

ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ19

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Σε μια τράπουλα υπάρχουν 52 φύλλα (4 χρώματα με 13 χαρτιά το κάθε ένα). Στην επιλογή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά.

1. Ο αριθμός των επιλογών δύο φύλλων έτσι ώστε και τα δύο να είναι μπαστούνια είναι $\binom{52}{2}$
2. Ο αριθμός των επιλογών πέντε φύλλων έτσι ώστε σε αυτά να υπάρχουν οι 4 άσσοι της τράπουλας είναι $\binom{52}{4}$
3. Ο αριθμός των επιλογών πέντε φύλλων έτσι ώστε σε αυτά να υπάρχουν οι 4 άσσοι της τράπουλας και μία ντάμα είναι 4.
4. Ο αριθμός των επιλογών πέντε φύλλων έτσι ώστε σε αυτά να υπάρχουν 3 άσσοι και 2 ντάμες είναι: $\binom{52}{3} \binom{52}{2}$.

(2) Πόσα $n \times n$ σταυρόλεξα υπάρχουν; (Ως σταυρόλεξο θεωρούμε την τοποθέτηση στο πλέγμα λευκών και μαύρων τετραγώνων)

1. Όσοι οι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης $n \times n$ που κάθε στοιχείο είναι 0 ή 1
2. Όσα τα κατευθυνόμενα γραφήματα n κορυφών (θεωρούμε ότι κάθε κορυφή είναι διακεκριμένη) στα οποία μπορεί να υπάρχουν ανακυκλώσεις και αντιπαράλληλες ακμές (π.χ. (u, v) και (v, u)), αλλά δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες ακμές με την ίδια διεύθυνση (π.χ. (u, v) , (u, v))
3. Όσες και οι συμβολοσειρές μήκους $2n$ με n άσσους και n μηδενικά.
4. Όσες και οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους n^2

(3) Ο τύπος $p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ είναι:

1. Ταυτολογία
2. Ταυτολογικά ισοδύναμος με τον τύπο $p \rightarrow q$
3. Ταυτολογικά ισοδύναμος με τον τύπο $p \wedge \neg p \rightarrow q$
4. Ταυτολογικά ισοδύναμος με τον τύπο $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

(4) Για τους προτασιακούς τύπους f, g, h ισχύουν ότι: $f \vdash g, g \models h, h \models f$. Τότε πάντα ισχύει επίσης ότι:

1. $f \models h$
2. $g \vdash f$
3. $h \vdash g$
4. $f \equiv g \equiv h$

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου επιτρέπονται ανακυκλώσεις και αντιπαράλληλες ακμές ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές του γραφήματος, το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την a στη b . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν στο πλήρες γράφημα δύο κορυφών;

1. $\exists x \exists y [x \neq y \wedge P(x, y) \wedge P(y, x)]$
2. $\exists x [P(x, x) \wedge \forall y (P(y, y) \rightarrow x = y)]$
3. $\exists x \exists y [x \neq y \wedge \forall z (z = y \vee z = x)]$
4. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

(6) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_3\}$ και σύνολο ακμών $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_2), (v_2, v_3)\}$ ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την a στην b . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε αυτήν την ερμηνεία;

1. $\exists x [\forall y \neg P(x, y)]$
2. $\exists x \exists y [P(x, y) \wedge \forall z (P(x, z) \rightarrow z = y)]$
3. $\exists x \exists y \exists z [P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge y \neq z \wedge \forall w (P(x, w) \rightarrow w = y \vee w = z)]$
4. $\exists x \exists y \exists z \exists w [P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge P(x, w) \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge \forall t (P(x, t) \rightarrow t = y \vee t = z \vee t = w)]$

Β' ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1

(Ερώτημα 1) Με πόσους τρόπους μπορούν να προγραμματισθούν οι τελικές εξετάσεις 8 ΘΕ της ΠΛΗ εντός των 30 ημερών του Ιουνίου, αν:

- (i) Δεν εξετάζονται 2 ΘΕ ενότητες την ίδια ημέρα και μας ενδιαφέρει μόνο ποιες μέρες θα δεσμευτούν για την εξέταση των μαθημάτων.
- (ii) Δεν εξετάζονται 2 ΘΕ ενότητες την ίδια ημέρα και μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποιες μέρες θα δεσμευτούν για την εξέταση των μαθημάτων, αλλά και σε ποια μέρα εξετάζεται το κάθε μάθημα.
- (iii) Απαντήστε τα i) και ii) όταν δεν υπάρχει ο περιορισμός στον αριθμό των ΘΕ που μπορούν να εξεταστούν σε μια ημέρα.

(Ερώτημα 2) Τοποθετούμε σε μια σειρά 100 μη διακεκριμένα μαύρα σφαιρίδια και 120 διακεκριμένα άσπρα σφαιρίδια, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένα άσπρο σφαιρίδιο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι μαύρων σφαιριδίων. Να διατυπώσετε την γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τοποθετήσεων.

Άσκηση 2

(Ερώτημα 1)

Δείξτε ότι $\{(φ \rightarrow χ) \rightarrow ψ, φ \rightarrow χ\} \vdash \neg ψ \rightarrow ψ$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού.

(Ερώτημα 2)

Δείξτε ότι $\vdash (\neg ψ \rightarrow φ) \rightarrow ((\neg ψ \rightarrow \neg φ) \rightarrow ψ)$ όταν επιτρέπονται τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού, αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας.

(Ερώτημα 3)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $M(x, y)$ να ερμηνεύεται με την σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με μονοπάτι. Στην ερμηνεία αυτή, γράψτε προτάσεις κατηγορηματικής λογικής που να εκφράζουν ότι:

- A. Το γράφημα είναι πλήρες
- B. Το γράφημα είναι συνδεόμενο
- C. Αν ένα γράφημα είναι συνδεόμενο, τότε δεν περιέχει απομονωμένη κορυφή.
- D. Κάθε κορυφή με βαθμό 2 συνδέεται με ακριβώς δύο άλλες κορυφές με μονοπάτι