Αλφάβητο είναι οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο συμβόλων. Συμβολίζεται με Σ

Παραδείγματα:
- Σ={0,1} το δυαδικό αλφάβητο
- Σ={a,b}
- Σ={Α,Β,Γ,…,Ω} το αλφάβητο των ελληνικών κεφαλαίων γραμμάτων

Έστω Σ ένα αλφάβητο.
- **Γλώσσα του αλφαβήτου Σ** είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του Σ*. Συνήθως συμβολίζεται με L.
- Το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που μπορούμε να παράγουμε από σύμβολα του Σ, συμβολίζεται με **Σ***.
- Το σύνολο Σ* καλείται **αστέρι Kleene** του Σ και συμβολίζει την διάταξη 0 ή περισσότερων συμβόλων του Σ

Παράδειγμα
Έστω Σ={0,1} το δυαδικό αλφάβητο. Τότε:
Σ*={ε,0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111,…}

Ορισμός: Μόνο τα παρακάτω είναι **κανονικές εκφράσεις**:
- Ø είναι η κ.ε. που αντιστοιχεί στην κενή γλώσσα.
- ε είναι η κ.ε. που αντιστοιχεί στην γλώσσα {ε}
- Για κάθε σύμβολο $\sigma \in \Sigma$, σ είναι η κ.ε. που αντιστοιχεί στην γλωσσα {σ}
- Αν r και s είναι εκφράσεις που αντιστοιχούν στις γλώσσες Lr και Ls, τότε και οι (rs), $(r+s)$ και r^* είναι οι κανονικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στις κανονικές γλώσσες LrLs, $\mathrm{Lr}+\mathrm{Ls}$,

Πράξεις Γλωσσών:
Έστω L, L_1, L_2 γλώσσες του αλφαβήτου Σ. Ορίζονται οι γλώσσες:
- **Ένωση Γλωσσών:** $\mathrm{L}_1 \cup \mathrm{L}_2 = \{w | w \in \mathrm{L}_1 \text{ ή } \mathrm{w} \in \mathrm{L}_2\}$
- **Τομή Γλωσσών:** $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2 = \{w | w \in \mathrm{L}_1 \text{ και } \mathrm{w} \in \mathrm{L}_2\}$
- **Παράθεση (ή Συνένωση) Γλωσσών:**
$$\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2 = \{xy | x \in \mathrm{L}_1 \text{ και } \mathrm{y} \in \mathrm{L}_2\}$$
- **Συμπλήρωμα Γλωσσας:** $\overline{\mathrm{L}} = \{w | w \notin \mathrm{L}\}$
- **Αστέρι Kleene Γλωσσας:** $L^* = \{w | \text{Η } w \text{ είναι παράθεση 0 ή περισσοτέρων συμβολοσειρών της L}\}$.

Παραδείγματα κανονικών εκφράσεων στο αλφάβητο: Σ={0,1}

L_1={ w | w **τελειώνει** με 1 }	**(0+1)*1**
L_2={ w | w **αρχίζει** με 00 }	**00(0+1)***
L_3={ w | w **περιέχει** το 01 }	**(0+1)*01(0+1)***
L_4={ w | w έχει **μήκος** (ακριβώς) 2 }	**(0+1)(0+1)**
L_5={ w | w έχει **μήκος** τουλάχιστον 2 }	**(0+1)(0+1)(0+1)***
L_6={ w | w έχει **μήκος** το πολύ 2 }	**ε+0+1+00+01+10+11**
L_7={ w | w έχει **άρτιο** μήκος }	**((0+1)(0+1))***
L_8={ w | w έχει **περιττό** μήκος }	**((0+1)(0+1))*(0+1)**
L_9={ w | w έχει άρτιο μήκος **ή** αρχίζει με 00}	**((0+1)(0+1))*+00(0+1)***
L_{10}={ w | w **δεν αρχίζει** με 01}	**(00+10+11)(0+1)*+0+1+ε**
L_{11}={ w | w **δεν περιέχει** το 01}	**1*0***
L_{12}={ w | w περιέχει **άρτια** 0}	**(1*01*0)*1***

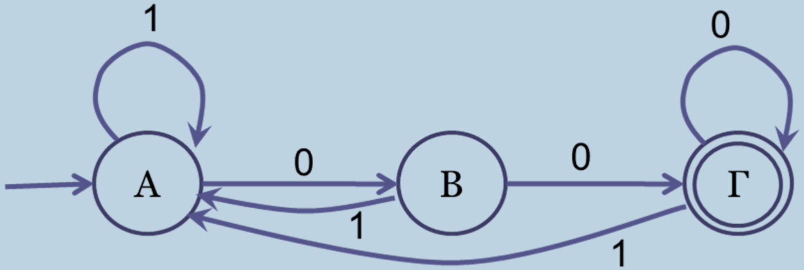
Πεπερασμένο Αυτόματο M_L της γλώσσας L είναι μία μηχανή που με είσοδο μία συμβολοσειρά $x \in \Sigma^*$

- **Αν $x \in L$ τότε «απαντά» ΝΑΙ.**
  - Ή πιο τυπικά... Αναγνωρίζει ή κάνει δεκτές τις συμβολοσειρές που ανήκουν στην L
- **Αν $x \notin L$ τότε «απαντά» ΟΧΙ.**
  - Ή πιο τυπικά... Απορρίπτει τις συμβολοσειρές που δεν ανήκουν στην L

Ντετερμινιστικό καλείται ένα **Πεπερασμένο Αυτόματο** αν από κάθε κατάσταση υπάρχει ακριβώς μία εξερχόμενη μετάβαση με κάθε σύμβολο του αλφαβήτου

Παράδειγμα 1

Το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας L={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w τελειώνει με 00} είναι το ακόλουθο:



Και τυπικά περιγράφεται από την πεντάδα: M=(Q,Σ,q_0, δ, F) όπου:

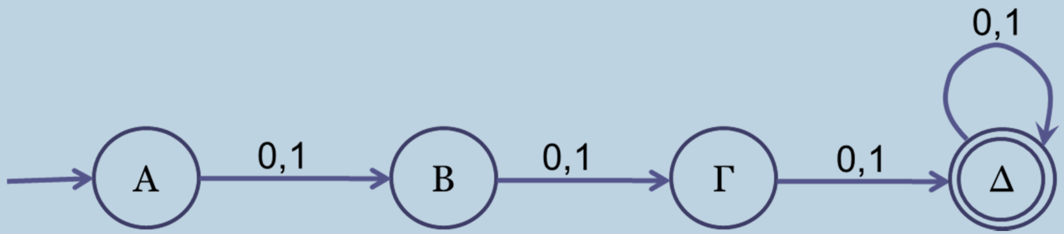
- Q={A,B,Γ}
- Σ={0,1}
- q_0=A
- Η δ μπορεί να περιγραφεί από τον πίνακα μετάβασης:

	0	1
A	B	A
B	Γ	A
Γ	Γ	A

- F={Γ}

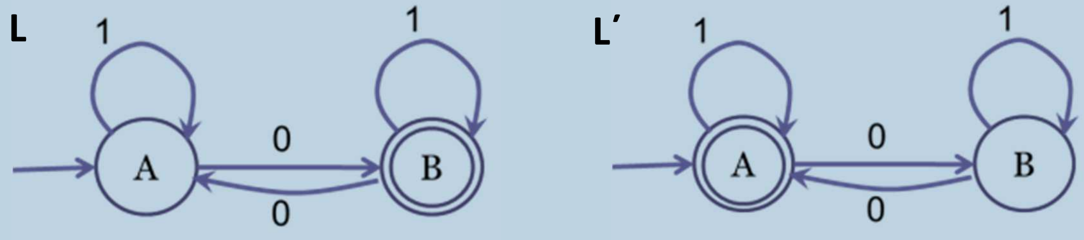
Παράδειγμα 2

Το Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας L={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w έχει μήκος μεγαλύτερο από 2} είναι το ακόλουθο:



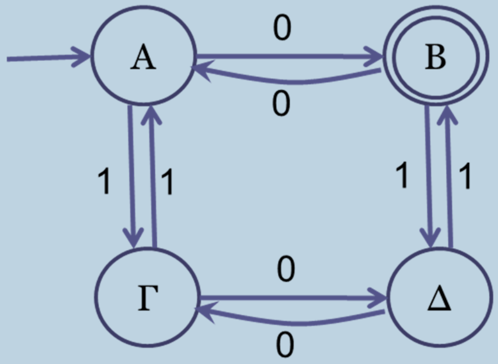
Παράδειγμα 3

Το ΝΠΑ της γλώσσας L={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w έχει περιττό πλήθος 0} και το ΝΠΑ της γλώσσας L'={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w έχει άρτιο πλήθος 0}



Παράδειγμα 4

Το ΝΠΑ της γλώσσας L={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w έχει περιττό πλήθος 0 και άρτιο πλήθος 1}



Μη Ντετερμινιστικό καλείται ένα **Πεπερασμένο Αυτόματο** όπου συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα εξής:

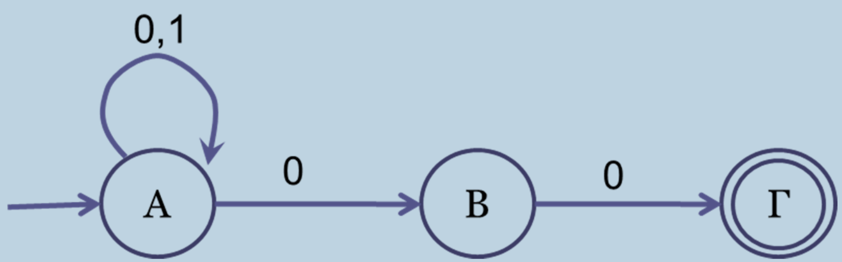
- Από μία κατάσταση μπορεί να μεταβαίνουμε σε διαφορετικές καταστάσεις με το ίδιο σύμβολο
- Από μία κατάσταση μπορεί να μην καθορίζεται μετάβαση με διάβασμα κάποιου συμβόλου
- Είναι δυνατές οι ε-μεταβάσεις (μεταβάσεις χωρίς διάβασμα κάποιου συμβόλου)

Τυπικά ένα ΜΠΑ μίας γλώσσας είναι ένα πεπερασμένο αυτόματο το οποίο:

- Απαντά ΝΑΙ για τις συμβολοσειρές που ανήκουν στην γλώσσα (πρέπει να υπάρχει μονοπάτι που οδηγεί σε τελική κατάσταση).
- Απαντά ΌΧΙ για τις συμβολοσειρές που δεν ανήκουν στην γλώσσα (δεν υπάρχει μονοπάτι που να οδηγεί σε τελική κατάσταση)

Παράδειγμα 1

Το Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας $L = (0+1)^*00$ είναι το ακόλουθο:



Και τυπικά περιγράφεται από την πεντάδα: M=(Q,Σ,q_0, δ, F) όπου:

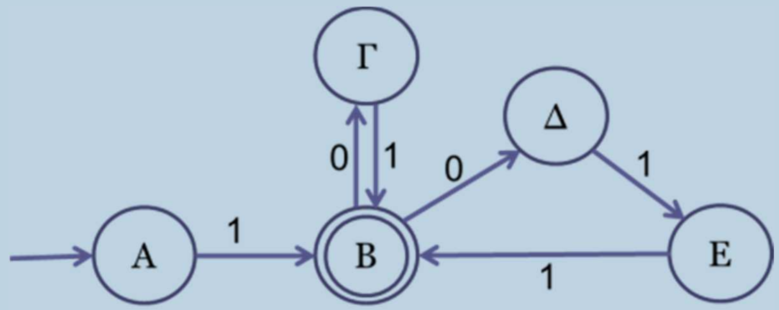
- Q={A,B,Γ},
- Σ={0,1},
- q_0=A
- Η δ μπορεί να περιγραφεί από τον πίνακα μετάβασης:

	0	1
A	{A,B}	{A}
B	{Γ}	∅
Γ	∅	∅

- F={Γ}

Παράδειγμα 2

Το Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας $L = 1(01+011)^*$ είναι το ακόλουθο:



Τρόπος Λειτουργίας με τη συμβολοσειρά 101011

Αρχή	1	0	1	0	1	1	ΤΕΛΟΣ
Α →	Β →	Γ → Δ →	Β → Ε →	Γ → Δ → ⊗	Β → Ε →	⊗ Β	ΝΑΙ

Διότι, η Β είναι τελική

Τρόπος Λειτουργίας με τη συμβολοσειρά 101000

Αρχή	1	0	1	0	0	0	ΤΕΛΟΣ
Α →	Β →	Γ → Δ →	Β → Ε →	Γ → Δ → ⊗	⊗ ⊗		ΟΧΙ

Διότι, δεν υπάρχει μονοπάτι που οδηγεί σε τελική

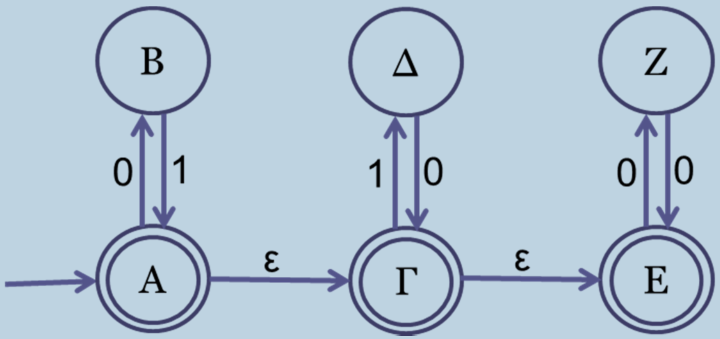
Από μία κατάσταση χωρίς διάβασμα (διάβασμα ε)

- Μένουμε στην ίδια κατάσταση
- Μεταβαίνουμε σε όσες καταστάσεις μπορούμε χωρίς διάβασμα (ακολουθώντας δηλαδή μονοπάτι ε-κινήσεων)

Ένα ΜΠΑ με ε-κινήσεις αναφέρεται και ως ΜΠΑ-ε

Παράδειγμα

Το Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο της γλώσσας $\mathrm{L} = (01)^*(10)^*(00)^*$είναι το ακόλουθο:



Και τυπικά περιγράφεται από την πεντάδα: $M=(Q,\Sigma,q_0, \delta, F)$ όπου:

- $Q=\{Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ\}$,
- $\Sigma=\{0,1\}$,
- $q_0=Α$
- Η δ μπορεί να περιγραφεί από τον πίνακα μετάβασης:

	0	1	ε
Α	{Β}	∅	{Γ}
Β	∅	{Α}	∅
Γ	∅	{Δ}	{Ε}
Δ	{Γ}	∅	∅
Ε	{Ζ}	∅	∅
Ζ	{Ε}	∅	∅

- $F=\{Α,Γ,Ε\}$

Τρόπος Λειτουργίας με τη συμβολοσειρά 0100

Απαντάει ΝΑΙ, διότι υπάρχει μονοπάτι που οδηγεί σε τελική κατάσταση με διάβασμα των συμβόλων.

Αρχή	ε	0	ε	1	ε	0	ε	0	ε	ΤΕΛΟΣ
Α	→Α	→Β	→Β	→Α	→Α	→Β	→Β	→⊗		ΝΑΙ
	→Γ	→⊗			→Γ	→⊗				
	→Ε	→Ζ	→Ζ	→⊗	→Ε	→Ζ	→Ζ	→Ζ	→Ζ	

Τρόπος Λειτουργίας με τη συμβολοσειρά 0001

Απαντάει ΟΧΙ, διότι δεν υπάρχει μονοπάτι που οδηγεί σε τελική κατάσταση με διάβασμα των συμβόλων.

Αρχή	ε	0	ε	0	ε	0	ε	1	ε	ΤΕΛΟΣ
Α	→Α	→Β	→Β	→⊗						ΟΧΙ
	→Γ	→⊗								
	→Ε	→Ζ	→Ζ	→Ε	→Ε	→Ζ	→Ζ	→⊗		

Ορισμός: Λέμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό σε μία πράξη, αν το αποτέλεσμα της πράξης επί δύο στοιχείων του συνόλου δίνει στοιχείο που παραμένει στο σύνολο:

- Οι φυσικοί είναι κλειστοί στην πράξη της πρόσθεσης.
- Οι φυσικοί δεν είναι κλειστοί στην πράξη του πολλαπλασιασμού.

Θεώρημα: Οι **κανονικές γλώσσες είναι κλειστές** και στις 5 πράξεις: **Ένωση, Τομή, Συμπλήρωμα, Παράθεση, Αστέρι Kleene.**

Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών **στην Ένωση**

- Η L_1 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω $\mathbf{r_1}$. Η L_2 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω $\mathbf{r_2}$
- Η $L_1 \cup L_2$ περιγράφεται από την κανονική έκφραση $\mathbf{r_1} + \boldsymbol{r_2}$, άρα είναι κανονική γλώσσα.

Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών **στην Παράθεση**

- Η L_1 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω $\mathbf{r_1}$. Η L_2 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω $\mathbf{r_2}$
- Η $L_1 L_2$ περιγράφεται από την κανονική έκφραση $\mathbf{r_1}\boldsymbol{r_2}$, άρα είναι κανονική γλώσσα.

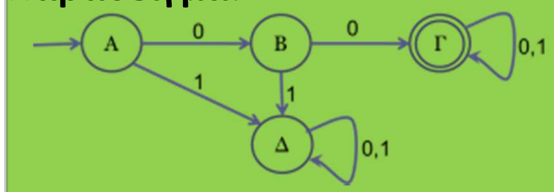
Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στο **Αστέρι Kleene**

- Η L είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω $\boldsymbol{r}$.
- Η L^* περιγράφεται από την κανονική έκφραση $\boldsymbol{r}^*$, άρα είναι κανονική γλώσσα.

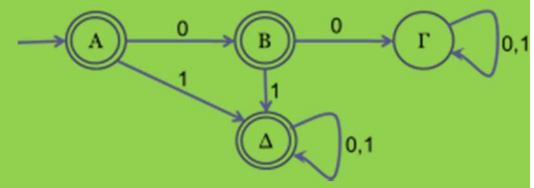
Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στο **Συμπλήρωμα**

- Η L είναι κανονική άρα υπάρχει ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο Μ που αποφασίζει την γλώσσα.
- Κατασκευάζουμε ΝΠΑ για την $\overline{L}$ ως εξής: Είναι το Μ, κάνοντας κάθε τελική: μη τελική και κάθε μη τελική: τελική.

Παράδειγμα:



$L = \{w \in \{0,1\}^* | \, w \; αρχιζει \; με \; 00\}$



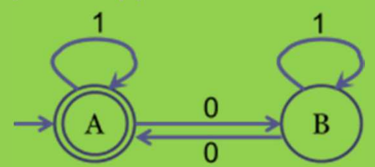
$L = \{w \in \{0,1\}^* | \, w \; δεν \; αρχιζει \; με \; 00\}$

Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην **Τομή**

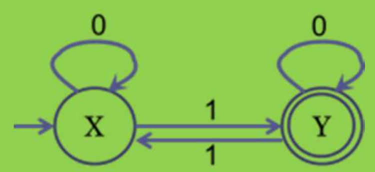
- Οι $\boldsymbol{L_1}, \boldsymbol{L_2}$ είναι κανονικές άρα υπάρχουν ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα $\mathrm{M_1}, \mathrm{M_2}$ που τις αποφασίζουν
- Κατασκευάζουμε ΝΠΑ για την $\boldsymbol{L_1} \cap \boldsymbol{L_2}$ ως εξής: Καταστάσεις: Καρτεσιανό Γινόμενο. Μεταβάσεις: Προσομοιώνουν τα αρχικά αυτόματα. Τελική: Συνδυασμός Τελικών.

ΝΠΑ για Ενωση: Τελικές: κάθε κατάσταση που περιέχει τελική
ΝΠΑ για Διαφορά: Τελική της L_1 και μη τελική της L_2

Παράδειγμα:

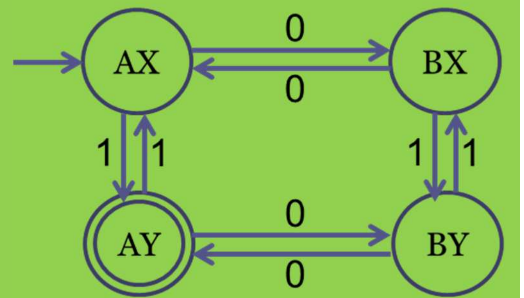


L_1={w∈{0,1}* | w περιέχει άρτια 0}

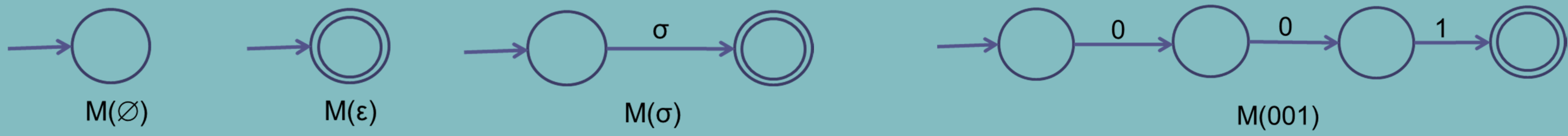


L_2={w∈{0,1}* | w περιέχει περιττά 1}

$L_1 \cap L_2$ = {w∈{0,1}* | w περιέχει άρτια 0 και περιττά 1}

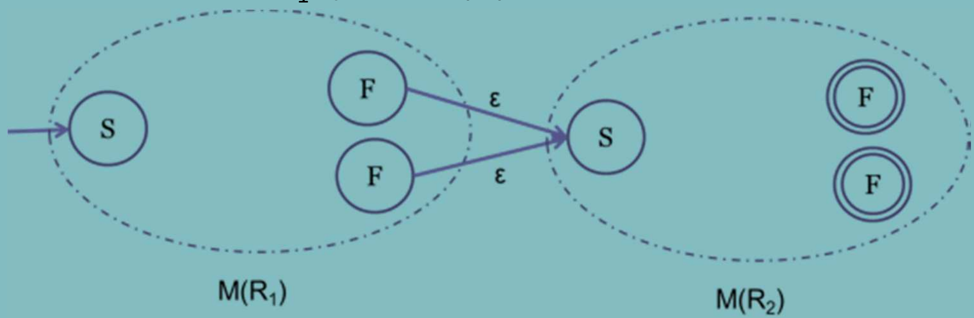


1. Κανονικές Εκφράσεις για τις: ∅, ε, σ και για μία συμβολοσειρά(π.χ. 001):



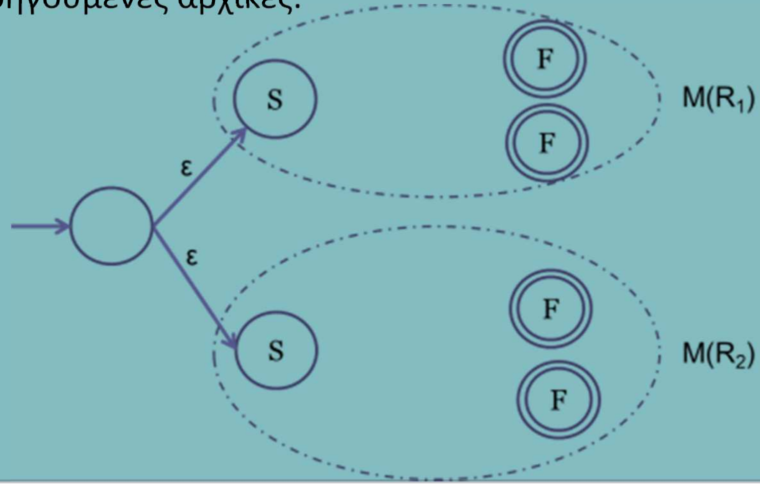
2. Κανόνας της παράθεσης : R_1R_2

- Φεύγουν ε-κινήσεις από τις τελικές του $M(R_1)$ προς την αρχική του $M(R_2)$
- Οι τελικές του $M(R_1)$ γίνονται μη τελικές καταστάσεις.



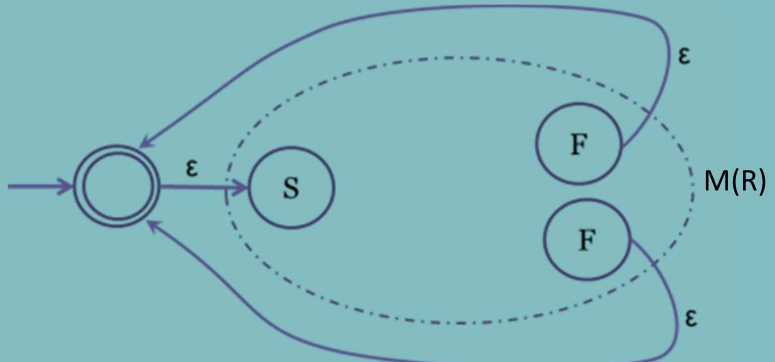
3. Κανόνας του + : R_1+R_2

- Προσθέτουμε μία νέα αρχική κατάσταση
- Με ε-κινήσεις πηγαίνουμε από την νέα αρχική κατάσταση στις προηγούμενες αρχικές.

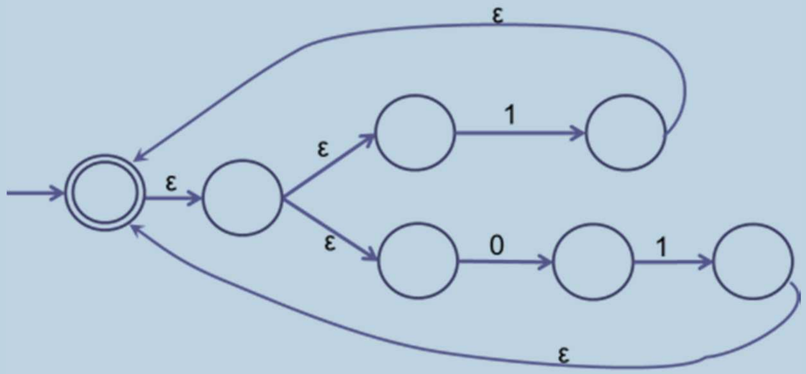


3. Κανόνας του Αστεριού Kleene : R*

- Προσθέτουμε μία νέα αρχική κατάσταση (που είναι και τελική)
- Με ε-κίνηση πάμε από την νέα αρχική στην προηγούμενη αρχική.
- Με ε-κινήσεις φεύγουμε από τις προηγούμενες τελικές προς την νέα αρχική.
- Οι προηγούμενες τελικές γίνονται μη τελικές καταστάσεις

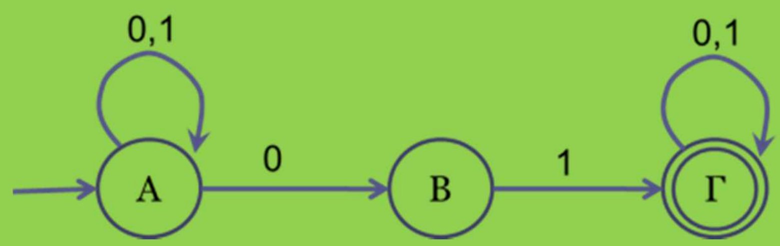


Παράδειγμα για τη γλώσσα L=(1+01)*



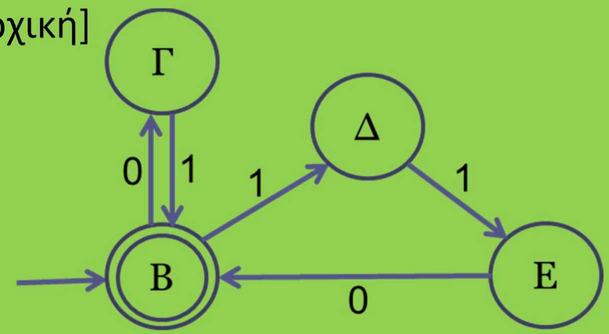
Μεθοδολογία 1: Οι υποχρεωτικές Συμβολοσειρές καταγράφονται «ξαπλωτές» σε διαδοχικές μεταβάσεις

ΚΕ: (0+1)***01**(0+1)*



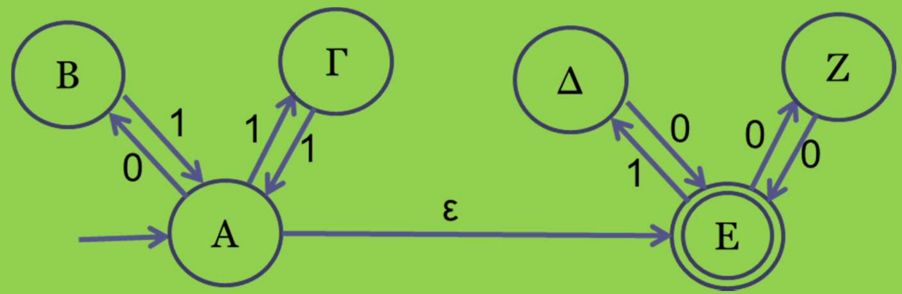
Μεθοδολογία 2: Αστέρι Kleene με συμβολοσειρές δημιουργεί κύκλο μήκους όσα και τα σύμβολα που παρατίθενται [Τελική η αρχική]

ΚΕ: **(01+110)***



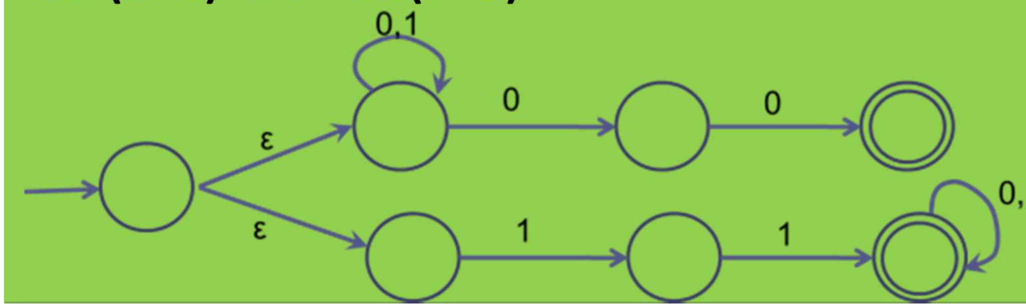
Μεθοδολογία 3: Περίπλοκες κατασκευές που παρατίθενται θα ενώνονται με ε-κίνηση [Τελική η «δεξιότερη»]

ΚΕ: **(01+11)* (10+00)***



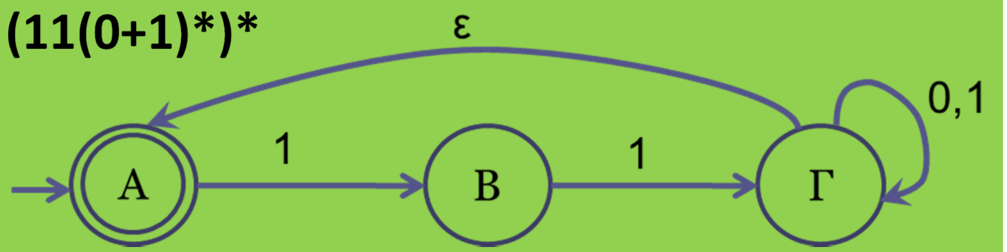
Μεθοδολογία 4: Περίπλοκες κατασκευές που ενώνονται με + , θα φεύγουν ε-κινήσεις από νέα αρχική κατάσταση και θα κατασκευάζουμε ξεχωριστά τα μέρη

ΚΕ: **(0+1)*00 + 11(0+1)***

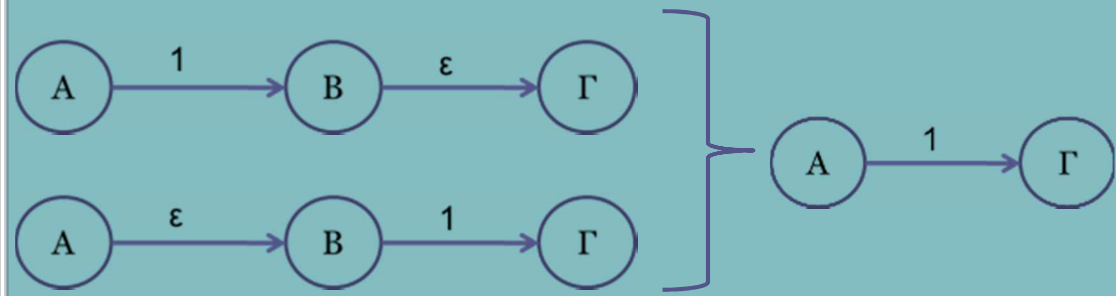


Μεθοδολογία 5: Αστέρι Kleene με περίπλοκη κατασκευή: κατασκευάζουμε πρώτα την εσωτερική παράσταση και στο τέλος με ε-κίνηση πάμε από τις τελικές στην αρχική. Η αρχική γίνεται μοναδική τελική.

ΚΕ: **(11(0+1)*)***



Απλοποίηση ε-κινήσεων

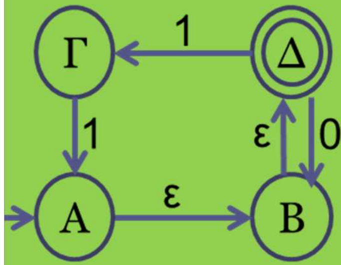


Η Β δεν έχει εισερχόμενες ή εξερχόμενες μεταβάσεις

__Εμπειρικά__ θα εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο ως εξής:

- Θα βάζουμε τις **ίδιες καταστάσεις**
- Θα βάζουμε την **ίδια αρχική** και τις **ίδιες τελικές**.
    - Θα παρατηρούμε αν υπάρχει μονοπάτι ε-κινήσεων από την αρχική σε κάποια τελική οπότε και η αρχική θα γίνεται τελική.
- Θα κατασκευάζουμε στο πρόχειρο ένα πίνακα μετάβασης που για κάθε κατ/ση και σύμβολο θα υπολογίζουμε το **ε-σ-ε** του:
    - __ε:__ που πάμε από την κατάσταση χωρίς διάβασμα συμβόλου (προσοχή ότι πάντα μένουμε και στην ίδια κατάσταση χωρίς διάβασμα συμβόλου)
    - __σ:__ που πηγαίνουμε από τις καταστάσεις του προηγούμενου βήματος με το σύμβολο που μελετάμε.
    - __ε:__ που πάμε από τις καταστάσεις του προηγούμενου βήματος χωρίς διάβασμα συμβόλου

Για παράδειγμα στο αυτόματο:



- Π.χ. για την κατ/ση Α με 0:
    - ε: Α,Β,Δ
    - 0:⊗,⊗,Β
    - ε: Β,Δ

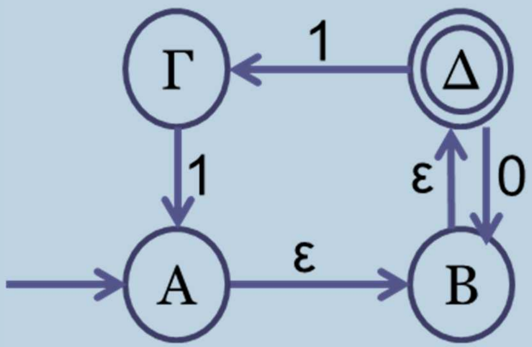
__Τυπικά__ **η μετάβαση είναι:** .

$$\delta(\mathrm{A},0)=\varepsilon\left(\hat{\delta}(\varepsilon(\mathrm{A}),0)\right)=\varepsilon\left(\hat{\delta}(\{\mathrm{A},\mathrm{B},\Delta\},0)\right)=$$

$$\varepsilon\left(\hat{\delta}(\{\mathrm{A}\},0)\cup\hat{\delta}(\{\mathrm{B}\},0)\cup\hat{\delta}(\{\Delta\},0)\right)=$$

$$\varepsilon(\{\mathrm{B}\})=\{\mathrm{B},\Delta\}$$

__ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:__ Μετατρέπουμε το ακόλουθο ΜΠΑ-ε στο ισοδύναμο ΜΠΑ:



ΠΡΟΧΕΙΡΟ

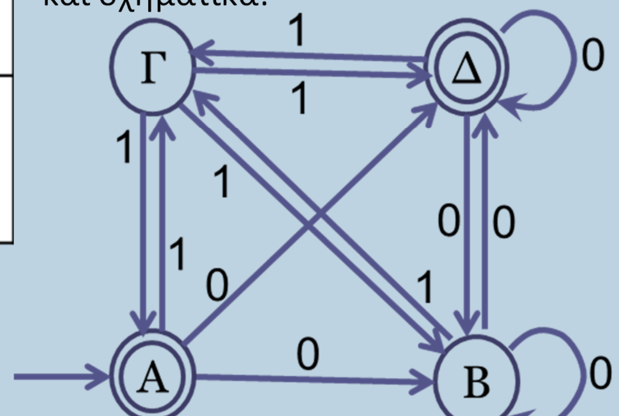
	0	1
Α	ε:Α,Β,Δ 0:⊗,⊗,Β ε:Β,Δ	ε:Α,Β,Δ 1:⊗,⊗,Γ ε:Γ
Β	ε:Β,Δ 0:⊗,Β ε:Β,Δ	ε:Β,Δ 1:⊗,Γ ε:Γ
Γ	ε:Γ 0:⊗ ε:	ε:Γ 1:Α ε:Α,Β,Δ
Δ	ε:Δ 0:Β ε:Β,Δ	ε:Δ 1:Γ ε:Γ

ΚΑΘΑΡΟ:

Ο πίνακας μετάβασης που προκύπτει από τον αλγόριθμο μετατροπής είναι:

	0	1
Α	{Β,Δ}	{Γ}
Β	{Β,Δ}	{Γ}
Γ	∅	{Α,Β,Δ}
Δ	{Β,Δ}	{Γ}

και σχηματικά:



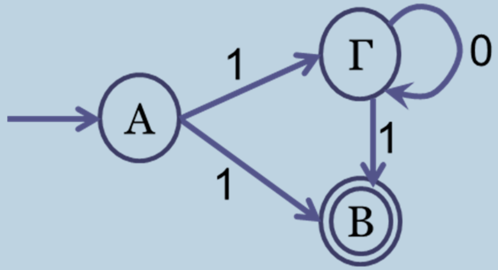
<u>**Εμπειρικά**</u> θα εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο ως εξής:

Θα κατασκευάζουμε τον **πίνακα μετάβασης** του νέου ΝΠΑ ως εξής:

- Θα βάζουμε **μόνο την αρχική** κατάσταση στον νέο πίνακα.
- Όποιες **νέες καταστάσεις** προκύπτουν θα τις θέτουμε προς μελέτη σε νέες γραμμές του πίνακα μετάβασης του ΝΠΑ.
- Η μελέτη μίας κατάστασης **Χ με το σύμβολο σ** γίνεται ως εξής:
    - Για κάθε κατάσταση που περιέχεται στο Χ καταγράφουμε το σύνολο των καταστάσεων που πηγαίνουμε με το σ (χρήσιμος ο πίνακας μετάβασης του ΜΠΑ). Τελικώς δίνουμε την ένωση των συνόλων αυτών.
- Ο πίνακας μετάβασης θα σταματά όταν δεν θα υπάρχουν νέες καταστάσεις προς διερεύνηση.

- Θα δίνουμε την σχηματική απεικόνιση του ΝΠΑ
    - Η **αρχική κατάσταση είναι η ίδια**
    - Οι **τελικές** καταστάσεις είναι **όσες περιέχουν τελική του ΜΠΑ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μετατρέπουμε το ακόλουθο ΜΠΑ στο ισοδύναμο ΝΠΑ:



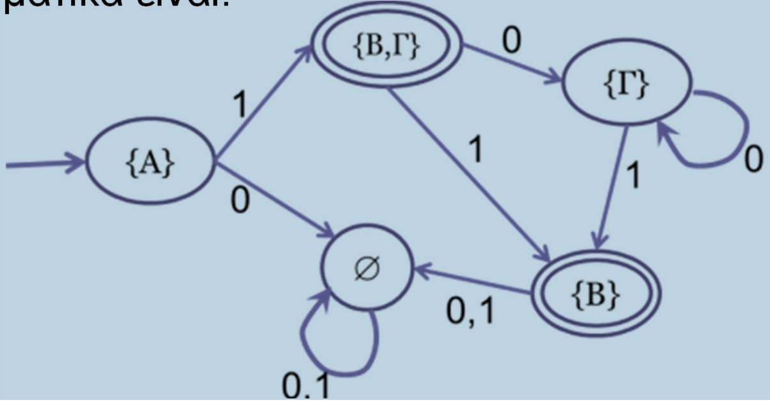
ΠΡΟΧΕΙΡΟ (Πιν. Μεταβ.του ΜΠΑ)

	0	1
Α	∅	{Β,Γ}
Β	∅	∅
Γ	{Γ}	{Β}

ΚΑΘΑΡΟ: Εφαρμόζω τον αλγόριθμο μετατροπής ΜΠΑ=>ΝΠΑ

	0	1
{Α}	∅	{Β,Γ}
∅	∅	∅
{Β,Γ}	{Γ}	{Β}
{Γ}	{Γ}	{Β}
{Β}	∅	∅

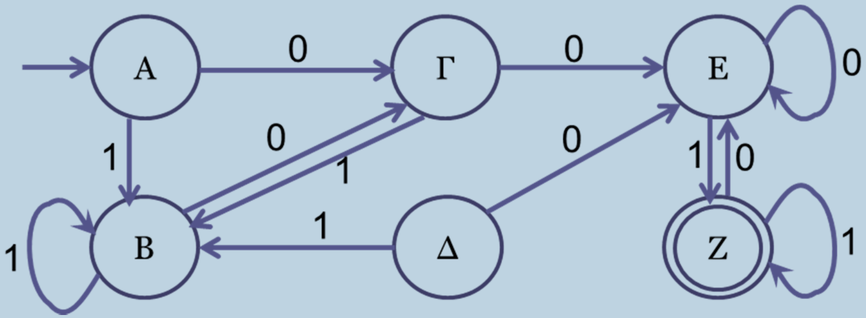
Και σχηματικά είναι:



ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΝΠΑ

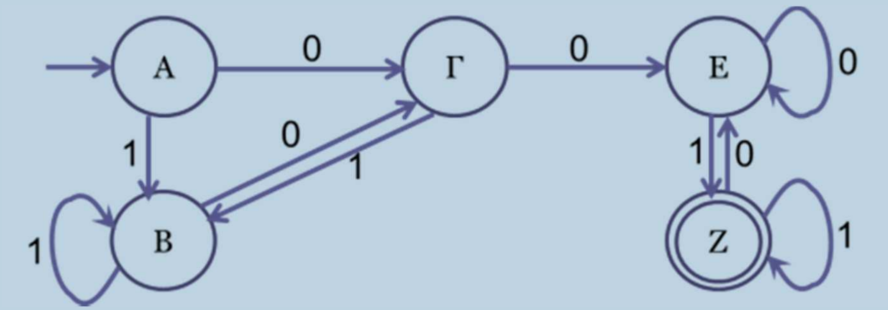
Παράδειγμα:

- Απλοποιούμε το ΝΠΑ του σχήματος:



Κανόνας Απλοποίησης 1: Διαγράφονται οι καταστάσεις που δεν υπάρχει μονοπάτι από την αρχική κατάσταση σε αυτές.

- Απλοποιείται η κατάσταση Δ (δεν υπάρχει μονοπάτι που να οδηγεί σε αυτήν από την αρχική κατάσταση)



Σημείωση:

- Οι κανόνες απλοποίησης είναι επαναληπτικοί. Τους εφαρμόζουμε εωσότου να μην εφαρμόζονται άλλο.

Κανόνας Απλοποίησης 2: Ενοποιούνται καταστάσεις που είναι και οι δύο τελικές ή μη τελικές και έχουν την ίδια συμπεριφορά: Με το ίδιο σύμβολο πηγαίνουν στην ίδια κατάσταση.

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα μετάβασης του ΝΠΑ

		0	1
>	Α	Γ	Β
	Β	Γ	Β
	Γ	Ε	Β
	Ε	Ε	Ζ
f	Ζ	Ε	Ζ

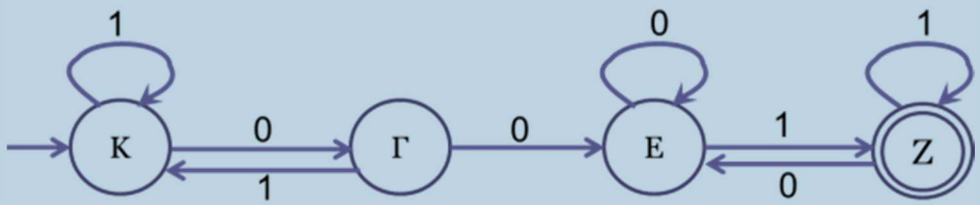
Οι Α,Β ενοποιούνται διότι έχουν την ίδια συμπεριφορά. Μετονομάζω σε Κ

- Προκύπτει ο πίνακας μετάβασης

		0	1
>	Κ	Γ	Κ
	Γ	Ε	Κ
	Ε	Ε	Ζ
f	Ζ	Ε	Ζ

Δεν ενοποιούνται. Η μία είναι τελική και η άλλη μη τελική.

- Και σχηματικά είναι:



Το Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

Ιδιότητα	Συμβ/ρα	Δυναμη
Ισότητα $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$	$0^p 1^p$	uv^2w
Αναλογία $\{0^{2n} 1^{3n} \mid n \geq 0\}$	$0^{2p} 1^{3p}$	uv^2w
Παλινδρομ/τα $\{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$	$a^p b^p c b^p a^p$	uv^2w
Ανισότητα $\{a^n b^m \mid n \leq m\}$	$a^p b^p$	uv^2w
$\{a^n b^m \mid n < m\}$	$a^p b^{p+1}$	uv^2w
$\{a^n b^m \mid n > m\}$	$a^{p+1} b^p$	uv^0w
Συμμετρία στο Κέντρο $\{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$	$a^p b^p c^p d^p$	uv^2w
$\{a^{n+m} b^m c^n \mid n, m \geq 0\}$ $\{a^i b^j c^k \mid i = j + k\}$	$a^{2p} b^p c^p$	uv^2w
$\{a^i b^j c^k \mid i > j + k\}$	$a^{2p+1} b^p c^p$	uv^0w
Παράθεση $\{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 0\}$	$a^p b^p c^p d^p$	uv^2w
$\{a^n b^{n+m} c^n \mid n, m \geq 0\}$ $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$	$a^p b^{2p} c^p$	uv^2w
Διάζευξη Συμβ/ρών $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ή } j = k\}$	$a^p b^p c^p$	uv^2w

$L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι κανονική. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^p$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $2p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvw$ με $0 < |v|$ και $|uv| \leq p$. Επιπλέον για κάθε φυσικό k θα ισχύει $uv^k w \in L$

Επειδή $|uv| \leq p$ έπεται ότι το uv θα περιέχεται στο 0^p. Έτσι η λέξη s θα αποτελείται από τα εξής τμήματα:

$$\begin{cases} u = 0^i, & i \geq 0 \\ v = 0^j, & j > 0 \\ w = 0^{p-i-j} 1^p \end{cases}$$

Η συμβολοσειρά uv^2w θα είναι $0^{p+j} 1^p$ συνεπώς δεν θα ανήκει στην L αφού δεν θα έχει ίσα 0 και 1

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι κανονική.

(1) Επιλέγουμε μια **συμβολοσειρά s** που ανήκει στην γλώσσα που το πρώτο σύμβολο είναι
- (α) υψωμένο τουλάχιστον στην p
- (β) ανήκει οριακά στην γλώσσα

(2) Υπολογίζουμε το μήκος της συμβολοσειράς που επιλέξαμε στο (1)

(3) Το uv θα περιέχεται στο πρώτο σύμβολο που έχουμε επιλέξει.

(4) Το πρώτο σύμβολο της s υψωμένο στην i

(5) Το πρώτο σύμβολο της s υψωμένο στην j

(6) Ακριβώς ίδια συμβολοσειρά με την s όπου στον εκθέτη του 1ου σύμβολου θα έχει αφαιρεθεί το $-i-j$

(7) Θα είναι:
- uv^2w ή
- uv^0w

(8) Αντίστοιχα από την επιλογή μας στο (7)
- Θέτουμε $+j$ στον 1ο εκθέτη της s.
- Θέτουμε $-j$ στον 1ο εκθέτη της s.

(9) Αιτιολογούμε γιατί η συμβολοσειρά που έχουμε δεν ανήκει στην γλώσσα.

ΔΙΑΚΡΙΝΟΜΕΝΕΣ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΕΣ

Έστω L μια κανονική γλώσσα. Ορίζουμε ότι:

- Δύο συμβολοσειρές x,y είναι **<u>διακρινόμενες ανά δυο</u>** αν και μόνο αν υπάρχει συμβολοσειρά z τέτοια ώστε μια μόνο από τις xz και yz να ανήκει στην γλώσσα.
- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν μια γλώσσα έχει n διακρινόμενες ανά δύο συμβολοσειρές, τότε το αυτόματό της θα πρέπει να έχει τουλάχιστον n καταστάσεις.

Χρήση του ορισμού για να αποδείξουμε ότι η γλώσσα $\mathrm{L} = \{0^n 1^n | \, n \geq 0\}$ δεν είναι κανονική

<u>Απόδειξη:</u>

Υποθέτουμε ότι είναι κανονική. Συνεπώς θα υπάρχει πεπερασμένο αυτόματο με n καταστάσεις που την αναγνωρίζει.

Θεωρούμε τις συμβολοσειρές 0, 0^2, 0^3, 0^4,…,0^m (όπου m>n)

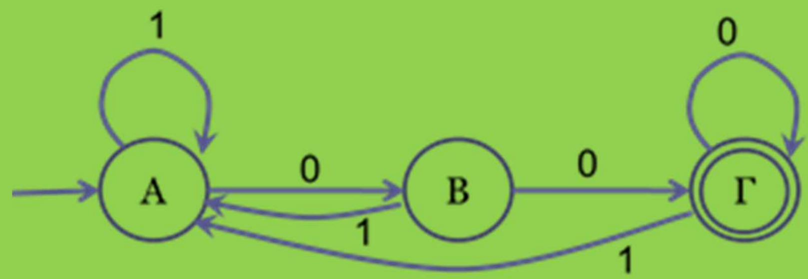
Οι παραπάνω συμβολοσειρές είναι διακρινόμενες ανά δύο: Π.χ. Έστω 0^i και 0^j με i $\neq j$. Πρέπει να βρούμε ένα z τέτοιο ώστε ένα μόνο από τα $0^i z$ και $0^j z$ να ανήκει στην γλώσσα. Επιλέγουμε $z = 1^i$ οπότε $0^i 1^i$ ανήκει στην γλώσσα και $0^j 1^i$ δεν ανήκει στην γλώσσα. Συνεπώς οι m συμβολοσειρές είναι διακρινόμενες ανά δύο.

Συνεπώς κάθε αυτόματό της θα έχει τουλάχιστον m>n καταστάσεις.

Άτοπο. Άρα η L δεν είναι κανονική.

Χρήση του ορισμού των διακρινόμενων συμβολοσειρών για να αποδείξουμε ότι ένα ΝΠΑ έχει ελάχιστο πλήθος καταστάσεων.

<u>Απόδειξη:</u> Το ακόλουθο ΝΠΑ της γλώσσας L={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w τελειώνει με 00} έχει ελάχιστο πλήθος καταστάσεων:



Οι συμβολοσειρές $s_1 = \varepsilon$, $s_2 = 0$, $s_3 = 00$ είναι διακρινόμενες ανά δύο:

s_1 και s_2 είναι διακρινόμενες. Επιλέγω $z = 0$ και έχουμε:
- $s_1 z = \varepsilon 0 = 0 \notin \mathrm{L}$
- $s_2 z = \quad 00 \in \mathrm{L}$

s_1 και s_3 είναι διακρινόμενες. Επιλέγω $z = \varepsilon$ και έχουμε:
- $s_1 z = \varepsilon\varepsilon \quad = \varepsilon \notin \mathrm{L}$
- $s_3 z = 00\varepsilon = 00 \in \mathrm{L}$

s_2 και s_3 είναι διακρινόμενες. Επιλέγω $z = \varepsilon$ και έχουμε:
- $s_2 z = 0\varepsilon \quad = 0 \notin \mathrm{L}$
- $s_3 z = 00\varepsilon = 00 \in \mathrm{L}$

Συνεπώς οποιοδήποτε ΝΠΑ της L απαιτεί τουλάχιστον 3 καταστάσεις.