# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

### Μάθημα 3.3:
### Η Γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- (-)

Επίπεδο Β

- (-)

Επίπεδο Γ

- Η γλώσσα αυτή δεν είναι συχνή στις εξετάσεις. Στο διάβασμα του μαθήματος το ενδιαφέρον θα πρέπει να εστιαστεί στο συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής πάνω σε αυτήν την νέα ερμηνεία.

# Β. Θεωρία

## 1. Η Γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων

### 1. Εισαγωγή

Η Γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων (συμβολιζεται με $\Gamma_1^{\theta\sigma}$) συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που ορίζονται με τα εξής στοιχεία:

- Το σύμπαν είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου Χ: $|\mathrm{A}| = P(X)$
- Ορίζονται τα κατηγορηματικά σύμβολα:
  - $\subseteq (x,y)$ με $\subseteq^{\mathrm{A}} (x,y)$ να αληθεύει αν $x \subseteq y$
  - $\subset (x,y)$ με $\subset^{\mathrm{A}} (x,y)$ να αληθεύει αν $x \subset y$

Συχνά στις ασκήσεις ορίζονται επίσης:

- Ένα σύμβολο σταθεράς που να απεικονίζει το κενό σύνολο
- Ονόματα κατηγορημάτων που αντιστοιχούν στα δύο βασικά κατηγορηματικά σύμβολα.

Προσοχή ότι στην ερμηνεία αυτή το σύμπαν μεταβάλλεται ανάλογα με την επιλογή του βασικού συνόλου Χ.

# Β. Θεωρία

## 2. Υπενθυμίσεις από ΜΑΘ0.1

### 1. Δυναμοσύνολο

- Ορίζουμε ότι:

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου Α (συμβολίζεται με $2^A$ ή P(A) ) είναι το σύνολο:

$$P(A) = \{x \mid x \text{ είναι υποσύνολο του } A\}$$

Αποτελεί δηλαδή το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του Α

- Αν Α={1,2} τότε το δυναμοσύνολο του Α είναι το σύνολο:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

- Ενώ αν Α={1,2,3} τότε το δυναμοσύνολό του είναι το σύνολο:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

# Β. Θεωρία

## 2. Υπενθυμίσεις από ΜΑΘ0.1

### 2. Σχέση Υποσυνόλου

- Ορίζουμε ότι:

Το σύνολο Α είναι <u>υποσύνολο</u> του συνόλου Β (και συμβολίζουμε $A \subseteq B$ ) αν κάθε στοιχείο που ανήκει στο σύνολο Α ανήκει και στο συνολο Β

- Παραδείγματα:
  - Ισχύει ότι: $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,d\}$
  - Ισχύει ότι: $\{1,5,3\} \subseteq N$
  - Ισχύει ότι: $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2,3,4\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2\} \subseteq \{1,3\}$

- Τυπικά ο ορισμός της σχέσης υποσυνόλου είναι ο εξής:

$$A \subseteq B \quad \alpha\nu\nu \quad \forall x \in A \quad \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \kappa\alpha\iota\ x \in B$$

  - Ενω με χρήση του υποσυνόλου ορίζουμε τυπικά την ισότητα συνόλων:

$$A = B \quad \alpha\nu\nu \quad A \subseteq B\ \kappa\alpha\iota\ B \subseteq A$$

# Β. Θεωρία

## 2. Υπενθυμίσεις από ΜΑΘ0.1

### 3. Σχέση Γνησίου Υποσυνόλου

- Ορίζουμε ότι:

Το σύνολο Α είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Β (και συμβολίζουμε $A \subset B$) αν το Α είναι υποσύνολο του Β, αλλά τα Α και Β δεν είναι ίσα.

- Παραδείγματα:
  - Ισχύει ότι: $\{a,b,c\} \subset \{a,b,c,d\}$
  - Ισχύει ότι: $\{1,5,3\} \subset N$
  - ΔΕΝ Ισχύει ότι: $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2\} \subset \{1,3\}$

- Τυπικά ο ορισμός της σχέσης υποσυνόλου είναι ο εξής:

$$A \subset B \quad \alpha\nu\nu \quad A \subseteq B \ \kappa\alpha\iota \ \exists x \notin A \ \kappa\alpha\iota \ x \in B$$

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις

### 1. Στοιχειώδεις Προτάσεις με Ποσοδείκτες

Μελετάμε όλους τους συνδυασμούς προτάσεων που μπορούν να κατασκευαστούν με το πολύ δύο ποσοδείκτες και τα κατηγορήματα της γλώσσας της θεωρίας συνόλων. Είναι σημαντικό πέρα από το Α/Ψ της κάθε πρότασης να είμαστε σε θέση να μεταφράζουμε σωστά κάθε πρόταση στα ελληνικά.

Ασκηση 1: Αντικαθιστώντας κάθε φορά το P με τα κατηγορηματικά σύμβολα ⊂, ⊆ να αποφασιστεί αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι Α/Ψ.

| | | $\subset$ | $\subseteq$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\forall x P(x,x)$ | | |
| 2 | $\exists x P(x,x)$ | | |
| 3 | $\forall x \forall y P(x,y)$ | | |
| 4 | $\exists x \exists y P(x,y)$ | | |
| 5 | $\forall x \exists y P(x,y)$ | | |
| 6 | $\exists x \forall y P(x,y)$ | | |
| 7 | $\forall y \forall x P(x,y)$ | | |
| 8 | $\exists y \exists x P(x,y)$ | | |
| 9 | $\exists y \forall x P(x,y)$ | | |
| 10 | $\forall y \exists x P(x,y)$ | | |

Έπειτα κατασκευάστε άλλους 8 τύπους αντικαθιστώντας το P(x,y) με P(y,x) στα 3-8 και επαναλάβετε το ερώτημα

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις

### 2. Μετάφραση στα Ελληνικά

Η μετάφραση μιας πρότασης από τα κατηγορηματικά στα ελληνικά θα γίνει αντίστοιχα με τον τρόπο που δουλέψαμε στην γλώσσα της θεωρίας αριθμών.

Παραδείγματα: Διατυπώστε στην $Γ_1^{θσ}$ την ακόλουθη πρόταση (χρησιμοποιώντας το κατηγόρημα $P(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subseteq y$ και θεωρώντας ότι το βασικό σύνολο X={1,2,3}

- Υπάρχει σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε συνόλου:
  - Υπάρχει σύνολο με ιδιότητα: $\exists x[\ldots]$
  - Το x είναι υποσύνολο κάθε συνόλου $\forall y(x \subseteq y)$ και με χρήση του κατηγορήματος: $\forall y\big(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})\big)$
  - Άρα η τελική πρόταση είναι: $\exists x[\forall y\big(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})\big)]$ ή πιο απλά: $\exists x \forall y \mathrm{P}(\mathrm{x},y)$
- Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου
  - Υπονοείται διπλός καθολικός ποσοδείκτης. Η πρόταση αληθεύει για κάθε ζεύγος συνόλων: $\forall x \forall y[\ldots]$
  - Το «αν και μόνο αν» μεταφράζεται σε μια ισοδυναμία που θα συνδέει τα δύο σκέλη της πρότασης : $\forall x \forall y[\ldots \leftrightarrow \cdots]$
  - Το αριστερό μέρος της ισοδυναμίας εκφράζεται με την ισότητα : $\forall x \forall y[x \approx y \leftrightarrow \cdots]$
  - Το δεξί μέρος της ισοδυναμίας θα εκφραστεί με το κατηγόρημα του υποσυνόλου: $\forall x \forall y[x \approx y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq x]$
  - Άρα εκφράζοντας με χρήση του κατηγορήματος P: $\forall x \forall y[x \approx y \leftrightarrow P(x,y) \wedge P(y,x)]$

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις

### 2. Μετάφραση στα Ελληνικά

Ασκηση 2: Θεωρώντας την ερμηνεία της $Γ_1^{θσ}$ με:

- Το σύμπαν να είναι το δυναμοσύνολο του {1,2,3}
- Το κατηγόρημα $P(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subseteq y$
- Το κατηγόρημα $R(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subset y$
- Την σταθερά c να ερμηνεύεται στο κενό σύνολο.

Γράψτε σε Κατηγορηματική Λογική τις προτάσεις:

1. Κανένα σύνολο δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του κενού συνόλου
2. Κανένα σύνολο δεν είναι υποσύνολο του εαυτού του.
3. Υπάρχει μοναδικό υποσύνολο που είναι υποσύνολο όλων των συνόλων.
4. Υπάρχει μοναδικό υποσύνολο που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων
5. Αν ένα σύνολο Α είναι υποσύνολο ενός συνόλου Β, τότε το Β δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του Α
6. Αν ένα σύνολο Α είναι γνήσιο υποσύνολο του Β, τότε το Α είναι υποσύνολο του Β.

# Β. Θεωρία

## 3. Ασκήσεις

### 3. Περαιτέρω ασκήσεις

Και στην ερμηνεία αυτή συνήθως ζητούνται:

- Η μετάφραση προτάσεων Κατηγορηματικής Λογικής στα ελληνικά
- Η κατασκευή τύπων Κατηγορηματικής Λογικής από διατυπώσεις προτάσεων στα ελληνικά.
- Η απόφαση αν ένας τύπος είναι αληθής ή ψευδής (πάντα θα κάνουμε μετάφραση των προτάσεων)

Ασκηση 3: Θεωρώντας την ερμηνεία της $Γ_1^{θσ}$ με:

- Το σύμπαν να είναι το δυναμοσύνολο του {1,2,3}, το κατηγόρημα $P(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subseteq y$, το κατηγόρημα $R(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subset y$, την σταθερά c να ερμηνεύεται στο κενό σύνολο.

Μεταφράστε στα ελληνικά τις προτασεις:

1. $\forall x \exists y \exists z [P(x,y) \land P(x,z)]$
2. $\forall x \exists y \exists z [R(x,y) \land R(x,z)]$
3. $\forall x \forall y [Q(x,y) \rightarrow R(x,y) \lor x \approx y]$
4. $\exists x [Q(x,c) \land \neg R(x,c)]$

# Γ. Ασκήσεις

## Ερωτήσεις 1

Θεωρώντας την ερμηνεία της $Γ_1^{θσ}$ με το σύμπαν να είναι το δυναμοσύνολο του {1,2,3}, το κατηγόρημα $Q(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subseteq y$, το κατηγόρημα $R(x,y)$ να αληθεύει αν $x \subset y$ εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς

1. $\forall x \forall y [Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)]$

2. $\exists x \exists y [Q(x,y) \wedge Q(y,x)]$

3. $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \, [R(x_1,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \wedge R(x_3,x_4)]$

4. $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 [R(x_1,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \wedge R(x_3,x_4) \wedge R(x_4,x_5)]$

# Γ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 2

Έστω $S_n = \{1,2,\dots,n\}$ το σύνολο των φυσικών από το 1 εώς το n και $\mathrm{P}(S_n)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $S_n$. Έστω Q κατηγορηματικό σύμβολο που ερμηνεύουμε στο $\mathrm{P}(S_n)$ ως εξής Q(x,y) αν και μόνο αν $x \subseteq y$.

1. Ο τύπος $\exists x \forall y [Q(y,x)]$ αληθεύει στην παραπάνω δομή.
2. Ο τύπος $\forall x \exists y [x \neq y \wedge Q(y,x)]$ αληθεύει στην παραπάνω δομή.
3. Ο τύπος $f(x) = \exists y [Q(x,y)]$ αληθεύει για $2^n$ στοιχεία x του $\mathrm{P}(S_n)$
4. Ο τύπος $\exists x \exists y [x \neq y \wedge Q(x,y) \wedge Q(y,x)]$ αληθεύει στην παραπάνω δομή.

# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 1

Θεωρούμε το σύνολο {1,2,3} και συμβολίζουμε με P({1,2,3}) το δυναμοσύνολό του, δηλαδή το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του {1,2,3}. Άρα:

$$P(\{1,2,3\})=\{\ \varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\ \}$$

Ερμηνεύουμε στη δομή αυτή το κατηγορηματικό σύμβολο Q με τη σχέση «είναι υποσύνολο του» (δηλαδή Q(x,y) αν και μόνο αν $x \subseteq y$ ) και το σύμβολο σταθεράς c με το στοιχείο $\varnothing$.

Γράψτε προτάσεις κατηγορηματικής λογικής που να δηλώνουν ότι:

1. Το κενό υποσύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου

2. Υπάρχει σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα.

3. Για οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων υπάρχει ένα κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (γνωστό ως τομή συνόλων)

4. Για οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων υπάρχει ένα κοινό σύνολο που τα περιέχει και είναι το μικρότερο δυνατό (γνωστό ως ένωση συνόλων)