ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ21

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Συμβολίζουμε με α_{10} το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 10 που παράγονται με γράμματα από το σύνολο {A,B,C,D,E} και περιέχουν τουλάχιστον 3 A, περιττό πλήθος B και άρτιο πλήθος από D.

1. Το α_{10} είναι ο συντελεστής του $\frac{x^{10}}{10!}$ στην παράσταση:
$$\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right) \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot (e^x)^2$$

2. Το α_{10} είναι ο συντελεστής του $\frac{x^{10}}{10!}$ στην παράσταση:
$$\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)^2$$

3. Το α_{10} είναι ο συντελεστής του $\frac{x^{10}}{10!}$ στην παράσταση:
$$\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^6}{6!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^7}{7!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^6}{6!}\right)^2$$

4. Το α_{10} είναι ο συντελεστής του $\frac{x^{10}}{10!}$ στην παράσταση:
$$\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2$$

(2) Ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε *n* διακεκριμένα αντικείμενα σε *m* διακεκριμένες υποδοχές, όταν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές, είναι ίσος με:

1. m^n

2. Τον αριθμό των διατάξεων *n* αντικειμένων από $n + m - 1$.

3. Τον αριθμό των συνδυασμών *n* αντικειμένων από $n + m - 1$.

4. Τον συντελεστή του $x^n / n!$ στην παράσταση $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^m$.

(3) Το Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής εξασφαλίζει ότι για κάθε υποσύνολο προτασιακών τύπων *T* και για αυθαίρετα επιλεγμένους προτασιακούς τύπους *φ* και *ψ*, ισχύει ότι

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi \text{ αν και μόνο αν } T \cup \{\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi .$$

Είναι σωστό ότι οι παρακάτω δηλώσεις προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής με συντακτική αντικατάσταση χωρίς τη χρήση άλλων θεωρημάτων ή προτάσεων;

1. $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg(\neg\psi)$ αν και μόνο αν $T \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$.

2. $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \psi$ αν και μόνο αν $T \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$.

3. $\neg\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi$ αν και μόνο αν $\psi \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$.

4. $\neg\varphi \vDash \neg\psi$ αν και μόνο αν $\psi \vDash \neg(\neg\varphi)$.

(4) Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες:

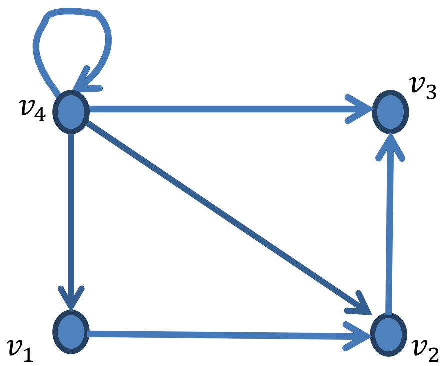
1. $p_2 \vee p_1 \rightarrow p_2$

2. $p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_2$

3. $p_2 \leftrightarrow p_2 \vee p_1$

4. $p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή στο κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές του γραφήματος και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την a στη b. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε αυτή την ερμηνεία;



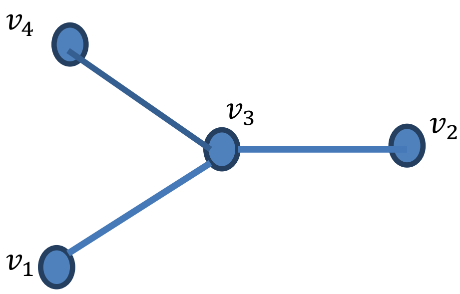
1. $\exists x \forall y P(x, y)$

2. $\forall x \exists y P(x, y)$

3. $\exists y \forall x P(x, y)$

4. $\exists y \forall x P(y, x)$

(6) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν στο γράφημα του σχήματος:



1. $\exists x \exists y [P(y, x) \wedge x \neq y]$

2. $\forall x \forall y [x \neq y \rightarrow P(x, y)]$

3. $\exists x \exists y [x \neq y]$

4. $\forall x \forall y [P(x, y) \rightarrow \exists z (P(x, z) \wedge P(z, y) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge z \neq y]$

(7) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Υπάρχει απλό διμερές γράφημα που είναι k-κανονικό.

2. Υπάρχει απλό γράφημα 6 κορυφών με 3 κορυφές βαθμού 5 και 3 κορυφές βαθμού 3.

3. Υπάρχει απλό γράφημα 9 κορυφών με 2 κορυφές βαθμού 7, 1 κορυφή βαθμού 6, 5 κορυφές βαθμού 3 και 1 κορυφή βαθμού 2.

4. Υπάρχει γράφημα με χρωματικό αριθμό 2 που περιέχει το K_4 σαν επαγόμενο υπογράφημα.

(8) Στα ακόλουθα ερωτήματα C_n είναι το γράφημα απλός-κύκλος n κορυφών και W_n το γράφημα-τροχός (θεωρούμε n≥4)

1. Το K_n έχει ως υπογράφημα το C_n.

2. Το K_n έχει ως επαγόμενο υπογράφημα το C_n.

3. Στο W_n υπάρχει απλός κύκλος n-1 κορυφών.

4. Τα γραφήματα $\overline{K_n}, \overline{C_n}, \overline{W_n}$ είναι n-χρωματίσιμα

Β'ΜΕΡΟΣ (ΑΡΙΣΤΑ: 100)

Άσκηση 1

(Ερώτημα 1) Στη βιβλιοθήκη του ΕΑΠ υπάρχουν 20 διαφορετικά βιβλία. Οι 3 φοιτητές Α, Β, Γ πρόκειται να δανειστούν κάποια από αυτά τα βιβλία. Πόσοι οι τρόποι να γίνει ο δανεισμός αυτός αν:

1. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των βιβλίων που θα δανειστεί κάθε φοιτητής.
2. Ο φοιτητής Α θα δανειστεί 4 βιβλία, ο φοιτητής Β θα δανειστεί 3 βιβλία και ο φοιτητής Γ θα δανειστεί 2 βιβλία.
3. Ο φοιτητής Α θα δανειστεί 5 ή 6 βιβλία, ο φοιτητής Β θα δανειστεί 3 βιβλία και ο φοιτητής Γ θα δανειστεί 1 βιβλίο.

(Ερώτημα 2) Μια εταιρία αναθέτει σε τρεις διακεκριμένους μηχανικούς την επίβλεψη 12 διακεκριμένων έργων. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η ανάθεση αν:

1. δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των έργων που θα αναλάβει κάθε μηχανικός.
2. κάθε μηχανικός θα αναλάβει την επίβλεψη ακριβώς 4 έργων.

(Ερώτημα 3) Ένας επενδυτής πρόκειται να επενδύσει 1.000€ σε 4 διακεκριμένες μετοχές. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να προχωρήσει ο επενδυτής στην επένδυσή του με την προϋπόθεση ότι σε κάθε μετοχή θα επενδυθούν τουλάχιστον 100€.

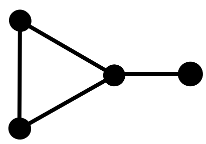
(Ερώτημα 4) Τα 20 διακεκριμένα παιδιά μιας τάξης πρόκειται να μοιραστούν σε 4 διακεκριμένες ομάδες που θα αποτελούνται από 4 ως 6 άτομα. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να προκύψουν οι 4 ομάδες.

<u>Άσκηση 2</u>

(Ερώτημα 1)
Θεωρούμε τους προτασιακούς τύπους $\varphi_1 = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_3 \to p_4)$ και $\varphi_2 = p_3 \to (p_1 \to p_3)$. Βρείτε μία αποτίμηση που να ικανοποιεί και τους δύο τύπους. Δείξτε χωρίς χρήση αληθοπίνακα ότι ο φ_1 ταυτολογικά συνεπάγεται τον φ_2 .

(Ερώτημα 2)
Δείξτε ότι ο τύπος $((\varphi \to \psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$ είναι τυπικό θεώρημα, όταν επιτρέπεται η χρήση των θεωρημάτων του προτασιακού λογισμού, αλλά όχι των θεωρημάτων εγκυρότητας-πληρότητας

(Ερώτημα 3) Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε μη κατευθυνόμενα απλά γραφήματα και περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή. Γράψτε ένα τύπο φ που να αληθεύει σε γραφήματα που έχουν σαν υπογράφημα το παραπλεύρως γράφημα



(Ερώτημα 4) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή.

(Α) Ορίστε την συντομογραφία K(x) να αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 1

(Β) Ορίστε την συντομογραφία Q(x,y) να αληθεύει αν οι κορυφές x,y δεν συνδέονται με ακμή.

(Γ) Ορίστε πρόταση που να εκφράζει ότι «Υπάρχουν δύο κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή και όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 1» με χρήση των συντομογραφιών K(x) και Q(x,y).

(Δ) Κατασκευάστε γράφημα 4 κορυφών που αληθεύει η πρόταση (Γ)

Άσκηση 3

1. Κατασκευάστε ένα απλό μη κατεθυνόμενο γράφημα 4 κορυφών που κάθε κορυφή έχει βαθμό 3.
2. Δείξτε ότι δεν υπάρχει απλό μη κατευθυνόμενο 3-κανονικό γράφημα με 5 κορυφές
3. Δείξτε ότι σε κάθε απλό μη κατευθυνόμενο 3-κανονικό γράφημα G=(V,E) ισχύει ο τύπος m=3n/2, όπου n=|V| και m=|E|