ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: NP-πληρότητα

Μάθημα 6.2:
Αναγωγές Προτασιακής Λογικής

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- (-)

Επίπεδο Β
- Το 3SAT είναι NP-πλήρες
- Το 5SAT είναι NP-πλήρες
- Το AtLeast3SAT είναι NP-πλήρες
- Το AlmostSAT είναι NP-πλήρες

Επίπεδο Γ
- Το 1-in-3SAT είναι NP-πλήρες
- Το NAE-3SAT είναι NP-πλήρες
- Το NOT-ALL-ZERO-SAT είναι NP-πλήρες

Β. Θεωρία

1. Εισαγωγή

1. Σχήμα Απόδειξης Αναγωγής

Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Αποδεικνύουμε ότι $\Pi \in NP$
    - Είτε δίνοντας μη ντετερμινιστική μηχανή Turing-μάντη που «μαντεύει» την λύση και έπειτα επαληθεύει ότι είναι όντως λύση του προβλήματος.
    - Είτε δίνοντας ντετερμινιστική μηχανή Turing-επαληθευτή που δεδομένης μιας λύσης (πιστοποιητικό) επαληθεύει σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο ότι είναι λύση του προβλήματος.
2. Δίνουμε μια πολυωνυμική αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Π' στο πρόβλημα Π (Η αναγωγή συμβολίζεται με Π'≤Π)
    - Όπου δίνουμε έναν κανόνα μετασχηματισμού της εισόδου Ε' του γνωστού προβλήματος Π' σε είσοδο Ε του αγνώστου προβλήματος Π έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο:

      Αποτέλεσμα του Π(Ε) **ισοδύναμο** με αποτέλεσμα του Π'(Ε΄)

    Και δείχνουμε ότι η κατασκευή θέλει πολυωνυμικό χρόνο

- Θα χρησιμοποιούμε τον «μάντη» για να αποδεικνύουμε ότι ανήκει στο NP.
- Αν αποδείξουμε μόνο το $2^{ο}$ σκέλος, τότε το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο (NP-Hard)

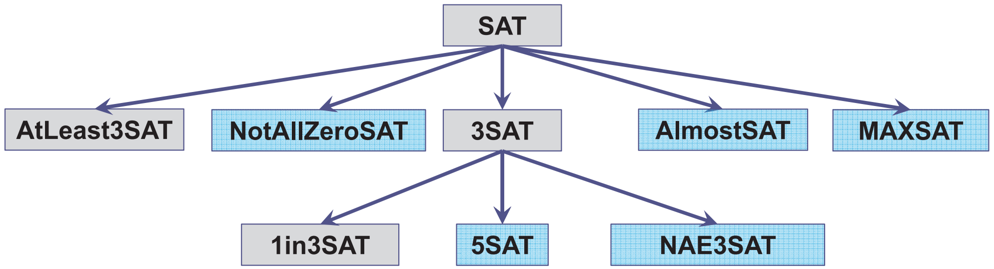
Β. Θεωρία

1. Εισαγωγή

2. Αναγωγές της Προτασιακής Λογικής

- Δεδομένου ότι το πρόβλημα SAT είναι NP-πλήρες, θα δείξουμε ότι και άλλα προβλήματα της προτασιακής λογικής είναι επίσης NP-πλήρη.

- Οι αναγωγές που θα δούμε παρουσιάζονται στο παρακάτω δένδρο αναγωγών:



Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

Η διατύπωση του προβλήματος 3SAT έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα 3SAT:
- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή όπου κάθε πρόταση έχει ακριβώς 3 όρους.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

Παραδείγματα στιγμιότυπων:

Παράδειγμα 1: $\varphi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$ που είναι ικανοποιήσιμη, π.χ. με την αποτίμηση $x_1 = \mathrm{A}, x_2 = \mathrm{A}, x_3 = \mathrm{A}, x_4 = \mathrm{A}$

Παράδειγμα 2: $\varphi_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge$
$\wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$
Η οποία δεν είναι ικανοποιήσιμη.

- Για να το αποδείξουμε:
  1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
  2. Ανάγουμε το πρόβλημα SAT στο πρόβλημα 3SAT σε πολ/κο χρόνο

Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

1. Το 3SAT ανήκει στο NP

1. Δείχνουμε ότι το 3SAT ανήκει στο NP

Δεδομένης μίας φόρμουλας φ με m προτάσεις και n μεταβλητές

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(n) μαντεύουμε μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών και έπειτα
- σε χρόνο O(m) επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί την φόρμουλα

Ο χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα 3SAT ανήκει στο NP

Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το SAT ανάγεται στο 3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Α) Δίνουμε αναγωγή από το SAT στο 3SAT

Δίνουμε αναγωγή από το SAT στο 3SAT, δηλαδή δεδομένης μιας φόρμουλας φ του SAT, κατασκευάζουμε φόρμουλα φ' του 3SAT:

φ ικανοποιήσιμη⇔φ' ικανοποιήσιμη

Για κάθε πρόταση του SAT κατασκευάζουμε ένα σύνολο από προτάσεις του 3SAT. Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πλήθος των όρων (έστω k) της πρότασης:

- **Αν k=1**, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (\boldsymbol{x_1})$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 4 προτάσεις 3SAT:
  $$\boldsymbol{C' = (x_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (x_1 \vee \overline{y_1} \vee y_2) \wedge (x_1 \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2})}$$
  όπου y_1, y_2 είναι νέες μεταβλητές που δεν υπήρχαν πριν στην φόρμουλα.

  Αν $\mathrm{C} = A$, έχω $x_1 = \mathrm{A}$ άρα $C' = (\mathrm{A} \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\mathrm{A} \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (\mathrm{A} \vee \overline{y_1} \vee y_2) \wedge (\mathrm{A} \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}) = \mathrm{A}$

  Αν $\mathrm{C} = \Psi$, έχω $x_1 = \Psi$ άρα $C' = (\Psi \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\Psi \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (\Psi \vee \overline{y_1} \vee y_2) \wedge (\Psi \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}) = \Psi$
  Άρα για οποιοδήποτε συνδυασμό αποτιμήσεων των y_1, y_2 ισχύει ότι: $\mathrm{C}' = \Psi$

Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το SAT ανάγεται στο 3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

- **Αν k=2**, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $C=(x_1 \vee x_2)$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 2 προτάσεις 3SAT:
$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{y_1})$$
όπου y_1 είναι νέα μεταβλητή που δεν υπήρχε πριν στην φόρμουλα.

  Αν $C = A$, έχω $x_1 \vee x_2 = A$ άρα $C' = (A \vee y_1) \wedge (A \vee \overline{y_1}) = A$

  Αν $C = \Psi$, έχω $x_1 \vee x_2 = \Psi$ άρα $C' = (\Psi \vee y_1) \wedge (\Psi \vee \overline{y_1}) = \Psi$
  Άρα για οποιαδήποτε αποτίμηση της y_1 ισχύει ότι: $C' = \Psi$

- **Αν k=3**, κρατάμε την αρχική πρόταση, δηλαδή θέτουμε: $C' = C$

Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το SAT ανάγεται στο 3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

- **Αν k=4**, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $C=(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 2 προτάσεις 3SAT:
$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{y_1})$$
όπου y_1 είναι νέα μεταβλητή που δεν υπήρχε πριν στην φόρμουλα.

  Αν $C = A$, τότε τουλάχιστον ένας από τους όρους $x_1 \vee x_2$ και $x_3 \vee x_4$ είναι αληθής:
  - Αν $x_1 \vee x_2 = A$ θέτοντας $y_1 = \Psi$ ισχύει $C' = (A \vee \Psi) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee A) = A$
  - Αν $x_3 \vee x_4 = A$ θέτοντας $y_1 = A$ ισχύει $C' = (x_1 \vee x_2 \vee A) \wedge (A \vee \Psi) = A$

  Αν $C = \Psi$, έχω $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 = \Psi$ άρα $C' = (\Psi \vee y_1) \wedge (\Psi \vee \overline{y_1}) = \Psi$
  Άρα για οποιαδήποτε αποτίμηση της y_1 ισχύει ότι: $C' = \Psi$

Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το SAT ανάγεται στο 3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

- **Αν k=5**, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $C=(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$ τότε την σπάμε στην ισοδύναμη πρόταση
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee y_1) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee \overline{y_1})$$
όπου y_1 είναι νέα μεταβλητή που δεν υπήρχε πριν στην φόρμουλα. Και για να είναι 3SAT
  σπάμε την πρόταση των 4 μεταβλητών σε 2 προτάσεις 3 μεταβλητών:
$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_2) \wedge (x_3 \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee \overline{y_1})$$
  όπου y_2 είναι νέα μεταβλητή που δεν υπήρχε πριν στην φόρμουλα.
- **Αν k>5**, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $C=(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$ τότε την σπάμε στην ισοδύναμη πρόταση
$$\left(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{\lfloor k/2 \rfloor} \vee y_1\right) \wedge \left(x_{\lfloor k/2 \rfloor+1} \vee \cdots \vee x_k \vee \overline{y_1}\right)$$
  όπου y_1 είναι νέα μεταβλητή που δεν υπήρχε πριν στην φόρμουλα. Έπειτα επαναλαμβάνουμε αναδρομικά στις δύο υποπροτάσεις μέχρι να αποκτήσει κάθε μία από αυτές ακριβώς τρείς όρους

Β. Θεωρία

2. Το 3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το SAT ανάγεται στο 3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Β) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Ο χρόνος της μετατροπής της φόρμουλας του SAT σε ισοδύναμη φόρμουλα του 3SAT είναι πολυωνυμικός. Πράγματι το στιγμιότυπο του SAT αντικαθίσταται με στιγμιότυπο που είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερο από αυτό.

Αποδεικνύεται ότι μία πρόταση με k μεταβλητές θα αντικατασταθεί από πλήθος προτάσεων που καθορίζονται από την αναδρομική σχέση T(k)=2T(k/2) με T(3)=1 και η οποία έχει πολυωνυμική λύση.

Β. Θεωρία

3. Το 1in3SAT είναι NP-πλήρες

Η διατύπωση του προβλήματος 1in3SAT έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα 1in3SAT:
- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα 3SAT φ.
- **Ερώτημα:** Υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί την φ, αλλά σε κάθε πρόταση να ικανοποιείται μόνο ένας από τους 3 όρους.

Παραδείγματα στιγμιότυπων:

Παράδειγμα 1: $\varphi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$ είναι 1in3 ικανοποιήσιμη, π.χ. με την αποτίμηση $x_1 = \text{Α}, x_2 = \text{Α}\ , x_3 = \Psi\ , x_4 = \Psi$

Παράδειγμα 2: $\varphi_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$
Η οποία δεν είναι 1in3 ικανοποιήσιμη.

- Για να το αποδείξουμε:
  1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
  2. Ανάγουμε το πρόβλημα 3SAT στο πρόβλημα 1in3SAT σε πολ/κο χρόνο

Δημήτρης Ψούνης, ΠΛΗ30, Μάθημα 6.2: Αναγωγές Προτασιακής Λογικής 14
www.psounis.gr

Β. Θεωρία

3. Το 1in3SAT είναι NP-πλήρες

1. Το 1in3SAT ανήκει στο NP

Δείχνουμε ότι το 1in3SAT ανήκει στο NP

Δεδομένης μίας φόρμουλας φ με m προτάσεις και n μεταβλητές

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(n) μαντεύουμε μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών και έπειτα
- σε χρόνο O(m) επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί την φόρμουλα με τον περιορισμό σε κάθε πρόταση να αληθεύει ακριβώς ένας όρος.

Ο χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα 1in3SAT ανήκει στο NP

Δημήτρης Ψούνης, ΠΛΗ30, Μάθημα 6.2: Αναγωγές Προτασιακής Λογικής 15
www.psounis.gr

Β. Θεωρία

3. Το 1in3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το 3SAT ανάγεται στο 1in3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Α) Δίνουμε αναγωγή από το 3SAT στο 1in3SAT

Δίνουμε αναγωγή από το 3SAT στο 1in3SAT, δηλαδή δεδομένης μιας φόρμουλας φ του 3SAT, κατασκευάζουμε φόρμουλα φ' του 1in3SAT:

φ ικανοποιήσιμη
⇔
φ' ικανοποιήσιμη από αποτίμηση που ακριβώς ένας όρος κάθε πρότασης είναι αληθής

Για κάθε πρόταση του 3SAT κατασκευάζουμε ένα σύνολο από προτάσεις του 1in3SAT. Συγκεκριμένα την πρόταση $(\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{x_3})$ την αντικαθιστούμε με την:

$$(\overline{\boldsymbol{x_1}} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \overline{\boldsymbol{x_3}})$$

Δημήτρης Ψούνης, ΠΛΗ30, Μάθημα 6.2: Αναγωγές Προτασιακής Λογικής 16
www.psounis.gr

Β. Θεωρία

3. Το 1in3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το 3SAT ανάγεται στο 1in3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

$$(\overline{\boldsymbol{x_1}} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \overline{\boldsymbol{x_3}})$$

- Αν $(\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{x_3}) = \mathbf{A}$ τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:
- $x_1 = \text{Α}, x_2 = \text{Α}, x_3 = \text{Α}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \boldsymbol{\Psi})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \text{Α}, \psi_2 = \Psi, \psi_3 = \Psi, \psi_4 = \text{Α}$
- $x_1 = \text{Α}, x_2 = \text{Α}, x_3 = \Psi\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \mathbf{A})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \text{Α}, \psi_2 = \Psi, \psi_3 = \Psi, \psi_4 = \Psi$
- $x_1 = \text{Α}, x_2 = \Psi, x_3 = \text{Α}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \boldsymbol{\Psi})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \Psi, \psi_2 = \text{Α}, \psi_3 = \Psi, \psi_4 = \text{Α}$
- $x_1 = \text{Α}, x_2 = \Psi, x_3 = \Psi\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \mathbf{A})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \Psi, \psi_2 = \text{Α}, \psi_3 = \Psi, \psi_4 = \Psi$
- $x_1 = \Psi, x_2 = \text{Α}, x_3 = \text{Α}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \boldsymbol{\Psi})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \Psi, \psi_2 = \Psi, \psi_3 = \Psi, \psi_4 = \text{Α}$
- $x_1 = \Psi, x_2 = \text{Α}, x_3 = \Psi\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \mathbf{A})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \Psi, \psi_2 = \Psi, \psi_3 = \Psi, \psi_4 = \Psi$
- $x_1 = \Psi, x_2 = \Psi, x_3 = \text{Α}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:\ (\mathbf{A} \vee \boldsymbol{\psi_1} \vee \boldsymbol{\psi_2}) \wedge (\boldsymbol{\psi_2} \vee \boldsymbol{\Psi} \vee \boldsymbol{\psi_3}) \wedge (\boldsymbol{\psi_3} \vee \boldsymbol{\psi_4} \vee \boldsymbol{\Psi})$
  - Άρα είναι 1in3 ικανοποιήσιμη με την αποτίμηση $\psi_1 = \Psi, \psi_2 = \text{Α}, \psi_3 = \text{Α}, \psi_4 = \Psi$

Β. Θεωρία
3. Το 1in3SAT είναι NP-πλήρες
2. Το 3SAT ανάγεται στο 1in3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

$$(\overline{x_1} \vee \psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_2 \vee x_2 \vee \psi_3) \wedge (\psi_3 \vee \psi_4 \vee \overline{x_3})$$

- Αν $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) = \Psi$ τότε υποχρεωτικά:
- $x_1 = \Psi, x_2 = \Psi, x_3 = \Psi$ $\textit{τότε:}$ $(\mathbf{A} \vee \psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_2 \vee \Psi \vee \psi_3) \wedge (\psi_3 \vee \psi_4 \vee \mathbf{A})$
  - Άρα δεν είναι 1in3 ικανοποιήσιμη, αφού πρέπει υποχρεωτικά $\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi_4=\Psi$

Β. Θεωρία
3. Το 1in3SAT είναι NP-πλήρες
2. Το 3SAT ανάγεται στο 1in3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Β) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Κάθε φόρμουλα του 3SAT με n μεταβλητές και m προτάσεις μετατρέπεται σε μία ισοδύναμη του 1in3SAT με n+4m μεταβλητές και 3m Προτάσεις.

Κάθε μετατροπή γίνεται σε σταθερό χρόνο, άρα η αναγωγή είναι πολυωνυμική.

Β. Θεωρία
4. Το NAE3SAT είναι NP-πλήρες

Η διατύπωση του προβλήματος NAE3SAT έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα NAE3SAT:
- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα 3SAT φ.
- **Ερώτημα:** Υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί την φ, αλλά σε κάθε πρόταση να μην αληθεύουν και οι 3 όροι

Παραδείγματα στιγμιότυπων:

Παράδειγμα 1: $\varphi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$ είναι NAE3SAT ικανοποιήσιμη, π.χ. με την αποτίμηση $x_1 = A, x_2 = A, x_3 = \Psi, x_4 = \Psi$

Παράδειγμα 2: $\varphi_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$
Η οποία δεν είναι NAE3SAT ικανοποιήσιμη.

➢ Για να το αποδείξουμε:
1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα 3SAT στο πρόβλημα NAE3SAT σε πολ/κο χρόνο

Β. Θεωρία
4. Το NAE3SAT είναι NP-πλήρες
1. Το NAE3SAT ανήκει στο NP

Δείχνουμε ότι το NAE3SAT ανήκει στο NP

Δεδομένης μίας φόρμουλας φ με m προτάσεις και n μεταβλητές

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(n) μαντεύουμε μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών και έπειτα
- σε χρόνο O(m) επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί την φόρμουλα με τον περιορισμό σε κάθε πρόταση να αληθεύουν 1 ή 2 όρους.

Ο χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα NAE3SAT ανήκει στο NP

Β. Θεωρία

4. Το NAE3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το 3SAT ανάγεται στο NAE3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Α) Δίνουμε αναγωγή από το 3SAT στο NAE3SAT

Δίνουμε αναγωγή από το 3SAT στο NAE3SAT, δηλαδή δεδομένης μιας φόρμουλας φ του 3SAT, κατασκευάζουμε φόρμουλα φ' του NAE3SAT:

φ ικανοποιήσιμη
⇔
φ' ικανοποιήσιμη από αποτίμηση που ικανοποιεί 1 ή 2 όρους από κάθε πρόταση

Για κάθε πρόταση του 3SAT κατασκευάζουμε ένα σύνολο από προτάσεις του NAE3SAT.

Συγκεκριμένα γίνεται πρώτα μία αντίστοίχιση κάθε μεταβλητής x στις μεταβλητές x_1, x_2 έτσι ώστε:
- Εάν x=1, τότε x_1=1, x_2=0 ή x_1=0, x_2=1
- Εάν x=0, τότε x_1=0, x_2=0 ή x_1=1, x_2=1

Β. Θεωρία

4. Το NAE3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το 3SAT ανάγεται στο NAE3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Α) Δίνουμε αναγωγή από το 3SAT στο NAE3SAT

Η πρόταση $(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z})$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

$$(\boldsymbol{x_1} \wedge \overline{\boldsymbol{x_2}}) \vee (\overline{\boldsymbol{x_1}} \wedge \boldsymbol{x_2}) \vee (\boldsymbol{y_1} \wedge \overline{\boldsymbol{y_2}}) \vee (\overline{\boldsymbol{y_1}} \wedge \boldsymbol{y_2}) \vee (\boldsymbol{z_1} \wedge \overline{\boldsymbol{z_2}}) \vee (\overline{\boldsymbol{z_1}} \wedge \boldsymbol{z_2})$$

Η οποία μπορεί να αντικατασταθεί με τις ακόλουθες 6 προτάσεις 6 μεταβλητών:

$$\begin{array}{c}
\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2} \vee \boldsymbol{z_1} \vee \boldsymbol{z_2} \\
\overline{\boldsymbol{x_1}} \vee \overline{\boldsymbol{x_2}} \vee \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2} \vee \boldsymbol{z_1} \vee \boldsymbol{z_2} \\
\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \overline{\boldsymbol{y_1}} \vee \overline{\boldsymbol{y_2}} \vee \boldsymbol{z_1} \vee \boldsymbol{z_2} \\
\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2} \vee \overline{\boldsymbol{z_1}} \vee \overline{\boldsymbol{z_2}} \\
\overline{\boldsymbol{x_1}} \vee \overline{\boldsymbol{x_2}} \vee \overline{\boldsymbol{y_1}} \vee \overline{\boldsymbol{y_2}} \vee \boldsymbol{z_1} \vee \boldsymbol{z_2} \\
\overline{\boldsymbol{x_1}} \vee \overline{\boldsymbol{x_2}} \vee \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2} \vee \overline{\boldsymbol{z_1}} \vee \overline{\boldsymbol{z_2}} \\
\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \overline{\boldsymbol{y_1}} \vee \overline{\boldsymbol{y_2}} \vee \overline{\boldsymbol{z_1}} \vee \overline{\boldsymbol{z_2}} \\
\overline{\boldsymbol{x_1}} \vee \overline{\boldsymbol{x_2}} \vee \overline{\boldsymbol{y_1}} \vee \overline{\boldsymbol{y_2}} \vee \overline{\boldsymbol{z_1}} \vee \overline{\boldsymbol{z_2}}
\end{array}$$

Και κάθε πρόταση 6 μεταβλητών $\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2} \vee \boldsymbol{z_1} \vee \boldsymbol{z_2}$ μετατρέπεται σόπως κάναμε στην απόδειξη της πρόταση 1in3SAT στην ισοδύναμη πρόταση:

$$(\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{y_2} \vee \boldsymbol{c}) \wedge (\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{z_1} \vee \boldsymbol{z_2})$$

Β. Θεωρία

4. Το NAE3SAT είναι NP-πλήρες

2. Το 3SAT ανάγεται στο NAE3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο

2.Β) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Μία 3SAT φόρμουλα με n μεταβλητές και m προτάσεις μετατρέπεται σε μία ισοδύναμη του NAE3SAT με 2n+24m μεταβλητές και 32m προτάσεις.

Κάθε μετατροπή πρότασης γίνεται σε σταθερό χρόνο, άρα η αναγωγή είναι πολυωνυμική.

Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Το SAT ανάγεται στο NOT-ALL-ZERO-SAT

Χρησιμοποιώντας το NP-πλήρες πρόβλημα της ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ (SAT) αποδείξτε ότι το παρακάτων πρόβλημα είναι NP-πλήρες: Δοθείσης λογικής έκφρασης: $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ σε συζευκτική κανονική μορφή, ορισμένη σε n μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ η οποία δεν ικανοποιείται από την ανάθεση τιμών 0^nερωτάται αν υπάρχει ανάθεση τιμών $t \in \{0,1\}^*$ που να ικανοποιεί την φόρμουλα φ;

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2
Το 3SAT ανάγεται στο 5SAT

Χρησιμοποιώντας το NP-πλήρες πρόβλημα της 3-ικανοποιησιμότητας (3SAT) να αποδείξετε ότι το πρόβλημα της 5-ικανοποιησιμότητας είναι NP-πλήρες.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3
Το SAT ανάγεται στο AtLeast3SAT

Το πρόβλημα της τριπλής ικανοποιησιμότητας, ορίζεται ως εξής. Δίνεται λογική έκφραση φ σε κανονική συζευκτική μορφή ορισμένη σε n μεταβλητές με m προτάσεις. Ερωτάται αν υπάρχουν τουλάχιστον 3 αναθέσεις τιμών που να ικανοποιούν την φ. Αποδείξτε ότι η τριπλή ικανοποιησιμότητα είναι NP-πλήρες πρόβλημα.Για την απόδειξη χρησιμοποιήστε το γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας (SAT).

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4
Το SAT ανάγεται στο MAXSAT

Το πρόβλημα **MAXSAT** ορίζεται ως εξής: Δίνεται λογική πρόταση σε Συζευκτική Κανονική Μορφή, ορισμένη σε n μεταβλητές, με m προτάσεις, και θετικός ακέραιος k. Υπάρχει ανάθεση τιμών που να ικανοποιεί τουλάχιστον k προτάσεις της έκφρασης; Αποδείξτε ότι το πρόβλημα **MAXSAT** είναι NP-πλήρες.
*ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε το γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα **SAT**. Το πρόβλημα **SAT** ορίζεται ως εξής: Δίνεται λογική έκφραση σε Συζευκτική Κανονική Μορφή, ορισμένη σε n μεταβλητές, με m προτάσεις. Υπάρχει ανάθεση τιμών που να ικανοποιεί την έκφραση;*

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 5
Το SAT ανάγεται στο AlmostSAT

Το πρόβλημα **ALMOST SAT** ορίζεται ως εξής: Δίνεται λογική έκφραση Φ σε Συζευκτική Κανονική Μορφή, ορισμένη σε n μεταβλητές, με m προτάσεις. Υπάρχει ανάθεση τιμών που να ικανοποιεί τουλάχιστον m-1 προτάσεις της Φ;

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα **ALMOST SAT** είναι NP-πλήρες. Για την αναγωγή χρησιμοποιήστε το γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα **SAT**.

Το πρόβλημα **SAT** ορίζεται ως εξής: Δίνεται λογική έκφραση Ψ σε Συζευκτική Κανονική Μορφή, ορισμένη σε n μεταβλητές, με m προτάσεις. Υπάρχει ανάθεση τιμών που να ικανοποιεί την Ψ;