

ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΔΕΝΔΡΑ

Μάθημα 6.2: Συνδετικά Δένδρα

Δημήτρης Ψούνης



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Συνδετικό Δένδρο

1. Ορισμός Συνδετικού Δένδρου
2. Διάσχιση Πρώτα Κατά Πλάτος
3. Διάσχιση Πρώτα Κατά Βάθος

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

1. Ορισμός Ελάχιστου Συνδετικού Δένδρου
2. Ο αλγόριθμος του Prim

3. Σύνοψη για τους Αλγόριθμους

1. Συντομότερα Μονοπάτια
2. Συνδετικό Δένδρο
3. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές

A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο A

- Νέοι Ορισμοί (Συνδετικό Δένδρο, Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο και Αλγόριθμοι Κατά Πλάτος, Κατά Βάθος, Prim)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο B

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

B. Θεωρία

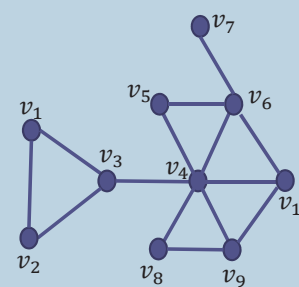
1. Συνδετικά Δένδρα

1. Ορισμός Συνδετικού Δένδρου

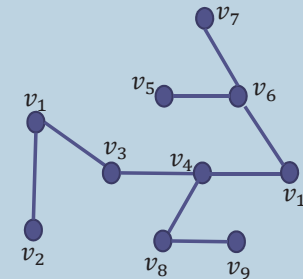
Ορισμός:

- Σε ένα συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ ορίζουμε ως **συνδετικό δένδρο T** (ή αλλιώς γεννητορικό ή επικαλυπτικό δένδρο) του γραφήματος:
 - Ένα υπογράφημα του G που είναι δένδρο και περιέχει όλες τις κορυφές του G

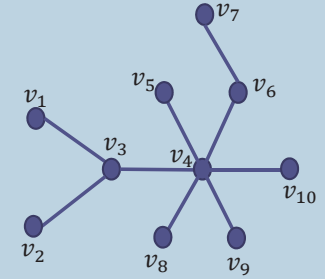
Παράδειγμα: Βλέπουμε ένα γράφημα και δύο συνδετικά του δένδρα (ένα γράφημα έχει πολλά συνδετικά δένδρα)



$G = (V, E)$



$T_1 = (V, E')$



$T_2 = (V, E'')$

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

1. Ορισμός Συνδετικού Δένδρου

Ένα συνδετικό δένδρο:

- Είναι ένα δένδρο από τις κορυφές και τις ακμές του γραφήματος
- Άρα πρέπει να αφαιρέσουμε όλες τις ακμές απαιτούνται, ώστε το γράφημα να είναι συνδεόμενο και να έχει $n-1$ ακμές.

Και μαθαίνουμε δύο αλγόριθμους που βρίσκουν ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο του γραφήματος με συστηματικό τρόπο:

➤ **Τον αλγόριθμο διάσχισης πρώτα κατά πλάτος**

➤ **Τον αλγόριθμο διάσχισης πρώτα κατά βάθος**

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (1. Σκιαγράφηση)

Σκιαγράφηση Αλγόριθμου Πρώτα κατά Πλάτος:

«κατασκευή του δένδρου κατά επίπεδα»

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεόμενο γράφημα και παράγει ένα συνδετικό δένδρο.

➤ Στην αρχικοποίηση:

- Τοποθετούμε αυθαίρετα μία κορυφή στο συνδετικό δένδρο

➤ Σε κάθε βήμα:

- Επιλέγουμε τρέχουσα κορυφή (με βάση την σειρά με την οποία μπήκε στο συνδετικό δένδρο)
- Κάθε γειτονική της κορυφή που δεν έχει μπει στο δένδρο την θέτουμε ως παιδί της (με αυθαίρετη σειρά)

➤ Τερματισμός:

- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

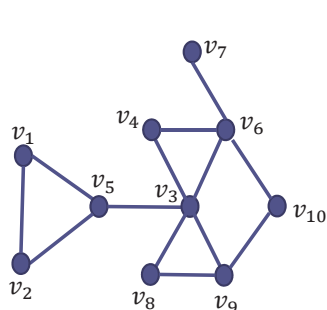
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

➤ **Βήμα 0:** (Αυθαίρετα) τοποθετώ την v_1 στο συνδετικό δένδρο



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

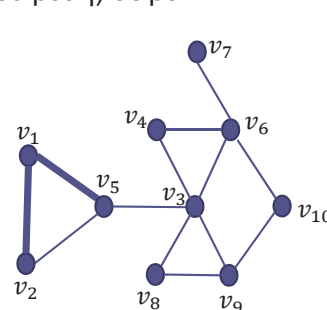
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

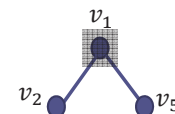
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

➤ **Βήμα 1:** Εξετάζεται η v_1 . Οι γειτονές v_2, v_5 μπαίνουν σαν παιδιά της με (αυθαίρεση) σειρά.



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

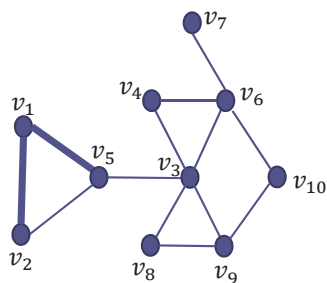
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

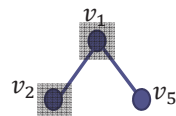
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

➤ **Βήμα 2:** Εξετάζεται η v_2 . Οι γείτονές της ανήκουν ήδη στο δένδρο.



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

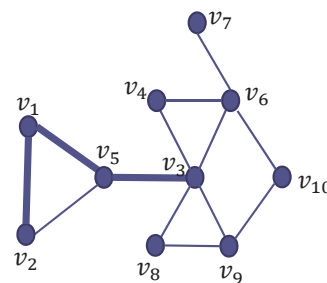
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

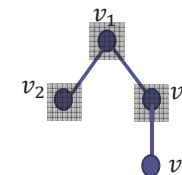
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

➤ **Βήμα 3:** Εξετάζεται η v_5 . Η γειτονική της κορυφή v_3 (που δεν είναι ήδη στο δένδρο) μπαίνει ως παιδί της.



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

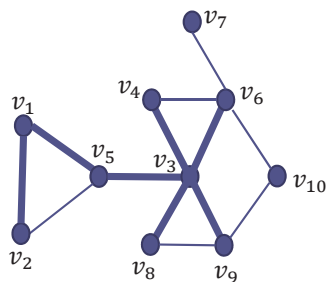
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

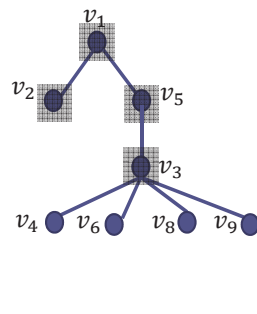
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

➤ **Βήμα 4:** Εξετάζεται η v_3 . Οι γειτονικές της κορυφές v_4 , v_6 , v_8 , v_9 (που δεν είναι ήδη στο δένδρο) μπαίνουν ως παιδιά της.



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

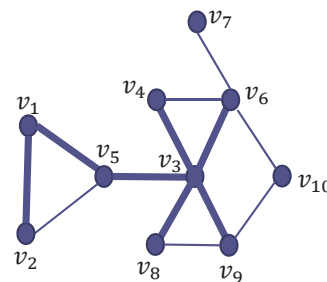
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

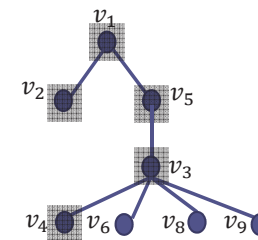
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

➤ **Βήμα 5:** Εξετάζεται η v_4 . Οι γείτονές της ανήκουν ήδη στο δένδρο.



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

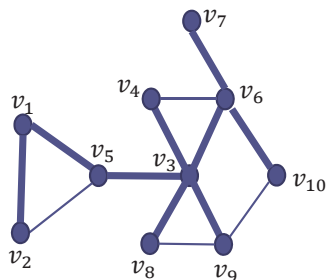
B. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

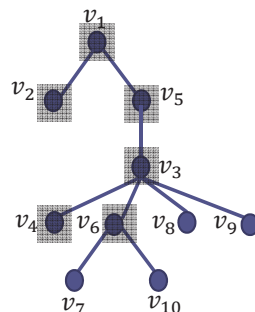
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Πλάτος

- **Βήμα 6:** Εξετάζεται η v_4 . Οι γειτονικές της κορυφές v_7, v_{10} (που δεν είναι ήδη στο δένδρο) μπαίνουν ως παιδιά της. Ο αλγόριθμος τερματίζει διότι όλες οι κορυφές μπήκαν στο δένδρο!



ГРАФΗΜΑ



ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

B. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (3. Παρατηρήσεις)

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ακολουθήσαμε δύο συμβάσεις:

- Ξεκινήσαμε από την κορυφή v1
- Τοποθετήσαμε τα παιδιά κάτω από την τρέχουσα κορυφή με βάση την ετικέτα τους (από την μικρότερη στην μεγαλύτερη ετικέτα)

Συχνά στις εκφωνήσεις των ασκήσεων μας δίνονται κανόνες για να μην παίρνουμε αυθαίρετες αποφάσεις:

- Μας δίνεται η κορυφή από την οποία θα ξεκινήσουμε (**κορυφή-αφετηρία**).
- Μας δίνεται μια **διάταξη των κορυφών** ώστε να τοποθετούμε τα παιδιά με ένα μοναδικό τρόπο.
 - Χρησιμοποιούμε την διάταξη **μόνο όταν πρόκειται να τοποθετήσουμε τα παιδιά** κάτω από την τρέχουσα κορυφή και τα τοποθετούμε με τη σειρά που τα βλέπουμε στη διάταξη.

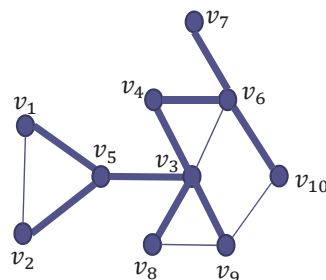
B. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

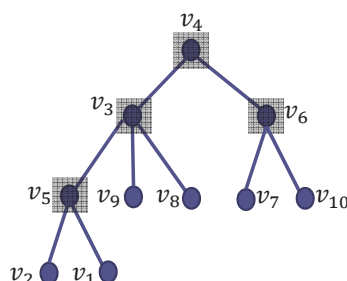
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (3. Παρατηρήσεις)

Παράδειγμα Εκτέλεσης κάτω από συμβάσεις 1

- Εκτέλεση με αφετηρία τη v_4 . Διάταξη κορυφών (v_4 v_7 v_5 v_2 v_9 v_{10} v_8 v_1 v_3 v_6)



ГРАФІМА



ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

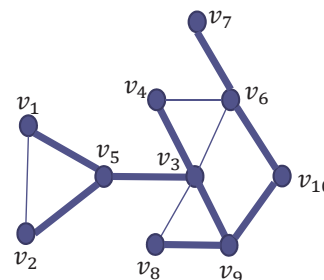
B. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

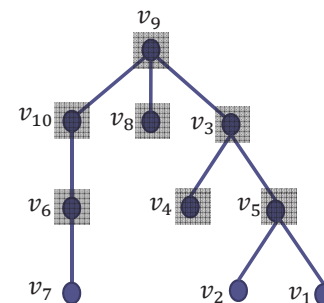
2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (3. Παρατηρήσεις)

Παράδειγμα Εκτέλεσης κάτω από συμβάσεις 2

- Εκτέλεση με αφηρηρά τη v_0 . Διάταξη κορυφών ($v_4 v_7 v_{10} v_2 v_9 v_8 v_5 v_1 v_3 v_6$)



ГРАФΗΜΑ



ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

2. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Πλάτος (4. Ψευδογλώσσα)

Αλγόριθμος Κατά Πλάτος

Είσοδος: Συνδεδεμένος Γράφος $G=(V,E)$

Εξοδος: Συνδετικό Δένδρο $T=(V,E')$ του G

```
procedure Breadth-First-Search( $G=(V,E)$ )
```

```
  Θέσε  $V'=\emptyset, E'=\emptyset$ 
```

```
  Θέσε  $v_1$  στο  $V'$  και στο επίπεδο 0. Θέσε  $i=0$ 
```

```
  Επανάλαβε όσο  $|V'| < |V|$  do
```

```
    Θέσε  $i=i+1$ 
```

```
    Για κάθε κορυφή  $v$  του επιπέδου  $i-1$  με τη σειρά που μπήκαν στο επίπεδο
```

```
      Για όλα τα  $(v,w) \in E$  και  $w \in V-V'$ 
```

```
        Θέσε  $(v,w)$  στο  $E'$  και  $w$  στο  $V'$  και στο επίπεδο  $i$  σύμφωνα με τη  
        διάταξη κορυφών
```

```
      Τέλος-Επανάληψης
```

```
    Τέλος-Επανάληψης
```

```
  Τέλος-Επανάληψης
```

```
  Επέστρεψε το  $T$ 
```

```
end procedure
```

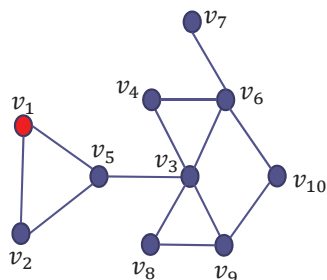
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 0:** (Αυθαίρετα) τοποθετώ την v_1 στο συνδετικό δένδρο



ΓΡΑΦΗΜΑ

v_1

ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (1. Σκιαγράφιση)

Σκιαγράφιση Αλγόριθμου Πρώτα κατά Βάθος:

«Βολίδα που εξερευνά το γράφο κατασκευάζοντας το συνδετικό δένδρο»

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεδεμένο γράφημα και παράγει ένα συνδετικό δένδρο.

➤ Στην αρχικοποίηση:

➤ Τοποθετούμε την βολίδα σε μια (αυθαίρετη) κορυφή. Την κορυφή την τοποθετούμε στο συνδετικό δένδρο

➤ Σε κάθε βήμα:

➤ Αν υπάρχει γειτονική κορυφή που δεν έχει επισκεφθεί, μεταβαίνει και την τοποθετεί στο συνδετικό δένδρο μαζί με την ακμή μετάβασης.

➤ Αν δεν υπάρχει κορυφή που δεν έχει επισκεφθεί, πηγαίνει στην ακριβώς προηγούμενη κορυφή που είχε επισκεφθεί.

➤ Τερματισμός:

➤ Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

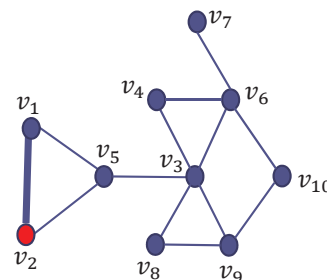
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 1:** Μετάβαση της βολίδας στην v_2



ΓΡΑΦΗΜΑ

v_1
 v_2

ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ



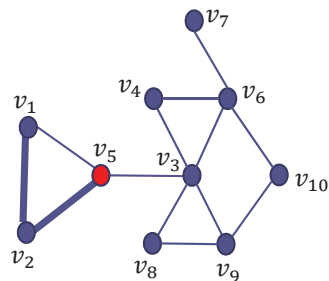
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

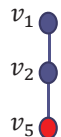
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 2:** Μετάβαση της βολίδας στην v_5



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ



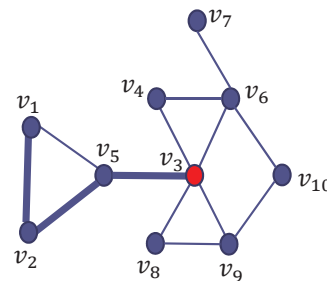
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 3:** Μετάβαση της βολίδας στην v_3



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ



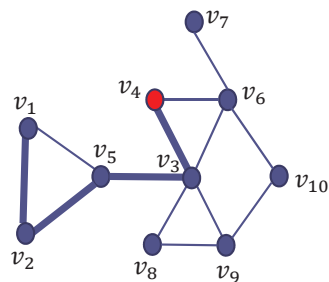
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

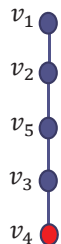
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 4:** Μετάβαση της βολίδας στην v_4



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ



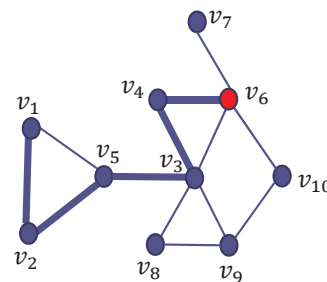
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

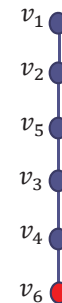
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 5:** Μετάβαση της βολίδας στην v_6



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

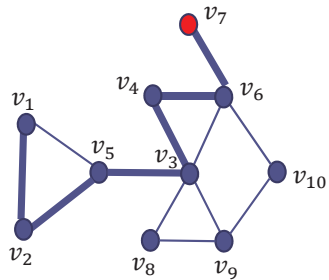
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

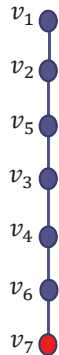
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 6:** Μετάβαση της βολίδας στην v_7



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

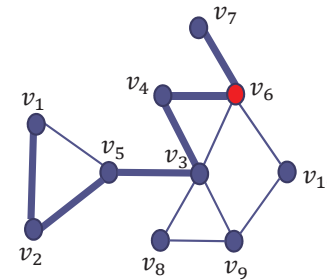
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 7:** Οπισθοδρόμηση βολίδας στην v_6



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

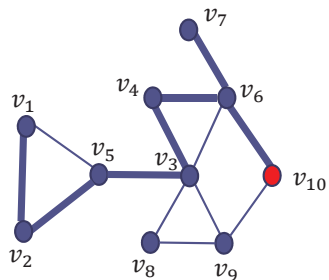
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

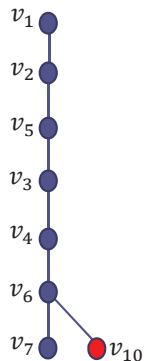
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 8:** Μετάβαση της βολίδας στην v_{10}



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

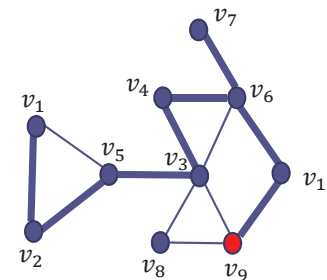
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

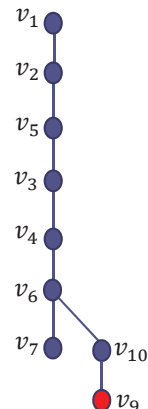
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

➤ **Βήμα 9:** Μετάβαση της βολίδας στην v_9



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

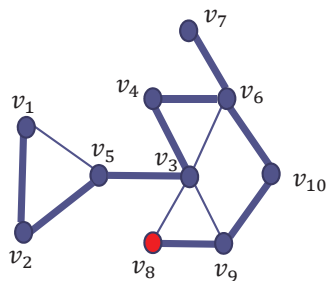
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

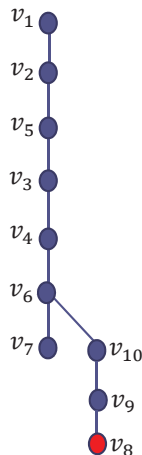
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Παράδειγμα Πρώτα Κατά Βάθος

- **Βήμα 10:** Μετάβαση της βολίδας στην v_8 . Ο αλγόριθμος τερματίζει γιατί όλες οι κορυφές μπήκαν στο συνδετικό δένδρο.



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ ΤΗΣ ΚΑΤΑ ΒΑΘΟΣ

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (3. Παρατηρήσεις)

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ακολουθήσαμε δύο συμβάσεις:

- Ξεκινήσαμε από την κορυφή v_1
- Η βολίδα όταν είχε να επιλέξει σε ποιον γείτονα θα πάει διαλέγαμε την κορυφή με τον μικρότερο δείκτη κορυφής.

Συχνά στις εκφωνήσεις των ασκήσεων μας δίνονται κανόνες για να μην παίρνουμε αυθαίρετες αποφάσεις:

- Μας δίνεται η κορυφή από την οποία θα ξεκινήσουμε (**κορυφή-αφετηρία**).
- Μας δίνεται μια **διάταξη των κορυφών** για την ιεράρχιση των κορυφών
 - Χρησιμοποιούμε την διάταξη **μόνο όταν η βολίδα επιλέγει τον γείτονα που θα επισκεφθεί** και συγκεκριμένα επιλέγει τον γείτονα που είναι αριστερότερα στη διάταξη.

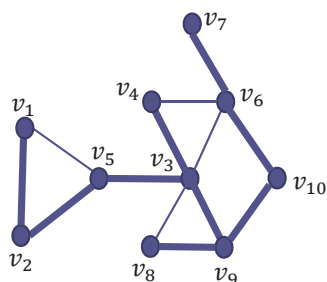
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

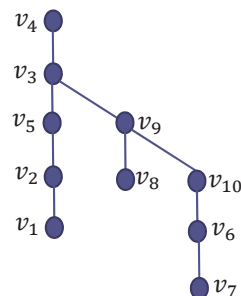
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (3. Παρατηρήσεις)

Παράδειγμα Εκτέλεσης κάτω από συμβάσεις 1

- Εκτέλεση με αφετηρία τη v_4 . Διάταξη κορυφών (v_4 v_7 v_5 v_2 v_9 v_8 v_{10} v_1 v_3 v_6)



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

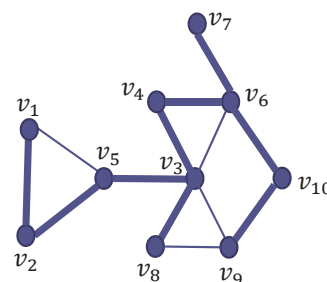
Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

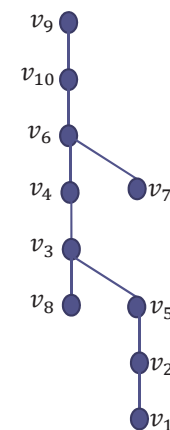
3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (3. Παρατηρήσεις)

Παράδειγμα Εκτέλεσης κάτω από συμβάσεις 2

- Εκτέλεση με αφετηρία τη v_9 . Διάταξη κορυφών (v_4 v_7 v_{10} v_2 v_9 v_8 v_5 v_1 v_3 v_6)



ΓΡΑΦΗΜΑ



ΣΥΝΔΕΤΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (4. Ψευδογλώσσα)

Αλγόριθμος Κατά Βάθος

Είσοδος: Συνδεδεμένος Γράφος $G=(V,E)$

Εξοδος: Συνδετικό Δένδρο $T=(V,E')$ του G

procedure Depth-First-Search($G=(V,E)$)

 Θέσε $V'=\emptyset, E'=\emptyset$

 Θέσε v_1 στο V' και $w=v_1$

 Επανάλαβε όσο $|V'| < |V|$ do

 Αν $(w, v_k) \in E$ με $v_k \notin V'$ και k το μικρότερο δυνατό

 θέσε v_k στο V'

 θέσε (w, v_k) στο E'

$w=v_k$

 Αλλιώς

 θέσε w =πατέρας του w στο T

 Τέλος αν

Τέλος-Επανάληψης

Επέστρεψε το T

end procedure

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (3. Παρατηρήσεις)

Γενικές Παρατηρήσεις για τις διασχίσεις:

- Ένα γράφημα έχει συνδετικό δένδρο αν και μόνο αν είναι συνδεδεμένο
- Ένα γράφημα μπορεί να έχει πολλά συνδετικά δένδρα.
- Ένα δένδρο έχει μόνο ένα συνδετικό δένδρο (τον εαυτό του)

Ισχύει επίσης ότι:

- Η κατά πλάτος διάσχιση παράγει το δένδρο συντομότερων μονοπατιών από την αφετηρία, όταν όλα τα βάρη είναι ίσα.

Β. Θεωρία

1. Συνδετικά Δένδρα

3. Ο Αλγόριθμος Διάσχισης Πρώτα κατά Βάθος (3. Παρατηρήσεις)

Οι αλγόριθμοι Κατά Βάθος και Κατά Πλάτος λέγονται και «διασχίσεις» γιατί δίνουν μια ακολουθία (σειρά) επίσκεψης όλων των κορυφών του γραφήματος.

- Η διάσχιση είναι η σειρά με την οποία μπήκαν στο συνδέτικο δένδρο

Οι διασχίσεις των 3 εκτελέσεων της κατά πλάτος των προηγούμενων παραδειγμάτων:

- $V_1 V_2 V_5 V_3 V_4 V_6 V_8 V_9 V_7 V_{10}$
- $V_4 V_3 V_6 V_5 V_9 V_8 V_7 V_{10} V_2 V_1$
- $V_9 V_{10} V_8 V_3 V_6 V_4 V_5 V_7 V_2 V_1$

Ενώ αντίστοιχα οι διασχίσεις των 3 εκτελέσεων της κατά βάθος των προηγούμενων παραδειγμάτων:

- $V_1 V_2 V_5 V_3 V_4 V_6 V_7 V_{10} V_9 V_8$
- $V_4 V_3 V_5 V_2 V_1 V_9 V_8 V_{10} V_6 V_7$
- $V_9 V_{10} V_6 V_4 V_3 V_8 V_5 V_2 V_1 V_7$

Β. Θεωρία

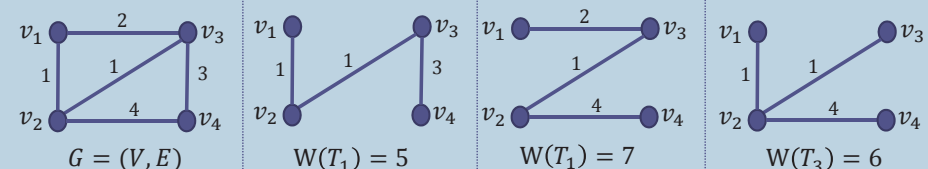
2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

1. Ορισμός Συνδετικού Δένδρου

Ορισμός:

- Σε ένα συνδεδεμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, W)$ ορίζουμε ως **ελάχιστο συνδετικό δένδρο** T (ή αλλιώς ελάχιστο γεννητορικό ή ελάχιστο επικαλυπτικό δένδρο) του γραφήματος:
 - Ένα υπογράφημα του G που είναι δένδρο, περιέχει όλες τις κορυφές του G και έχει ελάχιστο βάρος (άθροισμα βαρών των ακμών του)

Παράδειγμα: Βλέπουμε ένα γράφημα και τρία συνδετικά του δένδρα.



- Το T_1 είναι ελάχιστο συνδετικό δένδρο (δηλαδή μεταξύ όλων των συνδετικών δένδρων είναι αυτό που οι ακμές του έχουν ελάχιστο άθροισμα βαρών)
 - Τα T_2, T_3 είναι συνδετικά δένδρα, αλλά όχι ελάχιστα συνδετικά δένδρα.
- Ο αλγόριθμος του Prim υπολογίζει το ελάχιστο συνδετικό δένδρο ενός γραφήματος.

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (1. Σκιαγράφηση)

Σκιαγράφηση Αλγόριθμου Prim:

➤ Στην αρχικοποίηση:

- Τοποθετούμε αυθαίρετα μια κορυφή στο συνδετικό δένδρο

➤ Σε κάθε βήμα:

- Υποψήφιος ακμές για να μπουν στο συνδετικό δένδρο είναι εκείνες οι ακμές που έχουν το ένα τους άκρο στο υπο κατασκευή συνδετικό δένδρο και το άλλο τους άκρο εκτός του συνδετικού δένδρου.
- Επιλέγεται η ακμή με το ελάχιστο βάρος από τις υποψήφιες
- Η ακμή εισάγεται στο δένδρο καθώς και το άκρο της που δεν ανήκε στο δένδρο.

➤ Τερματισμός:

- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

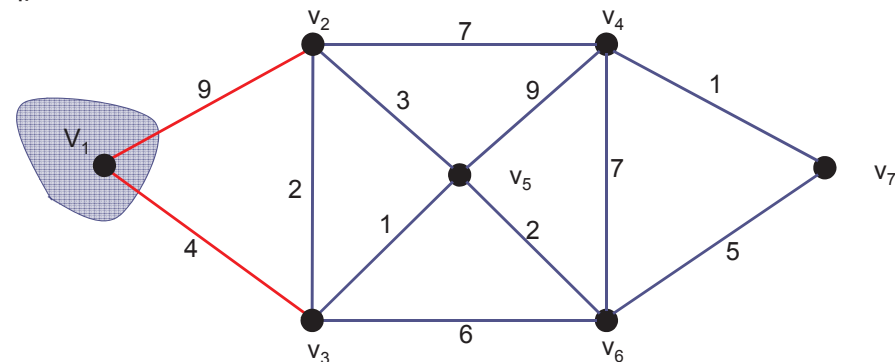
Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

Ξεκινάμε αυθαίρετα από την κορυφή v_1

➤ Βήμα 0:



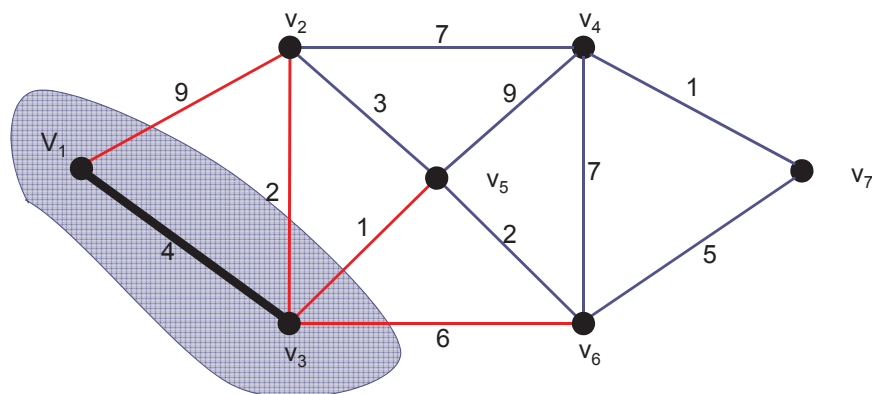
v_1 μπαίνει στο δένδρο

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

➤ Βήμα 1:



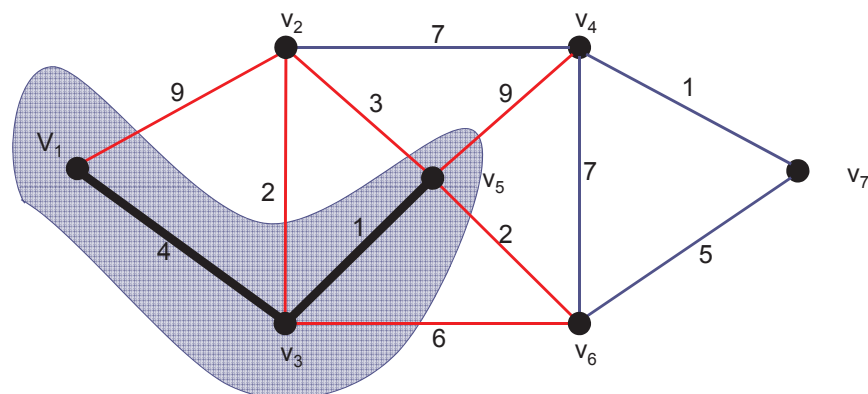
v_3 μπαίνει στο δένδρο

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

➤ Βήμα 2:



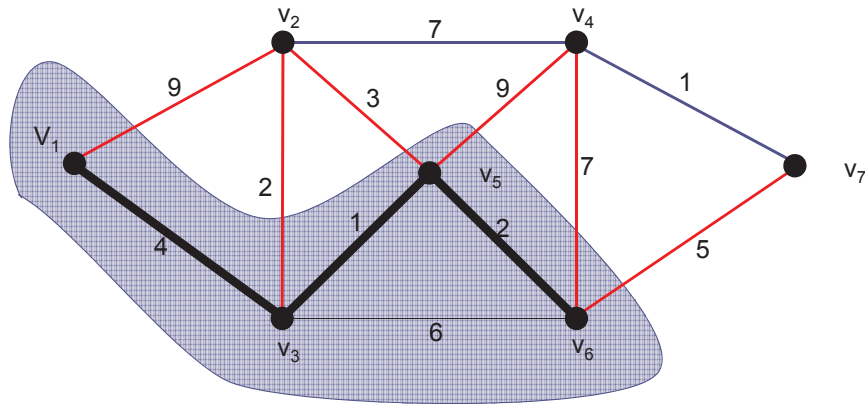
v_5 μπαίνει στο δένδρο

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

➤ Βήμα 3:



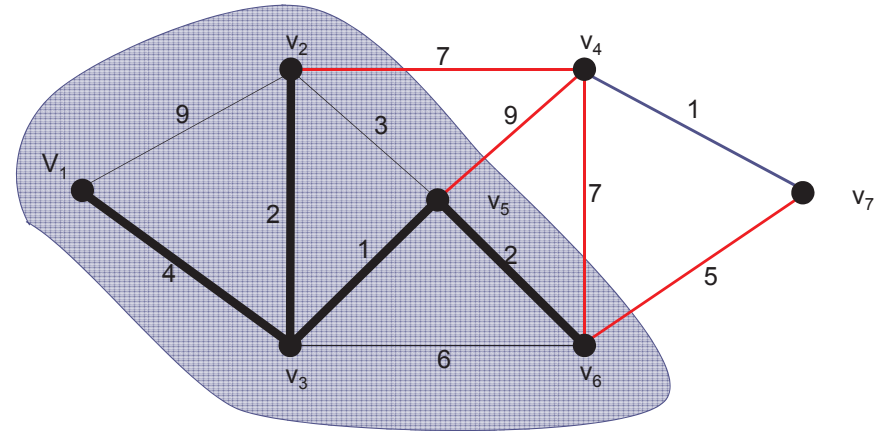
V_6 μπαίνει στο δένδρο

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

➤ Βήμα 4:



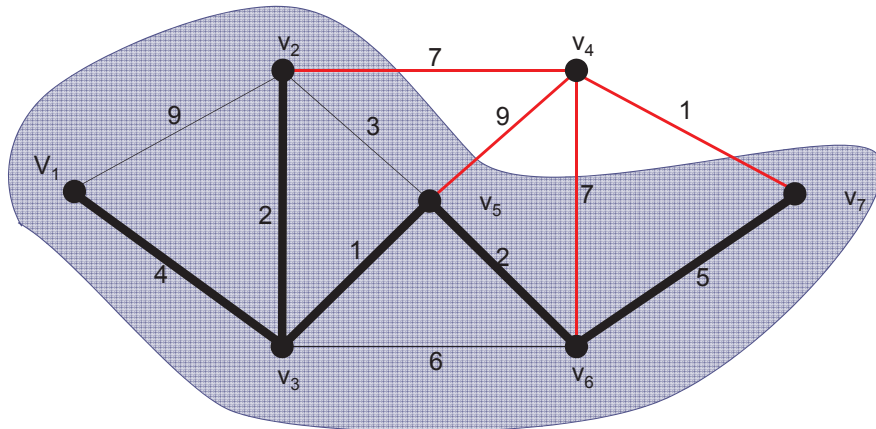
V_2 μπαίνει στο δένδρο

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

➤ Βήμα 5:



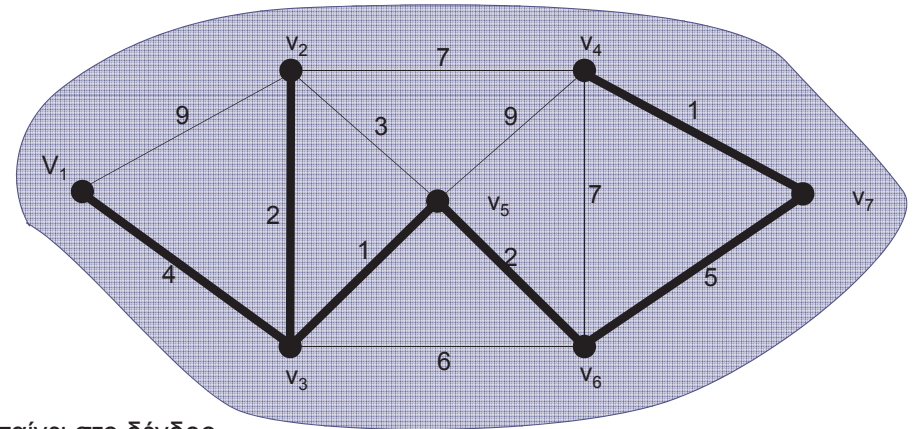
V_7 μπαίνει στο δένδρο

Β. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

➤ Βήμα 5:



V_4 μπαίνει στο δένδρο

Τέλος Αλγορίθμου. Βάρος Ελάχιστου συνδετικού Δένδρου: $4+2+1+2+5+1=15$



B. Θεωρία

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

2. Ο αλγόριθμος του Prim (3. Ψευδογλώσσα)

Αλγόριθμος Prim

Είσοδος: Συνδεόμενος Γράφος $G=(V,E,W)$

Εξοδος: Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο $T=(V,E')$ του G

procedure Prim($G=(V,E,W)$)

$V'=\{v_1\}$

while $|V'| < |V|$ do

 Βρες την ακμή $(v,w) \in E$ με $v \in V'$, $w \in V-V'$ με το ελάχιστο βάρος

 θέσε (v,w) στο E' και w στο V'

end while

return $T=(V',E')$

end procedure



B. Θεωρία

2. Ελάχιστα Συνδετικά Δένδρα

2. Ο αλγόριθμος του Prim (4. Παρατηρήσεις)

Παρατηρήσεις:

- Το ελάχιστο συνδετικό δένδρο δεν είναι μοναδικό. Ο αλγόριθμος του Prim παράγει ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο. Το ελάχιστο συνδετικό δένδρο είναι μοναδικό αν όλα τα βάρη είναι διαφορετικά (Εφαρμογή 4)
- Η επιλογή της αφετηρίας είναι αυθαίρετη.
- Σε περίπτωση ισοπαλίας (δύο ή περισσότερες προς επιλογή ακμές με το ίδιο ελάχιστο βάρος) αυθαίρετα επιλέγουμε κάποια από αυτές.

Ιδιότητες ελαχίστων συνδετικών δένδρων:

- Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε ακμή με το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το ελάχιστο συνδετικό δένδρο διατηρείται (Εφαρμογή 1)
- Αν προσθέσουμε σε κάθε ακμή το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το ελάχιστο συνδετικό δένδρο διατηρείται (Εφαρμογή 2)



B. Θεωρία

3. Σύνοψη για τους Αλγόριθμους

1. Συντομότερα Μονοπάτια

Τα συντομότερα μονοπάτια σε ένα γράφο υπολογίζονται από

- Τον αλγόριθμο του Dijkstra

Αν όλα τα βάρη είναι ίδια, τότε το ελάχιστο συνδετικό δένδρο υπολογίζεται και από:

- Τον αλγόριθμο διάσχισης κατά πλάτος

Επίσης:

- Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε ακμή με το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το συντομότερο μονοπάτι διατηρείται!
- Αν προσθέσουμε σε κάθε ακμή το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το συντομότερο μονοπάτι δεν διατηρείται!
- Ο Dijkstra δεν δουλεύει με αρνητικά βάρη



B. Θεωρία

3. Σύνοψη για τους Αλγόριθμους

2. Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

Το ελάχιστο συνδετικό δένδρο σε ένα γράφο υπολογίζεται από

- Τον αλγόριθμο του Prim

Αν όλα τα βάρη είναι ίδια, τότε τα συντομότερα μονοπάτια υπολογίζονται και:

- Τον αλγόριθμο διάσχισης κατά πλάτος
- Τον αλγόριθμο διάσχισης κατά βάθος
- Τον αλγόριθμο του Dijkstra (όταν αφήνω να οριστικοποιηθούν όλες οι κορυφές)

Επίσης:

- Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε ακμή με το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το ελάχιστο συνδετικό δένδρο διατηρείται!
- Αν προσθέσουμε σε κάθε ακμή το ίδιο θετικό ακέραιο βάρος, το ελάχιστο συνδετικό δένδρο διατηρείται!
- Ο Prim δουλεύει με αρνητικά βάρη

Β. Θεωρία

3. Σύνοψη για τους Αλγόριθμους

3. Συνδετικό Δένδρο

Το συνδετικό δένδρο σε ένα γράφο υπολογίζεται από

- Τον αλγόριθμο Κατά Πλάτος
- Τον αλγόριθμο Κατά Βάθος

Επίσης ένα συνδετικό δένδρο του γραφήματος υπολογίζεται και από:

- Τον αλγόριθμο του Prim
- Τον αλγόριθμο του Dijkstra (όταν αφήνω να οριστικοποιηθούν όλες οι κορυφές)

Β. Θεωρία

3. Σύνοψη για τους Αλγόριθμους

	Dijkstra	Prim	Κατά Βάθος	Κατά Πλάτος
Συντομότερα Μονοπάτια	✓	×	×	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓
Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓	✓	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓	Αν όλα τα βάρη ίδια: ✓
Συνδετικό Δένδρο	✓	✓	✓	✓

Αρν.Βάρη: × Αρν.Βάρη: ✓

(+C)>0: Δεν διατηρείται
(×C)>0: Διατηρείται

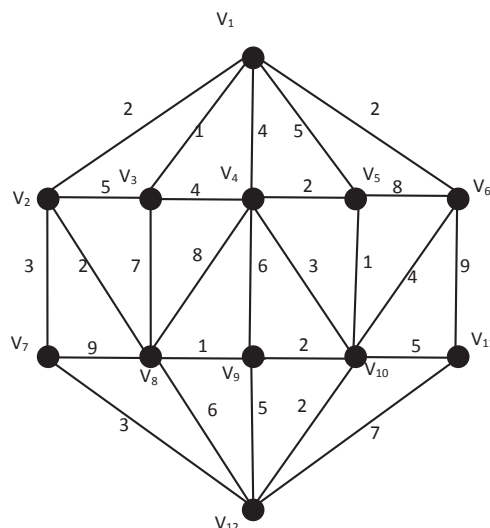
(+C)>0: Διατηρείται
(×C)>0: Διατηρείται

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 1

Δίνεται ο παρακάτω γράφος με διάταξη κορυφών $\{v_1, \dots, v_{12}\}$

- A)** Να βρείτε ένα συνδετικό δένδρο του γράφου κάνοντας μια κατά πλάτος διάσχιση του γράφου με αρχική κορυφή την v_1 . Είναι το δένδρο που θα βρείτε ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο του γράφου;
- B)** Να βρείτε ένα συνδετικό δένδρο του γράφου κάνοντας μια κατά βάθος διάσχιση του γράφου με αρχική κορυφή την v_{12} . Είναι το δένδρο που θα βρείτε ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο του γράφου;

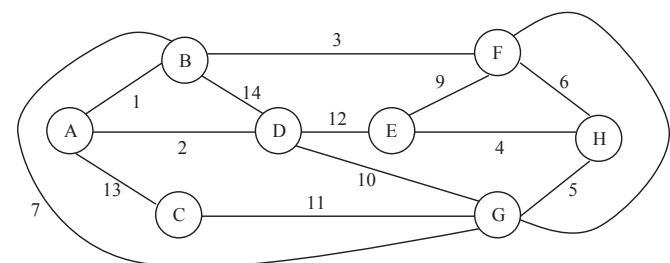


Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 2

Για τον παρακάτω γράφο $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$, να βρείτε το ελάχιστο συνδετικό δένδρο δείχνοντας τα βήματα κατασκευής του:

- A)** Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Prim (ξεκινώντας από την κορυφή G).
- B)** Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal που περιγράφεται παρακάτω:
1. $T \leftarrow \emptyset$
 2. Διάταξε τις ακμές του γράφου κατά αύξουσα σειρά βάρους:
 $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$
 3. **Ενόσω** το T έχει λιγότερες από $n-1$ ακμές
 4. **εάν** το $T \cup \{e_i\}$ δεν περιέχει κύκλο θέσε $T := T \cup \{e_i\}$
 5. **Τέλος-Ενόσω**



Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 3

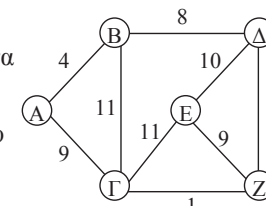
Υποθέτουμε ότι ο $G=(V,E)$ είναι συνδεόμενος απλός γράφος κάθε ακμή του οποίου έχει διαφορετικό βάρος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- A)** Η ακμή με το δεύτερο μικρότερο βάρος ανήκει στο ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G .
B) Η ακμή με το τρίτο μικρότερο βάρος δεν ανήκει απαραίτητα στο ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G (δώστε αντιπαράδειγμα).

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 4

Για τον διπλανό γράφο βρείτε το ελάχιστο συνδετικό δέντρο (δείχνοντας τα βήματα κατασκευής του):



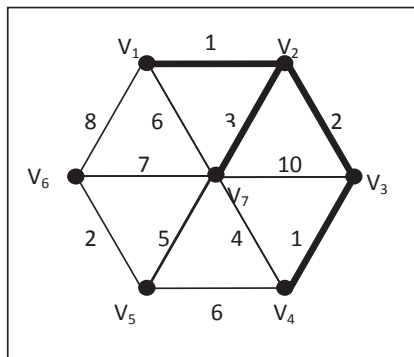
- α)** Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Prim.
β) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal.
γ) Πόσα διαφορετικά ελάχιστα συνδετικά δέντρα έχει ο γράφος;

Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Στο παρακάτω γράφημα με βάρη εμφανίζονται με έντονες γραμμές οι ακμές ενός τμήματος Ελάχιστου Συνδετικού Δένδρου κατά την κατασκευή του από τον αλγόριθμο του Prim. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

1. Η επόμενη ακμή που θα προστεθεί θα είναι η (v_5, v_6) .
2. Η μεθεπόμενη ακμή που θα προστεθεί θα είναι η (v_5, v_6) .
3. Η επόμενη ακμή που θα προστεθεί θα είναι η (v_4, v_7) .
4. Η ακμή (v_1, v_7) δεν μετέχει σε κανένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο.



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 2

Έστω ένα συνδεόμενο γράφημα με n κορυφές στο οποίο όλες οι ακμές έχουν το ίδιο βάρος. Τότε στο γράφημα αυτό:

1. Κάθε σύνολο $n - 1$ ακμών αποτελεί ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.
2. Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά πλάτος επιστρέφει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.
3. Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά βάθος επιστρέφει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.
4. Τα (2) και (3) αλλά μόνο όταν το γράφημα δεν έχει κύκλους.

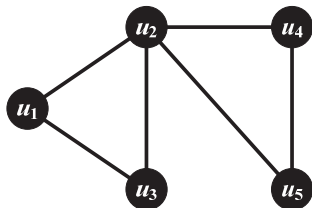


Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 3

Εκτελούμε τους αλγόριθμους αναζήτησης κατά πλάτος και αναζήτησης κατά βάθος στο γράφημα του διπλανού σχήματος θεωρώντας ως διάταξη κορυφών την u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- Υπάρχει μια διάταξη κορυφών για την οποία η αναζήτηση κατά πλάτος παράγει δέντρο ύψους 3.
- Στο δέντρο που παράγει η αναζήτηση κατά πλάτος, η κορυφή u_3 είναι παιδί της κορυφής u_2 .
- Υπάρχει μια διάταξη κορυφών με πρώτη κορυφή την u_1 για την οποία η αναζήτηση κατά βάθος παράγει δέντρο με διαφορετικό ύψος από αυτό που παράγει για την διάταξη u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 .
- Στο δέντρο που παράγει η αναζήτηση κατά βάθος, οι κορυφές u_4 και u_5 είναι παιδιά της κορυφής u_2 .



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 4

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά πλάτος παράγει το ίδιο δέντρο όταν εφαρμόζεται στο K_n και στον κύκλο με n κορυφές.
- Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά βάθος παράγει το ίδιο δέντρο όταν εφαρμόζεται στο K_n και στον κύκλο με n κορυφές.
- Οι αλγόριθμοι διάσχισης κατά βάθος και διάσχισης κατά πλάτος παράγουν το ίδιο δέντρο όταν εφαρμόζονται στο K_n .
- Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά πλάτος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του συντομότερου μονοπατιού από μια κορυφή s σε μια κορυφή t όταν όλες οι ακμές του γραφήματος έχουν το ίδιο βάρος.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E,W)$ με διαφορετικά θετικά βάρη στις ακμές και έστω T το μοναδικό ελάχιστο συνδετικό του δένδρο. Να δείξετε ότι το T παραμένει ελάχιστο συνδετικό δένδρο του G αν πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο θετικό ακέραιο αριθμό το βάρος κάθε ακμής του γραφήματος.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E,W)$ με διαφορετικά θετικά βάρη στις ακμές και έστω T το μοναδικό ελάχιστο συνδετικό του δένδρο. Να δείξετε ότι το T παραμένει ελάχιστο συνδετικό δένδρο του G αν προσθέσουμε τον ίδιο θετικό ακέραιο αριθμό στο βάρος κάθε ακμής του γραφήματος.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 3

Θεωρούμε ένα γράφημα $G=(V,E,W)$ με θετικά βάρη στις ακμές. Θέλουμε να βρούμε ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο στο οποίο όμως πρέπει μια δεδομένη ακμή να περιλαμβάνεται οπωσδήποτε (ανεξάρτητα από το βάρος της). Μετατρέψτε τον αλγόριθμο του Prim ώστε να επιλύει αυτό το πρόβλημα.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 4

1. Δώστε (περιγράφοντας με σαφήνεια τα βήματα του) έναν αλγόριθμο ο οποίος με είσοδο ένα απλό, συνδεόμενο, μη κατευθυνόμενο γράφημα θα αποφασίζει αν περιέχει ή όχι κύκλο.
2. Πως μπορείτε να τροποποιήσετε τον αλγόριθμο του (1) ώστε να δουλεύει αν το γράφημα δεν είναι κατ' ανάγκην συνδεόμενο.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 5

Δείξτε ότι αν όλα τα βάρη ενός συνδεόμενου μη κατευθυνόμενου γραφήματος είναι διαφορετικά, τότε το ελάχιστο συνδετικό δένδρο είναι μοναδικό.