυφή με βαθμό τουλάχιστον 2
5. Υπάρχει μοναδική κορυφή με βαθμό ακριβώς 3

# Γ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν στο γράφημα του σχήματος:

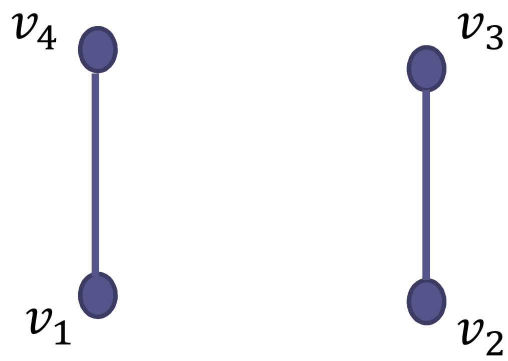
1. $\forall x \exists y \exists z [P(x,y) \land P(x,z) \land y \neq z]$
2. $\forall y \forall z P(y,z) \to \exists y \exists z P(y,z)$
3. $\exists x \forall y \, [x \neq y \to P(x,y)]$
4. $\forall x \forall y [x \neq y \to P(x,y)]$



# Γ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 2

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν στο γράφημα του σχήματος:

1. $\exists x \exists y P(x,y)$
2. $\exists x \exists y \neg P(x,y)$
3. $\exists x \neg \exists y P(x,y)$
4. $\neg \exists x \exists y P(x,y)$



# Γ. Ασκήσεις
## Θέμα Εξετάσεων 2008Α

Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε μη κατευθυνόμενα απλά γραφήματα και περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P$ και δύο μονομελή $A$ και $M$. Το $P(x,y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγαριών κορυφών που συνδέονται με ακμή ενώ το $A(x)$ (αντιστοίχως, $M(x)$) δηλώνει ότι η κορυφή $x$ είναι άσπρη (αντιστοίχως μαύρη).

1. Χρησιμοποιώντας τα $A(x)$ και $M(x)$, δώστε ένα τύπο $\varphi_1$ που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική δηλαδή έχει ένα και μόνο χρώμα».
2. Χρησιμοποιώντας τα $P(x,y), A(x)$ και $M(x)$, δώστε ένα τύπο $\varphi_2$ που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και γειτονεύει με κορυφές διαφορετικού χρώματος από αυτή».
3. Όπως παραπάνω με τον τύπο $\varphi_3$ να δηλώνει τώρα «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και κάθε απομονωμένη κορυφή του γραφήματος είναι μαύρη».
4. Δώστε δομή με 6 κορυφές που να επαληθεύει τους τύπους των (2) και (3) ταυτόχρονα.