ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 0: ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Μάθημα 0.1:
Σύνολα

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Ορισμός Συνόλου
- Συμπληρωματικοί Ορισμοί
- Σχέσεις Συνόλων
- Πράξεις Συνόλων

Επίπεδο Β

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

Β. Θεωρία
1. Τι είναι σύνολο

ΣΥΝΟΛΟ είναι οποιαδήποτε συλλογή στοιχείων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- Το σύνολο των ελληνικών φωνηέντων:

$$A = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$$

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών από το 1 εώς το 9

$$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Συνήθως τα σύνολα αναπαρίστανται με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους είναι μέσα σε άγκιστρα χωρισμένα με κόμματα. Η αναπαράσταση των στοιχείων τους μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

- Με ρητή αναπαράσταση των μελών του. Π.χ. Όπως στο ακόλουθο σύνολο:

$$\Gamma = \{10,12,14,16,18,20\}$$

- Με περιγραφικό τρόπο, χρησιμοποιώντας την | που διαβάζεται «τέτοιο ώστε»:

$$\Gamma = \{x \mid x \text{ είναι αρτιος φυσικός με } 10 \le x \le 20\}$$

Β. Θεωρία

2. Συμπληρωματικοί ορισμοί

- Έχουμε ήδη γνωρίσει κάποια σύνολα αριθμών. Αυτά είναι:
  - Το σύνολο των φυσικών αριθμών:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$$

(Προσοχή ότι συμπεριλαμβάνεται και το 0)

  - Το σύνολο ακεραίων αριθμών:

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,,\dots\}$$

  - Το σύνολο των ρητών αριθμών:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n} \ \ \mu\varepsilon\ m,n \in \mathbb{N}\}$$

  - Το σύνολο των πραγματικών αριθμών R που περιλαμβάνει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς
- Και βέβαια το περίφημο **κενό σύνολο**, δηλαδή το σύνολο που δεν περιλαμβάνει στοιχεία: $\varnothing = \{\}$

Β. Θεωρία
2. Συμπληρωματικοί ορισμοί

- Εισάγουμε τώρα έναν συμβολισμό για να απεικονίζουμε ότι ένα στοιχείο ανήκει ή δεν ανήκει αντίστοιχα σε ένα σύνολο:
  - Γράφουμε $5 \in N$ και διαβάζουμε ότι το 5 ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών
  - Ενώ γράφουμε $4.4 \notin N$ και διαβάζουμε ότι το 4.4 δεν ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών
- Η σημαντική πληροφορία για ένα σύνολο είναι ποια στοιχεία περιέχει (και όχι η σειρά με την οποία τα περιέχει)
  - Έτσι τα σύνολα $A = \{1,2,3\}$

    και $B = \{3,1,2\}$

    Είναι ίδια (αφού περιέχουν τα ίδια στοιχεία)
  - Ενώ τα σύνολο $\Gamma = \{1,1,2,2,2,3,3\}$ είναι λανθασμένη αναπαράσταση συνόλου, αφού κάθε στοιχείο πρέπει να περιέχεται ακριβώς μία φορά στο σύνολο.
    - Συνεπώς το Γ είναι ακριβώς το ίδιο σύνολο με το σύνολα Α και Β
    - Και ορίζουμε ότι Α=Β=Γ (τα σύνολα είναι ίσα)

Β. Θεωρία

2. Συμπληρωματικοί ορισμοί

- Τα σύνολα λοιπόν είναι συλλογές αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να περιλαμβάνουν αντικείμενα οποιουδήποτε τύπου. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:
- Ένα σύνολο αριθμών:

$$A = \{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$$

- Ένα σύνολο συμβολοσειρών:

$$\mathrm{B} = \{tom,\ john,\ jim,\ pat\}$$

- Ένα σύνολο συναρτήσεων:

$$\Gamma = \{ f(x) = x, g(x) = x^2 + 1, h(x) = \sqrt[4]{x^3} + x + 1\}$$

- Ένα σύνολο συνόλων!

$$\Delta = \{\{1,2,3\}, \{2,5\}, \varnothing, \mathrm{N}\}$$

- Ένα σύνολο από ετερόκλητα στοιχεία:

$$\mathrm{E} = \{\varnothing, 3.14, \sqrt{2}, tom, 5, 7, \{1,5\}\}$$

Β. Θεωρία

3.Σχέσεις Συνόλων

1.Υποσύνολο

- Ορίζουμε ότι:

Το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β (και συμβολίζουμε $A \subseteq B$) αν κάθε στοιχείο που ανήκει στο σύνολο Α ανήκει και στο συνολο Β

- Παραδείγματα:
  - Ισχύει ότι: $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,d\}$
  - Ισχύει ότι: $\{1,5,3\} \subseteq N$
  - Ισχύει ότι: $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2,3,4\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2\} \subseteq \{1,3\}$

- Τυπικά ο ορισμός της σχέσης υποσυνόλου είναι ο εξής:

$$A \subseteq B \quad \alpha\nu\nu \quad \forall x \in A \quad \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \ \kappa\alpha\iota \ x \in B$$

  - Ενω με χρήση του υποσυνόλου ορίζουμε τυπικά την ισότητα συνόλων:

$$A = B \quad \alpha\nu\nu \quad A \subseteq B \ \kappa\alpha\iota \ B \subseteq A$$

Β. Θεωρία

3.Σχέσεις Συνόλων

2.Γνήσιο Υποσύνολο

- Ορίζουμε ότι:

Το σύνολο Α είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Β (και συμβολίζουμε $A \subset B$) αν το Α είναι υποσύνολο του Β, αλλά τα Α και Β δεν είναι ίσα.

- Παραδείγματα:
  - Ισχύει ότι: $\{a,b,c\} \subset \{a,b,c,d\}$
  - Ισχύει ότι: $\{1,5,3\} \subset N$
  - ΔΕΝ Ισχύει ότι: $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3\}$
  - Δεν ισχύει ότι: $\{1,2\} \subset \{1,3\}$

- Τυπικά ο ορισμός της σχέσης υποσυνόλου είναι ο εξής:

$$A \subset B \quad \alpha\nu\nu \quad A \subseteq B \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \exists x \notin \mathrm{A} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \in \mathrm{B}$$

Β. Θεωρία

4. Πληθάριθμος Συνόλου

- Ήδη έχουμε δει σύνολα που περιέχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, όπως π.χ. το

$$B = \{tom, john, jim, pat\}$$

  - Το οποίο έχει 4 στοιχεία. Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου ονομάζεται πληθάριθμος ή πληθικός αριθμός του συνόλου και συμβολίζεται με |B| (το σύνολο μέσα σε δύο κάθετες γραμμές). Γράφουμε: $|B| = 4$

- Επειδή το παραπάνω σύνολο έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, θα λέμε ότι είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.
  - Αντίθετα με τα σύνολα που περιέχουν άπειρο πλήθος στοιχείων τα οποία ονομάζονται άπειρα σύνολα ή απειροσύνολα, όπως π.χ. τα σύνολα αριθμών N,Z,Q,R

- Με χρήση αυτών των συμβολισμών έχουμε:

$$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } |A| \leq |B|$$

$$\text{Αν } A \subset B \text{ τότε } |A| < |B|$$

Β. Θεωρία
5. Πράξεις Συνόλων

- Ορίζουμε τώρα πράξεις επί των συνόλων. Συγκεκριμένα πάνω σε δύο σύνολα Α και Β:
  - Η ένωση $A \cup B$ που δίνει το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία των Α και Β
  - Η τομή $A \cap B$ που δίνει το σύνολο που περιλαμβάνει τα κοινά στοιχεία των Α και Β
  - Το συμπλήρωμα του Α που δίνει τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο Α
  - Η διαφορά $A - B$ που δίνει τα στοιχεία που ανήκουν στο Α και δεν ανήκουν στο Β
- Και πιο περίπλοκες πράξεις που δίνουν νέα σύνολα που είναι σημαντικά στην συνέχεια του μαθήματος:
  - Το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων Α και Β: AxB
  - Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου $P(A)$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

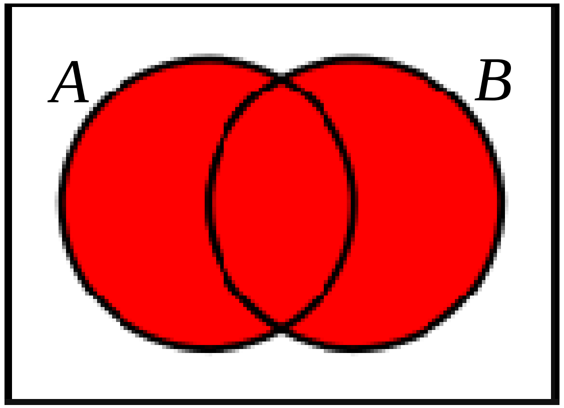
1.Ένωση Συνόλων

- Ορίζουμε ότι:

Η ένωση δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; ή \; x \in B\}$$

- Με διάγραμμα Venn, το παραπάνω σύνολο απεικονίζεται:



- Για παράδειγμα αν A={0,1,2,3} και B={2,3,4,5} τότε

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

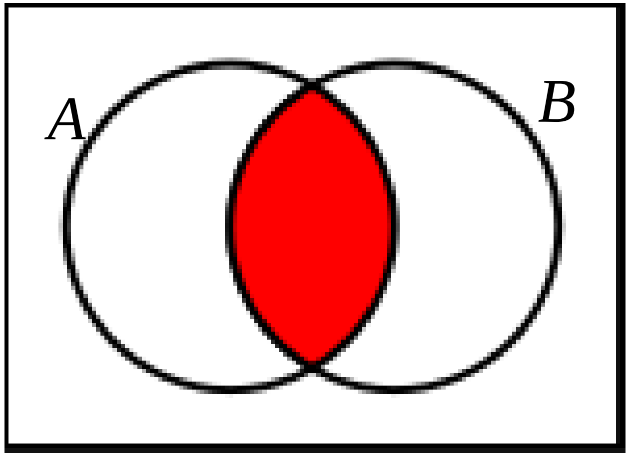
2.Τομή Συνόλων

- Ορίζουμε ότι:

Η τομή δύο συνόλων Α και Β είναι το σύνολο:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\kappa\alpha\iota\; x \in B\}$$

- Με διάγραμμα Venn, το παραπάνω σύνολο απεικονίζεται:



- Για παράδειγμα αν Α={0,1,2,3} και Β={2,3,4,5} τότε

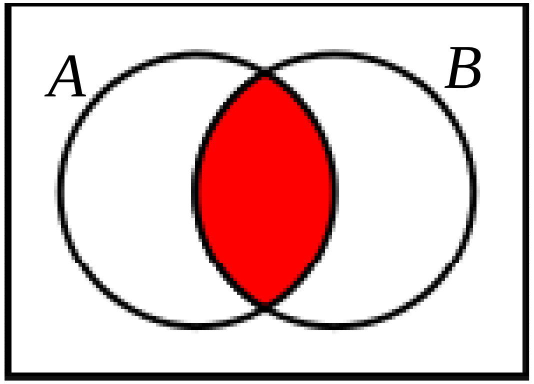
$$A \cap B = \{2,3\}$$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

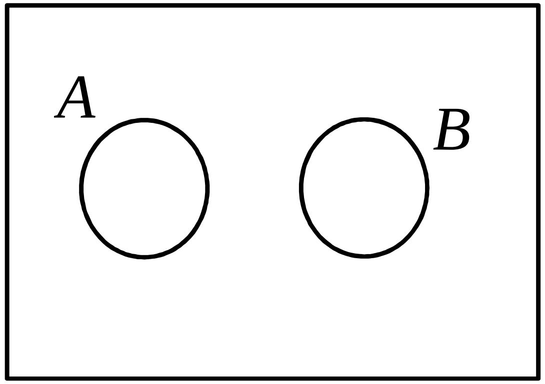
2.Τομή Συνόλων

- Παρατηρήστε ότι δύο σύνολα:
  - Είτε θα περιέχουν κοινά στοιχεία, άρα η τομή τους δεν θα είναι το κενό σύνολο.



δηλ. ισχύει: $A \cap B \neq \varnothing$ άρα και $|A \cap B| \neq 0$

  - Είτε δεν θα περιέχουν κοινά στοιχεία, άρα η τομή τους θα είναι το κενό σύνολο



Στην περίπτωση αυτή θα λέγονται: «ξένα μεταξύ τους σύνολα»

δηλ. ισχύει: $A \cap B = \varnothing$ άρα και $|A \cap B| = 0$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

2.Τομή Συνόλων (Η αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού)

- Η αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού είναι ένας μαθηματικός τύπος που σχετίζει τους πληθάριθμους της ένωσης και της τομής δύο συνόλων. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Η οποία γενικεύεται και για τρία σύνολα ως εξής:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = &|A| + |B| + |C| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &+ |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

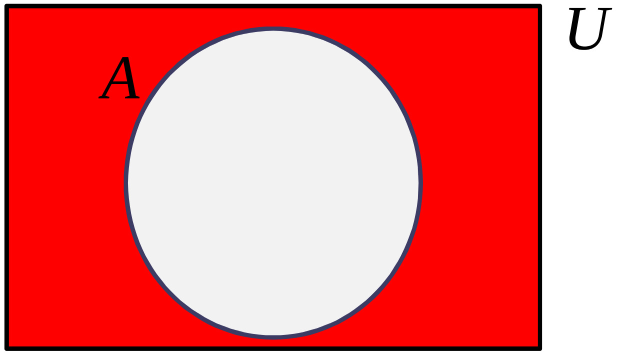
Β. Θεωρία
5. Πράξεις Συνόλων
3.Συμπλήρωμα Συνόλου

- Ορίζουμε ότι:

Το συμπλήρωμα ενός συνόλου Α είναι το σύνολο:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- Με διάγραμμα Venn, το παραπάνω σύνολο απεικονίζεται:



- Για παράδειγμα αν Α={0,1,2,3} και U={0,1,2,3,4,5,6} τότε

$$\overline{A} = \{4,5,6\}$$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

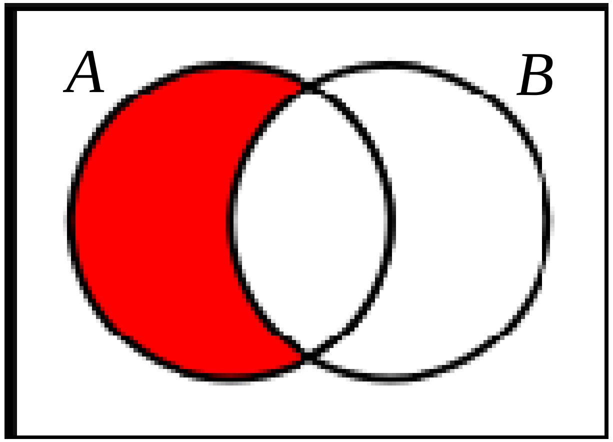
4.Διαφορά Συνόλων

- Ορίζουμε ότι:

Η διαφορά δύο συνόλων Α και Β είναι το σύνολο:

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \; \kappa\alpha\iota \; x \notin B\}$$

- Με διάγραμμα Venn, το παραπάνω σύνολο απεικονίζεται:



- Για παράδειγμα αν Α={0,1,2,3} και Β={2,3,4,5} τότε

$$A - B = \{0,1\} \qquad B - A = \{4,5\}$$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

5. Καρτεσιανό Γινόμενο

- Ορίζουμε ότι:

Το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων Α και Β είναι το σύνολο:

$$AxB = \{(x,y) \mid x \in A \;\kappa\alpha\iota\; y \in B\}$$

- Προσοχή ότι με τις παρενθέσεις στην παράσταση (x,y) εννοούμε το διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο στοιχείο το x και δεύτερο στοιχείο το y, άρα η σειρά απεικόνισης των μελών του ζεύγους έχει σημασία (σε αντίθεση με το συμβολισμό με τα αγκιστρα που απεικονίζει ότι η σειρά απεικόνισης των μελών δεν έχει σημασία)
- Για παράδειγμα αν A={1,2} και B={a,b,c} τότε:

$$AxB = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$BxA = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

- Ειδικά για τον πληθάριθμο του καρτεσιανού γινομένου ισχύει:

$$|AxB| = |BxA| = |A| * |B|$$

Β. Θεωρία

5. Πράξεις Συνόλων

6. Δυναμοσύνολο

- Ορίζουμε ότι:

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A (συμβολίζεται με 2^A ή P(A)) είναι το σύνολο:

$$P(A) = \{x \mid x \text{ είναι υποσύνολο του } A\}$$

Αποτελεί δηλαδή το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A

- Αν A={1,2} τότε το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

- Ενώ αν A={1,2,3} τότε το δυναμοσύνολό του είναι το σύνολο:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

- Θα αποδείξουμε σε επόμενο μάθημα για τον πληθικό αριθμό ενός συνόλου:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

- Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις που αφορούν σύνολα ισχύουν ή δεν ισχύουν:

1. $5 \in N$
2. $\{1,2\} \in \{1,2\}$
3. $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$
4. $\{1,2\} \subset \{1,2\}$
5. $\varnothing \subset \{1,2\}$
6. $\varnothing \notin \varnothing$
7. $\varnothing \notin \{\varnothing\}$
8. $N \subset Z \subset Q \subset R$
9. $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

- Κατασκευάστε διαγράμματα Venn που να απεικονίζουν τα σύνολα:
  1. $A \cap \overline{B}$
  2. $A \cap (B \cup C)$
  3. $(A - B) \cup (B - A)$
  4. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

- Κατασκευάστε τα δυναμοσύνολα των συνόλων:

1. $A=\{1,2,3,4\}$
2. $B=\{\varnothing,1,\{1,2\}\}$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 4

- Από ένα δείγμα 150 φοιτητών ενός πανεπιστημιού οι 50 έχουν δηλώσει το μάθημα των διακριτών μαθηματικών, οι 80 έχουν δηλώσει το μάθημα της εισαγωγής στην πληροφορική, ενώ 40 δεν εχουν δηλώσει κανένα από τα δύο μαθήματα. Να βρεθεί πόσοι φοιτητές έχουν δηλώσει και το μάθημα των διακριτών μαθηματικών και της εισαγωγής στην πληροφορική.