

ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Μάθημα 1.3: Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

1. Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός O
2. Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός o
3. Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός Ω
4. Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός ω
5. Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός Θ

2. Χρήση Ορίων για την απόδειξη ισχύος ασυμπτωτικών συμβολισμών

3. Λήμματα στους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς

Γ. Ασκήσεις

A. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο A

- Ερμηνεία των ασυμπτωτικών συμβολισμών (να ξέρουμε πως μεταφράζεται κάθε συμβολισμός)

Επίπεδο B

- Χρήση των ορίων για την απόδειξη ότι ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός

Επίπεδο Γ

- Ορισμοί των ασυμπτωτικών συμβολισμών και απόδειξη με τον ορισμό ότι ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός

B. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

- Εισάγουμε τους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς $o, O, \Theta, \Omega, \omega$ για να μπορούμε να περιγράψουμε την πολυπλοκότητα αλγορίθμων μέσω άνω και κάτω φραγμάτων.
- Έστω δύο συναρτήσεις πολυπλοκότητας $f(n)$ και $g(n)$. Τότε:

| Συμβολίζουμε | Διαβάζουμε | Εμπειρικά καταλαβαίνουμε ότι |
|---------------|--|------------------------------|
| $f=o(g)$ | Ασυμπτωτικά, η f έχει ως γνήσιο άνω φράγμα την g | $f < g$ |
| $f=O(g)$ | Ασυμπτωτικά, η f έχει ως άνω φράγμα την g | $f \leq g$ |
| $f=\Theta(g)$ | Ασυμπτωτικά, η f έχει ως άνω και κάτω φράγμα την g | $f = g$ |
| $f=\Omega(g)$ | Ασυμπτωτικά, η f έχει ως κάτω φράγμα την g | $f \geq g$ |
| $f=\omega(g)$ | Ασυμπτωτικά, η f έχει ως γνήσιο κάτω φράγμα την g | $f > g$ |

Β. Θεωρία

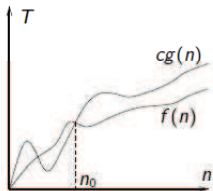
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

1. Ο συμβολισμός O

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε $f=O(g)$, καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά : $f \leq g$.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n) = O(g(n))$ αν και μόνο αν $\exists n_0 > 0, c > 0$: $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ για κάθε $n \geq n_0$

- Που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι μετά από κάποια σταθερά n_0 , η $f(n)$ είναι πάντα μικρότερη ή ίση από την $cg(n)$ για κάποια κατάλληλη σταθερά c .



- Η σχέση $f(n)=O(g(n))$ θα διαβάζεται «η f έχει ως άνω φράγμα την g »

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

2. Ο συμβολισμός o

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε $f=o(g)$, καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά : $f < g$.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n) = o(g(n))$ αν και μόνο αν $\forall c > 0: \exists n_0$: $0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$ για κάθε $n \geq n_0$

- που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι για κάθε θετική σταθερά c η $f(n)$ είναι πάντα μικρότερη από την $cg(n)$ μετά από κάποια σταθερά n_0
- Η σχέση $f(n)=o(g(n))$ θα διαβάζεται «η f έχει ως ΓΝΗΣΙΟ άνω φράγμα την g »
- Προσοχή!!
 - $n=O(n)$
 - $n \neq o(n)$
 - $n=o(n^2)$
 - $n=o(n^3)$
 - ...κ.ο.κ.
- Η απόδειξη είναι πιο δύσκολη γιατί πρέπει να γίνεται για κάθε σταθερά $c>0$.

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

1. Ο συμβολισμός O

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι: $2n=O(n^3)$

Απόδειξη:

Έχουμε $f(n)=2n$, $g(n)=n^3$

Επιλέγουμε $n_0=1$, $c=2$.

$$f(n) \leq cg(n) \Rightarrow$$

$$2n \leq 2n^3 \Rightarrow$$

$$1 \leq n^2$$

που ισχύει για κάθε $n \geq 1$

Β. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

2. Ο συμβολισμός o

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι: $2n=o(n^2)$

Απόδειξη:

Έστω $c>0$:

$$f(n) < cg(n) \Rightarrow$$

$$2n < cn^2 \Rightarrow$$

$$2 < cn \Rightarrow$$

$$2/c < n$$

Άρα υπάρχει επιλέγουμε ως n_0 το $\lceil 2/c \rceil$

B. Θεωρία

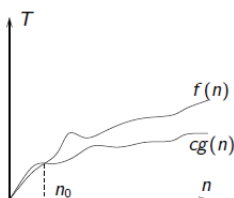
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

4. Ο συμβολισμός Ω

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε $f=\Omega(g)$, καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά : $f \geq g$.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n) = \Omega(g(n))$ αν και μόνο αν $\exists n_0 > 0, c > 0$: $f(n) \geq c \cdot g(n) \geq 0$ για κάθε $n \geq n_0$

- Που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι μετά από κάποια σταθερά n_0 , η $f(n)$ είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την $cg(n)$ για κάποια κατάλληλη σταθερά c .



- Η σχέση $f(n)=\Omega(g(n))$ θα διαβάζεται «η f έχει ως κάτω φράγμα την g »

B. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

4. Ο συμβολισμός Ω

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι: $4n = \Omega(\log n)$

Απόδειξη:

Έχουμε $f(n)=4n$, $g(n)=\log n$

Επιλέγουμε $n_0=1$, $c=4$.

$$f(n) \geq cg(n) \Rightarrow$$

$$4n \geq 4 \log n \Rightarrow$$

$$n \geq \log n$$

που ισχύει για κάθε $n \geq 1$

B. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός ω

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε $f=\omega(g)$, καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά: $f > g$.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$f(n) = \omega(g(n))$ αν και μόνο αν $\forall c > 0: \exists n_0$: $f(n) > c \cdot g(n) \geq 0$ για κάθε $n \geq n_0$

- που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι για κάθε θετική σταθερά c η $f(n)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από την $cg(n)$ μετά από κάποια σταθερά n_0
- Η σχέση $f(n)=\omega(g(n))$ θα διαβάζεται «η f έχει ως ΓΝΗΣΙΟ κάτω φράγμα την g »
- Προσοχή!!
 - $n = \Omega(n)$
 - $n \neq \omega(n)$
 - $n = \omega(\log n)$
 - $n = \omega(\log \log n)$
 - ...κ.ο.κ.
- Η απόδειξη είναι πιο δύσκολη γιατί πρέπει να γίνεται για κάθε σταθερά $c > 0$.

B. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός ω

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι: $0.5n^2 = \omega(n)$

Απόδειξη:

Έστω $c > 0$:

$$f(n) > cg(n) \Rightarrow$$

$$0.5n^2 > cn \Rightarrow$$

$$n > \frac{c}{0.5} \Rightarrow$$

$$n > 2c$$

Άρα υπάρχει επιλέγουμε ως n_0 το $2c$

B. Θεωρία

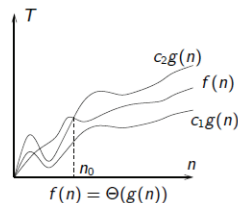
1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός Θ

- Διαισθητικά, όταν βλέπουμε $f = \Theta(g)$, καταλαβαίνουμε ότι ασυμπτωτικά $f = g$.
- Τυπικά ο ορισμός λέει:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ αν και μόνο αν } \exists n_0 > 0, c_1, c_2 > 0: \quad 0 < c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ για κάθε } n \geq n_0$$

- Που με απλά λόγια ερμηνεύεται ότι μετά από κάποια σταθερά n_0 , η $f(n)$ φράσσεται από πάνω και από κάτω από την $g(n)$, όταν αυτή πολλαπλασιάζεται αντίστοιχα με κάποιες κατάλληλες σταθερές:



- Η σχέση $f(n) = \Theta(g(n))$ θα διαβάζεται «η f είναι ασυμπτωτικά ίση με την g »

B. Θεωρία

2. Όρια και Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

- Για να αποδείξουμε ότι ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός μεταξύ 2 συναρτήσεων:

- Είτε χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο ορισμό,
- Είτε κάνουμε χρήση του ακόλουθου θεωρήματος:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} c \neq 0, & \text{τότε } f(n) = \Theta(g(n)) \\ 0, & \text{τότε } f(n) = o(g(n)) \\ +\infty, & \text{τότε } f(n) = \omega(g(n)) \end{cases}$$

- Συνεπώς ένας εναλλακτικός (και πιο εύκολος) τρόπος να εξετάσουμε αν ισχύει ένας ασυμπτωτικός συμβολισμός είναι:
 - Υπολογίζουμε το παραπάνω όριο
 - Ανάλογα με το αποτέλεσμα του να αποφασίσουμε αν ισχύει ή όχι ο αντίστοιχος ασυμπτωτικός συμβολισμός

B. Θεωρία

1. Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

5. Ο συμβολισμός Θ

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι: $4n = \Theta(n)$

Απόδειξη:

Έχουμε $f(n) = 4n$, $g(n) = n$

Επιλέγουμε $n_0 = 1$, $c_1 = 2$.

$$f(n) \geq c_1 g(n) \Rightarrow$$

$$4n \geq 2n \Rightarrow$$

$$4 \geq 2$$

που ισχύει για κάθε $n \geq 1$

Επιλέγουμε $n_0 = 1$, $c_2 = 6$.

$$f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow$$

$$4n \leq 6n \Rightarrow$$

$$4 \leq 6$$

που ισχύει για κάθε $n \geq 1$

B. Θεωρία

2. Όρια και Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

- Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι: $0.5n^2 = \omega(n)$

Απόδειξη:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0.5n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0.5n) = +\infty$$

Συνεπώς $0.5n^2 = \omega(n)$

Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι: $2^n = o(3^n)$

Απόδειξη:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0.66)^n = 0$$

Συνεπώς $2^n = o(3^n)$

Β. Θεωρία

3. Λήμματα στους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς

- Ισχύουν οι ακόλουθες προφανείς προτάσεις για τους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς:

Λήμμα 1: $f(n) = \Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$

- Διαισθητικά: $f=g$ αν και μόνο αν $f \leq g$ και $f \geq g$
- Θα ξέρουμε ότι όταν ισχύει το Θ ισχύει και το O και το Ω

Λήμμα 2: Αν $f(n) = o(g(n))$ τότε $f(n) = O(g(n))$

- Διαισθητικά: Αν $f < g$ τότε $f \leq g$
- Θα ξέρουμε ότι όταν ισχύει το o ισχύει και το O
- (Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Λήμμα 3: Αν $f(n) = \omega(g(n))$ τότε $f(n) = \Omega(g(n))$

- Διαισθητικά: Αν $f > g$ τότε $f \geq g$
- Θα ξέρουμε ότι όταν ισχύει το ω ισχύει και το Ω
- (Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Β. Θεωρία

4. Οι ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί ως Σύνολα

- Έστω η παράσταση $O(n^2)$:
- Ισχύουν τα εξής:
 - $1 = O(n^2)$
 - $n+2 = O(n^2)$
 - $\log n = O(n^2)$
 - $\log n + 5 \log \log n = O(n^2)$
 - $3n^2 = O(n^2)$
- Στην πραγματικότητα ο συμβολισμός $O(n^2)$ εκφράζει όλες τις συναρτήσεις που είναι ασυμπτωτικά μικρότερες ή ίσες από την n^2 .
- Άρα το $O(n^2)$ θα έπρεπε να απεικονίζεται ως σύνολο συναρτήσεων και να γράφουμε αντίστοιχα:
 - $1 \in O(n^2)$
 - $n+2 \in O(n^2)$
- Αλλά ευτυχώς έχει επικρατήσει ο συμβολισμός με την ισότητα.

Γ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 1

- Στον πίνακα που ακολουθεί για κάθε ζευγάρι συναρτήσεων f και g σημειώστε με \checkmark αν ισχύει η σχέση του αντίστοιχου συμβολισμού της f με την g .

| $f(n)$ | $g(n)$ | o | O | Θ | Ω | ω |
|------------|------------|--------------|--------------|----------|----------|----------|
| n^2 | n^3 | \checkmark | \checkmark | | | |
| $n^{1.5}$ | n | | | | | |
| $4 \log n$ | $8 \log n$ | | | | | |
| $5n^2$ | $0.5n^2$ | | | | | |
| $n^3 - 5n$ | $8 \log n$ | | | | | |

- Π.χ. έχει σημειωθεί με \checkmark το 1^ο κελί, διότι $n^2 = o(n^3)$

Γ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 2

- Στον πίνακα που ακολουθεί για κάθε ζευγάρι συναρτήσεων f και g σημειώστε με Θ ή o ή ω ανάλογα με το ποιος από τους 3 ασυμπτωτικούς συμβολισμούς ισχύει μεταξύ της f και της g

| | $g(n)=5$ | $g(n)=\log n$ | $g(n)=n^2$ | $g(n)=2^n$ | $g(n)=5^n$ | $g(n)=n^n$ |
|--------------------|----------|---------------|------------|------------|------------|------------|
| $f(n)=\log \log n$ | ω | | | | | |
| $f(n)=4 \log n$ | | | | | | |
| $f(n)=n$ | | | | | | |
| $f(n)=2n^2$ | | | | | | |
| $f(n)=6n^5+n$ | | | | | | |
| $f(n)=3^n$ | | | | | | |
| $f(n)=n!$ | | | | | | |

- Π.χ. στο 1^ο κελί έχει σημειωθεί ω αφού $\log \log n = \omega(1)$



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε, κάνοντας χρήση του αντιστοιχου ορισμού ασυμπτωτικού συμβολισμού ότι:

1. $n = O(n \log n)$
2. $4n^2 + n = \Theta(n^2)$
3. $\log^2 n = \Omega(\log n)$
4. $6n + 4 = \Theta(n)$
5. $2^n = o(3^n)$
6. $n^n = \omega(n^2)$



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε, κάνοντας χρήση του ορισμού των ορίων ότι:

1. $n = O(n \log n)$
2. $4n^2 + n = \Theta(n^2)$
3. $\log^2 n = \Omega(\log n)$
4. $6n + 4 = \Theta(n)$
5. $2^n = o(3^n)$
6. $n^n = \omega(n^2)$