



Ορισμός: Ένα γράφημα είναι επίπεδο, αν μπορούμε να το απεικονίσουμε στο επίπεδο, χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.

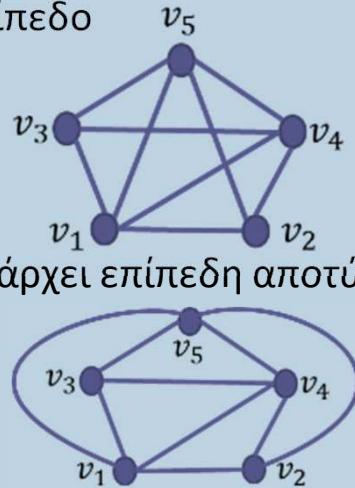
- Μία απεικόνιση στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του λέγεται επίπεδη αποτύπωση του γραφήματος
- Κάθε τμήμα του επιπέδου που ορίζεται από απλό κύκλο της αποτύπωσης λέγεται όψη της αποτύπωσης
- Το πλήθος των όψεων: Συμβολίζεται με o και προσοχή ότι συμπεριλαμβάνει πάντα και την εξωτερική όψη
- Βαθμός της όψης o_i το πλήθος των ακμών που περιέχει ο απλός κύκλος της όψης (συμβολίζεται με $d(o_i)$)

Σε ένα επίπεδο γράφημα:

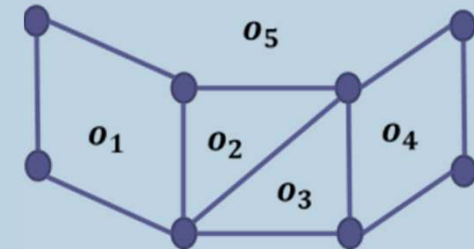
- $\sum_{i=1}^o d(o_i) \leq 2m$
- Αν είναι και συνδεόμενο ισχύει ο τύπος του Euler:
 $o = m - n + 2$

Παράδειγμα: Το ακόλουθο γράφημα είναι επίπεδο

διότι υπάρχει επίπεδη αποτύπωσή του:



Παράδειγμα: Στην ακόλουθη επίπεδη αποτύπωση έχουμε 5 όψεις



Και ισχύει για τους βαθμούς των όψεων:

$$d(o_1) = 4, d(o_2) = 3, d(o_3) = 3, d(o_4) = 4, d(o_5) = 8$$

Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν:

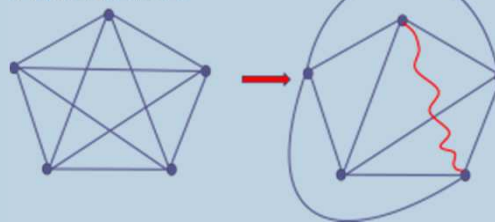
- Μπορούμε να το ζωγραφίσουμε στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του!
- Δεν περιέχει ως υπογράφημα το K_5 ή το $K_{3,3}$ και δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K_5 ή του $K_{3,3}$ (από θ. Kuratowski)

Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο αν:

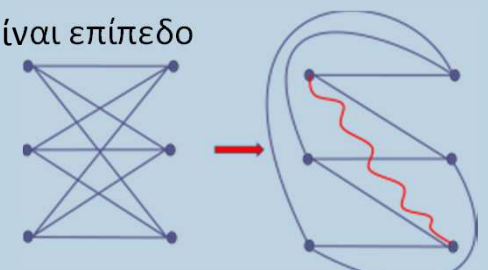
- Είναι απλό και ισχύει $m > 3n - 6$
- Περιέχει ως υπογράφημα το K_5 (από θ. Kuratowski)
- Περιέχει ως υπογράφημα το $K_{3,3}$ (από θ. Kuratowski)
- Περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K_5 ή το $K_{3,3}$ (από θ. Kuratowski)

Θεώρημα Kuratowski: Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ (ή ομοιομορφικό αυτών)

Το K_5 δεν είναι επίπεδο



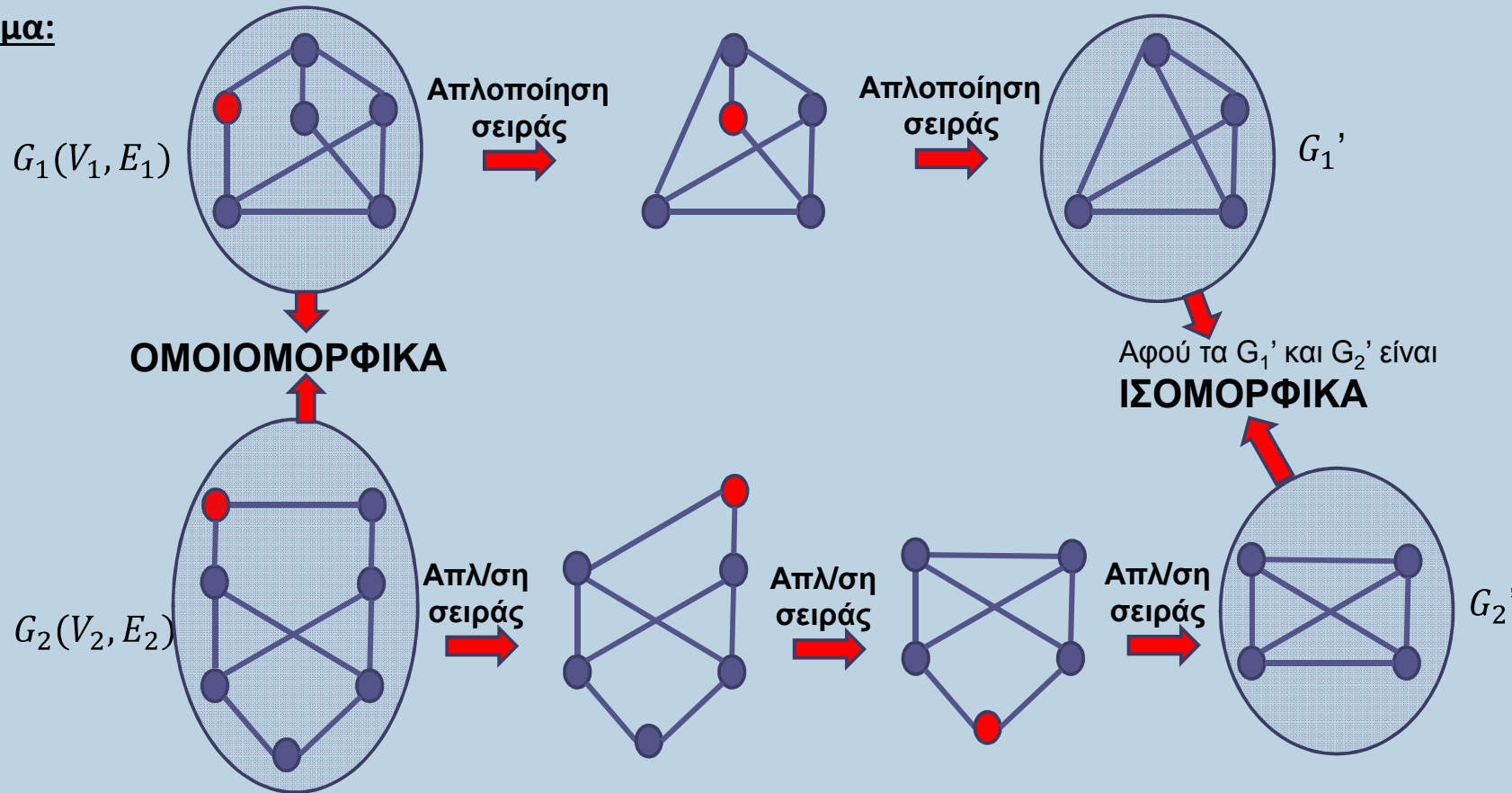
Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο





Ορισμός: Δύο γραφήματα καλούνται ομοιομορφικά αν μπορούν να απλοποιηθούν (με απλοποιήσεις σειράς) σε ισομορφικά γραφήματα.

Παράδειγμα:



Απλοποίηση σειράς είναι μια πράξη, πάνω σε γράφημα που «απαλείφει» κορυφές βαθμού 2:

