



ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: NP-πληρότητα

Μάθημα 6.4:
Αναγωγές Θεωρίας Γράφων - Μέρος 2°

Δημήτρης Ψούνης



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Εισαγωγή

1. Σχήμα Απόδειξης Αναγωγής
2. Αναγωγές της Προτασιακής Λογικής

2. Το πρόβλημα HAMILTON-PATH είναι NP-πλήρες

1. HAMILTON-PATH ανήκει στο NP
2. 3SAT ανάγεται στο HAMILTON-PATH

3. Το πρόβλημα HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες

1. HAMILTON-CYCLE ανήκει στο NP
2. HAMILTON-PATH ανάγεται στο HAMILTON-CYCLE

4. Το πρόβλημα 3-COLORING είναι NP-πλήρες

1. 3-COLORING ανήκει στο NP
2. 3SAT ανάγεται στο 3-COLORING

Γ. Ασκήσεις

1. Το 7-COLORING είναι NP-πλήρες
2. Το TSP είναι NP-πλήρες



A. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο A

➤ (-)

Επίπεδο B

- Το 7COLORING είναι NP-πλήρες
- Το TSP είναι NP-πλήρες
- Το HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες
- Επίπεδο Γ
- Το 3-COLORING είναι NP-πλήρες
- Το HAMILTON-PATH είναι NP-πλήρες



B. Θεωρία

1. Εισαγωγή

1. Σχήμα Απόδειξης Αναγωγής

Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Αποδεικνύουμε ότι $\Pi \in NP$

- Είτε δίνοντας μη ντετερμινιστική μηχανή Turing-μάντη που «μαντεύει» την λύση και έπειτα επαληθεύει ότι είναι όντως λύση του προβλήματος.
- Είτε δίνοντας ντετερμινιστική μηχανή Turing-επαληθευτή που δεδομένης μιας λύσης (πιστοποιητικό) επαληθεύει σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο ότι είναι λύση του προβλήματος.

2. Δίνουμε μια πολυωνυμική αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Π' στο πρόβλημα Π (Η αναγωγή συμβολίζεται με $\Pi' \leq \Pi$)

- Όπου δίνουμε έναν κανόνα μετασχηματισμού της εισόδου Ε' του γνωστού προβλήματος Π' σε είσοδο Ε του αγνώστου προβλήματος Π έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο:

Αποτέλεσμα του Π(Ε) **ισοδύναμο** με αποτέλεσμα του Π'(Ε')

Και δείχνουμε ότι η κατασκευή θέλει πολυωνυμικό χρόνο

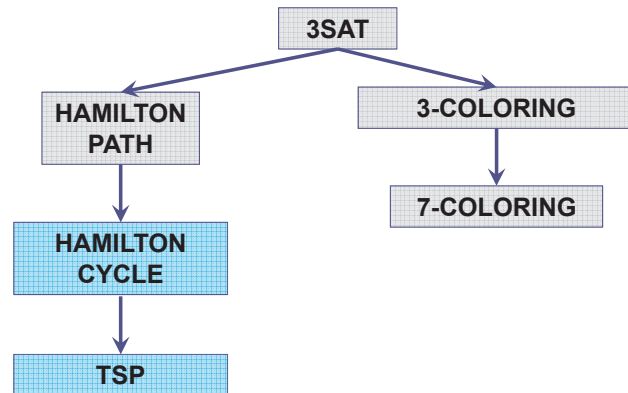
- Θα χρησιμοποιούμε τον «μάντη» για να αποδεικνύουμε ότι ανήκει στο NP.
- Αν αποδείξουμε μόνο το 2° σκέλος, τότε το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο (NP-Hard)

Β. Θεωρία

1. Εισαγωγή

2. Αναγωγές της Θεωρίας Γράφων

- Με αφετηρία το πρόβλημα 3SAT κάνουμε αναγωγές σε προβλήματα της θεωρίας γράφων. Στο σημερινό μάθημα ασχολούμαστε με προβλήματα που σχετίζονται με τον χρωματισμό κορυφών και την εύρεση μονοπατιών με κάποιες ιδιότητες.
- Οι αναγωγές που θα δούμε παρουσιάζονται στο παρακάτω δένδρο αναγωγών:



Β. Θεωρία

2. Το HAMILTON-PATH είναι NP-πλήρες

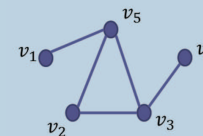
Η διατύπωση του προβλήματος HAMILTON-PATH έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα HAMILTON-PATH:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος $G=(V,E)$
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος μονοπάτι Hamilton;
 • (Υπενθύμιση: Μονοπάτι Hamilton είναι μονοπάτι που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά)

Στιγμιότυπα:

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο γράφημα έχω το μονοπάτι Hamilton: $v_1-v_5-v_2-v_3-v_4$



1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα 3SAT ανάγεται στο πρόβλημα HAMILTON-PATH σε πολ/κο χρόνο (δύσκολη απόδειξη –βλέπε βιβλίο)

Β. Θεωρία

2. Το HAMILTON-PATH είναι NP-πλήρες

1. Το HAMILTON-PATH ανήκει στο NP

1. Δείχνουμε ότι το HAMILTON-PATH ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου $G=(V,E)$ με $n=|V|$ κορυφές και $m=|E|$ ακμές:

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο $O(n)$ μαντεύουμε μία μετάθεση των κορυφών και έπειτα
- Επαληθεύουμε ότι διαδοχικές κορυφές συνδέονται με ακμή σε χρόνο $O(n)$.

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα HAMILTON-PATH ανήκει στο NP

Β. Θεωρία

3. Το HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες

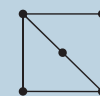
Η διατύπωση του προβλήματος HAMILTON-CYCLE έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα HAMILTON-CYCLE:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος $G=(V,E)$
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κύκλο Hamilton;
 • (Υπενθύμιση: Κύκλος Hamilton είναι κύκλος που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά)

Στιγμιότυπα:

Παράδειγμα: Στα ακόλουθα γραφήματα έχουμε ότι:



Δεν έχει
κύκλο
Hamilton



Έχει
κύκλο
Hamilton

1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα HAMILTON-PATH ανάγεται στο πρόβλημα HAMILTON-CYCLE σε πολ/κο χρόνο

Β. Θεωρία

3. Το HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες

1. Το HAMILTON-CYCLE ανήκει στο NP

1. Δείχνουμε ότι το HAMILTON-CYCLE ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου $G=(V,E)$ με $n=|V|$ κορυφές και $m=|E|$ ακμές:

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο $O(n)$ μαντεύουμε μία μετάθεση των κορυφών και έπειτα
- Επαληθεύουμε ότι διαδοχικές κορυφές συνδέονται με ακμή και ότι η τελευταία κορυφή της μετάθεσης συνδέεται με την πρώτη κορυφή σε χρόνο $O(n)$.

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα HAMILTON-CYCLE ανήκει στο NP

Β. Θεωρία

3. Το HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες

2. Το HAMILTON-PATH ανάγεται στο HAMILTON-CYCLE σε πολ/κό χρόνο

2.A) Το HAMILTON-PATH ανάγεται στο HAMILTON-CYCLE

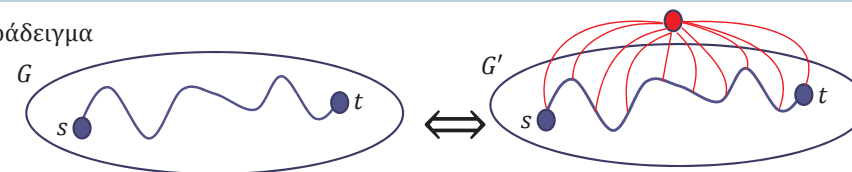
Δίνουμε αναγωγή από το HAMILTON-PATH στο HAMILTON-CYCLE δηλαδή δεδομένου ενός γράφου $G=(V,E)$ του HAMILTON-PATH κατασκευάζουμε γράφο $G'=(V',E')$ του HAMILTON-CYCLE τέτοιο ώστε:

G έχει μονοπάτι Hamilton $\Leftrightarrow G'$ έχει κύκλο Hamilton

Η αναγωγή είναι η εξής:

- Επιλέγουμε $G'=G$ επαυξημένος με μία νέα κορυφή u η οποία συνδέεται με όλες τις κορυφές του G

Παράδειγμα



Αρχικό Γράφημα έχει
μονοπατι Hamilton

Νεο Γράφημα έχει
κύκλο Hamilton

Β. Θεωρία

3. Το HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες

2. Το HAMILTON-PATH ανάγεται στο HAMILTON-CYCLE σε πολ/κό χρόνο

• Ευθύ:

- Έστω ότι το G έχει μονοπάτι Hamilton, έστω το $s \dots t$
- Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τον κύκλο Hamilton στο G' : $s \dots t-u-s$
- Συνεπώς το γράφημα G' έχει κύκλο Hamilton

• Αντίστροφο:

- Έστω G' έχει κύκλο Hamilton
- Αν αφαιρέσουμε από αυτόν την κορυφή u και τις δύο προσπίπτουσες σε αυτόν ακμές, τότε προκύπτει μονοπάτι που περνάει από όλες τις κορυφές του G
- Άρα το G έχει μονοπάτι Hamilton

Β. Θεωρία

3. Το HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες

2. Το HAMILTON-PATH ανάγεται στο HAMILTON-CYCLE σε πολ/κό χρόνο

2.B) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Προφανώς ο χρόνος της αναγωγής είναι πολυωνυμικός.

(Τυπικά προσθέτουμε μια νέα γραμμή και μία νέα στήλη στον πίνακα γεινιάσης σε χρόνο $O(n)$)



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Το 3-COLORING ανάγεται στο 7-COLORING

Το πρόβλημα του k -χρωματισμού ($k \geq 3$ ακέραιος) ορίζεται ως εξής: Δοθέντος ενός μη κατευθυντικού γραφήματος G , είναι το γράφημα G k -χρωματίσιμο;

Ένα γράφημα G καλείται k -χρωματίσιμο αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν χρησιμοποιώντας ακριβώς k διαφορετικά χρώματα, έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα.

1. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του 7-ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ανήκει στην κλάση NP.
2. Δεδομένου ότι το πρόβλημα του 3-ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ είναι NP-πλήρες, αποδείξτε ότι το πρόβλημα του 7-ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ είναι NP-πλήρες.



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Το HAMILTON-CYCLE ανάγεται στο TSP

Το πρόβλημα TSP (Travelling Salesman Problem) διατυπώνεται ως εξής:

- Στιγμιότυπο: Γράφος με βάρη $G=(V,E,W)$, ακέραιος k
- Ερώτημα: Υπάρχει απλός κύκλος που περνάει από όλες τις κορυφές του G με βάρος το πολύ k ;

Θεωρείστε γνωστό ότι το πρόβλημα HAMILTON-CYCLE είναι NP-πλήρες.



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 3

Αναδιατυπώσεις Γνωστών NP-complete προβλημάτων

Εξετάστε αν τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-complete:

- (A) NET ASSIGNMENT: Δοθισών N εταιριών κινητής τηλεφωνίας κάθε μία από τις οποίες μπορεί να καλύψει καθένα από τους Νομούς μιας χώρας, υπάρχει τρόπος να ανατεθούν οι Νομοί σε εταιρίες ώστε σε καμιά εταιρία να μην ανατεθούν Νομοί που συνορεύουν μεταξύ τους; Σημείωση: Δεν απαιτείται όλες οι εταιρίες να έχουν ανάθεση.
- (B) TRANSITION: Δοθέντος ενός συνόλου καταστάσεων $K=\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, ακεραίου $k > 2$ και πεπερασμένου συνόλου ενεργειών $A=\{a_1, \dots, a_n\}$ που όταν εκτελεστούν προκαλούν ενδεχόμενα αλλαγή κατάστασης (μετάβαση από κατάσταση σε κατάσταση, όπου δεν αποκλείεται και μετάβαση μιας κατάστασης στον εαυτό της), υπάρχει σύνολο K_0 καταστάσεων μεγέθους το πολύ $k-1$ ώστε κάθε μετάβαση να είναι μετάβαση από ή σε κατάσταση στο K_0 (δηλ. $p \in K_0$ ή $q \in K_0$).