



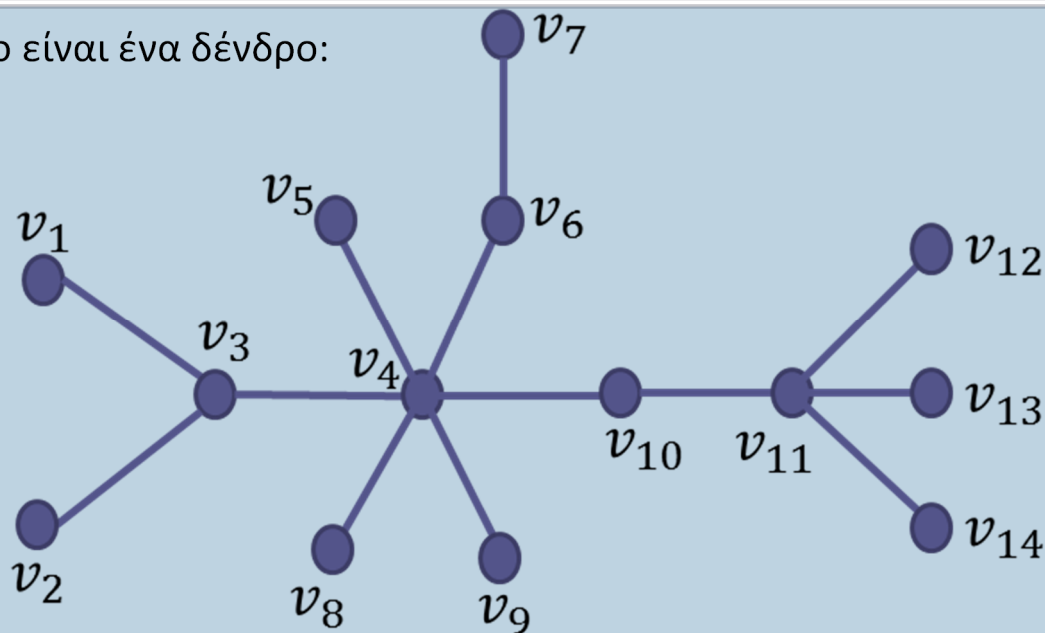
Ορισμός: (Θεώρημα των Δένδρων)

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το γράφημα είναι **δένδρο** (δηλαδή υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή $v_i \in V$ σε κάθε κορυφή $v_j \in V$ ($i \neq j$))
2. Το γράφημα είναι **συνδεόμενο και άκυκλο**
3. Το γράφημα είναι **συνδεόμενο και έχει $|V| - 1$ ακμές**
4. Το γράφημα είναι **άκυκλο και έχει $|V| - 1$ ακμές**
5. Το γράφημα είναι **ελαχιστοτικά συνδεδεμένο** (είναι συνδεδεμένο και αν του αφαιρέσουμε έστω μία ακμή παύει να είναι συνδεδεμένο)
6. Το γράφημα είναι **μεγιστοτικά άκυκλο** (είναι άκυκλο και αν του προσθέσουμε έστω μία ακμή παύει να είναι άκυκλο)

Τελικά το δένδρο είναι ένα άκυκλο συνδεόμενο γράφημα με $n-1$ ακμές που υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ κάθε δύο διαφορετικών κορυφών

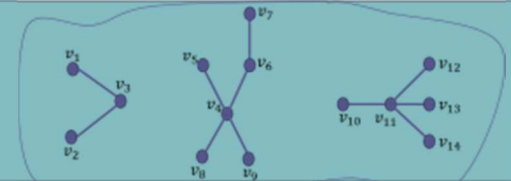
Παράδειγμα: Το ακόλουθο είναι ένα δένδρο:



Ορισμός: (Δάσος)

Ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι δάσος αν είναι η ένωση δένδρων

Ή ισοδύναμα είναι ένα μη συνδεόμενο γράφημα που κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι δένδρο

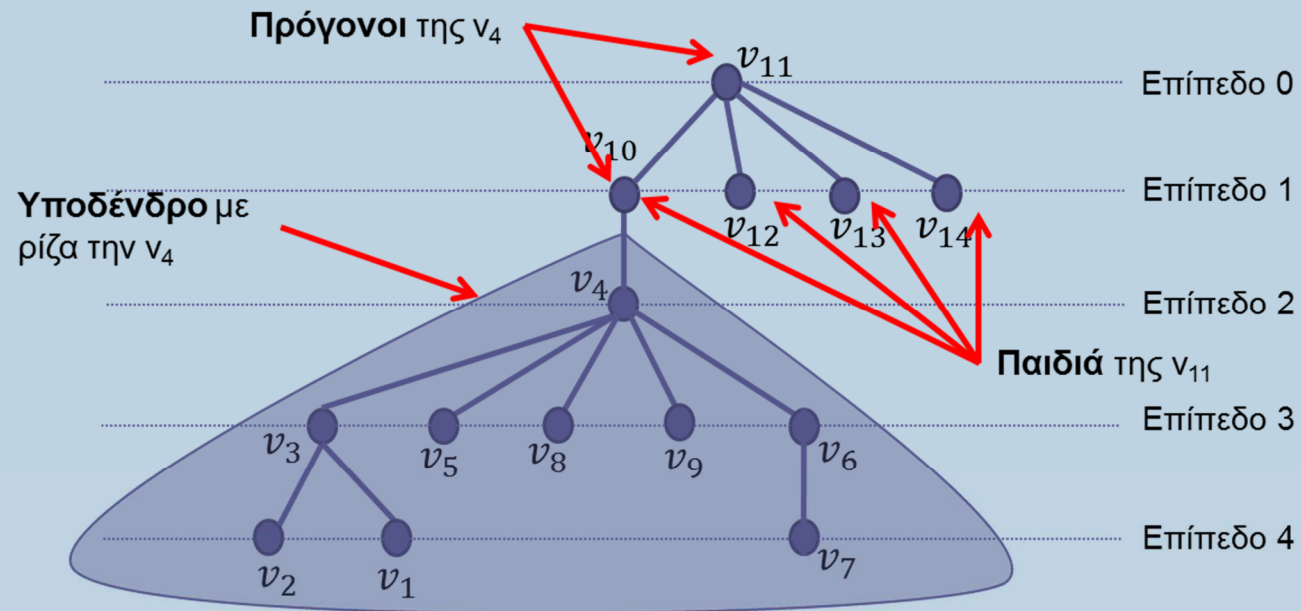
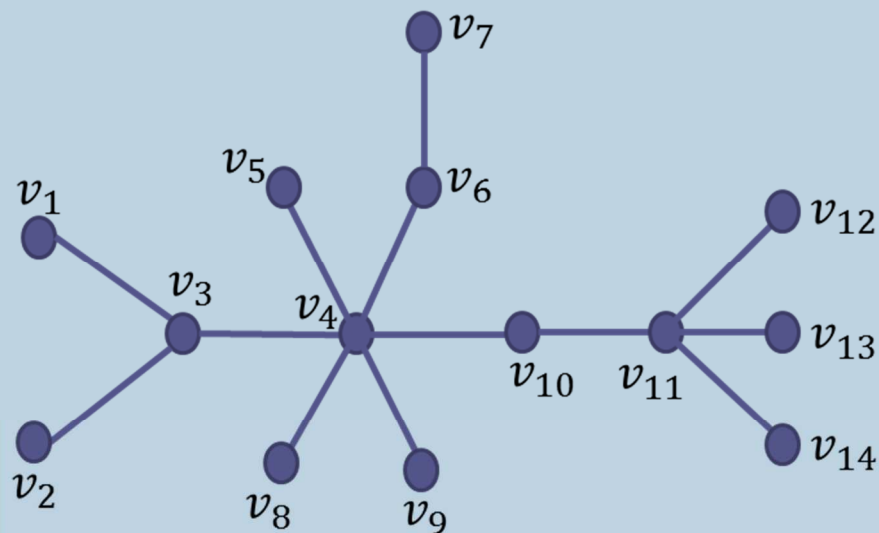


**Ορισμός: (ΡΙΖΩΜΕΝΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΔΕΝΔΡΟΥ)**

Κάθε δένδρο μπορεί να αναπαρασταθεί διατεταγμένα, αν επιλέξουμε μια κορυφή ως τη ρίζα του δένδρου. Με βάση αυτήν την απεικόνιση ορίζουμε:

- Το **επίπεδο** (ή **βάθος**) **κορυφής** που είναι η απόσταση (σε πλήθος ακμών) της κορυφής από τη ρίζα (στο παράδειγμα το επίπεδο της κορυφής v_6 είναι 3)
- Το **ύψος** του δένδρου που είναι το μέγιστο επίπεδο κορυφής (στο παράδειγμα = 4)
- Το **βαθμό του δένδρου** που είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής (στο παράδειγμα = 6 λόγω της v_4)
- Κάθε κορυφή με βαθμό 1 λέγεται **φύλλο** (ή **τερματική κορυφή** ή **μενταγιον**)
- Κάθε κορυφή με βαθμό >1 λέγεται **εσωτερική κορυφή** (ή **κορυφή διακλάδωσης**)
- Ισχύει σε κάθε δένδρο ο τύπος: $n = \phi + \epsilon$
 - Όπου n : πλήθος κορυφών, ϕ : πλήθος φύλλων, ϵ : πλήθος εσωτερικών κορυφών

Παράδειγμα: Βλέπουμε ένα δένδρο (αριστερά) και μία ριζωμένη απεικόνισή του (επιλέγοντας ως ρίζα την v_{11})



Λήμματα που ισχύουν στα δένδρα:

1. Κάθε **δένδρο** είναι **απλό** γράφημα
2. Κάθε **δένδρο** είναι **διχοτομίσιμο** γράφημα
3. Κάθε **δένδρο** είναι **επίπεδο** γράφημα
4. Κάθε **δένδρο** με $|V| \geq 2$ έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.
5. Κάθε **δένδρο** με $|V| > 2$ έχει τουλάχιστον μία εσωτερική κορυφή
6. Αν μια κορυφή έχει βαθμό k , τότε το δένδρο έχει τουλάχιστον k φύλλα.
7. Κάθε **εσωτερική κορυφή** είναι **σημείο κοπής** και **κάθε ακμή** είναι **γέφυρα**.
8. Αν αφαιρέσουμε ένα φύλλο από ένα δένδρο, τότε το γράφημα παραμένει δένδρο
9. Κάθε **μεγιστοτικό μονοπάτι** ξεκινάει και καταλήγει σε φύλλο.