ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Μάθημα 1.5:
Η αναδρομική σχέση T(n)=aT(n-b)+f(n)
Η αναδρομική σχέση T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c
   1. Επίλυση με τη Μέθοδο της Επανάληψης
2. Η αναδρομή T(n)=T(n-1)+f(n)
   1. Επίλυση με τη Μέθοδο της Επανάληψης
3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)
   1. Επίλυση με τη Μέθοδο των Φραγμάτων
   2. Επίλυση με το Δένδρο της Αναδρομής
   3. Επίλυση με την Δραστ.3.6

Γ.Ασκήσεις

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- Η δραστηριότητα 3.6 για την επίλυση της T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)
- Η μέθοδος επανάληψης για την επίλυση της T(n)=T(n-1)+f(n)

Επίπεδο Β
- Το δένδρο αναδρομής για την επίλυση της T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)
- Η μέθοδος επανάληψης για την επίλυση της T(n)=aT(n-b)+c

Επίπεδο Γ
- Η μέθοδος υπολογισμού φραγμάτων για την επίλυση της T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων
Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+f(n)

- Η επίλυση της αναδρομικής σχέσης T(n)=aT(n-b)+f(n) γίνεται με την μέθοδο επανάληψη.
- Θα μελετήσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις αυτής της αναδρομής:
  - Αν f(n)=c, οπότε προκύπτει η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c και απαιτεί την κλασική μέθοδο της επανάληψης που είδαμε και στο προηγούμενο μάθημα.
  - Αν a=1, προκύπτει η αναδρομή T(n)=T(n-b)+f(n) που λύνεται με έναν εύκολο και εμπειρικό τρόπο που αποτελεί παραλλαγή της μεθόδου επανάληψης.
  - Η γενική μορφή της αναδρομής για κάθε a, b, f(n) είναι εκτός ύλης.

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων
1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

- Η αναδρομική σχέση T(n)=aT(n-b)+c λύνεται με την μέθοδο επανάληψης

ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Κάνουμε 3 εφαρμογές της αναδρομικής σχέσης (Μέχρι να φτάσουμε στην μορφή $T(n) = \ldots \cdot T(n-3b) + \ldots.$)
2. Εκτίμηση της σειράς που προκύπτει μετά από k επαναλήψεις (Μας καθοδηγεί ο όρος $T(n) = \ldots \cdot T(n-kb) + \ldots.$)
3. Υπολογίζουμε πότε σταματάει η αναδρομή (Θέτω $n - kb = n_0$ όπου n_0 η συνθήκη τερματισμού της αναδρομής και λύνουμε ως προς k). Π.χ. αν $n_0=0$ τότε n/b
4. Αντικατάσταση του k στον αναδρομικό τύπο του βήματος 2.
5. Υπολογισμός του αθροίσματος που προέκυψε.

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 1: 3 εφαρμογές του κανόνα)

- Στο 1ο βήμα εφαρμόζουμε τον αναδρομικό κανόνα 3 φορές και κάνουμε τις πράξεις που προκύπτουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λύσετε την αναδρομή: $T(n)=\begin{cases} 5T(n-2)+2, & \alpha\nu\ n>0 \\ 1, & \alpha\nu\ n=0 \end{cases}$

Λύση:

$$\begin{aligned} T(n) &= 5T(n-2)+2 \\ &= 5[5T(n-4)+2]+2 = 5^2T(n-4)+5\cdot 2+2 \\ &= 5^2[5T(n-6)+2]+5\cdot 2+2 = 5^3T(n-6)+5^2\cdot 2+5\cdot 2+2 \end{aligned}$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 2: Εκτίμηση στο βήμα k)

- Στο 2ο βήμα εκτιμάμε την σειρά που θα προκύψει μετά από k επαναλήψεις (Μας καθοδηγεί ο όρος $T(n)=\ldots\cdot T(n-kb)+\ldots.$

(…συνέχεια…)

$$T(n)=5^3T(n-6)+5^2\cdot 2+5\cdot 2+2=$$
$$=\ldots=$$
$$=5^kT(n-2k)+5^{k-1}\cdot 2+\ldots+5^2\cdot 2+5\cdot 2+2$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 3: Υπολογισμός του k)

- Υπολογίζουμε πότε σταματάει η αναδρομή (Θέτω $n-kb=n_0$ όπου n_0 η συνθήκη τερματισμού της αναδρομής και λύνουμε ως προς k).

(…συνέχεια…)

Η αναδρομή σταματά όταν

$$n-2k=0 \Rightarrow$$

$$n=2k \Rightarrow$$

$$k=n/2$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 4: Αντικατάσταση του k)

- Αντικαθιστούμε το k που βρήκαμε στην παράσταση που προέκυψε στο βήμα 2. Θα πρέπει να απαλειφθεί ο αναδρομικός όρος με την συνθήκη τερματισμού της αναδρομής.

(…συνέχεια…)

Θέτοντας k=n/2 στην T(n) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 5^{n/2}T(0)+5^{n/2-1}\cdot 2+\ldots+5^{2}\cdot 2+5\cdot 2+2 \\
&= 5^{n/2}+5^{n/2-1}\cdot 2+\ldots+5^{2}\cdot 2+5\cdot 2+2
\end{aligned}
$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 5: Υπολογισμός αθροίσματος)

- Το άθροισμα που προκύπτει υπολογίζεται με τον γνωστό τύπο του υπολογισμού αθροίσματος όρων γεωμετρικής προόδου: $\boxed{\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$

(…συνέχεια…)

Θέτοντας k=n/2 στην T(n) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 5^{n/2} + 5^{n/2-1}\cdot 2 + \ldots + 5^2\cdot 2 + 5\cdot 2 + 2 = \\
&= 5^{n/2} + [2 + 5\cdot 2 + 5^2\cdot 2 + \ldots + 5^{n/2-1}\cdot 2] = \\
&= 5^{n/2} + 2[1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n/2-1}] = \\
&= 5^{n/2} + 2\sum_{i=0}^{n/2-1} 5^i = \\
&= 5^{n/2} + 2\frac{5^{n/2-1+1}-1}{5-1} = \\
&= 5^{n/2} + 0{,}5(5^{n/2}-1) = \\
&= 1{,}5\cdot 5^{n/2} - 0{,}5
\end{aligned}
$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Η αναδρομή T(n)=T(n-b)+f(n)

- Η αναδρομική σχέση T(n)=T(n-1)+f(n) λύνεται με την μέθοδο επανάληψης

ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Γράφουμε όλους τους αναδρομικούς όρους T(n), T(n-1),… μέχρι και την οριακή περίπτωση της αναδρομής
2. Προσθέτουμε τις εξισώσεις κατά μέλη
3. Υπολογίζουμε το άθροισμα που προκύπτει

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 1: Γράψιμο των όρων)

- Στο 1ο βήμα γράφουμε όλους τους αναδρομικούς όρους από το T(n) μέχρι και τον όρο $T(n_0)$ όπου n_0 είναι η οριακή περίπτωση της αναδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να λύσετε την αναδρομή: $T(n)=\begin{cases} T(n-1)+3n, & \alpha\nu\ n>0 \\ 1, & \alpha\nu\ n=0 \end{cases}$

Λύση:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+3n \\
T(n-1) &= T(n-2)+3(n-1) \\
T(n-2) &= T(n-3)+3(n-2) \\
&\dots \\
T(2) &= T(1)+3\cdot 2 \\
T(1) &= T(0)+3\cdot 1 \\
T(0) &= 1
\end{aligned}$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 2: Πρόσθεση κατά μέλη)

- Στο 2ο βήμα προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις που έχουμε γράψει στο προηγούμενο βήμα:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \cancel{T(n-1)} + 3n \\
\cancel{T(n-1)} &= \cancel{T(n-2)} + 3(n-1) \\
\cancel{T(n-2)} &= \cancel{T(n-3)} + 3(n-2) \\
&\ldots \\
\cancel{T(2)} &= \cancel{T(1)} + 3\cdot 2 \\
\cancel{T(1)} &= \cancel{T(0)} + 3\cdot 1 \\
\cancel{T(0)} &= 1 \qquad\qquad (+) \\
\hline
T(n) &= 3n + 3(n-1) + 3(n-2) + \ldots + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1
\end{aligned}
$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Η αναδρομή T(n)=aT(n-b)+c

1. Επίλυση με την μέθοδο επανάληψης (Βήμα 3: Υπολογισμός του αθροίσματος)

- Στο 3ο βήμα υπολογίζουμε το άθροισμα που προκύπτει που συνήθως θα είναι αριθμητική πρόοδος. Χρήσιμα θα φανούν τα εξής αθροίσματα:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})}$$

(μόνο με υπόδειξη)

(συνέχεια…)

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3n + 3(n-1) + 3(n-2) + \ldots + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1 \\
&= 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + \ldots + 3(n-2) + 3(n-1) + 3n \\
&= 1 + 3[1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n] \\
&= 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 3\frac{n(n+1)}{2} = \\
&= 1{,}5n^2 + 1{,}5n + 1
\end{aligned}$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων
Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

- Η επίλυση της αναδρομικής σχέσης T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n) γίνεται:
  - Με εφαρμογή της δραστηριότητας 3.6 (αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 1$)
  - Με το δένδρο αναδρομής (Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$)
  - Υπάρχει και η μέθοδος υπολογισμού φραγμάτων την οποία δεν θα εφαρμόζουμε ποτέ, παρά μόνο αν μας το ζητάνε ρητά!

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

- Η αναδρομική σχέση T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n) λύνεται με την μέθοδο του δένδρου αναδρομής

ΒΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΕΝΔΡΟΥ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ

1. Ανάπτυξη του Δένδρου Αναδρομικών Κλήσεων μέχρι και με το 2ο επίπεδο
2. Σε κάθε κόμβο σημειώνουμε πόσες πράξεις γίνονται (από το f(n))
3. Υπολογισμός πράξεων ανά επίπεδο (συνήθως γεωμετρική πρόοδος)
4. Υπολογισμός του ύψους του δένδρου (Είναι $\log_c n$ με c το ελάχιστο από τα a,b)
5. T(n)=το άθροισμα των πράξεων όλων των επιπέδων

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

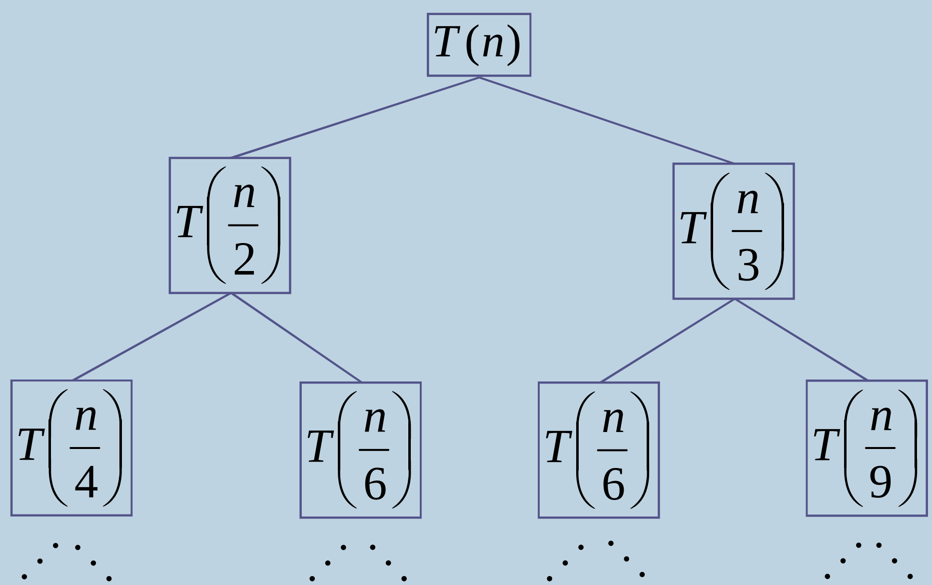
1. Επίλυση με το δένδρο αναδρομής (Βήμα 1: Ανάπτυξη δένδρου μέχρι 2ο επίπεδο)

- Στο 1ο βήμα αναπτύσσουμε το δένδρο αναδρομικών κλήσεων εμφανίζοντας μόνο τους αναδρομικούς όρους (όπως θα γινόντουσαν οι κλήσεις στον αντίστοιχο αναδρομικό κώδικα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να λύσετε την αναδρομή:

$$T(n)=\begin{cases} T\left(\frac{n}{2}\right)+T\left(\frac{n}{3}\right)+n, & \alpha\nu\ n>1 \\ 1, & \alpha\nu\ n=1 \end{cases}$$

Λύση:



ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$T(n)=T\left(\frac{n}{2}\right)+T\left(\frac{n}{3}\right)+n$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right)=T\left(\frac{n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{6}\right)+\frac{n}{2}$$

$$T\left(\frac{n}{3}\right)=T\left(\frac{n}{6}\right)+T\left(\frac{n}{9}\right)+\frac{n}{3}$$

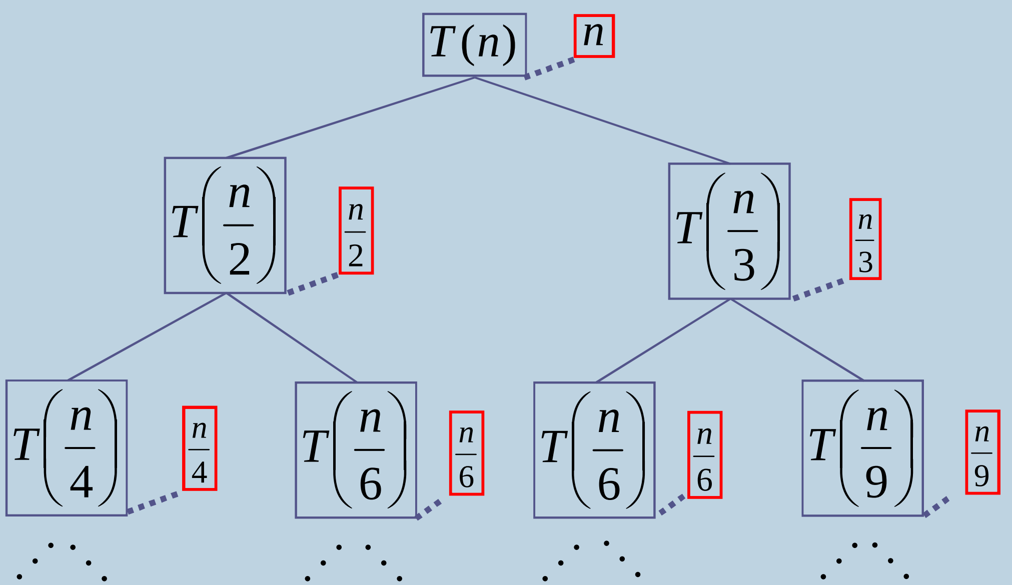
Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

1. Επίλυση με το δένδρο αναδρομής (Βήμα 2: Πράξεις σε κάθε κόμβο)

- Στο 2ο βήμα σημειώνουμε σε κάθε κόμβο πόσες πράξεις γίνονται σε αυτήν την αναδρομική κλήση (καθορίζεται από τον όρο που έχουμε εμφανίσει αντικαθιστώντας το f(n))

(…συνέχεια…)



ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$T(n)=T\left(\frac{n}{2}\right)+T\left(\frac{n}{3}\right)+n$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right)=T\left(\frac{n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{6}\right)+\frac{n}{2}$$

$$T\left(\frac{n}{3}\right)=T\left(\frac{n}{6}\right)+T\left(\frac{n}{9}\right)+\frac{n}{3}$$

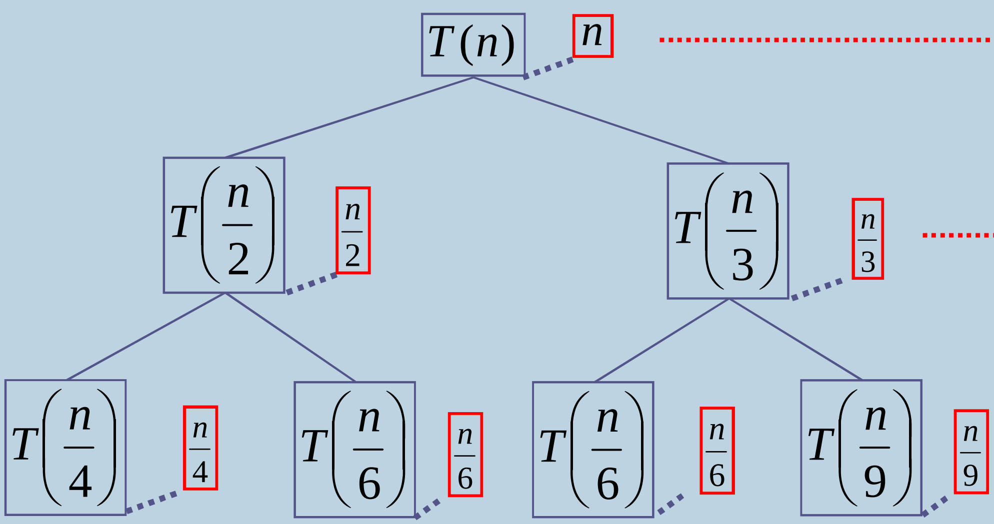
Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

1. Επίλυση με το δένδρο αναδρομής (Βήμα 3: Πράξεις ανα επίπεδο)

- Στο 3ο βήμα προσθέτουμε ανά επίπεδο τις πράξεις για να μας βγει ένα κλάσμα. Προσοχή ότι πάντα θα μας βγαίνει ότι είναι μια γεωμετρική πρόοδος. Εκτιμάμε πόσες πράξεις γίνονται στο επίπεδο i.

(…συνέχεια…)



Επιπεδο 0: n

Επιπεδο 1: $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}=\frac{3n}{6}+\frac{2n}{6}=\frac{5n}{6}$

Επιπεδο 2: $\frac{n}{4}+\frac{n}{6}+\frac{n}{6}+\frac{n}{9}=...=\frac{5^2 n}{6^2}$

Άρα στο επίπεδο i γίνονται $\frac{5^i n}{6^i}$ πράξεις

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

1. Επίλυση με το δένδρο αναδρομής (Βήμα 4: Υπολογισμός ύψους δένδρου)

- Στο 4ο βήμα υπολογίζουμε το ύψος του δένδρου.
- Το ύψος του δένδρου καθορίζεται από ποιος όρος από τους n/a kai n/b θα φτάσει πιο αργά να γίνει ίσος με το n_0, δηλαδή λύνοντας την εξίσωση $n/\min\{a,b\}=n_0$
- Εμπειρικά το ύψος του δένδρου καθορίζεται από τον μικρότερο από τους δύο παρονομαστές και συγκεκριμένα είναι αν c είναι ο μικρότερος από τους δύο παρονομαστές (δηλ. c=min{a,b}) έπεται ότι το ύψος του δένδρου είναι $\log_c n$.

(…συνέχεια…)

Το ύψος του δένδρου είναι $\log_2 n$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

1. Επίλυση με το δένδρο αναδρομής (Βήμα 5: Υπολογισμός αθροίσματος)

- Στο 5ο βήμα υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα ως το άθροισμα των πράξεων όλων των επιπέδων. Θα είναι πάντα μια γεωμετρική πρόοδος. Άρα θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\boxed{\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$

(…συνέχεια…)

Συνεπώς οι πράξεις είναι:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 5^i \frac{n}{6^i} = n\sum_{i=0}^{\log n} \frac{5^i}{6^i} =$$

$$= n\sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{5}{6}\right)^i = n\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\log n+1} - 1}{\frac{5}{6} - 1} =$$

$$= 6n \cdot (0,83)^{\log n+1} - 6n$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

2. Επίλυση με τα φράγματα

- Η αναδρομική σχέση T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n) λύνεται με την μέθοδο των φραγμάτων

ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ

1. Υπολογισμός κάτω φράγματος με το μεγαλύτερο από τα a και b και το θεώρημα κυριαρχίας.
2. Υπολογισμός άνω φράγματος με το μικρότερο από τα a και b και το θεώρημα κυριαρχίας.
3. Αν το κάτω φράγμα είναι ίσο με το άνω φράγμα έχουμε ασυμπτωτική εκτίμηση της συνάρτησης πολυπλοκότητας. Αλλιώς η μέθοδος

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

2. Επίλυση με τα φράγματα

- Αρχικά γράφουμε τις δύο αναδρομικές σχέσεις μέσω των οποίων θα υπολογίσουμε το άνω και το κάτω φράγμα. Το άνω φράγμα θα προκύψει με το μικρότερο από τα a,b και το κάτω φράγμα θα προκύψει με το μεγαλύτερο από τα a,b

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

Λύση:
Το άνω φράγμα θα προκύψει από την επίλυση της αναδρομικής σχέσης:

$$\mathrm{A}(n) = 2\mathrm{A}\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

Και το κάτω φράγμα θα προκύψει από την επίλυση της αναδρομικής σχέσης:

$$\mathrm{K}(n) = 2\mathrm{K}\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

2. Επίλυση με τα φράγματα (1. Υπολογισμός του άνω φράγματος)

- Ο υπολογισμός του άνω φράγματος θα γίνει με το θεώρημα κυριαρχίας.

Υπολογισμός άνω φράγματος $A(n) = 2A\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Έχω: $a = 2, \quad b = 3, \quad f(n) = n^2, \quad \log_b a = \log_3 2 = 0{,}63$

Ισχύει: $f(n) = n^2 = \Omega(n^{0,63+\varepsilon})$ για κάποια σταθερά ε>0

Ελέγχω αν υπάρχει c<1 τέτοιο ώστε:

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow 4f\left(\frac{n}{2}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow 2\left(\frac{n}{3}\right)^2 \le cn^2 \Leftrightarrow 2\frac{n^2}{3^2} \le cn^2 \Leftrightarrow \frac{2}{9} \le c$$

Άρα ισχύει για 2/9 ≤ c < 1.
Άρα από την Γ' περίπτωση του Θεωρήματος Κυριαρχίας έπεται ότι:

$$A(n) = \Theta(n^2)$$

Άρα

$$T(n) = O(n^2)$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

2. Επίλυση με τα φράγματα (2. Υπολογισμός του κάτω φράγματος)

- Ο υπολογισμός του άνω φράγματος θα γίνει με το θεώρημα κυριαρχίας.

Υπολογισμός κάτω φράγματος $K(n) = 2K\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

Έχω: $a = 2, \quad b = 4, \quad f(n) = n^2, \quad \log_b a = \log_4 2 = 0{,}5$

Ισχύει: $f(n) = n^2 = \Omega(n^{0{,}5+\varepsilon})$ για κάποια σταθερά ε>0

Ελέγχω αν υπάρχει c<1 τέτοιο ώστε:

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow 4f\left(\frac{n}{2}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow 2\left(\frac{n}{4}\right)^2 \le cn^3 \Leftrightarrow 2\frac{n^2}{4^2} \le cn^3 \Leftrightarrow \frac{2}{16} \le c \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le c$$

Άρα ισχύει για 1/8 ≤ c < 1.

Άρα από την Γ’ περίπτωση του Θεωρήματος Κυριαρχίας έπεται ότι:

$$K(n) = \Theta(n^2)$$

Άρα

$$T(n) = \Omega(n^2)$$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

2. Επίλυση με τα φράγματα (3. Συμπέρασμα για την ασυμπτωτική πολ/τα)

- Αν το άνω φράγμα και το κάτω φράγμα είναι ίδια, τότε έχουμε ασυμπτωτική εκτίμηση της πολυπλοκότητάς του.

(...συνέχεια…)
Συνεπώς από τα προηγούμενα:

Ισχύει: $T(n) = O(n^2)$

και $T(n) = \Omega(n^2)$

Συνεπώς $T(n) = \Theta(n^2)$

- Αν τα φράγματα είναι διαφορετικά, <u>η μέθοδος των φραγμάτων έχει αποτύχει</u>!

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

3. Επίλυση με την δραστηριότητα 3.6

- Η αναδρομική σχέση T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n) λύνεται και με την δραστηριότητα 3.6 του βιβλίου

ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ 3.6

Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

1. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$ τότε $\boxed{T(n)=\Theta(f(n))}$
2. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ τότε $\boxed{T(n)=\Theta(f(n)\cdot\log n)}$
3. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$ τότε η δραστηριότητα 3.6 έχει αποτύχει και πάμε υποχρεωτικά με δένδρο αναδρομής

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

3. Η αναδρομή T(n)=T(n/a)+T(n/b)+f(n)

3. Επίλυση με την δραστηριότητα 3.6 (Παραδείγματα)

- Η εφαρμογή της δραστηριότητας 3.6 είναι πολύ εύκολη διότι μας δίνει έτοιμη την λύση σε κάποιες αναδρομές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}<1$ άρα από την δραστ.3.6 ισχύει: $T(n)=\Theta(n^2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+n$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ άρα από την δραστ.3.6 ισχύει: $T(n)=\Theta(n\cdot\log n)$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

- Υπολογίστε την ακριβή λύση των αναδρομών με την μέθοδο επανάληψης:

$$A) \quad T(n)=\begin{cases} 4T(n-3)+5, & \alpha\nu\ n>0 \\ 0, & \alpha\nu\ n=0 \end{cases}$$

$$B) \quad T(n)=\begin{cases} T(n-1)+2n^2, & \alpha\nu\ n>0 \\ 1, & \alpha\nu\ n=0 \end{cases}$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

- Υπολογίστε ασυμπτωτική εκτίμηση των αναδρομών χρησιμοποιώντας το δένδρο αναδρομής:

A) $$T(n)=\begin{cases} T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2, & \alpha\nu\ n>1 \\ 1, & \alpha\nu\ n=1 \end{cases}$$

B) $$T(n)=\begin{cases} T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+n, & \alpha\nu\ n>1 \\ 1, & \alpha\nu\ n=1 \end{cases}$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

- Χρησιμοποιείστε την μέθοδο υπολογισμού φραγμάτων για την επίλυση της αναδρομής

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n^2$$

Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 4

- Υπολογίστε μια ασυμπτωτική εκτίμηση των αναδρομών

$$A)\quad T(n)=T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)+\log n$$

$$B)\quad T(n)=T\left(\frac{2n}{5}\right)+T\left(\frac{n}{6}\right)+n^3$$

$$C)\quad T(n)=T\left(\frac{2n}{3}\right)+T\left(\frac{n}{2}\right)+n^2$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 5

Για την επίλυση ενός προβλήματος έχουμε στην διάθεσή μας τρείς αλγόριθμούς.

- (A1) Ο πρώτος αλγόριθμος για επιλύσει ένα πρόβλημα μεγέθους n, επιλύει αναδρομικά επτά υποπροβλήματα μεγέθους n/3 το καθένα και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο n^3.

- (A2) Ο δεύτερος αλγόριθμος για να επιλύσει ένα πρόβλημα μεγέθους n, επιλύει αναδρομικά δέκα υποπροβλήματα μεγέθους n/2 το καθένα και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο n.

- (A3) Ο τρίτος αλγόριθμος επιλύει ένα υποπρόβλημα μεγέθους n-1 και βρίσκει την λύση του αρχικού προβλήματος σε χρόνο n^3.

Να βρεθούν οι ασυμπτωτικοί χρόνοι επίλυσης του προβλήματος για τον κάθε αλγόριθμο, και να επιλέξετε τον ταχύτερο αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Theta(n^4)$