

# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΔΕΝΔΡΑ

Μάθημα 6.1:  
Βασικοί Ορισμοί στα Δένδρα

Δημήτρης Ψούνης



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### A. Σκοπός του Μαθήματος

#### B. Θεωρία

##### 1. Δένδρα

1. Ορισμός Δένδρου
2. Συμπληρωματικοί Ορισμοί
3. Δάσος

##### 2. Το Θεώρημα των Δένδρων

1. Διατύπωση του Θεωρήματος
2. Απόδειξη του Θεωρήματος
3. Επέκταση του Θεωρήματος
4. Συμπληρωματικές Παρατηρήσεις στα Δένδρα

### Γ. Λυμένες Ασκήσεις

#### Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές

## A. Σκοπός του Μαθήματος

### Επίπεδο A

- Νέοι Ορισμοί (Δένδρα και το Θεώρημα των Δένδρων)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

### Επίπεδο B

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

### Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

## B. Θεωρία

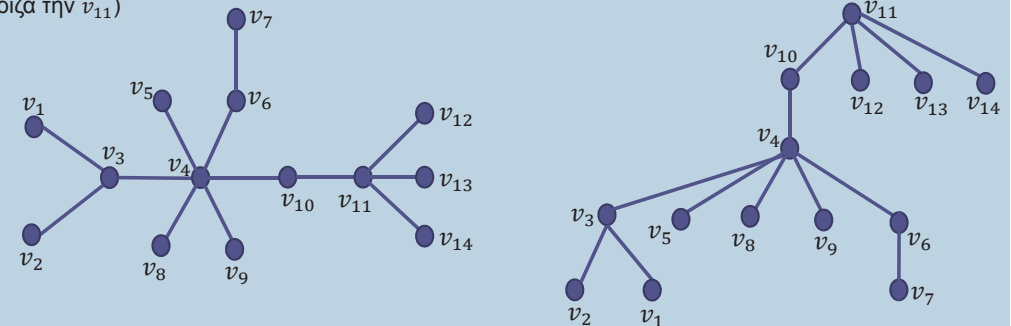
### 1. Δένδρα

#### 1. Ορισμός Δένδρου

##### Ορισμός:

- Ένα γράφημα  $G(V, E)$  είναι **δένδρο** αν υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή  $v_i \in V$  σε κάθε κορυφή  $v_j \in V$  ( $i \neq j$ )

**Παράδειγμα:** Βλέπουμε ένα δένδρο (αριστερά) και μία ριζωμένη απεικόνισή του (επιλέγοντας ως ρίζα την  $v_{11}$ )



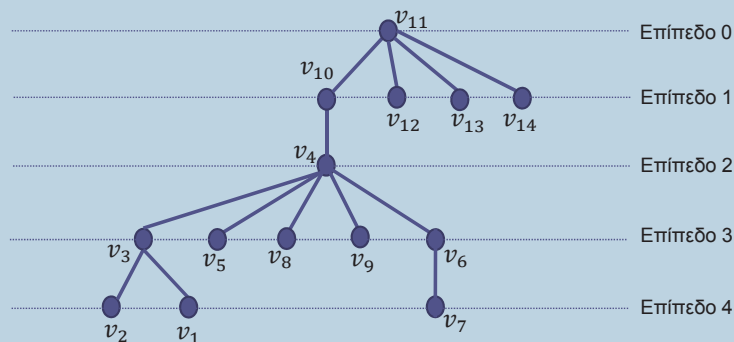
Συνήθως τα γραφήματα που είναι δένδρα συμβολίζονται με  $T=(V,E)$  αντί για  $G=(V,E)$

## Β. Θεωρία

### 1. Δένδρα

#### 2. Συμπληρωματικοί Ορισμοί για τα Δένδρα

Παράδειγμα: Έστω μια ριζωμένη απεικόνιση ενός δένδρου:



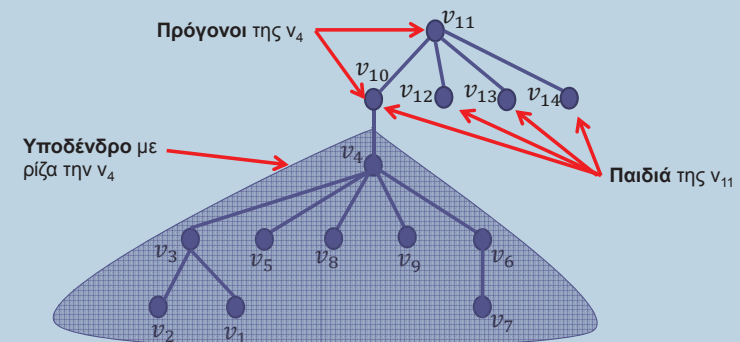
- Το **επίπεδο (ή βάθος) κορυφής** που είναι η απόσταση (σε πλήθος ακμών) της κορυφής από τη ρίζα (στο παράδειγμα το επίπεδο της κορυφής  $v_6$  είναι 3)
- Το **ύψος του δένδρου** που είναι το μέγιστο επίπεδο κορυφής (στο παράδειγμα = 4)
- Το **βαθμό του δένδρου** που είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής (στο παράδειγμα = 6 λόγω της  $v_4$ )

## Β. Θεωρία

### 1. Δένδρα

#### 2. Συμπληρωματικοί Ορισμοί για τα Δένδρα

Παράδειγμα: Έστω μια ριζωμένη απεικόνιση ενός δένδρου:



Επιπλέον:

- Κάθε κορυφή με βαθμό 1 λέγεται **φύλλο** (ή τερματική κορυφή ή μενταγιον)
- Κάθε κορυφή με βαθμό  $>1$  λέγεται **εσωτερική κορυφή** (ή κορυφή διακλάδωσης)

Ισχύει σε κάθε δένδρο ο τύπος:  $n = \phi + \epsilon$

- Όπου  $n$ : πλήθος κορυφών,  $\phi$ : πλήθος φύλλων,  $\epsilon$ : πλήθος εσωτερικών κορυφών

## Β. Θεωρία

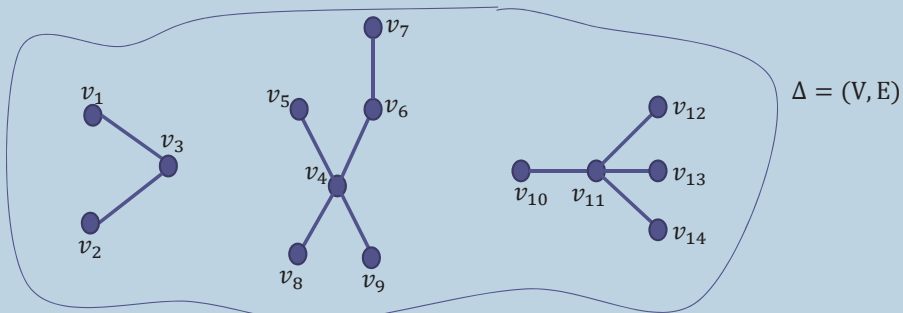
### 1. Δένδρα

#### 3. Δάσος

Ορισμός:

- Ένα γράφημα  $G(V, E)$  είναι **δάσος** αν είναι η ένωση δένδρων
- Ή ισοδύναμα είναι ένα μη συνδεόμενο γράφημα που κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι δένδρο

Παράδειγμα: Βλέπουμε ένα δάσος που αποτελείται από 3 δένδρα



Παρατήρηση: Αν ένα δάσος αποτελείται από  $k$  δένδρα, τότε έχει  $n-k$  ακμές.

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 1. Διατύπωση του θεωρήματος

Το Θεώρημα των Δένδρων:

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το γράφημα είναι δένδρο (δηλαδή υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή  $v_i \in V$  σε κάθε κορυφή  $v_j \in V$  ( $i \neq j$ ))
2. Το γράφημα είναι συνδεόμενο και άκυκλο
3. Το γράφημα είναι συνδεόμενο και έχει  $|V| - 1$  ακμές
4. Το γράφημα είναι άκυκλο και έχει  $|V| - 1$  ακμές

Παρατήρηση 1: Το παραπάνω θεώρημα είναι διατύπωσης ισοδύναμων προτάσεων. Για να το αποδείξουμε πρέπει να δώσουμε αποδείξεις ότι

- Αν ισχύει το (1) τότε ισχύει και το (2)
- Αν ισχύει το (2) τότε ισχύει και το (3)
- Αν ισχύει το (3) τότε ισχύει και το (4)
- Αν ισχύει το (4) τότε ισχύει και το (1)

Τότε ισχύει ότι ανα δύο οι προτάσεις είναι ισοδύναμες

Παρατήρηση 2: Το θεώρημα μας δίνει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ένα γράφημα δένδρο. Τελικά το δένδρο είναι ένα άκυκλο συνδεόμενο γράφημα με  $n-1$  ακμές που υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ κάθε δύο διαφορετικών κορυφών

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 2. Απόδειξη του θεωρήματος (1 → 2)

Αποδεικνύουμε ότι (1)→(2):

**«Αν ένα γράφημα είναι δένδρο τότε είναι συνδεόμενο και άκυκλο»**

Απόδειξη:

Έστω  $G=(V,E)$  που είναι δένδρο.

- Αφού το γράφημα είναι δένδρο, υπάρχει μονοπάτι που συνδέει κάθε δύο διαφορετικές κορυφές. Άρα είναι συνδεόμενο.
- Έστω ότι το γράφημα έχει κύκλο. Τότε οποιεσδήποτε δύο κορυφές του κύκλου συνδέονται με 2 μονοπάτια (ακολουθώντας αντίστροφα τις κατευθύνσεις του κύκλου). Άρα υπάρχουν κορυφές που δεν συνδέονται με μοναδικό μονοπάτι. Άρα το γράφημα δεν είναι δένδρο. Άτοπο. Συνεπώς είναι άκυκλο.

Άρα το  $G$  είναι συνδεόμενο και άκυκλο.

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 2. Απόδειξη του θεωρήματος (2 → 3)

Αποδεικνύουμε ότι (2)→(3):

**«Αν ένα γράφημα είναι συνδεόμενο και άκυκλο τότε είναι συνδεόμενο και έχει  $|V|-1$  ακμές»**

Απόδειξη:

Έστω  $n=|V|$ ,  $m=|E|$ . Το αποδεικνύουμε με επαγωγή, δηλαδή δείχνουμε ότι κάθε συνδεόμενο και άκυκλο γράφημα  $n$  κορυφών έχει  $n-1$  ακμές.

- Βάση Επαγωγής:** Δείχνουμε ότι ισχύει για  $n=1$ , δηλαδή ότι κάθε άκυκλο συνδεόμενο γράφημα 1 κορυφής έχει  $1-1=0$  ακμές. Πράγματι το γράφημα 1 κορυφής (τετριμμένο γράφημα) έχει 0 ακμές.
- Επαγωγική Υπόθεση:** Υποθέτω ότι κάθε άκυκλο και συνδεόμενο γράφημα  $k$  κορυφών έχει  $k-1$  ακμές.
- Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνω ότι κάθε άκυκλο και συνδεόμενο γράφημα  $k+1$  κορυφών έχει  $k$  ακμές.

Απόδειξη: Θεωρώ άκυκλο και συνδεόμενο γράφημα  $k$  κορυφών. Από επαγωγική υπόθεση έχει  $k-1$  ακμές. Προσθέτω μία ακόμη κορυφή σε αυτό. Η νέα κορυφή πρέπει να συνδέεται με τουλάχιστον 1 κορυφή (για να είναι συνδεόμενο το γράφημα που προκύπτει) και το πολύ 1 (αν συνδεθεί με παραπάνω από μία κορυφή τότε θα προκύψει κύκλος, αφού οι κορυφές που θα συνδεθεί συνδέονται ήδη με μονοπάτι). Άρα θα προστεθεί ακριβώς μία ακμή, άρα θα έχει  $k$  ακμές.

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 2. Απόδειξη του θεωρήματος (3 → 4)

Αποδεικνύουμε ότι (3)→(4):

**«Αν ένα γράφημα είναι συνδεόμενο και έχει  $|V|-1$  ακμές τότε είναι άκυκλο και έχει  $|V|-1$  ακμές»**

Απόδειξη (αρκεί να δείξω ότι το  $G$  είναι άκυκλο):

- Έστω ότι  $G$  περιέχει έναν κύκλο  $C$  με  $k$  κορυφές. Ο κύκλος αυτός θα περιέχει  $k$  ακμές. Έστω  $G_1$  αυτή η συνιστώσα του γραφήματος
- Οι υπόλοιπες  $n-k$  κορυφές θα συνδέονται με το πολύ  $n-k-1$  ακμές, οπότε θα δημιουργείται ένα δένδρο  $n-k$  κορυφών. Έστω  $G_2$  αυτή η συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος
- Συνεπώς οι δύο συνεκτικές συνιστώσες  $G_1, G_2$  θα έχουν συνολικά  $k+(n-k+1)=n+1$  ακμές. Άρα οι δύο συνεκτικές συνιστώσες δεν θα συνδέονται.
- Άρα το γράφημα δεν είναι συνδεόμενο. Άτοπο. Άρα το γράφημα είναι άκυκλο.

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 2. Απόδειξη του θεωρήματος (4 → 1)

Αποδεικνύουμε ότι (4)→(1):

**«Αν ένα γράφημα είναι άκυκλο και έχει  $|V|-1$  ακμές τότε είναι δένδρο»**

Απόδειξη (αρκεί να δείξω ότι κάθε δύο κορυφές του  $G$  συνδέονται με μοναδικό απλό μονοπάτι):

- $G$  είναι συνδεόμενο. Πράγματι αν δεν ήταν τότε υποχρεωτικά μία συνεκτική συνιστώσα του θα ήταν κύκλος. Άρα κάθε δύο διαφορετικές κορυφές συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι.
- Υπάρχει μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο διαφορετικών κορυφών. Πράγματι αν υπήρχαν 2 μονοπάτια, τότε η ένωσή τους θα δημιουργούσε κύκλο.

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 3. Επέκταση του θεωρήματος

##### Θεώρημα:

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το γράφημα είναι δένδρο (δηλαδή υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή  $v_i \in V$  σε κάθε κορυφή  $v_j \in V$  ( $i \neq j$ ))
2. Το γράφημα είναι συνδεδεμένο και άκυκλο
3. Το γράφημα είναι συνδεδεμένο και έχει  $|V| - 1$  ακμές
4. Το γράφημα είναι άκυκλο και έχει  $|V| - 1$  ακμές
5. Το γράφημα είναι ελαχιστοτικά συνδεδεμένο
6. Το γράφημα είναι μεγιστοτικά άκυκλο

**Παρατήρηση:** Οι δύο επιπλέον προτάσεις αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες επίσης για να είναι ένα γράφημα δένδρο.

##### Ελαχιστοτικά συνδεδεμένο είναι ένα γράφημα που

- είναι συνδεδεμένο και
- αν του αφαιρέσουμε έστω μία ακμή τότε **παύει να είναι συνδεδεμένο**

##### Μεγιστοτικά Άκυκλο είναι ένα γράφημα που

- είναι άκυκλο και
- αν του προσθέσουμε έστω μία ακμή τότε **παύει να είναι άκυκλο**

## Β. Θεωρία

### 2. Το θεώρημα των δένδρων

#### 4. Συμπληρωματικές Παρατηρήσεις στα Δένδρα

##### Συμπληρωματικές Παρατηρήσεις στα Δένδρα

Τα ακόλουθα λήμματα ισχύουν στα δένδρα:

1. Κάθε δένδρο είναι απλό γράφημα
2. Κάθε δένδρο είναι διχοτομίσσιμο γράφημα
3. Κάθε δένδρο είναι επίπεδο γράφημα
4. Κάθε δένδρο με  $|V| \geq 2$  έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.
5. Κάθε δένδρο με  $|V| > 2$  έχει τουλάχιστον μία εσωτερική κορυφή
6. Αν μια κορυφή έχει βαθμό  $k$ , τότε το δένδρο έχει τουλάχιστον  $k$  φύλλα.
7. Κάθε εσωτερική κορυφή είναι σημείο κοπής και κάθε ακμή είναι γέφυρα.
8. Αν αφαιρέσουμε ένα φύλλο από ένα δένδρο, τότε το γράφημα παραμένει δένδρο
9. Κάθε μεγιστοτικό μονοπάτι ξεκινάει και καταλήγει σε φύλλο.

## Γ. Λυμένες Ασκήσεις

### Ασκηση 1

- 1) Σε ένα δέντρο με  $n \geq 3$  κορυφές, θεωρούμε δύο κορυφές  $u$  και  $v$  που συνδέονται με ακμή. Να δείξετε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών  $u$  και  $v$  είναι:
  - α) μεγαλύτερο ή ίσο του 3.
  - β) μικρότερο ή ίσο του  $n$ .
- 2) Έστω  $v_1, v_2, v_3$  τρεις διαφορετικές κορυφές ενός δένδρου  $T$ . Να δείξετε ότι υπάρχει μία μοναδική κορυφή  $v$  του  $T$  (όχι κατ' ανάγκη διαφορετική από τις  $v_1, v_2, v_3$ ) που ανήκει και στα τρία μονοπάτια που συνδέουν τις κορυφές  $v_1$  και  $v_2$ ,  $v_1$  και  $v_3$ , και  $v_2$  και  $v_3$  στο δέντρο  $T$ .

##### ΛΥΣΗ:

- 1) α) Οι κορυφές της ακμής  $uv$  έχουν βαθμό τουλάχιστον 1. Θα ήταν ακριβώς 1 αν και οι δύο κορυφές  $u, v$  ήταν φύλλα αλλά αυτό δεν είναι δυνατόν καθώς το δέντρο έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές. Άρα η μια τουλάχιστον κορυφή από τις  $u, v$  θα είναι εσωτερική με βαθμό τουλάχιστον 2 και το άθροισμα των βαθμών θα είναι  $\geq 3$ .  
β) Οι κορυφές  $u, v$  δε μπορεί να γειτονεύουν με κάποια τρίτη κοινή κορυφή διότι θα σχηματιζόταν τρίγωνο, δηλαδή κύκλος, άτοπο σε ένα δέντρο. Άρα οι γειτονιές τους  $N(u)$  και  $N(v)$  είναι ξένες μεταξύ τους που σημαίνει ότι  $|N(u)| + |N(v)| \leq n$ . Συνεπώς το άθροισμα των βαθμών των δύο κορυφών είναι το πολύ  $n$ .

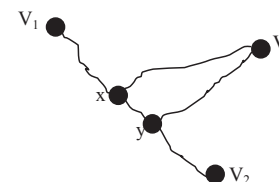
**2ος τρόπος:** το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι  $2e = 2(n-1)$ . Η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος αυτού είναι  $d(u) + d(v) + (n-2)$  στην περίπτωση που όλες οι υπόλοιπες κορυφές είχαν βαθμό 1. Άρα,

$$2(n-1) \geq d(u) + d(v) + n - 2 \Rightarrow d(u) + d(v) \leq 2n - 2 - n + 2 = n$$

## Γ. Λυμένες Ασκήσεις

### Ασκηση 1

- 2) Εάν οι κορυφές  $v_1, v_2, v_3$  δεν είναι διαφορετικές ή δύο από αυτές δεν είναι διαφορετικές η ερώτηση είναι εντελώς τετριμμένη. Τα μονοπάτια από την κορυφή  $v_1$  προς τις κορυφές  $v_2$  και  $v_3$  είναι μοναδικά και έστω  $x$  η τελευταία κοινή κορυφή των δύο μονοπατιών. Ομοίως έστω  $y$  η τελευταία κοινή κορυφή των μονοπατιών από την  $v_2$  προς τις  $v_1$  και  $v_3$ . Οι κορυφές  $x, y$  δεν μπορεί να είναι διαφορετικές διότι αν  $x \neq y$  τότε στο δένδρο  $T$  θα υπήρχε ο κύκλος  $x \rightarrow v_3 \rightarrow y \rightarrow x$  το οποίο δεν είναι δυνατόν δεδομένου ότι τα δένδρα δεν έχουν κύκλους.





## Γ. Λυμένες Ασκήσεις

### Ασκηση 2

α) Έστω  $T$  δένδρο με  $n \geq 2$  κορυφές που έχουν βαθμούς  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Δείξτε ότι ισχύει  $\sum d_i = 2n - 2$ .

β) Έστω  $n \geq 2$  και φυσικοί  $d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1$  για τους οποίους ισχύει ότι  $\sum d_i = 2n - 2$ . Δείξτε ότι υπάρχει δένδρο με  $n$  κορυφές και βαθμούς κορυφών  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

(Υπόδειξη: Κάντε την απόδειξη με επαγωγή. Στο επαγωγικό βήμα δείξτε ότι όταν ισχύει η σχέση τουλάχιστον μία κορυφή έχει βαθμό 1.)

α) Εφόσον το  $T$  είναι δένδρο έχει  $n-1$  ακμές. Επίσης το άθροισμα των βαθμών του είναι από το λήμμα της χειραψίας το διπλάσιο του αριθμού των ακμών, πράγμα που δίνει το ζητούμενο.



## Γ. Λυμένες Ασκήσεις

### Ασκηση 2

β) Αν  $n=2$  τότε η σχέση γίνεται  $d_1 + d_2 = 2$  και οι μόνοι φυσικοί που πληρούν την σχέση είναι οι  $d_1 = d_2 = 1$  οπότε το μοναδικό απλό γράφημα που την ικανοποιεί είναι το δένδρο που αποτελείται από δύο κορυφές που ενώνονται μεταξύ τους με ακμή. Για την υπόθεση της επαγωγής, έστω ότι για  $n > 2$  και για οποιουδήποτε φυσικούς  $d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1$  που πληρούν την σχέση  $\sum d_i = 2n - 2$ , υπάρχει δένδρο με  $n$  κορυφές οι βαθμοί των οποίων είναι οι  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Έστω τώρα ότι δίνονται  $n+1$  φυσικοί  $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n+1} \geq 1$  για τους οποίους ισχύει  $\sum d'_i = 2(n+1) - 2 = 2n$ . Αν όλοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2, τότε  $\sum d'_i \geq 2 \cdot (n+1) = 2n + 2$ , άτοπο. Άρα ένας τουλάχιστον φυσικός έστω ο  $d'_{n+1} = 1$ . Δεν μπορεί όμως και όλοι να είναι ίσοι με 1 γιατί τότε το άθροισμα τους θα είναι  $n+1$ , που είναι πάλι άτοπο. Υπάρχει λοιπόν και κάποιος, έστω ο  $d'_n$ , που είναι μεγαλύτερος του 1. Ας ελαττώσουμε λοιπόν τον βαθμό του  $d'_n$  κατά 1, δηλ. ας αντικαταστήσουμε το  $d'_n$  με το  $d''_n = d'_n - 1$  (προφανώς  $d''_n \geq 1$ ). Έχουμε λοιπόν ότι οι  $n$  φυσικοί  $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$  έχουν άθροισμα  $d'_1 + d'_2 + \dots + d'_{n-1} + d'_n = 2n - 2$ , άρα πληρούν τις προϋποθέσεις της επαγωγικής υπόθεσης και συνεπώς υπάρχει δένδρο  $T$  με  $n$  κορυφές οι βαθμοί των οποίων είναι οι  $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$ . Συνδέουμε στο  $T$  την κορυφή βαθμού  $d''_n$  με μια καινούργια κορυφή μέσω μιας ακμής. Το προκύπτον γράφημα είναι και πάλι δένδρο, έχει  $n+1$  κορυφές και οι βαθμοί τους είναι οι δοθέντες φυσικοί  $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n+1}$ .



## Γ. Λυμένες Ασκήσεις

### Ασκηση 3

α) Έστω  $G$  διμερές γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό  $k \geq 2$ .

(i) Δείξτε ότι τα δύο μέρη του  $G$  έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών.

(ii) Δείξτε ότι στο  $G$  δεν μπορεί να υπάρχει γέφυρα.

β) Δείξτε ότι αν σε ένα δένδρο με τουλάχιστον 4 κορυφές προσθέσουμε 3 οποιεσδήποτε ακμές, το προκύπτον γράφημα είναι επίπεδο. Δείξτε ότι το ίδιο δεν ισχύει για 4 ακμές (δώστε ένα αντιπαράδειγμα για αυτό).

α) (i) Έστω  $X$  και  $Y$  τα δύο μέρη του  $G$ . Ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στο  $X$  είναι  $k|X|$ . Παρόμοια οι ακμές που προσπίπτουν στο  $Y$  είναι  $k|Y|$ . Εξισώνοντας, παίρνουμε  $|X| = |Y|$ .

(ii) Έστω ότι υπάρχει γέφυρα  $e$  σε κάποια συνιστώσα του γραφήματος. Αφαιρώντας την  $e$ , παίρνουμε δύο συνεκτικές συνιστώσες τις οποίες η  $e$  συνδέει σε μία. Κάθε μία από αυτές είναι βέβαια διμερές γράφημα με μέρη έστω τα σύνολα  $A$  και  $B$  και με περισσότερες της μίας κορυφές (επειδή  $k \geq 2$ ). Όλες οι κορυφές της συνιστώσας έχουν βαθμό  $k$  εκτός από το άκρο της  $e$  στην συνιστώσα (ας πούμε ότι βρίσκεται στο σύνολο  $A$ ) που έχει βαθμό  $k-1$ . Ακολουθώντας την σκέψη του (i) παίρνουμε ότι  $k|A| - 1 = k|B|$ . Ισοδύναμα,  $k(|A| - |B|) = 1$ . Όμως η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να ισχύει για φυσικούς  $|A|, |B|$  και  $k \geq 2$ .

β) Έστω ότι υπάρχει δένδρο  $T$  και 3 ζευγάρια κορυφών του (όχι ξένα κατ' ανάγκη) που αν τα ενώσουμε με ακμές προκύπτει μη επίπεδο γράφημα. Από το Θεώρημα Kuratowski αυτό σημαίνει ότι το γράφημα αυτό περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του  $K_5$  ή του  $K_{3,3}$ . Αν τώρα αφαιρέσουμε αυτές τις 3 ακμές πρέπει να επανέλθουμε στο αρχικό μας δένδρο  $T$ . Όμως με την αφαίρεση μόνο 3 ακμών δεν μπορούν να καταστραφούν όλοι οι κύκλοι του  $K_5$  ή του  $K_{3,3}$ , άτοπο. Για την περίπτωση των 4 ακμών, αν θεωρήσουμε το  $P_6$  (μονοπάτι 6 κορυφών), μπορούμε να προσθέσουμε 4 ακμές και να πάρουμε το  $K_{3,3}$ .



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 1

Σχεδιάστε όλα τα μη-ισομορφικά δένδρα με 6 κορυφές.



## Δ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 2

Κατασκευάστε ένα δέντρο που να έχει 10 κορυφές για τις παρακάτω περιπτώσεις:

- A)** έχει 6 κορυφές βαθμού 1 και 4 βαθμού 3.
- B)** έχει μόνο δύο κορυφές βαθμού 1
- Γ)** έχει τον μέγιστο αριθμό κορυφών βαθμού 1
- Δ)** έχει μια κορυφή βαθμού 5, μία βαθμού 4, μια βαθμού 3, και οι υπόλοιπες βαθμού 1



## Δ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 3

Σχεδιάστε καθένα από τα ακόλουθα ή αν δεν μπορείτε εξηγήστε το γιατί:

- α)** Ένα δάσος με 10 κορυφές και ακριβώς 12 ακμές.
- β)** Ένα δάσος με 10 κορυφές και ακριβώς 10 ακμές.
- γ)** Ένα δάσος με 10 κορυφές και ακριβώς 8 ακμές.
- δ)** Ένα δάσος με 10 κορυφές και ακριβώς 6 ακμές.



## Δ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 4

Υποθέτουμε ότι ένα δέντρο  $T=(V,E)$ ,  $|V|=n$ ,  $|E|=e$ , έχει  $n$  κορυφές οι οποίες είναι είτε βαθμού 1 είτε βαθμού 3. Δείξτε ότι το  $T$  πρέπει να έχει άρτιο αριθμό κορυφών και ακριβώς  $(n-2)/2$  κορυφές βαθμού 3.



## Δ. Ασκήσεις

### Άσκηση Κατανόησης 5

Πόσες κορυφές μπορεί να έχει ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα αν είναι δέντρο; Να σχεδιάσετε όλα τα αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα που είναι δένδρα.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 1

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές είναι δέντρο αν και μόνο αν

1. Το  $G$  είναι συνδεόμενο και έχει  $n - 1$  ακμές.
2. Το  $G$  δεν έχει κύκλους και έχει κορυφή βαθμού 1.
3. Το  $G$  δεν έχει κύκλους και έχει  $n - 1$  ακμές.
4. Το  $G$  είναι συνδεόμενο και δεν έχει παράλληλες ακμές ούτε ανακυκλώσεις.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 2

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Κάθε γράφημα με  $n$  κορυφές και  $n - 1$  ακμές είναι συνδεόμενο.
2. Σε κάθε δέντρο με τουλάχιστον 3 κορυφές, τα φύλλα αποτελούν σύνολο ανεξαρτησίας.
3. Υπάρχει απλό διμερές (διχοτομίσιμο) γράφημα με  $n$  κορυφές και  $n(n - 1) / 2$  ακμές.
4. Το συμπληρωματικό κάθε γραφήματος είναι συνδεόμενο.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 3

Στις παρακάτω προτάσεις το  $T$  είναι δένδρο  $n \geq 3$  κορυφών.

1. Αν ο μέγιστος βαθμός του  $T$  είναι  $\Delta$ , τότε το  $T$  έχει τουλάχιστον  $\Delta$  φύλλα.
2. Κάθε ζευγάρι κορυφών του  $T$  ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
3. Το συμπληρωματικό του  $T$  είναι πάντα συνεκτικό γράφημα.
4. Τα φύλλα του  $T$  αποτελούν σύνολο ανεξαρτησίας.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 4

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Δύο γραφήματα είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους αν και μόνο αν αμφότερα είναι επίπεδα γραφήματα.
2. Κάθε γράφημα ομοιομορφικό με το  $K_{2,3}$  είναι διμερές (διχοτομίσιμο).
3. Όλα τα δέντρα είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους.
4. Κάθε συνδεδεμένο επίπεδο γράφημα μπορεί να μετατραπεί σε δέντρο με την αφαίρεση τόσων ακμών όσες είναι οι εσωτερικές του όψεις.





## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 1

Αποδείξτε ότι το πλήθος των φύλλων σε ένα δένδρο που κάθε κορυφή που δεν είναι φύλλο έχει βαθμό  $\delta$ , είναι

$$\varphi = \frac{n(\delta - 2) + 2}{\delta - 1}$$



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 2

Έστω  $T$  ένα δένδρο στο οποίο ο αριθμός των κορυφών που έχουν βαθμό  $i$ , για  $i=1, \dots, \Delta$  (όπου  $\Delta$  ο μέγιστος βαθμός κορυφής στο  $T$ ) είναι  $p_i$ . Να αποδείξετε ότι:

$$p_1 = p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \dots + (\Delta - 2)p_\Delta + 2$$



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 3

Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι κάθε δένδρο με τουλάχιστον 2 κορυφές είναι διχρωματίσιμο γράφημα



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 4

Δείξτε ότι σε κάθε δάσος που αποτελείται από  $k$  δένδρα ισχύει ο τύπος  $m=n-k$



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 5

Εξετάστω τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν δένδρα. Αν είναι αληθείς να δώσετε απόδειξη, ενώ αν είναι ψευδείς να δώσετε κάποιο κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

1. Αν  $G=(V,E)$  είναι γράφος με 3 κύκλους συνολικά, τότε  $|E(G)| \geq |V(G)|+2$
2. Αν  $T$  δένδρο με 2 κορυφές βαθμού 2, 7 κορυφές βαθμού 3, 2 κορυφές βαθμού 4 (με μέγιστο βαθμό κορυφής 4) τότε το  $T$  έχει 13 ακμές
3. Ένα δένδρο  $T$  με  $|V(T)| \geq 3$  έχει περισσότερα σημεία κοπής από ότι γέφυρες.
4. Υπάρχουν δένδρα που όλες οι κορυφές είναι σημεία κοπής.
5. Υπάρχουν ακριβώς δύο δένδρα που είναι κανονικά γραφήματα.