

ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μάθημα 1.2:
Συνδυασμοί

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

ο. Μαθηματικά Προαπαιτούμενα

1. Συνδυασμοί

1. Συνδυασμοί Χωρίς Επανάληψη
2. Συνδυασμοί Με Επανάληψη

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

1. Λόττο
2. Ζάρια
3. Ντόμινο
4. Χαρτιά
5. Υποσύνολα και το Διωνυμικό Ανάπτυγμα

Γ. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Επιλογή από όμοια αντικείμενα
2. Επιλογή από ομάδες ομοίων αντικειμένων
3. Επιλογή με περιορισμούς
4. Διαδοχικές Επιλογές

Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές



A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο A

- Οι δύο τύποι συνδυασμών και οι προϋποθέσεις για την χρήση του αντίστοιχου τύπου
- Οι μεθοδολογίες για την διαχείριση των περιορισμών

Επίπεδο B

- Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

Επίπεδο Γ

- (-)



Β. Θεωρία

Μαθηματικά Προαπαιτούμενα

➤ Παραγοντικό (του n).

Ορίζουμε το παραγοντικό του n, ως το γινόμενο των φυσικών από το 1 έως το n:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Και ισχύει ο εξής αναδρομικός ορισμός:

$$n! = \begin{cases} n(n-1)!, & \alpha\nu \ n > 1 \\ 1 & , \alpha\nu \ n = 1 \end{cases}$$

Ορίζουμε επίσης ότι $0! = 1$



B. Θεωρία

Μαθηματικά Προαπαιτούμενα

➤ Η ποσότητα $P(n,k)$ και η ποσότητα $C(n,k)$

Ορίζουμε την ποσότητα $P(n,k)$, ως το $n!$ δια το $(n-k)!$ για $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Και ορίζουμε την ποσότητα $C(n,k)$ ως το $n!$ προς το $k!(n-k)!$ για $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Το $C(n,k)$ συμβολίζεται και ως εξής: $\binom{n}{k}$ συνεπώς ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Β. Θεωρία

Μαθηματικά Προαπαιτούμενα

➤ Δύο μικρά Θεωρήματα:

Θεώρημα 1: Ισχύει η σχέση:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Θεώρημα 2: Ισχύει η σχέση:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$



B. Θεωρία

Στόχος της Συνδυαστικής

- Στόχος της Συνδυαστικής είναι να μετράμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ένα (περίπλοκο) γεγονός.
- Για να το κάνουμε αυτό έχουμε τρεις τρόπους:
 - Την καταμέτρηση των τρόπων «με το χέρι» όπου καταγράφουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει το γεγονός και έπειτα τους μετράμε.
 - Τις βασικές αρχές απαρίθμησης, δηλαδή τον κανόνα του αθροίσματος και του γινομένου, όπου σπάμε το βασικό πρόβλημα σε υποπρόβλήματα και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως το άθροισμα ή το γινόμενο των επιμέρους αποτελεσμάτων.
 - Τους μαθηματικούς τύπους των μοντέλων της συνδυαστικής, που είναι μαθηματικοί τύποι που εφαρμόζονται μόνο κάτω από καθορισμένες προϋποθέσεις. Πρόκειται για τους τύπους των συνδυασμών (Μάθημα 1.2) των διατάξεων (Μάθημα 1.3) και των διανομών σε υποδοχές (Μάθημα 1.4)
- Οι πιο δύσκολες ασκήσεις είναι αυτές που απαιτούν να συνδυάσουμε τους παραπάνω τρόπους.



B. Θεωρία

1. Συνδυασμοί

- Στα προβλήματα συνδυαστικής συχνά στην δομή της λύσης έχουμε k θέσεις (παύλες) και σε κάθε θέση θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο από n διαθέσιμα. Το πρώτο ερώτημα που πρέπει να απαντάμε είναι αν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων ή όχι:
 - Αν η σειρά έχει σημασία, μιλάμε για ένα πρόβλημα διατάξεων. Για παράδειγμα αν πρέπει να κατασκευάσουμε μία ΛΕΞΗ μήκους 4 από το ελληνικό αλφάβητο η σειρά των αντικειμένων (γράμματα) έχει σημασία (αφού αν εναλλάξουμε δύο γράμματα σε μία λέξη προκύπτει διαφορετική λέξη)
 - Αν η σειρά ΔΕΝ έχει σημασία, μιλάμε για ένα πρόβλημα συνδυασμών. Για παράδειγμα στα ΖΑΡΙΑ η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία (π.χ. η ζαριά 1-2 με την ζαριά 2-1 είναι ίδια)



Β. Θεωρία

1. Συνδυασμοί

Οι τύποι των συνδυασμών υπολογίζουν άμεσα την λύση σε ένα πρόβλημα που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

- Θεωρούμε ότι έχουμε έναν «**κουβά**» που περιέχει **διαφορετικά αντικείμενα**
- Βάζουμε το χέρι στον κουβά και **επιλέγουμε** μερικά από αυτά

- Τέτοια προβλήματα είναι το ΛΟΤΤΟ (ο κουβάς έχει 49 αριθμούς και επιλέγω τους 6), τα ΧΑΡΤΙΑ (ο κουβάς έχει 52 φύλλα και επιλέγω – συνήθως – τα 5), τα ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ και άλλα.

Το **επιλέγω** είναι το ρήμα – κλειδί που θα συναντήσουμε σε πολλές εκφωνήσεις και θα καταλαβαίνουμε ότι είμαστε σε συνδυασμούς. Παρατηρήστε ότι όταν κάνουμε μια **επιλογή αντικειμένων** έχει σημασία ποια αντικείμενα επιλέγουμε και όχι η σειρά με την οποία τα επιλέγουμε.



B. Θεωρία

1. Συνδυασμοί

Αφού έχουμε καταλάβει ότι έχουμε έναν πρόβλημα επιλογής αντικειμένων, υπάρχουν δύο τύποι που μοντελοποιούν αντίστοιχα προβλήματα:

➤ Οι συνδυασμοί k αντικειμένων από n χωρίς επανάληψη

➤ Όπου οι λύσεις θα δίνονται από την σχέση $\binom{n}{k}$

➤ Οι συνδυασμοί k αντικειμένων από n με επανάληψη

➤ Όπου οι λύσεις θα δίνονται από την σχέση $\binom{n+k-1}{k}$

Η έννοια της επανάληψης έχει να κάνει με πόσες φορές επιτρέπεται να έχουμε στην τελική μας λύση ένα από τα διαφορετικά αντικείμενα του κουβά:

Στους συνδυασμούς χωρίς επανάληψη δεν επιτρέπεται να έχουμε ένα αντικείμενο πάνω από μία φορά (όπως π.χ. στο ΛΟΤΤΟ κάθε αριθμός δεν μπορεί να επαναληφθεί πάνω από μία φορά)

Στους συνδυασμούς με επανάληψη κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί στην τελική μας λύση όσεςδήποτε φορές (όπως π.χ. στα ΖΑΡΙΑ που κάθε αριθμός $\{1,2,\dots,6\}$ μπορεί να έρθει σε όλα τα ζάρια)



B. Θεωρία

1. Συνδυασμοί

1. Συνδυασμοί Χωρίς Επανάληψη

Έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επανάληψη όταν:

1. Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2. Έχουμε η διαφορετικά αντικείμενα (ΟΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3. Επιλέγουμε k από αυτά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί το πολύ μία φορά)

Τότε οι δυνατοί τρόποι επιλογής δίνονται από τον τύπο:

$$C(n, k) = \binom{n}{k}$$

Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι το ΛΟΤΤΟ, τα ΧΑΡΤΙΑ, τα ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ κ.λπ.



B. Θεωρία

1. Συνδυασμοί

2. Συνδυασμοί Με Επανάληψη

Έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη όταν:

1. Η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2. Έχουμε η διαφορετικά αντικείμενα (ΟΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3. Συμπληρώνουμε k θέσεις ώστε σε κάθε θέση να μπορεί να επαναληφθεί το ίδιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται οσεςδήποτε φορές – από καμία έως όλες τις θέσεις)

Τότε οι δυνατοί τρόποι επιλογής δίνονται από τον τύπο:

$$C(n + k - 1, k) = \binom{n + k - 1}{k}$$

Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι τα ΖΑΡΙΑ, το NTOMINO κ.λπ.

Η επανάληψη είναι γνωστή και ως επανατοποθέτηση. Δηλαδή βγάζουμε ένα αντικείμενο από τον κουβά, το καταγράφουμε και έπειτα το επανατοποθετούμε στον κουβα και επιλέγουμε το επόμενο με την ίδια διαδικασία.



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

1. ΛΟΤΤΟ

Στο ΛΟΤΤΟ δίνονται 49 αριθμοί και ζητείται να επιλέξουμε τους 6 για να κατασκευάσουμε μία στήλη. Πόσες στήλες υπάρχουν;

ΛΥΣΗ:

Ως συνδυασμοί χωρίς επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\binom{49}{6} = \dots = 13.983.816$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία (Πράγματι η εξάδα 1, 8, 44, 12, 19, 23 είναι ίδια π.χ. με την 1, 12, 44, 8, 19, 23)
2. Έχουμε 49 διαφορετικά αντικείμενα από τα οποία επιλέγουμε τα 6
3. Στην τελική μας λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγθεί το πολύ μία φορά.



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

2. ΖΑΡΙΑ

Ρίχνουμε δύο μη διακεκριμένα (=ομοια) ζάρια. Πόσες ζαριές υπάρχουν;

ΛΥΣΗ:

Ως συνδυασμοί με επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία (Πράγματι η ζαριά 1,2 είναι ίδια με την 2,1)
2. Έχουμε $n=6$ διαφορετικά αντικείμενα (οι αριθμοί 1,2,3,4,5,6) τα οποία τοποθετούμε στον κουβά και επιλέγουμε $k=2$ με επανατοποθέτηση.
3. Στην τελική μας λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγθεί οσοδήποτε φορές (π.χ. ο αριθμός 1 μπορεί να επαναληφθεί και στις 2 θέσεις)



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

3. NTOMINO

Πόσα ντόμινο υπάρχουν; (υπενθύμιση: ένα ντόμινο κατασκευάζεται από δύο τετράγωνα που κάθε ένα τετράγωνο μπορεί να έχει καμία, 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 τελείες)

ΛΥΣΗ:

Ως συνδυασμοί με επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία (Πράγματι το ντόμινο 2,5 είναι ίδιο με το 5,2)
2. Έχουμε 7 διαφορετικά αντικείμενα (οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) τα οποία τοποθετούμε στον κουβά και επιλέγουμε 2 με επανατοποθέτηση.
3. Στην τελική μας λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγθεί οσοδήποτε φορές (π.χ. ο αριθμός 1 μπορεί να επαναληφθεί και στις 2 θέσεις)



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

4. ΧΑΡΤΙΑ

Πόσες 5άδες χαρτιών μπορούμε να κατασκευάσουμε από μία πλήρη τράπουλα.

ΛΥΣΗ:

Ως συνδυασμοί χωρίς επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\binom{52}{5} = \dots = 2.598.960$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία
2. Έχουμε $n=52$ διαφορετικά αντικείμενα τα οποία τοποθετούμε στον κουβά και επιλέγουμε $k=5$ από αυτά.
3. Στην τελική μας λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγθεί το πολύ μία φορά.



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

5. ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ

Πόσα τα υποσύνολα με 2 στοιχεία του συνόλου $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

ΛΥΣΗ:

Ως συνδυασμοί χωρίς επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\binom{8}{2} = \dots = 28$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία (από τον ορισμό του συνόλου)
2. Έχουμε $n=8$ διαφορετικά αντικείμενα (τα στοιχεία του συνόλου) τα οποία τοποθετούμε στον κουβά και επιλέγουμε $k=2$ από αυτά.
3. Στην τελική μας λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγθεί το πολύ μία φορά.



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

5. ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ (1. Το διωνυμικό ανάπτυγμα)

Τα υποσύνολα είναι τεράστιο SOS και πρέπει να ξέρουμε και τα εξής:

Οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ για $k=0,1,2,\dots,n$ λέγονται και διωνυμικοί συντελεστές γιατί είναι οι συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

$$(a+b)^3 = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot a^{3-i} \cdot b^i = \binom{3}{0} \cdot a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^0 \cdot b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot x^i = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \quad \text{άρα:} \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$



B. Θεωρία

2. Γνωστά Προβλήματα Συνδυασμών

5. ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ (2. Σχέση Διωνυμικών Συντελεστών με Δυναμοσύνολο)

Έστω $A=\{1,2,3,4\}$ τότε το δυναμοσύνολό του είναι το:

$$P(A) = \{$$

\emptyset , -----> $C(4,0)=1$ στοιχείο

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$, -----> $C(4,1)=4$ στοιχεία

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$, ---> $C(4,2)=6$ στοιχεία

$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$, -----> $C(4,3)=4$ στοιχεία

$\{1,2,3,4\}$ -----> $C(4,4)=1$ στοιχείο

}

➤ Όλα τα υποσύνολα είναι:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

➤ Και γενικεύοντας για το πλήθος των υποσυνόλων είναι χρήσιμη η σχέση:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$



Γ. Μεθοδολογία

1. Επιλογή από όμοια αντικείμενα

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Τα αντικείμενα από τα οποία επιλέγουμε μπορεί να είναι τριών κατηγοριών:

A) Ομοια (= Μη διακεκριμένα). Προσοχή ότι με αυτήν την εκφώνηση εννοούμε ότι ΌΛΑ είναι όμοια.

B) Ομάδες Ομοίων Αντικειμένων. Π.χ. έχω 5 κόκκινους, 4 άσπρους και 6 πράσινους βόλους, άρα έχω 3 ομάδες ομοίων αντικειμένων

Γ) Διαφορετικά. ΌΛΑ διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους. Μόνο σε αυτήν την περίπτωση μπορώ να χρησιμοποιήσω τους τύπους των συνδυασμών.

Γενικά όταν έχω να επιλέξω από όμοια αντικείμενα υπάρχει μόνο 1 τρόπος διότι κάθε άλλη λύση θα είναι ακριβώς ίδια με την πρώτη.

Παράδειγμα:

Έστω 50 μη διακεκριμένοι βόλοι. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 5 από αυτούς

ΛΥΣΗ:

Με 1 τρόπο.



Γ. Μεθοδολογία

2. Επιλογή από ομάδες ομοίων αντικειμένων

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Αν τα αντικείμενα είναι ομάδες ομοίων αντικειμένων τότε πρέπει να μοντελοποιήσω το πρόβλημα ως εξής:

Βάζω στον κουβά ένα από κάθε ομάδα ομοίων αντικειμένων και μοντελοποιώ το πρόβλημα ως συνδυασμούς με επανάληψη. Προσοχή ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του μοντέλου των συνδυασμών με επανάληψη.

Παράδειγμα:

Εχω 5 πράσινους, 5 κόκκινους και 5 άσπρους βόλους. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 από αυτούς.

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως συνδυασμοί με επανάληψη με $n=3$ (1 πράσινο, 1 κόκκινο και 1 άσπρο βόλο) και $k=4$.

Άρα οι τρόποι είναι:

$$C(n+k-1, k) = C(3+4-1, 4) = C(6, 4) = 15 \text{ τρόποι.}$$



Γ. Μεθοδολογία

2. Επιλογή από ομάδες ομοίων αντικειμένων

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Προσοχή όταν κάνω επιλογή από ομάδες ομοίων αντικειμένων και δεν τηρείται η προϋπόθεση κάθε αντικείμενο να μπορεί να επαναληφθεί σε όλες τις θέσεις.

Τότε εντοπίζω το «προβληματικό» αντικείμενο και παίρνω γι' αυτό διαφορετικές περιπτώσεις όσον αφορά το πόσες φορές μπορεί να επιλεγθεί. Το τελικό αποτέλεσμα θα προκύψει από τον κανόνα του αθροίσματος

Παράδειγμα:

Έχω 5 πράσινους, 5 κόκκινους και 2 άσπρους βόλους. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 από αυτούς.

ΛΥΣΗ:

Διακρίνω περιπτώσεις για τους άσπρους βόλους:

- Να έχω 0 άσπρους βόλους: Τότε έχω $C(2+4-1, 4) = C(5, 4)$ λύσεις
- Να έχω 1 άσπρο βόλο. Τότε οι υπόλοιποι 3 επιλέγονται με $C(2+3-1, 3) = C(4, 3)$ τρόπους
- Να έχω 2 άσπρους βόλους. Τότε οι υπόλοιποι 2 επιλέγονται με $C(2+2-1, 2) = C(3, 2)$ τρόπους.

Άρα από τον κανόνα του αθροίσματος οι λύσεις είναι:

$$C(5, 4) + C(4, 3) + C(3, 2) = 5 + 4 + 3 = 12$$



Γ. Μεθοδολογία

3. Διαδοχικές Επιλογές

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Σε κάποιες εκφωνήσεις ζητείται να επιλέξουμε διαδοχικά κάποια αντικείμενα από τον κουβά για να κατασκευάσουμε κάποιες ομάδες. Συχνά θα λέμε ότι χωρίζουμε τα αντικείμενα για να κατασκευάσουμε τις ομάδες.

Τότε επιλέγουμε διαδοχικά τα αντικείμενα των ομάδων, αφαιρώντας στην επόμενη φάση αυτά που επιλέξαμε. Το τελικό αποτέλεσμα θα προκύψει από τον κανόνα του γινομένου.

Προσοχή! Αν οι ομάδες που κατασκευάζω είναι όμοιες, πρέπει να διαιρέσω με το παραγοντικό του πλήθους των ομάδων που είναι όμοιες. Αυτή η περίπτωση απαιτεί ωστόσο γνώση διατάξεων γι' αυτό θα την κατανοήσουμε πλήρως σε επόμενο μάθημα.

Παράδειγμα:

Έχω 20 διαφορετικά παιχνίδια που θέλω να τα μοιράσω στα 3 ανίψια μου, ώστε το 1^ο να πάρει 6, το 2^ο να πάρει 9 και το 3^ο να πάρει 5 παιχνίδια. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να γίνει ο χωρισμός;

ΛΥΣΗ:

- Για το 1^ο ανίψι έχω $C(20,6)$ τρόπους
- Για το 2^ο ανίψι έχω $C(14,9)$ τρόπους
- Για το 3^ο ανίψι έχω $C(5,5)$ τρόπους

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι συνολικοί τρόποι είναι: $C(20,6) \cdot C(14,9) \cdot C(5,5)$



Γ. Μεθοδολογία

4. Περίπλοκοι Περιορισμοί

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Σε αρκετές εκφωνήσεις δεν θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας κάποιον από τους τύπους λόγω της ύπαρξης κάποιου περιορισμού.

Στις περιπτώσεις αυτές σπάμε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα και σκεφτόμαστε με τους τρόπους που αναλύσαμε στο προηγούμενο μάθημα, δηλαδή:

Είτε διακρίνουμε διαφορετικές περιπτώσεις και συνδυάζουμε τις λύσεις με τον κανόνα αθροίσματος
Είτε κατασκευάζουμε την λύση σε φάσεις (στάδια) και συνδυάζουμε τις λύσεις με τον κανόνα γινομένου.

Παράδειγμα:

Έχω 5 πράσινους, 5 κόκκινους και 5 άσπρους βόλους. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να κάνω μια επιλογή 4 βόλων με τον περιορισμό να επιλέξω τουλάχιστον 2 πράσινους βόλους

ΛΥΣΗ:

Διακρίνω περιπτώσεις για τους πράσινους βόλους:

- Να έχω 2 πράσινους βόλους: Τότε έχω $C(2+2-1, 2) = C(3, 2) = 3$ λύσεις
- Να έχω 3 πράσινους βόλους. Τότε έχω $C(2+1-1, 1) = C(2, 1) = 2$ λύσεις
- Να έχω 4 πράσινους βόλους. Τότε έχω 1 λύση

Άρα από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι $3+2+1=6$



Δ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 1

Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες:

A) $0! =$

B) $1! =$

C) $2! =$

D) $3! =$

E) $4! =$

F) $5! =$

G) $6! =$

H) $7! =$



Δ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 2

Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες:

A) $P(5,3) =$

B) $P(5,2) =$

C) $C(4,0) =$

D) $C(4,1) =$

E) $C(4,2) =$

F) $C(4,3) =$

G) $C(4,4) =$

H) $C(10,3) =$



Δ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 3

Αποδείξτε το θεώρημα:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Δίδεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

1. Τα υποσύνολα του A με 5 στοιχεία είναι $\binom{10}{5}$
2. Τα υποσύνολα του A με 3 στοιχεία είναι λιγότερα από τα υποσύνολα του A με 7 στοιχεία
3. Τα υποσύνολα του A με 4 στοιχεία είναι περισσότερα από τα υποσύνολα του A με 6 στοιχεία
4. Τα υποσύνολα του A είναι 2^{10}



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 2

Σε μια συγκέντρωση συμμετέχουν 6 άνδρες και 3 γυναίκες. Όλοι οι άνδρες ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία, όλες οι γυναίκες ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία και 4 από τους άνδρες ανταλλάσσουν χειραψία με 2 από τις γυναίκες

1. Οι χειραψίες μεταξύ ανδρών είναι 15.
2. Οι χειραψίες μεταξύ γυναικών είναι 9.
3. Οι χειραψίες μεταξύ ανδρών και γυναικών είναι 8.
4. Ο συνολικός αριθμός χειραψιών είναι 27.



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 3

Σε μια τράπουλα υπάρχουν 52 φύλλα (4 χρώματα με 13 χαρτιά το κάθε ένα). Στην επιλογή μας δεν ενδιαφέρει η σειρά.

1. Ο αριθμός των επιλογών δύο φύλλων έτσι ώστε και τα δύο να είναι σπαθιά είναι 13×12 .
2. Ο αριθμός των επιλογών 5 φύλλων της τράπουλας ώστε σε αυτά να υπάρχουν και οι 4 άσσοι της τράπουλας είναι $\binom{52}{4}$.
3. Ο αριθμός των επιλογών 5 φύλλων της τράπουλας ώστε σε αυτά να υπάρχουν οι 4 άσσοι της τράπουλας και μία ντάμα είναι 4.
4. Ο αριθμός των επιλογών 5 φύλλων της τράπουλας ώστε σε αυτά να υπάρχουν 3 άσσοι και 2 ντάμες είναι $\binom{52}{3} \cdot \binom{49}{2}$



Δ. Ασκήσεις Ερωτήσεις 4

Οι τρόποι επιλογής 2 βόλων από 7 διακεκριμένους βόλους είναι ίσοι με:

1. Τους τρόπους επιλογής 2 βιβλίων από 6 τίτλους (επιτρέπονται επαναλήψεις)
2. Το πλήθος των υποσυνόλων με 2 στοιχεία του συνόλου $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
3. Τον συντελεστή του x^2 στην παράσταση $(1+x)^7$
4. Τα διαφορετικά αποτελέσματα της ρίψης 2 ζαριών.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Έχουμε στην διάθεση μας 4 κέρματα των 2 ευρώ, 5 κέρματα του 1 ευρώ και 7 κέρματα των 0.50 ευρώ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 κέρματα;



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Σε ένα καλάθι υπάρχουν 30 μπάλες κόκκινου χρώματος, 30 μπάλες πράσινου χρώματος και 30 μπάλες μπλε χρώματος. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 10 μπάλες, αν δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής των μπαλών. Επαναλάβετε το ερώτημα αν στο καλάθι υπάρχουν 30 μπάλες κόκκινου χρώματος, 30 μπάλες πράσινου χρώματος και 5 μπάλες μπλε χρώματος.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 3

Στα τέσσερα ράφια της βιβλιοθήκης μας θα τοποθετήσουμε 100 διαφορετικά βιβλία έτσι ώστε το 1^ο ράφι να έχει 40 βιβλία, το 2^ο ράφι να έχει 30 βιβλία, το 3^ο ράφι να έχει 20 βιβλία και το 4^ο ράφι να έχει 10 βιβλία. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να επιλέξουμε ποια βιβλία θα μπουν σε κάθε ράφι;



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 4

Έστω 4 πράσινες, 4 κόκκινες και 4 μαύρες μπάλες. Να υπολογιστούν οι τρόποι για την επιλογή 4 μπαλών έτσι ώστε:

1. Να επιλεγθούν το πολύ 2 πράσινες μπάλες
2. Να επιλεγθούν ακριβώς 2 πράσινες μπάλες
3. Να επιλεγθούν τουλάχιστον 2 πράσινες μπάλες



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 5

Α) Ο coach της Εθνικής Ποδοσφαίρου θέλει να κατεβάσει 11άδα σε σύστημα 3-5-2(3 αμυντικοί, 5 μέσοι και 2 επιθετικοί). Πόσοι οι τρόποι για να κάνει την επιλογή των παιχτών του, αν έχει στην διάθεσή του 7 αμυντικούς, 8 μέσους και 4 επιθετικούς.

Β) Έχουμε 20 αριθμημένες μπάλες και 4 κουτιά με χωρητικότητες 2,5,6,7 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τους δυνατούς τρόπους τοποθέτησης των μπαλών στα κουτιά.

Γ) Έχω 12 διαφορετικά βιβλία και τρεις φοιτητές. Θέλω να δώσω 5 βιβλία στον 1^ο φοιτητή, 3 βιβλία στον 2^ο φοιτητή και 4 βιβλία στον 3^ο φοιτητή. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χωρισμός των βιβλίων;



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 6

Η δασκάλα μιας τάξης 10 παιδιών θέλει να χωρίσει τα παιδιά σε πέντε ομάδες των δύο ατόμων για την εκτέλεση κάποιας δραστηριότητας

A) Πόσοι τρόποι υπάρχουν αν οι ομάδες έχουν ένα χαρακτηριστικό χρώμα η κάθεμία. Δηλαδή είναι η πράσινη, η κόκκινη, η κίτρινη, η μαύρη και η άσπρη ομάδα.

B) Πόσοι τρόποι υπάρχουν αν όλες οι ομάδες είναι κόκκινου χρώματος;

Γ) Πόσοι τρόποι υπάρχουν αν οι τρεις ομάδες είναι κόκκινου χρώματος και οι δύο ομάδες είναι άσπρου χρώματος;