ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 2.2:
Ταυτολογική Συνεπαγωγή

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Ικανοποίησιμο και αντιφατικό σύνολο τύπων
- Ταυτολογική Συνεπαγωγή
- Ταυτολογικά Ισοδύναμοι Τύποι

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία
1. Σύνολα Τύπων

Ορισμός:
Σύνολο Τύπων Τ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $T(\Gamma_0)$

Ορισμός:
Ένα σύνολο τύπων Τ θα λέμε ότι είναι **ικανοποιήσιμο** αν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα
- Πιο τυπικά αν υπάρχει αποτίμηση α: $\alpha(\varphi)=A\ \forall \varphi \in T$

Ορισμός:
Ένα σύνολο τύπων Τ θα λέμε ότι είναι **μη ικανοποιήσιμο (αντιφατικό)** αν δεν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα
- …δηλαδή δεν είναι ικανοποίησιμο!

Εξετάζουμε ότι ένα σύνολο είναι ικανοποιήσιμο:
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας όλων των τύπων και βρίσκουμε μια γραμμή που όλοι οι τύποι είναι Αληθείς

Εξετάζουμε ότι ένα σύνολο είναι αντιφατικό:
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας όλων των τύπων και δεν πρέπει να υπάρχει γραμμή που είναι όλοι οι τύποι Αληθείς

Β. Θεωρία
1. Σύνολα Τύπων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{p \to q, p \vee \neg q\}$$

είναι ικανοποιήσιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$p \to q$	$p \vee \neg q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Παρατηρούμε ότι στην αποτίμηση p=A,q=A αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων, άρα είναι ικανοποίησιμο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{q \to p, p \wedge \neg q, p \leftrightarrow q\}$$

είναι ικανοποίησιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$q \to p$	$p \wedge \neg q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους Α ταυτόχρονα, άρα είναι ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Β. Θεωρία
2. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

$$\mathrm{T} \vDash \varphi$$

Ορισμός:
Έστω Σύνολο Τύπων Τ και τύπος φ. Θα λέμε ότι :
- το σύνολο τύπων Τ **ταυτολογικά συνεπάγεται** τον τύπο φ ή
- Ο φ είναι **σημασιολογική συνέπεια** του Τ
- και συμβολίζουμε με $\mathbf{T} \vDash \boldsymbol{\varphi}$

αν και μόνο αν
- για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του Τ ικανοποιείται και ο φ

Εξετάζουμε μία ταυτολογική συνεπαγωγή ως εξής:
1. Εξετάζουμε αν ο φ είναι ταυτολογία. Αν ναι, ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή. Αλλιώς προχωράμε στο βήμα 2.
2. Εξετάζουμε αν το σύνολο τύπων Τ είναι αντιφατικό. Αν ναι, ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή. Αλλιώς προχωράμε στο βήμα 3.
3. Εφαρμόζουμε τον ορισμό.
   1. Βρίσκουμε όλες τις αποτιμήσεις των μεταβλητών που ικανοποιούνται όλοι οι τύποι του Τ
   2. Ελέγχουμε αν ο φ αληθεύει σε αυτές τις αποτιμήσεις. Αν ναι, ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή. Αλλιώς δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

Πιο εποπτικά:
1. $\ldots \vDash \mathrm{A}$.
2. $\Psi \vDash \cdots$.
3. Εφαρμογή του ορισμού

Β. Θεωρία
2. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή:

$$\{p \to q, q \vee \neg p\} \vDash p \vee \neg p$$

Λύση: Ο τύπος $p \vee \neg p$ είναι ταυτολογία συνεπώς ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή:

$$\{p \wedge \neg q, p \to q\} \vDash p \vee q$$

Λύση: Το σύνολο τύπων: $\{p \wedge \neg q, p \to q\}$ είναι αντιφατικό. Άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή:

$$\{p \to \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \vDash \neg p \to q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

p	q	$p \to \neg q$	$q \vee p$	$\neg p \leftrightarrow q$		$\neg p \to q$
Α	Α	Ψ	Α	Ψ		Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	→	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	→	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ		Ψ

Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ο τύπος φ είναι αληθής, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

Β. Θεωρία
2. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή:

$$\{p \wedge q \to r, r \vee q, r \leftrightarrow p\} \vDash p \to \neg q \wedge r$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

p	q	r	$p \wedge q \to r$	$r \vee q$	$r \leftrightarrow p$		$p \to \neg q \wedge r$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	→	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ		Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	→	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ		Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ		Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	→	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ		Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α		Α

Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ο τύπος φ δεν αληθεύει πάντα, άρα δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

Β. Θεωρία
2. Ταυτολογική Συνεπαγωγή
1. Συμβολισμός της Ταυτολογίας

$\vDash \varphi$

Όταν ισχύει μία ταυτολογική συνεπαγωγή, σημαίνει ότι:
- Όταν ισχύουν (αληθεύουν) οι τύποι του Τ (αναφέρονται και ως υποθέσεις της ταυτολογικής συνεπαγωγής)
- αληθεύει και ο τύπος φ (συμπέρασμα της ταυτολογικής συνεπαγωγής)

Ή με πιο απλά λόγια:
- Κάτω από τις υποθέσεις του συνόλου τύπων Τ,
- αληθεύει ο τύπος φ.

Με αυτόν τον συλλογισμό ο συμβολισμός:

$$\vDash \boldsymbol{\varphi}$$

- Θα σημαίνει ότι ο τύπος φ αληθεύει ανεξαρτήτως υποθέσεων
- που σημαίνει ότι ο τύπος φ είναι ταυτολογία.
- (στην πραγματικότητα συντομογραφία της αναπαράστασης $\emptyset \vDash \boldsymbol{\varphi}$)

Πρακτικά:
Αν μας ζητηθεί να αποδείξουμε $\vDash \varphi$, αρκεί να δείξουμε ότι ο τύπος φ είναι ταυτολογία

Β. Θεωρία
3. Ταυτολογικά Ισοδύναμοι Τύποι

$\varphi \equiv \psi$

Ορισμός:
Έστω προτασιακοί τύποι φ,ψ.
Θα λέμε ότι οι δύο τύποι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι και θα συμβολίζουμε με

$$\boldsymbol{\varphi \equiv \psi}$$

ανν ισχύει $\varphi \vDash \psi$ και $\psi \vDash \varphi$
(σημείωση: Μπορούμε να γράφουμε $\varphi \vDash \psi$ ως συντομογραφία της παράστασης $\{\varphi\} \vDash \psi$ όταν το σύνολο τύπων Τ είναι μονοσύνολο)

Πρακτικά:
Δύο τύποι θα είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι αν έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας, αφου:
$\varphi \vDash \psi$ δηλαδή όταν φ=Α, τότε ψ=Α και
$\psi \vDash \varphi$ δηλαδή όταν ψ=Α, τότε φ=Α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μελετηθεί αν ισχύει ότι $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$
Λύση: Κατασκευάζοντας τον πίνακα αλήθειας των δύο τύπων παρατηρούμε ότι αληθεύουν στις ίδιες αποτιμήσεις, άρα είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι

p	q	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Γ. Μεθοδολογία
1. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να εξάγουμε με ταχύτητα αν ισχύει ή όχι μία ταυτολογική συνεπαγωγή. Θα πρέπει να εντοπίζουμε γρήγορα αν ισχύει κάποιος από τους εμπειρικούς κανόνες: … $\vDash$ Α ή Ψ $\vDash \cdots$

Αν αναγκαστούμε να εφαρμόσουμε τον τυπικό ορισμό (δηλαδή δεν εμπίπτει η άσκηση σε κάποιον από τους εμπειρικούς κανόνες, ενδείκνυται η αποφυγή της κατασκευής του πίνακα αλήθειας, δηλαδή θα πρέπει να προσπαθούμε να βρίσκουμε τις αποτιμήσεις των μεταβλητών που αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων με παρατηρήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Α) Να μελετηθούν τα σύνολα τύπων

$\mathrm{T}_1 = \{q \wedge \neg p, q \rightarrow p, p \rightarrow r\}$
$\mathrm{T}_2 = \{p \wedge \neg q, q \rightarrow r\}$
$\mathrm{T}_3 = \{p \rightarrow q, q \rightarrow p\}$

Συγκεκριμένα να εξεταστεί αν είναι ικανοποιήσιμα ή αντιφατικά και σε περίπτωση που είναι ικανοποιήσιμα να βρεθούν όλες οι αποτιμήσεις των μεταβλητών που ικανοποιούν τους τύπους

Γ. Μεθοδολογία
1. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

(…συνέχεια…)
Λύση:

$\mathrm{T}_1 = \{q \wedge \neg p, q \rightarrow p, p \rightarrow r\}$

Για να αληθεύει ο 1ος τύπος $q \wedge \neg p$ πρέπει $p = \Psi$ και $q = \mathrm{A}$. Ωστόσο με την αποτίμηση αυτή, ο 2ος τύπος $q \rightarrow p$ είναι ψευδής. Άρα το σύνολο τύπων T_1 είναι αντιφατικό.

$\mathrm{T}_2 = \{p \wedge \neg q, q \rightarrow r\}$

Για να αληθεύει ο 1ος τύπος: $p \wedge \neg q$ πρέπει $p = \mathrm{A}$ και $q = \Psi$. Άρα ο 2ος τύπος γίνεται $q \rightarrow r = \Psi \rightarrow \mathrm{r}$ που αληθεύει είτε αν r=A, είτε αν r=Ψ. Συνεπώς το σύνολο τύπων T_2 είναι ικανοποιήσιμο και συγκεκριμένα ικανοποιείται με τις αποτιμήσεις των μεταβλητών:
$p = \mathrm{A}, \mathrm{q} = \Psi, \mathrm{r} = \mathrm{A}$ και
$p = \mathrm{A}, \mathrm{q} = \Psi, \mathrm{r} = \Psi$

$\mathrm{T}_3 = \{p \rightarrow q, q \rightarrow p, \neg r\}$

Ο 1ος τύπος δεν αληθεύει στην αποτίμηση $p = \mathrm{A}$ και $q = \Psi$ και ο 2ος τύπος δεν αληθεύει στην αποτίμηση $p = \Psi$ και $q = \mathrm{A}$. Άρα αληθεύουν στις υπόλοιπες αποτιμήσεις. Λόγω του 3ου τύπου πρέπει r=Ψ. Άρα είναι ικανοποιήσιμο και ικανοποιείται με τις αποτιμήσεις των μεταβλητών:
$p = \mathrm{A}, \mathrm{q} = \mathrm{A}, \mathrm{r} = \Psi$ και
$p = \Psi, \mathrm{q} = \Psi, \mathrm{r} = \Psi$

Γ. Μεθοδολογία
1. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

(…συνέχεια…)
Β) Δίδονται και οι τύποι:

$\varphi_1 = p \vee q \to r$
$\varphi_2 = (q \to r) \vee \neg(q \to r)$
$\varphi_3 = (p \to q \vee r) \wedge \neg(p \to q \vee r)$

Να εξάγετε χωρίς αληθοπίνακα αν είναι ταυτολογίες ή αντιφάσεις.

Λύση:

Ο τύπος φ_1 είναι ικανοποιήσιμος. Π.χ. με την αποτίμηση p=A, q=A, r=A. Δεν είναι ταυτολογία, διότι βγαίνει ψευδής με την αποτίμηση p=A, q=A, r=Ψ.
Ο τύπος φ_2 είναι ταυτολογία, διότι είναι της μορφής $\varphi \vee \neg\varphi$
Ο τύπος φ_3 είναι αντίφαση, διότι είναι της μορφής $\varphi \wedge \neg\varphi$

Γ. Μεθοδολογία
1. Ταυτολογική Συνεπαγωγή

(…συνέχεια…)
Γ) Εξετάστε αν ισχύουν οι ταυτολογικές συνεπαγωγές:

1) $T1 \vDash \varphi_1$
2) $T1 \vDash \varphi_2$
3) $T1 \vDash \varphi_3$
4) $T2 \vDash \varphi_1$
5) $T2 \vDash \varphi_2$
6) $T2 \vDash \varphi_3$
7) $T3 \vDash \varphi_1$
8) $T3 \vDash \varphi_2$
9) $T3 \vDash \varphi_3$

Από την μελέτη μας έχουμε:
T_1 αντιφατικό
T_2 ικαν/μο για τις αποτιμήσεις:
$p = A, q = \Psi, r = A$ και
$p = A, q = \Psi, r = \Psi$
T_3 ικαν/μο για τις αποτιμήσεις
$p = A, q = A, r = \Psi$ και
$p = \Psi, q = \Psi, r = \Psi$

ΛΥΣΗ:
1) Ισχύει διότι το T_1 αντιφατικό ($\Psi \vDash \cdots$)
2) Ισχύει διότι το T_1 αντιφατικό ($\Psi \vDash \cdots$)
3) Ισχύει διότι το T_1 αντιφατικό ($\Psi \vDash \cdots$)
4) Εξετάζω τον ορισμό. Στις αποτιμήσεις που αληθεύουν οι τύποι του T_2
   1) $p = A, q = \Psi, r = A$. Ο τύπος $\varphi_1 = p \vee q \to r = A \vee \Psi \to A = A \to A = A$
   2) $p = A, q = \Psi, r = \Psi$. Ο τύπος $\varphi_1 = p \vee q \to r = A \vee \Psi \to \Psi = A \to \Psi = \Psi$

   Συνεπώς δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.
5) Ισχύει διότι φ_2 ταυτολογία (… $\vDash A$)
6) Δεν ισχύει διότι T_2 ικανοποιήσιμο και φ_3 αντίφαση (δεν ισχύει ο ορισμός)
7) Εξετάζω τον ορισμό. Στις αποτιμήσεις που αληθεύουν οι τύποι του T_3
   1) $p = A, q = A, r = \Psi$ Ο τύπος $\varphi_1 = p \vee q \to r = A \vee A \to \Psi = A \to \Psi = \Psi$

   Συνεπώς δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.
8) Ισχύει διότι φ_2 ταυτολογία (… $\vDash A$)
9) Δεν ισχύει διότι T_3 ικανοποιήσιμο και φ_3 αντίφαση (δεν ισχύει ο ορισμός)

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Ελέγξτε αν τα παρακάτω σύνολα τύπων είναι ικανοποιήσιμα

$T_1 = \{p \to q, \neg p\}$

$T_2 = \{p, p \to \neg q, q\}$

$T_3 = \{p \to q, p \vee q, p \wedge q\}$

$T_4 = \{p \to q, q \to p, \neg p \vee q\}$

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Ελέγξτε αν ισχύουν οι ακόλουθες ταυτολογικές συνεπαγωγές

1. $\{p \vee q, p \to q\} \vDash p \wedge q$

2. $\{p \vee \neg q, q \vee \neg q\} \vDash p \to p \vee q$

3. $\{q \to p, \neg p \vee \neg q\} \vDash p \to (q \to q)$

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Έστω ότι ο τύπος φ είναι ταυτολογία, ο τύπος ψ είναι αντίφαση και ο τύπος χ είναι ικανοποιήσιμος (αλλά όχι ταυτολογία). Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ταυτολογικές συνεπαγωγές:

1. $\varphi \vDash \varphi$
2. $\varphi \vDash \psi$
3. $\varphi \vDash \chi$

4. $\psi \vDash \varphi$
5. $\psi \vDash \psi$
6. $\psi \vDash \chi$

7. $\chi \vDash \varphi$
8. $\chi \vDash \psi$
9. $\chi \vDash \chi$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε το σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{ p_1 \vee \neg p_2 , p_1 \wedge p_2 , p_1 \vee p_3 \}$
Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν και ποιες όχι;

1. $T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$
2. $T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$
3. $T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$
4. $T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Ο τύπος $\neg p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ *είναι:*

1. Ταυτολογία
2. Ταυτολογικά ισοδύναμος με τον p_2
3. Ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\neg p_1 \wedge p_1 \rightarrow p_2$
4. Ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 3

Έστω p_1 και p_2 προτασιακές μεταβλητές. Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$ είναι ταυτολογία.
2. Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ είναι αντίφαση.
3. $p_1 \wedge \neg p_1 \models p_2 \wedge \neg p_2$
4. $(p_1 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2 \models p_2$

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Να δείξετε ότι:

$\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \dots, p_{10} \to p_1\} \vDash (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{10}) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_{10})$

χωρίς την χρήση αληθοπίνακα

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Έστω T σύνολο τύπων και φ,ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους ισχύει:
$T \vDash \varphi$ και $T \vDash \psi$.
Να αποδείξετε ότι ισχύει: $T \vDash \neg\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Έστω προτασιακοί τύποι φ,ψ,χ για τους οποίους ισχύουν $\varphi \vDash \psi$, $\psi \vDash \chi$, $\chi \vDash \varphi$
Να αποδείξετε διαδοχικά ότι ισχύουν:

1. $\varphi \vDash \chi$
2. $\psi \vDash \varphi$
3. $\chi \vDash \psi$
4. $\varphi \equiv \psi$
5. $\psi \equiv \chi$
6. $\varphi \equiv \psi \equiv \chi$