Ο ΠΛ (προτασιακός λογισμός) είναι το αξιωματικό σύστημα που:

- Έχει ως **αξιώματα** (αξιωματικά σχήματα) τα: ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3.
- Και ως αποδεικτικό κανόνα τον **Modus Ponens** (M.P.)

Σε αυτό το αξιωματικό σύστημα μελετάμε αν ισχύουν:

- **Τυπική Συνεπαγωγή** $T \vdash \varphi$
  όταν ισχύουν οι υποθέσεις του T αν εξάγεται με διαδοχικές εφαρμογές του MP ο τύπος φ
- **Τυπικό Θεώρημα** $\vdash \varphi$
  δηλαδή αν εξάγεται ο τύπος φ με διαδοχικές εφαρμογές MP

Στις τυπικές αποδείξεις επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε:

1) ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ του συνόλου τύπων

2)ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ και Συντακτικές αντικ/σεις σε αυτα:

ΑΣ1: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

ΑΣ2: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

ΑΣ3: $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$

3) MODUS PONENS

Αν ισχύει Φ

Και ισχύει Φ→Ψ

Τότε ισχύει Ψ (από Modus Ponens)

4) ΤΥΠΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Έχουμε αποδείξεις για:

$\vdash \phi \rightarrow \phi$ $\quad \vdash \phi \rightarrow \neg\neg\phi$ $\quad \vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$

5) ΤΥΠΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ

Εφόσον δίνονται από την εκφώνηση

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\{\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \phi \rightarrow \psi\} \vdash \phi \rightarrow \chi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
2. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$ ΑΣ2
3. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)$ MP1,2
4. $\phi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
5. $\phi \rightarrow \chi$ MP4,3

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\neg\phi \vdash (\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\neg\phi$ Υπόθεση
2. $\neg\phi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ¬φ, ψ:¬ψ
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$ MP1,2
4. $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου φ: ψ, ψ:φ
5. $(\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$ MP3,4

ΤΥΠΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\vdash (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\phi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου ψ: χ
2. $(\phi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου ψ: χ
3. $(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ MP1,2