ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ/2

Μάθημα 5.3:
Επίπεδα Γραφήματα

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Νέοι Ορισμοί (Επίπεδο Γράφημα, Ομοιομορφικά Γραφήματα, Θεώρημα Kuratowski)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β
- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ
- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

Β. Θεωρία
1. Επίπεδο Γράφημα
1. Ορισμοί Επίπεδων Γραφημάτων

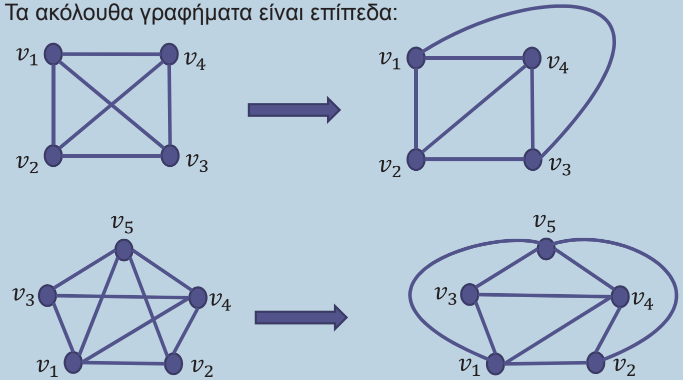
Ορισμός:
Ένα γράφημα $G(V,E)$ είναι **επίπεδο**, αν μπορούμε να το απεικονίσουμε στο επίπεδο, χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.

Για να δείξουμε ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο: Ζωγραφίζουμε ξανά τις ακμές του γραφήματος χωρίς αυτές να τέμνονται

Παράδειγμα: Τα ακόλουθα γραφήματα είναι επίπεδα:

$G_1(V_1,E_1)$

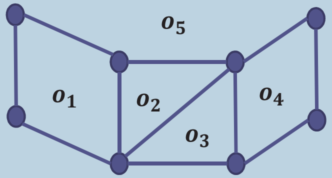
$G_2(V_2,E_2)$



Β. Θεωρία
1. Επίπεδο Γράφημα
1. Ορισμοί Επίπεδων Γραφήματων

Συμπληρωματικοί Ορισμοί για επίπεδα γραφήματα:
- Μία απεικόνιση στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του λέγεται **επίπεδη αποτύπωση** του γραφήματος
- Κάθε τμήμα του επιπέδου που ορίζεται από άπλο κύκλο της αποτύπωσης λέγεται **όψη** της αποτύπωσης
- **Το πλήθος των όψεων**: Συμβολίζεται με **o** και πρόσοχη ότι συμπεριλαμβάνει πάντα και την εξωτερική όψη
- **Βαθμός της όψης** $\boldsymbol{o_i}$ το πλήθος των ακμών που περιέχει ο απλός κύκλος της όψης (συμβολίζεται με $\mathbf{d}(\boldsymbol{o_i})$)

Παράδειγμα: Στην ακόλουθη επίπεδη αποτύπωση έχουμε 5 όψεις



Και ισχύει για τους βαθμούς των όψεων:

$$\mathrm{d}(o_1) = 4,\ \mathrm{d}(o_2) = 3,\ \mathrm{d}(o_3) = 3,\ \mathrm{d}(o_4) = 4,\ \mathrm{d}(o_5) = 8$$

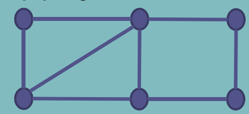
Β. Θεωρία
1. Επίπεδο Γράφημα
2. Το άθροισμα των βαθμών των όψεων ≤ 2m

Η ακόλουθη πρόταση ισχύει σε κάθε επίπεδο γράφημα:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{o} \boldsymbol{d(o_i) \le 2m}}$$

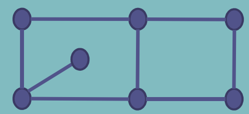
Δηλαδή **το άθροισμα των βαθμών των όψεων είναι μικρότερο ή ίσο του 2m**

Συγκεκριμένα:
- Αν κάθε ακμή είναι μέρος ακριβώς 2 κύκλων, όπως π.χ. στο γράφημα



Τότε ισχύει $\sum_{i=1}^{o} d(o_i) = 2m$ (κάθε ακμή μετριέται σε 2 όψεις)

- Αν υπάρχει ακμή που είναι μέρος μόνο ενός κύκλου, όπως π.χ. στο γράφημα



Τότε ισχύει $\sum_{i=1}^{o} d(o_i) < 2m$ (Υπάρχει ακμή που μετριέται σε 1 όψη)

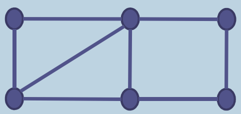
Β. Θεωρία
1. Επίπεδο Γράφημα
3. Τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler ισχύει σε κάθε **επίπεδο συνδεόμενο γράφημα** και σχετίζει το πλήθος των όψεων με το πλήθος των ακμών και των κορυφών του γραφήματος:

$$\boxed{\boldsymbol{o = m - n + 2}}$$

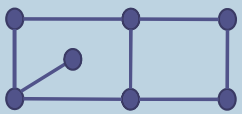
(Ο τύπος ισχύει για οποιαδήποτε επίπεδη αποτύπωση του γραφήματος)

Παραδείγματα:
- Στο γράφημα



Επαληθεύουμε τον τύπο του Euler: $o = m - n + 2 \Rightarrow o = 8 - 6 + 2 = 4$

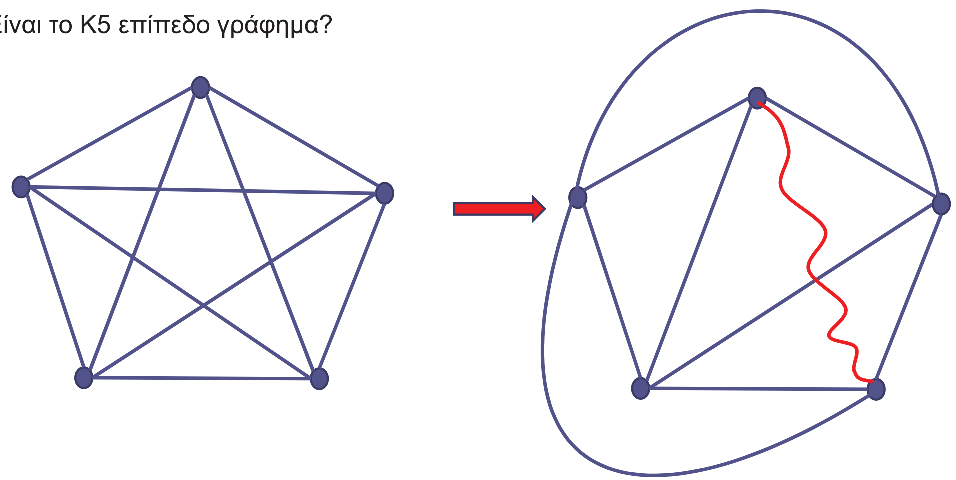
- Στο γράφημα



Επαληθεύουμε τον τύπο του Euler: $o = m - n + 2 \Rightarrow o = 8 - 7 + 2 = 3$

Β. Θεωρία
2. Το Θεώρημα Kuratowski
1. Το K5 δεν είναι επίπεδο γράφημα

➢ Είναι το K5 επίπεδο γράφημα?



Β. Θεωρία
2. Το Θεώρημα Kuratowski
1. Το K5 δεν είναι επίπεδο γράφημα

Θεώρημα: Το K_5 δεν είναι επίπεδο γράφημα

Απόδειξη: Έστω ότι το K_5 είναι επίπεδο γράφημα και έστω μία επίπεδη αποτύπωσή του.

Ισχύει για το K_5 ότι:
- Έχει $\mathrm{n} = 5$ κορυφές
- Έχει $\mathrm{m} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ ακμές.
- Από τον τύπο του Euler θα έχει $o = m - n + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ όψεις

Αφού το γράφημα είναι απλό:
- Δεν έχει ανακυκλώσεις (όψεις βαθμού 1)
- Δεν έχει παράλληλες ακμές (όψεις βαθμού 2)
- Συνεπώς όλες οι όψεις θα έχουν βαθμό ≥ 3
- Συνεπώς για το άθροισμα των βαθμών των όψεων θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{7} d(o_i) = d(o_1) + d(o_2) + \cdots + d(o_7) \geq 3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow \sum_{i=1}^{7} d(o_i) \geq 21$$

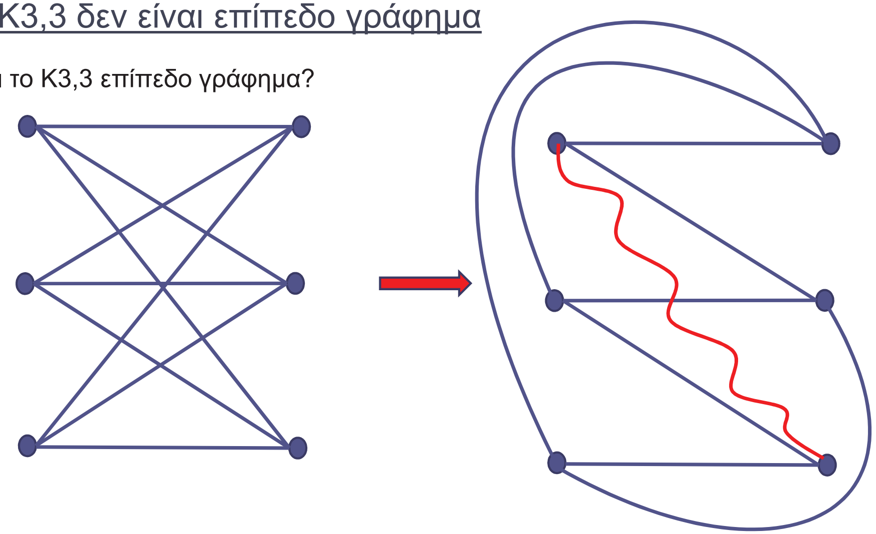
Επίσης για το άθροισμα των βαθμών των όψεων ισχύει

$$\sum_{i=1}^{7} d(o_i) \leq 2m = 20 \Rightarrow \sum_{i=1}^{7} d(o_i) \leq 20$$

Άτοπο. Άρα το K5 δεν είναι επίπεδο γράφημα.

Β. Θεωρία
2. Το Θεώρημα Kuratowski
2. Το K3,3 δεν είναι επίπεδο γράφημα

- Είναι το K3,3 επίπεδο γράφημα?



Β. Θεωρία
2. Το Θεώρημα Kuratowski
2. Το K3,3 δεν είναι επίπεδο γράφημα

Θεώρημα: Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο γράφημα

Απόδειξη: Έστω ότι το $K_{3,3}$ είναι επίπεδο γράφημα και έστω μία επίπεδη αποτύπωσή του.

Ισχύει για το $K_{3,3}$ ότι:
- Έχει $\mathrm{n} = 6$ κορυφές
- Έχει $\mathrm{m} = 3 \cdot 3 = 9$ ακμές.
- Από τον τύπο του Euler θα έχει $o = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ όψεις

Αφού το γράφημα είναι απλό:
- Δεν έχει ανακυκλώσεις (όψεις βαθμού 1)
- Δεν έχει παράλληλες ακμές (όψεις βαθμού 2)
- Δεν έχει όψεις βαθμού 3 (αφού είναι διμερές και δεν έχει κύκλους περιττού μήκους)
- Συνεπώς όλες οι όψεις θα έχουν βαθμό ≥ 4
- Συνεπώς για το άθροισμα των βαθμών των όψεων θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{5} d(o_i) = d(o_1) + d(o_2) + \cdots + d(o_5) \geq 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} d(o_i) \geq 20$$

Επίσης για το άθροισμα των βαθμών των όψεων ισχύει

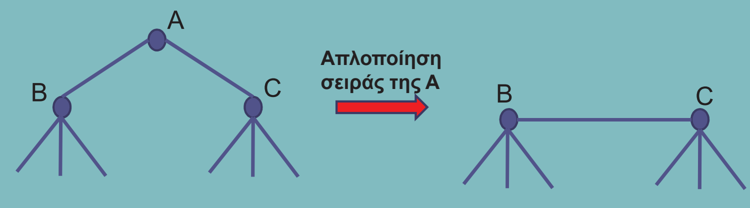
$$\sum_{i=1}^{5} d(o_i) \leq 2m = 18 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} d(o_i) \leq 18$$

Άτοπο. Άρα το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο γράφημα.

Β. Θεωρία
2. Το θεώρημα Kuratowski
3. Ομοιομορφικά Γραφήματα

Δύο γραφήματα καλούνται **ομοιομορφικά** αν μπορούν να απλοποιηθούν (με απλοποιήσεις σειράς) σε ισομορφικά γραφήματα

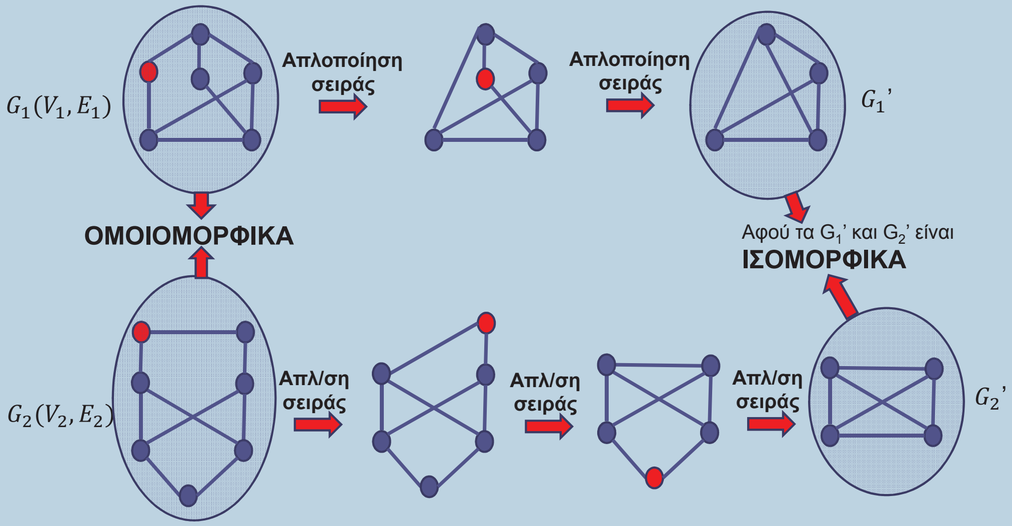
Απλοποίηση σειράς είναι μια πράξη, πάνω σε γράφημα που «απαλείφει» κορυφές βαθμού 2:



Παρατηρούμε ότι:
- Οποιοδήπτε γράφημα περιέχει ομοιομορφικό του K_5 δεν είναι δυνατόν να είναι επίπεδο γράφημα.
- Οποιοδήποτε γράφημα περιέχει ομοιομορφικό γράφημα του $K_{3,3}$ δεν είναι δυνατόν να είνει επίπεδο γράφημα.

Β. Θεωρία
2. Το θεώρημα Kuratowski
3. Ομοιομορφικά Γραφήματα

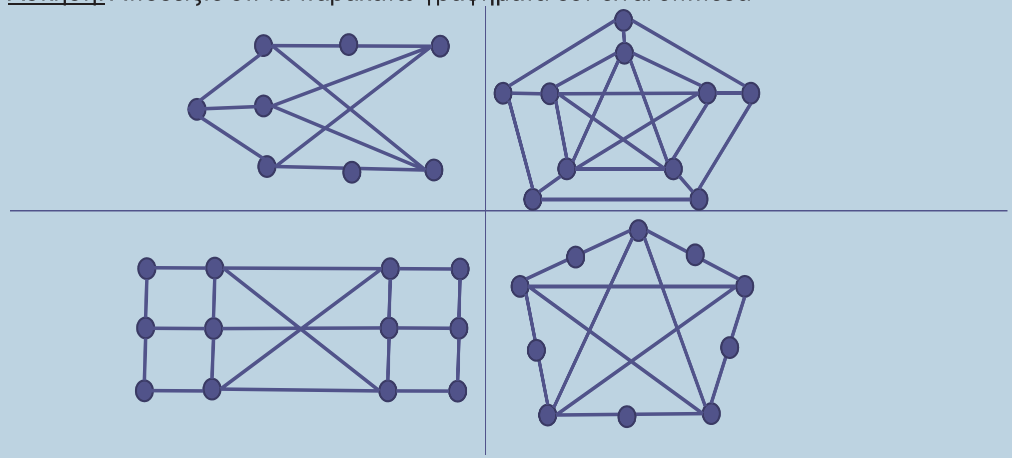
Παράδειγμα: Το G_1 είναι ομοιομορφικό του G_2



Β. Θεωρία
2. Το θεώρημα Kuratowksi
4. Το θεώρημα του Kuratowksi

Θεώρημα Kuratowski: Ένα γράφημα είναι επίπεδο **αν και μόνο αν** δεν περιέχει το K5 ή το K3,3 (ή ομοιομορφικό αυτών)

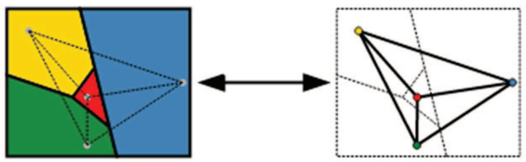
Άσκηση: Αποδείξτε ότι τα παρακάτω γραφήματα δεν είναι επίπεδα



Β. Θεωρία
3. Δύο ακόμη θεωρήματα
1. Κάθε επίπεδος γράφος είναι 4-χρωματίσιμος

Θεώρημα: Κάθε επίπεδος γράφος είναι 4-χρωματίσιμος.

- Κάθε γεωγραφικός χάρτης αντιστοιχεί σε έναν επίπεδο γράφο
- Ο γράφος έχει για κορυφές τις χώρες και βάζουμε ακμή μεταξύ των γειτονικών περιοχών:



- Συνεπώς από το θεώρημα έπεται ότι κάθε χάρτης είναι 4-χρωματίσιμος

Β. Θεωρία
3. Δύο ακόμη θεωρήματα
2. Σε κάθε απλό επίπεδο γράφημα ισχύει m ≤ 3n-6

Θεώρημα: Σε κάθε απλό επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές ισχύει m ≤ 3n-6

Απόδειξη:

Αφού το γράφημα είναι απλό:
- Δεν έχει ανακυκλώσεις (όψεις βαθμού 1)
- Δεν έχει παράλληλες ακμές (όψεις βαθμού 2)
- Συνεπώς όλες οι όψεις θα έχουν βαθμό ≥ 3
- Συνεπώς για το άθροισμα των βαθμών των όψεων θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{o} d(o_i) = d(o_1) + d(o_2) + \cdots + d(o_o) \geq 3 \cdot o \Longrightarrow \sum_{i=1}^{o} d(o_i) \geq 3o$$

Επίσης για το άθροισμα των βαθμών των όψεων ισχύει

$$\sum_{i=1}^{o} d(o_i) \leq 2m$$

Από τις (1),(2) έπεται:

$$3o \leq \sum_{i=1}^{o} d(o_i) \leq 2m \Longrightarrow 3o \leq 2m$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler (o = m-n+2) στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$3o \leq 2m \Longrightarrow 3(m-n+2) \leq 2m \Longrightarrow$$
$$3m - 3n + 6 \leq 2m \Longrightarrow 3m - 2m \leq 3n - 6 \Longrightarrow$$
$$m \leq 3n - 6$$

Β. Θεωρία
Σύνοψη για τα Επίπεδα Γραφήματα

- Κάθε επίπεδος γράφος είναι 4-χρωματίσιμος.
- Σε κάθε επίπεδο γράφημα ισχύει ότι:
  - Το άθροισμα των βαθμών των όψεων είναι ≤ 2m
  - Αν είναι και συνδεόμενο ισχύει ο τύπος του Euler: o=m-n+2
- Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν:
  - Μπορούμε να το ζωγραφίσουμε στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του!
  - Δεν περιέχει ως υπογράφημα το K_5 ή το $K_{3,3}$ και δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K_5 ή του $K_{3,3}$ (από θ.Kuratowski)
- Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο αν:
  - Είναι απλό και ισχύει m > 3n-6
  - Περιέχει ως υπογράφημα το K_5 (από θ.Kuratowski)
  - Περιέχει ως υπογράφημα το $K_{3,3}$ (από θ.Kuratowski)
  - Περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K_5 (από θ.Kuratowski)
  - Περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του $K_{3,3}$ (από θ.Kuratowski)

Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 1

Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν επίπεδο συνδεόμενο γράφο G με n κορυφές και m ακμές με m>2n-4 και ο οποίος να μην περιέχει κύκλους μήκους <4. Εξηγείστε αν μπορεί να κατασκευαστεί ένας τέτοιος γράφος ή όχι και γιατί.

Απόδειξη:

Από την εκφώνηση:
- Το γράφημα δεν έχει όψεις βαθμού 1
- Το γράφημα δεν έχει όψεις βαθμού 2
- Το γράφημα δεν έχει όψεις βαθμού 3
- Συνεπώς όλες οι όψεις θα έχουν βαθμό ≥ 4. Συνεπώς ισχύει για το άθροισμα βαθμών όψεων:

$$\sum_{i=1}^{o} d(o_i) = d(o_1) + d(o_2) + \cdots + d(o_o) \geq 4 \cdot o \Longrightarrow \sum_{i=1}^{o} d(o_i) \geq 4o$$

Επίσης για το άθροισμα των βαθμών των όψεων ισχύει

$$\sum_{i=1}^{o} d(o_i) \leq 2m$$

Από τις (1),(2) έπεται:

$$4o \leq \sum_{i=1}^{o} d(o_i) \leq 2m \Longrightarrow 4o \leq 2m$$

Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 1

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler (o = m-n+2) στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$4o \leq 2m \Longrightarrow$
$4(m-n+2) \leq 2m \Longrightarrow$
$4m-4n+8 \leq 2m \Longrightarrow$
$4m-2m \leq 4n-8 \Longrightarrow$
$2m \leq 4n-8 \Longrightarrow$
$m \leq 2n-4$

Συνεπώς δεν μπορεί να κατασκευαστεί τέτοιο γράφημα.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 2

Να δείξετε ότι αν G=(V,E) είναι ένα απλό επίπεδο γράφημα με n=11 κορυφές, τότε το συμπλήρωμά του δεν είναι επίπεδο γράφημα.

Απόδειξη: Θεωρούμε ότι υπάρχει απλό επίπεδο γράφημα που τόσο αυτό όσο και το συμπλήρωμά του είναι επίπεδο γράφημα.

Για το αρχικό γράφημα ισχύει η σχέση: m≤3n-6, συνεπώς m≤27 (1)

Συμβολίζουμε με m' τις ακμές του συμπληρώματος.
Για το συμπλήρωμα θα ισχύει η σχέση: m'≤3n-6, συνεπώς m'≤27 (2)

Από τις (1),(2) έπεται ότι m+m'≤54 (3)

Ωστόσο για τις ακμές του γραφήματος και του συμπληρώματος ισχύει η σχέση m+m'=n(n-1)/2
Συνεπώς ισχύει m+m'=11*10/2=55 (4)

Από τις (3),(4) έχουμε άτοπο.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 3

Έστω δύο ομοιομορφικά γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$. Να σχολιάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων και να τεκμηριώσετε τον ισχυρισμό σας (αν η πρόταση είναι ψευδής, πρέπει να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα, αν η πρόταση είναι αληθής, πρέπει να την αποδείξετε):
α) Το γράφημα *G* έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν το γράφημα *H* έχει κύκλο Euler.
β) Το γράφημα *G* έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα *H* έχει κύκλο Hamilton.

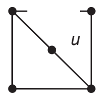
Απόδειξη:
(α) Γνωρίζουμε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Παρατηρούμε επίσης ότι όταν κάνουμε απλοποίηση σειράς σε ένα συνεκτικό γράφημα, το νέο γράφημα παραμένει συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής που μένει (εκτός από αυτήν που απλοποιήσαμε) παραμένει ίδιος. Άρα με διαδοχικές απλοποιήσεις σειράς τόσο η συνεκτικότητα όσο και η ύπαρξη μόνο άρτιων βαθμών διατηρείται, συνεπώς διατηρείται και η ύπαρξη κύκλου Euler.

Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό, έστω ότι με διαδοχικές απλοποιήσεις σειράς τα γραφήματα *G* και *H* καταλήγουν στα ισομορφικά γραφήματα G_1 και H_1. Το γράφημα *G* έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν το G_1 έχει κύκλο Euler, αν και μόνο αν το ισομορφικό γράφημα H_1 έχει κύκλο Euler (καθώς η ύπαρξη κύκλου Euler είναι αναλλοίωτη ιδιότητα), αν και μόνο αν το γράφημα *H* έχει κύκλο Euler.

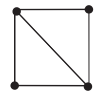
Γ. Λυμένες Ασκήσεις
Ασκηση 3

(β) Η πρόταση δεν ισχύει. Ο κύκλος Hamilton δεν περιέχει αναγκαστικά όλες τις ακμές, περιέχει όλες τις κορυφές. Μπορεί λοιπόν να υπάρχει κύκλος Hamilton στο γράφημα που προκύπτει μετά από απλοποίηση σειράς στην κορυφή *u*, ενώ στο αρχικό να μην υπάρχει τρόπος να επισκεφτούμε με κύκλο την κορυφή *u*. Σαν αντιπαράδειγμα δίνουμε το εξής

G



H



Τα *G* και *H* είναι ομοιομορφικά (το *H* προκύπτει από το *G* με απλοποίηση σειράς στην κορυφή *u*), το *H* έχει κύκλο Hamilton ενώ το *G* δεν έχει.

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Ποιος είναι ο αριθμός των κορυφών ενός συνδεδεμένου επίπεδου γραφήματος με 10 όψεις, στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό 4;

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Σχεδιάστε ένα επίπεδο γράφημα με καθεμιά από τις παρακάτω ιδιότητες ή εξηγείστε γιατί ένα τέτοιο γράφημα δεν υπάρχει.
(α) Ένα γράφημα 7 κορυφών, όλες με βαθμό 3.
(β) Ένα γράφημα με 5 όψεις και 10 ακμές.
(γ) Ένα γράφημα με 6 κορυφές και 14 ακμές

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Αποδείξτε ότι κάθε επίπεδο γράφημα με λιγότερες από 12 κορυφές έχει μία κορυφή βαθμού το πολύ 4.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Κάθε υπογράφημα επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο γράφημα
2. Κάθε υπογράφημα μη επίπεδου γραφήματος είναι μη επίπεδο γράφημα
3. Ένα επίπεδο γράφημα με 10 κορυφές, 11 ακμές και 5 όψεις, δεν είναι συνδεόμενο
4. Όταν σε ένα γράφημα εφαρμοστεί απλοποίηση σειράς, το προκύπτον γράφημα είναι υπογράφημα του αρχικού.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Όλα τα συνδεόμενα επίπεδα γραφήματα με τον ίδιο αριθμό κορυφών και ακμών έχουν τον ίδιο αριθμό όψεων.
2. Κάθε συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με άρτιο αριθμό όψεων έχει κύκλο του Euler.
3. Υπάρχουν επίπεδα γραφήματα που δεν έχουν καμία όψη.
4. Μπορούν να κατασκευαστούν δύο ομοιομορφικά επίπεδα γραφήματα που το ένα έχει κύκλο Hamilton και το άλλο όχι.

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Θεωρούμε ένα απλό επίπεδο και συνδεόμενο γράφημα που όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό 4. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κορυφών ενός τέτοιου γραφήματος; Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο γράφημα.

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνδεόμενο απλό 3-κανονικό επίπεδο γράφημα που να περιέχει ακριβώς 2 φορές το C3 σαν επαγόμενο υπογράφημα και να έχει λιγότερες από 6 κορυφές.

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Να δείξετε ότι σε κάθε απλό διχοτομίσιμο, επίπεδο και συνδέομενο γράφημα που δεν περιέχει κύκλο μήκους 4, ισχύει η σχέση m ≤ (3n-6)/2

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Θεωρούμε απλά επίπεδα γραφήματα με $n \geq 3$ κορυφές τα οποία μπορούν να αποτυπωθούν στο επίπεδο ώστε όλες οι κορυφές τους να βρίσκονται στην εξωτερική όψη.

1. Να σχεδιάσετε ένα μεγιστοτικό τέτοιο γράφημα με $n = 8$ κορυφές, δηλαδή ένα γράφημα στο οποίο αν προστεθεί μια οποιαδήποτε ακμή, αυτό δεν μπορεί πλέον να αποτυπωθεί στο επίπεδο με όλες τις κορυφές του στην εξωτερική όψη. Αν m είναι ο αριθμός των ακμών του γραφήματος που σχεδιάσατε, να επιβεβαιώσετε ότι ισχύει η σχέση $m = 2n – 3$.
2. Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές έχει αριθμό ακμών $m \leq 2n – 3$.
   Υπόδειξη: *Παρατηρήστε ότι ο βαθμός της εξωτερικής όψης είναι n, και εργαστείτε όπως στην απόδειξη του ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει αριθμό ακμών m ≤ 3n – 6.*
3. Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο γράφημα έχει μία τουλάχιστον κορυφή με βαθμό μικρότερο του 4.