ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Συντακτικό Προτάσεων ΚΛ

Έκφραση: Οτιδήποτε χρησιμοποιεί σύμβολα ΚΛ (ακόμη και ασύντακτο)

Ορός: Αποτιμάται σε τιμή από το πεδίο ορισμού

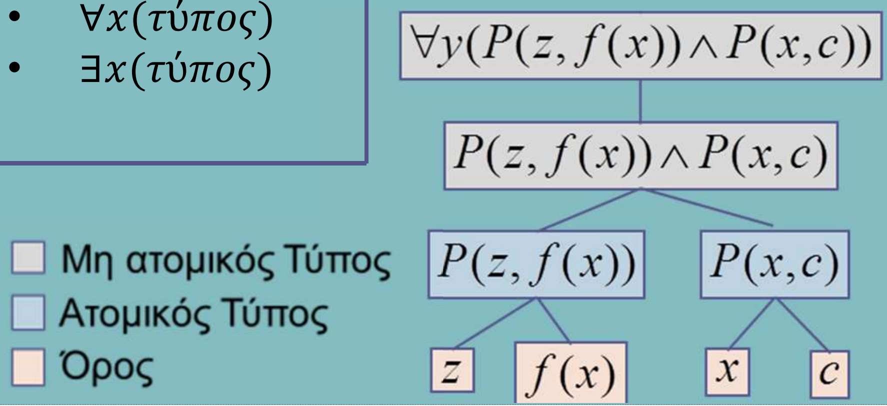
- **Μεταβλητή (π.χ. x, y, z…)**
- **Σταθερά (π.χ. c, d,…)**
- **Συναρτησιακό Σύμβολο (ορίσματα όροι)**
  - π.χ.: $f(ορος, ορος, \dots)$

Ατομικός Τύπος: Αποτιμάται σε Α/Ψ

- **Ισότητα όρων (≈)**
  - π.χ.: $ορος \approx ορος$
- **Κατηγορηματικό Σύμβολο (ορίσματα όροι)**
  - π.χ.: $P(ορος, ορος, \dots)$

Μη Ατομικός Τύπος: Αποτιμάται σε Α/Ψ

- **Προτασιακοί Σύνδεσμοι** ($\neg, \lor, \land, \rightarrow, \leftrightarrow$)
  - $\neg(τύπος)$
  - $(τύπος) \lor (τύπος)$
  - $(τύπος) \land (τύπος)$
  - $(τύπος) \rightarrow (τύπος)$
  - $(τύπος) \leftrightarrow (τύπος)$
- **Ποσοδείκτες ($\forall, \exists$):**
  - $\forall x(τύπος)$
  - $\exists x(τύπος)$



$\forall x(τύπος)$	$\exists x(τύπος)$
Αληθές (για όλα τα x: τύπος =Α)	Αληθές (π.χ. για x=… : τυπος=Α)
Ψευδές (π.χ. για x=…: τύπος=Ψ)	Ψευδές (για όλα τα x: τύπος =Ψ)

Κανόνες Συντακτικού:

- **Πρόταση:** Τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές
- **Προτεραιότητα:**
  1. $\neg, \forall, \exists$
  2. $\lor, \land$
  3. $\rightarrow, \leftrightarrow$
- **Εμβέλεια:** Αν δεν καθορίζεται με παρενθέσεις, η εμβέλεια των ποσοδεικτών φτάνει μέχρι τον πρώτο διμελή προτασιακό σύνδεσμο.

Η δομή (ή ερμηνεία) Α αποτελείται από τα εξής:

- Το **σύμπαν της A** (συμβολίζεται με $|A|$) που είναι το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.
- Σε κάθε **συναρτησιακό σύμβολο** f/n αντιστοιχούμε μια συνάρτηση: $f^A\colon |A|^n \rightarrow |A|$
- Σε κάθε **κατηγορηματικό σύμβολο** P/n αντιστοιχούμε μια σχέση: $P^A \subseteq |A|^n$
- Σε κάθε σύμβολο **σταθεράς c** αντιστοιχούμε μια τιμή: $c^A \in |A$

η ερμηνεία αποδίδει νόημα σε όλα τα σύμβολα που εμφανίζονται στον τύπο (ή στον όρο)

Η **αποτίμηση v** είναι μία συνάρτηση που δίνει τιμή από το σύμπαν σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή.

- Άρα είναι μία συνάρτηση: $v\colon M(\Gamma_1) \rightarrow |A|$

$\neg(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$	Δεν ισχύει η $(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$
$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta) \wedge (\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$	$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$ και $(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$
$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta) \vee (\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$	$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$ ή $(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$
$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta) \rightarrow (\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$	Αν $(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$ τότε $(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$
$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta) \leftrightarrow (\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$	$(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$ αν και μόνο αν $(\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta)$
$\exists x(\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x)$	Υπάρχει στοιχείο για το οποίο ισχύει η $(\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x)$ Υπάρχει στοιχείο τέτοιο ώστε να ισχύει η $(\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x)$
$\forall x(\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x)$	Κάθε στοιχείο έχει την $(\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x)$ Για κάθε στοιχείο ισχύει η $(\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ x)$
$\exists x \exists y(x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y)$	Υπάρχει ζεύγος στοιχείων για το οποίο ισχύει η $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$ Υπάρχει ζεύγος στοιχείων τέτοιο ώστε να ισχύει η $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$
$\forall x \forall y(x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y)$	Κάθε ζεύγος στοιχείων έχει την $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$ Για κάθε ζεύγος στοιχείων ισχύει η $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$
$\exists x \forall y(x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y)$	Υπάρχει στοιχείο που έχει τη $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$με όλα τα στοιχεία
$\forall x \exists y(x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y)$	Κάθε στοιχείο έχει τη $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$ με τουλάχιστον ένα στοιχείο
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge (x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y))$	Υπάρχει ζεύγος διαφ/κών στοιχείων για το οποίο ισχύει η $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$
$\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow (x\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ y)$	Για κάθε ζεύγος διαφ/κων στοιχείων ισχύει η $(\sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$
$\exists x\left[(\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ x) \wedge \forall y\big((o\mu o\iota\alpha\ \iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ y) \rightarrow x \approx y\big)\right]$	Υπάρχει μοναδικό στοιχείο με την ιδιότητα Υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο με την ιδιότητα
$\exists x \exists y \begin{bmatrix} (\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ x) \wedge (o\mu o\iota\alpha\ \iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ y) \wedge x \neq y \wedge \\ \forall z\big((o\mu o\iota\alpha\ \iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ z) \rightarrow z \approx x \vee z \approx y\big) \end{bmatrix}$	Υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία με την ιδιότητα

Η **Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών** (συμβολίζεται με $Γ_1^{θα}$) συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που ορίζονται με τα εξής στοιχεία:

- Το σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί: $|A| = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$
- Ορίζονται τα συναρτησιακά σύμβολα:
  - $\oplus(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ με $\oplus^{A}(x,y) = x + y$ (συναρτησιακό σύμβολο της πρόσθεσης)
  - $\odot(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ με $\odot^{A}(x,y) = x * y$ (συναρτησιακό σύμβολο του πολλαπλασιασμού)
  - $'(\boldsymbol{x})$ με $'^{A}(x) = x + 1$ (συναρτησιακό σύμβολο που εκφράζει τον επόμενο ενός αριθμού)
- Ορίζονται τα κατηγορηματικά σύμβολα:
  - $<(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ με $<^{A}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ να αληθεύει αν $\mathrm{x} < \mathrm{y}$
  - $>(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ με $>^{A}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ να αληθεύει αν $\mathrm{x} > \mathrm{y}$
  - $\leq(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ με $\leq^{A}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ να αληθεύει αν $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$
  - $\geq(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ με $\geq^{A}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ να αληθεύει αν $\mathrm{x} \geq \mathrm{y}$
- Μοναδικό σύμβολο σταθεράς το μηδέν: 0 με $0^{A} = 0$

Παράδειγμα: Αντικαθιστώντας κάθε φορά το P με τα κατηγορηματικά σύμβολα <,>,≤,≥ να αποφασιστεί αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι Α/Ψ.

		<	≤	>	≥
1	$\forall xP(x,x)$	Ψ(x=0)	Α	Ψ(x=0)	Α
2	$\exists xP(x,x)$	Α(x=0)	Α(x=0)	Α(x=0)	Α(x=0)
3	$\forall x\forall yP(x,y)$	Ψ(x=1, y=0)	Ψ(x=1, y=0)	Ψ(x=0, y=1)	Ψ(x=0, y=1)
4	$\exists x\exists yP(x,y)$	Α(x=0, y=1)	Α(x=0, y=1)	Α(x=1, y=0)	Α(x=1, y=0)
5	$\forall x\exists yP(x,y)$	Α	Α	Ψ(x=0)	Α
6	$\exists x\forall yP(x,y)$	Ψ	Α(x=0)	Ψ	Ψ
7	$\forall y\forall xP(x,y)$	Ψ(x=1, y=0)	Ψ(x=1, y=0)	Ψ(x=0, y=1)	Ψ(x=0, y=1)
8	$\exists y\exists xP(x,y)$	Α(x=0, y=1)	Α(x=0, y=1)	Α(x=1, y=0)	Α(x=1, y=0)
9	$\exists y\forall xP(x,y)$	Ψ	Ψ	Ψ	Α(y=0)
10	$\forall y\exists xP(x,y)$	Ψ(y=0)	Α	Α	Α

(Γνωστές) Ιδιότητες των Φυσικών Αριθμών:

Οι φυσικοί αριθμοί έχουν ελάχιστο στοιχείο (το μηδέν) και δεν έχουν μέγιστο στοιχείο. **Άρα:**

- Το 0 είναι μικρότερο ή ίσο από όλους τους φυσικούς
- Το 0 δεν είναι μικρότερο από όλους τους φυσικούς (δεν είναι μικρότερο από τον εαυτό του)
- Δεν υπάρχει φυσικός που να είναι μεγαλύτερος (ή ίσος) από όλους τους φυσικούς και Όποιον φυσικό αριθμό και να σκεφτούμε πάντα υπάρχει κάποιος μεγαλύτερος του!

Επίσης ισχύουν και οι ακόλουθες μαθηματικές σχέσεις:

- Αν x<y τότε x≤y (το αντίστροφο δεν ισχύει)
- x=y αν και μόνο αν x≤y και y≤x
- x<y αν και μόνο αν x≤y και x≠y
- x>y αν και μόνο αν x≥y και x≠y
- x<y αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι x≥y
- x>y αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι x≤y

Σημαντικές Συντομογραφίες:

- $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \exists y[x \approx \odot('('(0)), y)]$ που αληθεύει αν το **x είναι άρτιος.**
- $\mathbf{O}(\mathbf{x}) \equiv \exists y[x \approx \oplus(\odot('('(0)), y), '(0))]$ που αληθεύει αν το **x είναι περιττός**.
- $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \equiv \neg(x \approx 0) \land \neg(x \approx '(0)) \land \forall y\forall z[x \approx \odot(y,z) \to x \approx y \lor x \approx z]$ που αληθεύει αν το x είναι πρώτος (διαιρείται ακριβώς μόνο με τον εαυτό του και την μονάδα).
- $\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \exists z[x \approx \odot(y,z)]$ που αληθεύει αν το x διαιρείται (ακριβώς) από το y.

Κάθε άρτιος φυσικός >4 γράφεται σαν άθροισμα δύο περιττών πρώτων:

$$\forall x \begin{bmatrix} \mathrm{E}(x) \land >\left(x, '\left('\left('('(0))\right)\right)\right) \to \\ \to \exists y\exists z(x = \oplus(y,z) \land P(y) \land P(z) \land O(y) \land O(z)) \end{bmatrix}$$

Η Γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων (συμβολιζεται με $\Gamma_1^{\theta\sigma}$) συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που ορίζονται με τα εξής στοιχεία:

- **Το σύμπαν είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X:**
  - $|\mathrm{A}| = P(X)$
- **Ορίζονται τα κατηγορηματικά σύμβολα:**
  - $\subseteq (\mathrm{x},\mathrm{y})$ με $\subseteq^{\mathrm{A}} (\mathrm{x},\mathrm{y})$ να αληθεύει αν $\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y}$
  - $\subset (\mathrm{x},\mathrm{y})$ με $\subset^{\mathrm{A}} (\mathrm{x},\mathrm{y})$ να αληθεύει αν $\mathrm{x} \subset \mathrm{y}$

Προσοχή ότι στην ερμηνεία αυτή το σύμπαν μεταβάλλεται ανάλογα με την επιλογή του βασικού συνόλου X.

Παράδειγμα: Αντικαθιστώντας κάθε φορά το P με τα κατηγορηματικά σύμβολα ⊂, ⊆ να αποφασιστεί αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι Α/Ψ.

		$\subset$	$\subseteq$
1	$\forall x P(x,x)$	$\Psi(x=\emptyset)$	A
2	$\exists x P(x,x)$	Ψ	$\mathrm{A}(x=\emptyset)$
3	$\forall x \forall y P(x,y)$	$\Psi(x=\{1\}, y=\emptyset)$	$\Psi(x=\{1\}, y=\emptyset)$
4	$\exists x \exists y P(x,y)$	$\mathrm{A}(x=\emptyset, y=\{1\})$	$\mathrm{A}(x=\emptyset, y=\{1\})$
5	$\forall x \exists y P(x,y)$	$\Psi(x=\{1,2,3\})$	A
6	$\exists x \forall y P(x,y)$	Ψ	$\mathrm{A}(x=\emptyset)$
7	$\forall y \forall x P(x,y)$	$\Psi(x=\{1\}, y=\emptyset)$	$\Psi(x=\{1\}, y=\emptyset)$
8	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\mathrm{A}(x=\emptyset, y=\{1\})$	$\mathrm{A}(x=\emptyset, y=\{1\})$
9	$\exists y \forall x P(x,y)$	Ψ	$\mathrm{A}(\mathrm{y}=\{1,2,3\})$
10	$\forall y \exists x P(x,y)$	Ψ	$\mathrm{A}(\mathrm{y}=\emptyset)$

Στο παράδειγμα έχουμε θεωρήσει ότι το σύμπαν είναι το P({1,2,3})

Σημαντικές Συντομογραφίες:

- $\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) \equiv \forall y[\subseteq (\mathrm{x},\mathrm{y})]$ που αληθεύει αν το x είναι το κενό σύνολο.
- $\mathbf{I}(\mathbf{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \equiv \subseteq (x,\mathrm{y}) \wedge \subseteq (x,z) \wedge \forall \mathrm{w}[\subseteq (w,y) \wedge \subseteq (w,\mathrm{z}) \rightarrow \subseteq (w,\mathrm{x})]$
  που αληθεύει αν το x είναι η τομή των συνόλων y και z
- $\mathbf{U}(\mathbf{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \equiv \subseteq (\mathrm{y},\mathrm{x}) \wedge \subseteq (\mathrm{z},\mathrm{x}) \wedge \forall \mathrm{w}[\subseteq (\mathrm{y},\mathrm{w}) \wedge \subseteq (\mathrm{z},\mathrm{w}) \rightarrow \subseteq (\mathrm{x},\mathrm{w})]$
  που αληθεύει αν το x είναι η ένωση των συνόλων y και z

ΝΟΜΟΙ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Οι νόμοι ΚΛ είναι:

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση
1	Άρνηση Ποσοδείκτη	$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$
2	Κατανομή Ποσοδείκτη	$\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$ $\exists x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \lor \exists x\psi$
3	Εναλλαγή Ποσοδεικτών	$\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
4	Μετακίνηση Ποσοδείκτη	$(\varphi \to \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$ $(\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$ $(\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$ $(\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$

Ορισμός: Ένας τύπος φ θα λέμε ότι είναι σε **Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή** αν έχει τη μορφή:

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n \Psi$$

Όπου τα:

- $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ είναι ποσοδείκτες, δηλαδή: ∃ ή ∀
- $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι μεταβλητές
- Το Ψ είναι ανοιχτός τύπος (δεν έχει ποσοδείκτες)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Εύρεσης Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής:
Στην αρχή του τύπου μόνο ποσοδείκτες που δεσμεύουν όλο τον τύπο. Κάνουμε αλφαβητικές παραλλαγές (αν έχουμε ποσοδείκτες με το ίδιο όνομα ή ελεύθερη μεταβλητή με ίδιο όνο-μα με μεταβλητή ποσοδείκτη) και εφαρμόζουμε νόμους κατηγορηματικής λογικής για να φέρουμε τους ποσοδείκτες μπροστά (μετακίνησης και άρνησης και νόμοι της προτασιακής που κανουν τα σύμβολα συνεπαγωγές).

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί η κανονική ποσοδείκτη μορφή του τύπου$\forall x Q(x) \lor \forall x R(x,x)$

$\forall x Q(x) \lor \forall x R(x,x)$	(Αλφαβητική Παραλλαγή)
$\equiv \forall x Q(x) \lor \forall y R(y,y)$	(Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης)
$\equiv \neg\neg\forall x Q(x) \lor \forall y R(y,y)$	(Εφαρμόζω το 1ο νόμο αντικατάστασης)
$\equiv \neg\forall x Q(x) \to \forall y R(y,y)$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y[\neg\forall x Q(x) \to R(y,y)]$	(Εφαρμόζω το νόμο άρνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y[\exists x\neg Q(x) \to R(y,y)]$	(Εφαρμόζω το νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\equiv \forall y\forall x[\neg Q(x) \to R(y,y)]$	

Ορισμός Αλήθειας Tarski

Έστω Α ερμηνεία, v αποτίμηση και φ τύπος. Η εύρεση για το αν η v ικανοποιεί τον φ στην Α (ή ότι η ο φ αληθεύει για την v στην Α) και συμβολίζουμε με $A \vDash \varphi[v]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1. $A \vDash t_1 \approx t_2[v] \iff v(t_1) = v(t_2)$
2. $A \vDash P(t_1, \dots, t_n)[v] \iff (v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P^A$
3. $A \vDash \neg\varphi[v] \iff$ δεν ισχύει ότι $A \vDash \varphi[v]$
4. $A \vDash \varphi \wedge \psi[v] \iff A \vDash \varphi[v]$ και $A \vDash \psi[v]$
5. $A \vDash \varphi \vee \psi[v] \iff A \vDash \varphi[v]$ ή $A \vDash \psi[v]$
6. $A \vDash \varphi \rightarrow \psi[v] \iff$ Αν $A \vDash \varphi[v]$ τότε $A \vDash \psi[v]$
7. $A \vDash \varphi \leftrightarrow \psi[v] \iff A \vDash \varphi[v]$ αν και μόνο αν $A \vDash \psi[v]$
8. $A \vDash \forall x\varphi[v] \iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|a)]$
9. $A \vDash \exists x\varphi[v] \iff$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|a)]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $P(x, y)$: $P^A(x, y)$ να αληθεύει αν $x < y$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\forall x \forall y[P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)]$

Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$A \vDash \forall x \forall y[P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)][v]$ (εφαρμόζω κανόνα 8)

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \vDash \forall y[P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)][v(x|a)]$ (εφαρμόζω κανόνα 8)

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$, για κάθε $\beta \in |A|$: $A \vDash [P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)][v(x|a, y|\beta)]$ (εφαρμόζω κανόνα 6)

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$, για κάθε $\beta \in |A|$:

αν $A \vDash P(x, y)[v(x|a, y|\beta)]$

τότε $A \vDash \neg P(y, x)[v(x|a, y|\beta)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2 και 3)

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$, για κάθε $\beta \in |A|$:

αν $(a, \beta) \in P^A$ τότε δεν ισχύει $A \vDash P(y, x)[v(x|a, y|\beta)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$, για κάθε $\beta \in |A|$: αν $(a, \beta) \in P^A$ τότε δεν ισχύει $(\beta, \alpha) \in P^A$

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$, για κάθε $\beta \in |A|$: αν $P^A(a, \beta)$ $\alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$ τότε δεν ισχύει $P^A(\beta, \alpha)$ $\alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$

$\iff$ για κάθε $\alpha \in |A|$, για κάθε $\beta \in |A|$: αν $\alpha < \beta$ τότε δεν ισχύει $\beta < \alpha$

ρου είναι προφανώς αληθής.

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΣ ΤΥΠΟΣ

Ένας τύπος θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμος, αν υπάρχει δομή (ερμηνεία) και αποτίμηση που ικανοποιεί τον τύπο.
Μια δομή που ικανοποιεί τον τύπο θα λέμε ότι είναι μοντέλο του τύπου.

Για να αποδείξουμε ότι ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος:

- Διατυπώνουμε την ερμηνεία και την αποτίμηση (αν απαιτείται), μεταφράζουμε την πρόταση και δείχνουμε ότι είναι αληθής. (Συνίσταται η ερμηνεία των κατευθυνόμενων γραφημάτων)

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΥΠΩΝ

Ένα σύνολο τύπων θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμο, αν υπάρχει δομή (ερμηνεία) και αποτίμηση που ικανοποιεί κάθε τύπο του συνόλου τύπων.

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο:

- ομοίως με τον ικανοποιήσιμο τύπο

ΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

Θα λέμε ότι ένα σύνολο τύπων T συνεπάγεται λογικά τον τύπο φ ή ότι ο φ είναι σημασιολογική συνέπεια του T και θα συμβολίζουμε με $\mathrm{T} \vDash \varphi$
αν και μόνο αν
Για όλες τις δομές και αποτιμήσεις που το σύνολο τύπων T είναι ικανοποιήσιμο, ικανοποιείται και ο τύπος φ

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει μια λογική συνεπαγωγή

Π.χ. Αν $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vDash \varphi$ αρκεί να δείξουμε ότι ο τύπος:
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \rightarrow \varphi$ είναι λογικά έγκυρος.

Για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μία λογική συνεπαγωγή:

- Επιλέγουμε μια δομή και μία αποτίμηση που κάνει τις υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.
- Διατυπώνουμε την ερμηνεία και μεταφράζουμε υποθέσεις και συμπέρασμα. Δείχνουμε ότι οι υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές.

ΛΟΓΙΚΑ ΕΓΚΥΡΟΣ ΤΥΠΟΣ

Ένας τύπος θα λέμε ότι είναι λογικά έγκυρος τύπος (ή λογικά αληθής τύπος), αν αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία και οποιαδήποτε αποτίμηση.
Θα συμβολίζουμε με $\vDash \varphi$ έναν λογικά έγκυρο τύπο.
Ένας λογικά έγκυρος τύπος είναι και τυπικό θεώρημα του κατηγορηματικού λογισμού

Για να αποδείξουμε ότι ένας τύπος είναι λογικά έγκυρος:

- Είτε δείχνουμε ότι είναι Σ.Α. σε νόμο προτασιακής ή κατηγορηματικής λογικής ή αξιωματικό σχήμα του ΠΛ.
- Είτε κάνουμε εφαρμογή του Tarski και αφού καταλήξουμε στην μετάφραση αποδεικνύουμε ότι αληθεύει σε κάθε δομή και σε κάθε αποτίμηση χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα.

Για να αποδείξουμε ότι ένας τύπος δεν είναι λογικά έγκυρος:

Δείχνουμε ότι υπάρχει δομή και αποτίμηση που κάνει τον τύπο ψευδή ως εξής: Διατυπώνουμε μια ερμηνεία (σύμπαν, κατηγορηματικά σύμβολα κ.λπ.), Μεταφράζουμε την πρόταση, Δείχνουμε ότι είναι ψευδής.

Ορισμός: Ορίζουμε τη γλώσσα των κατευθυνόμενων γραφημάτων να συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που περιλαμβάνουν τα εξής στοιχεία:

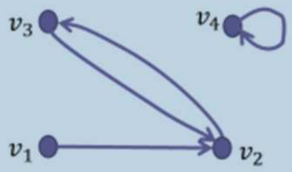
- Το σύμπαν είναι το σύνολο κορυφών $|A|=\{1,2,\dots,n\}$ (Γράφημα με n κορυφές)
- Το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) είναι αληθές αν υπάρχει η κατευθυνόμενη ακμή από το x στο y.

Παράδειγμα: Ερμηνείας- - Γραφήματος

$A = \{\ |A| = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$

$P^A = \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_2),(v_4,v_4)\}$

}



Συντομογραφίες στα κατευθυνόμενα γραφήματα:

- K(x) αληθεύει αν η x είναι απομονωμένη:
  $$K(x) \equiv \forall y[P(x,y) \vee P(y,x) \rightarrow x \approx y]$$
- $\mathrm{out}_0(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 0
  $$out_0(x) \equiv \forall y[\neg P(x,y)]$$
- $\mathrm{out}_{\geq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≥ 1
  $$\mathrm{out}_{\geq 1}(x) \equiv \exists y[P(x,y)]$$
- $\mathrm{out}_1(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 1
  $$\mathrm{out}_1(x) \equiv \exists y[P(x,y) \wedge \forall z(P(x,z) \rightarrow z \approx y)]$$
- $\mathrm{out}_{\leq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≤ 1
  $$\mathrm{out}_{\leq 1}(x) \equiv out_0(x) \vee \mathrm{out}_1(x)$$
- $\mathrm{out}_{\geq 2}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≥ 2
  $$\mathrm{out}_{\geq 2}(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z]$$
- $\mathrm{out}_2(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 2
  $$\mathrm{out}_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z \wedge \\ \wedge \forall w(P(x,w) \rightarrow w \approx y \vee w \approx z)]$$
- $\mathrm{out}_{\leq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≤ 1
  $$\mathrm{out}_{\leq 2}(x) \equiv out_0(x) \vee \mathrm{out}_1(x) \vee \mathrm{out}_2(x)$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά των ορισμάτων στο κατηγόρημα P(x,y) έχουμε συντομογραφίες για τον έσω βαθμό.

Παράδειγμα: Να ερμηνεύσετε τις προτάσεις σε φυσική γλώσσα:

	Τύπος	Μετάφραση
1	$\forall x P(x,x)$	Κάθε κορυφή έχει ανακύκλωση
2	$\exists x P(x,x)$	Υπάρχει κορυφή με ανακύκλωση
3	$\forall x \forall y P(x,y)$	Το γράφημα είναι πλήρες
4	$\exists x \exists y P(x,y)$	Το γράφημα έχει τουλάχιστον μία ακμή
5	$\forall x \exists y P(x,y)$	Κάθε κορυφή έχει έξω βαθμό τουλάχιστον 1
6	$\exists x \forall y P(x,y)$	Υπάρχει κορυφή με έξω βαθμό n [n: πλήθος κορυφών]
7	$\forall y \forall x P(x,y)$	(ίδιο με 3 από Νόμο Κατανομής Ποσοδεικτών)
8	$\exists y \exists x P(x,y)$	(ίδιο με 4 από Νόμο Κατανομής Ποσοδεικτών)
9	$\exists y \forall x P(x,y)$	Υπάρχει κορυφή με έσω βαθμό n [n: πλήθος κορυφών]
10	$\forall y \exists x P(x,y)$	Κάθε κορυφή έχει έσω βαθμό τουλάχιστον 1

Ορισμοί σε Κατευθυνόμενα Γραφήματα:

Ανακυκλώσεις (Είναι ακμές με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή)

Παράλληλες Ακμές (Είναι ακμές με κοινά άκρα και κοινή φορά)

Αντιπαράλληλες ακμές (Είναι ακμές με κοινά άκρα και αντίθετη φορά)

Μονοπάτι P μήκους n είναι μια ακολουθία n διαδοχικών ακμών (ακολουθώντας τις κατευθύνσεις τους)

Απλό μονοπάτι είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

Κύκλος είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή

Απλός Κύκλος είναι ένας κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

Έσω Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφη v_i

Έξω Βαθμός της κορυφής v_i είναι το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφη v_i

Απομονωμένη κορυφή είναι μία κορυφή στην οποία δεν εισέρχονται ούτε εξέρχονται ακμές από άλλες κορυφές.

Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΜΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

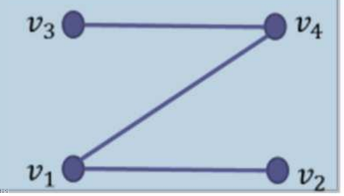
Ορισμός: Ορίζουμε τη γλώσσα των μη κατευθυνόμενων γραφημάτων να συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που περιλαμβάνουν τα εξής στοιχεία:

- Το σύμπαν είναι το σύνολο κορυφών |A|={1,2,…,n} (Γράφημα με n κορυφές)
- Το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) είναι αληθές αν υπάρχει η μη κατευθυνόμενη ακμή που συνδέει τις κορυφές x και y.

<u>Παράδειγμα: Ερμηνείας- - Γραφήματος</u>

$|A| = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$P^A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_4), (v_4, v_1)$, $(v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$



<u>Συντομογραφίες στα μη κατευθυνόμενα γραφήματα:</u>

- K(x) αληθεύει αν η x είναι απομονωμένη:
$$K(x) \equiv \forall y[\neg P(x,y)]$$
- $\deg_0(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 0
$$\deg_0(x) \equiv \forall y[\neg P(x,y)]$$
- $\deg_{\geq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό ≥ 1
$$\deg_{\geq 1}(x) \equiv \exists y[P(x,y)]$$
- $\deg_1(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 1
$$\deg_1(x) \equiv \exists y[P(x,y) \wedge \forall z(P(x,z) \rightarrow z \approx y)]$$
- $\deg_{\leq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό ≤ 1
$$\deg_{\leq 1}(x) \equiv out_0(x) \vee \deg_1(x)$$
- $\deg_{\geq 2}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό ≥ 2
$$\deg_{\geq 2}(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z]$$
- $\deg_2(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό 2
$$\deg_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z \wedge \wedge \forall w(P(x,w) \rightarrow w \approx y \vee w \approx z)]$$
- $\deg_{\leq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει βαθμό ≤ 1
$$\deg_{\leq 2}(x) \equiv \deg_0(x) \vee \deg_1(x) \vee \deg_2(x)$$

Παράδειγματα:

Υπάρχει μονοπάτι μήκους 2
$$\exists x \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(y,z)]$$

Υπάρχει απλό μονοπάτι μήκους 2
$$\exists x \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z]$$

Υπάρχει κύκλος μήκους 3
$$\exists x \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x)]$$

Υπάρχει απλός κύκλος μήκους 3
$$\exists x \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z]$$

Το γράφημα είναι πλήρες
$$\forall x \forall y[x \neq y \rightarrow P(x,y)]$$

Υπάρχει μοναδική απομονωμένη κορυφή
$$\exists x[K(x) \wedge \forall y(K(y) \rightarrow x \approx y)]$$

<u>**Ορισμοί σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα:**</u>

- <u>**Απλό Γράφημα:**</u> Γράφημα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές
- <u>**Πλήρες Γράφημα (ή Κλίκα):**</u> Απλό Γράφημα που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές.
- <u>**Μονοπάτι:**</u> είναι ακολουθία διαδοχικών μη κατευθυνόμενων ακμών
Απλό Μονοπάτι: Χωρίς επανάληψη κορυφών
- <u>**Κύκλος:**</u> είναι κλειστό μονοπάτι
Απλός Κύκλος: Χωρίς επανάληψη κορυφών
- <u>**Βαθμός Μιας Κορυφής:**</u> Πλήθος ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή.
- <u>**Απομονωμένη Κορυφή:**</u> Κορυφή η οποία δεν συνδέεται με άλλες κορυφές