ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ/2

Μάθημα 5.2:
Ισομορφισμοί Γραφημάτων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Νέοι Ορισμοί (Ισομορφισμός, Αυτομορφισμός, Αυτοσυμπληρωματικό Γράφημα)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β
- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ
- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

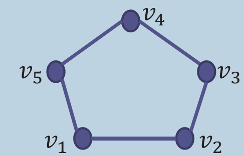
Β. Θεωρία
1. Ισομορφισμοί Γραφημάτων
1. Ισομορφικά Γραφήματα

Ορισμός:
Δύο γραφήματα $G_1(V_1,E_1)$ και $G_2(V_2,E_2)$ είναι **ισομορφικά**, αν υπάρχει συνάρτηση $f:V_1 \to V_2$ 1-1 και επί, τέτοια ώστε $(v_i,v_j) \in E_1$ και $(f(v_i),f(v_j)) \in E_2$ και αντίστροφα.
Η f λέγεται **συνάρτηση ισομορφισμού** ή **ισομορφισμός** του G_1 με το G_2

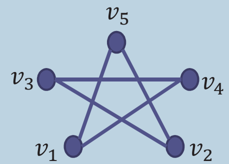
Με απλά λόγια: Υπάρχει αντιστοίχιση των κορυφών ώστε να ταυτίζονται οι ακμές.

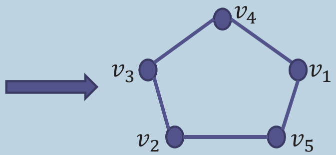
Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε δύο ισόμορφα γραφήματα. Το ένα μπορεί να ξαναζωγραφιστεί στο επίπεδο ώστε να ταυτίζονται οι ακμές.

$G_1(V_1,E_1)$



$G_2(V_2,E_2)$





Η συνάρτηση ισομορφισμού είναι:
$f:V_1 \to V_2$

$f(v_1)=v_2$
$f(v_2)=v_5$
$f(v_3)=v_1$
$f(v_4)=v_4$
$f(v_5)=v_3$

Β. Θεωρία

1. Ισομορφισμοί Γραφημάτων

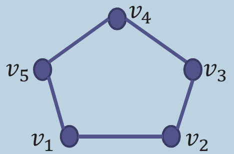
1. Ισομορφικά Γραφήματα

Παρατήρηση:
Για δύο ισομορφικά γραφήματα $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ ισχύει ότι με κάποια κατάλληλη διάταξη των κορυφών οι πίνακες γειτνίασης των δύο γραφημάτων ταυτίζονται.

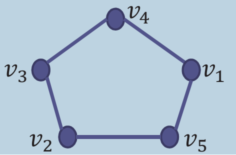
Πρακτικά: Η διάταξη αντιστοιχεί στην συνάρτηση ισομορφισμού.

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε δύο ισόμορφα γραφήματα. Η αναδιάταξη των κορυφών του G_2 ώστε να ταυτίζονται οι κορυφές προκύπτει από την συνάρτηση ισομορφισμού.

$G_1(V_1, E_1)$



$G_2(V_2, E_2)$



$f: V_1 \to V_2$

$f(v_1) = v_2$
$f(v_2) = v_5$
$f(v_3) = v_1$
$f(v_4) = v_4$
$f(v_5) = v_3$

$$A_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_2 & v_5 & v_1 & v_4 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_2 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Β. Θεωρία

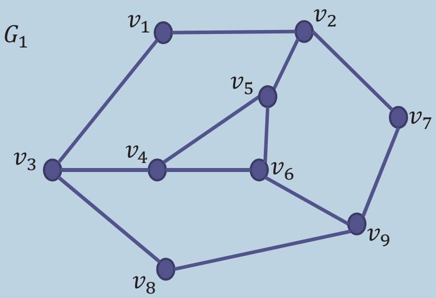
1. Ισομορφικά Γραφήματα

2. Πως δείχνουμε ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά

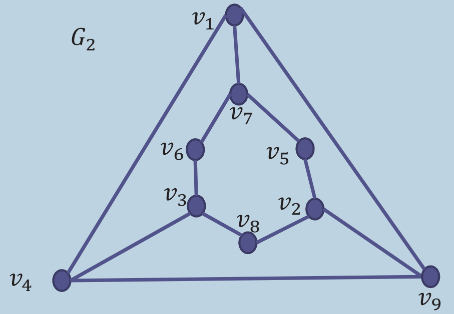
Δείχνουμε ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά:
Α'τρόπος: Δίνουμε την συνάρτηση ισομορφισμού.

Άσκηση: Δείξτε ότι τα παρακάτω γραφήματα είναι ισομορφικά:

G_1



G_2



Β. Θεωρία

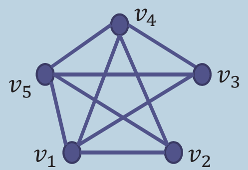
1. Ισομορφικά Γραφήματα

2. Πως δείχνουμε ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά

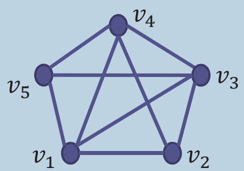
Δείχνουμε ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά:
Β'τρόπος: Δείχνουμε ότι τα συμπληρώματα είναι τους είναι ισομορφικά
Στηριζόμενοι στο θεώρημα:
«Δύο γραφήματα G και Η είναι ισομορφικά ανν $\bar{G}$ και $\bar{H}$ είναι ισομορφικά

Άσκηση: Δείξτε ότι τα παρακάτω γραφήματα είναι ισομορφικά:

$G_1(V_1, E_1)$



$G_2(V_2, E_2)$



Β. Θεωρία

1. Ισομορφικά Γραφήματα

3. Πως δείχνουμε ότι δύο γραφήματα ΔΕΝ είναι ισομορφικά

Δείχνουμε ότι δύο γραφήματα ΔΕΝ είναι ισομορφικά:
- Δείχνοντας ότι μία από τις «**αναλλοίωτες ιδιότητες**» των γραφημάτων ισχύει στο ένα γράφημα και δεν ισχύει στο άλλο

Μία αναλλοίωτη ιδιότητα είναι μια ιδιότητα που αν ισχύει σε ένα γράφημα ισχύει και σε κάθε ισόμορφό του. Μερικές από αυτές είναι:
- Έχει n κορυφές
- Έχει m ακμές.
- Έχει κορυφή βαθμού k.
- Έχει t κορυφές βαθμού k.
- Έχει απλό κύκλο μήκους k.
- Έχει κύκλο Euler
- Έχει κύκλο Hamilton
- Είναι συνδεόμενο.
- Είναι επίπεδο.

κ.λπ.
«Αναλλοίωτη ιδιότητα είναι σχεδόν όποιαδήποτε από τις ιδιότητες που έχουμε μελετήσει.

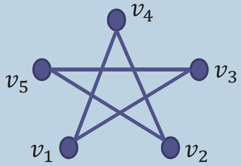
Β. Θεωρία

1. Ισομορφικά Γραφήματα

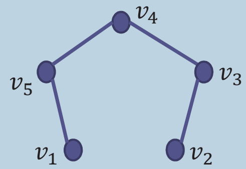
3. Πως δείχνουμε ότι δύο γραφήματα ΔΕΝ είναι ισομορφικά

Άσκηση: Δείξτε ότι τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων δεν είναι ισόμορφα:

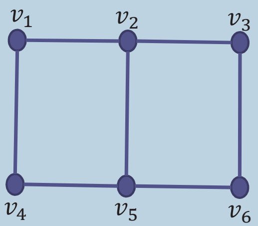
$G_1(V_1, E_1)$



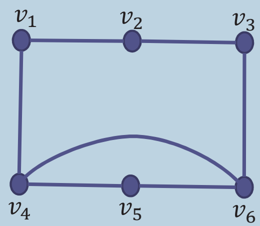
$G_2(V_2, E_2)$



$G_1(V_1, E_1)$



$G_2(V_2, E_2)$



Β. Θεωρία

1. Ισομορφικά Γραφήματα

4. Αποδείξεις Αναλλοίωτων

Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα «**Έχει κορυφή βαθμού k**» είναι αναλλοίωτη ιδιότητα

Θεωρούμε δύο ισόμορφα γραφήματα $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ και θεωρούμε ότι το G_1 έχει κορυφή βαθμού k. Θα δείξουμε ότι και το G_2 έχει κορυφή βαθμού k.

- Έστω κορυφή v βαθμού k στο G_1, δηλαδή $\mathrm{d}(v) = k$ και f ισομορφισμός των $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$. Θα δείξουμε ότι και η $\mathrm{w} = \mathrm{f}(v)$ έχει βαθμό k.
- Αν $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_k\}$ οι ακμές που εφάπτονται στην κορυφή v, τότε από τον ορισμό του ισομορφισμού οι ακμές $\{e_1{}', e_2{}', e_3{}', \dots, e_k{}'\}$ εφάπτονται στην w (όπου αν $e_i = (v_i, v_j)$ τότε $e_i{}' = (f(v_i), f(v_j))$)
- Δεν υπάρχει κάποια άλλη ακμή που να εφάπτεται στην w. Αν υπήρχε, επειδή η συνάρτηση ισομορφισμού είναι 1-1 και επί, υποχρεωτικά θα υπήρχε και η αντίστοιχη ακμή που να εφάπτεται στην κορυφή v.

Άρα $\mathrm{d}(v) = d(w)$ επομένως η ιδιότητα «εχει κορυφή βαθμού k» είναι αναλλοίωτη.

Β. Θεωρία

1. Ισομορφικά Γραφήματα

4. Αποδείξεις Αναλλοίωτων

Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα «**Έχει απλό κύκλο μήκους k**» είναι αναλλοίωτη ιδιότητα

Θεωρούμε δύο ισόμορφα γραφήματα $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ και θεωρούμε ότι το G_1 έχει ααπλό κύκλο μήκους k. Θα δείξουμε ότι και το G_2 έχει απλό κύκλο μήκους k.

- Έστω απλός κύκλος μήκους k στον G_1 ο $\mathrm{C} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_1)$
- Αν f η συνάρτηση ισομορφιμού, θα δείξουμε ότι κύκλος $\mathrm{C}' = \big(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k), f(v_1)\big)$. Εφόσον f είναι 1-1 και επί, δεν υπάρχει επανάληψη κορυφών στον C'

- Επιπλέον επειδή κάθε ακμή του C έστω (v_i, v_j) απεικονίζεται στην ακμή $(\mathrm{f}(v_i), f(v_j))$ δεν υπάρχει επανάληψη ακμών στον κύκλο C'

Άρα ο κύκλος C' είναι απλός και μεγέθους k, άρα η ιδιότητα «έχει απλό κύκλο μεγέθους k» είναι αναλλοίωτη.

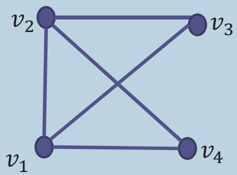
Β. Θεωρία

2. Συμπληρωματικοί Ορισμοί

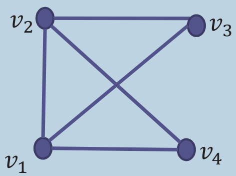
1. Αυτομορφισμός

Ορισμός: **Αυτομορφισμός** είναι ένας ισομορφισμός από ένα γράφημα στον εαυτό του.

Παράδειγμα: Στο παρακάτω γράφημα υπάρχουν π.χ. οι αυτομορφισμοί:



$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$



$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$

$\mathrm{f}: \mathrm{V} \rightarrow V$ όπου
$\mathrm{f}(v_1) = v_1$, $\mathrm{f}(v_2) = v_2$
$\mathrm{f}(v_3) = v_4$, $\mathrm{f}(v_4) = v_3$

$\mathrm{f}: \mathrm{V} \rightarrow V$ όπου
$\mathrm{f}(v_1) = v_2$, $\mathrm{f}(v_2) = v_1$
$\mathrm{f}(v_3) = v_3$, $\mathrm{f}(v_4) = v_4$
κ.λπ.

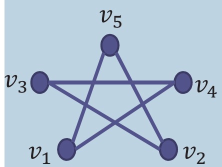
Ισχύει ότι:
- Το K_n έχει n! Αυτομορφισμούς
- Το $K_{n,m}$ έχει n!m! αυτομορφισμούς

Ορισμός: **Ταυτοτικός αυτομορφισμός** είναι ο αυτομορφισμός που αντιστοιχεί κάθε κορυφή στον εαυτό της
- Ισχύει ότι κάθε γράφημα έχει ταυτοτικό αυτομορφισμό.

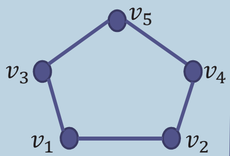
Β. Θεωρία
2. Συμπληρωματικοί Ορισμοί
2. Αυτοσυμπληρωματικό Γράφημα

Ορισμός: **Αυτοσυμπληρωματικό** καλείται ένα γράφημα, αν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.

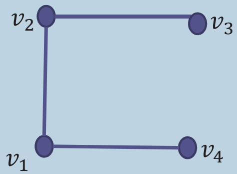
Παραδείγματα: Ο κύκλος 5 κορυφών και το μονοπάτι 4 κορυφών είναι αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα:



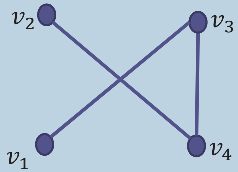
$G=(V,E)$



$\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$



$G=(V,E)$

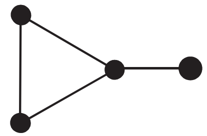


$\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$

Ισχύουν τα εξής:
- Ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα **έχει m=n(n-1)/4 ακμές**
- Οι κορυφές ενός αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος είναι n=4k ή n=4k+1, k=0,1,2,..

Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 1

Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το παραπλεύρως έχει το γράφημα K_4; Πόσα το K_{20}; Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή των K_4 και K_{20} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές τους είναι διακεκριμένες).

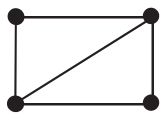


ΛΥΣΗ:

Στο K_4 όλες οι κορυφές μπορούν να αντιστοιχηθούν σε οποιαδήποτε κορυφή του δοθέντος γραφήματος μια και όλες οι ακμές είναι διαθέσιμες. Στην αρχή λοιπόν επιλέγουμε μία κορυφή από τις 4 για το «άκρο» του γραφήματος (την κορυφή βαθμού 1) για την οποία έχουμε 4 δυνατότητες. Από τις εναπομείνασες 3, επιλέγουμε την κορυφή του τριγώνου που συνδέεται με το άκρο. Οι υπόλοιπες δύο κορυφές θα αντιστοιχηθούν στις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου με αυθαίρετο τρόπο. Σύνολο λοιπόν $3\cdot 4=12$ υπογραφήματα ισόμορφα με το δοθέν έχει το K_4. Στο K_{20} πρέπει να επιλέξουμε πρώτα τις 4 κορυφές του υπογραφήματος, κάτι που γίνεται με C(20,4)=$\binom{20}{4}$ διαφορετικούς τρόπους και στη συνέχεια σε αυτές θα υπάρχουν όπως είδαμε 12 υπογραφήματα ισόμορφα με το δοθέν. Καταλήγουμε ότι το K_{20} έχει $12\cdot\binom{20}{4}$ υπογραφήματα ισόμορφα με το δοθέν.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 2

Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το παραπλεύρως έχει το γράφημα K_{20}; Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή του K_{20} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές του είναι διακεκριμένες).



ΛΥΣΗ:

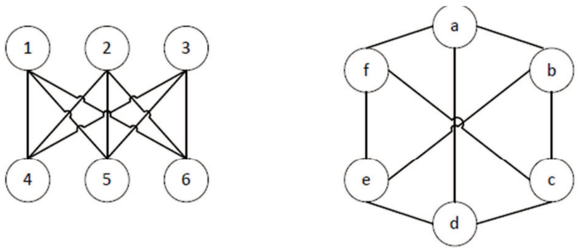
Υπάρχουν $\binom{20}{4}$ τρόποι να επιλεγούν οι 4 κορυφές του γραφήματος από τις 20 κορυφές του K_{20}. Το γράφημα αυτό είναι το K_4 από το οποίο έχει αφαιρεθεί μία ακμή. Επειδή το K_4 έχει 6 ακμές υπάρχουν 6 επιλογές για αυτό. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι ο αριθμός των ισόμορφων γραφημάτων με το δοθέν είναι $6\binom{20}{4}$.

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Να σχεδιάσετε
(α) δύο μη-ισομορφικά γραφήματα με 6 κορυφές και 10 ακμές και
(β) δύο μη-ισομορφικά γραφήματα με 9 κορυφές και 13 ακμές.

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Να δείξετε ότι τα παρακάτω δύο γραφήματα είναι ισομορφικά:



G_1 G_2

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Βρείτε όλα τα μη-ισομορφικά γραφήματα με ακολουθίες βαθμών (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2) και (5,4,4,4,3,3,3,3).

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι αληθείς;

1. Υπάρχει γράφημα χωρίς ταυτοτικό αυτομορφισμό.
2. Υπάρχει γράφημα 2n κορυφών με n!n! αυτομορφισμούς.
3. Όλα τα γραφήματα C_n (n≥3) (κύκλοι n κορυφών) είναι ανά δύο ισομορφικά.
4. Έστω δύο ισομορφικά γραφήματα G,H με n=V(G)=V(H) κορυφές με αντίστοιχους πίνακες γειτνίασης A και B. Ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Έστω δύο ισόμορφα γραφήματα G,H. Ισχύουν τα εξής:

1. Το G έχει σύνολο ανεξαρτησίας k κορυφών αν και μόνο αν το H έχει σύνολο ανεξαρτησίας k κορυφών
2. Οι πινάκες γειτνίασης των δύο γραφημάτων είναι ίσοι.
3. Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών των δύο γραφημάτων είναι ίσο.
4. Το G έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν το H έχει κύκλο Hamilton.

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

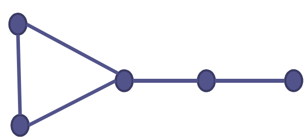
Αποδείξτε ότι σε κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα ισχύει η σχέση m=n(n-1)/4

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Αποδείξτε την αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα γράφημα αυτοσυμπληρωματικό, δηλαδή ότι για το πλήθος των κορυφών n ενός αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος ισχύει n=4k ή n=4k+1, με k=0,1,2,…

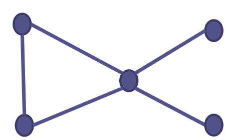
Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το ακόλουθο έχει το γράφημα K_5; Πόσα το K_{100}; (Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή του K_5 και του K_{100} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές είναι διακεκριμένες)



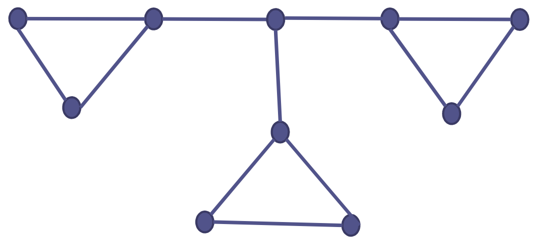
Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το ακόλουθο έχει το γράφημα K_5; Πόσα το K_{100}; (Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή του K_5 και του K_{100} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές είναι διακεκριμένες)



Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 5

Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το ακόλουθο έχει το γράφημα K_{10}; Πόσα το K_{100}; (Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή του K_{10} και του K_{100} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές είναι διακεκριμένες)



Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 6

Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το ακόλουθο έχει το γράφημα K_9; Πόσα το K_{200}; (Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή του K_9 και του K_{200} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές είναι διακεκριμένες)