Το πρόβλημα SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

- Παράδειγμα 1: $\varphi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$ που είναι ικανοποιήσιμη, π.χ. με την αποτίμηση $x_1 = \mathrm{A}, x_2 = \mathrm{A}, x_3 = \mathrm{A}, x_4 = \mathrm{A}$
- Παράδειγμα 2: $\varphi_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$. Η οποία δεν είναι ικανοποιήσιμη.

Το πρόβλημα 3SAT:

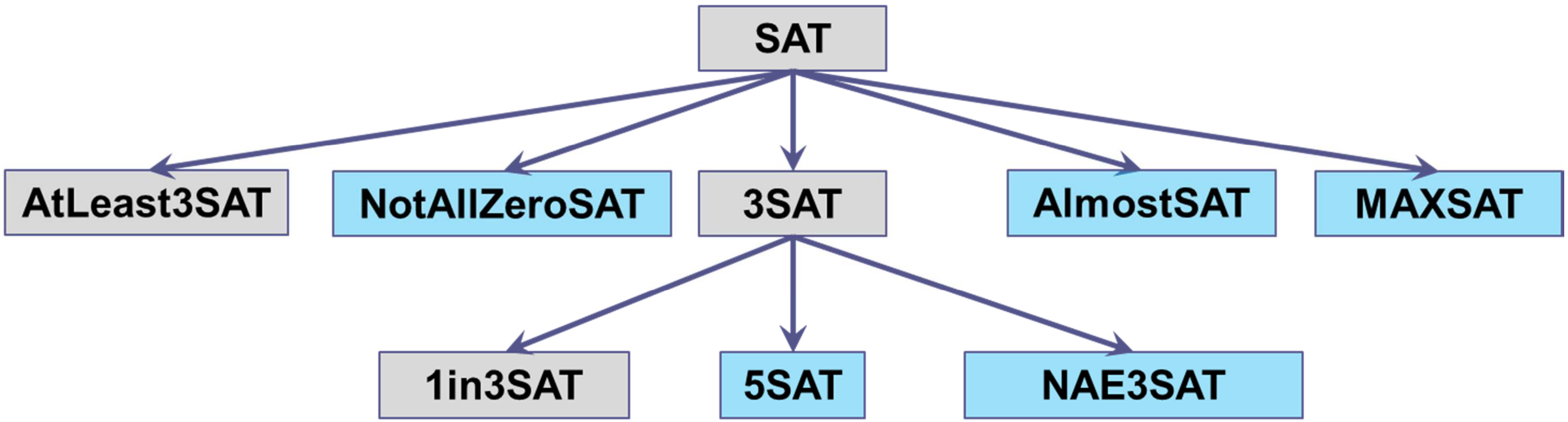
- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή όπου κάθε πρόταση έχει ακριβώς 3 όρους.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

Το πρόβλημα 1in3SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα 3SAT φ.
- **Ερώτημα:** Υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί την φ, αλλά σε κάθε πρόταση να ικανοποιείται μόνο ένας από τους 3 όρους.

Το πρόβλημα NAE3SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα 3SAT φ.
- **Ερώτημα:** Υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί την φ, αλλά σε κάθε πρόταση να μην αληθεύουν και οι 3 όροι



Το πρόβλημα 3SAT:

- **Είσοδος:** Δίνεται φόρμουλα φ σε κάνονική συζευκτική μορφή όπου κάθε πρόταση έχει ακριβώς 3 όρους.
- **Ερώτημα:** Είναι η φ ικανοποιήσιμη;

1. Δείχνουμε ότι το 3SAT ανήκει στο NP

Δεδομένης μίας φόρμουλας φ με m προτάσεις και n μεταβλητές

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο O(n) μαντεύουμε μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών
- σε χρόνο O(m) επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί την φόρμουλα

Ο χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα 3SAT ανήκει στο NP

2.A) Δίνουμε αναγωγή από το SAT στο 3SAT

Δίνουμε αναγωγή από το SAT στο 3SAT, δηλαδή δεδομένης μιας φόρμουλας φ του SAT, κατασκευάζουμε φόρμουλα φ' του 3SAT:

φ ικανοποιήσιμη⟺φ' ικανοποιήσιμη

Για κάθε πρόταση του SAT κατασκευάζουμε ένα σύνολο από προτάσεις του 3SAT. Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πλήθος των όρων (έστω k) της πρότασης:

Αν k=1, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (\boldsymbol{x_1})$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 4 προτάσεις 3SAT:

$$\underline{\boldsymbol{C' = (x_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (x_1 \vee \overline{y_1} \vee y_2) \wedge (x_1 \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2})}}$$

Αν k=2, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2})$ τότε την αντικαθιστούμε στην φ' με τις ακόλουθες 2 προτάσεις 3SAT:

$$\underline{\boldsymbol{C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{y_1})}}$$

Αν k=3, κρατάμε την αρχική πρόταση, δηλαδή θέτουμε: $\mathrm{C}' = \mathrm{C}$

Αν k>3, δηλαδή η πρόταση του SAT στην φόρμουλα φ είναι π.χ. $\mathbf{C} = (\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{x_3} \vee \cdots \vee \boldsymbol{x_k})$ τότε την σπάμε στην ισοδύναμη πρόταση

$$\underline{\boldsymbol{\left(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{\lfloor k/2 \rfloor} \vee y_1\right) \wedge \left(x_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \vee \cdots \vee x_k \vee \overline{y_1}\right)}}$$

Έπειτα επαναλαμβάνουμε αναδρομικά στις δύο υποπροτάσεις μέχρι να αποκτήσει κάθε μία από αυτές ακριβώς τρείς όρους

όπου y_i είναι νέες μεταβλητές που δεν υπήρχαν πριν στην φόρμουλα.

2.B) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

- Ο χρόνος της μετατροπής της φόρμουλας του SAT σε ισοδύναμη φόρμουλα του 3SAT είναι πολυωνυμικός. Πράγματι το στιγμιότυπο του SAT αντικαθίσταται με στιγμιότυπο που είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερο από αυτό.
- Αποδεικνύεται ότι μία πρόταση με k μεταβλητές θα αντικατασταθεί από πλήθος προτάσεων που καθορίζονται από την αναδρομική σχέση T(k)=2T(k/2) με T(3)=1 και η οποία έχει πολυωνυμική λύση.