ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΔΕΝΔΡΑ

Μάθημα 6.3:
Δυαδικά Δένδρα

Δημήτρης Ψούνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Νέοι Ορισμοί (Δυαδικά Δένδρα, Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

Β. Θεωρία

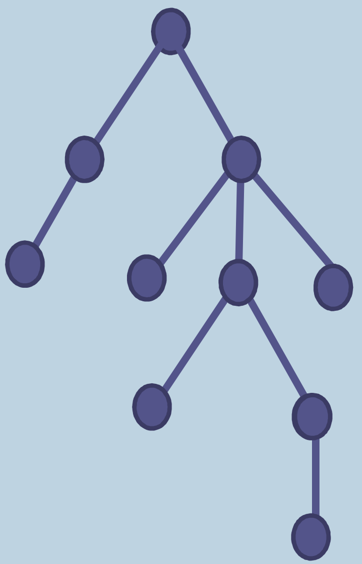
1. Δυαδικά Δένδρα

1. Ορισμοί Δυαδικών Δένδρων

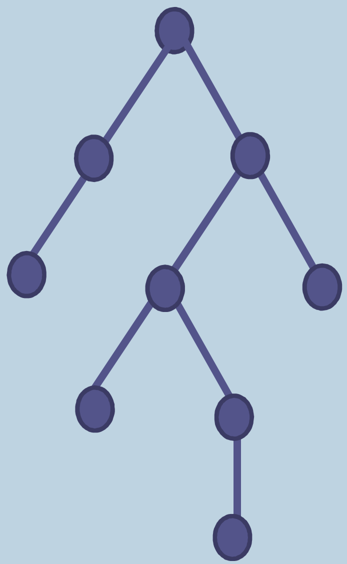
Ορισμός:

- Το **m-αδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει το πολύ m παιδιά
- Το **δυαδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει το πολύ 2 παιδιά
- Το **πλήρες δυαδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει 0 ή 2 παιδιά
- Το **πλήρες ισοζυγισμένο δυαδικό δένδρο** είναι πλήρες δυαδικό δένδρο και όλα τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο του δένδρου.

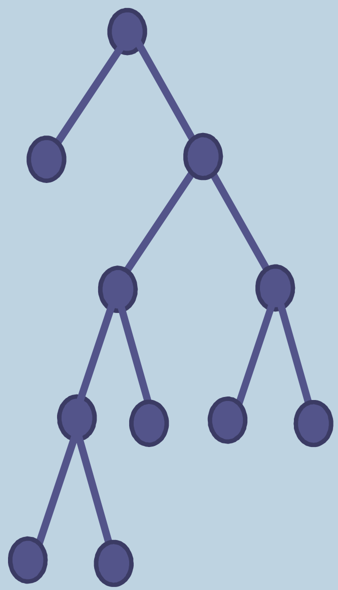
Παραδείγματα:



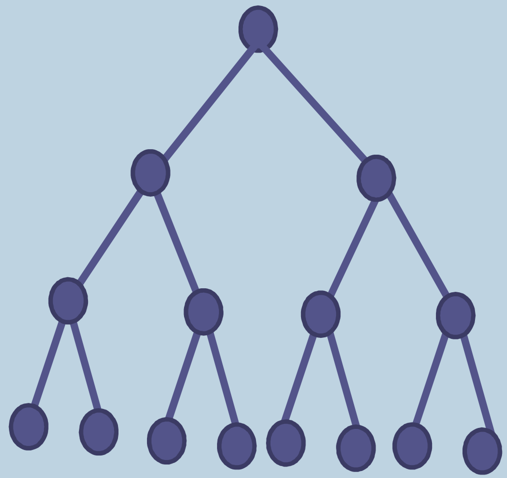
3-αδικό δένδρο



2-αδικό δένδρο



Πλήρες Δ.Δ.



Πλήρες Ισοζυγι-
σμένο Δ.Δ.

Β. Θεωρία

1. Δυαδικά Δένδρα

2. Λήμματα στα Δυαδικά Δένδρα

Λήμμα 1:

- Ένα πλήρες ισοζυγισμένο δυαδικό δένδρο με ύψος Η έχει συνολικά $2^{H+1}-1$ κορυφές όπου:
  - οι 2^H είναι φύλλα και
  - οι 2^H-1 είναι εσωτερικές κορυφές

Απόδειξη: Καταμετράμε τις κορυφές σε κάθε επίπεδο του δένδρου:

- Στο επίπεδο 0 έχουμε 2^0 κορυφές
- Στο επίπεδο 1 έχουμε 2^1 κορυφές
- …
- Στο επίπεδο Η έχουμε 2^H κορυφές (φύλλα)

Συνεπώς συνολικά οι κορυφές είναι:

$$2^0+2^1+\cdots+2^H=\frac{2^{H+1}-1}{2-1}=2^{H+1}-1$$

Από τον τύπο n=ε+φ έχουμε ότι οι εσωτερικές κορυφές είναι:

$$\varepsilon=n-\varphi=2^{H+1}-1-2^H=2\cdot 2^H-1-2^H=2^H-1$$

Β. Θεωρία

1. Δυαδικά Δένδρα

2. Λήμματα στα Δυαδικά Δένδρα

Λήμμα 2:

- Σε ένα πλήρες δυαδικό ισοζυγισμένο δένδρο ύψους H ισχύει $H = log_2 t$ (όπου t τα φύλλα του δένδρου)

Απόδειξη: Από το προηγούμενο λήμμα στο επίπεδο H έχουμε 2^H φύλλα, άρα:

$$t = 2^H \Longrightarrow log_2 t = log_2 2^H \Longrightarrow H = log_2 t$$

Πόρισμα:

- Σε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους H ισχύει $H \geq log_2 t$ (όπου t τα φύλλα του δένδρου)

Απόδειξη: Σε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο τα φύλλα του επιπέδου H έχουμε το πολύ 2^H φύλλα, άρα

$$t \leq 2^H \Longrightarrow log_2 t \leq log_2 2^H \Longrightarrow log_2 t \leq H \Longrightarrow H \geq log_2 t$$

Β. Θεωρία

1. Δυαδικά Δένδρα

2. Λήμματα στα Δυαδικά Δένδρα

Λήμμα 3:

- Σε ένα πλήρες Δ.Δ. με n κορυφές και ύψος Η. Ισχύει $\mathrm{n} \leq 2^{H+1} - 1$

Απόδειξη: Το πλήρες ισοζυγισμένο Δ.Δ. έχει $2^{H+1} - 1$ κορυφές (από λήμμα 1). Οποιοδήποτε πλήρες Δ.Δ. με ύψος Η θα έχει το πολύ τόσες κορυφές

Λήμμα 4:

- Αν ένα πλήρες Δ.Δ. έχει k εσωτερικές κορυφές, τότε έχει $2k + 1$ κορυφές.

Απόδειξη:

- Κάθε εσωτερική κορυφή έχει 2 παιδιά,
    - άρα οι k εσωτερικές κορυφές έχουν $2k$ παιδιά.
- Επειδή κάθε κορυφή του δένδρου είναι παιδί ακριβώς μίας εσωτερικής κορυφής (εκτός της ρίζας), θα υπάρχουν $2k + 1$ κορυφές στο δένδρο.

Λήμμα 5:

- Αν ένα πλήρες Δ.Δ. έχει k εσωτερικές κορυφές, τότε έχει $k + 1$ φύλλα.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του (4) διότι οι κορυφές είναι $2k + 1$ και οι εσωτερικές κορυφές είναι k. Άρα τα φύλλα είναι $\varphi = n - \varepsilon$ άρα $\varphi = (2k + 1) - k = k + 1$

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

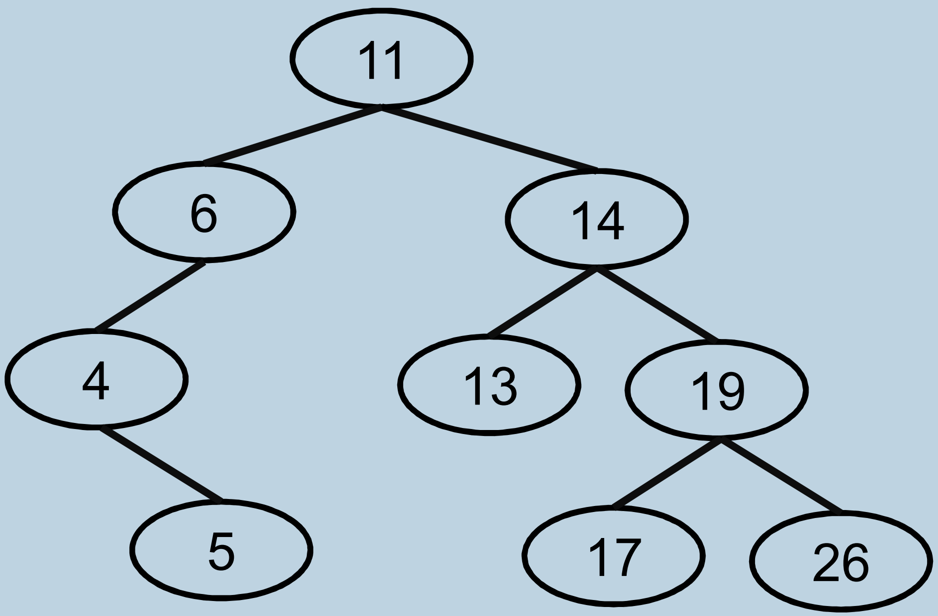
1. Ορισμός Δυαδικού Δένδρου Αναζήτησης

Ορισμός: Ένα **Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης** είναι ένα Δυαδικό Δένδρο που σε κάθε κορυφή του έχει αποθηκευτεί μια πληροφορία με την ιδιότητα:

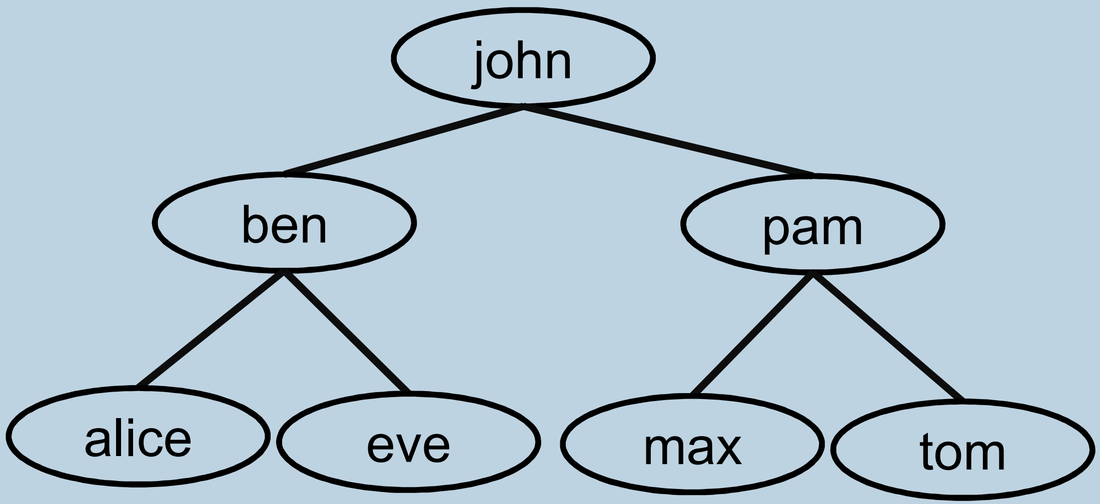
- Στις κορυφές του αριστερού του υποδένδρου έχουν αποθηκευτεί τιμές «μικρότερες» της ρίζας.
- Στις κορυφές του δεξιού του υποδένδρου έχουν αποθηκευτεί τιμές «μεγαλύτερες» της ρίζας.

Η ίδια ιδιότητα ισχύει σε οποιοδήποτε υποδένδρο του δυαδικού δένδρου αναζήτησης

Παραδείγματα Δυαδικών Δένδρων Αναζήτησης:



ΔΔΑ που αποθηκεύει αριθμούς



ΔΔΑ που αποθηκεύει συμβολοσειρές

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

1. Ορισμός Δυαδικού Δένδρου Αναζήτησης

Τα δυαδικά δένδρα αναζήτησης χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση δεδομένων διότι επιτρέπουν την εύκολη ανάκτηση της πληροφορίας.

Στα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης θα πρέπει να γνωρίζουμε:

- Τον Αλγόριθμο Κατασκευής ενός Δ.Δ.Α.
- Τον Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός στοιχείου σε ένα Δ.Δ.Α.
- Τους αλγόριθμους διάσχισης ενός Δ.Δ.Α:
    - Τον αλγόριθμο Ενδοδιατεταγμένης Διάσχισης
    - Τον αλγόριθμο Προδιατεταγμένης Διάσχισης
    - Τον αλγόριθμο Μεταδιατεταγμένης Διάσχισης

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

2. Αλγόριθμος Κατασκευής Δ.Δ.Α. (1. Ψευδοκώδικας)

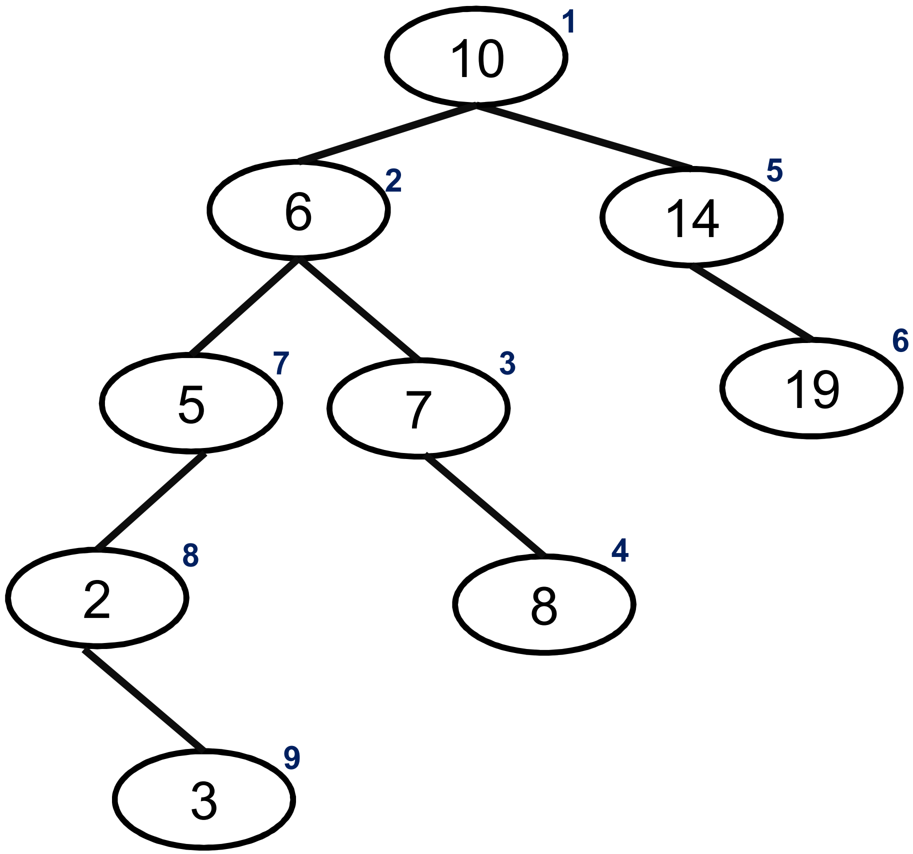
```
-------------------------------------------------------------
Αλγόριθμος Κατασκευής Δ.Δ.Α.
Είσοδος: Ακολουθία Δεδομένων d1,d2,…,dn
Έξοδος: Το Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης T που έχει αποθηκεύσει τα δεδομένα
-------------------------------------------------------------
procedure DDA_Construction(d)
   Θέσε d1 ως ρίζα του δένδρου T
   Για i=2 εως n
      Θέσε p=ρίζα του δένδρου
E:    Αν di<p
          Αν p δεν έχει αριστερό παιδί:
             Κατασκεύασε αριστερό παιδί της p με δεδομένο di
          Αλλιώς
             Θέσε p=αριστερό παιδί της p. Πηγαινε στο (E)
      Αλλιώς
          Αν p δεν έχει δεξί παιδί:
             Κατασκεύασε δεξί παιδί της p με δεδομένο di
          Αλλιώς
             Θέσε p=δεξί παιδί της p. Πήγαινε στο (E)
  Τέλος-Επανάληψης
  Επέστρεψε το T
end procedure
```

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

2. Αλγόριθμος Κατασκευής Δ.Δ.Α. (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

- Παράδειγμα Εκτέλεσης με ακολουθία εισόδου: 10, 6, 7, 8, 14, 19, 5, 2, 3



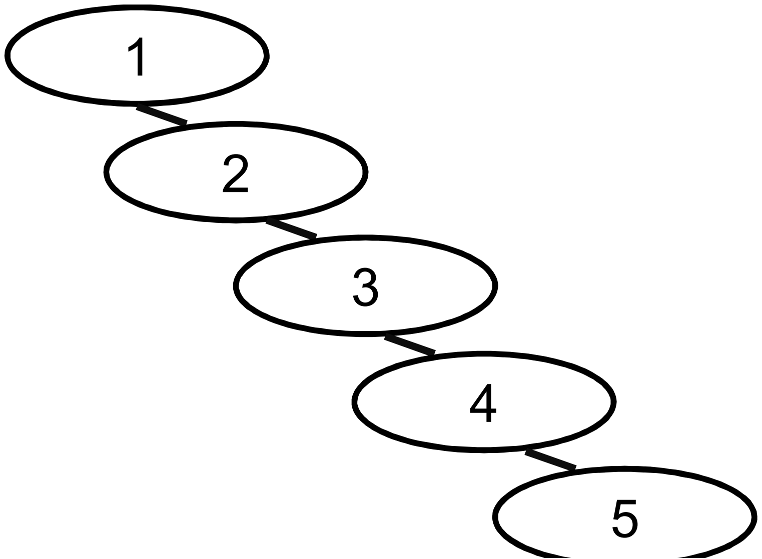
- Με τον αριθμό δίπλα σε κάθε κόμβο σημειώνουμε την σειρά τοποθέτησης των κόμβων στο δένδρο με βάση τον αλγόριθμο.

Β. Θεωρία
2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης
2. Αλγόριθμος Κατασκευής Δ.Δ.Α. (3. Παρατηρήσεις)

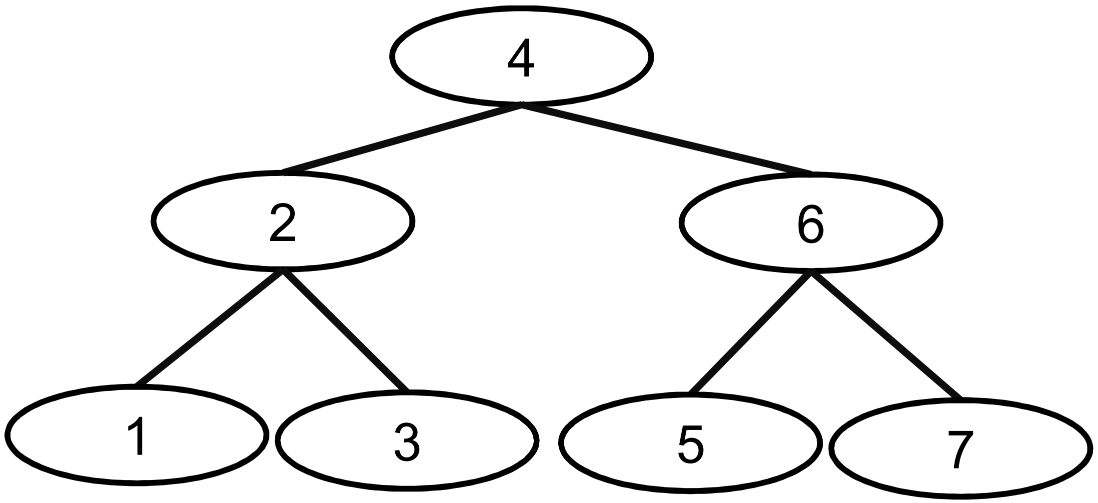
Παρατηρήσεις για τον αλγόριθμο κατασκευής Δ.Δ.Α.:

- Αν τα δεδομένα έρθουν ήδη ταξινομημένα, τότε ο αλγόριθμος θα κατασκευάσει ένα Δ.Δ.Α. που θα είναι εκφυλισμένο σε μια αλυσίδα.
- Στην καλύτερη περίπτωση θα κατασκευαστεί πλήρως ισοζυγισμένο δυαδικό δένδρο αναζήτησς. Αυτό βέβαια είναι σπάνια περίπτωση και γενικά όσο πιο ισοζυγισμένο είναι το δένδρο, τόσο πιο γρήγορα μπορούμε να αναζητήσουμε δεδομένα σε αυτό.

Σειρά Εισαγωγής: 1,2,3,4,5



Σειρά Εισαγωγής: 4,2,6,1,3,5,7



Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

3. Αλγόριθμος Αναζήτησης σε Δ.Δ.Α. (1. Ψευδοκώδικας)

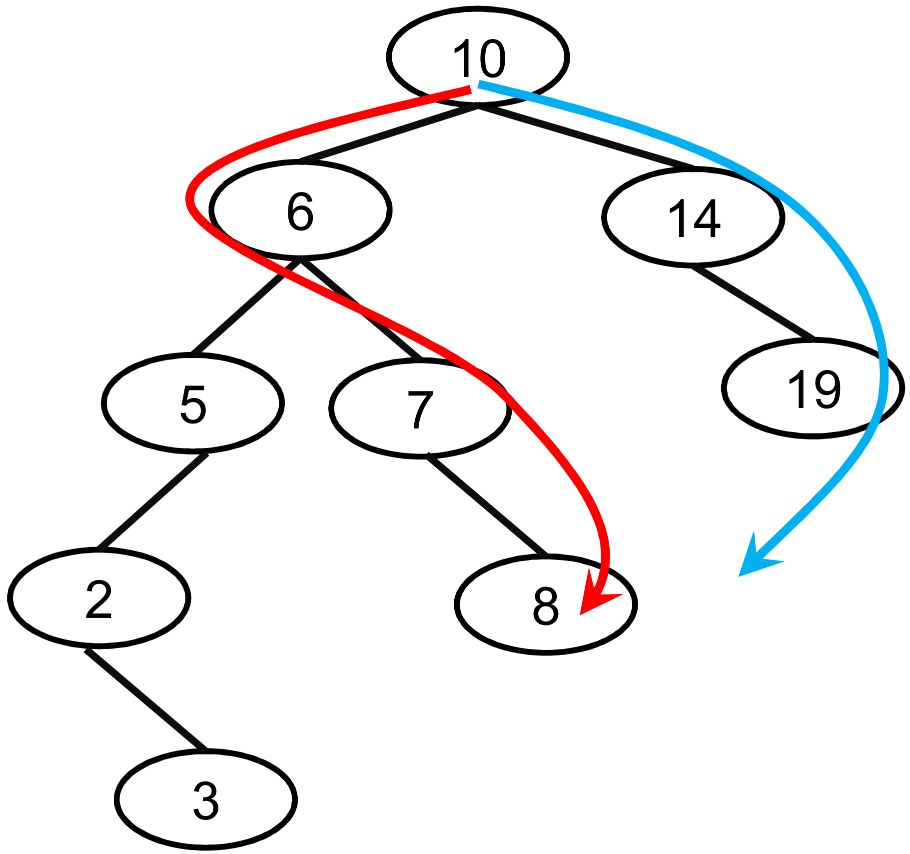
```
------------------------------------------------------------
Αλγόριθμος Αναζήτησης σε Δ.Δ.Α.
Είσοδος: Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης T, δεδομένο d
Έξοδος: ΝΑΙ/ΌΧΙ ανάλογα αν το δεδομένο d ανήκει στο T
------------------------------------------------------------
procedure DDA_Search(T,d)
  Θέσε p = ρίζα του δένδρου
  Επανέλαβε όσο  p ≠ ΚΕΝΟ
     Αν (p = d)
          Επέστρεψε ΝΑΙ
     Αλλιώς αν (d > p)
          Θέσε p=δεξί παιδί της p.
     Αλλιώς αν (d < p)
          Θέσε p=αριστερό παιδί της p.
  Τέλος-Επανάληψης
  Επέστρεψε ΟΧΙ
end procedure
```

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

3. Αλγόριθμος Αναζήτησης σε Δ.Δ.Α. (2. Παράδειγμα Εκτέλεσης)

- Παράδειγμα Αναζήτησης του δεδομένου 8 (κόκκινο χρώμα) και του 17 (μπλέ χρώμα)



- Αναζήτηση του 8: 10(αριστερά), 6(δεξιά), 7(δεξιά), 8 (βρέθηκε). Απάντηση: ΝΑΙ
- Αναζήτηση του 17: 10(δεξιά), 14 (δεξιά), 19(αριστερά). ΚΕΝΟ. Απάντηση: ΟΧΙ

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

3. Αλγόριθμος Αναζήτησης σε Δ.Δ.Α. (3. Παρατηρήσεις)

Παρατηρήσεις για τον αλγόριθμο αναζήτησης σε Δ.Δ.Α.:

- Θα χρειαστούν το πολύ Η (ύψος ΔΔΑ) βήματα για να αναζητηθεί ένα δεδομένο στο δένδρο. Αν n το πλήθος των δεδομένων του δένδρου:
    - Καλύτερη περίπτωση αν το δένδρο είναι πλήρως ισοζυγισμένο, οπότε θα χρειαστούν το πολύ περίπου logn βήματα.
    - Χειρότερη περίπτωση αν το δένδρο είναι εκφυλισμένο σε αλυσίδα, οπότε θα χρειαστούν το πολύ n βήματα.

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α

Οι διασχίσεις είναι μεθοδολογίες για να επισκεφθούμε όλες τις κορυφές ενός Δ.Δ.Α.:

- Εξετάζουμε:
    - Την προδιατεταγμένη διάσχιση. Που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:
        - Τρέχουσα Κορυφή
        - Αριστερό Υποδένδρο
        - Δεξί Υποδένδρο
    - Την ενδοδιατεταγμένη διάσχιση. Που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:
        - Αριστερό Υποδένδρο
        - Τρέχουσα Κορυφή
        - Δεξί Υποδένδρο
    - Την μεταδιατεταγμένη διάσχιση. Που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:
        - Αριστερό Υποδένδρο
        - Δεξί Υποδένδρο
        - Τρέχουσα Κορυφή

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (1. Προδιατεταγμένη)

Είναι αναδρομικός αλγόριθμος που καλείται με όρισμα την ρίζα την Δ.Δ.Α.:

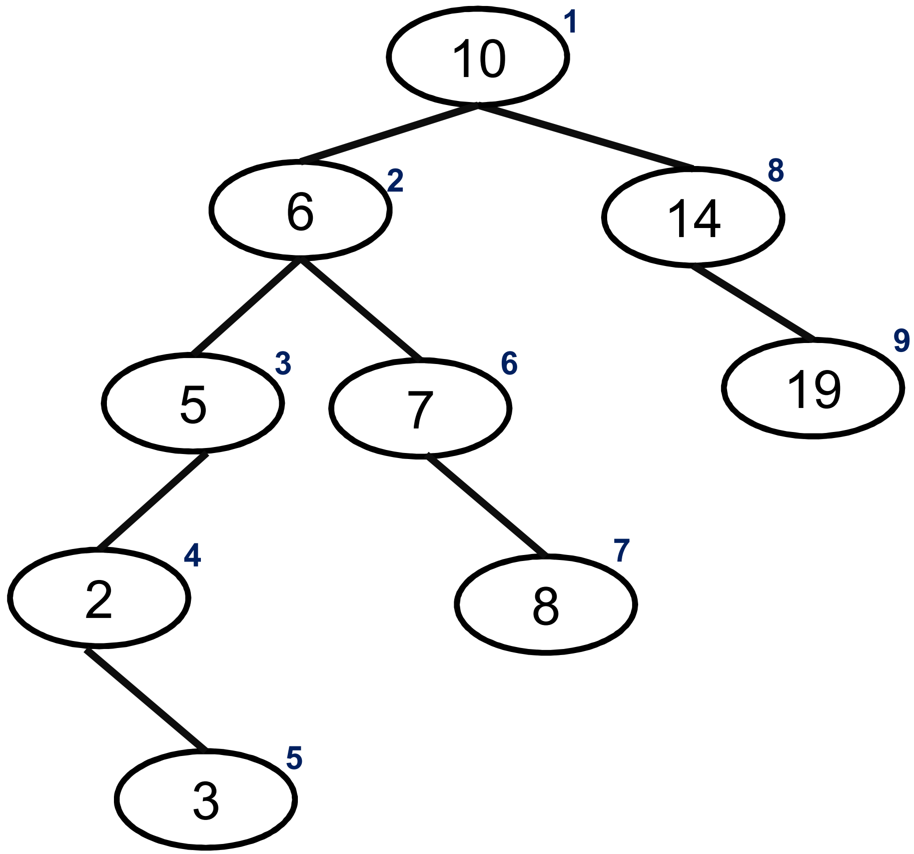
```
---------------------------------------------------------------
Αλγόριθμος Προδιατεταγμένης Διαδρομής (PRE-ORDER)
Είσοδος: Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης Τ
Έξοδος: Προδιατεταγμένη Διάσχιση των Κορυφών του Τ
---------------------------------------------------------------
procedure PRE-ORDER(v)
  Αν (v≠KENO)
     Εκτύπωση του v
     PRE-ORDER(Αριστερό Παιδί της v)
     PRE-ORDER(Δεξί Παιδί της v)
  Τέλος-Αν
end procedure
```

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (1. Προδιατεταγμένη)

- Παράδειγμα Εκτέλεσης της Προδιατεταγμένης Διαδρομής



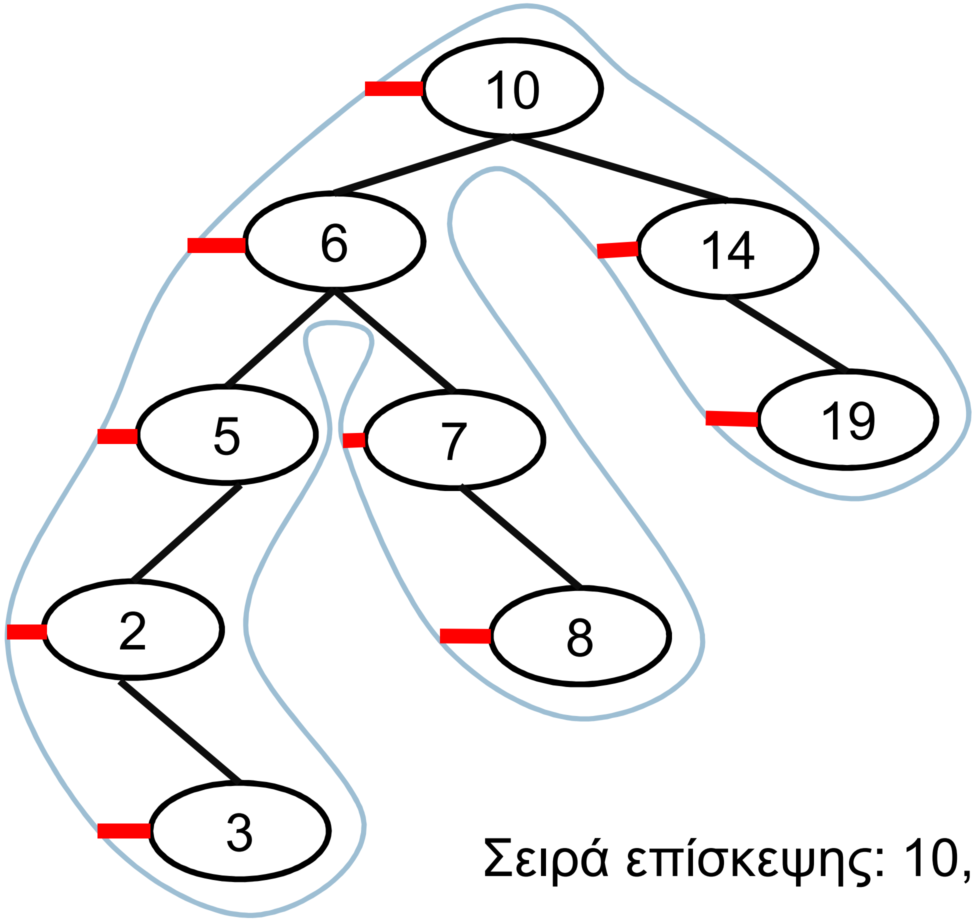
- Παράγεται η ακολουθία (σειρά επίσκεψης): 10,6,5,2,3,7,8,14,19

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (1. Προδιατεταγμένη)

- Εμπειρικός Τρόπος (Κατασκευάζω το περίγραμμα και τραβάω γραμμή **αριστερά** από κάθε κόμβο. Έπειτα σαρώνω το περίγραμμα αριστερόστροφα από τη ρίζα και όπου συναντάω γραμμή καταγράφω τον κόμβο)



Σειρά επίσκεψης: 10,6,5,2,3,7,8,14,19

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (2. Ενδοδιατεταγμένη)

Είναι αναδρομικός αλγόριθμος που καλείται με όρισμα την ρίζα την Δ.Δ.Α.:

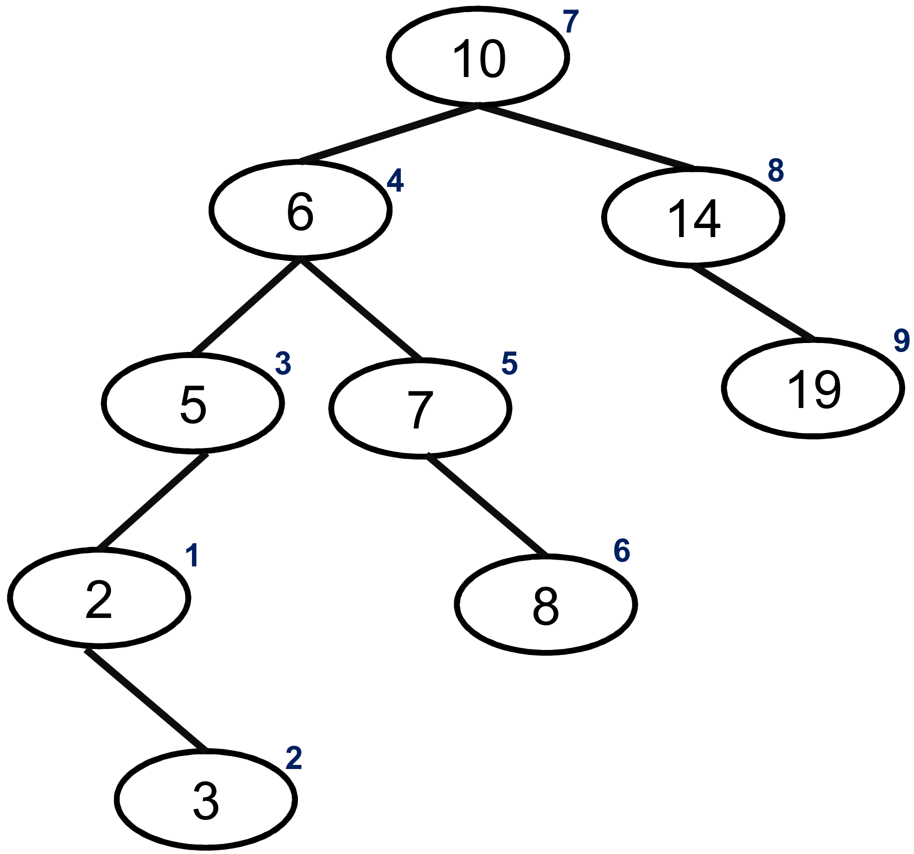
```
------------------------------------------------------------
Αλγόριθμος Ενδοδιατεταγμένης Διαδρομής (IN-ORDER)
Είσοδος: Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης T
Έξοδος: Ενδοδιατεταγμένη Διάσχιση των Κορυφών του T
------------------------------------------------------------
procedure IN-ORDER(v)
  Αν (v≠KENO)
     IN-ORDER(Αριστερό Παιδί της v)
     Εκτύπωση του v
     IN-ORDER(Δεξί Παιδί της v)
  Τέλος-Αν
end procedure
```

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (2. Ενδοδιατεταγμένη)

- Παράδειγμα Εκτέλεσης της Ενδοδιατεταγμένης Διαδρομής



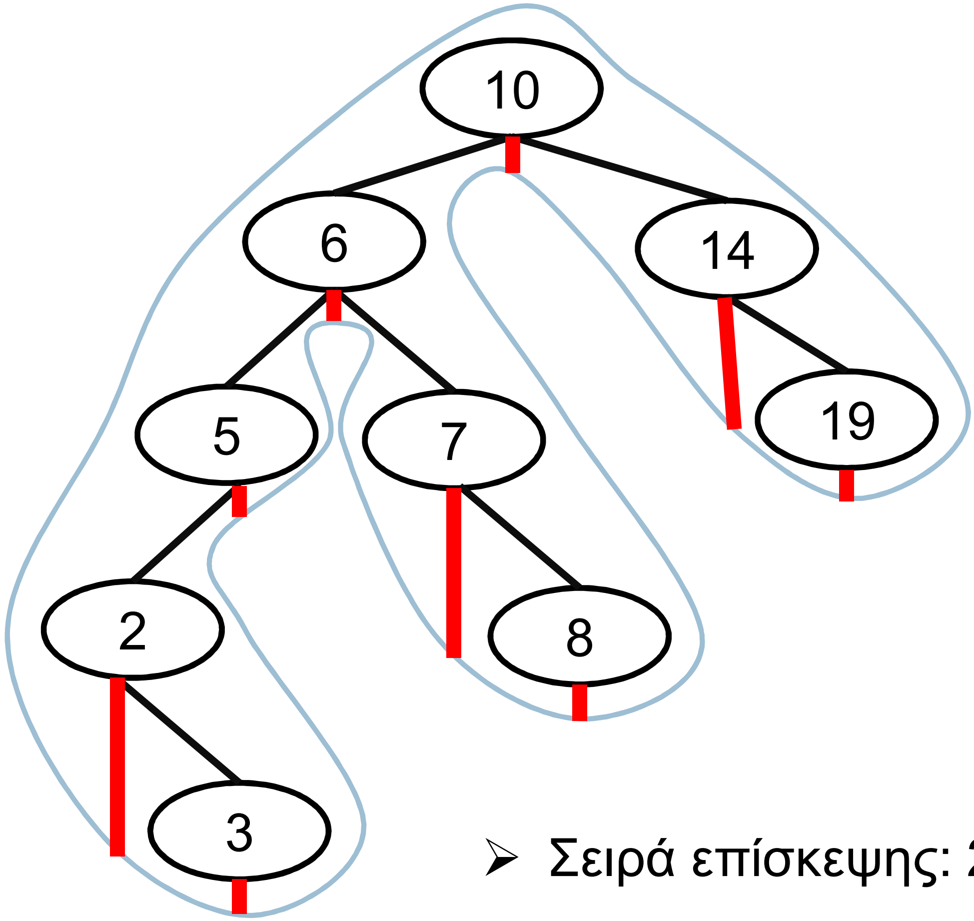
- Παράγεται η ακολουθία (σειρά επίσκεψης): 2,3,5,6,7,8,10,14,19

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (2. Ενδοδιατεταγμένη)

- Εμπειρικός Τρόπος (Κατασκευάζω το περίγραμμα και τραβάω γραμμή **κάτω** από κάθε κόμβο. Έπειτα σαρώνω το περίγραμμα αριστερόστροφα από τη ρίζα και όπου συναντάω γραμμή καταγράφω τον κόμβο)



- Σειρά επίσκεψης: 2,3,5,6,7,8,10,14,19

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (3. Μεταδιατεταγμένη)

Είναι αναδρομικός αλγόριθμος που καλείται με όρισμα την ρίζα την Δ.Δ.Α.:

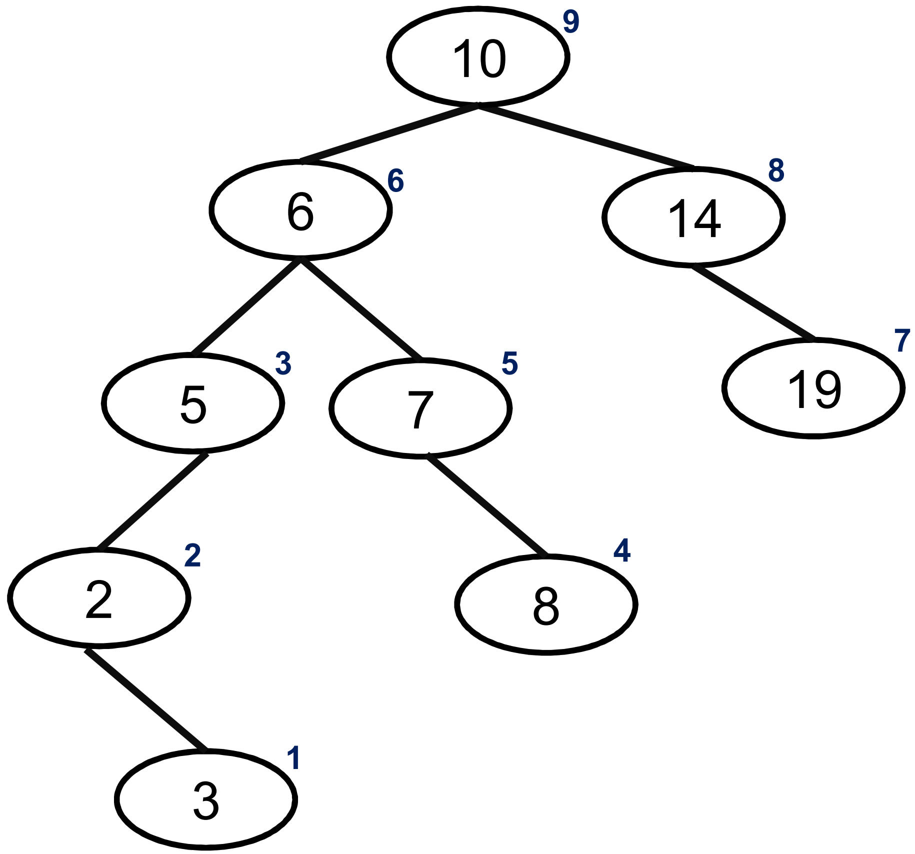
```
------------------------------------------------------------
Αλγόριθμος Μεταδιατεταγμένης Διαδρομής (POST-ORDER)
Είσοδος: Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης Τ
Έξοδος: Μεταδιατεταγμένη Διάσχιση των Κορυφών του Τ
------------------------------------------------------------
procedure POST-ORDER(v)
  Αν (v≠KENO)
     POST-ORDER(Αριστερό Παιδί της v)
     POST-ORDER(Δεξί Παιδί της v)
     Εκτύπωση του v
  Τέλος-Αν
end procedure
```

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (3. Μεταδιατεταγμένη)

- Παράδειγμα Εκτέλεσης της Μεταδιατεταγμένης Διαδρομής



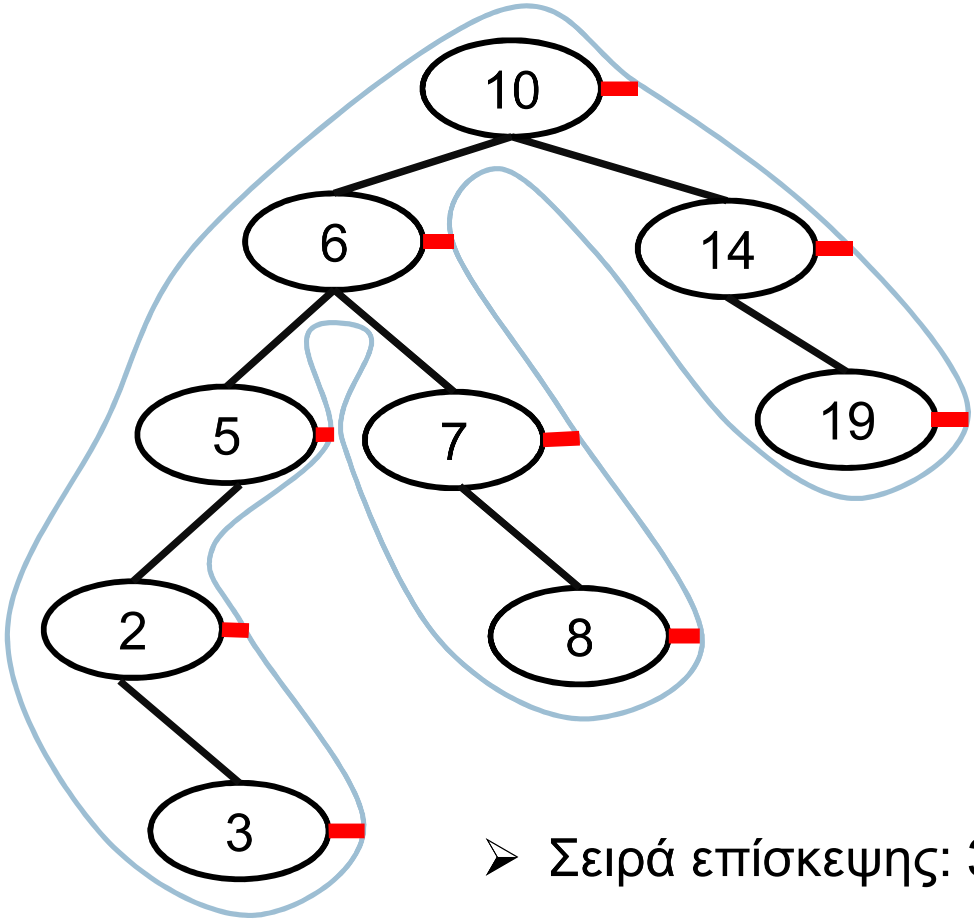
- Παράγεται η ακολουθία (σειρά επίσκεψης): 3,2,5,8,7,6,19,14,10

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (3. Μεταδιατεταγμένη)

- Εμπειρικός Τρόπος (Κατασκευάζω το περίγραμμα και τραβάω γραμμή **δεξιά** από κάθε κόμβο. Έπειτα σαρώνω το περίγραμμα αριστερόστροφα από τη ρίζα και όπου συναντάω γραμμή καταγράφω τον κόμβο)



- Σειρά επίσκεψης: 3,2,5,8,7,6,19,14,10

Β. Θεωρία

2. Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

4. Αλγόριθμοι Διάσχισης σε Δ.Δ.Α. (4. Παρατηρήσεις)

Παρατηρήσεις για τους αλγόριθμους διάσχισης:

- Η ενδοδιατεταγμένη διάσχιση τυπώνει τα δεδομένα του Δ.Δ.Α. σε αύξουσα σειρά.
- Η προδιατεταγμένη διάσχιση ισοδυναμεί με «κατά βάθος» διάσχιση με αφετηρία τη ρίζα με διάταξη κορυφών την αύξουσα αρίθμηση
- Η ονομασία των αλγορίθμων εκφράζει πότε εκτυπώνεται η κορυφή:
  - ΠΡΟ: Πρώτα η κορυφή
  - ΕΝΔΟ: Στη μέση η κορυφή
  - ΜΕΤΑ: Στο τέλος η κορυφή
- Ενώ σε όλους τους αλγόριθμους τυπώνεται πρώτα το αριστερό υποδένδρο και έπειτα το δεξιό υποδένδρο.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Οι αριθμοί 1 έως 7 εισάγονται σε ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης.

1. Αν η σειρά εισαγωγής είναι η 1,2,3,4,5,6,7 τότε το δένδρο έχει το μέγιστο δυνατό ύψος.
2. Αν η σειρά εισαγωγής είναι η 7,6,5,4,3,2,1 τότε το δένδρο έχει το ελάχιστο δυνατό ύψος.
3. Το δένδρο θα έχει ελάχιστο ύψος αν στη σειρά εισαγωγής το 4 βρίσκεται μετά το 1.
4. Η αναζήτηση του αριθμού 5 στο δένδρο με ελάχιστο ύψος απαιτεί διαφορετικό αριθμό συγκρίσεων από ότι η αναζήτηση του 12.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Έστω Τ ένα δυαδικό δένδρο

1. Αν το Τ είναι πλήρες τότε έχει άρτιο αριθμό φύλλων

2. Αν το Τ είναι πλήρες και όλα τα φύλλα του βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε οι εσωτερικές κορυφές του είναι λιγότερες από τα φύλλα του

3. Αν το Τ είναι δυαδικό δένδρο αναζήτησης, τότε ο βαθμός του είναι 2

4. Αν το Τ είναι δυαδικό δένδρο αναζήτησης, τότε το μεγαλύτερο στοιχείο βρίσκεται στη ρίζα

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 3

Έστω Τ δένδρο με n κορυφές

1. Αν το Τ έχει 2 φύλλα, τότε ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι μικρότερος ή ίσος του 2

2. Αν το Τ έχει n-1 φύλλα τότε η προσθήκη μιας ακμής μεταξύ δύο οποιονδήποτε φύλλων δημιουργεί κύκλο μήκους 4

3. Αν το Τ είναι δυαδικό δένδρο με ρίζα, τότε τα φύλλα του είναι τουλάχιστον n/2

4. Ο πίνακας πρόσπτωσης του Τ έχει n-1 στήλες

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Υποθέστε ότι έχουμε εισάγει κάποιους αριθμούς μεταξύ 1 και 1000 σε ένα δένδρο δυαδικής αναζήτησης και ότι αναζητούμε τον αριθμό 363. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες ΔΕΝ μπορούν να είναι ακολουθίες κόμβων που εξετάστηκαν:

i. 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363
ii. 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363
iii. 800, 300, 533, 611, 400, 432, 363

Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν οι αριθμοί μιας ακολουθίας ώστε να μην αποτελεί ακολουθία κόμβων που εξετάστηκαν σε μια δυαδική αναζήτηση;

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Στα δένδρα διακρίνουμε τις κορυφές σε εσωτερικές κορυφές και φύλλα. Έστω m-αδικό δένδρο του οποίου κάθε εσωτερική κορυφή έχει ακριβώς m παιδιά.

i. Να αποδείξετε ότι αν το δένδρο έχει φ φύλλα τότε έχει $n = \frac{m\varphi - 1}{m-1}$ κορυφές συνολικά και $\varepsilon = \frac{\varphi - 1}{m-1}$ εσωτερικές κορυφές

ii) Οι αλυσιδωτές επιστολές είναί είδος επιστολής με ανώνυμο αποστολέα και η οποία σε προτρέπει να αναπαράγεις την επιστολή k φορές και να την στείλεις σε άλλους k αποδέκτες (ανωνύμως φυσικά) αλλιώς θα έχεις κακοτυχία και αναποδιές. Κάποιοι αποδέκτες μιας αλυσιδωτής επιστολής μπορούν να ανταποκριθούν και να στείλουν k επιστολές ενώ άλλοι μπορεί να την πετάξουν στο καλάθι των αχρήστων.
Έστω πως κάποιος ξεκινά μια αλυσιδωτή επιστολή η οποία αποστέλλεται σε 4 παραλήπτες ζητώντας τους να στείλουν 4 αντίγραφα, έστω πως δεν έτυχε κανείς να λάβει την επιστολή 2 φορές και η επιστολή τερμάτισε την αποστολή της όταν 100 άνθρωποι την έλαβαν αλλά απλά την πέταξαν.

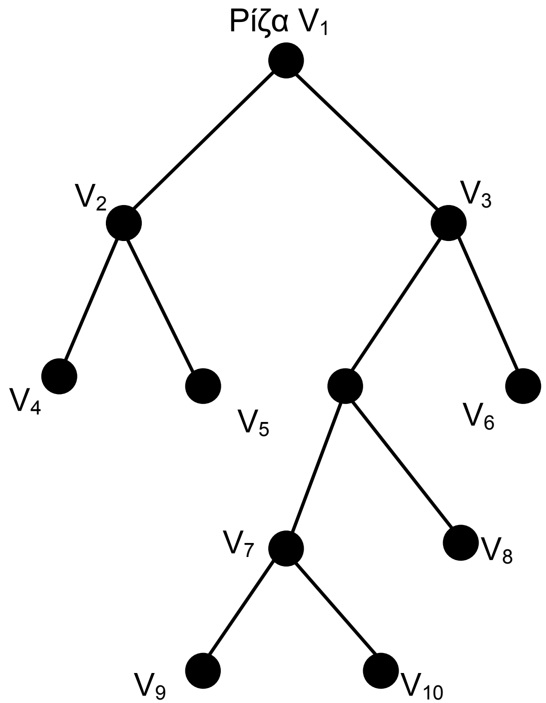
1. Πόσοι άνθρωποι διάβασαν την επιστολή (συμπεριλαμβανομένου του εμπνευστή της)
2. Πόσοι άνθρωποι την ταχυδρόμησαν σε άλλους παραλήπτες;

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Θεωρούμε *δένδρα απόφασης* τα οποία ορίζονται ως εξής. Ένα δένδρο απόφασης έχει μία μόνο κορυφή ή ορίζεται από τους παρακάτω κανόνες.

1. Υπάρχει μόνο μια κορυφή με βαθμό 2 που ονομάζεται ρίζα.
2. Κάθε άλλη κορυφή έχει βαθμό 3 οπότε ονομάζεται εσωτερική ή έχει βαθμό 1 οπότε ονομάζεται φύλλο.

Ένα παράδειγμα τέτοιου δένδρου είναι το παρακάτω:



(α) Δείξτε ότι αν ένα δένδρο απόφασης έχει περισσότερες από μια κορυφές και αν διαγράψουμε την ρίζα τότε οι δυο συνιστώσες που προκύπτουν είναι δένδρα απόφασης.

(β) Δείξτε ότι δυο δένδρα απόφασης με τον ίδιο αριθμό φύλλων L πρέπει επίσης να έχουν και τον ίδιο συνολικό αριθμό N κορυφών. Για τον σκοπό αυτό, δείξτε επαγωγικά ότι για όλα τα δένδρα απόφασης με L φύλλα, ισχύει η σχέση $N=2L-1$.