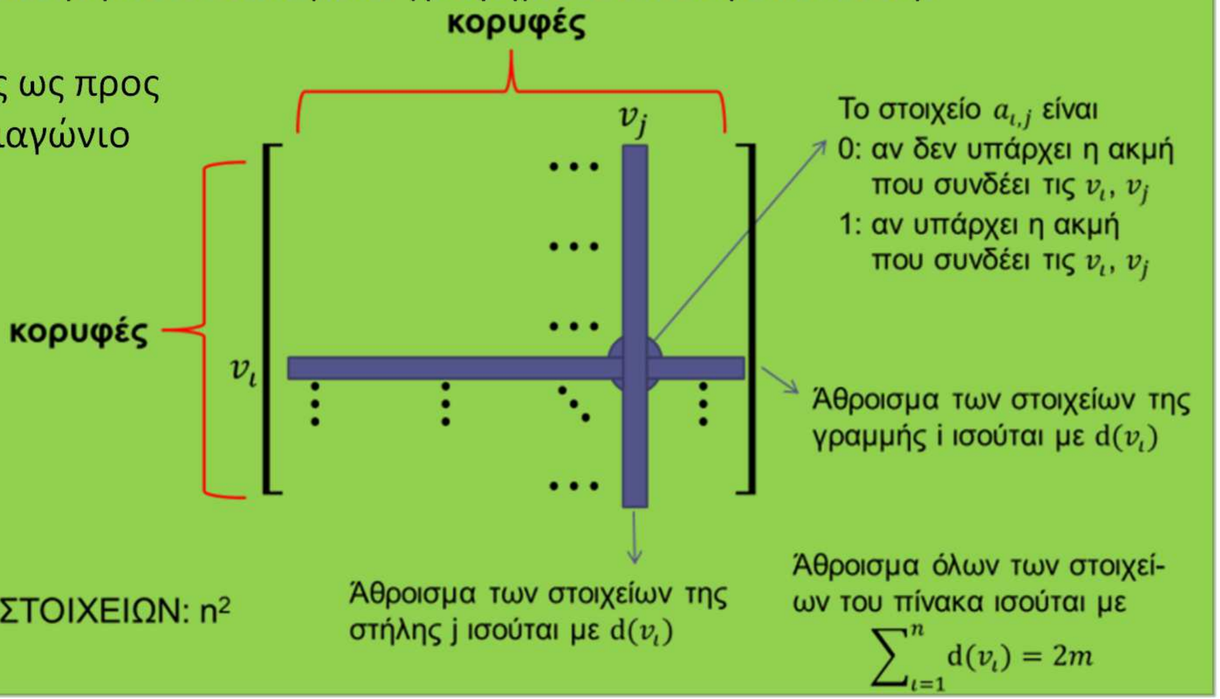
<u>Ορισμός:</u> Ο πίνακας γειτνίασης (ή μητρώο σύνδεσης) ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n είναι ένας n x n τετραγωνικός πίνακας που ορίζεται ως:

$$A_{n\times n} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } [v_i, v_j] \in E \\ 0, & \text{αν } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

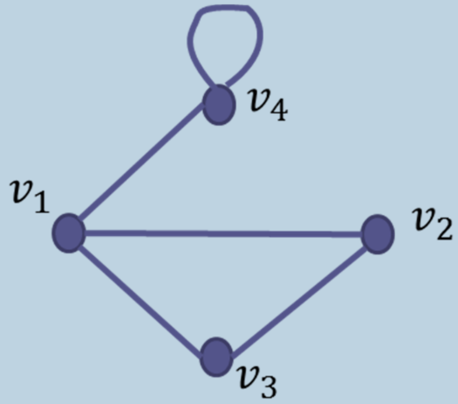
<u>ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ:</u> Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα γειτνίασης σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι η ακόλουθη:

- Συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο



ΠΛΗΘΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: n^2

<u>Παράδειγμα:</u> Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα γειτνίασής του:



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Θεώρημα (υπολογισμού μονοπατιών):
Το στοιχείο (i, j) του πίνακα A^k (ο πίνακας γειτνίασης υψωμένος στην k δυναμη) δίνει πόσα μονοπάτια μήκους k υπάρχουν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j

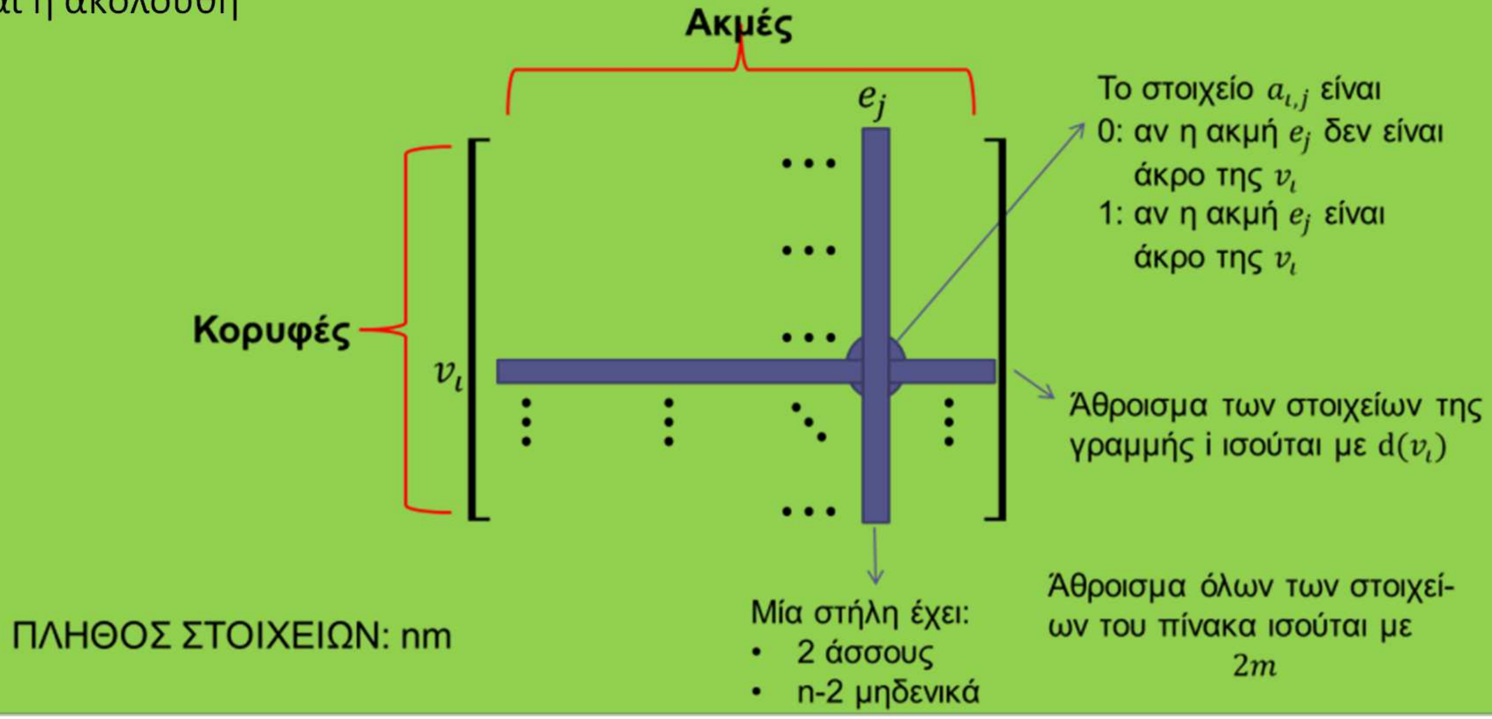
Πόρισμα 1:
Το στοιχείο (i, j) του πίνακα $A + A^2 + \cdots + A^k$ δίνει πόσα μονοπάτια μήκους το πολύ k υπάρχουν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j

Πόρισμα 2:
Αν ένα μη διαγώνιο στοιχείο (i, j) του πίνακα $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ (όπου n=|V|) είναι 0, τότε το γράφημα δεν είναι συνδεόμενο.

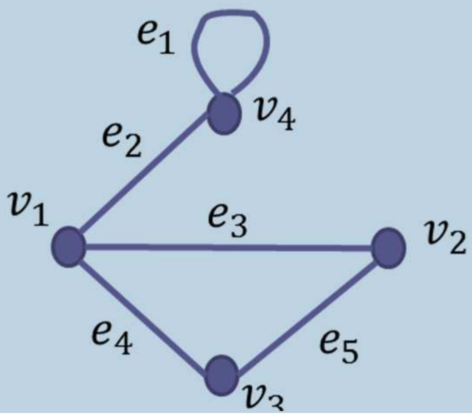
<u>Ορισμός:</u> Ο πίνακας γειτνίασης (ή μητρώο σύνδεσης) ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n είναι ένας n x n τετραγωνικός πίνακας που ορίζεται ως:

$$A_{n\times n} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } [v_i, v_j] \in E \\ 0, & \text{αν } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

<u>ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ:</u> Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα πρόσπτωσης σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι η ακόλουθη



<u>Παράδειγμα:</u> Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα γειτνίασής του:



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ορισμός: Δύο γραφήματα $G_1(V_1,E_1)$ και $G_2(V_2,E_2)$ είναι **ισομορφικά**, αν υπάρχει συνάρτηση $f: V_1 \to V_2$ 1-1 και επί, τέτοια ώστε $(v_i, v_j) \in E_1$ και $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ και αντίστροφα.
Η f λέγεται **συνάρτηση ισομορφισμού** ή **ισομορφισμός** του G_1 με το G_2

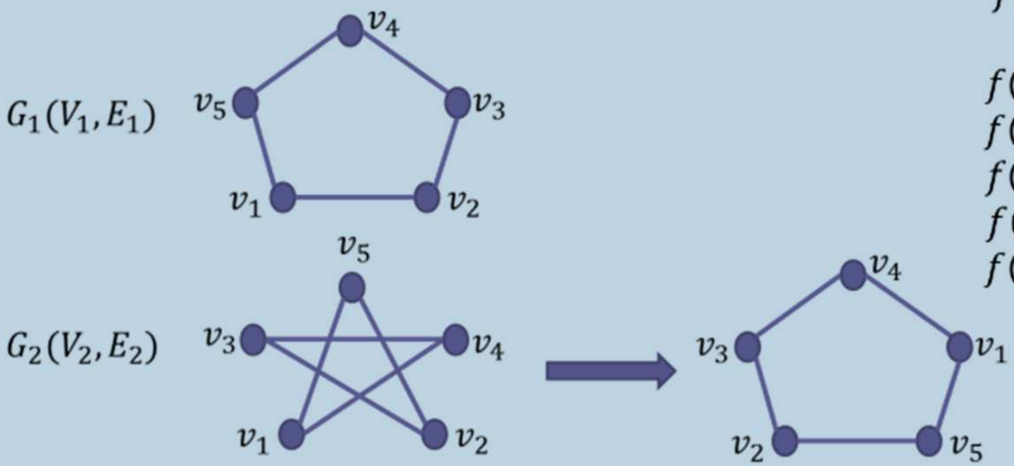
Με απλά λόγια:

- Υπάρχει αντιστοίχιση των κορυφών ώστε να ταυτίζονται οι ακμές.

Θεώρημα: Για δύο ισομορφικά γραφήματα $G_1(V_1,E_1)$ και $G_2(V_2,E_2)$ ισχύει ότι με κάποια κατάλληλη διάταξη των κορυφών οι πίνακες γειτνίασης των δύο γραφημάτων ταυτίζονται

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε δύο ισόμορφα γραφήματα. Η αναδιάταξη των κορυφών του G_2 ώστε να ταυτίζονται οι κορυφές προκύπτει από την συνάρτηση ισομορφισμού

$f: V_1 \to V_2$



$f(v_1) = v_2$
$f(v_2) = v_5$
$f(v_3) = v_1$
$f(v_4) = v_4$
$f(v_5) = v_3$

Ορισμός:

Αυτομορφισμός είναι ένας ισομορφισμός από ένα γράφημα στον εαυτό του

- Το K_n έχει $n!$ αυτομορφισμούς
- Το $K_{n,m}$ έχει $n!\,m!$ αυτομορφισμούς

Αυτοσυμπληρωματικό καλείται ένα γράφημα, αν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.

- έχει $\mathrm{m} = n(n-1)/4$ ακμές
- Το μονοπάτι 4 κορυφών είναι αυτοσυμπληρωματικό γράφημα
- Ο κύκλος 5 κορυφών είναι αυτοσυμπληρωματικό γράφημα

Για να δείξω ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά:

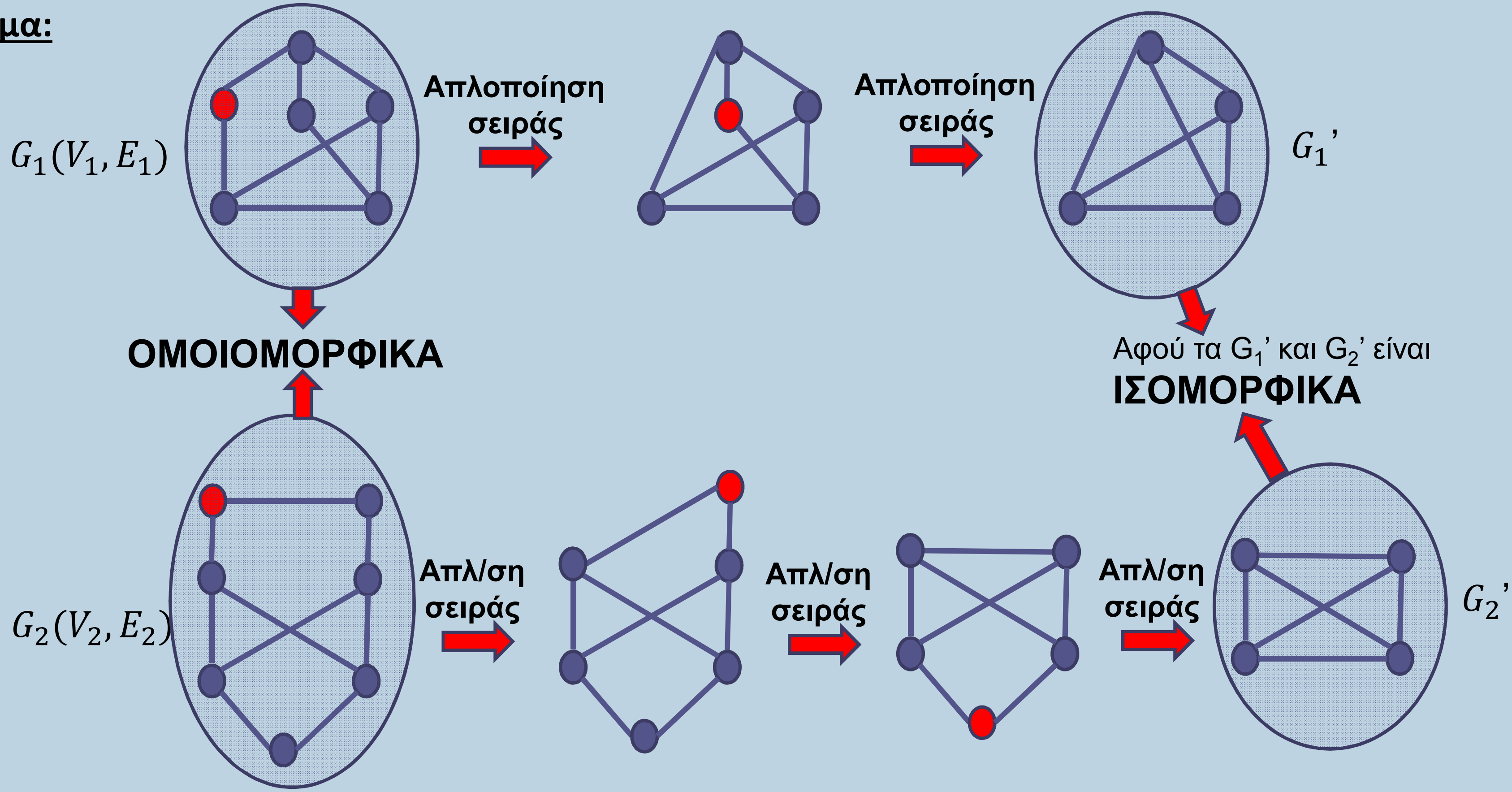
- Δίνω τη συνάρτηση ισομορφισμού
- Δείχνω ότι τα συμπληρώματα είναι ισομορφικά

Για να δείξω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:

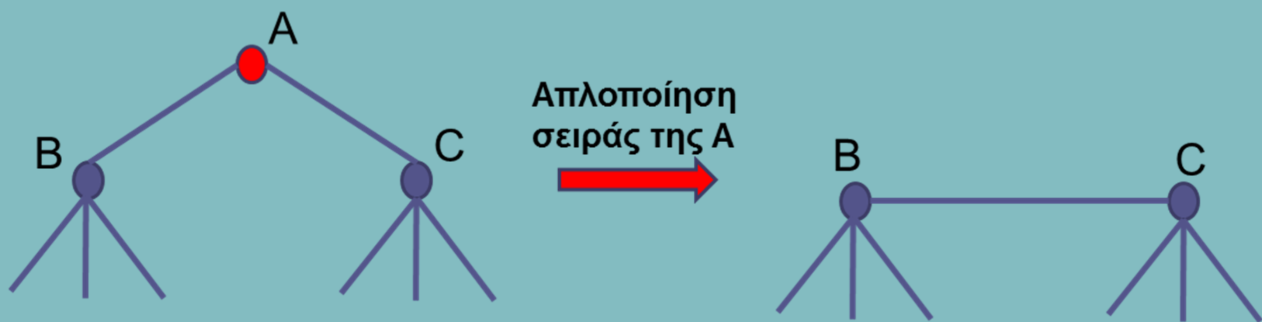
- Βρίσκω μία αναλλοίωτη ιδιότητα που δεν διατηρείται π.χ.
    - έχει n κορυφές, έχει m ακμές, έχει κορυφή βαθμού k, έχει κύκλο Euler, έχει κύκλο Hamilton, είναι συνδεόμενο, είναι επίπεδο κ.λπ.

<u>Ορισμός:</u> Δύο γραφήματα καλούνται **<u>ομοιομορφικά</u>** αν μπορούν να απλοποιηθούν (με απλοποιήσεις σειράς) σε ισομορφικά γραφήματα.

<u>Παράδειγμα:</u>



<u>Απλοποίηση σειράς</u> είναι μια πράξη, πάνω σε γράφημα που «απαλείφει» κορυφές βαθμού 2:



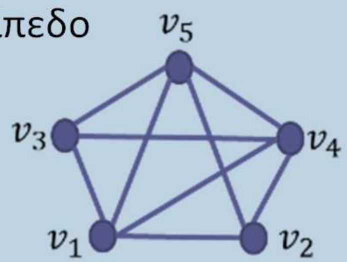
<u>Ορισμός:</u> Ένα γράφημα είναι **<u>επίπεδο</u>**, αν μπορούμε να το απεικονίσουμε στο επίπεδο, χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.

- Μία απεικόνιση στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του λέγεται **<u>επίπεδη αποτύπωση</u>** του γραφήματος
- Κάθε τμήμα του επιπέδου που ορίζεται από απλό κύκλο της αποτύπωσης λέγεται **<u>όψη</u>** της αποτύπωσης
- Το **<u>πλήθος των όψεων</u>**: Συμβολίζεται με **ο** και προσοχή ότι συμπεριλαμβάνει πάντα και την εξωτερική όψη
- **<u>Βαθμός της όψης</u>** o_i το πλήθος των ακμών που περιέχει ο απλός κύκλος της όψης (συμβολίζεται με $\boldsymbol{d(o_i)}$)

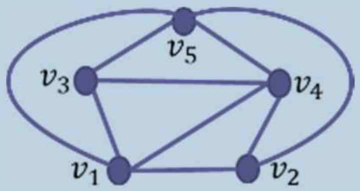
<u>Σε ένα επίπεδο γράφημα:</u>

- $\sum_{i=1}^{o} d(o_i) \leq 2m$
- Αν είναι και συνδεόμενο ισχύει ο τύπος του Euler: $\boldsymbol{o = m - n + 2}$

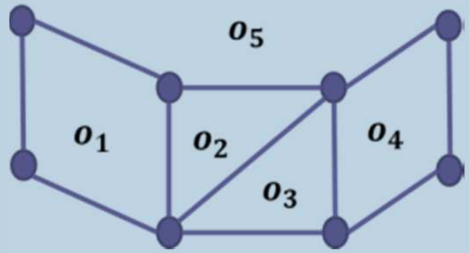
<u>Παράδειγμα:</u> Το ακόλουθο γράφημα είναι επίπεδο



διότι υπάρχει επίπεδη αποτύπωσή του:



<u>Παράδειγμα:</u> Στην ακόλουθη επίπεδη αποτύπωση έχουμε 5 όψεις



Και ισχύει για τους βαθμούς των όψεων:
$\mathrm{d}(o_1) = 4, \mathrm{d}(o_2) = 3, \mathrm{d}(o_3) = 3, \mathrm{d}(o_4) = 4,$
$\mathrm{d}(o_5) = 8$

Ένα γράφημα **<u>είναι επίπεδο</u>** αν:

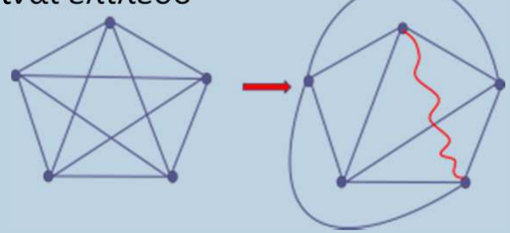
- Μπορούμε να το ζωγραφίσουμε στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του!
- Δεν περιέχει ως υπογράφημα το K5 ή το K3,3 και δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K5 ή του K3,3 (από θ.Kuratowski)

Ένα γράφημα **<u>δεν είναι επίπεδο</u>** αν:

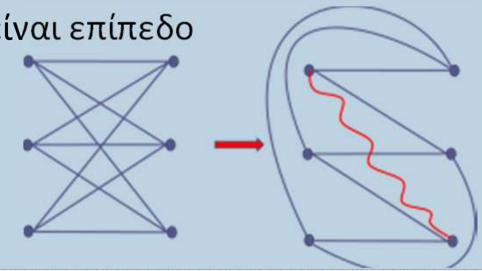
- Είναι απλό και ισχύει m > 3n-6
- Περιέχει ως υπογράφημα το K5 (από θ.Kuratowski)
- Περιέχει ως υπογράφημα το K3,3 (από θ.Kuratowski)
- Περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K5 ή το K3,3(από θ.Kuratowski)

<u>Θεώρημα Kuratowski:</u> Ένα γράφημα είναι επίπεδο **αν και μόνο αν** δεν περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ (ή ομοιομορφικό αυτών)

Το K_5 δεν είναι επίπεδο



Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο



Σκιαγράφηση Αλγόριθμου Dijkstra:

Κατά την διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου σημειώνουμε σε κάθε κορυφή v:

- L[v] το κόστος του καλύτερου μονοπατίου για να πάμε από την αφετηρία s στην κορυφή v
- P[v] είναι η κορυφή μέσω της οποίας καταλήγουμε στην κορυφή v

Στην αρχικοποίηση:

- Θέτουμε όλες τις ετικέτες L[v]=+∞ εκτός της αφετηρίας που έχει L[s]=0

Σε κάθε βήμα:

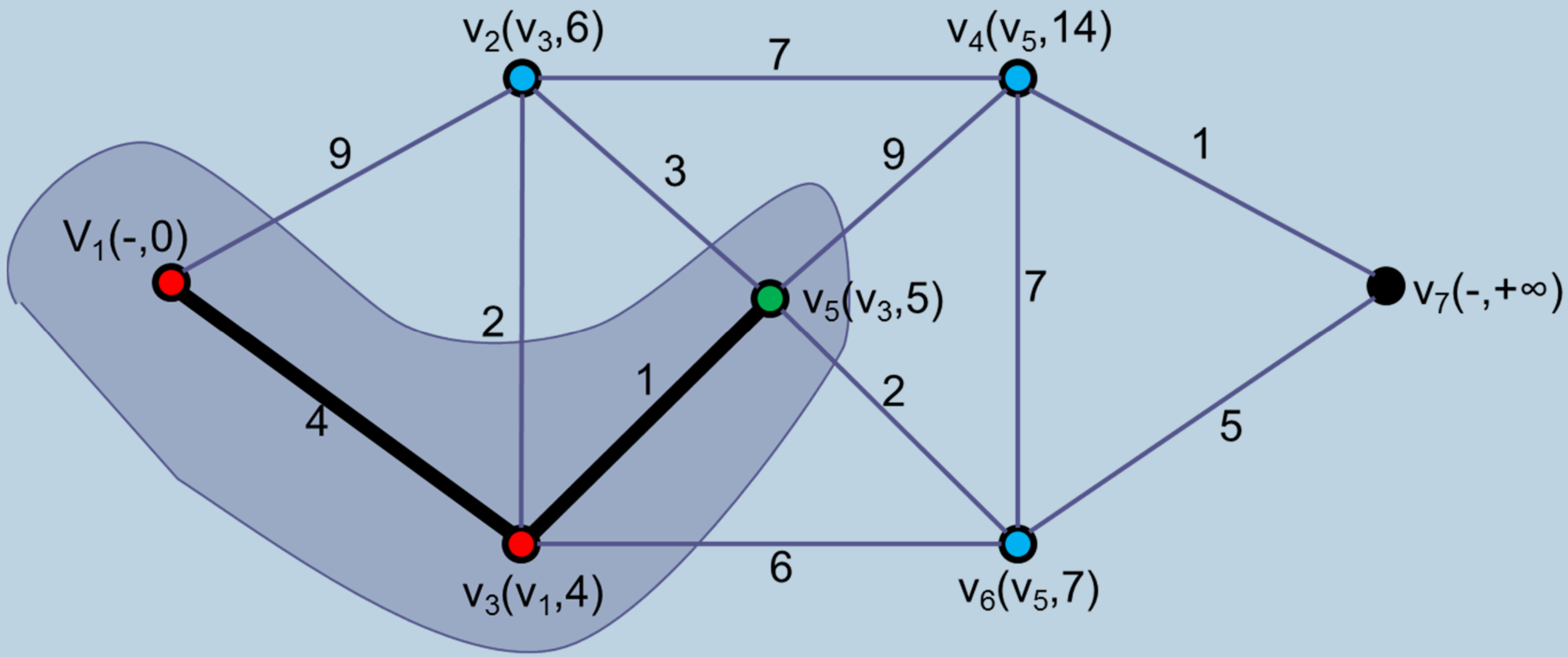
- Οριστικοποιείται η κορυφή με το μικρότερο κόστος από τις μη οριστικοποιημένες
- Διορθώνονται οι ετικέτες των γειτονικών μη οριστικοποιημένων κορυφών (σε περίπτωση που βρεθεί καλύτερο μονοπάτι από την κορυφή που οριστικοποιήθηκε)

Τερματισμός:

- Όταν οριστικοποιηθεί η κορυφή τερματισμού t.

Παράδειγμα:

Σχηματική απεικόνιση μετα την εκτέλεση 2 βημάτων σε ένα γράφημα:



Επόμενη κορυφή που οριστικοποιείται είναι η v2