



**Θεώρημα:** Οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές στις πράξεις: Ένωση, Παράθεση, Αστερί Kleene.

Κλειστότητα των Γ.Χ.Σ στην Ένωση

- Η  $L_1$  είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα  $S_1$ . Η  $L_2$  είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα  $S_2$
- Η  $L_1 \cup L_2$  παράγεται από την γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αρχικό κανόνα  $S \rightarrow S_1 \mid S_2$  άρα είναι χωρίς συμφραζόμενα

Κλειστότητα των Γ.Χ.Σ στην Παράθεση

- Η  $L_1$  είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα  $S_1$ . Η  $L_2$  είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα  $S_2$
- Η  $L_1 L_2$  παράγεται από την γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αρχικό κανόνα  $S \rightarrow S_1 S_2$  άρα είναι χωρίς συμφραζόμενα

Κλειστότητα των Γ.Χ.Σ στο Αστερί Kleene

- Η  $L$  είναι Ανεξάρτητη Συμφραζομένων, άρα παράγεται από μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, έστω με αρχικό κανόνα  $S_1$
- Η  $L^*$  παράγεται από την γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αρχικό κανόνα  $S \rightarrow S_1 S_1^* S_1$  άρα είναι χωρίς συμφραζόμενα.

**Θεώρημα:** Οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα ΔΕΝ είναι κλειστές στις πράξεις: Συμπλήρωμα, Τομή

ΟΧΙ Κλειστότητα των Γ.Χ.Σ στο Συμπλήρωμα.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Πράγματι αν:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ δεν έχει ίσα } a \text{ και } b\}$
  - $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ δεν έχει ίσα } b \text{ και } c\}$
- που είναι και οι δύο χωρίς συμφραζόμενα (γιατί; ).  
Τότε η ένωση τους είναι η γλώσσα  
 $L' = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ δεν έχει ίσα } a \text{ και } b \text{ ή δεν έχει ίσα } b \text{ και } c\}$   
και είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (κλειστότητα της ένωσης στις ΓΧΣ).

Τότε το συμπλήρωμα της  $L'$  είναι η γλώσσα:

$L' = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ έχει ίσα } a, b \text{ και } c\}$   
που δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα (αποδεικνύεται με το λήμμα της άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα).

ΟΧΙ Κλειστότητα των Γ.Χ.Σ στην Τομή.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Πράγματι αν:

- $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$
- $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 0\}$

Που είναι και οι δύο χωρίς συμφραζόμενα (έχουν γραμματική χωρίς συμφραζόμενα)

Η τομή τους είναι η γλώσσα:

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

που όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα (αποδεικνύεται με το λήμμα της άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα).