

Το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

Έστω L μια άπειρη γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $s \in L$ με $|s| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwx$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v, w, x και y ισχύει:

- $|vwx| \leq n$
- $|vx| > 0$
- $uv^mwx^my \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

- (1) Επιλέγουμε μια **συμβολοσειρά** s που ανήκει στην γλώσσα που
- (α) όλα τα σύμβολα είναι υψωμένα τουλάχιστον στην p
 - (β) ανήκει οριακά στην γλώσσα

- (2) Υπολογίζουμε το μήκος της συμβολοσειράς που επιλέξαμε στο (1)

$$L_1 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\} - \text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}$$

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^p 2^p$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $3p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwx$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.

Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v, x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v, x :

1. Να περιέχουν μόνο 0. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά άρα π.χ. τα 0 δεν είναι ίσα με τα 1
2. Να περιέχουν 0 και 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι άρα π.χ. τα 0 δεν είναι ίσα με τα 2
3. Να περιέχουν μόνο 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι άρα π.χ. τα 1 δεν είναι ίσα με τα 2
4. Να περιέχουν 1 και 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι και δυάρια άρα π.χ. τα 2 δεν είναι ίσα με τα 0
5. Να περιέχουν μόνο 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται δυάρια άρα π.χ. τα 2 δεν είναι ίσα με τα 0.

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

- (3) Εντοπίζουμε περιπτώσεις ανάλογα με το που περιέχεται το vwx δεδομένου ότι έχει μήκος το πολύ p . Χρήσιμο θα φανεί να κάνουμε ένα βοηθητικό σχήμα (βλέπε δεξιά)

$$s = \overbrace{00 \dots 00}^p \overbrace{11 \dots 11}^p \overbrace{22 \dots 22}^p$$