

ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μάθημα 1.7: Πιθανότητες

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B.Θεωρία

1. Πιθανότητες

Γ.Θεωρία

1. Ζάρια

2. Κληρώσεις

Δ.Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης

2. Ερωτήσεις

3. Εφαρμογές



A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο A

- Οι πιθανότητες και η μοντελοποίηση τους μέσω της επίλυσης 2 συνδυαστικών προβλημάτων.
- Τα ζάρια και η διαχείρισή τους για τον υπολογισμό μιας πιθανότητας.

Επίπεδο B

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)



Β. Θεωρία Πιθανότητες

Ορισμός:

- Αν υπάρχουν n ισοπίθανα ενδεχόμενα (συνήθως διαφορετικοί τρόποι) να συμβεί ένα γεγονός, τότε η πιθανότητα να προκύψει ένα από αυτά είναι $1/n$

Συνεπώς για να μετρήσουμε την πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός:

1. Μετράμε όλα τα ισοπίθανα ενδεχόμενα, έστω ότι είναι n
2. Μετράμε τα ενδεχόμενα να συμβεί το γεγονός, έστω ότι είναι m

Τότε η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός είναι **$p=m/n$**

Ενώ στην συνήθη εκφώνηση «ποια η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός όταν ισχύει ένας περιορισμός»

1. Μετράμε τα ενδεχόμενα χωρίς τον περιορισμό, έστω ότι είναι n
2. Μετράμε τα ενδεχόμενα με τον περιορισμό, έστω ότι είναι m

Τότε η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός είναι **$p=m/n$**



Γ. Μεθοδολογία

1. Ζάρια

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Προσοχή στα ΖΑΡΙΑ:

- Γνωρίζουμε ότι τα διαφορετικά αποτελέσματα είναι 21 (ως Συνδυασμοί Με Επανάληψη). Ωστόσο αυτά δεν είναι ισοπίθανα ενδεχόμενα (Η ζαρία ασσόδυο μπορεί να έρθει με 2 τρόπους: 1-2 και 2-1, ενώ η ζαριά εξάρεις με ένα τρόπο: 6-6)
- Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα προκύπτουν από έναν απλό κανόνα γινομένου ως $6 \cdot 6 = 36$ (δηλαδή 6 επιλογές για το 1^ο ζάρι και 6 επιλογές για το 2^ο ζάρι)

Άρα γενικά όταν υπολογίζω πιθανότητα για ΖΑΡΙΑ πρέπει να δουλέψω με απλό κανόνα γινομένου, δηλαδή σαν τα ζάρια να είναι διακεκριμένα

Παράδειγμα: Ποια η πιθανότητα να φέρω διπλές?

ΛΥΣΗ: Η πιθανότητα είναι $6/36 = 1/6$

Παράδειγμα: Ποια η πιθανότητα να φέρω ασόδυο?

ΛΥΣΗ: Η πιθανότητα είναι $2/36 = 1/18$

Παράδειγμα: Ποια η πιθανότητα να φέρω τουλάχιστον έναν άσσο?

ΛΥΣΗ: Η πιθανότητα είναι $\frac{6 \cdot 6 - 5 \cdot 5}{36} = \frac{11}{36}$



Γ. Μεθοδολογία

2. Κληρώσεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Συνήθης άσκηση είναι να γίνεται κλήρωση αριθμού με επανατοποθέτηση

- Είναι σημαντικό ΠΑΝΤΑ να δουλεύουμε με απλό κανόνα γινομένου (με μία παύλα-θέση για κάθε κλήρωση):
 - Στον παρονομαστή όλοι οι τρόποι
 - Στον αριθμητή βάζω τους τρόπους που ικανοποιούν τον περιορισμό

Στο τελικό αποτέλεσμα ίσως να χρειαστεί κάποια απλή πράξη απλοποίησης των κλασμάτων.

Παράδειγμα: Γίνονται 2 κληρώσεις ενός αριθμού από το 1 έως το 10

A) Ποια η πιθανότητα να έρθει 5 στην 1^η κλήρωση και άρτιος στην 2^η κλήρωση

$$\frac{1 \cdot 5}{10 \cdot 10} = \frac{5}{100}$$

B) Ποια η πιθανότητα να μην έρθει 3 σε καμία κλήρωση:

$$\frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 10} = \frac{81}{100}$$



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε τα αποτελέσματα της ταυτόχρονης ρίψης δύο ίδιων ζαριών (ένα ζάρι μπορεί να φέρει 1, 2, 3, 4, 5, ή 6, όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων είναι 36 .
2. Η πιθανότητα τουλάχιστον ένα ζάρι να φέρει 1 είναι ίση με $11/36$.
3. Η πιθανότητα τα δύο ζάρια να φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα είναι ίση με $1/6$.
4. Η πιθανότητα κάποιο ζάρι να φέρει 5 και το άλλο ζάρι να φέρει 6 είναι ίση με $1/36$.



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 2

Τέσσερις αριθμοί από το 0 μέχρι το 9 κληρώνονται τυχαία (και ισοπίθانا) από τέσσερις διακεκριμένες κληρωτίδες. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων της κλήρωσης είναι ίσος με 4^{10} .
2. Υπάρχουν $10^4 - 9^4$ διαφορετικά αποτελέσματα όπου κληρώνεται τουλάχιστον ένα 0.
3. Υπάρχουν 9^4 διαφορετικά αποτελέσματα όπου δεν κληρώνεται κανένα 0.
4. Η πιθανότητα το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών να είναι ίσο με 1 είναι ίση με $4/10^4$.



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 3

Θεωρούμε δύο κληρώσεις ενός ακέραιου αριθμού από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός προκύπτει με πιθανότητα $1/10$ σε κάθε κλήρωση και τα αποτελέσματα των δύο κληρώσεων είναι ανεξάρτητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- 1. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός και στις δύο κληρώσεις είναι $1/4$.**
- 2. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι άρτιος αριθμός σε τουλάχιστον μία από τις δύο κληρώσεις είναι $3/4$.**
- 3. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 10 και στις δύο κληρώσεις είναι $1/100$.**
4. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 10 σε τουλάχιστον μία από τις δύο κληρώσεις είναι $19/100$.