

ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ23

ΘΕΜΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Άσκηση 1) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = \frac{n^{\frac{n}{\log n}} + n^2 \log n}{\log \log n}$$

$$f_2(n) = (1,001)^n + n^{100} \log(3^n)$$

$$f_3(n) = n\sqrt{\log^2 n} + \log^3 4^n$$

Ο συμβολισμός \log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g ($f \equiv g$), αν $f = \Theta(g)$ (ισοδύναμα $\Theta(f) = \Theta(g)$). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g ($f < g$), αν $f = o(g)$.

(Ασκηση 2) Να λύσετε τις αναδρομές:

$$(1) \quad T(n) = T\left(\frac{3n}{11}\right) + T\left(\frac{8n}{11}\right) + \log \log n$$

$$(2) \quad T(n) = 11T\left(\frac{n}{121}\right) + n^{1/4}$$

$$(3) \quad T(n) = 49T\left(\frac{n}{7}\right) + \sqrt{n}$$

$$(4) \quad T(n) = T(n-1) + 2n^3 + 3n + 5$$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, όπου $a \geq 1$, $b > 1$ είναι σταθερές, και $f(n)$ είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$, και αν υπάρχει σταθερά n_0 , τέτοια

ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε γνωστό ότι: $\sum_{i=1}^n i^3 = \Theta(n^4)$

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$$L_1 = (0+1)(0+1)(0+1)$$

$$L_2 = (111+010+011)^*$$

$$L_3 = 01^*01^*+10^*10^*$$

$$L_4 = (1+00+010)^*(0+01+011+0111)^*(11)^*$$

$$L_5 = (1^*00^*+11^*0^*1^*0)^*$$

Άσκηση 2:

1. Δίδεται η κανονική έκφραση: $10(0+1)^*+01(0+1)^*$

(A) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΠΑ) της L

(B) Δώστε το ισοδύναμο Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΝΠΑ) της L

Άσκηση 3:

Δίδονται οι γλώσσες του αλφαβήτου $\{a,b\}$: $L_1 = \{ww, | w| \leq 1\}$, $L_2 = \{ww, | w| \geq 1\}$

εκ των οποίων η μία είναι κανονική και η άλλη δεν είναι κανονική.

(A) Επιλέξτε την γλώσσα που είναι κανονική και αποδείξτε το, δίνοντας ΝΠΑ που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της

(B) Για την γλώσσα που δεν είναι κανονική: Δείξτε ότι δεν είναι κανονική με το λήμμα άντλησης

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΑ

Άσκηση 1: Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες:

$$L_1 = \{1^{2n+1}0^{n+1} \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^m b^{2n+3} c^{3n+2} d^{2m+2} \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_3 = \{a^{3n} b^{4n} \mid n \geq 2\}$$

$$L_4 = \{x c y \mid x, y \in \{a, b\}^*, |x| = |y|\}$$

$$L_5 = \{a^n b^n c^m d^m a^k b^k \mid n, m, k \geq 0\}$$

$$L_6 = \{b^m a^n c^k \mid n = m + k\}$$

$$L_7 = \{b a^n b^m \mid n < m\}$$

Άσκηση 2

Έστω Σ το αλφάβητο $\Sigma=\{a,b\}$ και L η γλώσσα που σχηματίζεται ακριβώς και μόνον με τους κανόνες

- $aab \in L$
- $\forall x \in L$, τότε και $axb b b b b \in L$

(Α) Δείξτε ότι η L δεν είναι κανονική.

(Β) Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της L .

(Γ) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοίβας που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L

(Δ) Δώστε Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοίβας που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L

Το Λήμμα Αντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

ΘΕΜΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Να κατασκευάσετε ντετερμινιστική μηχανή Turing M , με αλφάβητο $\Sigma = \{a, b, \#, \$, Y, N\}$, που να αποφασίζει την γλώσσα **της προηγούμενης άσκησης**

Θεωρήστε ότι η M με είσοδο $x \in \{a, b\}^*$ ξεκινά την λειτουργία της από τον σχηματισμό $\#x\#$. Οι χαρακτήρες Y (YES) και N (NO) χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την σηματοδότηση της αποδοχής ή της απόρριψη της εισόδου, αντίστοιχα.

(1) Δώστε μια άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της M (έναν αλγόριθμο διαχείρισης της ταινίας της).

(2) Δώστε το γράφημα ροής της M (σχηματική αναπαράσταση με χρήση γνωστών μηχανών).