# Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ



**Ορισμός:** Ορίζουμε τη γλώσσα των κατευθυνόμενων γραφημάτων να συμπεριλαμβάνει ερμηνείες που περιλαμβάνουν τα εξής στοιχεία:

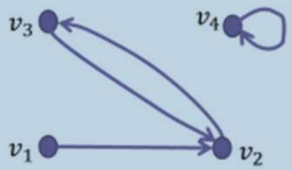
- Το σύμπαν είναι το σύνολο κορυφών |A|={1,2,…,n} (Γράφημα με n κορυφές)
- Το κατηγορηματικό σύμβολο P(x,y) είναι αληθές αν υπάρχει η κατευθυνόμενη ακμή από το x στο y.

<u>Παράδειγμα: Ερμηνείας- - Γραφήματος</u>

A = { |A|$=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$P^A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_4, v_4)\}$

}




<u>Συντομογραφίες στα κατευθυνόμενα γραφήματα:</u>

- K(x) αληθεύει αν η x είναι απομονωμένη:
$$K(x) \equiv \forall y[P(x,y) \vee P(y,x) \rightarrow x \approx y]$$
- $\text{out}_0(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 0
$$out_0(x) \equiv \forall y[\neg P(x,y)]$$
- $\text{out}_{\geq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≥ 1
$$\text{out}_{\geq 1}(x) \equiv \exists y[P(x,y)]$$
- $\text{out}_1(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 1
$$\text{out}_1(x) \equiv \exists y[P(x,y) \wedge \forall z(P(x,z) \rightarrow z \approx y)]$$
- $\text{out}_{\leq 1}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≤ 1
$$\text{out}_{\leq 1}(x) \equiv out_0(x) \vee \text{out}_1(x)$$
- $\text{out}_{\geq 2}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≥ 2
$$\text{out}_{\geq 2}(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z]$$
- $\text{out}_2(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό 2
$$\text{out}_2(x) \equiv \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z \wedge$$
$$\wedge \forall w(P(x,w) \rightarrow w \approx y \vee w \approx z)]$$
- $\text{out}_{\leq 2}(x)$ αληθεύει αν η κορυφή x έχει έξω βαθμό ≤ 1
$$\text{out}_{\leq 2}(x) \equiv out_0(x) \vee \text{out}_1(x) \vee \text{out}_2(x)$$

*<u>Αντιστρέφοντας τη σειρά των ορισμάτων στο κατηγόρημα P(x,y) έχουμε συντομογραφίες για τον έσω βαθμό.</u>*

**Παράδειγμα:** Να ερμηνεύσετε τις προτάσεις σε φυσική γλώσσα:

| | Τύπος | Μετάφραση |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x P(x,x)$ | Κάθε κορυφή έχει ανακύκλωση |
| 2 | $\exists x P(x,x)$ | Υπάρχει κορυφή με ανακύκλωση |
| 3 | $\forall x \forall y P(x,y)$ | Το γράφημα είναι πλήρες |
| 4 | $\exists x \exists y P(x,y)$ | Το γράφημα έχει τουλάχιστον μία ακμή |
| 5 | $\forall x \exists y P(x,y)$ | Κάθε κορυφή έχει έξω βαθμό τουλάχιστον 1 |
| 6 | $\exists x \forall y P(x,y)$ | Υπάρχει κορυφή με έξω βαθμό n [n: πλήθος κορυφών] |
| 7 | $\forall y \forall x P(x,y)$ | (ίδιο με 3 από Νόμο Κατανομής Ποσοδεικτών) |
| 8 | $\exists y \exists x P(x,y)$ | (ίδιο με 4 από Νόμο Κατανομής Ποσοδεικτών) |
| 9 | $\exists y \forall x P(x,y)$ | Υπάρχει κορυφή με έσω βαθμό n [n: πλήθος κορυφών] |
| 10 | $\forall y \exists x P(x,y)$ | Κάθε κορυφή έχει έσω βαθμό τουλάχιστον 1 |

**<u>Ορισμοί σε Κατευθυνόμενα Γραφήματα:</u>**

**Ανακυκλώσεις** (Είναι ακμές με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή)

**Παράλληλες Ακμές** (Είναι ακμές με κοινά άκρα και κοινή φορά)

**Αντιπαράλληλες ακμές** (Είναι ακμές με κοινά άκρα και αντίθετη φορά)

**Μονοπάτι P μήκους n** είναι μια ακολουθία n διαδοχικών ακμών (ακολουθώντας τις κατευθύνσεις τους)

**Απλό μονοπάτι** είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

**Κύκλος** είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή

**Απλός Κύκλος** είναι ένας κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

**Έσω Βαθμός** της κορυφής $v_i$ είναι το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφη $v_i$

**Έξω Βαθμός** της κορυφής $v_i$ είναι το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφη $v_i$

**Απομονωμένη κορυφή** είναι μία κορυφή στην οποία δεν εισέρχονται ούτε εξέρχονται ακμές από άλλες κορυφές.