Το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

Έστω L μια άπειρη γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε s $\in L$ με |s| $\geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v, w, x και y ισχύει:

- $|vwx| \leq n$
- $|vx| > 0$
- $uv^m wx^m y \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

(1) Επιλέγουμε μια **συμβολοσειρά s** που ανήκει στην γλώσσα που
- (α) **όλα** τα σύμβολα είναι υψωμένα τουλάχιστον στην p
- (β) ανήκει οριακά στην γλώσσα

(2) Υπολογίζουμε το μήκος της συμβολοσειράς που επιλέξαμε στο (1)

$L_1 = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 0\}$ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.
Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^p 2^p$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $3p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.
Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v,x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v,x:

1. Να περιέχουν μόνο 0. Τότε $uv^2wx^2y \notin \mathrm{L}$, διότι προστίθενται μηδενικά άρα π.χ. τα 0 δεν είναι ίσα με τα 1
2. Να περιέχουν 0 και 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin \mathrm{L}$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι άρα π.χ. τα 0 δεν είναι ίσα με τα 2
3. Να περιέχουν μόνο 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin \mathrm{L}$, διότι προστίθενται άσσοι άρα π.χ. τα 1 δεν είναι ίσα με τα 2
4. Να περιέχουν 1 και 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin \mathrm{L}$, διότι προστίθενται άσσοι και δυάρια άρα π.χ. τα 2 δεν είναι ίσα με τα 0
5. Να περιέχουν μόνο 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin \mathrm{L}$, διότι προστίθενται δυάρια άρα π.χ. τα 2 δεν είναι ίσα με τα 0.

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

(3) Εντοπίζουμε περιπτώσεις ανάλογα με το που περιέχεται το vwx δεδομένου ότι έχει μήκος το πολύ p. Χρήσιμο θα φανεί να κάνουμε ένα βοηθητικό σχήμα (βλέπε δεξιά)

$$s = \overbrace{00 \ldots 00}^{p}\overbrace{11 \ldots 11}^{p}\overbrace{22 \ldots 22}^{p}$$