ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 2.5:
Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Το θεώρημα απαγωγής και η χρήση του
- Το θεώρημα αντιθετοαναστροφής και η χρήση του
- Το θέωρημα εγκυρότητας και η χρήση του
- Το θεώρημα πληρότητας και η χρήση του

Επίπεδο Β

- Το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο και η χρήση του

Επίπεδο Γ

- (-)

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

- Τα θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού:
  - Απαγωγή
  - Αντιθετοαναστροφή
  - Απαγωγή σε Άτοπο
- Τροποποιούν την προς απόδειξη τυπική συνεπαγωγή ώστε η τυπική απόδειξη να γίνει πιο εύκολα.

- Τα θεωρήματα:
  - Εγκυρότητας
  - Πληρότητας
- Σχετίζουν τους δύο κόσμους που έχουμε μελετήσει:
  - Την Προτασιακή Λογική με
  - Τον προτασιακό Λογισμό.

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

1. Το Θεώρημα Απαγωγής

Θεώρημα (Απαγωγής):

Αν $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ τότε $\mathrm{T} \vdash \varphi \to \psi$

Το θεώρημα έχει δύο χρήσεις:

Την ευθεία χρήση:

- Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
- Τότε από το θεώρημα απαγωγής «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vdash \varphi \to \psi$

Την αντίστροφη χρήση:

- Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vdash \varphi \to \psi$
- Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

1. Το Θεώρημα Απαγωγής

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi))$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \psi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi,\psi\} \vdash \chi \rightarrow \varphi$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi,\psi,\chi\} \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

1. Το Θεώρημα Απαγωγής

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \rightarrow \chi \vdash (\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi), \varphi\} \vdash \psi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση
2. $\varphi \rightarrow \chi$ Υπόθεση
3. χ MP1,2
4. $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$ Υπόθεση
5. $\chi \rightarrow \psi$ MP1,4
6. ψ MP3,5

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

1. Το Θεώρημα Απαγωγής

Παράδειγμα 3:
Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$$

Απάντηση:
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi\} \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ Τυπικό Θεώρημα
3. φ MP1,2

Και παραθέτουμε την απόδειξη του τυπικού θεωρήματος: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ (Βλέπε τέλος φυλλαδίου)

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

2. Το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής

Θεώρημα (Αντιθετοαναστροφής):

$$T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ αν και μόνο αν } T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος της αντιθετοαναστροφής μπορούμε να εναλάσσουμε τον προς απόδειξη τύπο με μία από τις υποθέσεις.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η αντιθετοαναστροφή βρίσκει εφαρμογή μόνο αν ο προς απόδειξη τύπος ξεκινά με άρνηση και η άρνηση αυτή δεν αλλοιώνεται από την εφαρμογή του θεωρήματος (μενει «κάγκελο»)

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

2. Το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash ((\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\psi \to \neg\psi))$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi \ \vdash \chi \to \neg(\psi \to \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\psi \to \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi, \psi \to \neg\psi\} \ \vdash \neg\chi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\psi \to \neg\psi$ Υπόθεση
2. $(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi$ Υπόθεση
3. $\neg\chi$ MP1,2

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

2. Το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi,\} \vdash \neg\neg\psi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση
2. $\varphi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
3. ψ MP1,2
4. $\psi \rightarrow \neg\neg\psi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ όπου φ:ψ.
5. $\neg\neg\psi$ MP3,4

Και παραθέτουμε την απόδειξη του τυπικού θεωρήματος: $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (Βλέπε τέλος φυλλαδίου)

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

3. Το Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο

Θεώρημα (Απαγωγής σε Άτοπο):

Αν $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό τότε $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$

Το θεώρημα έχει δύο χρήσεις:

Την ευθεία χρήση:

- Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό
- Τότε από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$

Την αντίστροφη χρήση:

- Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$
- Από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό.

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

3. Το Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο

Ορισμοί:

- Αντιφατικό Σύνολο Τύπων (Τυπικός Ορισμός)
  - Ένα σύνολο τύπων T καλείται αντιφατικό αν υπάρχει ένας τύπος ψ τέτοιος ώστε να ισχύει:
    - $T \vdash \neg\psi$ (ο $\neg\psi$ έπεται με τυπική απόδειξη από τις υποθέσεις του T)
    - $T \vdash \psi$ (ο ψ έπεται με τυπική απόδειξη από τις υποθέσεις του T)
  - Δηλαδή να συνεπάγεται τυπικά κάποιος τύπος και η άρνησή του από τις υποθέσεις του T.

- Συνεπές Σύνολο Τύπων (Τυπικός Ορισμός)
- Ένα σύνολο τύπων T καλείται συνεπές αν δεν είναι αντιφατικό
  - Δηλαδή δεν υπάρχει τύπος ψ τέτοιος ώστε:
    - $T \vdash \neg\psi$ (ο $\neg\psi$ έπεται με τυπική απόδειξη από τις υποθέσεις του T)
    - $T \vdash \psi$ (ο ψ έπεται με τυπική απόδειξη από τις υποθέσεις του T)

- Με βάση τα παραπάνω σχετίζοντας Πρ.Λογική με Πρ.Λογισμό
- ΣΥΝΕΠΕΣ==ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ και ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟ == ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

3. Το Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

Από το θεώρημα Απαγωγής σε Ατοπο αρκεί να δείξω ότι το σύνολο τύπων:

$$T=\{\varphi, \neg\varphi\} \text{ είναι αντιφατικό}$$

Πράγματι θεωρώ τον τύπο φ.

Ισχύει $T \vdash \varphi$. Πράγματι έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση

Ισχύει $T \vdash \neg\varphi$. Πράγματι έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\varphi$ Υπόθεση

Συνεπώς το σύνολο τύπων είναι αντιφατικό.

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

3. Το Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι:

$$\{\chi \to \neg\psi, \varphi\} \mid\!- \chi \to \neg(\varphi \to \psi)$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι:

$\{\chi \to \neg\psi, \varphi, \chi\} \mid\!- \neg(\varphi \to \psi)$

Από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο τύπων:

$\{\chi \to \neg\psi, \varphi, \chi, \varphi \to \psi\}$ είναι αντιφατικό.

Για να δείξουμε ότι είναι αντιφατικό θεωρούμε τον τύπο ψ.

Ισχύει ότι $\{\chi \to \neg\psi, \varphi, \varphi \to \psi, \chi\} \mid\!- \psi$ με την τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση
2. $\varphi \to \psi$ Υπόθεση
3. ψ MP1,2

Ισχύει ότι $\{\chi \to \neg\psi, \varphi, \varphi \to \psi, \chi\} \mid\!- \neg\psi$ με την τυπική απόδειξη:

1. χ Υπόθεση
2. $\chi \to \neg\psi$ Υπόθεση
3. $\neg\psi$ MP1,2

Συνεπώς το σύνολο τύπων είναι αντιφατικό.

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

4. Το Θεώρημα Εγκυρότητας

Θεώρημα (Εγκυρότητας):

$$\text{Αν } T \vdash \varphi \text{ τότε } \mathrm{T} \vDash \varphi$$

Το θεώρημα έχει δύο χρήσεις:

Την ευθεία χρήση:
- Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $\mathrm{T} \vdash \varphi$
- Τότε από το θεώρημα εγκυρότητας «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vDash \varphi$

Την αντίστροφη χρήση:
- Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vDash \varphi$
- Από το θεώρημα εγκυρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

4. Το Θεώρημα Εγκυρότητας

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι:

$$\{\varphi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \vDash \chi$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Εγκυρότητας αρκεί να δείξω:

$$\{\varphi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \chi$$

Που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση
2. $\varphi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
4. ψ MP1,2
5. $\psi \rightarrow \chi$ MP1,3
6. χ MP4,5

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

5. Το Θεώρημα Πληρότητας

Θεώρημα (Πληρότητας):

$$\text{Αν } T \vDash \varphi \text{ τότε } \mathrm{T} \vdash \varphi$$

Το θεώρημα έχει δύο χρήσεις:

Την ευθεία χρήση:

- Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $\mathrm{T} \vDash \varphi$
- Τότε από το θεώρημα πληρότητας «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vdash \varphi$

Την αντίστροφη χρήση:

- Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vdash \varphi$
- Από το θεώρημα πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vDash \varphi$

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

5. Το Θεώρημα Πληρότητας

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι:

$$\{p \land q, q \to \neg r\} \vdash \neg r$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Πληρότητας αρκεί να δείξω:

$$\{p \land q, q \to \neg r\} \vDash \neg r$$

Εξετάζουμε σε ποιες αποτιμήσεις αληθεύουν οι τύποι του συνόλου τύπων:

- Ο 1ος τύπος αληθεύει όταν $p \land q = A$, δηλαδή όταν p=A και q=A
- Ο 2ος τύπος αληθεύει όταν $q \to \neg r = A$, άρα έχω: $A \to \neg r = A$, άρα πρέπει r=Ψ
- Άρα το σύνολο τύπων ικανοποιείται στην αποτίμηση p=A,q=A,r=Ψ

Στην (μοναδική) αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του συνόλου τύπων έχω ότι ο προς απόδειξη τύπος είναι:

- $\neg r = \neg \Psi = A$

Άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

Β. Θεωρία

1. Θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού

Τα Θεωρήματα Εγκυρότητας - Πληρότητας

Τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας (μαζί)

Θεώρημα Εγκυρότητας

$$T \vdash \varphi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mathrm{T} \vDash \varphi$$

Θεώρημα Πληρότητας

Σε συνδυασμό τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας κάνουν ισοδύναμους τους κόσμους του προτασιακού λογισμού. Π.χ. έχουμε ότι:

$$\vdash \varphi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \vDash \varphi$$

δηλαδή

(φ είναι τυπικό θεώρημα) αν και μόνο αν (φ είναι ταυτολογία)

Β. Θεωρία

2. Τρία Σημαντικά Τυπικά Θεωρήματα

1. Το τυπικό Θεώρημα ⊢ φ → φ

Απόδειξη 1 (χωρίς Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. φ→((φ →φ) →φ)   ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ:φ, ψ: φ →φ
2. (φ→((φ →φ) →φ)) →((φ→(φ →φ)) →(φ→φ)) ΣΑ στο ΑΣ2 όπου φ:φ, ψ: φ →φ,χ: φ
3. (φ→(φ →φ)) →(φ→φ) MP1,2
4. φ→(φ →φ) ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ψ, ψ:φ
5. φ→φ MP3,4

Απόδειξη 2 (με Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ   Υπόθεση

Β. Θεωρία

2. Τρία Σημαντικά Τυπικά Θεωρήματα

2. Το τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

Απόδειξη:

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

Απάντηση:

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\varphi$ Υπόθεση

Β. Θεωρία

2. Τρία Σημαντικά Τυπικά Θεωρήματα

3. Το τυπικό Θεώρημα $\vdash \neg\neg \varphi \rightarrow \varphi$

Απόδειξη:

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

Απάντηση:
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \neg\neg\varphi, \psi: \neg\varphi$
3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ MP1,2
4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\varphi: \neg\varphi, \psi: \varphi$
5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$ MP3,4
6. $\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ όπου $\varphi: \neg\varphi$
7. φ MP6,5

Και παραθέτουμε την τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε το αξιωματικό σύστημα του Προτασιακού Λογισμού. Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές και ποιες όχι;

1. Ο τύπος $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ1 με συντακτική αντικατάσταση.

2. Ο τύπος $(\neg\neg\varphi \to \neg(\psi \to \chi)) \to ((\neg\neg\varphi \to (\psi \to \chi)) \to \neg\varphi)$ προκύπτει άμεσα από το αξιωματικό σχήμα ΑΣ3 με συντακτική αντικατάσταση.

3. Το $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ προκύπτει άμεσα από το $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ με εφαρμογή του Θεωρήματος της Απαγωγής.

4. Το $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ προκύπτει άμεσα από το $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ με εφαρμογή του Θεωρήματος της Αντιθετοαναστροφής.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Το Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής εξασφαλίζει ότι για κάθε υποσύνολο προτασιακών τύπων T και για αυθαίρετα επιλεγμένους προτασιακούς τύπους φ και ψ, ισχύει ότι

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi \text{ αν και μόνο αν } T \cup \{\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi .$$

Είναι σωστό ότι οι παρακάτω δηλώσεις προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής με συντακτική αντικατάσταση χωρίς τη χρήση άλλων θεωρημάτων ή προτάσεων;

1. $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \psi$ αν και μόνο αν $T \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$.

2. $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg(\neg\psi)$ αν και μόνο αν $T \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$.

3. $\neg\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi$ αν και μόνο αν $\psi \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$.

4. $\neg\varphi \models \neg\psi$ αν και μόνο αν $\psi \models \neg(\neg\varphi)$.

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Δείξτε τα παρακάτω:

(α) $\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\theta \rightarrow \xi) \rightarrow \xi))$

(β) $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$

Επιτρέπεται η χρήση γνωστών θεωρημάτων εκτός των θεωρημάτων Εγκυρότητας και Πληρότητας

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα θεωρήματα Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής, Απαγωγής σε Άτοπο ή συνδυασμό τους, να αποδειχθεί το τυπικό θεώρημα:

$$\vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg\varphi$$

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε με δύο τρόπους το αντίστροφο του θεωρήματος απαγωγής.
(α) Με χρήση των θεωρημάτων εγκυρότητας-πληρότητας
(β) Χωρίς χρήση των θεωρημάτων εγκυρότητας-πληρότητας