Θεώρημα (Απαγωγής):

Αν $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ τότε $T \vdash \varphi \to \psi$

Ευθεία χρήση:
Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
Τότε από το θεώρημα απαγωγής «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $T \vdash \varphi \to \psi$
Αντίστροφη χρήση:
Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi \to \psi$
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Θεώρημα (Αντιθετοαναστροφής):

$T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ αν και μόνο αν $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

Θεώρημα (Εις Άτοπο Απαγωγής):

Αν $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό τότε $T \vdash \neg\varphi$

Ευθεία χρήση:
Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό
Τότε από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $T \vdash \neg\varphi$
Αντίστροφη χρήση:
Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \neg\varphi$
Από το θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό.

Αντιφατικό Σύνολο Τύπων :
Ένα σύνολο τύπων T καλείται αντιφατικό αν υπάρχει ένας τύπος ψ τέτοιος ώστε να ισχύει:
$T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$

Συνεπές σύνολο τύπων:
Σύνολο τύπων που δεν είναι αντιφατικό

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι:
$\vdash ((\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\psi \to \neg\psi))$
Απάντηση:
Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi \vdash \chi \to \neg(\psi \to \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\psi \to \neg\psi)$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi, \psi \to \neg\psi\} \vdash \neg\chi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\psi \to \neg\psi$ Υπόθεση
2. $(\psi \to \neg\psi) \to \neg\chi$ Υπόθεση
3. $\neg\chi$ MP1,2

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι:

$$\{\chi \to \neg\psi, \phi\} \vdash \chi \to \neg(\phi \to \psi)$$

Απάντηση:
Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι:
$\{\chi \to \neg\psi, \phi, \chi\} \vdash \neg(\phi \to \psi)$
Από το θ.απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο τύπων:
$T=\{\chi \to \neg\psi, \phi, \chi, \phi \to \psi\}$ είναι αντιφατικό.
Και ακολουθούν οι τυπικές αποδείξεις: $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$

Θεώρημα (Εγκυρότητας): Αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \vDash \varphi$

- (ευθεία χρήση) Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $T \vdash \varphi$. Τότε από το θεώρημα εγκυρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $T \vDash \varphi$
- (αντίστροφη χρήση) Για να δείξουμε ότι: $T \vDash \varphi$. Από το θεώρημα εγκυρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$

Θεώρημα (Πληρότητας): Αν $T \vDash \varphi$ τότε $T \vdash \varphi$

- (ευθεία χρήση) Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $T \vDash \varphi$. Τότε από το θεώρημα πληρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $T \vdash \varphi$
- (αντίστροφη χρήση) Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$. Από το θεώρημα πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vDash \varphi$

⊢ φ → φ

Απόδειξη 1 (χωρίς Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. ϕ→((ϕ →ϕ) →ϕ)   ΣΑ στο ΑΣ1 όπου ϕ:ϕ, ψ: ϕ →ϕ
2. (ϕ→((ϕ →ϕ) →ϕ)) →((ϕ→(ϕ →ϕ)) →(ϕ→ϕ)) ΣΑ στο ΑΣ2 όπου ϕ:ϕ, ψ: ϕ →ϕ,χ: ϕ
3. (ϕ→(ϕ →ϕ)) →(ϕ→ϕ) MP1,2
4. ϕ→(ϕ →ϕ) ΣΑ στο ΑΣ1 όπου ϕ: ψ, ψ:ϕ
5. ϕ→ϕ MP3,4

Απόδειξη 2 (με Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω:

φ ⊢ φ

που έχει τυπική απόδειξη:

1. ϕ   Υπόθεση

⊢ φ → ¬¬φ

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

φ ⊢ ¬¬φ

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

¬φ ⊢ ¬φ

που έχει τυπική απόδειξη:

1. ¬φ   Υπόθεση

⊢ ¬¬ φ → φ

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

¬¬φ ⊢ φ

που έχει τυπική απόδειξη:

1. ¬¬φ   Υπόθεση
2. ¬¬φ → (¬φ → ¬¬φ) ΣΑ στο ΑΣ1 όπου φ: ¬¬φ, ψ: ¬φ
3. ¬φ → ¬¬φ MP1,2
4. (¬φ → ¬¬φ) → ((¬φ → ¬φ) → φ) ΣΑ στο ΑΣ3 όπου φ: ¬φ, ψ: φ
5. (¬φ → ¬φ) → φ MP3,4
6. ¬φ → ¬φ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα ⊢ φ → φ όπου φ: ¬φ
7. φ MP6,5

Και παραθέτουμε την τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος ⊢ φ → φ