ΛΗΜΜΑ ΑΝΤΛΗΣΗΣ για ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Το Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

Ιδιότητα	Συμβ/ρα	Δυναμη
Ισότητα $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$	0^p1^p	uv^2w
Αναλογία $\{0^{2n}1^{3n} \mid n \geq 0\}$	$0^{2p}1^{3p}$	uv^2w
Παλινδρομ/τα $\{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$	$a^pb^pcb^pa^p$	uv^2w
Ανισότητα $\{a^nb^m \mid n \leq m\}$	a^pb^p	uv^2w
$\{a^nb^m \mid n < m\}$	a^pb^{p+1}	uv^2w
$\{a^nb^m \mid n > m\}$	$a^{p+1}b^p$	uv^0w
Συμμετρία στο Κέντρο $\{a^nb^mc^md^n \mid n,m \geq 0\}$	$a^pb^pc^pd^p$	uv^2w
$\{a^{n+m}b^mc^n \mid n,m \geq 0\}$ $\{a^ib^jc^k \mid i = j+k\}$	$a^{2p}b^pc^p$	uv^2w
$\{a^ib^jc^k \mid i > j+k\}$	$a^{2p+1}b^pc^p$	uv^0w
Παράθεση $\{a^nb^nc^md^m \mid n,m \geq 0\}$	$a^pb^pc^pd^p$	uv^2w
$\{a^nb^{n+m}c^n \mid n,m \geq 0\}$ $\{a^ib^jc^k \mid j = i+k\}$	$a^pb^{2p}c^p$	uv^2w
Διάζευξη Συμβ/ρών $\{a^ib^jc^k \mid i = j \text{ ή } j = k\}$	$a^pb^pc^p$	uv^2w

$L_1 = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι κανονική. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p1^p$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $2p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvw$ με $0 < |v|$ και $|uv| \leq p$. Επιπλέον για κάθε φυσικό k θα ισχύει $uv^kw \in L$

Επειδή $|uv| \leq p$ έπεται ότι το uv θα περιέχεται στο 0^p. Έτσι η λέξη s θα αποτελείται από τα εξής τμήματα:

$$\begin{cases} u = 0^i, & i \geq 0 \\ v = 0^j, & j > 0 \\ w = 0^{p-i-j}1^p \end{cases}$$

Η συμβολοσειρά uv^2w θα είναι $0^{p+j}1^p$ συνεπώς δεν θα ανήκει στην L αφού δεν θα έχει ίσα 0 και 1

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι κανονική.

(1) Επιλέγουμε μια **συμβολοσειρά s** που ανήκει στην γλώσσα που το πρώτο σύμβολο είναι
- (α) υψωμένο τουλάχιστον στην p
- (β) ανήκει οριακά στην γλώσσα

(2) Υπολογίζουμε το μήκος της συμβολοσειράς που επιλέξαμε στο (1)

(3) Το uv θα περιέχεται στο πρώτο σύμβολο που έχουμε επιλέξει.

(4) Το πρώτο σύμβολο της s υψωμένο στην i

(5) Το πρώτο σύμβολο της s υψωμένο στην j

(6) Ακριβώς ίδια συμβολοσειρά με την s όπου στον εκθέτη του 1ου σύμβολου θα έχει αφαιρεθεί το $-i-j$

(7) Θα είναι:
- uv^2w ή
- uv^0w

(8) Αντίστοιχα από την επιλογή μας στο (7)
- Θέτουμε $+j$ στον 1ο εκθέτη της s.
- Θέτουμε $-j$ στον 1ο εκθέτη της s.

(9) Αιτιολογούμε γιατί η συμβολοσειρά που έχουμε δεν ανήκει στην γλώσσα.

ΔΙΑΚΡΙΝΟΜΕΝΕΣ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΕΣ

Έστω L μια κανονική γλώσσα. Ορίζουμε ότι:

- Δύο συμβολοσειρές x,y είναι **<u>διακριν<u>ό</u>μενες ανά δυο</u>** αν και μόνο αν υπάρχει συμβολοσειρά z τέτοια ώστε μια μόνο από τις xz και yz να ανήκει στην γλώσσα.
- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν μια γλώσσα έχει n διακρινόμενες ανά δύο συμβολοσειρές, τότε το αυτόματό της θα πρέπει να έχει τουλάχιστον n καταστάσεις.

Χρήση του ορισμού για να αποδείξουμε ότι η γλώσσα $L = \{0^n 1^n |\, n \geq 0\}$ δεν είναι κανονική

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι είναι κανονική. Συνεπώς θα υπάρχει πεπερασμένο αυτόματο με n καταστάσεις που την αναγνωρίζει.

Θεωρούμε τις συμβολοσειρές 0, 0^2, 0^3, 0^4,…,0^m (όπου m>n)

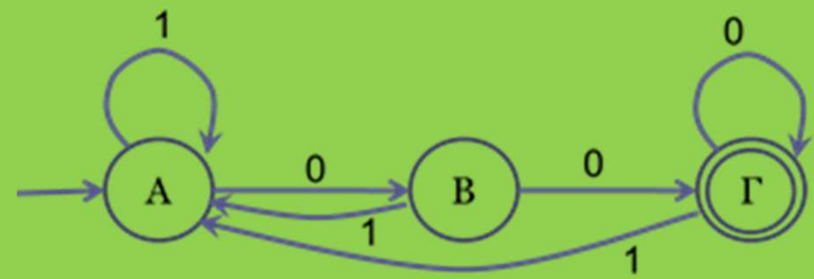
Οι παραπάνω συμβολοσειρές είναι διακρινόμενες ανά δύο:
Π.χ. Έστω 0^i και 0^j με i $\neq j$. Πρέπει να βρούμε ένα z τέτοιο ώστε ένα μόνο από τα $0^i z$ και $0^j z$ να ανήκει στην γλώσσα. Επιλέγουμε $z = 1^i$ οπότε $0^i 1^i$ ανήκει στην γλώσσα και $0^j 1^i$ δεν ανήκει στην γλώσσα. Συνεπώς οι m συμβολοσειρές είναι διακρινόμενες ανά δύο.

Συνεπώς κάθε αυτόματό της θα έχει τουλάχιστον m>n καταστάσεις.

Άτοπο. Άρα η L δεν είναι κανονική.

Χρήση του ορισμού των διακρινόμενων συμβολοσειρών για να αποδείξουμε ότι ένα ΝΠΑ έχει ελάχιστο πλήθος καταστάσεων.

<u>Απόδειξη:</u> Το ακόλουθο ΝΠΑ της γλώσσας L={w ∈ $\{0,1\}^*$ | w τελειώνει με 00} έχει ελάχιστο πλήθος καταστάσεων:



Οι συμβολοσειρές $s_1 = \varepsilon$, $s_2 = 0$, $s_3 = 00$ είναι διακρινόμενες ανά δύο:

s_1 και s_2 είναι διακρινόμενες. Επιλέγω $z = 0$ και έχουμε:
- $s_1 z = \varepsilon 0 = 0 \notin \mathrm{L}$
- $s_2 z = \quad 00 \in \mathrm{L}$

s_1 και s_3 είναι διακρινόμενες. Επιλέγω $z = \varepsilon$ και έχουμε:
- $s_1 z = \varepsilon\varepsilon \quad = \varepsilon \notin \mathrm{L}$
- $s_3 z = 00\varepsilon = 00 \in \mathrm{L}$

s_2 και s_3 είναι διακρινόμενες. Επιλέγω $z = \varepsilon$ και έχουμε:
- $s_2 z = 0\varepsilon \quad = 0 \notin \mathrm{L}$
- $s_3 z = 00\varepsilon = 00 \in \mathrm{L}$

Συνεπώς οποιοδήποτε ΝΠΑ της L απαιτεί τουλάχιστον 3 καταστάσεις.