ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

<u>Θεώρημα (Απαγωγής):</u>

Αν $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ τότε $\mathrm{T} \vdash \varphi \rightarrow \psi$

<u>Ευθεία χρήση:</u>
Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
Τότε από το θεώρημα απαγωγής «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vdash \varphi \rightarrow \psi$
<u>Αντίστροφη χρήση:</u>
Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

<u>Θεώρημα (Αντιθετοαναστροφής):</u>

$T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ αν και μόνο αν $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

<u>Θεώρημα (Εις Άτοπο Απαγωγής):</u>

Αν $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό τότε $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$

<u>Ευθεία χρήση:</u>
Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό
Τότε από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$
<u>Αντίστροφη χρήση:</u>
Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$
Από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό.

Αντιφατικό Σύνολο Τύπων :
Ένα σύνολο τύπων Τ καλείται αντιφατικό αν υπάρχει ένας τύπος ψ τέτοιος ώστε να ισχύει:
$\mathrm{T} \vdash \psi$ και $\mathrm{T} \vdash \neg\psi$
Συνεπές σύνολο τύπων:
Σύνολο τύπων που δεν είναι αντιφατικό

<u>ΑΣΚΗΣΗ:</u> Να αποδείξετε ότι:
$\vdash ((\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi) \rightarrow (\chi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \neg\psi))$
Απάντηση:
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi \vdash \chi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi, \psi \rightarrow \neg\psi\} \vdash \neg\chi$$

που έχει τυπική απόδειξη:
1. $\psi \rightarrow \neg\psi$ Υπόθεση
2. $(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi$ Υπόθεση
3. $\neg\chi$ MP1,2

<u>ΑΣΚΗΣΗ:</u> Να αποδείξετε ότι:

$$\{\chi \rightarrow \neg\psi, \phi\} \vdash \chi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)$$

Απάντηση:
Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι:
$\{\chi \rightarrow \neg\psi, \phi, \chi\}$ |- $\neg(\phi \rightarrow \psi)$
Από το θ.απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο τύπων:
$\mathrm{T}=\{\chi \rightarrow \neg\psi, \phi, \chi, \phi \rightarrow \psi\}$ είναι αντιφατικό.
Και ακολουθούν οι τυπικές αποδείξεις: $\mathrm{T} \vdash \psi$ και $\mathrm{T} \vdash \neg\psi$

<u>Θεώρημα (Εγκυρότητας):</u> Αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \vDash \varphi$

- <u>(ευθεία χρήση)</u> Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $\mathrm{T} \vdash \varphi$. Τότε από το θεώρημα εγκυρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vDash \varphi$
- <u>(αντίστροφη χρήση)</u> Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vDash \varphi$. Από το θεώρημα εγκυρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$

<u>Θεώρημα (Πληρότητας):</u> Αν $T \vDash \varphi$ τότε $T \vdash \varphi$

- <u>(ευθεία χρήση)</u> Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $\mathrm{T} \vDash \varphi$. Τότε από το θεώρημα πληρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $\mathrm{T} \vdash \varphi$
- <u>(αντίστροφη χρήση)</u> Για να δείξουμε ότι: $\mathrm{T} \vdash \varphi$. Από το θεώρημα πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vDash \varphi$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΥΠΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ www.psounis.gr

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

<u>Απόδειξη 1 (χωρίς Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)</u>
Η τυπική απόδειξη είναι:
1. $\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ:φ, ψ: $\phi \rightarrow \phi$
2. $(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου φ:φ, ψ: $\phi \rightarrow \phi$,χ: φ
3. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ MP1,2
4. $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ψ, ψ:φ
5. $\phi \rightarrow \phi$ MP3,4

<u>Απόδειξη 2 (με Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)</u>
Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:
1. φ Υπόθεση

$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:
1. $\neg\varphi$ Υπόθεση

$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:
1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \neg\neg\varphi, \psi: \neg\varphi$
3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ MP1,2
4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\varphi: \neg\varphi, \psi: \varphi$
5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$ MP3,4
6. $\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ όπου $\varphi: \neg\varphi$
7. φ MP6,5

Και παραθέτουμε την τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$