ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 3.5:
Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής
- Εξαγωγή της Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής ενός Τύπου

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία
1. Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής
1. Χρήση των Νόμων Κατηγορηματικής Λογικής

- Έχουμε 4 νόμους της κατηγορηματικής λογικής. Κάθε νόμος έχει δύο διαφορετικές χρήσεις. Π.χ. ο 1ος νόμοςάρνησης ποσοδείκτη είναι ο ακόλουθος:

$$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$$

1. Οποιοσδήποτε τύπος της μορφής $\neg\forall x\varphi$ μπορεί να μετατραπεί στον ισοδύναμο τύπο: $\exists x\neg\varphi$ και αντίστροφα.
   - Π.χ. ο τύπος $\neg\forall x P(x)$είναι ισοδύναμος τύπος με τον$\exists x\neg P(x)$
   - Άρα χρησιμοποιούμε τους νόμους για να μετατρέψουμε τύπους σε άλλους τύπους που είναιισοδύναμοι.
     - Στην Κ.Λ. όταν λέμε ότι δύο τύποι είναι ισοδύναμοι σημαίνει ότι όταν ο ένας είναι Αληθής, τότε και ο άλλος είναι Αληθής και όταν ο ένας είναι Ψευδής τότε και άλλος είναι Ψευδής.

2. Ο νόμος είναι λογικά έγκυρος τύπος!
   - Όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα ένας λογικά έγκυρος τύπος είναι το ισοδύναμο την ταυτολογίας στην Κατηγορηματική Λογική

Β. Θεωρία
1. Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής
2. Οι νόμοι της Κατηγορηματικής Λογικής

- Οι νόμοι της κατηγορηματικής λογικής είναι οι ακόλουθοι:

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση
1	Άρνηση Ποσοδείκτη	$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$
2	Κατανομή Ποσοδείκτη	$\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
3	Εναλλαγή Ποσοδεικτών	$\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
4	Μετακίνηση Ποσοδείκτη	$(\varphi \rightarrow \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ $(\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ $(\forall x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ $(\exists x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

- Στους παραπάνω νόμους έχουμε ότι:
  - x,y: είναι μεταβλητές
  - φ,ψ: είναι τύποι (ατομικοί ή μη ατομικοί) της κατηγορηματικής λογικής

Β. Θεωρία
1. Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής
3. Νόμοι της Προτασιακής Λογικής

- Όλοι οι νόμοι της προτασιακής λογικής ισχύουν και στην κατηγορηματική λογική.
- Επαναφέρουμε το πινακάκι που είχαμε δει στο μάθημα 2.3 που χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε λογικούς συνδέσμους παίρνοντας ισοδύναμες παραστάσεις.
- Θα μας φανεί χρήσιμο στην εξαγωγή της κανονικής ποσοδεικτικής μορφής ενός τύπου:

Μετατροπή συνδέσμων	Χρήση του νόμου	Νόμος
Από → σε ∨ και αντίστροφα	1ος νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
Από → σε ∧ και αντίστροφα	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
Από ∨ σε ∧ και αντίστροφα	ΝόμοιDe Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
Από↔σε ∧,→και αντίστροφα	2ος νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

Β. Θεωρία
2. Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή
1. Ορισμός

Ορισμός: Ένας τύπος φ θα λέμε ότι είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή αν έχει τη μορφή:

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n \Psi$$

- Όπου τα:
  - $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ είναι ποσοδείκτες, δηλαδή: ∃ ή ∀
  - $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι μεταβλητές
  - Το Ψ είναι ανοιχτός τύπος (δεν έχει ποσοδείκτες)

Με απλά λόγια ένα τύπος είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, αν <u>μόνο</u> στην αρχή του τύπου εμφανίζονται ποσοδείκτες που δεσμεύουν όλο τον υπόλοιπο τύπο.

<u>Παραδείγματα:</u> Οι παρακάτω τύποι είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή:
- $\forall x\exists y[P(x,y)]$
- $\forall x\forall y[P(x,y) \rightarrow R(x,y)]$
- $\exists x\forall y\forall z[P(x,w) \rightarrow R(y,z)]$

Β. Θεωρία
2. Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή
2. Αναγνώριση Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής

- Μελετάμε στο παράδειγμα ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφη:
  - $\forall x\,[P(x) \rightarrow R(y)]$
    - Είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.
    - Δεν έχει σημασία που έχουμε ελεύθερες μεταβλητές. Πρέπει απλά οι ποσοδείκτες να είναι μπροστά, και να δεσμεύουν όλο τον τύπο.
  - $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists y R(y)$
    - Δεν είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή
    - Οι ποσοδείκτες δεν εμφανίζονται αριστερά στον τύπο.
  - $\forall x\, P(x) \rightarrow R(y)$
    - Δεν είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή
    - Ισχύει ο εμπειρικός κανόνας ότι η εμβέλεια ενός ποσοδείκτη που δεν καθορίζεται με παρενθέσεις, εκτείνεται μέχρι τον πρώτο διμελή σύνδεσμο που συναντά. Άρα η παρενθετοποίηση που υπονοείται είναι η ακόλουθη: $\forall x\,[P(x)] \rightarrow R(y)$
  - $\forall x\exists y R(x,y) \rightarrow Q(x,y)$
    - Δεν είναι σε κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.
    - Η εμβέλεια των ποσοδεικτών είναι ως εξής: $\forall x\exists y[R(x,y)] \rightarrow Q(x,y)$

Β. Θεωρία

2. Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

3. Εύρεση Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής

- Οι κανόνες που εφαρμόζουμε για την εύρεση της κανονικής ποσοδεικτικής μορφής:

ΘΕΩΡΗΜΑ:
- Κάθε τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή!

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
- Όταν μας ζητείται η κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου εφαρμόζουμε νόμους κατηγορηματικής και προτασιακής λογικής:
  - Να φέρουμε τους ποσοδείκτες μπροστά
  - Να δεσμεύουν όλον τον τύπο
- Το πρόβλημα εντοπίζεται όταν οι ποσοδείκτες είναι στην μέση του τύπου.
  1. Αν έχουμε ποσοδείκτες με το ίδιο όνομα μεταβλητής, θα πρέπει να κάνουμε μετονομασία στα ονόματα, ώστε να υπάρχει μοναδική φορά σε κάθε ποσοδείκτη. Η διαδικασία αυτή λέγεται «αλφαβητική παραλλαγή» ή «μετονομασία σε υποτύπο»
  2. Έπειτα μετατρέπουμε τα λογικά σύμβολα σε συνεπαγωγές (με τους νόμους της προτασιακής λογικής) και έπειτα μεταφέρουμε τους ποσοδείκτες στην αρχή του τύπου με τους νόμους μετακίνησης, άρνησης και κατανομής ποσοδείκτη.

Β. Θεωρία

2. Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

4. Παραδείγματα Εύρεσης Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:Να βρεθεί η κανονική ποσοδείκτη μορφή του τύπου $\forall x\, P(x) \to \forall y R(y)$

Α' τρόπος

$\forall x\, P(x) \to \forall y R(y)$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \exists x\, [P(x) \to \forall y R(y)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \exists x \forall y [P(x) \to R(y)]$	

Β' τρόπος

$\forall x\, P(x) \to \forall y\, R(y)$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y[\forall x P(x) \to R(y)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y \exists x[P(x) \to R(y)]$	

Συμπέρασμα: Η κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου ΔΕΝ είναι μοναδική. Η υποχρέωση μας είναι να βρούμε μία ποσοδεικτική μορφή που προκύπτει με σωστή εφαρμογή νόμων λογικής.
Επίσης η σειρά των βημάτων δεν έχει σημασία. Επιλέγουμε έναν ποσοδείκτη και κανουμε διαδοχικές εφαρμογές νόμων μέχρι να τον βγάλουμε να δεσμεύει όλον τον τύπο.

Β. Θεωρία

2. Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

4. Παραδείγματα Εύρεσης Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:Να βρεθεί η κανονική ποσοδείκτη μορφή του τύπου $Q(c) \lor \forall x R(x,x)$

$Q(c) \lor \forall x R(x,x)$	(Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης)
$\equiv \neg\neg Q(c) \lor \forall x R(x,x)$	(Εφαρμόζω 1^{ο} νόμο αντικατάστασης)
$\equiv \neg Q(c) \to \forall x R(x,x)$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall x[\neg Q(c) \to R(x,x)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:Να βρεθεί η κανονική ποσοδείκτη μορφή του τύπου$\forall x Q(x) \lor \forall x R(x,x)$

$\forall x Q(x) \lor \forall x R(x,x)$	(Αλφαβητική Παραλλαγή)
$\equiv \forall x Q(x) \lor \forall y R(y,y)$	(Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης)
$\equiv \neg\neg\forall x Q(x) \lor \forall y R(y,y)$	(Εφαρμόζω το 1^{ο} νόμο αντικατάστασης)
$\equiv \neg\forall x Q(x) \to \forall y R(y,y)$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y[\neg\forall x Q(x) \to R(y,y)]$	(Εφαρμόζω το νόμο άρνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y[\exists x \neg Q(x) \to R(y,y)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y \forall x[\neg Q(x) \to R(y,y)]$	

Β. Θεωρία

2. Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

4. Παραδείγματα Εύρεσης Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4:Να βρεθεί η κανονική ποσοδείκτη μορφή του τύπου $\exists x Q(x) \leftrightarrow R(y)$

$\exists x Q(x) \leftrightarrow R(y)$	(Εφαρμόζω το 2^{ο} νόμο αντικατάστασης)
$\equiv [\exists x Q(x) \to R(y)] \land [R(y) \to \exists x Q(x)]$	(Αλφαβητική Παραλλαγή)
$\equiv [\exists x Q(x) \to R(y)] \land [R(y) \to \exists z Q(z)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv [\exists x Q(x) \to R(y)] \land \exists z[R(y) \to Q(z)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall x[Q(x) \to R(y)] \land \exists z[R(y) \to Q(z)]$	(Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης)
$\equiv \forall x[Q(x) \to R(y)] \land \neg\neg\exists z[R(y) \to Q(z)]$	(Εφαρμόζω το νόμο άρνησης συνεπαγωγής)
$\equiv \neg[\forall x[Q(x) \to R(y)] \to \neg\exists z[R(y) \to Q(z)]]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \neg\exists x[\, [Q(x) \to R(y)] \to \neg\exists z[R(y) \to Q(z)]]$	(Εφαρμόζω το νόμο άρνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall x \neg[\, [Q(x) \to R(y)] \to \neg\exists z[R(y) \to Q(z)]]$	(Εφαρμόζω το νόμο άρνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall x \neg[\, [Q(x) \to R(y)] \to \forall z \neg[R(y) \to Q(z)]]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall x \neg\forall z[\, [Q(x) \to R(y)] \to \neg[R(y) \to Q(z)]]$	(Εφαρμόζω το νόμο άρνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall x \exists z \neg[\, [Q(x) \to R(y)] \to \neg[R(y) \to Q(z)]]$	

Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Η μεταβλητή *x* εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο $\forall x \forall z \left(P(x,y) \vee Q(x,y)\right) \vee \exists y P(x,y)$
2. Ο τύπος $\exists x \exists y \left(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)\right) \to \forall x Q(x,x)$ είναι πρόταση
3. Οι τύποι $\exists x \left(P(x,x) \wedge Q(x,x)\right)$ και $\exists x P(x,x) \wedge \exists x Q(x,x)$ είναι λογικά ισοδύναμοι
4. Οι τύποι $\exists x \left(P(x,y) \to Q(x,y)\right)$ και $\forall x P(x,y) \to Q(x,y)$ είναι λογικά ισοδύναμοι

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Βρείτε την κανονική ποσοδεικτική μορφή των τύπων:

1. $P(x) \to (\exists y R(y) \to \forall z R(z))$

2. $P(x) \to \forall x P(x)$

3. $\forall x\ [\exists y Q(y) \vee \forall x Q(x) \to R(x)]$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Βρείτε την κανονική ποσοδεικτική μορφή των τύπων:

1. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

2. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Χρησιμοποιώντας τους νόμους της προτασιακής λογικής και τους νόμους των ποσοδεικτών να δείξετε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ τότε:

$$\exists x \varphi \vee \psi \equiv \exists x[\varphi \vee \psi]$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Δίνεται η πρόταση $\varphi = \forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\, P(y))$. Να βρεθεί πρόταση λογικά ισοδύναμη με την άρνηση της φ έτσι ώστε το σύμβολο της άρνησης ($\neg$) να εφαρμόζεται μόνο στο κατηγορηματικό σύμβολο *P*.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 5

Δώστε κανονική ποσοδεικτική μορφή του τύπου $\forall x P(x) \rightarrow \forall y[Q(x,y) \rightarrow \neg \forall z\, R(y,z)]$