ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ27

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε 8 μη διακεκριμένα σφαιρίδια σε 6 διακεκριμένες υποδοχές είναι ίσος με:

1. Το συντελεστή του x^6 στη γεννήτρια συνάρτηση $(1+x + x^2 + x^3 + \ldots)^8$
2. Το συντελεστή του x^8 στη γεννήτρια συνάρτηση $(1+x + x^2 + x^3 + \ldots)^6$
3. Τον αριθμό των λέξεων που σχηματίζονται από 7 Α και 8 Β και αρχίζουν και τελειώνουν με Α.
4. Το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων που μπορούν να προκύψουν από τη ρίψη δύο ζαριών (σαν διαφορετικά αποτελέσματα θεωρούμε π.χ. τους δύο άσσους, το άσσος – δύο, το άσσος – τρία, κλπ, όπου δεν έχει σημασία τι θα φέρει το πρώτο και τι το δεύτερο ζάρι).

(2) Θεωρούμε δύο κληρώσεις ενός ακέραιου αριθμού από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός προκύπτει με πιθανότητα 1/10 σε κάθε κλήρωση και τα αποτελέσματα των δύο κληρώσεων είναι ανεξάρτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός και στις δύο κληρώσεις είναι 1/4.
2. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρτιος αριθμός σε τουλάχιστον μία από τις δύο κληρώσεις είναι 3/4.
3. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 10 και στις δύο κληρώσεις είναι 1/100.
4. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 10 σε τουλάχιστον μία από τις δύο κληρώσεις είναι 19/100.

(3) Πόσοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων 4×4 υπάρχουν στους οποίους κάθε στοιχείο του πίνακα είναι 0 ή 1;

1. Όσα τα κατευθυνόμενα γραφήματα με σύνολο κορυφών $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ (δεν επιτρέπεται η αλλαγή του ονόματος των κορυφών) στα οποία μπορεί να υπάρχουν ανακυκλώσεις και αντιπαράλληλες ακμές (π.χ. (u, v), (v, u)), αλλά δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες ακμές με την ίδια διεύθυνση (π.χ. (u, v), (u, v)).
2. Όσοι ο συντελεστής του x^4 στη γεννήτρια συνάρτηση $(1 + x)^{16}$.
3. 2^{16}
4. Όσοι ο συντελεστής του x^{16} / 16! στη γεννήτρια συνάρτηση e^{2x} .

(4) Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες

1. $p_1 \leftrightarrow \neg(p_1 \land \neg p_2)$

2. $p_2 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$

3. $p_1 \leftrightarrow (p_2 \rightarrow \neg p_1)$

4. $p_1 \lor p_2 \rightarrow p_2 \lor p_1$

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγόρημα P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1,v_2\}$ και σύνολο ακμών $\{(v_1,v_1),(v_2,v_1)\}$ ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται ως κορυφές του γραφήματος και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει η ακμή από την a στην b. Ποιες από τις παρακάτω προτασεις αληθέυουν και ποιες όχι;

1. $\exists x \forall y \neg P(x,y)$

2. $\forall x \forall y \neg P(x,y)$

3. $\exists x \forall y P(x,y)$

4. $\forall x \forall y [P(x,y) \rightarrow x = y]$

(6) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Ο τύπος $\forall x \exists y \exists z [z \neq y \land P(x,y) \land P(x,z)]$ ικανοποιείται στα γραφήματα:

1. K_5

2. $K_{3,1}$

3. C_5

4. W_4

(7) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Το K_6 περιέχει ως επαγόμενο υπογράφημα το $K_{3,3}$
2. Το K_6 περιέχει ως υπογράφημα το K_3
3. Το K_6 έχει κύκλο Hamilton
4. Το K_6 έχει κύκλο Euler

(8) Για οποιαδήποτε ισόμορφα γραφήματα G,H ισχύει:

1. Οι πίνακες γειτνίασης των G και H είναι ίσοι
2. Το G έχει κορυφή βαθμού 1 αν και μόνο αν το H έχει κορυφή βαθμού 1
3. Ο αριθμός των κύκλων Hamilton του G είναι ίσος με τον αριθμό των κύκλων Hamilton του H.
4. Υπάρχει μία κορυφή του G που έχει μικρότερο βαθμό από όλες τις κορυφές του H

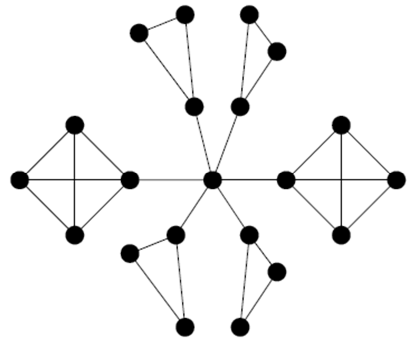
(9) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Κάθε υπογράφημα ενός επίπεδου γραφήματος, είναι επίπεδο γράφημα.
2. Κάθε υπογράφημα ενός πλήρους γραφήματος, είναι πλήρες γράφημα.
3. Κάθε υπογράφημα ενός μη επιπέδου γραφήματος, είναι μη επίπεδο γράφημα
4. Κάθε υπογράφημα ενός γραφήματος με χρωματικό αριθμό 2, έχει χρωματικό αριθμό 2.

Β’ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1

Πόσα υπογραφήματα του K_{100} (όλες οι κορυφές του είναι διακεκριμένες) είναι ισόμορφα με το ακόλουθο γράφημα;



\

Άσκηση 2

(1) Δώστε τυπική απόδειξη της πρότασης:

$$(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash (\varphi \to (\chi \to \psi)) \to \big((\varphi \to \chi) \to (\psi \to \varphi)\big)$$

μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε θεώρημα του προτασιακού λογισμού, αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας

(2) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα ώστε οι μεταβλητές να ερμηνεύονται σε κορυφές και το κατηγορηματικό σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει η ακμή από την κορυφή a στην κορυφή b.

i. Ορίστε έναν τύπο κατηγορηματικής λογικής που να αληθεύει στο γράφημα $K_{5,5}$ και να μην αληθεύει στο γράφημα K_3.
ii. Ορίστε έναν τύπο κατηγορηματικής λογικής που να αληθεύει στο γράφημα K_1 και να μην αληθεύει στο γράφημα $K_{1,1}$

\