ΚΛΑΣΕΙΣ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

$P = \{$**Συνολο προβληματων που λυνονται σε πολυωνυμικο ντετερμινιστικο χρονο**$\}$

$$P = \bigcup_k DTIME(n^k)$$

$NP = \{$**Συνολο προβληματων που λυνονται σε μη ντετερμινιστικο πολυωνυμικο χρονο**$\}$

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

$EXP = \{$**Συνολο προβληματων που λυνονται σε εκθετικο ντετερμινιστικο χρονο**$\}$

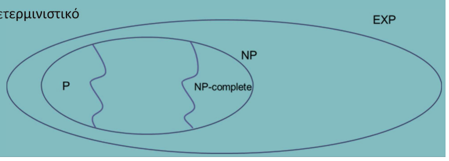
$$EXP = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$$

$DTIME(f(n))$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε ντετερμινιστικό χρόνο $O(f(n))$ τότε:

$NTIME(f(n))$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε μη ντετερμινιστικό χρόνο $O(f(n))$

Θεώρημα: Ισχύει ότι: $P \subseteq NP \subseteq EXP$

- $P \subseteq NP$ είναι προφανές, αφού κάθε ντετερμινιστική Μ.Τ. είναι εξ'ορισμού και μη ντετερμινιστική.
- $NP \subseteq EXP$. Η απόδειξη στηρίζεται στην προσομοίωση μια μη ντετερμινιστικής Μ.Τ. Ν από μία ντετερμινιστική Μ ως εξής:
  - Η Ν είναι πολυωνυμικού χρόνου, άρα κάθε υπολογισμός της έχει πολυωνυμικό μήκος έστω $p=n^k$, όπου n το μέγεθος της εισόδου.
  - Κάθε υπολογισμός της Ν είναι μια ακολουθία από μη ντετερμινιστικές επιλογές. Αν είναι d ο βαθμός του μη ντετερμινισμού, τότε υπάρχουν d^p δυνατοί μη ντετερμινιστικοί υπολογισμοί.
  - Η Μ προσομοιώνει εξαντλητικά κάθε μη ντετερμινιστικό υπολογισμό διαπερνώντας όλο του δένδρο του μη ντετερμινιστικού υπολογισμού.
  - Συνεπώς ο χρόνος λειτουργίας της είναι $p \cdot d^p$, άρα εκθετικός
  - Συνεπώς $NP \subseteq EXP$



Η ΚΛΑΣΗ των NP-COMPLETE ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Διαισθητικά σε **μια κλάση προβλημάτων C** ορίζουμε:

- **C-πλήρη** (C-Complete) τα προβλήματα της κλάσης που:
  - Είναι τα δυσκολότερα προβλήματα της κλάσης (υπό την έννοια ότι κάθε πρόβλημα της κλάσης είναι το πολύ τόσο δύσκολα όσο αυτά)
  - Είναι ισοδύναμα μεταξύ τους (δηλαδή αντίστοιχης υπολογιστικής δυσκολίας)
- Έτσι για την κλάση NP, ορίζουμε ότι ένα πρόβλημα είναι **NP-πλήρες** (ή NP-Complete):
  - Αν κάθε πρόβλημα στην κλάση NP, είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο αυτό.
    - έχει αποδειχθεί από τον (Cook,1970) ότι: Το **SAT** είναι **NP-πλήρες**
  - Συνεπώς οποιοδήποτε πρόβλημα του NP είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο το SAT!

Τα προβλήματα της κλάσης NP-COMPLETE έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. Λύνονται σε εκθετικό ντετερμινιστικό χρόνο (**ανήκουν στο EXP**)
2. Λύνονται σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο (**ανήκουν στο NP**)
3. Δεν έχει αποδειχθεί ότι δεν λύνονται από ντετερμινιστικό πολυωνυμικό αλγόριθμο.
   - Αν αποδειχθεί ότι ένα από αυτά δεν λύνεται σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο, τότε κανένα δεν λύνεται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο
   - Άρα $P \neq NP$
4. Δεν έχει αποδειχθεί ότι λύνονται από ντετερμινιστικό πολυωνυμικό αλγόριθμο.
   - Αν αποδειχθεί ότι ένα από αυτά λύνεται σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο, τότε όλα λύνονται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο
   - Άρα $P = NP$
5. Όλα τα προβλήματα της κλάσης NP ανάγονται σε αυτά.

Για να αποδειχθεί ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες:

- (A) Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
- (B) Δείχνουμε ότι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό

Για να αποδειχθεί ότι ένα πρόβλημα είναι NP-σκληρό (NP-Hard):

- (A) Δείχνουμε ότι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό

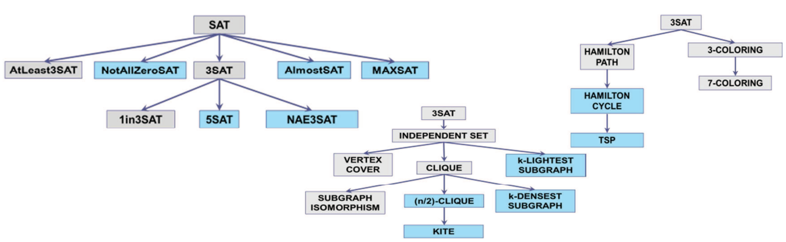
ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ NP-ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Αποδεικνύουμε ότι $\Pi \in NP$
   - Είτε δίνοντας μη ντετερμινιστική μηχανή Turing-μάντη που «μαντεύει» την λύση και έπειτα επαληθεύει ότι είναι όντως λύση του προβλήματος.
   - Είτε δίνοντας ντετερμινιστική μηχανή Turing-επαληθευτή που δεδομένης μιας λύσης (πιστοποιητικό) επαληθεύει σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο ότι είναι λύση του προβλήματος.
2. Δίνουμε μια πολυωνυμική **αναγωγή** από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Π' στο πρόβλημα Π (Η αναγωγή συμβολίζεται με **Π'≤Π)**
   - Όπου δίνουμε έναν κανόνα μετασχηματισμού της εισόδου Ε' του γνωστού προβλήματος Π' σε είσοδο Ε του αγνώστου προβλήματος Π έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο:

     Αποτέλεσμα του Π(Ε) **ισοδύναμο** με αποτέλεσμα του Π'(Ε΄)

     Και δείχνουμε ότι η κατασκευή θέλει πολυωνυμικό χρόνο



ΑΝΑΓΩΓΕΣ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Το πρόβλημα SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

- Παράδειγμα 1: $\varphi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$ που είναι ικανοποιήσιμη, π.χ. με την αποτίμηση $x_1 = \mathrm{A}, x_2 = \mathrm{A}, x_3 = \mathrm{A}, x_4 = \mathrm{A}$
- Παράδειγμα 2: $\varphi_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$. Η οποία δεν είναι ικανοποιήσιμη.

Το πρόβλημα 3SAT:

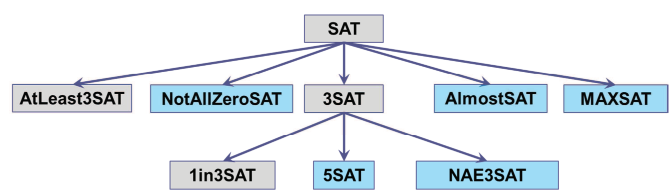
- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή όπου κάθε πρόταση έχει ακριβώς 3 όρους.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

Το πρόβλημα 1in3SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα 3SAT φ.
- **Ερώτημα:** Υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί την φ, αλλά σε κάθε πρόταση να ικανοποιείται μόνο ένας από τους 3 όρους.

Το πρόβλημα NAE3SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα 3SAT φ.
- **Ερώτημα:** Υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί την φ, αλλά σε κάθε πρόταση να μην αληθεύουν και οι 3 όροι



ΤΟ 3SAT ΕΙΝΑΙ NP-ΠΛΗΡΕΣ

Το πρόβλημα 3SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή όπου κάθε πρόταση έχει ακριβώς 3 όρους.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

1. Δείχνουμε ότι το 3SAT ανήκει στο NP

Δεδομένης μίας φόρμουλας φ με m προτάσεις και n μεταβλητές

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(n) μαντεύουμε μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών
- σε χρόνο O(m) επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί την φόρμουλα

Ο χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα 3SAT ανήκει στο NP

2.Α) Δίνουμε αναγωγή από το SAT στο 3SAT

Δίνουμε αναγωγή από το SAT στο 3SAT, δηλαδή δεδομένης μιας φόρμουλας φ του SAT, κατασκευάζουμε φόρμουλα φ' του 3SAT:

φ ικανοποιήσιμη⟺φ' ικανοποιήσιμη

Για κάθε πρόταση του SAT κατασκευάζουμε ένα σύνολο από προτάσεις του 3SAT. Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πλήθος των όρων (έστω k) της πρότασης:

Αν k=1, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (x_1)$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 4 προτάσεις 3SAT:

$$C' = (x_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (x_1 \vee \overline{y_1} \vee y_2) \wedge (x_1 \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2})$$

Αν k=2, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (x_1 \vee x_2)$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 2 προτάσεις 3SAT:

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{y_1})$$

Αν k=3, κρατάμε την αρχική πρόταση, δηλαδή θέτουμε: $C' = C$

Αν k>3, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$ τότε την σπάμε στην ισοδύναμη πρόταση

$$(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{\lfloor k/2 \rfloor} \vee y_1) \wedge (x_{\lfloor k/2 \rfloor+1} \vee \cdots \vee x_k \vee \overline{y_1})$$

Έπειτα επαναλαμβάνουμε αναδρομικά στις δύο υποπροτάσεις μέχρι να αποκτήσει κάθε μία από αυτές ακριβώς τρείς όρους

όπου y_i είναι νέες μεταβλητές που δεν υπήρχαν πριν στην φόρμουλα.

2.Β) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

- Ο χρόνος της μετατροπής της φόρμουλας του SAT σε ισοδύναμη φόρμουλα του 3SAT είναι πολυωνυμικός. Πράγματι το στιγμιότυπο του SAT αντικαθίσταται με στιγμιότυπο που είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερο από αυτό.
- Αποδεικνύεται ότι μία πρόταση με k μεταβλητές θα αντικατασταθεί από πλήθος προτάσεων που καθορίζονται από την αναδρομική σχέση T(k)=2T(k/2) με T(3)=1 και η οποία έχει πολυωνυμική λύση.

ΑΝΑΓΩΓΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΩΝ

Το πρόβλημα INDEPENDENT-SET:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος ανεξάρτητο υποσύνολο k κορυφών.

(Υπενθύμιση: Ανεξάρτητο Σύνολο είναι υποσύνολο των κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή)

Το πρόβλημα VERTEX-COVER:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κάλυμμα k κορυφών.

(Ορισμός: Κάλυμμα είναι υποσύνολο των κορυφών τέτοιο ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον το ένα άκρο της σε κορυφή του συνόλου)

Το πρόβλημα CLIQUE:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κλίκα k κορυφών.

(Υπενθύμιση: Κλίκα είναι υποσύνολο των κορυφών που συνδέονται με ακμή)

Το πρόβλημα HAMILTON-PATH:

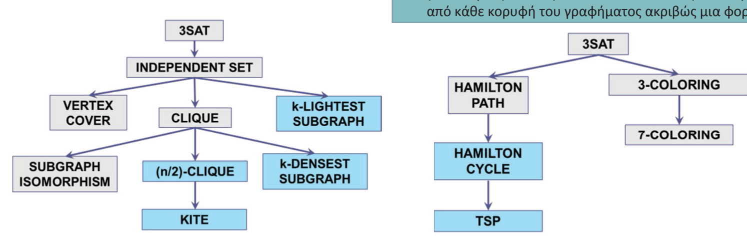
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E)
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος μονοπάτι Hamilton;

(Υπενθύμιση: Μονοπάτι Hamilton είναι μονοπάτι που περνά από κάθε κορυφή ακριβώς μια φορά)

Το πρόβλημα HAMILTON-CYCLE:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E)
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κύκλο Hamilton;

(Υπενθύμιση: Κύκλος Hamilton είναι κύκλος που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά)



ΤΟ CLIQUE ΕΙΝΑΙ NP-ΠΛΗΡΕΣ

Το πρόβλημα CLIQUE:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κλίκα k κορυφών.

1. Δείχνουμε ότι το CLIQUE ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου G=(V,E) με n=|V| κορυφές και m=|E| ακμές και ενός ακεραίου k:

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(k) μαντεύουμε ένα υποσύνολο k κορυφών του γραφήματος
- Επαληθεύουμε ότι ανά δύο οι k κορυφές συνδέονται με ακμή. Ελέγχεται δηλαδή ότι όντως υπάρχουν οι k(k-1)/2 δυνατές ακμές. Ο έλεγχος απαιτεί χρόνο $O(k^2)$

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα CLIQUE ανήκει στο NP

2.Α) Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE

Δίνουμε αναγωγή από το INDEPENDENT-SET στο CLIQUE δηλαδή δεδομένου ενός γράφου G=(V,E) και ενός ακεραίου k του INDEPENDENT-SET κατασκευάζουμε γράφο G'=(V',E') και επιλέγουμε ακεραίο k' τέτοιο ώστε:

G έχει ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών ⟺ G' έχει κλίκα k' κορυφών

Η αναγωγή είναι η εξής:

- Επιλέγουμε G'=Συμπλήρωμα του G και θέτουμε k'=k

Ευθύ:

- Έστω ότι G έχει σύνολο ανεξαρτησίας k κορυφών
- Αυτό σημαίνει ότι οι k κορυφές δεν συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα
- Συνεπώς θα συνδέονται με ακμή στο συμπλήρωμα του G.
- Άρα το συμπλήρωμα του G έχει κλίκα k κορυφών.

Αντίστροφο:

- Έστω ότι το συμπλήρωμα του G έχει κλίκα k κορυφών.
- Αυτό σημαίνει ότι οι k κορυφές συνδέονται με ακμή στο συμπλήρωμα
- Άρα δεν θα συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα.
- Συνεπώς το αρχικό γράφημα έχει ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών.

2.Β) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Προφανώς ο χρόνος της αναγωγής είναι πολυωνυμικός (Τυπικά αν ο γράφος είναι αποθηκευμένος σε πίνακα γειτνίασης, σαρώνουμε τον πίνακα και μετατρέπουμε κάθε 0 σε 1 και κάθε 1 σε 0 (εκτός των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου). Αυτό γίνεται σε χρόνο $O(n^2)$ όπου n οι κορυφές του γραφήματος)