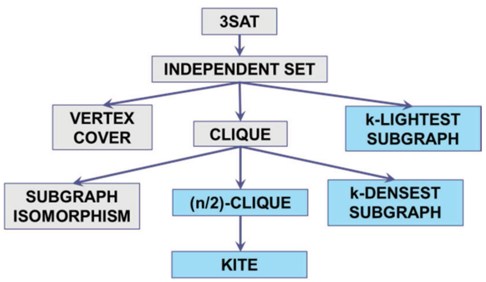
ΑΝΑΓΩΓΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΩΝ

Το πρόβλημα INDEPENDENT-SET:
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος ανεξάρτητο υποσύνολο k κορυφών.

(Υπενθύμιση: Ανεξάρτητο Σύνολο είναι υποσύνολο των κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή)

Το πρόβλημα VERTEX-COVER:
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κάλυμμα k κορυφών.

(Ορισμός: Κάλυμμα είναι υποσύνολο των κορυφών τέτοιο ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον το ένα άκρο της σε κορυφή του συνόλου)



Το πρόβλημα CLIQUE:
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κλίκα k κορυφών.

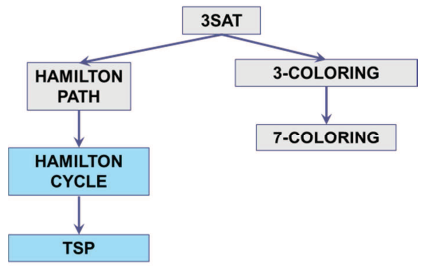
(Υπενθύμιση: Κλίκα είναι υποσύνολο των κορυφών που συνδέονται με ακμή)

Το πρόβλημα HAMILTON-PATH:
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E)
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος μονοπάτι Hamilton;

(Υπενθύμιση: Μονοπάτι Hamilton είναι μονοπάτι που περνά από κάθε κορυφή ακριβώς μια φορά)

Το πρόβλημα HAMILTON-CYCLE:
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E)
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κύκλο Hamilton;

(Υπενθύμιση: Κύκλος Hamilton είναι κύκλος που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά)



ΤΟ CLIQUE ΕΙΝΑΙ NP-ΠΛΗΡΕΣ

Το πρόβλημα CLIQUE:
- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E), ακέραιος k
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κλίκα k κορυφών.

1. Δείχνουμε ότι το CLIQUE ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου G=(V,E) με n=|V| κορυφές και m=|E| ακμές και ενός ακεραίου k:
- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(k) μαντεύουμε ένα υποσύνολο k κορυφών του γραφήματος
- Επαληθεύουμε ότι ανά δύο οι k κορυφές συνδέονται με ακμή. Ελέγχεται δηλαδή ότι όντως υπάρχουν οι k(k-1)/2 δυνατές ακμές. Ο έλεγχος απαιτεί χρόνο $O(k^2)$

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα CLIQUE ανήκει στο NP

2.Α) Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE

Δίνουμε αναγωγή από το INDEPENDENT-SET στο CLIQUE δηλαδή δεδομένου ενός γράφου G=(V,E) και ενός ακεραίου k του INDEPENDENT-SET κατασκευάζουμε γράφο G'=(V',E') και επιλέγουμε ακεραίο k' τέτοιο ώστε:

G έχει ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών ⟺ G' έχει κλίκα k' κορυφών

Η αναγωγή είναι η εξής:
- Επιλέγουμε G'=Συμπλήρωμα του G και θέτουμε k'=k

Ευθύ:
- Έστω ότι G έχει σύνολο ανεξαρτησίας k κορυφών
- Αυτό σημαίνει ότι οι k κορυφές δεν συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα
- Συνεπώς θα συνδέονται με ακμή στο συμπλήρωμα του G.
- Άρα το συμπλήρωμα του G έχει κλίκα k κορυφών.

Αντίστροφο:
- Έστω ότι το συμπλήρωμα του G έχει κλίκα k κορυφών.
- Αυτό σημαίνει ότι οι k κορυφές συνδέονται με ακμή στο συμπλήρωμα
- Άρα δεν θα συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα.
- Συνεπώς το αρχικό γράφημα έχει ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών.

2.Β) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Προφανώς ο χρόνος της αναγωγής είναι πολυωνυμικός (Τυπικά αν ο γράφος είναι αποθηκευμένος σε πίνακα γειτνίασης, σαρώνουμε τον πίνακα και μετατρέπουμε κάθε 0 σε 1 και κάθε 1 σε 0 (εκτός των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου). Αυτό γίνεται σε χρόνο $O(n^2)$ όπου n οι κορυφές του γραφήματος)