ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Μάθημα 1.6:
Περισσότερα για τον υπολογισμό αθροισμάτων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- (-)

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- Υπολογισμός Φραγμάτων Αθροισμάτων
- Υπολογισμός Κλειστών Τύπων Αθροισμάτων

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων
1. Υπολογισμός Φραγμάτων Αθροισμάτων

Ασχολούμαστε με τον υπολογισμό περίπλοκων αθροισμάτων:

- Σε κάποιες ασκήσεις είναι ανέφικτο να υπολογίσουμε το άθροισμα απ' ευθείας με κάποιον από τους γνωστούς τύπους.
- Στις περίπτωση αυτή υπολογίζουμε φράγματα για να εκτιμήσουμε την πολυπλοκότητα της συνάρτησης.
  - Θα υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα, αντικαθιστώντας τον όρο του αθροίσματος με «κάτι» μεγαλύτερο που είναι δυνατόν να υπολογιστεί.
  - Θα υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα, αντικαθιστώντας τον όρο του αθροίσματος με «κάτι» μικρότερο που είναι δυνατόν να υπολογιστει.

- Αν τύχει τα άνω και κάτω φράγματα που υπολογίσαμε να είναι ίσα τότε έχουμε εξάγει ασυμπτωτική εκτίμηση της πολυπλοκότητας του αθροίσματος.
  - Αφού αν $f=O(g)$ και $f=\Omega(g)$ τότε $f=\Theta(g)$.
- Αν τα φράγματα δεν είναι ίσα τότε έχουμε μια εκτίμηση για την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Υπολογισμός Φραγμάτων Αθροισμάτων

1. Υπολογισμός Άνω Φράγματος

- Ο υπολογισμός του άνω φράγματος γίνεται κάνοντας αντικατάσταση του όρου του αθροίσματος με «κάτι» μεγαλύτερο.
  - Όσο πιο κοντά στον όρο είναι το «κάτι», τόσο καλύτερη θα είναι και η προσέγγιση που θα πάρουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Εκτιμήστε ασυμπτωτικά την πολυπλοκότητα: $T(n)=\sum_{i=1}^{n} i\log i$

1η Λύση: Προφανώς ισχύει: $i\log i \le i^2$

Συνεπώς: $T(n)=\sum_{i=1}^{n} i\log i \le \sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$ άρα έπεται: $T(n)=O(n^3)$

2η Λύση: Προφανώς ισχύει: $i\log i \le i\log n$

Συνεπώς: $T(n)=\sum_{i=1}^{n} i\log i \le \sum_{i=1}^{n} i\log n = \log n\sum_{i=1}^{n} i = \log n\cdot\Theta(n^2)=\Theta(n^2\log n)$

άρα έπεται: $T(n)=O(n^2\log n)$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Υπολογισμός Φραγμάτων Αθροισμάτων

2. Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

- Ο υπολογισμός του κάτω φράγματος γίνεται κάνοντας αντικατάσταση του όρου του αθροίσματος με «κάτι» μικρότερο.
  - Όσο πιο κοντά στον όρο είναι το «κάτι», τόσο καλύτερη θα είναι και η προσέγγιση που θα πάρουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Εκτιμήστε ασυμπτωτικά την πολυπλοκότητα: $T(n)=\sum_{i=1}^{n} i\log i$

<u>Λύση:</u> Προφανώς ισχύει: $i\log i \ge i$

Συνεπώς: $T(n)=\sum_{i=1}^{n} i\log i \ge \sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$ άρα έπεται: $T(n)=\Omega(n^2)$

- Δεν μπορέσαμε να υπολογίσουμε ασυμπτωτική εκτίμηση για το άθροισμα αλλά εκτιμήσαμε ότι είναι $T(n)=\Omega(n^2)$ και $T(n)=O(n^2\log n)$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Υπολογισμός Κλειστού Τύπου Αθροίσματος

- Κλειστός τύπος ενός αθροίσματος ονομάζεται μια πολυωνυμική παράσταση που προσεγγίζει το ακριβές αποτέλεσμα ενός αθροίσματος.
- Η κατασκευή του κλειστού τύπου γίνεται αν μπορέσουμε να υπολογίσουμε άνω και κάτω φράγματα που είναι ίσα μεταξύ τους.
- Εφόσον τα καταφέρουμε προσεγίζουμε μέσω ενός πολυωνύμου το αποτέλεσμα του αθροίσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να εξάγετε κλειστό τύπο για το άθροισμα : $T(n)=\sum_{i=n/2}^{n} i^2$

Λύση:

Για το άνω φράγμα έχουμε: $T(n)=\sum_{i=n/2}^{n} i^2 \le \sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$ συνεπώς: $T(n)=O(n^3)$

Για το κάτω φράγμα έχουμε: $T(n)=\sum_{i=n/2}^{n} i^2 \ge \sum_{i=n/2}^{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sum_{i=n/2}^{n} 1 =$

$$=\frac{n^2}{4}\left(n-\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n^2}{4}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n^3}{8}+\frac{n^2}{4}=\Theta(n^3)$$

συνεπώς $T(n)=\Omega(n^3)$

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων

2. Υπολογισμός Κλειστού Τύπου Αθροίσματος

(….συνέχεια….)

Άρα αφού $T(n)=\Omega(n^3)$ και $T(n)=O(n^3)$ έπεται ότι: $T(n)=\Theta(n^3)$

Άρα μπορούμε με ασφάλεια να ισχυριστούμε ότι το άθροισμα $\mathrm{T}(n)=\sum_{i=n/2}^{n} i^2$ είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού, άρα γράφεται $T(n)=an^3+bn^2+cn+d$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές κάνουμε αντικατάσταση στην σχέση:

$$an^3+bn^2+cn+d=\sum_{i=n/2}^{n} i^2$$

θέτουμε διαδοχικά n=1,n=2,n=3,n=4 οπότε προκύπτει το εξής σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους:

$a+b+c+d=1$

$8a+4b+2c+d=5$

$27a+9b+3c+d=14$

$64a+16b+4c+d=29$

Το σύστημα έχει λύση $a=0{,}33, \quad b=0{,}5, \quad c=0{,}16, \quad d=0$

Άρα τελικά υπολογίσαμε τον κλειστό τύπο για το άθροισμα: $T(n)=0{,}33n^3+0{,}5n^2+0{,}16n$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

- Υπολογίστε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για την συνάρτηση πολυπλοκότητας:

$$T(n) = \log(n!)$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

- Υπολογίστε κλειστό τύπο για το άθροισμα

$$T(n)=\sum_{i=n/3}^{n} i$$