ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

Μάθημα 4.1:
Γραμματικές Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα και μεθοδολογίες κατασκευής γραμματικών χωρίς συμφραζόμενα.
- Κανονικές Γραμματικές και Μετατροπή Αυτομάτων σε Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- Διφορούμενες Γραμματικές

Β. Θεωρία
1. Ορισμοί
1. Γραμματικές Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

- Μία γραμματική ανεξάρτητη συμφραζομένων (ή γραμματική χωρίς συμφραζόμενα) είναι ένα σύνολο κανόνων που μπορούν να παράγουν ΟΛΕΣ τις συμβολοσειρές μιας Γλώσσας και ΜΟΝΟΝ ΑΥΤΕΣ:

Παράδειγμα 1: Η Γραμματική Ανεξάρτητη Συμφραζομένων για την γλώσσα $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$$\begin{cases} S \to 0S1 & \text{Διαβάζουμε S δίνει 0S1} \\ S \to \varepsilon & \text{Διαβάζουμε S δίνει ε} \end{cases}$$

Σχόλια:
- Τα παραπάνω λέγονται κανόνες της γραμματικής διότι ξεκινώντας από την μεταβλητή S μπορούμε να παράγουμε με διαδοχική χρήση των κανόνων οποιαδήποτε συμβολοσειρά της γλώσσας.
- Ο 1ος κανόνας $S \to 0S1$ λέγεται και αναδρομικός κανόνας διότι επανεμφανίζει την μεταβλητή S
- Ο 2ος κανόνας $S \to \varepsilon$ λέγεται και τερματικός κανόνας διότι σταματά τις εμφανίζεις μεταβλητών.

- Παραδείγματα παραγωγής συμβολοσειρών:

S $\Rightarrow \varepsilon$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 0\varepsilon 1 = 01$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 00S11$ $\Rightarrow 00\varepsilon 11 = 0011$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 00S11$ $\Rightarrow 000S111$ $\Rightarrow 000\varepsilon 111 = 000111$	S $\Rightarrow 0S1$ $\Rightarrow 00S11$ $\Rightarrow 000S111$ $\Rightarrow 0000S1111$ $\Rightarrow 0000\varepsilon 1111 = 00001111$	……

- Το $\Rightarrow$ διαβάζεται «παράγει». Επίσης γράφουμε $S \Rightarrow^*$ ως συντομογραφία του «παράγει σε 0 ή περισσότερα βήματα (Π.χ. $S \Rightarrow^* 000111$)

Β. Θεωρία

1. Ορισμοί

1. Γραμματικές Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

Παράδειγμα 2: Η Γραμματική για την γλώσσα $L = \{0^n 1^m 0^m 1^n \mid \mathrm{n,m} \geq 0\}$

$$\begin{cases} S \rightarrow 0S1 \mid X \\ X \rightarrow 1X0 \mid \varepsilon \end{cases}$$

Σχόλια:

- Το | διαβάζεται ή (ή διαζευκτικό)
- Ο κανόνας $S \rightarrow 0S1 \mid X$ είναι συντομογραφία των κανόνων $S \rightarrow 0S1$ και $S \rightarrow X$
- Ο κανόνας $X \rightarrow 1X0 \mid \varepsilon$ είναι συντομογραφία των κανόνων $X \rightarrow 1X0$ και $X \rightarrow \varepsilon$

- Το τυπικό συντακτικό μιας γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα ορίζεται από τον ακόλουθο ορισμό:

Μία γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα είναι μια τετράδα: $G = (V, \Sigma, S, P)$ όπου:

- V το σύνολο των μεταβλητών
- Σ το σύνολο των τερματικών συμβόλων ($V \cap \Sigma = \emptyset$)
- $S \in V$ είναι η αρχική μεταβλητή
- P το σύνολο κανόνων με κάθε κανόνα να είναι της μορφής $\mathrm{W} \rightarrow w$ με
  - $\mathrm{W} \in V$ (είναι μία μεταβλητή) και
  - $w \in (V \cup \Sigma)^*$ (παράθεση μεταβλητών και μη τερματικών συμβόλων)

Στο παράδειγμα 2 η γραμματική είναι: $G = (V, \Sigma, S, P)$ όπου:

- $V = \{S, X\}$
- $\Sigma = \{0,1,\varepsilon\}$
- S είναι η αρχική μεταβλητή
- $P = \{S \rightarrow 0S1, S \rightarrow X, X \rightarrow 1X0, X \rightarrow \varepsilon\}$

Β. Θεωρία

1. Ορισμοί

2. Γλώσσες Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

Ορισμός Γλώσσας Ανεξάρτητης Συμφραζομένων:

- Μία γλώσσα θα λέγεται **Γλώσσα Ανεξάρτητη Συμφραζομένων (ή Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα)** αν και μόνο αν
  - Υπάρχει Γραμματική Ανεξάρτητη Συμφραζομένων (Γ.Χ.Σ) που παράγει τις συμβολοσειρές της.

- Συνεπώς οι γλώσσες ανεξάρτητες συμφραζομένων και οι γραμματικές ανεξάρτητες συμφραζομένων «πάνε πακέτο» (σε αντιστοιχία με τις κανονικές εκφράσεις των κανονικών γλωσσών)
- Θα προσθέσουμε στο πακέτο στα επόμενα μαθήματα και τα Αυτόματα Στοίβας που θα αναγνωρίζουν τις συμβολοσειρές μιας Γλώσσας Χωρίς Συμφραζόμενα (σε αντιστοιχία με τα Πεπερασμένα Αυτόματα των Κανονικών Γλωσσών)

Παρατήρηση:

- Οι γραμματικές αυτές λέγονται ανεξάρτητες συμφραζομένων σε αντίθεση με τις γραμματικές με συμφραζόμενα που έχουν και κανόνες τις μορφής:
  $$1S11 \rightarrow 0S0$$
- Δηλαδή αριστερά μπορεί να έχω μεταβλητή που η αντικατάσταση που θα κάνουμε εξαρτάται από τα σύμβολα που έχει αριστερά και δεξία της: δηλαδή εξαρτάται από τα «συμφραζόμενά» της.
- Οι γραμματικές με συμφραζομένα είναι εκτός ύλης.

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

1. «ισότητα»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^n \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{0^n 001^n \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{(ab)^n b^n \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{0^{n+3} 1^n \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{b^n (ac)^n \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{0^{n+2} 1^{n+3} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

2. «αναλογία»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^{3n} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n aab^{3n} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^{2n} b^{3n} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{b^{2n+2} c^{3n} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^{4n} b^{2n} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{0^{3n+2} 1^{2n+3} \mid \mathrm{n} \geq 0\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

3. «παλινδρομικότητα»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ είναι παλινδρομική$\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

4. «ανισότητα»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m \mid n \leq m\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m \mid n > m\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m \mid n < m\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

5. «Συμμετρία στο Κέντρο»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m a^m b^n \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^{2m} b^{3n} c^{2n} b^{4m} \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^{n+m} b^m c^n \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j + k\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^i b^j c^k \mid k = i + j\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

6. «Παράθεση Συμβολοσειρών»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^{3n} c^{2m} b^{4m} \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^n b^{n+m} c^m \mid n,m \geq 0\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^m b^{n+m} a^n \mid n,m \geq 0\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

7. «Διάζευξη Συμβολοσειρών»

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ή } j = k\}$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k \text{ ή } i + k = j\}$

Γ. Μεθοδολογία

2. Μεθοδολογία Κατασκευής Γραμματικής Χωρίς Συμφραζόμενα

8. Γραμματικές για Κανονικές Γλώσσες

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = 0^*1^*$

Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ *περιέχει το 00*$\}$

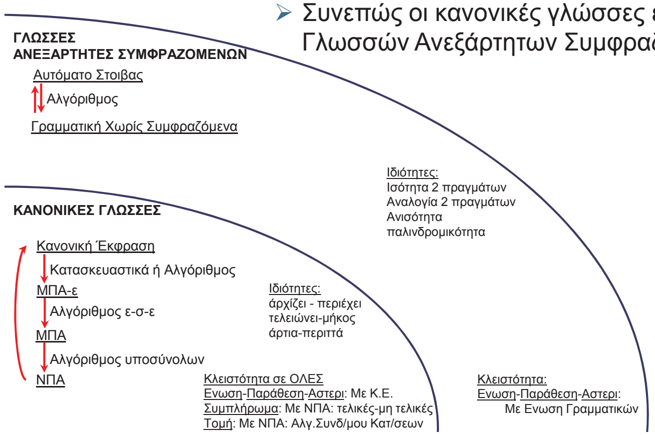
Δώστε Γρ.Χ.Σ. για τη Γλώσσα:
$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ *έχει μήκος το πολύ 2*$\}$

Β. Θεωρία

3. Σχέση Κανονικών Γλωσσών με Γλώσσες Ανεξ. Συμφραζομένων

1. Κανονικές Γλώσσες και Γλωσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

- Είδαμε σε παράδειγμα ότι υπάρχει γραμματική για την γλώσσα L=0*1*
- Επίσης είδαμε ότι υπάρχει γραμματική για την γλώσσα 0^n1^n που δεν είναι κανονική
- Θα δείξουμε ότι για κάθε κανονική γλώσσα μπορούμε να παράγουμε γραμματική που παράγει τις συμβολοσειρές της
- Συνεπώς οι κανονικές γλώσσες είναι ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ των Γλωσσών Ανεξάρτητων Συμφραζομένων



Β. Θεωρία

3. Σχέση Κανονικών Γλωσσών με Γλώσσες Ανεξ. Συμφραζομένων

2. Κανονικές Γραμματικές

- Ορίζουμε τώρα ένα υποσύνολο των Γραμματικών Χωρίς Συμφραζόμενα:

Ορισμός Κανονικής Γραμματικής:

- Μία γραμματική χωρίς συμφραζόμενα θα λέγεται **Κανονική Γραμματική** αν και μόνο αν οι κανόνες της έχουν αποκλειστικά και μόνο τη μορφή:

$$X \to \sigma \quad \text{ή} \quad X \to \sigma Y$$

- όπου
  - $X, Y \in V$ (είναι μεταβλητές)
  - $\sigma \in \Sigma$ (είναι τερματικά σύμβολα, δηλαδή σύμβολα του αλφαβήτου ή η κενή συμβολοσειρά)

- Παρατηρούμε ότι:
  - Οι κανονικές γραμματικές είναι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα με κανόνες ειδικής μορφής.
- Θα δείξουμε ότι:
  - Για κάθε κανονική γλώσσα υπάρχει κανονική γραμματική που παράγει τις συμβολοσειρές της, άρα:
  - Κάθε Κανονική Γλώσσα είναι και Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα

Β. Θεωρία

3. Σχέση Κανονικών Γλωσσών με Γλώσσες Ανεξ. Συμφραζομένων

3. Μετατροπή ΜΠΑ-ε σε Κανονική Γραμματική

- Μαθαίνουμε τρόπο μετατροπής ΜΠΑ-ε σε Κανονική Γραμματική.

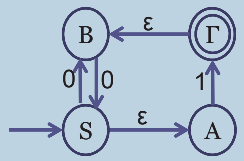
Θεώρημα

- Κάθε ΜΠΑ-ε μετατρέπεται σε Κανονική Γραμματική.

Κανόνες Μετατροπής

- Κάθε κατάσταση γίνεται μεταβλητή. Ειδικά την αρχική κατάσταση την ονομάζουμε S.
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow \sigma Y$ αν και μόνο αν από την κατάσταση Χ μεταβαίνουμε στην Υ με το σύμβολο σ
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow Y$ αν και μόνο αν από την κατάσταση Χ μεταβαίνουμε στην Υ με ε−κίνηση
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow \varepsilon$ αν η Χ είναι τελική κατάσταση.

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο ΜΠΑ-ε αντιστοιχεί η κανονική γραμματική



$$\begin{cases} S \rightarrow A \mid 0B \\ A \rightarrow 1\Gamma \\ B \rightarrow 0S \\ \Gamma \rightarrow B \mid \varepsilon \end{cases}$$

Β. Θεωρία

3. Σχέση Κανονικών Γλωσσών με Γλώσσες Ανεξ. Συμφραζομένων

4. Μετατροπή ΜΠΑ σε Κανονική Γραμματική

- Μαθαίνουμε τρόπο μετατροπής ΜΠΑ σε Κανονική Γραμματική.

Θεώρημα

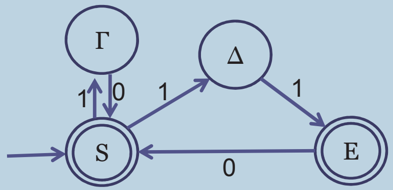
- Κάθε ΜΠΑ μετατρέπεται σε Κανονική Γραμματική.

Κανόνες Μετατροπής

- Κάθε κατάσταση γίνεται μεταβλητή. Ειδικά την αρχική κατάσταση την ονομάζουμε S.
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow \sigma Y$ αν και μόνο αν από την κατάσταση Χ μεταβαίνουμε στην Υ με το σύμβολο σ
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow \varepsilon$ αν η Χ είναι τελική κατάσταση.

(ίδιοι κανόνες με το ΜΠΑ-ε χωρίς την διαχείριση της ε-κίνησης)

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο ΜΠΑ αντιστοιχεί η κανονική γραμματική



$$\begin{cases} S \rightarrow 1\Gamma \mid 1\Delta \mid \varepsilon \\ \Gamma \rightarrow 0S \\ \Delta \rightarrow 1E \\ E \rightarrow 0S \mid \varepsilon \end{cases}$$

Β. Θεωρία

3. Σχέση Κανονικών Γλωσσών με Γλώσσες Ανεξ. Συμφραζομένων

5. Μετατροπή ΝΠΑ σε Κανονική Γραμματική

- Μαθαίνουμε τρόπο μετατροπής ΝΠΑ σε Κανονική Γραμματική.

Θεώρημα

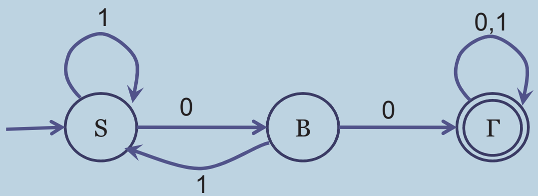
- Κάθε ΝΠΑ μετατρέπεται σε Κανονική Γραμματική.

Κανόνες Μετατροπής

- Κάθε κατάσταση γίνεται μεταβλητή. Ειδικά την αρχική κατάσταση την ονομάζουμε S.
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow \sigma Y$ αν και μόνο αν από την κατάσταση Χ μεταβαίνουμε στην Υ με το σύμβολο σ
- Βάζουμε τον κανόνα $X \rightarrow \varepsilon$ αν η Χ είναι τελική κατάσταση.

(ίδιοι κανόνες με το ΜΠΑ-ε χωρίς την διαχείριση της ε-κίνησης)

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο ΝΠΑ αντιστοιχεί η κανονική γραμματική



$$\begin{cases} S \rightarrow 0B \mid 1S \\ B \rightarrow 0\Gamma \mid 1S \\ \Gamma \rightarrow 0\Gamma \mid 1\Gamma \mid \varepsilon \end{cases}$$

Β. Θεωρία

4. Διφορούμενες Γραμματικές

1. Ορισμός και Παραδείγματα

- Εξετάζουμε την γραμματική $S \rightarrow XY,\ X \rightarrow 0X \mid \varepsilon,\ Y \rightarrow 1Y \mid \varepsilon$
- Η γραμματική αυτή παράγει συμβολοσειρές της μορφή 0*1*
- Εξετάζουμε την συμβολοσειρά 011. Μπορεί να παράχθεί με διαφορετικούς τρόπους από την συγκεκριμένη γραμματική, δύο από τους οποίους είναι οι εξής:

S	S
$\Rightarrow XY$	$\Rightarrow XY$
$\Rightarrow 0XY$	$\Rightarrow X1Y$
$\Rightarrow 0\varepsilon Y = 0Y$	$\Rightarrow X11Y$
$\Rightarrow 01Y$	$\Rightarrow X11\varepsilon = X11$
$\Rightarrow 011Y$	$\Rightarrow 0X11$
$\Rightarrow 011\varepsilon = 011$	$\Rightarrow 0\varepsilon 11 = 011$

Ορισμός:

- Επειδή υπάρχουν διαφορετικές παραγωγές της ίδιας συμβολοσειράς, η παραπάνω γραμματική χαρακτηρίζεται διφορούμενη γραμματική.

- Αντίθετα η γραμματική χωρίς συμφραζόμενα που μελετήσαμε για την γλώσσα $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, δηλαδή η $S \rightarrow 0S1 \mid \varepsilon$ δεν είναι διφορούμενη, διότι κάθε συμβολοσειρά της παράγεται με μοναδικό τρόπο.

Β. Θεωρία
4. Διφορούμενες Γραμματικές
1. Ορισμός και Παραδείγματα

- Ζητείται συχνά να μετατραπεί μία διφορούμενη γραμματική σε μη διφορούμενη.
- Για παράδειγμα η προηγούμενη γραμματική μπορεί ισοδύναμα να μετατραπεί στην γραμματική: $\begin{cases} S \rightarrow 0S|\mathrm{X} \\ \mathrm{X} \rightarrow 1\mathrm{X}|\varepsilon \end{cases}$
- Τότε η μοναδική παραγωγή της 011 είναι η:

$$\begin{array}{l} S \\ \Rightarrow 0\mathrm{S} \\ \Rightarrow 0\mathrm{X} \\ \Rightarrow 01X \\ \Rightarrow 011\mathrm{X} \\ \Rightarrow 011\varepsilon = 011 \end{array}$$

- Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα της μετατροπής μιας διφορούμενης γραμματικής σε μη διφορούμενη είναι ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ!
  - Δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει αλγόριθμος που να κάνει αυτήν την μετατροπή!
  - Υπάρχει μαθηματική απόδειξη, ότι δεν μπορεί να υπάρξει τέτοιος αλγόριθμος.
  - Θα μελετήσουμε και άλλα τέτοια προβλήματα στην ενότητα 5.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Δώστε Γραμματικές Ανεξάρτητες Συμφραζομένων για τις Γλώσσες:

$(2005\mathrm{B})\mathrm{L} = \{a^n b^{2n} | n \geq 0\}$

$(2006\mathrm{A})\mathrm{L} = \{a^m b^n a^n b^m | n, m \geq 0\}$

$(2007A)\mathrm{L} = \{a^{3n} b^{4n} | n \geq 0\}$

$(2007B)\mathrm{L} = \{wcw^R | w \in \{a, b\}^*\}$ στο αλφάβητο Σ={a,b,c}

$(2008A)\mathrm{L} = \{1^n 0^{3n} | n \geq 0\}$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Δώστε Γραμματικές Ανεξάρτητες Συμφραζομένων για τις Γλώσσες:

$(2008\mathrm{B})\mathrm{L} = \{1^{2n} 0^{3n} | n \geq 0\}$

$(2009\mathrm{A})\mathrm{L} = \{(ab)^n c^{2n} | \geq 0\}$

$(2009B)\mathrm{L} = \{a^n b c^n | n \geq 0\}$

$(2010A)\mathrm{L} = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m \geq 0\}$

$(2010\mathrm{B})\mathrm{L} = \{a^n b^n a^m b^m | n, m \geq 0\}$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

(20011A) Δίνεται η γλώσσα L = $\{0^k 1^m 0^n \mid k,m,n \in \mathrm{N}, k+m < n\}$ (όπου N = {0,1,2,...} το σύνολο των φυσικών αριθμών).
Δώστε μία γραμματική ανεξάρτητη συμφραζομένων που να παράγει την L.

(20011B) Δώστε μία γραμματική ανεξάρτητη συμφραζομένων που να παράγει τη γλώσσα $L_1 = \{a^m b^k a^n \mid m,k,n \in \mathrm{N}, m \neq n, 1 \leq k \leq 4\}$.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που να παράγει σωστές, πλήρως παρενθετοποιημένες παραστάσεις αριθμητικής που χρησιμοποιούν τις μεταβλητές x και y, δηλαδή στο αλφάβητο: { (,) , + , - , * , / } μία έγκυρη συμβολοσειρά είναι η (x-y)/(x*x)