

Ορισμός Αλήθειας Tarski

Έστω A ερμηνεία, v αποτίμηση και ϕ τύπος. Η εύρεση για το αν η v ικανοποιεί τον ϕ στην A (ή ότι η ϕ αληθεύει για την v στην A) και συμβολίζουμε με $A \models \phi[v]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1. $A \models t_1 \approx t_2[v] \Leftrightarrow v(t_1) = v(t_2)$
2. $A \models P(t_1, \dots, t_n)[v] \Leftrightarrow (v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P^A$
3. $A \models \neg\phi[v] \Leftrightarrow$ δεν ισχύει ότι $A \models \phi[v]$
4. $A \models \phi \wedge \psi[v] \Leftrightarrow A \models \phi[v]$ και $A \models \psi[v]$
5. $A \models \phi \vee \psi[v] \Leftrightarrow A \models \phi[v]$ ή $A \models \psi[v]$
6. $A \models \phi \rightarrow \psi[v] \Leftrightarrow$ αν $A \models \phi[v]$ τότε $A \models \psi[v]$
7. $A \models \phi \leftrightarrow \psi[v] \Leftrightarrow A \models \phi[v]$ αν και μόνο αν $A \models \psi[v]$
8. $A \models \forall x\phi[v] \Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \models \phi[v(x|\alpha)]$
9. $A \models \exists x\phi[v] \Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \models \phi[v(x|\alpha)]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $P(x, y)$: $P^A(x, y)$ να αληθεύει αν $x < y$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\forall x\forall y[P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)]$

Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$$\begin{aligned}
 & A \models \forall x\forall y[P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)][v] && \text{(εφαρμόζω κανόνα 8)} \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|: A \models \forall y[P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)][v(x|\alpha)] && \text{(εφαρμόζω κανόνα 8)} \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|, \text{για κάθε } \beta \in |A|: A \models [P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)][v(x|\alpha, y|\beta)] && \text{(εφαρμόζω κανόνα 6)} \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|, \text{για κάθε } \beta \in |A|: \\
 & \quad \text{αν } A \models P(x, y)[v(x|\alpha, y|\beta)] \\
 & \quad \text{τότε } A \models \neg P(y, x)[v(x|\alpha, y|\beta)] && \text{(εφαρμόζω κανόνα 2 και 3)} \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|, \text{για κάθε } \beta \in |A|: \\
 & \quad \text{αν } (a, \beta) \in P^A \text{ τότε δεν ισχύει } A \models P(y, x)[v(x|\alpha, y|\beta)] && \text{(εφαρμόζω κανόνα 2)} \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|, \text{για κάθε } \beta \in |A|: \text{αν } (a, \beta) \in P^A \text{ τότε δεν ισχύει } (\beta, \alpha) \in P^A \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|, \text{για κάθε } \beta \in |A|: \text{αν } P^A(a, \beta) \text{ αληθες τότε δεν ισχύει } P^A(\beta, \alpha) \text{ αληθες} \\
 \Leftrightarrow & \text{για κάθε } \alpha \in |A|, \text{για κάθε } \beta \in |A|: \text{αν } \alpha < \beta \text{ τότε δεν ισχύει } \beta < \alpha \\
 & \text{που είναι προφανώς αληθής.}
 \end{aligned}$$

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΣ ΤΥΠΟΣ

Ένας τύπος θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμος, αν υπάρχει δομή (ερμηνεία) και αποτίμηση που ικανοποιεί τον τύπο. Μια δομή που ικανοποιεί τον τύπο θα λέμε ότι είναι μοντέλο του τύπου.

Για να αποδείξουμε ότι ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος:

- Διατυπώνουμε την ερμηνεία και την αποτίμηση (αν απαιτείται), μεταφράζουμε την πρόταση και δείχνουμε ότι είναι αληθής. (Συνίσταται η ερμηνεία των κατευθυνόμενων γραφημάτων)

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΥΠΩΝ

Ένα σύνολο τύπων θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμο, αν υπάρχει δομή (ερμηνεία) και αποτίμηση που ικανοποιεί κάθε τύπο του συνόλου τύπων.

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο:

- ομοίως με τον ικανοποιήσιμο τύπο

ΛΟΓΙΚΑ ΕΓΚΥΡΟΣ ΤΥΠΟΣ

Ένας τύπος θα λέμε ότι είναι λογικά έγκυρος τύπος (ή λογικά αληθής τύπος), αν αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία και οποιαδήποτε αποτίμηση.

Θα συμβολίζουμε με $\models \varphi$ έναν λογικά έγκυρο τύπο.

Ένας λογικά έγκυρος τύπος είναι και τυπικό θεώρημα του κατηγορηματικού λογισμού

Για να αποδείξουμε ότι ένας τύπος είναι λογικά έγκυρος:

- Είτε δείχνουμε ότι είναι Σ.Α. σε νόμο προτασιακής ή κατηγορηματικής λογικής ή αξιωματικό σχήμα του ΠΛ.
- Είτε κάνουμε εφαρμογή του Tarski και αφού καταλήξουμε στην μετάφραση αποδεικνύουμε ότι αληθεύει σε κάθε δομή και σε κάθε αποτίμηση χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα.

Για να αποδείξουμε ότι ένας τύπος δεν είναι λογικά έγκυρος:

Δείχνουμε ότι υπάρχει δομή και αποτίμηση που κάνει τον τύπο ψευδή ως εξής: Διατυπώνουμε μια ερμηνεία (σύμπαν, κατηγορηματικά σύμβολα κ.λπ.), Μεταφράζουμε την πρόταση, Δείχνουμε ότι είναι ψευδής.

ΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

Θα λέμε ότι ένα σύνολο τύπων T συνεπάγεται λογικά τον τύπο ϕ ή ότι ο ϕ είναι σημασιολογική συνέπεια του T και θα συμβολίζουμε με $T \models \phi$

αν και μόνο αν

Για όλες τις δομές και αποτιμήσεις που το σύνολο τύπων T είναι ικανοποιήσιμο, ικανοποιείται και ο τύπος ϕ

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει μια λογική συνεπαγωγή

Π.χ. Αν $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \varphi$ αρκεί να δείξουμε ότι ο τύπος: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \rightarrow \varphi$ είναι λογικά έγκυρος.

Για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μία λογική συνεπαγωγή:

- Επιλέγουμε μια δομή και μία αποτίμηση που κάνει τις υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.
- Διατυπώνουμε την ερμηνεία και μεταφράζουμε υποθέσεις και συμπέρασμα. Δείχνουμε ότι οι υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές.