Οι Νόμοι της Προτασιακής Λογικής:

- Είναι ταυτολογίες.
- Τους χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε έναν τύπο σε έναν ισοδύναμό του.

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση
1	Αντιμεταθετικότητα	$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$ $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
2	Προσεταιριστικότητα	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$
3	Επιμεριστικότητα	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
4	Διπλή Άρνηση	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
5	Άρνηση Συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
6	De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
7	Αντιθετοαναστροφή	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
8	Εξαγωγή	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$
9	1^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
10	2^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
11	Αποκλεισμός Τρίτου	$\varphi \vee \neg\varphi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος του τύπου:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow \neg(p_1 \vee p_2)$$

που χρησιμοποιεί μόνο τους σύνδεσμους $\{\neg, \rightarrow\}$

Λύση: Στον τύπο:

$$\underline{(p_1 \wedge \neg p_2)} \rightarrow \neg(p_1 \vee p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο άρνησης συνεπαγωγής:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\underline{p_1} \vee p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\underline{\neg\neg p_1 \vee p_2})$$

Εφαρμόζω το 1° νόμο αντικατάστασης:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\neg p_1 \rightarrow p_2)$$

Χρήσιμος για την χρήση των τύπων μπορεί να φανεί ο παρακάτω πίνακας:

Μετατροπή συνδέσμων	Χρήση του νόμου	Νόμος
Από → σε ∨ και αντίστροφα	1^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
Από → σε ∧ και αντίστροφα	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
Από ∨ σε ∧ και αντίστροφα	Νόμοι De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
Από ↔ σε ∧, →και αντίστροφα	2^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ(φ):</u> που θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει <u>για κάθε προτασιακό τύπο</u>

- <u>Βάση Επαγωγής:</u> Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p, δηλαδή ότι ισχύει η ΠΡΟΤΑΣΗ(p)
  - Κάνουμε απόδειξη ότι ισχύει η πρόταση για μια προτασιακή μεταβλητή.
- <u>Επαγωγική Υπόθεση:</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ,ψ, δηλαδή ότι ισχύουν ΠΡΟΤΑΣΗ(φ), ΠΡΟΤΑΣΗ(ψ)
- <u>Επαγωγικό Βήμα:</u> Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι ισχύουν:

  ΠΡΟΤΑΣΗ($\neg\varphi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \vee \psi$),
  ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \wedge \psi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \rightarrow \psi$)
  ΠΡΟΤΑΣΗ($\varphi \leftrightarrow \psi$)

Ορισμός: Ένα σύνολο συνδέσμων θα λέγεται <u>**πλήρες σύνολο συνδέσμων** (ή επαρκές σύνολο συνδέσμων)</u> ανν κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να μετατραπεί σε έναν ισοδύναμό που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο.

- Εμπειρικά για να είναι ένα σύνολο συνδέσμων πλήρες, απαιτείται να υπάρχει σε αυτό το ¬ και τουλάχιστον ένας ακόμη διμελής σύνδεσμος.
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων είναι πλήρες κάνω επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων:
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων ΔΕΝ είναι πλήρες κατασκευάζω έναν τύπο που δεν μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει ίδιο αριθμο αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Λύση:

Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p, δηλαδή ότι ο τύπος p έχει ίσες αριστερές και δεξιές παρενθέσεις

- *<u>Απόδειξη:</u>* Ο τύπος p έχει 0 αριστερές και 0 δεξιές παρενθέσεις. Συνεπώς ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ, ψ, δηλαδή ότι ισχύει $L_\varphi = R_\varphi$ και $L_\psi = R_\psi$.
(Συμβολίζουμε με L_x το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων του τύπου x, και με R_x το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων του τύπου x)

Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι:

- <u>Ο τύπος $(\neg\varphi)$</u> έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\neg\varphi)$ έχει $L_\varphi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $\mathrm{R}_\varphi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\varphi = R_\varphi$ άρα και $L_\varphi + 1 = R_\varphi + 1$
- <u>Ο τύπος $(\varphi \vee \psi)$</u> έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\varphi \vee \psi)$ έχει $L_\varphi + \mathrm{L}_\psi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $\mathrm{R}_\varphi + \mathrm{R}_\psi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\varphi = R_\varphi$ και $L_\psi = R_\psi$, άρα και $L_\varphi + L_\psi + 1 = R_\varphi + R_\psi + 1$.
- <u>Η απόδειξη για τους τύπους $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ είναι όμοια με την $(\varphi \vee \psi)$.</u>