ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 3.2:
Η Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Όλο το μάθημα είναι σημαντικό για τις τελικές εξετάσεις. Ιδιαίτερη έμφαση στα θέματα συντακτικού και στα θέματα των συντομογραφιών τα οποία θα τα συναντήσουμε και στις επόμενες ερμηνείες που θα μελετήσουμε.

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία
1. Η Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών
1. Εισαγωγή

Η Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών (συμβολίζεται με $Γ_1^{θα}$) συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που ορίζονται με τα εξής στοιχεία:
- Το σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί: $|A| = \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
- Ορίζονται τα συναρτησιακά σύμβολα:
  - $\oplus(x,y)$ με $\oplus^A(x,y) = x + y$ (συναρτησιακό σύμβολο της πρόσθεσης)
  - $\odot(x,y)$ με $\odot^A(x,y) = x * y$ (συναρτησιακό σύμβολο του πολλαπλασιασμού)
  - $'(x)$ με $'^A(x) = x + 1$ (συναρτησιακό σύμβολο που εκφράζει τον επόμενο ενός αριθμού)
- Ορίζονται τα κατηγορηματικά σύμβολα:
  - $<(x,y)$ με $<^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x < y$
  - $>(x,y)$ με $>^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x > y$
  - $\leq(x,y)$ με $\leq^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x \leq y$
  - $\geq(x,y)$ με $\geq^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x \geq y$
- Μοναδικό σύμβολο σταθεράς το μηδέν: 0 με $0^A = 0$

Β. Θεωρία

1. Η Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών

2.Ιδιοτητες των Φυσικών Αριθμών

Με τα στοιχεία που ορίσαμε θα μας ζητείται να εκφράσουμε ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε κατηγορηματική λογική. Οι παρακάτω ιδιότητες των φυσικών θα μας βοηθούν να αποφασίζουμε αν μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής:

Οι φυσικοί αριθμοί έχουν ελάχιστο στοιχείο (το μηδέν) και δεν έχουν μέγιστο στοιχείο. Άρα:

- Το 0 είναι μικρότερο ή ίσο από όλους τους φυσικούς
- Το 0 δεν είναι μικρότερο από όλους τους φυσικούς (δεν είναι μικρότερο από τον εαυτό του)
- Δεν υπάρχει φυσικός που να είναι μεγαλύτερος (ή ίσος) από όλους τους φυσικούς.
- Όποιον φυσικό αριθμό και να σκεφτούμε πάντα υπάρχει κάποιος μεγαλύτερος του!

Επίσης ισχύουν και οι ακόλουθες μαθηματικές σχέσεις:

- Αν x<y τότε x≤y (το αντίστροφο δεν ισχύει)

- x=y αν και μόνο αν x≤y και y≤x
- x<y αν και μόνο αν x≤y και x≠y
- x>y αν και μόνο αν x≥y και x≠y

- x<y αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι x≥y
- x>y αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι x≤y

Β. Θεωρία

2. Παραδείγματα του Συντακτικού

1. Όροι

- Οι αριθμοί στην γλώσσα της θεωρίας αριθμών:
  - Ο μόνος αριθμός που έχει οριστεί σαν σταθερά είναι το 0.
  - Κάθε επόμενος αριθμός θα αναπαρίσταται μέσω του συναρτησιακού ‘( )
  - Π.χ. 1=‘(0),   2=‘(‘(0)),   3=‘(‘(‘(0)))   κ.ο.κ.
- Όροι θα κατασκευάζονται με τα τρία συναρτησιακά σύμβολα $\oplus, \odot, '$ προσοχή ότι είναι προθεματικά:
  - Π.χ. Το x+y γράφεται: $\oplus\,(x,y)$
  - Π.χ. Το xy+z γράφεται: $\oplus\,(\odot\,(x,y),z)$

  Πιθανότατα ωστόσο θα μας επιτρέψουν να γράφουμε τα σύμβολα και ενδοθεματικά.

Ασκηση 1: Μετατρέψτε τις ακόλουθες παραστάσεις σε Κατηγορηματική Λογική

1. $xz + wy$
2. $x^2 + 2y$

Ασκηση 2: Τι εκφράζουν οι ακόλουθες προτάσεις;

1. $\oplus\,(\odot\,(x,y),'('(0)))$
2. $'(\oplus\,(\odot\,(x,y),\odot\,(y,w)))$

Β. Θεωρία

2. Παραδείγματα του Συντακτικού

2. Στοιχειώδεις Προτάσεις με Ποσοδείκτες

Μελετάμε όλους τους συνδυασμούς προτάσεων που μπορούν να κατασκευαστούν με το πολύ δύο ποσοδείκτες και τα κατηγορήματα της γλώσσας της θεωρίας αριθμών. Είναι σημαντικό πέρα από το Α/Ψ της κάθε πρότασης να είμαστε σε θέση να μεταφράζουμε σωστά κάθε πρόταση στα ελληνικά.

Ασκηση 3: Αντικαθιστώντας κάθε φορά το P με τα κατηγορηματικά σύμβολα <,>,≤,≥ να αποφασιστεί αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι Α/Ψ.

		<	≤	>	≥
1	$\forall x P(x,x)$				
2	$\exists x P(x,x)$				
3	$\forall x \forall y P(x,y)$				
4	$\exists x \exists y P(x,y)$				
5	$\forall x \exists y P(x,y)$				
6	$\exists x \forall y P(x,y)$				
7	$\forall y \forall x P(x,y)$				
8	$\exists y \exists x P(x,y)$				
9	$\exists y \forall x P(x,y)$				
10	$\forall y \exists x P(x,y)$				

Έπειτα κατασκευάστε άλλους 8 τύπους αντικαθιστώντας το P(x,y) με P(y,x) στα 3-8 και επαναλάβετε το ερώτημα

Β. Θεωρία

2. Παραδείγματα του Συντακτικού

3. Τύποι με το ≈ και τους προτασιακούς συνδέσμους

Εισάγουμε και τύπους που κατασκευάζονται με το ≈ και τους προτασιακούς συνδέσμους.

Συνήθως στις ασκήσεις για τους τύπους αυτούς αφού μεταφράστουν στα ελληνικά θα πρέπει να αποφασίζεται αν είναι Α/Ψ.

Ασκηση 4: Γράψτε σε ΚΛ τις παραστάσεις:

1. $x = 3y + 1$
2. $1 \neq 1 + 1$

Άσκηση 5: Γράψτε σε ΚΛ τις προτάσεις και αποφασίστε αν είναι Α/Ψ

1. Αν το x είναι μικρότερο από το y τότε το y δεν είναι μικρότερο από το x.

2. Αν ισχύουν x≤y και x≠y τότε x<y

3. Αν x=2y και y=2z τότε x=4z

Β. Θεωρία
3. Δύσκολες Ασκήσεις
1. Γενική Μεθοδολογία

Σαν μορφή άσκησης ζητούνται:
1. Να αποφασίσουμε αν μια πρόταση ΚΛ είναι Α/Ψ
2. Να μας δίνεται μία πρόταση ΚΛ και να μας ζητείται να την μεταφράσουμε στα ελληνικά.
3. Να μας δίνεται μία διατύπωση των ελληνικών και να μας ζητείται να την μεταφράσουμε σε πρόταση Κατηγορηματικής Λογικής.

Δουλεύουμε σε συνδυασμό με τον ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΙΚΟ ΠΙΝΑΚΑ του Μαθήματος 3.1 ως εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ — Γνώσεις Μαθηματικών → ΑΠΟΦΑΣΗ ΑΝ ΕΙΝΑΙ Α/Ψ

↕ Μεταφραστικός Πίνακας

ΠΡΟΤΑΣΗ ΣΕ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ — Γνώση πιν.αλήθειας προτ.συνδέσμων, Γνώση αλήθειας ποσοδεικτών → ΑΠΟΦΑΣΗ ΑΝ ΕΙΝΑΙ Α/Ψ

Η συνήθης διαδικασία είναι:
1. Γράφουμε τα σύμβολα ενδοθεματικά
2. Ξαναγράφουμε την πρόταση σε 1ο επίπεδο μετάφρασης
3. Δίνουμε την τελική ερμηνεία της πρότασης (Δεν πρέπει να φαίνονται τα ονόματα των μεταβλητών)

Β. Θεωρία
3. Δύσκολες Ασκήσεις
1. Μετάφραση στα ελληνικά

Παράδειγμα: Να μεταφραστεί στα ελληνικά η πρόταση:

$$\forall x[>(x,0) \to \exists y({}'(y) \approx x)]$$

- Ξαναγράφουμε την πρόταση (στο πρόχειρο)για να είναι πιο κατανοητά τα σύμβολα:
$$\forall x[(x>0) \to \exists y(y+1=x)]$$
- Την διαβάζουμε με τη βοήθεια του μεταφραστικού πίνακα: «Για κάθε φυσικό x αν το x>0 τότε υπάρχει y τέτοιο ώστε y+1=x
- Την κατανοούμε καλύτερα: «Κάθε φυσικός x>0 έχει έναν αριθμό y που αν του προσθέσεις 1 κάνει x.
- Δίνουμε τελική ερμηνεία: «Κάθε φυσικός μεγαλύτερος του μηδέν έχει προηγούμενο»

Ασκηση 6: Να μεταφράσετε στα ελληνικά τις ακόλουθες προτάσεις
1. $\exists x[x = \odot(x,x)]$
2. $\forall x \forall y[\neg(x \approx y) \to <(x,y) \vee <(y,x)]$
3. $\forall x \forall y[x \approx y \to \leq(x,y) \wedge \leq(y,x)]$

Β. Θεωρία
3. Δύσκολες Ασκήσεις
2. Μετατροπή σε Κατηγορηματική Λογική

Παράδειγμα: Να διατυπωθεί σε κατηγορηματική λογική η πρόταση:
«Κάθε φυσικός που είναι μεγαλύτερος από το 1 είναι μικρότερος από τουλάχιστον έναν φυσικό»
- Το σημαντικότερο είναι να βρούμε τον πρώτο ποσοδείκτη που θα καθορίζει το νόημα της πρότασης. Εδώ μας λέει ρητά ότι η πρόταση είναι ότι «κάθε φυσικός έχει μία ιδιότητα…», άρα θα έχουμε καθολικό ποσοδείκτη: $\forall x[\dots]$.
- Καταλαβαίνουμε ότι έχουμε την δομή μιας συνεπαγωγής Αν (είναι μεγαλύτερος του 1) τότε (είναι μικρότερος από τουλάχιστον ένα φυσικό, άρα $\forall x[\dots \to \cdots]$
- Το αριστερό μέρος της συνεπαγωγής είναι «μεγαλύτερος του 1», άρα θα χρησιμοποιήσουμε το κατηγόρημα >. Η πρόταση γίνεται: $\forall x[>(x,{}'(0)) \to \cdots]$
- Το δεξί μέρος της συνεπαγωγής λέει ότι το x είναι μικρότερο από τουλάχιστον ένα φυσικό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ποσοδείκτη «υπάρχει» με μία νέα μεταβλητή, την y. Η πρόταση γίνεται: $\forall x[>(x,{}'(0)) \to \exists y(\dots)]$
- Συνεπώς απομένει να γράψουμε ότι το x είναι μικρότερο του y. Θα χρησιμοποιήσουμε το κατηγόρημα <. Η τελική πρόταση είναι: $\forall x[>(x,{}'(0)) \to \exists y(<(x,y))]$

Σημαντικό είναι ότι στην παραπάνω διαδικασία δουλέψαμε «από έξω προς τα μέσα». Δηλαδή πρώτα βρίσκουμε τη δομή του τύπου (και το πιο σημαντικό: τον ποσοδείκτη που καθορίζει το νόημα της πρότασης) και εξειδικεύουμε σε όλο και πιο συγκεκριμένα σημεία της πρότασης.

Β. Θεωρία
3. Δύσκολες Ασκήσεις
2. Μετάφραση σε κατηγορηματική λογική

Ασκηση 7: Να διατυπωθούν σε κατηγορηματική λογική οι προτάσεις:
1. «Κάθε φυσικός που είναι πολλαπλάσιο του 2, είναι και πολλαπλάσιο του 4»
2. Δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί που το άθροισμα των κύβων των δύο πρώτων να είναι ίσο με τον κύβο του τρίτου αριθμού.
3. Το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο αριθμών είναι μεγαλύτερο από το άθροισμά τους.

Β. Θεωρία
3. Δύσκολες Ασκήσεις
3. Εύρεση Αλήθειας Προτάσεων

Για να βρούμε αν ένας τύπος είναι Α/Ψ θα χρειαστούμε τόσο μαθηματικές γνώσεις, όσο και γνώσεις της κατηγορηματικής λογικής:
- Για παράδειγμα η πρόταση «Κάθε φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 1» είναι αληθής διότι κάθε x γράφεται 1·x (Το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)
- Ωστόσο και η πρόταση $\forall x[< (x,x) \rightarrow {}'(x) \approx x]$ είναι αληθής:
  - Η μετάφραση της δείχνει να μην έχει νόημα: «Κάθε φυσικός αν είναι μικρότερος του εαυτού του, τότε είναι ίσος με τον επόμενό του»
  - Ωστόσο για κάθε φυσικό, έχω μια συνεπαγωγή, που η υπόθεσή της είναι πάντα Ψ. Άρα η πρόταση είναι: $\forall x[\Psi \rightarrow \cdots]$ και είναι αληθής.

Ασκηση 8: Να διαπιστωθεί αν οι προτάσεις των ασκήσεων 6 και 7 είναι αληθείς ή ψευδείς

Β. Θεωρία
4. Συντομογραφίες
1. Συντομογραφίες ενός ορίσματος

Μπορούμε να ορίσουμε συντομογραφίες τύπων προκειμένου να μην χρειάζεται κάθε φορά να μην γράφουμε τα ίδια πράγματα. Θα μελετήσουμε το συντακτικό των συντομογραφιών:

Μία συντομογραφία ενός ορίσματος:
- θα αληθεύει αν το όρισμα έχει την ιδιότητα που περιγράφουμε με Κατηγορηματική Λογική.
- Προσοχή! Όταν ορίζουμε μία συντομογραφία τα ορίσματα πρέπει να είναι ελεύθερες μεταβλητές στην πρόταση κατηγορηματικής λογικής.

4 σημαντικές συντομογραφίες που θα βάλουμε και στο τελικό τυπολόγιο:
1. $E(x) \equiv \exists y[x \approx \odot\, ({}'({}'(0)), y)]$ που αληθεύει αν το x είναι άρτιος.
2. $\mathrm{O}(x) \equiv \exists y[x \approx \oplus\, (\odot\, ({}'({}'(0)), y), {}'(0))]$ που αληθεύει αν το x είναι περιττός.
3. $\mathrm{P}(x) \equiv \neg(x \approx 0) \wedge \neg(x \approx {}'(0)) \wedge \forall y \forall z[x \approx \odot\, (y,z) \rightarrow x \approx y \vee x \approx z]$ που αληθεύει αν το x είναι πρώτος (διαιρείται ακριβώς μόνο με τον εαυτό του και την μονάδα).
4. $\mathrm{D}(x,y) \equiv \exists z[x \approx \odot\, (y,z)]$ που αληθεύει αν το x διαιρείται (ακριβώς) από το y.

Τις οποίες αφού τις ορίσουμε μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να συνθέσουμε πιο σύνθετες προτάσεις (συμπεριφέρονται ως κατηγορήματα)

Β. Θεωρία
4. Συντομογραφίες
2. Συντομογραφίες δύο ορισμάτων

Μία συντομογραφία δύο ορισμάτων:
- Θα αληθεύει αν τα ορίσματα έχουν την σχέση που περιγράφεται από την πρόταση κατηγορηματικής λογικής.
- Προσοχή! Όταν ορίζουμε μία συντομογραφία τα ορίσματα πρέπει να είναι ελεύθερες μεταβλητές στην πρόταση κατηγορηματικής λογικής.

Είδαμε ήδη την συντομογραφία
$\mathrm{D}(x,y) \equiv \exists z[x \approx \odot\, (y,z)]$ που αληθεύει αν το x διαιρείται από το y.

Σημαντικό είναι ότι από την στιγμή που έχουμε ορίσει μια συντομογραφία μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε περίπλοκους τύπους βάζοντας ορίσματα που σέβονται το συντακτικό κατηγορηματικής λογικής:

Παράδειγμα:
Η πρόταση Κατηγορηματικής Λογικής: $\forall x \forall y \forall z[\mathrm{D}(x,y) \wedge D(y,z) \rightarrow D(x,z)]$ μεταφράζεται στα ελληνικά: για κάθε τριάδα φυσικών: αν ο 1ος διαιρείται από τον 2ο και ο 2ος από τον 3ο, τότε και ο 1ος διαιρείται από τον 3ο.
Ενώ η πρόταση: $\forall x \forall y[\mathrm{D}(x,y) \wedge D(y,x) \rightarrow x \approx y]$ μεταφράζεται στα ελληνικά: «Για κάθε ζεύγος φυσικών, αν ο ένας διαιρεί τον άλλον τότε αυτοί είναι ίσοι»

Β. Θεωρία
4. Συντομογραφίες
2. Συντομογραφίες δύο ορισμάτων

Ασκηση 9: Να διατυπωθούν σε κατηγορηματική λογική προτάσεις που να δηλώνουν ότι:

1. Κάθε φυσικός διαιρείται ακριβώς από το 1
2. Το άθροισμα κάθε δύο φυσικών είναι άρτιος ή περιττός
3. Υπάρχει μοναδικός αριθμός που είναι πρώτος και άρτιος
4. Αν ένας αριθμός είναι πρώτος και δεν είναι το 2, είναι περιττός.
5. Το τετράγωνο κάθε άρτιου αριθμού είναι περιττός
6. Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 4, γράφεται σαν άθροισμα δύο περιττών πρώτων αριθμών (εικασία του Γκόλντμπαχ)

Β. Θεωρία
4. Συντομογραφίες
3. Συντομογραφίες χωρίς ορίσματα

Μία συντομογραφία χωρίς ορίσματα
- Θα αληθεύει αν ισχύει η πρόταση κατηγορηματικής λογικής.
- Δεν θα έχει ελεύθερες μεταβλητές.

Συνήθως μια συντομογραφία χωρίς ορίσματα, συμβολίζεται με τα γράμματα φ,ψ κ.λπ.

Παράδειγμα:
- Ορίζουμε τη συντομογραφία φ ως: $\varphi \equiv \exists x[P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y]$ να εκφράζει ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο πρώτοι αριθμοί.
- Ορίζουμε τη συντομογραφία ψ ως: $\psi \equiv \forall x[P(x) \rightarrow O(x)]$ θα εκφράζει ότι κάθε πρώτος αριθμός είναι περιττός.
- Μπορούμε να συνθέσουμε πιο περίπλοκες προτάσεις χρησιμοποιώντας τους τύπους αυτούς. Π.χ. ο τύπος $\varphi \rightarrow \psi$ διαβάζεται «Αν υπάρχουν τουλάχιστον 2 πρώτοι αριθμοί, τότε κάθε πρώτος αριθμός είναι περιττός» και είναι ψευδής (δίοτι έχει την μορφή: $\mathrm{A} \rightarrow \Psi$)

Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P που ερμηνεύεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ με το P(x,y) να αληθεύει αν x≤y. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε αυτήν την ερμηνεία και ποιες όχι;

1. $\forall x \exists y P(x,y)$

2. $\exists y \forall x P(y,x)$

3. $\exists y \forall x[P(y,x) \wedge x \neq y]$

4. $\forall x \forall y[P(x,y) \vee \neg P(y,x)]$

Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Θεωρούμε μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P που ερμηνεύεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ με το P(x,y) να αληθεύει αν x≥y. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε αυτήν την ερμηνεία και ποιες όχι;

1. $\forall x \exists y \exists z(P(x,y) \wedge P(x,z))$

2. $\forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \exists y \exists z(\neg \mathrm{P}(y,y) \wedge \neg P(z,z))$

3. $\forall x \exists y[P(y,x) \wedge x \neq y]$

4. $\exists x\ [P(x,x) \wedge \neg P(x,x)]$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Χρησιμοποιώντας τις συντομογραφίες που ορίσαμε στο μάθημα:
- E(x) αληθεύει αν το x είναι άρτιος
- O(x) αληθεύει αν το x είναι περιττός
- P(x) αληθεύει αν το x είναι πρώτος
- D(x,y) αληθεύει αν το x διαιρείται από το y

Γράψτε σε Κατηγορηματική Λογική τις προτάσεις:
1. Το άθροισμα κάθε δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

2. Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, τότε το τετράγωνό του διαιρείται με το 4.

3. Κάθε αριθμός που είναι πρώτος και άρτιος διαιρείται με το 2

4. Η σχέση $x^2+y^2=z^2$ αληθεύει για κάποιους φυσικούς αριθμός

5. Η σχέση $x^3+y^3=z^3$ δεν αληθεύει για καμία τριάδα φυσικών (θεώρημα Fermat)

6. Υπάρχει μοναδικός φυσικός που είναι πρώτος και άρτιος

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Διαδοχικά στην $\Gamma_1^{\theta\alpha}$:

1. Ορίστε μια συντομογραφία A(x) να αληθεύει αν ο x είναι πολλαπλάσιο του 3.

2. Ορίστε μια συντομογραφία E(x) να αληθεύει αν ο x είναι άρτιος.

3. Ορίστε μία συντομογραφία Q(x,y) να αληθεύει αν ο x είναι τριπλάσιος του y

4. Ορίστε μία συντομογραφία R(x,y) να αληθεύει αν ο x είναι τριπλάσιος του y και ο y είναι πολλαπλάσιο του 3.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Διαδοχικά στην $\Gamma_1^{\theta\alpha}$:
1. Διατυπώστε μία συντομογραφία E(x) να αληθεύει αν το x είναι το ελάχιστο στοιχείο των φυσικών αριθμών.

2. Διατυπώστε μία συντομογραφία M(x) να αληθεύει αν το x είναι το μέγιστο στοιχείο των φυσικών αριθμών.

3. Διατυπώστε τύπο που να εκφράζει ότι ο τύπος «Υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο στοιχείο και δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο»

Σημείωση: Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα συναρτησιακό σύμβολο, δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε την σταθερά 0 και το μόνο κατηγορηματικό σύμβολο που επιτρέπεται είναι το ≤

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Ένας επιμελής φοιτητής της ΠΛΗ20 διαπιστώνει ότι τα περισσότερα από τα κατηγορηματικά σύμβολα που περιλαμβάνει η ερμηνεία $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ είναι καταχρηστικά, υπό την έννοια ότι όλα μπορούν να οριστούν ως συντομογραφίες με χρήση του κατηγορήματος <(x,y) που αληθεύει αν το 1ο όρισμα (x) είναι μικρότερο του 2ου ορίσματος (y). Για να επαληθεύσετε την σκέψη του με χρήση μόνο του κατηγορήματος <(x,y).

1. Ορίστε την συντομογραφία >(x,y) να αληθεύει αν το x>y

2. Ορίστε την συντομογραφία ≤(x,y) να αληθεύει αν το x≤y

3. Ορίστε την συντομογραφία ≥(x,y) να αληθεύει αν το x ≥ y

4. Ορίστε την συντομογραφία =(x,y) να αληθεύει αν x=y

Μετα από επιπλέον παρατήρηση, ο επιμελής φοιτητής διαπιστώνει ότι και το κατηγόρημα <(x,y) μπορεί να οριστεί ως συντομογραφία με χρήση του συναρτησιακού συμβόλου ⊕
1. Ορίστε τη συντομογραφία <(x,y) να αληθευει αν x<y με χρήση του συναρτησιακού συμβόλου ⊕.