ΚΛΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΙΕΡΑΡΧΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ:

ΣΤΑΘΕΡΕΣ < ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ < ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ < ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ < ΥΠΕΡΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

$\Theta(1)$ $\Theta(log^K n)$ $\Theta(n^K)$ $\Theta(\alpha^n)$ $\Theta(n!)$ $\Theta(n^n)$

Και πιο αναλυτικά:

	Μορφή Συναρτήσεων	Σχόλια
ΣΤΑΘΕΡΕΣ	$\Theta(1)$	
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ	$loglogn < logn < log^K n$	Το K>1 σταθερά «καθαρό» n
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ	$n < n^2 < \cdots < n^K$	Το K σταθερά «καθαρό» n
ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ	$a^n < \cdots < 2^n < 3^n < \cdots < b^n$	a>1,b: Σταθερές «καθαρό» n
ΥΠΕΡΕΚΘΕΤΙΚΕΣ	$n! < n^n$	«καθαρό» n

Μικρότερη Πολυπλοκότητα
= Πιο Γρήγορος Αλγόριθμος
= Καλύτερη Πολυπλοκότητα

Μεγαλύτερη Πολυπλοκότητα
= Πιο Αργός Αλγόριθμος
= Χειρότερη Πολυπλοκότητα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μία συνάρτηση που δεν έχει μία από τις παραπάνω μορφές είναι **απροσδιοριστη** και για να την συγκρίνουμε με άλλες πρέπει να ακολουθήσουμε ειδική διαδικασία (εκθετικές με βάση το 2)

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Παράδειγμα: Ιεραρχήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας:

$\sqrt{n^6} + 5n(n+1)$ $4n^{logn}$ $n^2 + 2 \cdot 5^n$

Απάντηση:

$f_1(n) = \sqrt{n^6} + 5n(n+1) = n^{\frac{6}{2}} + 5n^2 + 5n$
$= n^3 + 5n^2 + 5n = \Theta(n^3)$
$f_2(n) = 4n^{logn} = \Theta(n^{logn})$
$f_3(n) = n^2 + 2 \cdot 5^n = \Theta(5^n)$

(1): Επειδή κάνουμε ασυμπτωτική σύγκριση των συναρτήσεων εξάγουμε το Θ(.) των συναρτήσεων Αν έχουμε έστω μία απροσδιόριστη συνάρτηση προχωράμε στο επόμενο βήμα

Σε περίπτωση απροσδιοριστίας => Εκθετικές με βάση 2 στους όρους του αθροίσματος

Εκφράζουμε τις συναρτήσεις ως εκθετικές με βάση το 2:

f_1: $n^3 = 2^{\log(n^3)}$
f_2: $n^{logn} = 2^{\log(n^{logn})}$
f_3: $5^n = 2^{\log(5^n)}$

(2): Γράφουμε τα Θ(.) ως εκθετικές με βάση το 2.

Για τους εκθέτες έχουμε:

f_1: $\log(n^3) = 3\log n$
f_2: $\log(n^{logn}) = \log n \cdot \log n = (\log n)^2 = log^2 n$
f_3: $\log(5^n) = n \cdot \log 5 = 2{,}32n$

(3): Κάνουμε πράξεις στους εκθέτες για να είναι όλες οι μορφές στην βασική ιεραρχία.

Σε περίπτωση απροσδιοριστίας => Ξανά εκθετικές με βάση το 2

Ισχύει: $3\log n < log^2 n < 2{,}32n$

Άρα έπεται: $f_1 < f_2 < f_3$

(4): Σε περίπτωση ισόπαλίας => Προτεραιότητα στον πολλαπλασιασμό και έπειτα στην πρόσθεση (εναλλακτικά όρια με χρήση κανόνα De L'Hospital)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ (και ΕΚΤΙΜΗΣΗ) ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Ο λογάριθμος μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Τον υπολογίζουμε σύμφωνα με την εξίσωση του λογαρίθμου (δοκιμάζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις)

Παράδειγμα 1: $log_2 32 =?$

Λύση: $log_2 32 = 5$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$2^x = 32$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^{\boxed{5}} = 32$

Παράδειγμα 2: $log_6 216 =?$

Λύση: $log_6 216 = 3$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$6^x = 216$
$6^1 = 6$
$6^2 = 36$
$6^{\boxed{3}} = 216$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Ο λογάριθμος δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς, αλλά παρατηρούμε ότι βάση και αριθμός του λογαρίθμου είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού. Τότε κάνουμε αλλαγή βάσης βάζοντας νέα βάση τον κοινό αριθμό τ. Τον υπολογίζουμε σύμφωνα με την εξίσωση του λογαρίθμου (δοκιμάζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις)

Παράδειγμα: $log_9 27 =?$

Λύση: $log_9 27 = \frac{log_3 27}{log_3 9} = \frac{3}{2} = 1.5$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$3^x = 27$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Ο λογάριθμος δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς, ούτε η βάση και ο αριθμός του λογαρίθμου είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού. Τότε κάνουμε εκτίμηση του λογαρίθμου υπολογίζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις της βάσης στις οποίες μπορούμε να εντοπίσουμε τον αριθμό.

Παράδειγμα: $log_2 11 =?$

Λύση: $3 < log_2 11 < 4$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$2^x = 11$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^{\boxed{3}} = 8$
$2^{\boxed{4}} = 16$ ← 11