ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ28

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Οι ακέραιες λύσεις $x_i \geq 1, i = 1,\ldots,6$ της εξίσωσης $\sum_{i=1}^{6} x_i = 7$ είναι:

1. Όσες τα διαφορετικά αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών στο τάβλι

2. Όσες τα διαφορετικά αποτελέσματα της ρίψης ενός νομίσματος (κορώνα-γράμματα) 5 φορές όταν δεν παίζει ρόλο η σειρά των αποτελεσμάτων

3. 7

4. Όσες ο συντελεστής του x στη παράσταση $(1+x)^6$

(2) Δίνεται το πλήρες γράφημα K_{2n} με ετικέτες στις κορυφές του (δηλαδή θεωρούμε ότι όλες οι κορυφές του είναι διακεκριμένες):

1. Σε αυτό υπάρχουν $(2n)!$ απλά μονοπάτια μήκους $2n-1$

2. Σε αυτό υπάρχουν $(n!)^2$ απλά μονοπάτια μήκους $2n-1$

3. Το πλήθος των μονοπατιών μήκους 3 στο K_{2n} είναι $\binom{2n}{3}$

4. Ο αριθμός των κύκλων μήκους 3 στο K_{2n} είναι $\binom{2n}{3}$

(3)Στις παρακάτω προτάσεις αναφέρονται οι γεννήτριες συναρτήσεις απλών προβλημάτων απαρίθμησης.

1. Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των υποσυνόλων με n-k στοιχεία ενός n-μελους συνόλου

2. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση $(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των διατάξεων k αντικειμένων από n

3. Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των συνδυασμών k αντικειμένων από n

4. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση e^{nx} δίνει τον αριθμό των διατάξεων k αντικειμένων από n

(4) Έστω φ, ψ αυθαίρετα επιλεγμένοι τύποι. Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς;

1. $\varphi \lor \neg\varphi \models \neg(\varphi \to (\psi \to \varphi))$

2. $\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models \varphi \to \neg\varphi$

3. $\models \psi \to (\psi \to \psi)$

4. $\neg\varphi \models \varphi \to \neg\varphi$

(5) Ο τύπος $\exists x \forall y P(x,y)$:

1. Αληθεύει στο σύμπαν των φυσικών αριθμών όπου P(x,y) αληθεύει αν $x<y$

2. Αληθεύει στο σύμπαν των φυσικών αριθμών όπου P(x,y) αληθεύει αν x διαιρείται από το y

3. Αληθεύει στο σύμπαν των φυσικών αριθμών όπου P(x,y) αληθεύει αν x διαιρεί το y

4. Αληθεύει στο $K_{2,3}$ όπου το P(x,y) αληθεύει αν οι κορυφές x,y συνδέονται με ακμή.

(6) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Ο τύπος $\forall x \exists y [P(x,y) \land \forall z (P(x,z) \to z = y)]$ ικανοποιείται στα γραφήματα:

1. K_2

2. $K_{1,1}$

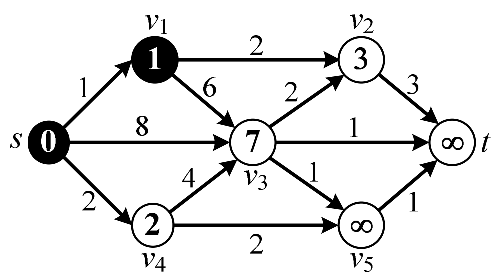
3. C_4

4. P_2

(7) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Δύο ισομορφικά γραφήματα έχουν ίσο πλήθος κορυφών.
2. Δύο ομοιομορφικά γραφήματα έχουν ίσο πλήθος κορυφών
3. Αν ένα γράφημα είναι επίπεδο τότε και το συμπλήρωμά του είναι επίπεδο.
4. Αν ένα γράφημα είναι συνδεόμενο, τότε και το συμπλήρωμα του είναι συνδεόμενο.

(8) Στο διπλανό σχήμα εικονίζονται οι ετικέτες των κορυφών (οι αριθμοί στους αντίστοιχους κύκλους) μετά τα πρώτα βήματα της εκτέλεσης του αλγόριθμου του Dijkstra για τον υπολογισμό του συντομότερου μονοπατιού από την κορυφή *s* στην κορυφή *t*. Σε αυτή τη φάση οι κορυφές *s* και v_1 (και μόνον αυτές) έχουν αποκτήσει μόνιμη ετικέτα και οι ετικέτες των γειτόνων τους έχουν ενημερωθεί. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με την εξέλιξη του αλγόριθμου είναι αληθείς και ποιες όχι;



1. Το συντομότερο μονοπάτι έχει βάρος 6
2. Η v_4 αποκτάει μόνιμη ετικέτα πριν από την v_2
3. Η μόνιμη ετικέτα της v_3 είναι 7.
4. Κάθε κορυφή αλλάζει ετικέτα το πολύ 1 φορά κατά την διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου.

(9) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα 10 κορυφών.

1. Αν το γράφημα είναι πλήρες, τότε έχει 36 ακμές.
2. Αν το γράφημα είναι 3-κανονικό, τότε 15 ακμές.
3. Το γράφημα μπορεί να είναι αυτοσυμλπηρωματικό.
4. Αν το γράφημα είναι δένδρο τότε έχει 9 ακμές.

Β'ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1

Σε μια συγκέντρωση παρευρίσκονται n άνδρες και n γυναίκες.

1. Πόσοι οι τρόποι να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, θεωρώντας ότι τα άτομα του ίδιου φύλου είναι διακεκριμένα.
2. Πόσοι οι τρόποι να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, θεωρώντας ότι τα άτομα του ίδιου φύλου είναι μη διακεκριμένα.
3. Πόσοι οι τρόποι να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, θεωρώντας ότι οι γυναίκες είναι διακεκριμένες και οι άνδρες είναι μη διακεκριμένοι.
4. Θεωρώντας ότι τα άτομα του ιδίου φύλου είναι διακεκριμένα, με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε τα άτομα σε n ομάδες των δύο ατόμων η κάθε μία.

Άσκηση 2

1. Δώστε τυπική απόδειξη της πρότασης:

$$\vdash (\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\chi)$$

μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε θεώρημα του προτασιακού λογισμού, αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας

2. Δίνεται η πρόταση $\varphi = \exists x \varphi_1(x) \wedge \forall x \varphi_2(x)$ όπου $\varphi_1(x) = \exists y P(x,y)$ και $\varphi_2(x) = \exists y[P(y,x) \wedge \forall w(P(w,x) \rightarrow w = y]$. Ερμηνεύουμε την πρόταση σε κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή το σύμπαν είναι οι κορυφές ενός γραφήματος και η ερμηνεία του κατηγορηματικού συμβόλου P είναι «Υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y».
   a. Εξετάστε σε ποια γραφήματα αληθεύει η πρόταση φ
   b. Δώστε μια δομή που επαληθεύει την πρόταση φ: (i) με δύο κορυφές, (ιι) με τέσσερις κορυφές

\

Άσκηση 3

Δείξτε ότι δεν υπάρχει απλό συνδεόμενο, μη κατευθυνόμενο γράφημα με 16 κορυφές που να είναι αυτοσυμπληρωματικό και επίπεδο.