ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ – ΔΙΑΝ. ΟΜΟΙΩΝ

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ(απλή γεννήτρια)

Απαριθμητής: Για κάθε τύπο αντικειμένου

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα μπορούμε να επιλέξουμε από κάθε τύπο αντικειμένου.

Συντελεστής: του όρου x^k όπου k: τα αντικ/να που επιλέγω.

Παράδειγμα:

Επιλέγουμε 10 αντικείμενα από αντικείμενα Α,Β,Γ με τους περιορισμούς να επιλεγούν 2 έως 6 από τα Α, το πολύ 5 από τα Β και τουλάχιστον 4 από τα Γ (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Λύση:

Χρησιμοποιώ **απλή** γεννήτρια (πρόβλημα επιλογής)

- Απαριθμητής για τα Α: $x^2+x^3+\cdots+x^6$
- Απαριθμητής για τα Β: $1+x+x^2+\cdots+x^5$
- Απαριθμητής για τα Γ: $x^4+x^5+\cdots+x^{10}$

Η γεννήτρια είναι:

$$(x^2+x^3+\cdots+x^6)(1+x+x^2+\cdots+x^5)(x^4+x^5+\cdots+x^{10})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{10} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

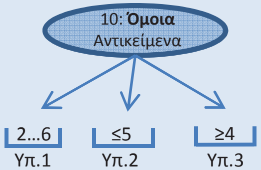
ΔΙΑΝΟΜΗ ΟΜΟΙΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ (απλή γεννήτρια)

Απαριθμητής: Για κάθε υποδοχή.

Όροι Απαριθμητών: Επιλέγουμε τους όρους από τον απαριθμητή $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k$ που εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιτρέπεται να έχει η υποδοχή.

Συντελεστής: του όρου x^k όπου k: τα αντικ/να που μοιράζω.

Παράδειγμα:



Μοιράζουμε 10 όμοια αντικείμενα σε 3 υποδοχές ώστε η 1η να πάρει 2 έως 6 αντικείμενα, η 2η να πάρει το πολύ 5 αντικείμενα και η 3η τουλάχιστον 4 αντικείμενα (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Λύση:

Χρησιμοποιώ **απλή** γεννήτρια (πρόβλημα διανομής ομοίων)

- Απαριθμητής για την Υπ.1: $x^2+x^3+\cdots+x^6$
- Απαριθμητής για την Υπ.2: $1+x+x^2+\cdots+x^5$
- Απαριθμητής για την Υπ.3: $x^4+x^5+\cdots+x^{10}$

Η γεννήτρια είναι:

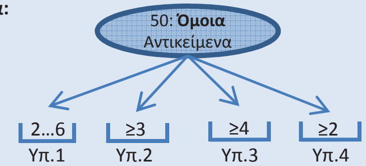
$$(x^2+x^3+\cdots+x^6)(1+x+x^2+\cdots+x^5)(x^4+x^5+\cdots+x^{10})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{10} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΩΝ

Παράδειγμα: Μοιράζουμε 50 όμοια αντικείμενα σε 4 υποδοχές ώστε η 1η να πάρει 2 έως 6 αντικείμενα, η 2η να πάρει τουλάχιστον 3 αντικείμενα, η 3η τουλάχιστον 4 αντικείμενα και η 4η τουλάχιστον 2 αντικείμενα (επίλυση με γεννήτρια συνάρτηση)

Παράδειγμα:



ευθύς

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^3+x^4+\cdots+x^{50})(x^4+x^5+\cdots+x^{50})(x^2+x^3+\cdots+x^{50})$

ΟΡΟΣ: x^{50}

large

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^3+x^4+\cdots)(x^4+x^5+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)$

ΟΡΟΣ: x^{50}

Μίζερος

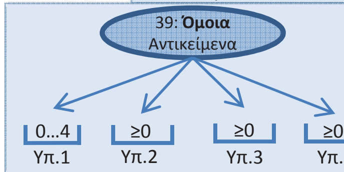
ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^3+x^4+\cdots+x^{42})(x^4+x^5+\cdots+x^{43})(x^2+x^3+\cdots+x^{41})$

ΟΡΟΣ: x^{50}

Π.χ. για την Υπ.2
χάνει 2+4+2=8 από τις άλλες
Άρα θα παρει το πολύ 50-8=42

Διαχ/ση Περ/μου

Δίνω 2 στην Υπ1, 3 στην Υπ2, 4 στην Υπ3 και 2 στην Υπ4. Απομένουν 39



ευθύς

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1+x+\cdots+x^4)(1+x+x^2+\cdots+x^{39})^3$

ΟΡΟΣ: x^{39}

large

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1+x+\cdots+x^4)(1+x+x^2+\cdots)^3$

ΟΡΟΣ: x^{39}

Μίζερος

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ: $(1+x+\cdots+x^4)(1+x+x^2+\cdots+x^{39})^3$

ΟΡΟΣ: x^{39}

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΛΩΝ ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Εξίσωση

$$x_1+x_2+x_3=40, x_i\geq 0,\quad i=1,2,3.$$

Λύση: Η εξίσωση μοντελοποιείται ως διανομή ομοίων:

Άρα η γεννήτρια είναι: $(1+x+x^2+\cdots+x^{40})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 2: Εξίσωση με Συντελεστές

$$5x_1+10x_2+20x_3=1000\ x_i\geq 0,\quad i=1,2,3$$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται:

$$z_1+z_2+z_3=1000$$

Όπου z_1 πολλαπλάσιο του 5, z_2 πολλαπλάσιο του 10, z_3 πολλαπλάσιο του 20 με $z_i\geq 0,\quad i=1,2,3$

Άρα η γεννήτρια είναι: $(1+x^5+\cdots+x^{1000})\,(1+x^{10}+\cdots+x^{1000})\,(1+x^{20}+\cdots+x^{1000})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 3: Συμβολή στο Ζητούμενο Στόχο

Συνήθεις εκφωνήσεις είναι να επιλέγουμε χαρτονομίσματα που αθροίζουν σε ποσό ή να επιλέγουμε βάρη που αθροίζουν σε ένα συνολικό βάρος. **Π.χ. πόσοι τρόποι να επιλέξουμε 1000 ευρώ από 4ευρα, 10εύρα, 20εύρα.**

Λύση: Η γεννήτρια είναι: $(1+x^5+\cdots+x^{1000})\,(1+x^{10}+\cdots+x^{1000})\,(1+x^{20}+\cdots+x^{1000})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

Προσοχή. Άλλη άσκηση: Πόσοι τρόποι να επιλέξουμε 40 χαρτονομίσματα από 5ευρα, 10ευρα και 20ευρα;

Λύση: $(1+x+x^2+\cdots+x^{40})^3$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 4: Επιλογή από έναν

Έχουμε 6 αντίτυπα του βιβλίου Β1, 7 αντίτυπα του Β2, 11 αντίτυπα του Β3. Κατασκευάστε γεννήτρια ώστε δύο φοιτητές να πάρουν 12 βιβλία και το λιγότερο 2 αντίτυπα από κάθε βιβλίο. Σε ποιο συντελεστή της γεννήτριας βρίσκεται η απάντηση?

Λύση: Αρκεί να επιλέξω έναν έγκυρο συνδυασμό 12 βιβλίων για τον έναν φοιτητή. Ο άλλος θα πάρει τα υπόλοιπα. Οι επιλογές του 1ου φοιτητή είναι: Βιβλία Β1 (από 2 εώς 4), Βιβλία Β2 (από 2 εώς 5), Βιβλία Β3 (από 2 εώς 9), άρα η γεννήτρια είναι: $(x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^2+x^3+\cdots+x^9)$ και το ζητούμενο είναι ο συντ. του όρου x^{12} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

ΑΣΚΗΣΗ 5: Εξίσωση με Περιορισμό Ανίσωσης

$$x_1+x_2+x_3=100\ (1)$$

Υπό $x_1\geq x_2\ (2)\ και\ x_2\geq x_3 (3)\ όπου\ x_i\geq 0,\quad i=1,2,3$

Λύση:

Η (2) γράφεται: $x_2+s_2=x_1 (4)$ όπου $s_2\geq 0$

Η (3) γράφεται: $x_3+s_3=x_2 (5)$ όπου $s_3\geq 0$

Αντικατάσταση της (4) στην (1)…πράξεις…$2x_2+x_3+s_3=100\ (6)$

Αντικατάσταση της (5) στην (6)…πράξεις…$3x_1+2s_2+s_3=100$

Η εξίσωση γράφεται:

$$z_1+z_2+z_3=100$$

Όπου z_1 πολλαπλάσιο του 3, z_2 πολλαπλάσιο του 2, z_3 χωρίς περιορισμό με $z_i\geq 0,\quad i=1,2,3$

Άρα η γεννήτρια είναι: $(1+x^3+\cdots+x^{99})\,(1+x^2+\cdots+x^{100})\,(1+x+\cdots+x^{100})$ και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας