ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ15

Α'ΜΕΡΟΣ: ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Πόσοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων 6×6 υπάρχουν στους οποίους κάθε στοιχείο του πίνακα είναι 0 ή 1;

1. Όσοι ο συντελεστής του x^6 στη γεννήτρια συνάρτηση $(1+x)^{36}$.

2. Όσοι ο συντελεστής του x^{36} / 36! στη γεννήτρια συνάρτηση e^{2x}

3. Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 36.

4. Όσοι οι τρόποι διανομής 36 διακεκριμένων αντικειμένων σε 2 διακεκριμένες υποδοχές, αν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές.

(2) Έστω Α, σύνολο με n στοιχεία

1. Τα υποσύνολα του Α με k στοιχεία είναι ίσα με τα υποσύνολα του Α με n-k στοιχεία.
2. Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των στοιχείων του Α σε μια σειρά είναι $n!$
3. Ο αριθμός των τρόπων επιλογής k στοιχείων του συνόλου, όταν μετά από κάθε επιλογή το στοιχείο επανατοποθετείται είναι $\binom{n+k-1}{k}$
4. Ο αριθμός των τρόπων επιλογής k στοιχείων του συνόλου, όταν μετά από κάθε επιλογή το στοιχείο επανατοποθετείται είναι ίσος με το πλήθος των μεταθέσεων k όμοιων πράσινων μπαλών και $n-1$ όμοιων κόκκινων μπαλών

(3) Έστω f τύπος της ΠΛ που δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση και p προτασιακή μεταβλητή.

1. Ο τύπος $f \vee \neg f \to p$ είναι ταυτολογία.
2. Ο τύπος $\neg f \to (p \to \neg f)$ είναι ταυτολογία.
3. Ο τύπος $(f \wedge \neg f) \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία.
4. Ο τύπος $(p \vee \neg p) \to \neg(p \to (\neg f \to p))$ είναι ταυτολογία.

(4) *Στους παρακάτω τύπους τα p_1, p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές.*

1. Μια αντίφαση συνεπάγεται ταυτολογικά κάθε τύπο

2. Μία ταυτολογία συνεπάγεται ταυτολογικά κάθε τύπο

3. Υπάρχει μία μόνο αποτίμηση των p_1, p_2 που δεν ικανοποιεί τον τύπο $(p_1 \wedge p_2) \to p_1$.

4. Ο τύπος $(p_1 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_1$ είναι ταυτολογία.

(5) Δίδεται πρωτοβάθμια γλώσσα που περιλαμβάνει τα κατηγορηματικά σύμβολα P/2, Q/2, τα συναρτησιακά σύμβολα f/2, g/3 και τις σταθερές c,d. Θεωρώντας ότι οι x,y είναι μεταβλητές απαντήστε αν αληθεύουν οι ακόλουθες δηλώσεις:

1. Η έκφραση $\forall x P(x,x)$ είναι μη ατομικός τύπος

2. Η έκφραση $g(f(x,x), f(c,c), f(d,d))$ είναι όρος

3. Η έκφραση $x = f(x,c)$ είναι όρος

4. Η έκφραση $\forall x P(x,x) \to P(x,x)$ είναι πρόταση

(6) Αποφασίστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς στην γλώσσα της θεωρίας αριθμών όπου $P(x,y)$ αληθεύει αν $x \geq y$

1. $\forall x \exists y P(x,y)$

2. $\exists x \forall y P(x,y)$

3. $\forall x \exists y [x \neq y \wedge P(x,y)]$

4. $\exists x \forall y [x \neq y \wedge P(x,y)]$

Β'ΜΕΡΟΣ: ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Άσκηση 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(Ερώτημα 1)

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά 50 φοιτητές του Α' έτους, 30 φοιτητές του Β' έτους, και 20 φοιτητές του Γ' έτους, όταν:

α) οι φοιτητές του ίδιου έτους δεν θεωρούνται διακεκριμένοι

b) οι φοιτητές του ίδιου έτους θεωρούνται διακεκριμένοι

(Ερώτημα 2)

Σε ένα παιχνίδι μπιλιάρδο υπάρχουν 9 όμοιες μπάλες κόκκινου χρώματος και 6 μπάλες διαφορετικών μεταξύ τους χρωμάτων που δεν είναι κόκκινες. Στο μπιλιάρδο υπάρχουν 6 διακεκριμένες τρύπες. Υπολογίστε τους τρόπους να μπουν όλες οι μπάλες στις τρύπες όταν κάθε μπάλα μπαίνει σε οποιαδήποτε τρύπα και δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των μπαλών στις τρύπες.

Άσκηση 2 : ΛΟΓΙΚΗ

Άσκηση 2.1: Προτασιακή Λογική

(Ερώτημα 1)

Να δείξετε ότι $|\!-_{\Pi\Lambda} [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\chi] \rightarrow [\chi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)]$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γνωστά θεωρήματα για τον Προτασιακό Λογισμό (απαγωγή, αντιθετοαναστροφή, εις άτοπον απαγωγή, κλπ.) αλλά όχι τα θεωρήματα εγκυρότητας – πληρότητας.

(Ερώτημα 2)

Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Πληρότητας και Εγκυρότητας, δείξτε ότι $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν φ |- ψ και ψ |- φ.

Άσκηση 2.2: Κατηγορηματική Λογική

(Ερώτημα 1)

Να γράψετε τις ακόλουθες προτάσεις στην γλώσσα της θεωρίας αριθμών

1. Ένας πρώτος αριθμός δεν διαιρείται με το 4
2. Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών δεν είναι πρώτος
3. Υπάρχει αριθμός που είναι άρτιος και δεν είναι πρώτος