

ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ23

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Οι 8-ψηφίες συμβολοσειρές που κατασκευάζονται με τα 10 ψηφία $\{0,1,2,\dots,9\}$ είναι:

1. 8^{10} αν δεν υπάρχουν περιορισμοί στην επιλογή των ψηφίων.
2. 10^5 αν μόνο τα περιττά ψηφία μπορούν να χρησιμοποιηθούν.
3. $8!/(4!4!)$ αν επιτρέπονται 4 οκτάρια και 4 εννιάρια
4. 3^8 αν μόνο τα πολλαπλάσια του 3 μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

(2) Έστω A σύνολο με n στοιχεία:

1. Ο αριθμός των υποσυνόλων με k στοιχεία είναι όσα και ο συντελεστής του x^{n-k} στην $(1+x)^n$
2. Αν το n είναι άρτιος, τα υποσύνολα του A με περισσότερα από τα μισά στοιχεία είναι ίσα με τα υποσύνολα του A με λιγότερα από τα μισά στοιχεία.
3. Οι τρόποι για να επιλέξουμε r στοιχεία του A , όταν μετά από κάθε επιλογή το στοιχείο επανατοποθετείται είναι $\binom{n+r-1}{r}$
4. Οι τρόποι για να διατάξουμε r στοιχεία του A , είναι n^r

(3) Δίδεται το σύνολο τύπων $T = \{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2, \neg p_1, \neg p_2 \vee p_3\}$. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές ισχύουν;

1. $T \models p_2 \wedge p_3$
2. $T \models p_1 \rightarrow p_2 \wedge p_3$
3. $T \models p_1 \vee p_2 \rightarrow \neg p_3$
4. $T \models p_3 \rightarrow p_2 \wedge p_1$

(4) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Ο τύπος $\exists x \forall y [x \neq y \rightarrow P(x, y)]$

1. αληθεύει στο γράφημα C_4
2. αληθεύει στο γράφημα K_5
3. αληθεύει στο γράφημα P_3
4. αληθεύει στο γράφημα $K_{1,3}$

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.

1. Ο τύπος $\exists x \exists y \exists z [P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z]$ αληθεύει στο γράφημα C_4
2. Ο τύπος $\forall x \forall y [x \neq y \rightarrow \exists z (P(x, z) \wedge P(z, y))]$ αληθεύει στο γράφημα K_4
3. Ο τύπος $\exists x [\neg \exists y P(x, y) \wedge \forall z (\neg \exists y P(z, y) \rightarrow z \approx x)]$ αληθεύει στο γράφημα K_1
4. Ο τύπος $\exists x \forall y [x \neq y \rightarrow P(x, y)]$ αληθεύει στο γράφημα W_5

(6) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

1. Αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, τότε έχει κύκλο Euler
2. Αν το γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε δεν περιέχει γέφυρα.
3. Αν το γράφημα έχει κύκλο Euler, τότε δεν περιέχει γέφυρα.
4. Αν το γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2.

(7) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που έχει κύκλο Euler και κύκλο Hamilton:

1. Αν προστεθεί μία ακμή, το γράφημα εξακολουθεί να έχει κύκλο Hamilton.
2. Αν προστεθεί μία ακμή, το γράφημα εξακολουθεί να έχει κύκλο Euler.
3. Αν αφαιρεθεί μία ακμή, το γράφημα εξακολουθεί να έχει κύκλο Hamilton.
4. Αν αφαιρεθεί μία ακμή, το γράφημα εξακολουθεί να έχει κύκλο Euler.

(8) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που έχει κύκλο Euler:

1. Το γράφημα δεν περιέχει σημείο κοπής.
2. Το γράφημα δεν περιέχει γέφυρες.
3. Το γράφημα είναι συνδεόμενο.
4. Το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Β' ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1

(Ερώτημα 1) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τις συμβολοσειρές μήκους 10 που κατασκευάζονται με τα γράμματα A,B,Γ,Δ που περιέχουν το πολύ 2A, τουλάχιστον 2B και τα Γ είναι περισσότερα από τα Δ.

(Ερώτημα 2) Σε ένα τραίνο επιβιβάζονται 10 επιβάτες. Το τραίνο σταματά συνολικά σε 12 σταθμούς (περιλαμβάνοντας τον τερματικό σταθμό). Να σχηματίσετε γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον όρο που δίνει τους τρόπους αποβίβασης των επιβατών όταν:

- i) Μας ενδιαφέρει μόνο το πλήθος των επιβατών που κατεβαίνουν σε κάθε στάση
- ii) Μας ενδιαφέρει εκτός από το πλήθος και το ποιοι επιβάτες κατεβαίνουν σε κάθε στάση αλλά όχι η σειρά αποβίβασής τους.
- iii) Μας ενδιαφέρει εκτός από το πλήθος και το ποιοι επιβάτες κατεβαίνουν σε κάθε στάση αλλά και η σειρά αποβίβασής τους.

Άσκηση 2

(Ερώτημα 1)

Δείξτε ότι $\{\neg\chi \rightarrow \neg\varphi, \neg\chi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \varphi)\} \vdash \neg\chi \rightarrow \varphi$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού.

(Ερώτημα 2)

Δείξτε ότι $\{\chi \rightarrow \neg\psi, \varphi\} \vdash \chi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ με χρήση του θεωρήματος απαγωγής και του θεωρήματος απαγωγής σε άτοπο.

(Ερώτημα 3) Θεωρούμε τους παρακάτω τύπους μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P :

$$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$$

$$\varphi_2 \equiv \forall x \forall y (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y)$$

Ερμηνεύουμε τους τύπους σε κατευθυνόμενα γραφήματα που δεν έχουν παράλληλες ακμές (μπορεί όμως να έχουν ανακυκλώσεις) όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ δηλώνει ότι «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y ».

- α) Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα) τι δηλώνουν οι τύποι φ_1 , φ_2 στην συγκεκριμένη ερμηνεία
- β) Να κατασκευάσετε ένα γράφημα 3 κορυφών που αληθεύουν οι παραπάνω τύποι.

Άσκηση 3

- (1) Κατασκευάστε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με 5 κορυφές και 9 ακμές. Έχει κύκλο Euler;
- (2) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 100 κορυφές και 4949 ακμές που να έχει κύκλο Euler.