ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-4
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) 5 διακεκριμένες κληρωτίδες κληρώνουν έναν αριθμό από το 1 εώς το 6. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι:
ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Ως διατάξεις 6 αντικειμένων σε 5 θέσεις με επανάληψη οι τρόποι είναι: 6^5

1. Όσα ο συντελεστής του $x^5/5!$ στην παράσταση $(e^x-1)^6$.

   Λάθος. Η γεννήτρια γράφεται: $(\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-1)^6=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^6$ στην οποία αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^5}{5!}$. Η μοντελοποιήση του προβλήματος είναι λάθος. Ναι μεν χρησιμοποιείται εκθετική γεννήτρια, και έχουν γραφεί 6 απαριθμητές, δηλαδή όσα τα αντικείμενα που βάζουμε στην διάταξη, αλλά οι απαριθμητές έπρεπε να ξεκινάνε από το 1, διότι κάθε αντικείμενο (αριθμοί 1 εώς 6) μπορεί να μην υπάρχει στην διάταξη.
2. Όσα ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση e^{5x}.

   Λάθος. Η γεννήτρια γράφεται: $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^5$ στην οποία αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$. Από το πινακάκι (τυπολογίου) ο ζητούμενος συντελεστής είναι 5^6.
3. $5\cdot5^6$, αν μία τουλάχιστον κληρωτίδα έχει τον αριθμό 3.
   Λάθος. Από όλους τους τρόπους (που είναι 6^5) αφαιρούμε το αντίθετο από το ζητούμενο (καμία κληρωτίδα δεν έχει τον αριθμό 3, άρα όλες έχουν 5 δυνατά αποτελέσματα, άρα 5^5). Συνεπώς οι τρόποι είναι $6^5 – 5^5$.
4. $6^5 – 5^5$, αν μία τουλάχιστον κληρωτίδα έχει τον αριθμό 3.
   Σωστό. Από την επίλυση του προηγουμενου ερωτήματος.

(2) Ένας καλαθοσφαιριστής εκτελεί 20 διαδοχικές διακεκριμένες βολές. Κάθε βολή μπορεί να είναι εύστοχη ή άστοχη. Ο προπονητής καταγράφει τα αποτελέσματα των βολών το ένα μετά το άλλο. Ο αριθμός των δυνατών καταγραφών που μπορεί να κάνει ο προπονητής είναι:
ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Ως διατάξεις 2 αντικειμένων σε 20 θέσεις με επανάληψη οι τρόποι είναι: 2^{20}

1. 20!
Λάθος. Από την επίλυση του κεντρικού ερωτήματος.
2. 20^2
Λάθος. Από την επίλυση του κεντρικού ερωτήματος.
3. Τον αριθμό των υποσυνόλων που μπορούν να προκύψουν από ένα σύνολο 20 διακεκριμένων στοιχείων
Σωστό. Τα υποσύνολα ενός συνόλου με n στοιχεία είναι 2^n.
4. 2^{20}
Σωστό. Από την επίλυση του κεντρικού ερωτήματος.

(3) Ο αριθμός των τρόπων διανομής *n* μη διακεκριμένων αντικειμένων σε *m* διακεκριμένες υποδοχές είναι:
ΚΕΝΤΡΙΚΟ: Οι τρόποι είναι: $\binom{n+m-1}{n}=\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$

1. Όσες οι διατάξεις *n+m-1* αντικειμένων από τα οποία τα *m-1* αποτελούν μια ομάδα μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων και τα υπόλοιπα μια άλλη.
   Σωστό. Το πρόβλημα είναι μεταθέσεις ομάδων ομοίων με την μία ομάδα να έχει $m-1$ αντικείμενα και η άλλη ομάδα έχει $(n+m-1)-(m-1)=n$. Συνεπώς οι τρόποι είναι: $\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$
2. Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές με $m-1$ μηδενικά

Σωστό. Το πρόβλημα είναι μεταθέσεις ομάδων ομοίων με την μία ομάδα να έχει $m-1$ μηδενικά και η άλλη ομάδα έχει $(n+m-1)-(m-1)=n$ άσσους. Συνεπώς οι τρόποι είναι: $\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$

3. Όσες οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $x_1+x_2+\cdots+x_m=n+m$

 Λάθος. Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως η διανομή $n+m$ ομοίων αντικειμένων σε m υποδοχές. Οι τρόποι είναι $\binom{(n+m)+m-1}{n+m}=\frac{(n+2m-1)!}{(n+m)!\,(m-1)!}$

4. Όσες οι επιλογές μιας n-άδας με δυνατότητα επανάληψης από m διακεκριμένα αντικείμενα.

 Λάθος. Η εκφώνηση αναφέρεται σε διατάξεις με επανάληψη, άρα οι τρόποι είναι: m^n

(4) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. $\varphi \wedge \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.

 Σωστό. Αριστερά της ταυτ.συνεπαγωγής έχουμε αντίφαση. Άρα είναι Ψ|=...

2. $\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

 Σωστό. Δεξιά της ταυτ.συνεπαγωγής έχουμε ταυτολογία. Άρα είναι ...|=Α

3. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία.

 Σωστό. Με κατασκευή αληθοπίνακα (ή παρατηρώντας ότι είναι εφαρμογή του νόμου αντιθετοαναστροφής)

4. Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ είναι αντίφαση.

 Λάθος. Βγαίνει Ψευδής για την αποτίμηση φ=Ψ, ψ=Α.

(5) *Στις παρακάτω προτάσεις τα T_1 και T_2 είναι σύνολα προτασιακών τύπων.*

1. Αν τα T_1 και T_2 δεν είναι ικανοποιήσιμα, τότε δεν είναι ικανοποιήσιμο και το $T_1 \cup T_2$.

 Σωστό. Επαρκεί μάλιστα ότι το ένα από τα δύο σύνολα δεν είναι ικανοποιήσιμα. Αφού όλοι οι τύποι π.χ. του Τ1 υπάρχουν στην ένωση των δύο συνόλων, έπεται ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί αυτούς τους τύπους ταυτόχρονα, άρα και την ένωσή τους με τους τύπους του άλλου συνόλου.

2. Αν T_1 είναι ικανοποιήσιμο και T_2 δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε δεν είναι ικανοποιήσιμο και το $T_1 \cup T_2$.

 Σωστό. Βλέπε ερώτημα

3. Αν το T_1 δεν είναι συνεπές τότε $T_1 \mid\!-\ \varphi$

 Σωστό. Το Τ1 δεν είναι συνεπές, άρα δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα είναι αντιφατικό. Από τα θεωρήματα εγκυρότητας-πληρότητας αρκεί να δείξουμε $T_1 \models \varphi$ που ισχύει αφού είναι Ψ |= …

4. Αν το T_1 είναι ικανοποιήσιμο και ο φ είναι ταυτολογία, τότε το $T_1 \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

 Σωστό. Με την αποτίμηση που ικανοποιεί τους τύπους του Τ1 (Αφού είναι ικανοποιήσιμο). Ο φ αληθεύει στην αποτίμηση αυτή (αφού είναι ταυτολογία και ικανοποιείται σε όλες τις αποτιμήσεις).

(6) Θεωρούμε τον τύπο $\varphi(x) = \exists y(x \neq y \wedge P(x,y))$.

1. Ο τύπος $\exists x\varphi(x)$ αληθεύει στο σύνολο των άρτιων φυσικών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι το x είναι τριπλάσιο του y

 Σωστό. Ενσωματώνουμε την συντομογραφία στον τύπο και αυτός γράφεται: $\exists x\exists y(x \neq y \wedge P(x,y))$.

 Ερμηνεύεται ως: Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών φυσικών που ο 1ος είναι τριπλάσιος του 2ου και αληθεύει (π.χ. x=6, y=2)

2. Ο τύπος $\forall x\varphi(x)$ αληθεύει σε συνεκτικά (συνδεόμενα) γραφήματα με δύο τουλάχιστον κορυφές όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή

 Σωστό. Ενσωματώνουμε την συντομογραφία στον τύπο και αυτός γράφεται: $\forall x\exists y(x \neq y \wedge P(x,y))$.

 Ερμηνεύεται ως: Κάθε κορυφή συνδέεται με τουλάχιστον μία άλλη κορυφή και είναι αληθής (αφού ελέγχεται σε συνδεόμενα γραφήματα, άρα κάθε κορυφή θα συνδέεται με τουλάχιστον μία κορυφή)

3. Ο τύπος $\exists x\varphi(x)$ αληθεύει σε γραφήματα με δύο τουλάχιστον κορυφές όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή

 Σωστό. Ενσωματώνουμε την συντομογραφία στον τύπο και αυτός γράφεται: $\exists x\exists y(x \neq y \wedge P(x,y))$.

Ερμηνεύεται ως: Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών κορυφών που συνδέονται με ακμή (δεν αληθεύει σε οποιοδήποτε γράφημα 2 κορυφών (π.χ. δεν αληθευει σε ένα γράφημα που έχει ακριβώς 2 κορυφές και δεν έχει ακμές

4. Ο τύπος $\forall x \varphi(x)$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών Ν όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι το x διαιρείται από το y

Λάθος. Ενσωματώνουμε την συντομογραφία στον τύπο και αυτός γράφεται: $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x,y))$.

Ερμηνεύεται ως: Κάθε φυσικός διαιρείται από τουλάχιστον έναν διαφορετικό από αυτόν φυσικό και είναι ψευδής (δεν αληθεύει για x=1 αφού ο μόνος φυσικός από τον οποίο διαιρείται είναι ο εαυτός του)

(7) Δίδεται απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ με χρωματικό αριθμό 2

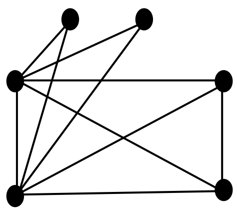
1. Το G μπορεί να περιέχει το C_3 ως υπογράφημα.
   Λάθος. Το γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 2, άρα είναι διχρωματίσιμο, άρα και διχοτομίσιμο. Συνεπώς δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους, άρα δεν περιέχει και το C_3 που είναι κύκλος περιττού μήκους.
2. Το G μπορεί να μην είναι συνδεόμενο.
   Σωστό. Π.χ. ένα γράφημα που αποτελείται από 2 συνεκτικές συνιστώσες που κάθε μία είναι ένα C_4 είναι ένα γράφημα με χρωματικό αριθμό 2 που δεν είναι συνδεόμενο.
3. Αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, τότε το G έχει κύκλο Euler.
   Λάθος. Διότι μπορεί να μην είναι συνδεόμενο. Π.χ. το γράφημα που δώσαμε σαν παράδειγμα στο προηγούμενο ερώτημα, εδώ είναι ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα.
4. Το συμπλήρωμα του G είναι συνδεόμενο.
   Λάθος. Π.χ. το γράφημα K_2 είναι ένα γράφημα με χρωματικό αριθμό 2, του οποίου το συμπλήρωμα δεν είναι συνδεόμενο.

(8) Έστω $G=(V,E)$ απλό, μη κατευθυνόμενο k-κανονικό γράφημα.

1. Το G έχει $\mathrm{kn}/2$ ακμές
   Σωστό. Άμεσα από την θεωρία.
2. Το $\bar{G}$ έχει $\mathrm{n}(n-k)/2$ ακμές
   Λάθος. Ισχύει ότι $|E|+|\bar{E}|=\frac{n(n-1)}{2}$, άρα έχω ότι: $|\bar{E}|=\frac{n(n-1)}{2}-|E|=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{kn}{2}=\frac{n(n-1)-kn}{2}=\frac{n(n-1-k)}{2}$
3. Αν $\mathrm{k}>n/2$ τότε έχει κύκλο Hamilton
   Σωστό. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος Dirac, αφού αν k>n/2, ισχύει ότι όλοι οι βαθμοί των κορυφών είναι μεγαλύτερες από n/2, άρα έχουμε ότι κάθε κορυφή έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από n/2, άρα ισχύει το θεώρημα του Dirac.
4. Αν $\mathrm{k}>2$ τότε έχει κύκλο Euler
   Λάθος. Π.χ. αν k=3, τότε κάθε κορυφή έχει βαθμό 3, άρα το γράφημα δεν έχει κύκλο Euler. Ισοδύναμα η κεντρική εκφώνηση δεν μας εξασφαλίζει ότι το γράφημα είναι συνδεόμενο.

(9) Τα παρακάτω (απλά μη κατευθυνόμενα) γραφήματα είναι δυνατόν να κατασκευασθούν:

1. Γράφημα 6 κορυφών με 2 κορυφές να έχουν βαθμό 5, 2 κορυφές να έχουν βαθμό 3 και 2 κορυφές να έχουν βαθμό 2.
   Σωστό. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου γραφήματος είναι το ακόλουθο:



2. Συνδεόμενο γράφημα 6 κορυφών με 4 ακμές.
   Λάθος. Το ελαχιστοτικά συνδεδεμένο γράφημα είναι το δένδρο που απαιτεί N-1=6-1=5 ακμές.
3. Γράφημα με χρωματικό αριθμό 3 με 6 κορυφές και 6 ακμές.
   Σωστό. Ένα παράδειγμα τέτοιου γραφήματος είναι το παρακάτω (μη συνδεόμενο γράφημα)

4. Διχοτομίσιμο γράφημα 5 κορυφών με τουλάχιστον 7 ακμές.
   Λάθος. Εφόσον είναι διχοτομίσιμο θα πρέπει οι κορυφές του να είναι διαμερισμένες σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας. Ακόμη κι αν το γράφημα είναι πλήρες διμερές, άρα και θα έχει τις περισσότερες δυνατές ακμές, θα είναι (αφού έχει 5 κορυφές), είτε το γράφημα K3,2 είτε το γράφημα K4,1. Αυτά όμως αντίστοιχα έχουν 3*2=6 ακμές και 4*1=4 ακμές. Συνεπώς δεν μπορεί να κατασκευαστεί τέτοιο γράφημα.

(10) Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε $n-2$ ακμές από το K_n ($n \geq 3$), ώστε το γράφημα που προκύπτει να μην έχει κύκλο Hamilton
   Σωστό. Αφαιρώντας τις n-2 ακμές από μία συγκεκριμένη κορυφή, η κορυφή αυτή θα αποκτήσει βαθμό 1, άρα το γράφημα που προκύπτει δεν έχει κύκλο Hamilton.
2. Υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε $n(n-3)/2$ ακμές από το K_n ($n \geq 3$), ώστε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Hamilton
   Σωστό. Θεωρούμε έναν κύκλο Hamilton και αφαιρούμε όλες τις υπόλοιπες ακμές. Η κλίκα n κορυφών έχει n(n-1)/2 ακμές και αφαιρώ τις n ακμές του κύκλου Hamilton. Άρα μπορώ να αφαιρέσω μέχρι $\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$ ακμές
3. Ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με $n \geq 10$ κορυφές και τουλάχιστον $\binom{n-1}{2}+1$ ακμές έχει κύκλο Hamilton
   Λάθος. Είναι δυνατόν οι $\binom{n-1}{2}$ ακμές να κατασκευάζουν μία κλίκα n-1 κορυφών, άρα η 1 έξτρα ακμή θα συνδέει την n-οστή κορυφή με κάποια από τις n κορυφές. Άρα το γράφημα αυτό δεν έχει κύκλο Hamilton διότι έχει κορυφή με βαθμό 1.
4. Κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με $n \geq 10$ κορυφές και τουλάχιστον $\binom{n-1}{2}+1$ ακμές έχει κύκλο Euler
   Λάθος. Το ίδιο γράφημα που περιγράψαμε στο προηγούμενο ερώτημα έχει κορυφή βαθμού 1 (κορυφή περιττού βαθμού) άρα δεν έχει κύκλο Euler.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού – Μονάδες ~50/100)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

(Α) Δύο διακεκριμένοι συμμαθητές έχουν αγοράσει ο καθένας από 4 τετράδια μπλε χρώματος, 4 τετράδια πράσινου χρώματος και 2 τετράδια κίτρινου χρώματος. Κάθε μαθητής θα επιλέξει ένα τετράδιο από τα 10 τετράδια που έχει αγοράσει για καθένα από τα 10 διακεκριμένα μαθήματά του. Πόσες είναι οι δυνατές επιλογές χρωμάτων τετραδίων για τα 10 μαθήματα και για τους δύο μαθητές;
(Β) 6 ζευγάρια συναντούνται σε ένα σπίτι και ανταλλάσουν χειραψίες. Σε καμία περίπτωση δεν ανταλλάσουν χειραψίες ο άντρας και η γυναίκα που αποτελούν ένα ζευγάρι και κάθε άτομο δεν ανταλλάσει χειραψία με οποιοδήποτε άλλο περισσότερες από μία φορές. Πόιος είναι ο μέγιστος αριθμός χειραψιών που πραγματοποιούνται;
(Γ) Σε μια τάξη ενός νηπιαγωγείου υπάρχουν τέσσερις σακούλες με καραμέλες, κάθε σακούλα περιέχει 12 όμοιες καραμέλες του ίδιου χρώματος και κάθε σακούλα περιέχει καραμέλες διαφορετικού χρώματος από οποιαδήποτε άλλη (έστω μπλε, κόκκινες, κίτρινες, πράσινες). Η νηπιαγωγός ζητά από κάθε ένα από τα *n* διακεκριμένα παιδιά της τάξης να επιλέξει μια μόνο καραμέλα.
Να σχηματίσετε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο, ο συντελεστής του οποίου δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλέξουν καραμέλες τα *n* παιδιά αν ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής περιορισμοί:
Θα πρέπει να επιλεγεί άρτιος αριθμός μπλε καραμελών, περιττός αριθμός κόκκινων καραμελών και να μην επιλεγούν καθόλου ή να επιλεγούν τουλάχιστον τρεις πράσινες καραμέλες.

Λύση:
(Υποερώτημα Α)
Η επιλογή των τετραδίων για τον 1ο μαθητή είναι: $\frac{10!}{4!4!2!}$
Η επιλογή των τετραδίων για τον 2ο μαθητή είναι: $\frac{10!}{4!4!2!}$
Από τον κανόνα του γινομένου οι συνολικοί τρόποι είναι: $\frac{10!}{4!4!2!} \cdot \frac{10!}{4!4!2!}$

(Υποερώτημα Β)
Για να βρούμε τον μέγιστο αριθμό χειραψιών θεωρούμε ότι όλοι ανταλλάσουν χειραψία μεταξύ τους, εκτός από τα άτομα που αποτελούν ζευγάρι.
Α΄τρόπος
Οι χειραψίες μεταξύ ανδρών είναι: $\binom{6}{2}$
Οι χειραψίες μεταξύ γυναικών είναι: $\binom{6}{2}$
Οι χειραψίες μεταξύ ανδρών και γυναικών είναι: $6 * 5$
Άρα από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι: $\binom{6}{2} + \binom{6}{2} + 6 * 5$
Β’τρόπος:
Όλες οι χειραψίες που μπορούν να ανταλλάξουν 12 άτομα είναι: $\binom{12}{2}$
Οι χειραψίες που δεν πραγματοποιούνται είναι 6 (όσα και τα ζευγάρια).
Άρα συνολικά οι χειραψίες είναι: $\binom{12}{2} - 6$

(Υποερώτημα Γ)
Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η διάταξη των καραμελών στα παιδιά (που αποτελούν τις θέσεις).
Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.
Ο απαριθμητής για της μπλε καραμέλες (άρτιο πλήθος) είναι: $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}$
Ο απαριθμητής για της κόκκινες καραμέλες (περιττό πλήθος) είναι: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{11}}{11!}$
Ο απαριθμητής για της πράσινες καραμέλες (καθόλου ή τουλ.3) είναι: $1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}$
Ο απαριθμητής για της κίτρινες καραμέλες (χωρίς περιορισμό) είναι: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}$
Συνεπώς η γεννήτρια είναι:
$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{11}}{11!}\right)\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{12}}{12!}\right)$$
και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

<u>Άσκηση 2 (Μονάδες 35)</u>

(1) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγόρημα Q. ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q(x,y) ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y»:

A. Διαδοχικά στην ερμηνεία αυτή:

a. Εξηγείστε σε φυσική γλώσσα τι σημαίνει η πρόταση:

$$\varphi = \forall x \exists y \exists z \big(x \neq y \land x \neq z \land \varphi_1(x,y) \land \varphi_2(x,z)\big)$$

όπου: $\varphi_1(x,y) = \neg Q(x,y) \land \neg Q(y,x)$

όπου: $\varphi_2(x,y) = Q(x,y) \ \land Q(y,x)$

b. Εξηγείστε σε φυσική γλώσσα τι σημαίνει η πρόταση:

$$\psi = \forall x\, \psi_1(x) \land \forall x\, \psi_2(x)$$

όπου: $\psi_1(x) = \exists y[Q(x,y) \land \forall z(Q(x,z) \rightarrow z = y)]$

όπου: $\psi_2(x) = \exists y[Q(y,x) \land \forall z(Q(z,x) \rightarrow z = y)]$

c. Δώστε ερμηνεία που:

i. Αληθεύουν οι τύποι φ και ψ με 4 κορυφές
ii. Αληθεύει ο τύπος φ και δεν αληθεύει ο τύπος ψ
iii. Δεν αληθεύει ο τύπος φ και αληθεύει ο τύπος ψ
iv. Δεν αληθεύει κανένας από τους δύο τύπους.

B. Γράψτε μια πρόταση στην ερμηνεία αυτή που να εκφράζει την παρακάτω ιδιότητα ενός γραφήματος: «Αν για κάθε τριάδα κορυφών, όποτε η πρώτη με τη δεύτερη ή η δεύτερη με την τρίτη δεν είναι γειτονικές έπεται ότι ούτε η πρώτη με την τρίτη είναι γειτονικές, τότε το γράφημα είναι πλήρες ή το συμπλήρωμά του είναι πλήρες»

<u>Λύση:</u>

1. α) Από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δειχθεί ότι

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \chi$$

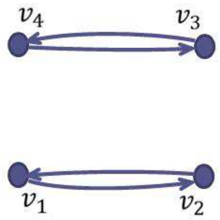
1.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Υπόθεση
2.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	Υπόθεση
3.	$\varphi \rightarrow \psi$	Υπόθεση
4.	φ	2,3 MP
5.	$\psi \rightarrow \chi$	1,4 MP
6.	ψ	3,4 MP
7.	χ	5,6 MP

1. β) Χωρίς χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής έχουμε

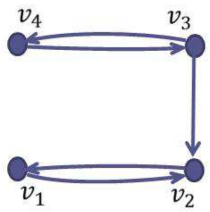
1.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Υπόθεση
2.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	Υπόθεση
3.	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	ΑΣ2
4.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	MP1,3
5.	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi))$	ΑΣ2(φ:φ->ψ, ψ:φ, χ:χ)
6.	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi)$	MP4,5
7.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$	MP2,6

(2.A.a)
Η συντομογραφία $\varphi_1(x,y)$ ερμηνεύεται ως: «Οι κορυφές x,y δεν συνδέονται με ακμή»
Η συντομογραφία $\varphi_2(x,y)$ ερμηνεύεται ως: «Οι κορυφές x,y συνδέονται με αντιπαράλληλες ακμές»
Συνεπώς η πρόταση φ ερμηνεύεται «Κάθε κορυφή συνδέεται με μία άλλη κορυφή με αντιπαράλληλες ακμές και δεν συνδέεται με καμία καμία ακμή με μία άλλη κορυφή».
(2.A.b)
Η συντομογραφία $\psi_1(x)$ ερμηνεύεται ως: «Η κορυφή x έχει έξω βαθμό 1»
Η συντομογραφία $\psi_2(x)$ ερμηνεύεται ως: «Η κορυφή x έχει έσω βαθμό 1»
Συνεπώς η πρόταση ψ ερμηνεύεται «Κάθε κορυφή έχει έσω και έξω βαθμό 1».
(2.A.c)

Υποερώτημα i:



Υποερώτημα ii:



Υποερώτημα iii:

Υποερώτημα iv:

Σημείωση: Τα παρακάτω είναι ενδεικτικά γραφήματα που ισχύουν τα ζητούμενα. Υπάρχουν ακόμη πολλές παραλλαγές που επαληθεύουν τις ζητούμενες ιδιότητες.

(2.Β)

Η ζητούμενη πρόταση είναι:

$$\forall x \forall y \forall z \left[\left((\neg P(x,y) \land \neg P(y,x)) \lor (\neg P(y,z) \land \neg P(z,y)) \right) \to (\neg P(x,z) \land \neg P(z,x)) \right] \to \forall x \forall y P(x,y) \lor \forall x \forall y \neg P(x,y)$$

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

Έστω Γ κλάση απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων που ορίζεται ως εξής:
Ένα γράφημα G ανήκει στην κλάση Γ αν και μόνο αν:

- είτε αποτελείται από μία μόνο κορυφή,
- είτε σχηματίζεται αν προσθέσουμε μια νέα κορυφή u σε ένα γράφημα G' που ανήκει στην κλάση Γ και συνδέσουμε τη νέα κορυφή u με περισσότερες από τις μισές κορυφές του G'.

Ερωτήματα:

1. Σχεδιάστε όλα τα γραφήματα που ανήκουν στην κλάση Γ με το πολύ 4 κορυφές.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε γράφημα της κλάσης Γ με τουλάχιστον 3 κορυφές έχει κύκλο Hamilton.

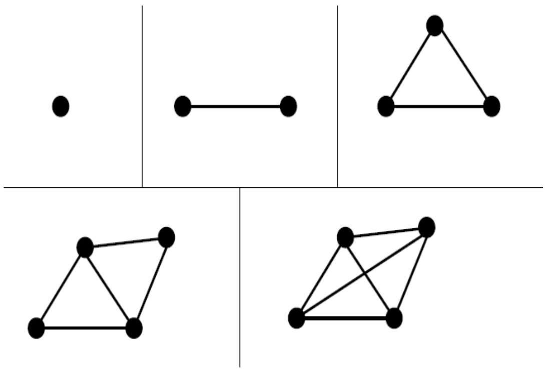
Λύση:

(1)

Ακολουθώντας την διαδικάσία που περιγράφεται στην εκφώνηση, ξεκινάμε από το τετριμμένο γράφημα.

Το επόμενο γράφημα προκύπτει προσθέτοντας μία κορυφή στο γράφημα η οποία θα συνδέεται με περισσότερες από τις μισές κορυφές (Άρα θα συνδέεται με περισσότερη από ½ άρα με μία κορυφή). Προκύπτει το K2.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο τα 5 γραφήματα με το πολύ 4 κορυφές τα οποία ανήκουν στην κλάση Γ είναι τα ακόλουθα:



(2)

Δείχνουμε με επαγωγή ότι κάθε γράφημα της κλάσης Γ έχει κύκλο Hamilton:

- **Βάση Επαγωγής**: Δείχνουμε ότι ισχύει για n=3, δηλαδή ότι κάθε γράφημα της κλάσης Γ με 3 κορυφές έχει κύκλο Hamilton.
  Απόδειξη: Πράγματι ισχύει, αφού το μοναδικό γράφημα της κλάσης με 3 κορυφές είναι το K_3 (από το προηγούμενο ερώτημα) το οποίο έχει κύκλο Hamilton, τον v_1-v_2-v_3
- **Επαγωγική Υπόθεση**: Έστω ότι ισχύει για n=k, δηλαδή ότι κάθε γράφημα k κορυφών της κλάσης Γ έχει κύκλο Hamilton.
- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα δείξουμε ότι ισχύει για n-k+1, δηλαδή ότι κάθε γράφημα k+1 κορυφών της κλάσης Γ έχει κύκλο Hamilton.
  Απόδειξη: Από τον ορισμό ένα γράφημα k+1 κορυφών προκύπτει από ένα γράφημα k κορυφών της κλάσης, συνδέοντας τη νέα κορυφή με περισσότερες από k/2 κορυφές. Οποιοδήποτε γράφημα της κλάσης με k κορυφές έχει κύκλο Hamilton (από επαγωγική υπόθεση).
  Θεωρούμε τον κύκλο Hamilton k κορυφών που υπήρχε πριν την προσθήκη της v_{k+1} κορυφής, έστω v_1-v_2-…-v_k-v_1.
  Θα δείξουμε ότι η v_{k+1} κορυφή συνδέεται με 2 διαδοχικές κορυφές στον κύκλο Hamilton k κορυφών. Πράγματι για να μην συνδέεται με 2 γειτονικές κορυφές, θα έπρεπε να συνδέεται με το πολύ ανά 2 διαδοχικές κορυφές, δηλαδή με το πολύ k/2 κορυφές για k άρτιο (ή το πολύ (k-1)/2 κορυφές για k περιττό).
  Άρα αφού από την κατασκευή πρέπει να συνδέσουμε την κορυφή k+1 με περισσότερες από K/2 κορυφές, σίγουρα συνδέεται με 2 διαδοχικές κορυφές.
  Άρα μπορούμε να επεκτείνουμε τον κύκλο Hamilton k κορυφών παρεμβάλλοντας την κορυφή v_{k+1} μεταξύ των διαδοχικών κορυφών v_i και v_{i+1}.
  Συνεπώς υπάρχει ο εξής κύκλος Hamilton (v_1,v_2,…,v_i,v_{k+1},v_{i+1},…,v_k,v_1). Άρα το γράφημα της κλάσης Γ με k+1 κορυφές έχει κύκλο Hamilton.

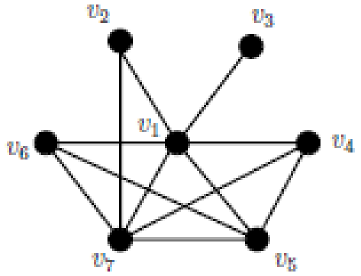
Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

1. Να κατασκευάσετε δύο απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα τέτοια ώστε:
α) Το πρώτο να έχει τουλάχιστον 7 κορυφές και μόνο δύο από τις κορυφές του να έχουν τον ίδιο βαθμό.
β) Το δεύτερο να έχει 10 κορυφές, τουλάχιστον 33 ακμές, και χρωματικό αριθμό ίσο με 3.

2.α) Έστω $G(X, Y, E)$ απλό, μη κατευθυνόμενο, διμερές γράφημα, όπου X και Y τα δύο σύνολα ανεξαρτησίας. Να δείξετε ότι το άθροισμα του βαθμού των κορυφών στο σύνολο X ισούται με το άθροισμα του βαθμού των κορυφών στο σύνολο Y.
β) Να δείξετε ότι αν το G είναι ένα k-κανονικό διμερές γράφημα, τότε *για κάθε* διαμέριση των κορυφών του G σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας X και Y, ισχύει ότι $|X| = |Y|$. *Υπενθύμιση*: Ένα γράφημα είναι k-κανονικό αν όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό ίσο με k.

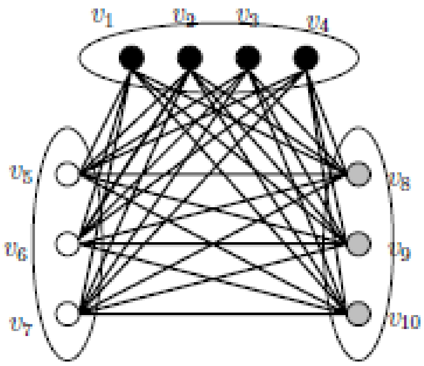
Λύση:

(1.α)
Στο ακόλουθο γράφημα η κορυφή v1 έχει βαθμό 6, η v7 έχει βαθμό 5, η v5 έχει βαθμό 4, οι v4 και v6 έχουν βαθμό 3, η v2 έχει βαθμό 2 και η v3 έχει βαθμό 1.



(1.β)
Ένα τέτοιο γράφημα είναι το πλήρες τριμερές γράφημα K4,3,3 δηλαδή με ρ μερίδια κορυφών V1={v1,v2,v3,v4}, V2={v5,v6,v7} και V3={v8,v9,v10}

Επειδή οι κορυφές που βρίσκονται σε διαφορετικά μερίδια συνδέονται μεταξύ τους, το γράφημα έχει 4*3+4*4+3*3=33 ακμές. Σχηματικά:



(2.α)
Έστω A το άθροισμα των βαθμών των κορυφών στο σύνολο X και B το άθροισμα των βαθμών των κορυφών στο σύνολο Y. Σε ένα διμερές γράφημα κάθε ακμή του γραφήματος έχει το ένα άκρο της σε κορυφή του συνόλου X και το άλλο της άκρο σε κορυφή του συνόλου Y. Συνεπώς κάθε ακμή του γραφήματος μετριέται στο A και στο B από μία φορά. Συνεπώς ισχύει A=B=m όπου m το πλήθος των ακμών του γραφήματος.

(2.β)
Έστω μία διαμέριση των κορυφών του γραφήματος σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας με |X| ≠ |Y|. Αφου το γράφημα είναι k-κανονικό κάθε κορυφή έχει βαθμό k.

- Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του X είναι ίσο με k*|X|
- Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του Y είναι ίσο με k*|Y|

Επειδή |X| ≠ |Y| έπεται ότι: k*|X| ≠k*|Y| άρα το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του X δεν είναι ίσο με το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του Y παρόλο που το γράφημα είναι διμερές. Άτοπο από ατο ερώτημα (α).