# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

### Μάθημα 4.2:
### Βαθμοί Κορυφών και Τεχνικές Απόδειξης στην Θεωρία Γράφων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Νέοι Ορισμοί (Βαθμοί Κορυφών, Κανονικό Γράφημα)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β

- Τεχνικές Απόδειξη στην Θεωρία Γράφων
- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ

# Β. Θεωρία

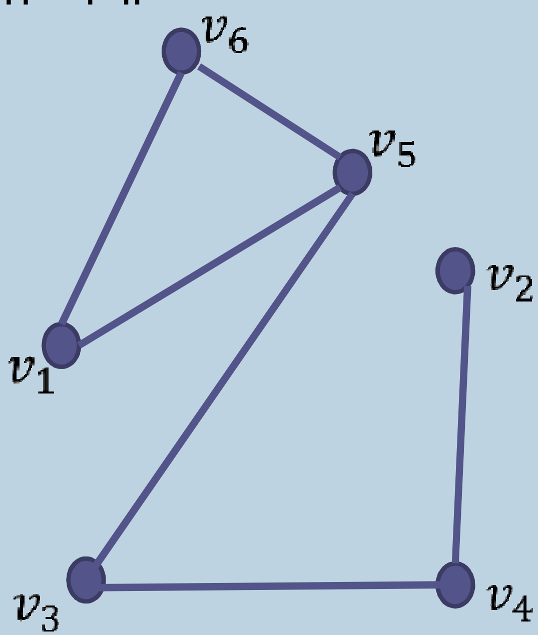
## 1. Βαθμοί Κορυφών

### 1. Βαθμός Κορυφής

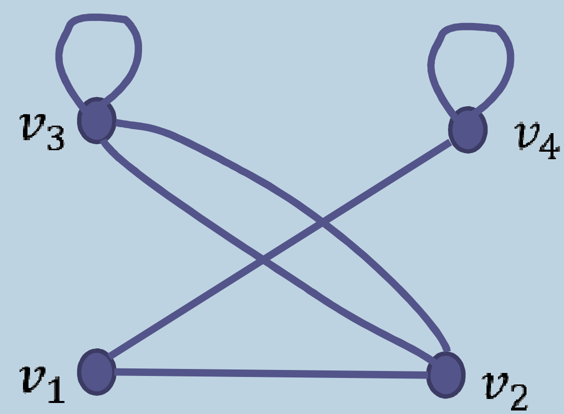
Ορισμός (εμπίπτει σε Μ.Κ.Γ.):

- **Βαθμός** της κορυφής $v_i$ είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν
    - Συμβολίζεται με $d(v_i)$
- Ειδικά για μη απλά γραφήματα η ανακύκλωση μετράει κατά 2 στο βαθμό κορυφής.

Παραδείγματα: Στα ακόλουθα γραφήματα βλέπουμε τον βαθμό των κορυφών των δύο γραφημάτων:




- $d(v_1) = 2$
- $d(v_2) = 1$
- $d(v_3) = 2$
- $d(v_4) = 2$
- $d(v_5) = 3$
- $d(v_6) = 2$




- $d(v_1) = 2$
- $d(v_2) = 3$
- $d(v_3) = 4$
- $d(v_4) = 3$

# Β. Θεωρία

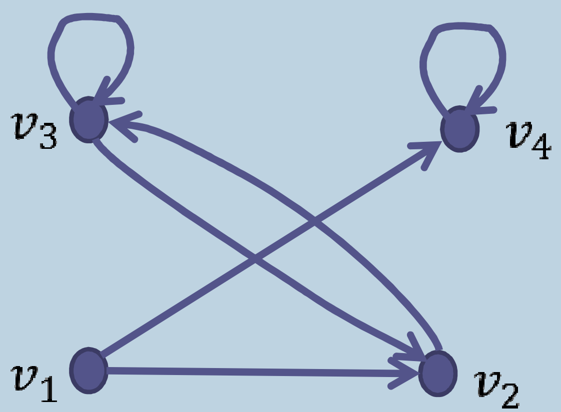
## 1. Βαθμοί Κορυφών

### 1. Βαθμός Κορυφής

Ορισμός (Εμπίπτει σε Κ.Γ.):

- **Έσω Βαθμός** της κορυφής $v_i$ είναι το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφη $v_i$
  - Συμβολίζεται με $d^-(v_i)$
- **Έξω Βαθμός** της κορυφής $v_i$ είναι το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφη $v_i$
  - Συμβολίζεται με $d^+(v_i)$

Παράδειγμα: Στο παρακάτω γράφημα υπολογίζουμε τους έσω και έξω βαθμούς:




- $d^-(v_1) = 0$
- $d^-(v_2) = 2$
- $d^-(v_3) = 2$
- $d^-(v_4) = 2$

- $d^+(v_1) = 2$
- $d^+(v_2) = 1$
- $d^+(v_3) = 2$
- $d^+(v_4) = 1$

# Β. Θεωρία

## 1. Βαθμοί Κορυφών

## 2. Το Θεώρημα Βαθμών Κορυφών

**Θεώρημα Βαθμών Κορυφών** (λέγεται και **Λήμμα της Χειραψίας**)

- *Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Και η εκδοχή του για κατευθυνόμενα γραφήματα:

- *Το άθροισμα των έσω και των έξω βαθμών των κορυφών σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών*

$$\sum_{i=1}^{n} [d^-(v_i) + d^+(v_i)] = 2m$$

Στους παραπάνω τύπους όπου n=|V| και όπου m=|E|

# Β. Θεωρία

## 1. Βαθμοί Κορυφών

## 2. Το Θεώρημα Βαθμών Κορυφών

**Απόδειξη του Θεωρήματος Βαθμών Κορυφών**

Έστω γράφος G=(V,E), με |V|=n κορυφές και |E|=m ακμές.

Στο άθροισμα των βαθμών κορυφών

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)$$

κάθε ακμή συμβάλλει κατά 2, αφού μετριέται από μία φορά σε κάθε κόμβο στον οποίο προσπίπτει. Άρα αφού κάθε ακμή συμβάλλει ακριβώς κατά δύο στο άθροισμα, συνολικά αυτό το άθροισμα είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών 2m

# Β. Θεωρία

## 1. Βαθμοί Κορυφών

### 3. Πορίσματα του Θεωρήματος Βαθμών Κορυφών

**ΠΟΡΙΣΜΑ 1** (του θεωρήματος βαθμών κορυφών)

*Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι άρτιος αριθμός*

Απόδειξη:

Από το θεώρημα, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι ίσο με 2m, συνεπώς είναι άρτιος αριθμός.

# Β. Θεωρία

## 1. Βαθμοί Κορυφών

### 3. Πορίσματα του Θεωρήματος Βαθμών Κορυφών

**ΠΟΡΙΣΜΑ 2** (του θεωρήματος βαθμών κορυφών)

*Σε κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα: Το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος αριθμός.*

Απόδειξη:

(Απόδειξη με άτοπο) Έστω ότι το πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό του γραφήματος είναι περιττός αριθμός.

- Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών με άρτιο βαθμό θα είναι 2p (άρτιος αριθμός)
- Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών με περιττό βαθμό θα είναι 2q+1 (περιττός αριθμός)

Συνεπώς το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι 2p+2q+1=2(p+q)+1, άρα είναι περιττός αριθμός. Άτοπο, διότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι άρτιος αριθμός.

# Β. Θεωρία

## 1. Βαθμοί Κορυφών

### 3. Πορίσματα του Θεωρήματος Βαθμών Κορυφών

Για τον επόμενο τύπο άσκησης:

- Ελέγχουμε αν το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος.
  - Αν δεν είναι άρτιος, τότε δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα,
  - Αν είναι άρτιος, τότε πρέπει να ελέγξουμε κατασκευαστικά αν υπάρχει τέτοιο γράφημα

Άσκηση: Εξετάστε αν τα παρακάτω άπλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα μπορούν να κατασκευαστούν:

1. Γράφημα 8 κορυφών
   - 1 κορυφή βαθμού 2
   - 2 κορυφές βαθμού 3
   - 4 κορυφές βαθμού 4
   - 1 κορυφή βαθμού 5

2. Γράφημα 6 κορυφών
   - 2 κορυφές βαθμού 2
   - 2 κορυφές βαθμού 3
   - 1 κορυφή βαθμού 4
   - 1 κορυφή βαθμού 6

3. Γράφημα 5 κορυφών
   - 1 κορυφή βαθμού 2
   - 4 κορυφές βαθμού 4

4. Γράφημα 9 κορυφών
   - 1 κορυφή βαθμού 1
   - 2 κορυφές βαθμού 3
   - 2 κορυφές βαθμού 4
   - 1 κορυφή βαθμού 5
   - 1 κορυφή βαθμού 6
   - 2 κορυφές βαθμού 8

# Β. Θεωρία

## 1. Βαθμοί Κορυφών

### 4. Κανονικό Γράφημα και Κ-κανονικό γράφημα

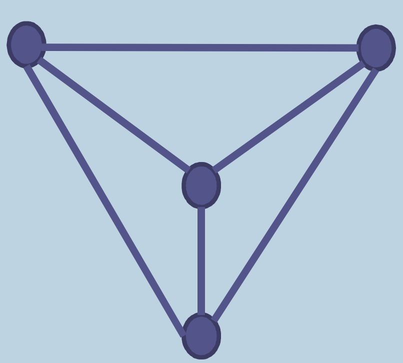
Ορισμός:
Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα θα λέγεται:
- **k-κανονικό,** ανν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό k.

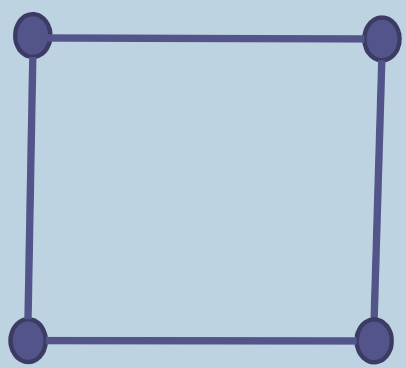
Ενώ αν μας αναφέρεται ότι το γράφημα είναι κανονικό, αυτό σημαίνει ότι όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό.

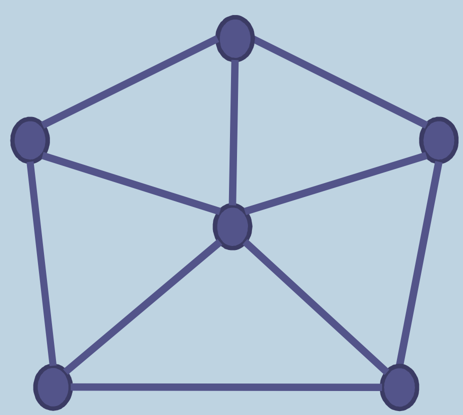
Σημαντικό: Σε ένα k-κανονικό γράφημα ισχύει: m=nk/2 (για απόδειξη βλ.εφαρμογή1)

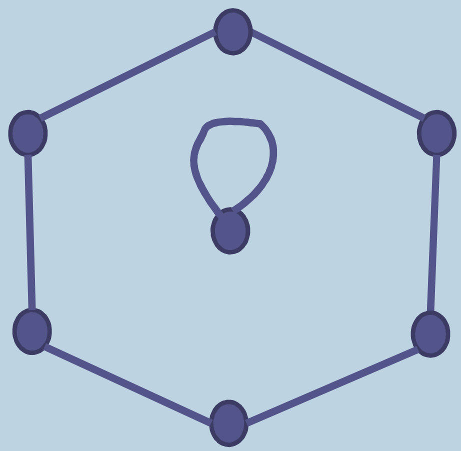
Πόρισμα
- Το $K_n$ είναι (n-1)-κανονικό γράφημα.

Άσκηση: Ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι κανονικά:









# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στην Θεωρία Γράφων

Στην ενότητα της θεωρίας γράφων πρέπει να αποδεικνύουμε προτάσεις που αφορούν γραφήματα. Κάθε μορφή πρότασης απαιτεί έναν τρόπο απόδειξης. Οι περισσότερες από τις προτάσεις αποδεικνύονται με τους εξής τρόπους

- Αποδείξεις συλλογιστικής: Είναι αποδείξεις προτάσεων που έχουν τη δομή συνεπαγωγής. Κάτω από τις υποθέσεις που μας δίδονται με ορθούς συλλογισμούς καταλήγουμε ότι ισχύει και το αποδεικτέο.

- Αποοδείξεις με Άτοπο: Εμπίπτουν σε προτάσεις που έχουν την δομή συνεπαγωγής. Αρχικά υποθέτουμε ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει. Έπειτα με συλλογιστική καταλήγουμε ότι δεν ισχύει και κάποια από τις υποθέσεις. Συνεπώς είναι ΑΤΟΠΟ ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει

- Αποδείξεις Μαθηματικής Επαγωγής. Αποδεικνύουμε στην βάση της επαγωγής, υποθέτουμε ότι ισχύει στην επαγωγική υπόθεση και αποδεικνύουμε ότι ισχύει στο επαγωγικό βήμα.

+ άλλες τεχνικές (με αντιπαραδείγματα, κατασκευαστικές, ισοδυναμιών, με τύπους, μεγιστοτικών δομών κ.λπ. που θα δούμε σταδιακά στα επόμενα μαθήματα.

# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στη Θεωρία Γράφων

### 1. Αποδείξεις Συλλογιστικής

Οι αποδείξεις συλλογιστικής είναι αποδείξεις συνεπαγωγών:

- Έχουν δηλαδή την μορφή πρότασης **«ΑΝ (υποθέσεις) ΤΟΤΕ (συμπέρασμα)»**

Η δομή μιας απόδειξης συλλογιστικής είναι η ακόλουθη:

- Θεωρούμε δεδομένο ότι ισχύουν οι υποθέσεις και αναλύουμε τις υποθέσεις με βάση τους ορισμούς.
- ….
- Εξάγουμε λογικά συμπεράσματα που εξάγονται από τις υποθέσεις. Χρήσιμα θα φανούν τα θεωρήματα, οι προτάσεις και τα λήμματα της θεωρίας
- ….
- Ισχύει το αποδεικτέο με βάση τον ορισμό του.

Συνεπώς η δομή μιας απόδειξης συλλογιστικής έχει την μορφή μιας ακολουθίας συνεπαγωγών.

# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στη Θεωρία Γράφων

### 1. Αποδείξεις Συλλογιστικής

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι «κάθε πλήρες γράφημα είναι και συνδεόμενο»

Καταλαβαίνουμε την συνεπαγωγική δομή της πρότασης:

«Αν ένα γράφημα είναι πλήρες τότε είναι και συνδεόμενο»

Απόδειξη:

- Έστω γράφημα G=(V,E) το οποίο είναι πλήρες
- Αυτό σημαίνει ότι ανά δύο οι κορυφές του G συνδέονται με ακμή.
- Άρα ανά δύο οι κορυφές του G συνδέονται με μονοπάτι.
- Άρα το γράφημα είναι συνδεόμενο.

# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στη Θεωρία Γράφων

### 2. Αποδείξεις με Άτοπο

Οι αποδείξεις με άτοπο εφαρμόζονται και πάλι σε προτάσεις συνεπαγωγών

- Έχουν δηλαδή την μορφή πρότασης **«ΑΝ (υποθέσεις) ΤΟΤΕ (συμπέρασμα)»**

Τότε <u>αρνούμαστε το συμπέρασμα</u> (υποθέτουμε ότι δεν ισχύει) και με συλλογιστική καταλήγουμε ότι <u>δεν ισχύει κάποια από τις υποθέσεις.</u>

Συνεπώς η δομή της απόδειξης μιας πρότασης με άτοπο θα είναι η ακόλουθη:

- Έστω ότι δεν ισχύει το (συμπέρασμα).
- ….
- Εξάγουμε λογικά συμπεράσματα που εξάγονται από τις υποθέσεις και την άρνηση του αποδεικτέου.
- ….
- Δεν ισχύει κάποια από τις υποθέσεις.
- Άτοπο, άρα ισχύει το (συμπέρασμα)

Συνεπώς το άτοπο αλλάζει την μορφή του αποδεικτέου (αλλάζει την άσκηση).Συχνά η μορφή που προκύπτει είναι πολύ πιο εύκολο να αποδειχθεί παρά η ευθεία πρόταση.

# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στη Θεωρία Γράφων

### 2. Αποδείξεις με Άτοπο

Παράδειγμα: Έστω G=(V,E) απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που περιέχει ως υπογράφημα μία κλίκα k κορυφών. Να αποδειχθεί ότι κάθε δύο κορυφές της κλίκας k κορυφών δεν συνδέονται στο συμπλήρωμα του G.

Απόδειξη:

- Έστω γράφημα G=(V,E) και $V' \subseteq V$ είναι κλίκα.
- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν κορυφές στο $V'$ που συνδέονται στο $\overline{G}$ (προς απόδειξη με άτοπο)
- Άρα δύο κορυφές του $V'$, έστω $v_i, v_j$ συνδέονται με ακμή στο $\overline{G}$.
- Άρα η ακμή $[v_i, v_j]$ δεν θα περιέχεται στο αρχικό γράφημα.
- Άρα το V' δεν είναι κλίκα στον γράφο G. Άτοπο
- Άρα οι κορυφές του V' δεν συνδέονται στο $\overline{G}$

# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στη Θεωρία Γράφων

### 3. Αποδείξεις Μαθηματικής Επαγωγής

Οι αποδείξεις με επαγωγή εφαρμόζονται μόνο αν μας το ζητάει ρητά στην εκφώνηση να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.
Συνήθως η επαγωγή γίνεται στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

- (σκόπιμη κρίνεται μια επανάληψη στο μάθημα προαπαιτουμένων 0.2)

Αφού κάνουμε το σχήμα της πρότασης που «παίζει το n» προχωράμε στα 3 βήματα της επαγωγής:

- Την βάση της επαγωγής, όπου αποδεικνύουμε ότι ισχύει για τον μικρότερο φυσικό που μας δίνει η εκφώνηση
- Την επαγωγική υπόθεση, όπου υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιον φυσικό k
- Το επαγωγικό βήμα, όπου αποδεικνύουμε ότι ισχύει για την τιμή k+1 (την επόμενη τιμή από αυτήν που υποθέσαμε ήδη ότι ισχύει (Στην απόδειξη χρησιμοποιούμε οπωσδήποτε την επαγωγική υπόθεση)

# Β. Θεωρία

## 2. Τεχνικές Απόδειξης στη Θεωρία Γράφων

### 3. Αποδείξεις Μαθηματικής Επαγωγής

Παράδειγμα: Αποδείξτε με Μαθηματική Επαγωγή ότι το $K_n$ έχει n(n-1)/2 ακμές

Απόδειξη:

**Το $K_n$ έχει n(n-1)/2 ακμές**

- **Βάση Επαγωγής:** Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=1, δηλαδή ότι το **$K_1$ έχει 1(1-1)/2 ακμές.**

  Απόδειξη: Πράγματι το $K_1$ έχει 0 ακμές.
- **Επαγωγική Υπόθεση:** Υπόθετουμε ότι ισχύει για n=k, δηλαδή ότι το **$K_k$ έχει k(k-1)/2 ακμές.**
- **Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε ότι ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι το **$K_{k+1}$ έχει (k+1)k/2 ακμές.**

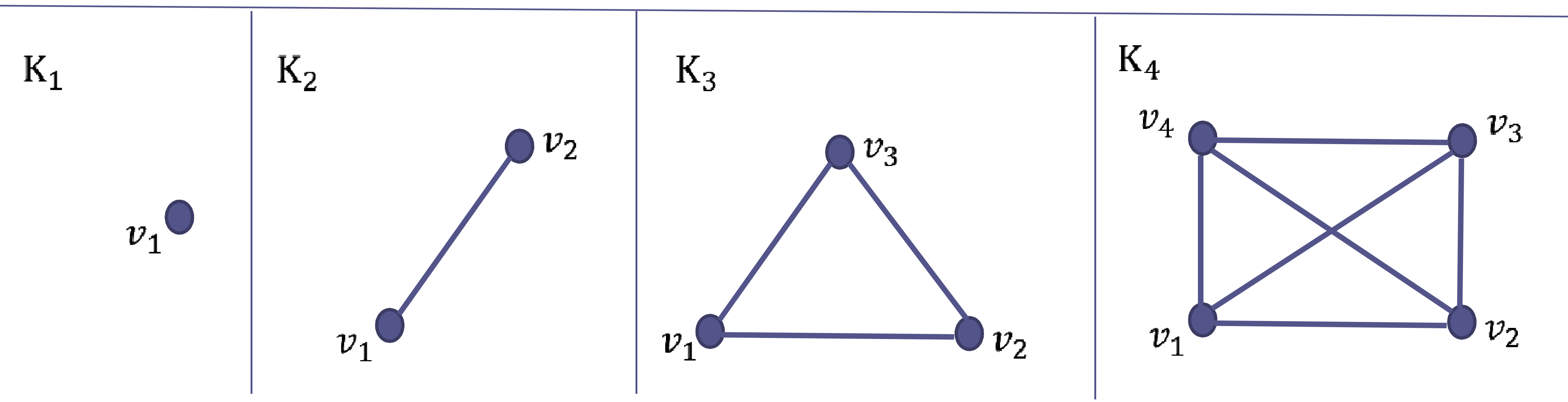
  Απόδειξη: Το $K_k$ έχει k(k-1)/2 ακμές από την επαγωγική υπόθεση. Από το $K_k$ μπορώ να πάρω to $K_{k+1}$ αν προσθέσω μια κορυφή και την συνδέσω με τις υπόλοιπες k κορυφές (άρα προσθέτω k ακμές). Συνεπώς το $K_{k+1}$ θα έχει:

  $$\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k(k-1)}{2}+\frac{2k}{2}=\frac{k^2-k+2k}{2}=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k(k+1)}{2} \text{ ακμές}$$

# Γ. Ασκήσεις
## Άσκηση Κατανόησης 1

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων $K_n$ (κλίκα τάξης n). Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

1. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του;
2. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του συμπληρώματός του;
3. Ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός κορυφής;
4. Ποιος είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής;
5. Είναι κανονικό γράφημα;

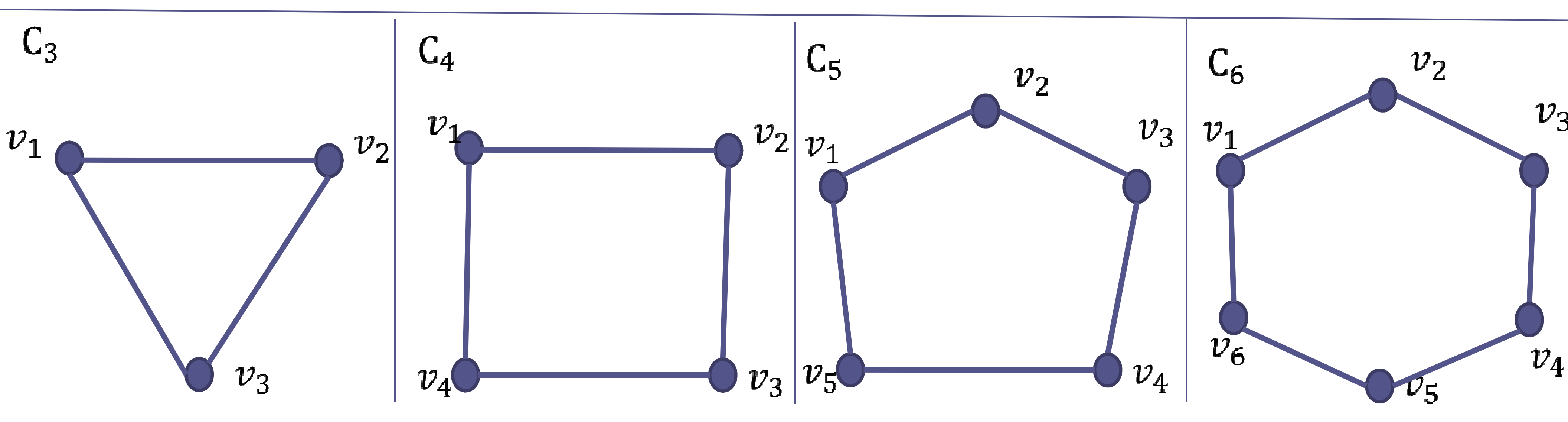


# Γ. Ασκήσεις

## Άσκηση Κατανόησης 2

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων $C_n$ (κύκλος τάξης n) για n≥3 πού αποτελείται από n κορυφές κατά μήκος ενός απλού κύκλου. Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

1. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του;
2. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του συμπληρώματός του;
3. Ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός κορυφής;
4. Ποιος είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής;
5. Είναι κανονικό γράφημα;

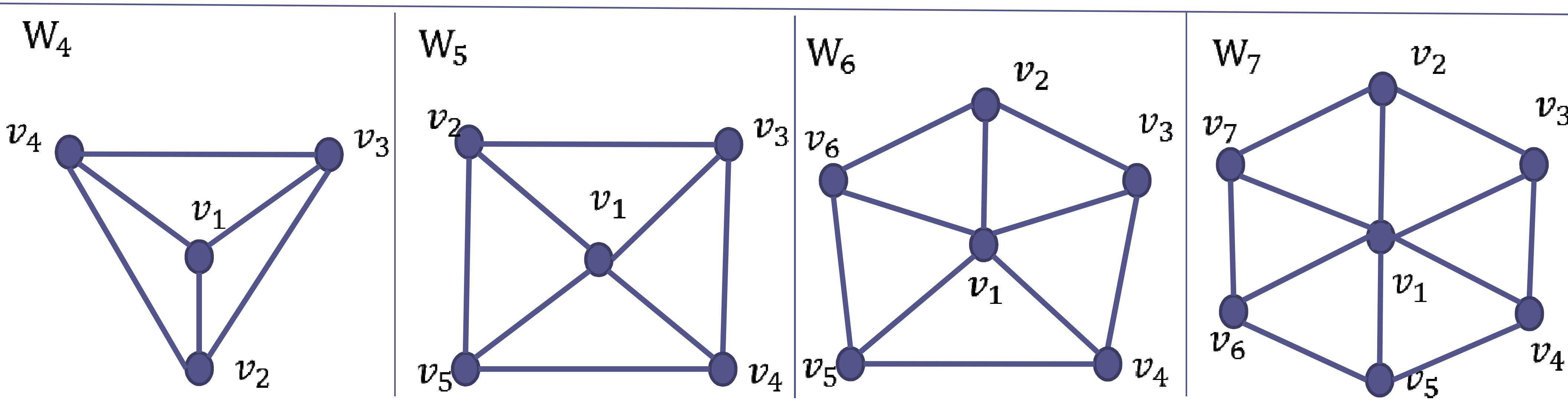


# Γ. Ασκήσεις

## Άσκηση Κατανόησης 3

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων $W_n$ (τροχός τάξης n) για n≥4 που αποτελείται από μία κορυφή (κέντρο) που συνδέεται με ακμή (ακτίνα) με όλες τις υπόλοιπες κορυφές οι οποίες και δημιουργούν ένα απλό κύκλο (βλέπε σχήμα). Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

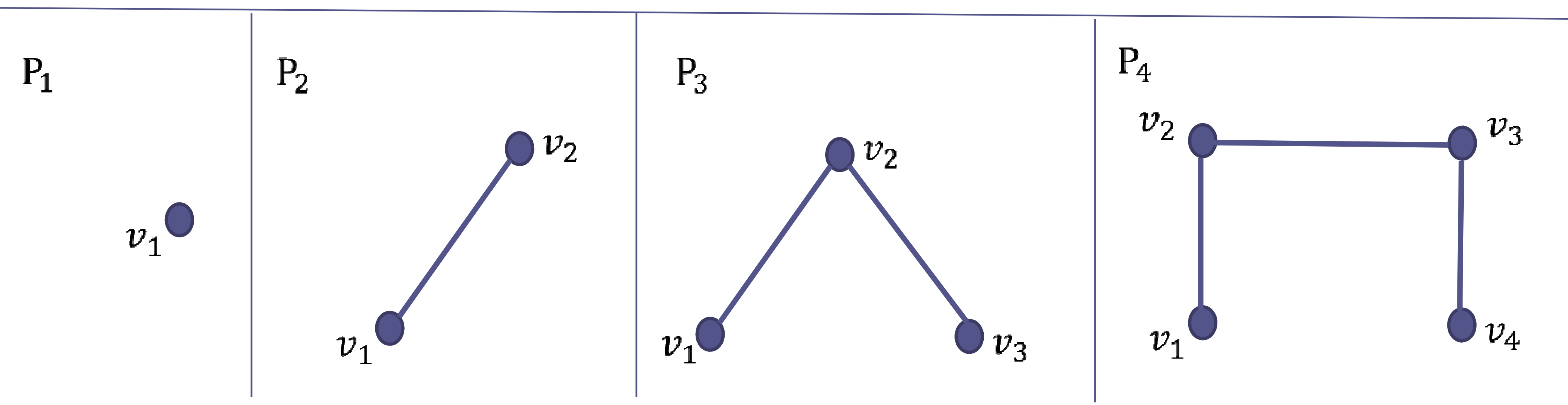
1. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του;
2. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του συμπληρώματός του;
3. Ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός κορυφής;
4. Ποιος είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής;
5. Είναι κανονικό γράφημα;



# Γ. Ασκήσεις
## Άσκηση Κατανόησης 4

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων $P_n$ (μονοπάτι μήκους n) ως το γράφημα που είναι ένα απλό μονοπάτι μήκους n (βλέπε σχήμα). Εξετάστε ανάλογα με την τιμή του n:

1. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του;
2. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών του συμπληρώματός του;
3. Ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός κορυφής;
4. Ποιος είναι ο μέγιστος βαθμός κορυφής;
5. Είναι κανονικό γράφημα;



# Γ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 1

Έστω απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα 6 κορυφών:

1. Αν το γράφημα είναι πλήρες έχει 15 ακμές.

2. Αν το γράφημα είναι πλήρες είναι κανονικό.

3. Αν το γράφημα είναι κανονικό, είναι πλήρες.

4. Αν το γράφημα είναι 1-κανονικό, τότε δεν είναι συνδεόμενο.

# Γ. Ασκήσεις
## Ερωτήσεις 2

Εξετάστε αν οι ακόλουθες προτάσεις που αφορούν απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι αληθείς ή όχι.

1. Υπάρχει γράφημα 5 κορυφών που όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 4.

2. Υπάρχει γράφημα 7 κορυφών, με 2 κορυφές βαθμού 6, 3 κορυφές βαθμού 3 και 2 κορυφές βαθμού 2

3. Υπάρχει γράφημα 10 κορυφών, με 2 κορυφές βαθμού 9, 2 κορυφές βαθμού 8, 3 κορυφές βαθμού 5, 1 κορυφή βαθμού 3, 2 κορυφές βαθμού 2.

4. Υπάρχει γράφημα n κορυφών που όλες οι κορυφές έχουν διαφορετικό βαθμό.

# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 1

Δείξτε ότι σε κάθε k-κανονικό γράφημα ισχύει ο τύπος: $m=nk/2$.

# Γ. Ασκήσεις
## Εφαρμογή 2

Αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι το $P_n$ έχει n-1 ακμές.

# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 3

Αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι το $K_n$ είναι (n-1)-κανονικό γράφημα

# Γ. Ασκήσεις
## Εφαρμογή 4

(α) Αποδείξτε ότι ένα γράφημα που όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό 3 δεν μπορεί να έχει περιττό αριθμό κορυφών

(β) Δείξτε ότι ένα γράφημα που έχει μία γέφυρα και όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό 3 δεν μπορεί να έχει άρτιο αριθμό κορυφών $k$ με $k \leq 8$

(γ) Κατασκευάστε ένα γράφημα με το ελάχιστο αριθμό κορυφών που να έχει μία γέφυρα και όλες οι κορυφές του να έχουν βαθμό 3.