ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-5

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………………

Ημερομηνία: ………………………………………………………………………

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ (30% του βαθμού)

(1) 6 ζευγάρια συναντούνται σε ένα σπίτι και ανταλλάσουν χειραψίες. Κάθε άτομο δεν ανταλλάσει χειραψία με οποιοδήποτε άλλο περισσότερες από μία φορές.

1. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών είναι 120.
2. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών ανάμεσα σε άτομα διαφορετικού φύλου είναι 36.
3. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών ανάμεσα σε άτομα ίδιου φύλου είναι ίσο με τον αριθμό των υποσυνόλων που αποτελούνται από 2 ή 4 στοιχεία, τα οποία επιλέγονται από ένα σύνολο που αποτελείται από 6 διακεκριμένα στοιχεία.
4. Το μέγιστο δυνατό πλήθος χειραψιών στις οποίες μετέχουν 4 άτομα είναι 38.

(2) Έστω Α σύνολο με n στοιχεία

1. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α είναι ίσος με n^2
2. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με *k* στοιχεία είναι ίσος με το συντελεστή του x^{n-k} στην παράσταση $(1+x)^n$
3. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α με *k* στοιχεία είναι ίσος με τους συνδυασμούς *k* στοιχείων από *n*-*k*+1 στοιχεία με επανάληψη.
4. Ο αριθμός των υποσυνόλων του Α είναι ίσος με το άθροισμα όλων των συντελεστών του πολυωνύμου $(1+x)^n$

(3) Ένα Σούπερ-μάρκετ προμηθεύεται σε καθημερινή βάση 2000 λίτρα γάλακτος σε συσκευασίες του ενός λίτρου και των δύο λίτρων. Από αυτές τουλάχιστον 100 είναι συσκευασίες του ενός λίτρου και τουλάχιστον 100 συσκευασίες των δύο λίτρων. Οι διαφορετικοί τρόποι προμήθειας της συγκεκριμένης ποσότητας των 2000 λίτρων δίνονται:

1. Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+\ldots\right)\left(x^{200}+x^{201}+x^{202}+\ldots\right)$
2. Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+\ldots\right)\left(x^{200}+x^{202}+x^{204}+\ldots\right)$
3. Από το συντελεστή του όρου x^{1700} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(1+x+x^2+\ldots\right)\left(1+x^2+x^4+x^6+\ldots\right)$
4. Από το συντελεστή του όρου x^{2000} στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+\ldots+x^{1800}\right)\left(x^{200}+x^{202}+x^{204}+\ldots x^{1800}\right)$

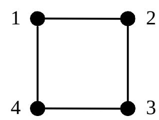
(4) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. $\varphi \wedge \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.
2. $\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\varphi$.
3. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία.
4. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ είναι αντίφαση.

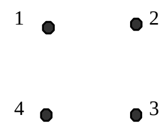
(5) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές και ποιες όχι:

1. Το $\psi \vdash (\varphi \to \chi) \to \theta$, προκύπτει από το $\{\psi, \varphi, \chi)\} \vdash \theta$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
2. Το $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg\neg\psi$, προκύπτει από το $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
3. Το $\varphi \vdash \psi \to \neg\chi$, προκύπτει από το $\{\psi, \chi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
4. Το $\varphi \vdash \neg\psi \to \chi$, προκύπτει από το $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.

(6) Δίνονται τα γραφήματα



Γράφημα Α



Γράφημα Β

Οι παρακάτω δομές ικανοποιούν την πρόταση $\forall x \forall y[P(x, y) \to \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))]$

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ με το $P(x, y)$ να σημαίνει ότι $x \leq y$.
2. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών Z με το $P(x,y)$ να σημαίνει ότι τα x και y είναι αντίθετοι αριθμοί (δηλ.ότι $x + y = 0$).
3. Το γράφημα Α με το $P(x, y)$ να σημαίνει ότι τα x και y συνδέονται με ακμή.
4. Το γράφημα Β που αποτελείται από *4* απομονωμένες κορυφές με το $P(x, y)$ να σημαίνει ότι τα x και y συνδέονται με ακμή.

(7) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν την επιπεδότητα αληθεύουν;

1. Κάθε απλό επίπεδο γράφημα περιέχει αναγκαστικά μια τουλάχιστον κορυφή βαθμού μικρότερου ή ίσου του 5.
2. Όλες οι αποτυπώσεις επίπεδου γραφήματος έχουν ίδιο αριθμό όψεων.
3. Ένα μη επίπεδο γράφημα περιέχει σαν υπογράφημα το K_5 ή/και το $K_{3,3}$.
4. Ένα γράφημα που δεν έχει κύκλο Hamilton είναι αναγκαστικά μη επίπεδο

(8) *Έστω Α ο πίνακας γειτνίασης και Π ο πίνακας πρόσπτωσης ενός μη κατευθυντικού (μη κατευθυνόμενου) απλού γραφήματος.*

1. Το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης γραμμής του Α είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης στήλης
2. Ο αριθμός των άσσων του Α είναι άρτιος.
3. Δύο ισόμορφα γραφήματα έχουν ίσους πίνακες γειτνίασης.
4. Είναι δυνατόν να υπάρχει στήλη στον Π μόνο με άσσους.

(9) Τα παρακάτω (απλά μη κατευθυνόμενα) γραφήματα είναι δυνατόν να κατασκευασθούν:

1. Διχρωματίσιμο γράφημα με 6 κορυφές και 9 ακμές
2. Επίπεδο γράφημα με 6 κορυφές και 14 ακμές
3. Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 11 κορυφές
4. Επίπεδο και διχοτομίσιμο γράφημα με 8 κορυφές και 15 ακμές.

(10) Έστω G και H απλά μη κατευθυντικά γραφήματα που είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Αν το G είναι επίπεδο γράφημα, πρέπει και το H να είναι επίπεδο γράφημα.
2. Αν το G είναι δέντρο, πρέπει και το H να είναι δένδρο.
3. Αν τα G,H είναι επίπεδα γραφήματα τότε πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος όψεων.
4. Αν τα G,H έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών πρέπει να είναι ισομορφικά μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

Μελετάται η κατασκευή ενός πρότυπου οικισμού που αποτελείται από 9 κατοικίες τύπου X και 9 κατοικίες τύπου Y. Οι δύο τύποι κατοικιών θεωρούνται διακεκριμένοι

A) Έστω ότι οι κατοικίες κάθε τύπου είναι διακεκριμένες.

i) Με πόσους τρόπους μπορεί ένας υποψήφιος αγοραστής να επιλέξει μια κατοικία που μπορεί να είναι είτε τύπου X είτε τύπου Y;

ii) Με πόσους τρόπους μπορεί ό υποψήφιος αγοραστής να επιλέξει τρεις κατοικίες από τις οποίες μία τουλάχιστον να είναι τύπου X;

iii) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχεδιαστεί ο οικισμός αν ανά τρεις οι κατοικίες κάθε τύπου έχουν κοινή αυλή και δεν παίζει ρόλο η σχετική θέση των κατοικιών που μοιράζονται την ίδια αυλή και η σχετική θέση των τριάδων κατοικιών στον οικισμό;

iv) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχεδιαστεί ο οικισμός αν κάθε κατοικία τύπου X έχει κοινή αυλή με μια ακριβώς κατοικία τύπου Y και δεν παίζει ρόλο η σχετική θέση των κατοικιών που μοιράζονται την ίδια αυλή και η σχετική θέση των κατοικιών με κοινή αυλή στον οικισμό;

B) Έστω ότι οι κατοικίες κάθε τύπου δεν είναι διακεκριμένες. Οι κατοικίες τύπου X κοστίζουν 100.000€ και οι κατοικίες τύπου Y κοστίζουν 200.000€. Μια εταιρία επενδύσεων έχει στη διάθεσή της 2.000.000€. Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε το συντελεστή του όρου που δίνει τον πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επενδυθεί **το συνολικό ή μέρος του ποσού** των 2.000.000€, αν αγοραστούν τουλάχιστον μια κατοικία τύπου X και το πολύ 7 κατοικίες τύπου Y. Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή.

Άσκηση 2 (Μονάδες 35)

α) Δίδεται ο προτασιακός τύπος $\varphi = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{n-1} \to p_n$ ορισμένος σε n προτασιακές μεταβλητές. Έστω α_1 και α_2 δύο αποτιμήσεις των n μεταβλητών $p_1, p_2, \ldots, p_n$ που ικανοποιούν τον φ. Δείξτε ότι ο φ ικανοποιείται επίσης και από την αποτίμηση α η οποία αποδίδει στην μεταβλητή $p_i, i = 1, \ldots, n$, την σύζευξη των τιμών που αποδίδουν στην p_i οι α_1 και α_2.

β) Δώστε τυπική απόδειξη του τύπου $\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Δείξτε ότι η κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου δεν είναι μοναδική.

Υπόδειξη: Εξετάστε τον τύπο $\forall$x P(x)$\to\forall$y Q(y) .

δ) Έστω L μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος P κι ένα σύμβολο σταθεράς c.

(1) Περιγράψτε μια ερμηνεία της γλώσσας που να ικανοποιεί και τις δύο προτάσεις $\exists x \exists y (P(x,c) \wedge P(c,y))$ και $\forall x (P(x,c) \to \exists y (P(x,y) \wedge P(y,c)))$

(2) Εξετάστε αν οι δυο παραπάνω προτάσεις αληθεύουν στο τροχό W_n .
(Ο τροχός W_n είναι το γράφημα με n+1 κορυφές 1,2,3,…,n+1 και με ακμές {1,2}, {2,3},…,{n-1,n}, {n,1}, {n+1,1}, {n+1,2},…, {n+1,n} όπου γράφοντας {α,β} ή {β,α} θεωρούμε ότι υπάρχει η ακμή (α,β)).

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

k-κανονικό γράφημα είναι ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που όλες οι κορυφές έχουν βαθμό k.

α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλό 5-κανονικό γράφημα με $2m+1$ κορυφές, για κάθε $m \geq 3$.

β) Θεωρήστε ένα απλό 5-κανονικό γράφημα με τριάντα (30) ακμές. Αν το γράφημα αυτό είναι συνδεδεμένο και επίπεδο, ποιος ο αριθμός των όψεών του;

γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλό 5-κανονικό γράφημα με διάμετρο ένα (1) που να είναι επίπεδο.

Ορισμός: Διάμετρος ενός γραφήματος ορίζεται η ποσότητα $\max\{d(u,v) \mid u,v \in V\}$, *όπου* $d(u,v)$ *είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από την κορυφή u στην κορυφή v.*

Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

Για ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G=(V,E) με m ακμές και n κορυφές συμβολίζουμε με Δ τον μέγιστο βαθμό των κορυφών του G και δ τον ελάχιστο βαθμό των κορυφών του G.

(α) Κατασκευάστε γράφημα 10 κορυφών για το οποίο να ισχύει $\delta=\Delta=5$

(β) Κατασκευάστε γράφημα 9 κορυφών για το οποίο να ισχύει $\delta>2$, $\Delta<7$ και $\delta=\Delta/2$.

(γ) Να δειχθεί ότι $\delta \leq 2m/n \leq \Delta$