

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Πίνακας Αλήθειας Λογικών Συνδέσμων:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
A	A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	A	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A

Ταυτολογία: είναι τύπος που είναι A για όλες τις αποτιμήσεις

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg p \rightarrow q$ είναι ταυτολογία

Λύση:

p	q	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
A	A	$(A \wedge \neg A) \rightarrow A = \Psi \rightarrow A = A$
A	Ψ	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Psi = \Psi \rightarrow \Psi = A$
Ψ	A	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow A = \Psi \rightarrow A = A$
Ψ	Ψ	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow \Psi = \Psi \rightarrow \Psi = A$

Γνωστές Ταυτολογίες είναι οι μορφές τύπων:

- $\phi \vee \neg\phi$ όπου ϕ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
- $\phi \rightarrow \psi$ όπου ϕ =Αντίφαση (Μορφή $\Psi \rightarrow \dots$) ή ψ =Ταυτολογία (Μορφή $\dots \rightarrow A$)
- $\phi \rightarrow \phi$ όπου ϕ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
- $\phi \leftrightarrow \phi$ όπου ϕ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
- Όλες οι μορφές τύπων νόμων της προτασιακής λογικής
- Όλες οι μορφές τύπων συντακτικών αντικατάσεων στα αξιωματικά σχήματα του προτασιακού λογισμού

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ www.psounis.gr

Προτεραιότητα λογικών συνδέσμων:

(1) \neg (2) \vee, \wedge (3) $\rightarrow, \leftrightarrow$

Αντίφαση: είναι τύπος που είναι Ψ για όλες τις αποτιμήσεις

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ είναι αντίφαση

Λύση:

p	q	$p \wedge \neg(q \rightarrow p)$
A	A	$A \wedge \neg(A \rightarrow A) = A \wedge \neg A = \Psi$
A	Ψ	$A \wedge \neg(\Psi \rightarrow A) = A \wedge \neg A = \Psi$
Ψ	A	$\Psi \wedge \neg(A \rightarrow \Psi) = \Psi \wedge \neg \Psi = \Psi$
Ψ	Ψ	$\Psi \wedge \neg(\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \wedge \neg A = \Psi$

Γνωστές Αντιφάσεις είναι οι μορφές τύπων

- $\phi \wedge \neg\phi$ όπου ϕ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
- $\phi \rightarrow \psi$ όπου ϕ =Ταυτολογία και ψ =Αντίφαση (Μορφή $A \rightarrow \Psi$)
- $\neg\phi$ όπου ϕ =Ταυτολογία
- $\phi \leftrightarrow \neg\phi$ όπου ϕ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος

Ικανοποιήσιμος: είναι τύπος που είναι A σε τουλάχιστον μία αποτίμηση

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ είναι ικανοποιήσιμος

Λύση:

p	q	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$
A	A	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = A \rightarrow (A \rightarrow A) = A \rightarrow A = A$
A	Ψ	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = A \rightarrow (A \rightarrow \Psi) = A \rightarrow \Psi = \Psi$
Ψ	A	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow A) = \Psi \rightarrow A = A$
Ψ	Ψ	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \rightarrow A = A$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Κανονική Διαζευκτική Μορφή:

Ένας τύπος είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή (ΚΔΜ), αν είναι της μορφής:

$$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_n$$

όπου κάθε ψ_i είναι της μορφής:

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

Και τα x_{ij} είναι μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών

Παράδειγμα: Να βρεθεί η Κ.Δ.Μ. του τύπου: $p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$

Λύση:

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	r	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$
A	A	A	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = A \rightarrow \neg(A \rightarrow A) = A \rightarrow \Psi = \Psi$
A	A	Ψ	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = A \rightarrow \neg(A \rightarrow \Psi) = A \rightarrow A = A$
A	Ψ	A	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = A \rightarrow \neg(\Psi \rightarrow A) = A \rightarrow \Psi = \Psi$
A	Ψ	Ψ	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = A \rightarrow \neg(\Psi \rightarrow \Psi) = A \rightarrow \Psi = \Psi$
Ψ	A	A	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = \Psi \rightarrow \neg(A \rightarrow A) = \Psi \rightarrow \Psi = A$
Ψ	A	Ψ	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = \Psi \rightarrow \neg(A \rightarrow \Psi) = \Psi \rightarrow A = A$
Ψ	Ψ	A	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = \Psi \rightarrow \neg(\Psi \rightarrow A) = \Psi \rightarrow \Psi = A$
Ψ	Ψ	Ψ	$p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) = \Psi \rightarrow \neg(\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \rightarrow \Psi = A$

Άρα η Κανονική Διαζευκτική Μορφή του τύπου είναι:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ www.psounis.gr

Βήματα κατασκευής κανονικής διαζευκτικής μορφής

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου.
- Εκφράζουμε σαν σύζευξη (and) κάθε γραμμή που αληθεύει. Στην σύζευξη θέτουμε p αν $\alpha(p) = A$ και $\neg p$ αν $\alpha(p) = \Psi$.
- Ο τύπος είναι η διάζευξη (or) όλων των συζεύξεων.

ΣΥΝΟΛΟ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΩΝ ΤΥΠΩΝ

Ένα σύνολο τύπων T θα λέμε ότι είναι **ικανοποιήσιμο** αν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- Πιο τυπικά αν υπάρχει αποτίμηση α : $\alpha(\phi) = A \forall \phi \in T$

Παράδειγμα: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{p \rightarrow q, p \vee \neg q\}$$

είναι ικανοποιήσιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee \neg q$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A

Παρατηρούμε ότι στην αποτίμηση $p=A, q=A$ αληθεύουν όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων, άρα είναι ικανοποιήσιμο

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το συνεπές σύνολο τύπων

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΣΥΝΕΠΕΣ
(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ www.psounis.gr

Ένα σύνολο τύπων T θα λέμε ότι είναι **μη ικανοποιήσιμο** αν δεν υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους αληθείς ταυτόχρονα

- ...δηλαδή δεν είναι ικανοποιήσιμο!

Παράδειγμα: Να μελετηθεί αν το σύνολο τύπων

$$T = \{q \rightarrow p, p \wedge \neg q, p \leftrightarrow q\}$$

είναι ικανοποιήσιμο:

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων του συνόλου τύπων:

p	q	$q \rightarrow p$	$p \wedge \neg q$	$p \leftrightarrow q$
A	A	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να κάνει όλους τους τύπους A ταυτόχρονα, άρα είναι ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Το ισοδύναμο στον προτασιακό λογισμό είναι το αντιφατικό σύνολο τύπων

ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ = ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟ
(με βάση τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας)

ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ $T \models \phi$

Έστω Σύνολο Τύπων T και τύπος ϕ . Θα λέμε ότι :

- το σύνολο τύπων T **ταυτολογικά συνεπάγεται** τον τύπο ϕ ή
- Ο ϕ είναι **σημασιολογική συνέπεια** του T
- και συμβολίζουμε με $T \models \phi$
- για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι του T ικανοποιείται και ο ϕ

- Αν ο ϕ είναι ταυτολογία ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
- Αν το T είναι αντιφατικό ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή
- Εξετάζουμε με βάση τον ορισμό. Βρίσκουμε τις αποτιμήσεις που ικανοποιούνται οι τύποι του T (όλοι ταυτόχρονα). Σε αυτές **πρέπει** να αληθεύει και ο ϕ για να ισχύει η ταυτ. συνεπαγωγή.

Παράδειγμα 1: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \rightarrow \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \models \neg p \rightarrow q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

p	q	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$
A	A	Ψ	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	A	A
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ

Στις αποτιμήσεις που ικανοποιείται το σύνολο τύπων, ο τύπος ϕ είναι αληθής, άρα ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ www.psounis.gr

Ο συμβολισμός: $\models \phi$

- Θα σημαίνει ότι ο τύπος ϕ αληθεύει ανεξαρτήτως υποθέσεων
- που σημαίνει ότι ο τύπος ϕ είναι ταυτολογία. ($\emptyset \models \phi$)

Ο συμβολισμός: $\phi \equiv \psi$

- Θα σημαίνει ότι οι τύποι ϕ και ψ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι
- Ορίζεται ως: $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$

Θα ισχύει ότι $\phi \equiv \psi$ αν οι ϕ, ψ έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας

Πιο εποπτικά:

- $\dots \models A$.
- $\Psi \models \dots$.
- Εφαρμογή του ορισμού

Παράδειγμα 2: Να μελετηθεί αν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή

$$\{p \rightarrow \neg q, q \vee p, \neg p \leftrightarrow q\} \models p \rightarrow q$$

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας των τύπων:

p	q	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
A	A	Ψ	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A	A	Ψ
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A

Στην 2^η αποτίμηση ($p=A, q=\Psi$) ικανοποιούνται οι τύποι του T, αλλά δεν αληθεύει ο ϕ . Άρα δεν ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

Οι Νόμοι της Προτασιακής Λογικής:

- Είναι ταυτολογίες.
- Τους χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε έναν τύπο σε έναν ισοδύναμό του.

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση
1	Αντιμεταθετικότητα	$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$ $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
2	Προσεταιριστικότητα	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$
3	Επιμεριστικότητα	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
4	Διπλή Άρνηση	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
5	Άρνηση Συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
6	De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
7	Αντιθετοαναστροφή	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
8	Εξαγωγή	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$
9	1 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
10	2 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
11	Αποκλεισμός Τρίτου	$\varphi \vee \neg\varphi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος του τύπου:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow \neg(p_1 \vee p_2)$$

που χρησιμοποιεί μόνο τους σύνδεσμους $\{\neg, \rightarrow\}$

Λύση: Στον τύπο:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow \neg(p_1 \vee p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο άρνησης συνεπαγωγής:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg\neg(p_1 \vee p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\neg\neg(p_1 \vee p_2))$$

Εφαρμόζω το 1^ο νόμο αντικατάστασης:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\neg p_1 \vee p_2)$$

Χρήσιμος για την χρήση των τύπων μπορεί να φανεί ο παρακάτω πίνακας:

Μετατροπή συνδέσμων	Χρήση του νόμου	Νόμος
Από \rightarrow σε \vee και αντίστροφα	1 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
Από \rightarrow σε \wedge και αντίστροφα	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
Από \vee σε \wedge και αντίστροφα	Νόμοι De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
Από \leftrightarrow σε \wedge, \neg και αντίστροφα	2 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

ΠΡΟΤΑΣΗ(φ): που θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο

- Βάση Επαγωγής:** Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p , δηλαδή ότι ισχύει η ΠΡΟΤΑΣΗ(p)
 - Κάνουμε απόδειξη ότι ισχύει η πρόταση για μια προτασιακή μεταβλητή.
- Επαγωγική Υπόθεση:** Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους ϕ, ψ , δηλαδή ότι ισχύουν ΠΡΟΤΑΣΗ(ϕ), ΠΡΟΤΑΣΗ(ψ)
- Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι ισχύουν: ΠΡΟΤΑΣΗ($\neg\phi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\phi \vee \psi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\phi \wedge \psi$), ΠΡΟΤΑΣΗ($\phi \rightarrow \psi$) ΠΡΟΤΑΣΗ($\phi \leftrightarrow \psi$)

Ορισμός: Ένα σύνολο συνδέσμων θα λέγεται **πλήρες σύνολο συνδέσμων** (ή **επαρκές σύνολο συνδέσμων**) αν κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να μετατραπεί σε έναν ισοδύναμό που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο.

- Εμπειρικά για να είναι ένα σύνολο συνδέσμων πλήρες, απαιτείται να υπάρχει σε αυτό το \neg και τουλάχιστον ένας ακόμη διμελής σύνδεσμος.
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων είναι πλήρες κάνω επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων:
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων ΔΕΝ είναι πλήρες κατασκευάζω έναν τύπο που δεν μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Λύση:

Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p , δηλαδή ότι ο τύπος p έχει ίσες αριστερές και δεξιές παρενθέσεις

- Απόδειξη:** Ο τύπος p έχει 0 αριστερές και 0 δεξιές παρενθέσεις. Συνεπώς ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους ϕ, ψ , δηλαδή ότι ισχύει $L_\phi = R_\phi$ και $L_\psi = R_\psi$. (Συμβολίζουμε με L_x το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων του τύπου x , και με R_x το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων του τύπου x)

- Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι:
- Ο τύπος $(\neg\phi)$ έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\neg\phi)$ έχει $L_\phi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $R_\phi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\phi = R_\phi$ άρα και $L_\phi + 1 = R_\phi + 1$
 - Ο τύπος $(\phi \vee \psi)$ έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\phi \vee \psi)$ έχει $L_\phi + L_\psi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $R_\phi + R_\psi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\phi = R_\phi$ και $L_\psi = R_\psi$, άρα και $L_\phi + L_\psi + 1 = R_\phi + R_\psi + 1$.
 - Η απόδειξη για τους τύπους $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ είναι όμοια με την $(\phi \vee \psi)$.

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΟΥ Π.Λ.

Ο ΠΛ (προτασιακός λογισμός) είναι το αξιωματικό σύστημα που:

- Έχει ως **αξιώματα** (αξιωματικά σχήματα) τα: ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3.
- Και ως αποδεικτικό κανόνα τον **Modus Ponens** (M.P.)

Σε αυτό το αξιωματικό σύστημα μελετάμε αν ισχύουν:

- Τυπική Συνεπαγωγή $T \vdash \varphi$** όταν ισχύουν οι υποθέσεις του T αν εξάγεται με διαδοχικές εφαρμογές του ΜΡ ο τύπος φ
- Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi$** δηλαδή αν εξάγεται ο τύπος φ με διαδοχικές εφαρμογές ΜΡ

Στις τυπικές αποδείξεις επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε:

1) ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ του συνόλου τύπων

2) ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ και ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΚ/ΘΕΙΣ ΣΕ ΑΥΤΑ:

ΑΣ1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
ΑΣ2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
ΑΣ3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

3) MODUS PONENS

Αν ισχύει Φ

Και ισχύει $\Phi \rightarrow \Psi$

Τότε ισχύει Ψ (από Modus Ponens)

4) ΤΥΠΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Έχουμε αποδείξεις για:

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

5) ΤΥΠΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ

Εφόσον δίνουν από την εκφώνηση

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\{\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \phi \rightarrow \psi\} \vdash \phi \rightarrow \chi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

- $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ Υπόθεση
- $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$ ΑΣ2
- $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)$ ΜΡ1,2
- $\phi \rightarrow \psi$ Υπόθεση
- $\phi \rightarrow \chi$ ΜΡ4,3

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\neg\phi \vdash (\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

- $\neg\phi$ Υπόθεση
- $\neg\phi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\phi: \neg\phi$, $\psi: \neg\psi$
- $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$ ΜΡ1,2
- $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\phi: \psi$, $\psi: \neg\phi$
- $(\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$ ΜΡ3,4

ΤΥΠΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

Να αποδειχθεί ότι

$$\vdash (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$$

ΛΥΣΗ:

Η τυπική απόδειξη είναι:

- $\phi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\psi: \chi$
- $(\phi \rightarrow (\chi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου $\psi: \chi$
- $(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ ΜΡ1,2

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θεώρημα (Απαγωγής):

$$\text{Αν } T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ τότε } T \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Ευθεία χρήση:

Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ Τότε από το Θεώρημα απαγωγής «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Αντίστροφη χρήση:

Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Θεώρημα (Αντιθετοαναστροφής):

$$\text{Αν } T \cup \{\varphi\} \text{ είναι αντιφατικό τότε } T \vdash \neg\varphi$$

Θεώρημα (Εις Άτοπο Απαγωγής):

$$\text{Αν } T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ τότε } T \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Ευθεία χρήση:

Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι: $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό

Τότε από το Θεώρημα απαγωγής σε άτοπο «έπεται» (ή «προκύπτει άμεσα») ότι ισχύει: $T \vdash \neg\varphi$

Αντίστροφη χρήση:

Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \neg\varphi$

Από το Θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι: $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό.

Αντιφατικό Σύνολο Τύπων :

Ένα σύνολο τύπων T καλείται αντιφατικό αν υπάρχει

ένας τύπος ψ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$T \vdash \psi \text{ και } T \vdash \neg\psi$$

Συνεπές σύνολο τύπων:

Σύνολο τύπων που δεν είναι αντιφατικό

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι:

$$\vdash ((\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi) \rightarrow (\chi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \neg\psi))$$

Απάντηση:

Από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi \vdash \chi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \neg\psi)$$

Από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \neg\psi)$$

Από το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\{(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi, \psi \rightarrow \neg\psi\} \vdash \neg\chi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

- $\psi \rightarrow \neg\psi$ Υπόθεση
- $(\psi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\chi$ Υπόθεση
- $\neg\chi$ ΜΡ1,2

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι:

$$\{\chi \rightarrow \neg\psi, \phi\} \vdash \chi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)$$

Απάντηση:

Από το Θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\{\chi \rightarrow \neg\psi, \phi, \chi\} \vdash \neg(\phi \rightarrow \psi)$$

Από το Θεώρημα απαγωγής σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο τύπων:

$$T = \{\chi \rightarrow \neg\psi, \phi, \chi, \phi \rightarrow \psi\}$$

είναι αντιφατικό.

Και ακολουθούν οι τυπικές αποδείξεις: $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$

Θεώρημα (Εγκυρότητας): Αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \models \varphi$

- (ευθεία χρήση)** Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $T \vdash \varphi$. Τότε από το Θεώρημα εγκυρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $T \models \varphi$
- (αντίστροφη χρήση)** Για να δείξουμε ότι: $T \models \varphi$. Από το Θεώρημα εγκυρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$

Θεώρημα (Πληρότητας): Αν $T \models \varphi$ τότε $T \vdash \varphi$

- (ευθεία χρήση)** Αν γνωρίζουμε (π.χ. από την εκφώνηση) ότι $T \models \varphi$. Τότε από το Θεώρημα πληρότητας «έπεται» ότι ισχύει: $T \vdash \varphi$
- (αντίστροφη χρήση)** Για να δείξουμε ότι: $T \vdash \varphi$. Από το Θεώρημα πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $T \models \varphi$

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

Απόδειξη 1 (χωρίς Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

Η τυπική απόδειξη είναι:

1. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi, \psi: \varphi \rightarrow \varphi$
2. $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ ΣΑ στο ΑΣ2 όπου $\varphi, \psi: \varphi \rightarrow \varphi, \chi: \varphi$
3. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ MP1,2
4. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \varphi, \psi: \varphi$
5. $\varphi \rightarrow \varphi$ MP3,4

Απόδειξη 2 (με Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού)

Από το θεώρημα απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. φ Υπόθεση

$\vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\varphi \vdash \neg \neg \varphi$$

Από το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξω:

$$\neg \varphi \vdash \neg \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg \varphi$ Υπόθεση

$\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξω:

$$\neg \neg \varphi \vdash \varphi$$

που έχει τυπική απόδειξη:

1. $\neg \neg \varphi$ Υπόθεση
2. $\neg \neg \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ1 όπου $\varphi: \neg \neg \varphi, \psi: \neg \varphi$
3. $\neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$ MP1,2
4. $(\neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi) \rightarrow ((\neg \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \varphi)$ ΣΑ στο ΑΣ3 όπου $\varphi: \neg \varphi, \psi: \varphi$
5. $(\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \varphi$ MP3,4
6. $\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi$ ΣΑ στο Τυπικό Θεώρημα $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ όπου $\varphi: \neg \varphi$
7. φ MP6,5

Και παραθέτουμε την τυπική απόδειξη του τυπικού θεωρήματος $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$