# ΣΥΝΟΛΟ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΩΝ ΤΥΠΩΝ



**Ένα σύνολο τύπων Τ** θα λέμε ότι είναι **ικανοποιήσιμο** αν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- Πιο τυπικά αν υπάρχει αποτίμηση α: $\alpha(\phi)=A\ \forall \phi \in T$

**Παράδειγμα:** Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T=\{p\to q, p\vee\neg q\}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

| $p$ | $q$ | $p\to q$ | $p\vee\neg q$ |
|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Α |
| Ψ | Α | Α | Ψ |
| Ψ | Ψ | Α | Α |

Παρατηρούμε ότι στην αποτίμηση p=A,q=A αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων, άρα είναι ικανοποίησιμο

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το συνεπές σύνολο τύπων

**ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΣΥΝΕΠΕΣ**

(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

**Ένα σύνολο τύπων Τ** θα λέμε ότι είναι **μη ικανοποιήσιμο** αν δεν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- …δηλαδή δεν είναι ικανοποίησιμο!

**Παράδειγμα:** Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T=\{q\to p, p\wedge\neg q, p\leftrightarrow q\}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

| $p$ | $q$ | $q\to p$ | $p\wedge\neg q$ | $p\leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Ψ | Α |
| Α | Ψ | Α | Α | Ψ |
| Ψ | Α | Ψ | Ψ | Ψ |
| Ψ | Ψ | Α | Ψ | Α |

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους Α ταυτόχρονα, άρα είναι ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το αντιφατικό σύνολο τύπων

**ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟ**

(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

Έστω Σύνολο Τύπων $T$ και τύπος $\varphi$. Θα λέμε ότι :

- το σύνολο τύπων $T$ **ταυτολογικά συνεπάγεται** τον τύπο $\varphi$ ή
- Ο $\varphi$ είναι **σημασιολογική συνέπεια** του $T$
- και συμβολίζουμε με $\boldsymbol{T \vDash \varphi}$

αν και μόνο αν

- **για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του $T$ ικανοποιείται και ο $\varphi$**

Ο συμβολισμός: $\vDash \boldsymbol{\varphi}$

- Θα σημαίνει ότι ο τύπος φ αληθεύει ανεξαρτήτως υποθέσεων
- που σημαίνει ότι ο τύπος **φ είναι ταυτολογία**.($\emptyset \vDash \boldsymbol{\varphi}$ )

Ο συμβολισμός: $\boldsymbol{\varphi \equiv \psi}$

- Θα σημαίνει ότι οι τύποι φ και ψ είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι**
- Ορίζεται ως: $\varphi \vDash \psi$ και $\psi \vDash \varphi$

Θα ισχύει ότι $\boldsymbol{\varphi \equiv \psi}$ αν οι φ,ψ έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας

1. Αν ο **φ είναι ταυτολογία** ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
2. Αν το **T είναι αντιφατικό** ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
3. **Εξετάζουμε με βάση τον ορισμό**. Βρίσκουμε τις αποτιμήσεις που ικανοποιούνται οι τύποι του T (όλοι ταυτόχρονα). Σε αυτές πρέπει να αληθεύει και ο φ για να ισχύει η ταυτ.συνεπαγωγή.

Πιο εποπτικά:

1. $\ldots \vDash A$.
2. $\Psi \vDash \cdots$.
3. Εφαρμογή του ορισμού

**Παράδειγμα 1:** Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \to \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash \neg p \to q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

| $p$ | $q$ | $p \to \neg q$ | $q \vee p$ | $\neg p \leftrightarrow q$ | $\neg p \to q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Ψ | Α | Ψ | Α |
| Α | Ψ | Α | Α | Α | Α |
| Ψ | Α | Α | Α | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Ψ | Ψ | Ψ |

Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ό τύπος φ είναι αληθής, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

**Παράδειγμα 2:** Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \to \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash p \to q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

| $p$ | $q$ | $p \to \neg q$ | $q \vee p$ | $\neg p \leftrightarrow q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Ψ | Α | Ψ | Α |
| Α | Ψ | Α | Α | Α | Ψ |
| Ψ | Α | Α | Α | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Ψ | Ψ | Α |

Στην $2^η$ αποτίμηση (p=A, q=Ψ) ικανοποιούνται οι τύποι του T, αλλά δεν ικανοποιείται ο φ. Άρα δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.