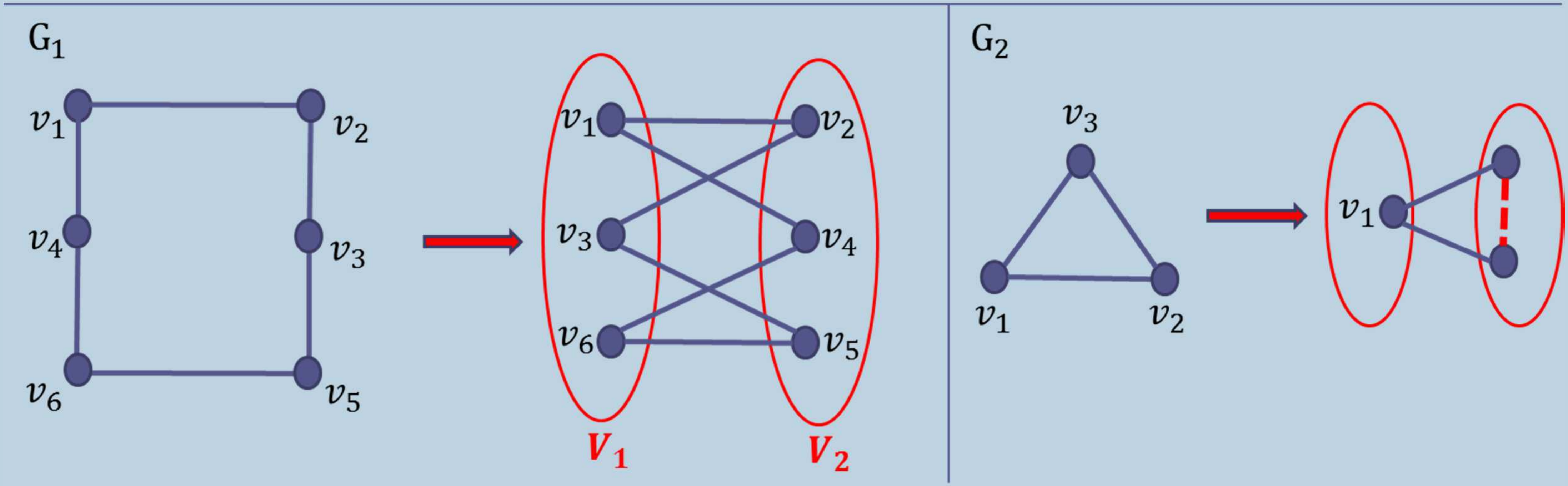
Ορισμός 1: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **διχοτομίσιμο (ή διμερές)** όταν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν (χωριστούν) σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1 και V_2 (δηλαδή $V_1 \cup V_2 = V$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα της άκρο σε κορυφή του V_1 και το άλλο της άκρο της V_2.

Ορισμός 2: Ένα γράφημα καλείται διχοτομίσιμο αν και μόνο αν οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.

Ορισμός 3: Ένα γράφημα είναι διχοτομίσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους

Παρατηρήσεις:
- Τα σύνολα V_1, V_2 καλούνται μερίδια κορυφών
- Το διμερές γράφημα συμβολίζεται και $G = (V_1, V_2, E)$

Παράδειγμα: Ο G_1 είναι διχοτομίσιμος με την διαμέριση: $V_1 = \{v_1, v_3, v_6\}$ και $V_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$. Ο G_2 δεν είναι διχοτομίσιμος



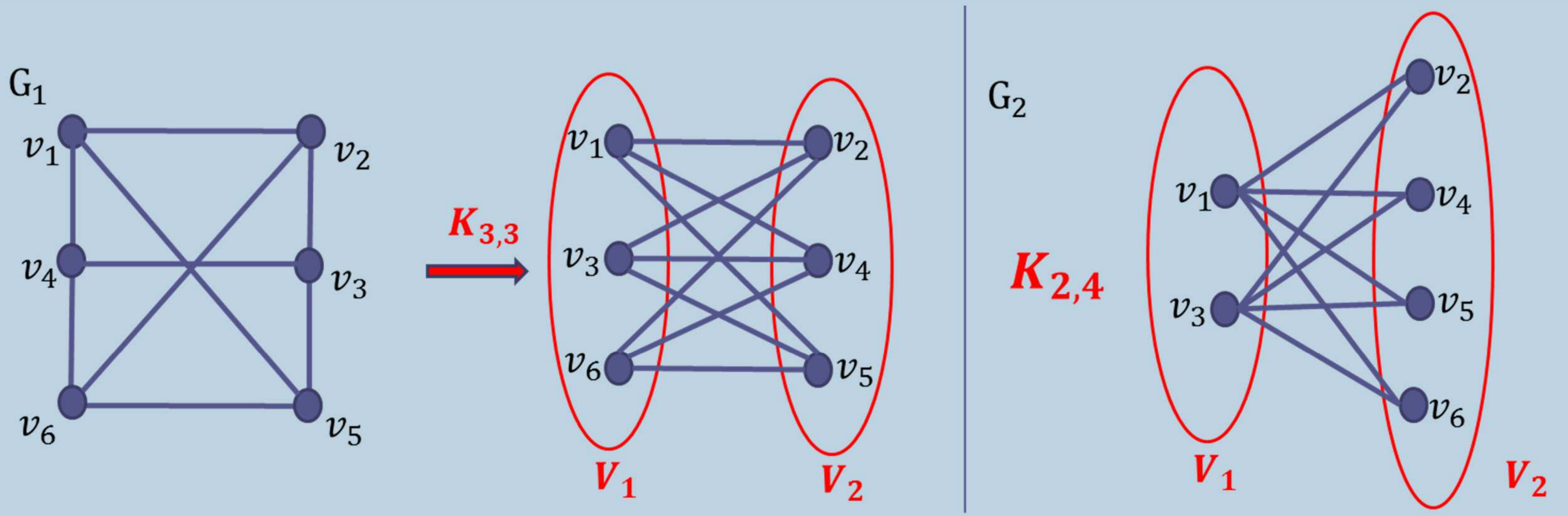
ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΧΟΤΟΜΙΣΙΜΟ (ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΜΕΡΕΣ) ΓΡΑΦΗΜΑ

Ορισμός: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ είναι **πλήρες διχοτομίσιμο** (ή πλήρες διμερές) αν είναι διχοτομίσιμο και περιέχει όλες τις δυνατές ακμές που μπορούν να συνδέουν τις κορυφές του V_1 με τις κορυφές του V_2

Παρατηρήσεις:

- Συμβολίζεται με $\mathbf{K}_{m,n}$ όπου $m=|V_1|$, $n=|V_2|$ και
- Ισχύει ότι:
  - Έχει $|V|=\boldsymbol{m+n}$ **κορυφές**
  - Έχει $|E|=\boldsymbol{m\cdot n}$ **ακμές**

Παράδειγμα: Ο G_1 είναι το $K_{3,3}$. Ο G_2 είναι το $K_{2,4}$



<u>Ορισμός: Σύνολο Ανεξαρτησίας</u> ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που δεν συνδέονται με ακμή

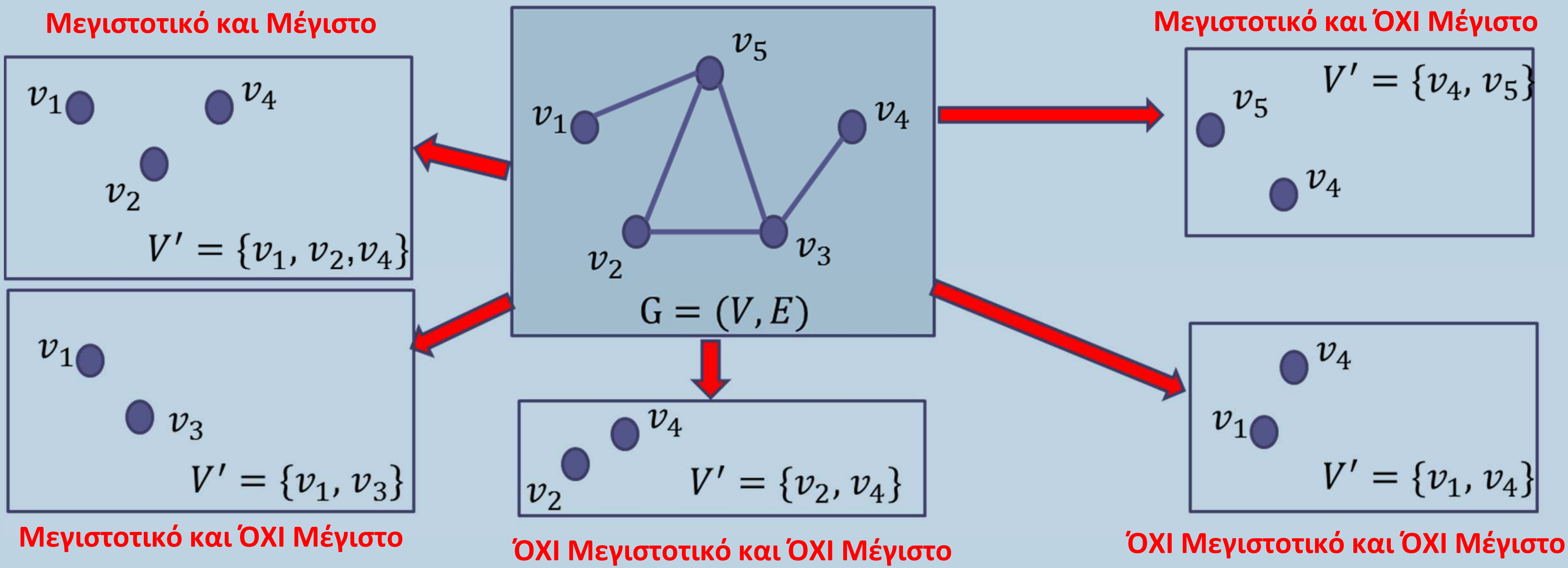
Τυπικά:

- Το σύνολο $\mathrm{V}' \subseteq V$ είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας του γραφήματος $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος $v_i, v_j \in \mathrm{V}'$ με $v_i \neq v_j$ ισχύει ότι $[v_i, v_j] \notin \mathrm{E}'$

<u>Ορισμός:</u> Ένα σύνολο ανεξαρτησίας που δεν μπορεί να επαυξηθεί περαιτέρω (προσθέτοντας του ακόμη μία κορυφή) λέγεται **<u>μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας</u>**.

<u>Ορισμός:</u> Το μεγαλύτερο (σε πληθάριθμο) μεγιστοτικό σύνολο ανεξαρτησίας καλείται **<u>μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας</u>**.

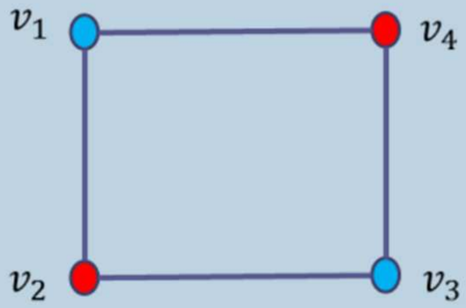
<u>Παράδειγμα:</u>



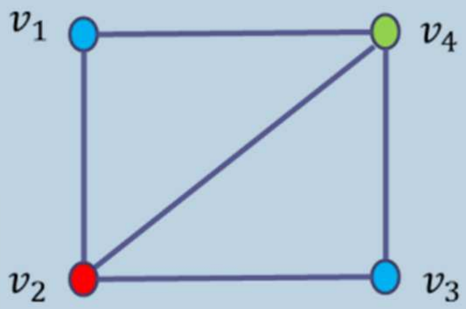
Ορισμός: Ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι **k-χρωματίσιμο** αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν με k χρώματα ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

- Ή ισοδύναμα αν μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές σε k σύνολα ανεξαρτησίας (με κάθε σύνολο να χρωματίζεται με ένα χρώμα)
- Ένα k-χρωματίσιμο γράφημα θα λέγεται και k-μερές (σε αναλογία το 2-χρωματίσιμο γράφημα έχει 2 σύνολα ανεξαρτησίας, καλείται διμερές)

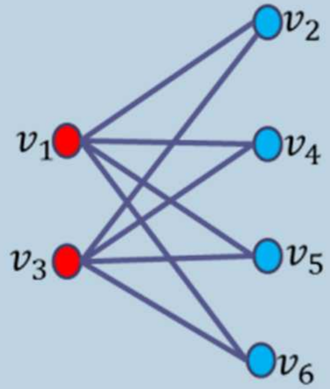
Παράδειγμα:



2-χρωματίσιμος



3-χρωματίσιμος

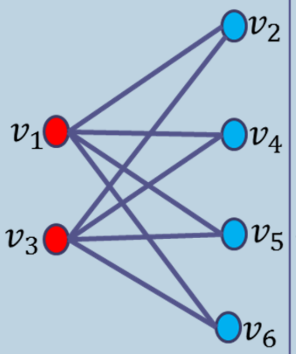


2-χρωματίσιμος

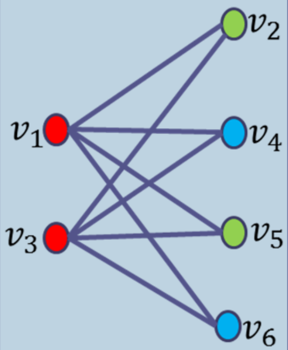
Σημαντικό:

- Ένας έγκυρος χρωματισμός δεν απαιτεί τον χρωματισμό των κορυφών με το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων.
- Έτσι αν ένα γράφημα είναι π.χ. 2-χρωματίσιμο, τότε θα είναι και 3-χρωματίσιμο, … και n-χρωματίσιμο

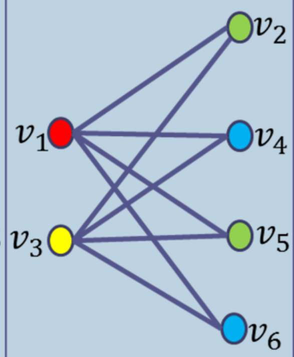
Παράδειγμα:



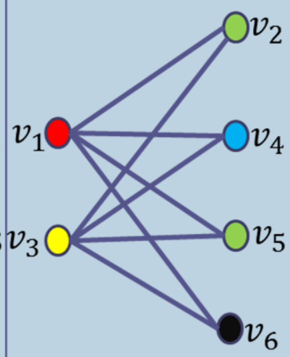
2-χρωματίσιμος



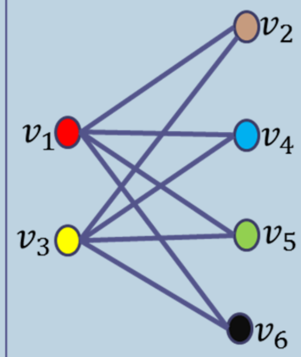
3-χρωματίσιμος



4-χρωματίσιμος



5-χρωματίσιμος



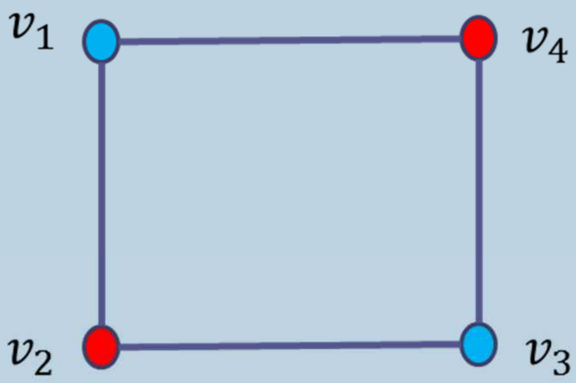
6-χρωματίσιμος

<u>Ορισμός: Χρωματικός Αριθμός</u> ενός γραφήματος $G=(V,E)$ καλείται το ελάχιστο k, για το οποίο ο γράφος είναι k-χρωματίσιμος.

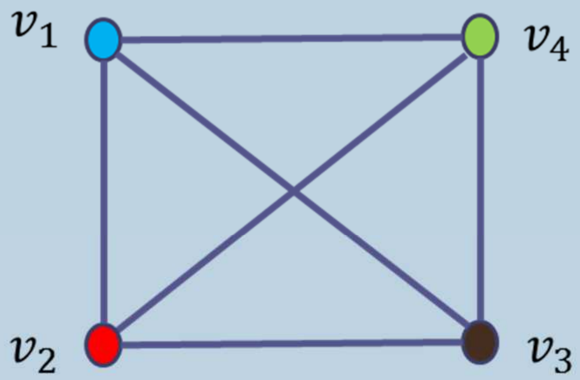
- Συμβολίζεται με $\chi(G)$

Το πρόβλημα της εύρεσης του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (δεν υπάρχει αποδοτικός τρόπος για να βρίσκουμε γρήγορα τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος – το πρόβλημα είναι NP-Complete).

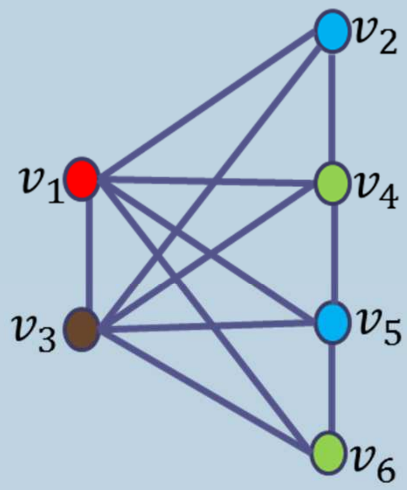
<u>Παράδειγμα:</u>



$\chi(G)=2$



$\chi(G)=4$



$\chi(G)=4$