

# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

### Μάθημα 4.4: Κύκλος Euler

Δημήτρης Ψούνης



[www.psounis.gr](http://www.psounis.gr)



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## **A. Σκοπός του Μαθήματος**

## **B. Θεωρία**

### **1. Κύκλος Euler**

#### **1. Ορισμός**

#### **2. Το Θεώρημα του Euler**

## **Γ. Λυμένες Ασκήσεις**

## **Δ. Ασκήσεις**

### **1. Ασκήσεις Κατανόησης**

### **2. Ερωτήσεις**

### **3. Εφαρμογές**



## A. Σκοπός του Μαθήματος

### Επίπεδο A

- Νέοι Ορισμοί (Κύκλος Euler)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

### Επίπεδο B

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

### Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις



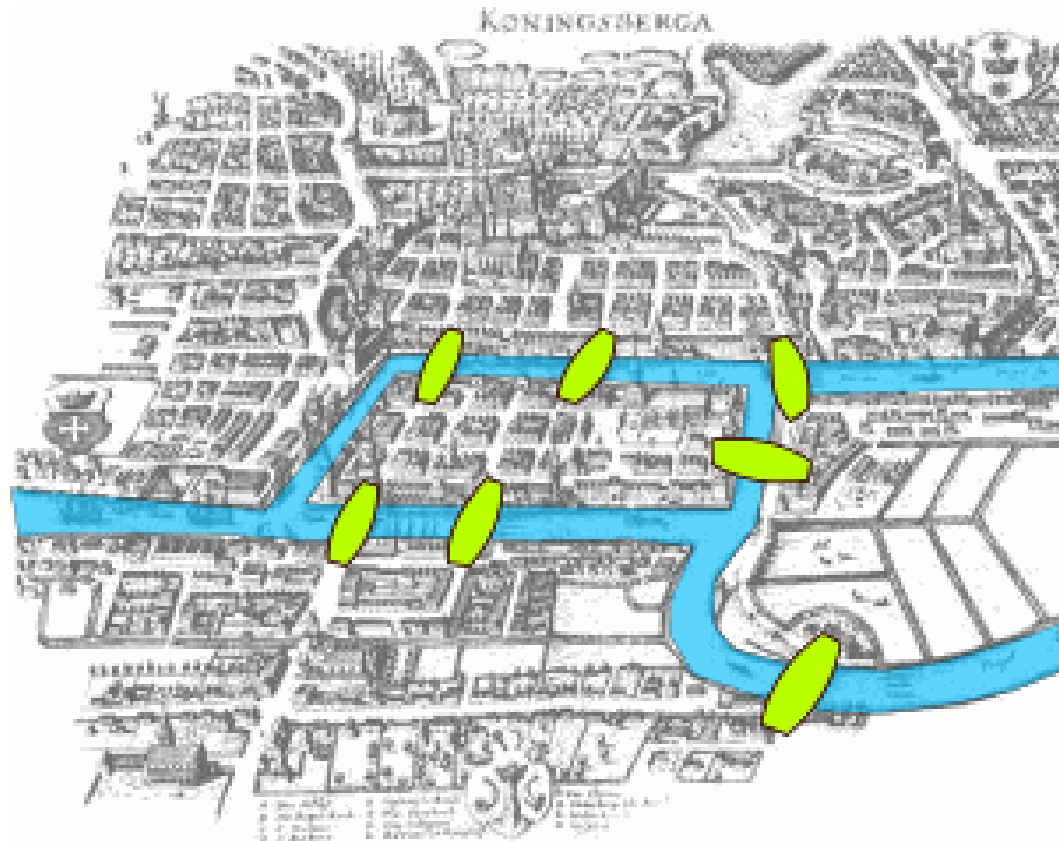
## Β. Θεωρία

### 1. Κύκλος Euler

#### 0. Η ανακάλυψη της Θεωρίας Γράφων

Ο Euler ως φοιτητής στο Königsberg αναρωτιέται:

«Πως μπορώ να κάνω τον περίπατό μου και να περάσω από κάθε μία από τις 7 γέφυρες της πόλης ακριβώς μία φορά;»



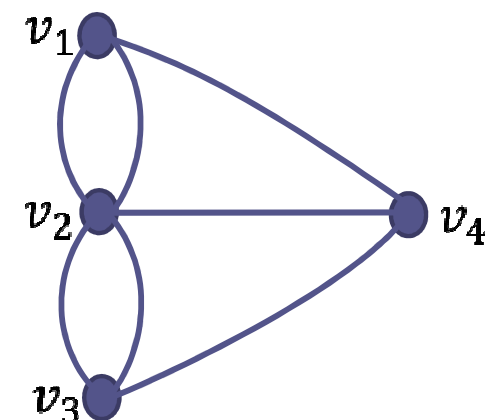
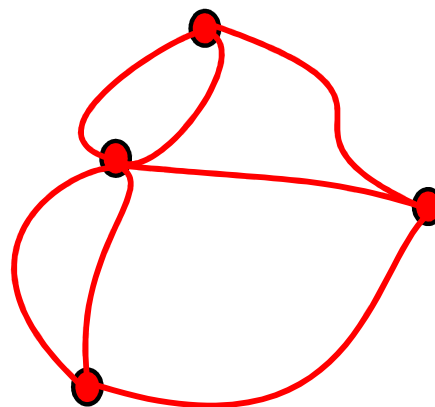
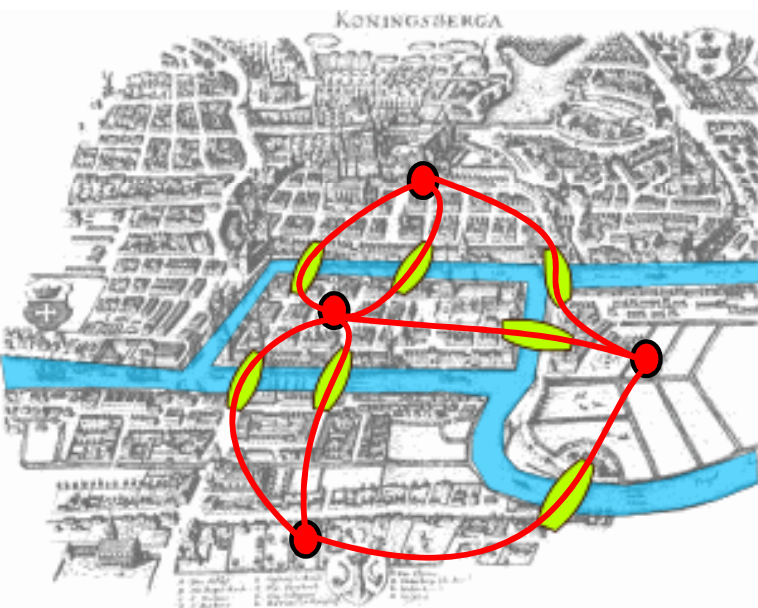


## Β. Θεωρία

### 1. Κύκλος Euler

#### 0. Η ανακάλυψη της Θεωρίας Γράφων

Η λύση: μοντελοποίηση του προβλήματος με γράφημα



Στο οποίο αναζητεί έναν κύκλο που περνάει από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά



## Β. Θεωρία

### 1. Κύκλος Euler

#### 1. Ορισμός

Ορισμός:

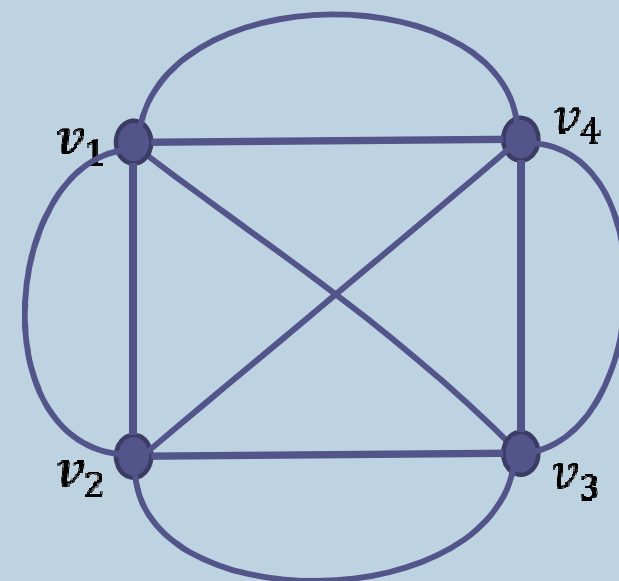
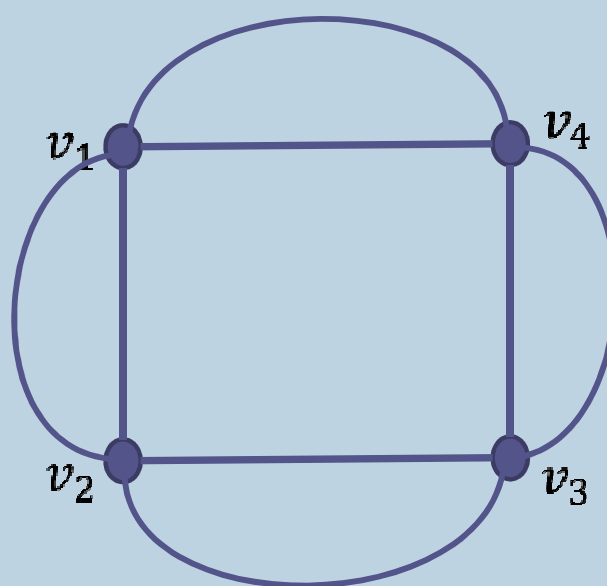
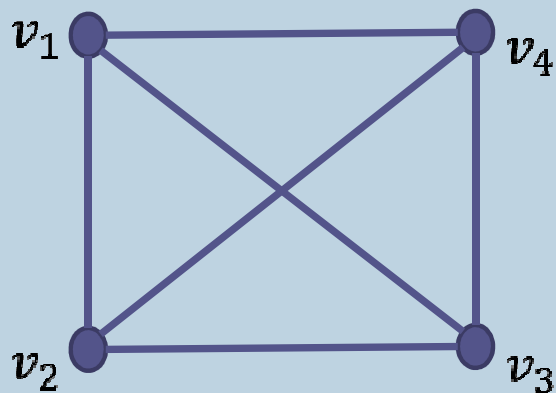
Ένας **κύκλος Euler** σε έναν γράφο  $G = (V, E)$  είναι ένας κύκλος που:

- Περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος
- Περνάει από **κάθε ακμή ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά**

Αν ένας γράφος έχει κύκλο Euler τότε καλείται Ευληριανός Γράφος ή Γράφος Euler.

Άσκηση: Ποια από τα παρακάτω γραφήματα περιέχουν κύκλο Euler;

$G_1$





## B. Θεωρία

### 1. Κύκλος Euler

### 2. Το Θεώρημα του Euler

Θεώρημα Euler για την ύπαρξη του κύκλου Euler:

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν:

- Είναι συνδεόμενο και
- Όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βάθος

Συνεπώς:

Για να δείξω ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler αρκεί να δείξω ότι:

- Είναι συνδεόμενο
- Όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό

Για να δείξω ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Euler αρκεί να δείξω ότι:

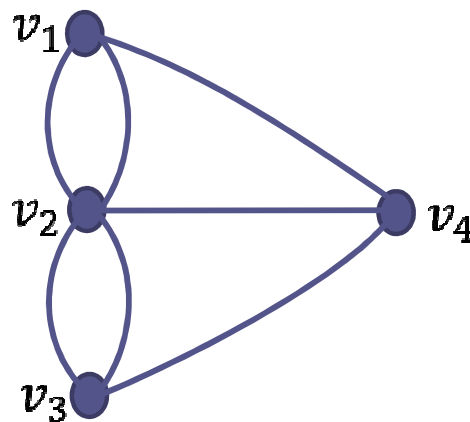
- Είτε ότι δεν είναι συνδεόμενο
- Είτε ότι υπάρχει κορυφή με περιττό βαθμό.



## B. Θεωρία

### 1. Κύκλος Euler

Το γράφημα του Königsberg δεν έχει κύκλο Euler, διότι περιέχει κορυφή με περιττό βαθμό.



Άρα δεν μπορεί να γίνει περίπατος που να περνάει από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά.





# Γ. Λυμένες Ασκήσεις

## Ασκηση 1

Αποδείξτε ότι: Ένα γράφημα έχει μονοπάτι Euler από μία κορυφή  $u$  σε μία κορυφή  $v$  (μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που περιέχονται όλες οι ακμές και όλες οι κορυφές του γραφήματος) αν και μόνο αν το γράφημα είναι συνδεόμενο και οι κορυφές  $v, u$  είναι οι μοναδικές κορυφές με περιττό βαθμό.

Λύση:

«**Ευθύ**» Αν το γράφημα περιέχει μονοπάτι Euler από την κορυφή  $u$  στην κορυφή  $v$ , τότε το γράφημα είναι συνδεόμενο και οι μοναδικές κορυφές με περιττό βαθμό είναι οι κορυφές  $u, v$ .

Απόδειξη: Αν ένα γράφημα περιέχει μονοπάτι Euler, τότε το γράφημα είναι συνδεόμενο (αφού σε αυτό περιλαμβάνονται όλες οι κορυφές του γραφήματος).

Προσθέτουμε την ακμή  $(u, v)$  στο γράφημα και έτσι το μονοπάτι γίνεται κλειστό, δηλαδή είναι ένας κύκλος που περνά από κάθε μία ακμή ακριβώς μία φορά (είναι δηλαδή κύκλος Euler). Άρα όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό (από το θεώρημα του Euler). Άρα οι μοναδικές κορυφές με περιττό βαθμό είναι οι κορυφές  $u, v$ .



# Γ. Λυμένες Ασκήσεις

## Ασκηση 1

**«Αντίστροφο»** Αν το γράφημα είναι συνδεόμενο και οι μοναδικές κορυφές με περιττό βαθμό είναι οι κορυφές  $u, v$ , τότε το γράφημα περιέχει μονοπάτι Euler από την κορυφή  $u$  στην κορυφή  $v$

Απόδειξη: Αν το γράφημα είναι συνδεόμενο και μόνο οι κορυφές  $u, v$  έχουν περιττό βαθμό, τότε όλες οι υπόλοιπες κορυφές θα έχουν άρτιο βαθμό και όχι μηδέν (αφού τότε το γράφημα δεν θα ήταν συνδεόμενο)

Προσθέτουμε την ακμή  $(u, v)$  στο γράφημα και έτσι το μονοπάτι γίνεται κλειστό, δηλαδή είναι ένας κύκλος που περνά από κάθε μία ακμή ακριβώς μία φορά (είναι δηλαδή κύκλος Euler). Αφαιρώντας την ακμή  $(u, v)$  από τον κύκλο Euler προκύπτει μονοπάτι από την κορυφή  $u$  στην κορυφή  $v$  που περιέχονται όλες οι ακμές και όλες οι κορυφές του γραφήματος.



# Δ. Ασκήσεις

## Άσκηση Κατανόησης 1

Για ποιες τιμές των  $n, m$  τα ακόλουθα γραφήματα έχουν κύκλο Euler:

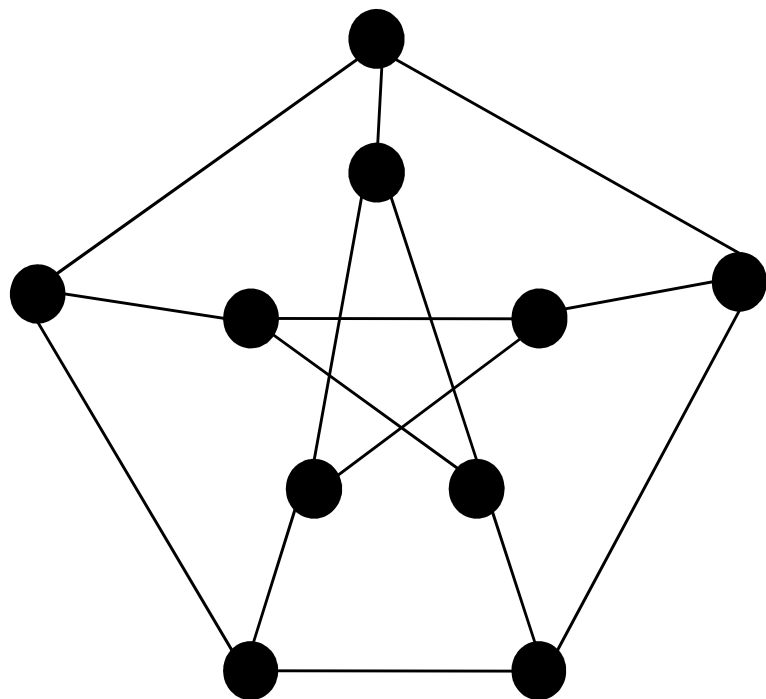
1. Η κλίκα  $K_n$
2. Το συμπλήρωμα της  $\overline{K_n}$
3. Ο απλός κύκλος  $C_n$
4. Το συμπλήρωμα του  $\overline{C_n}$
5. Ο τροχός  $W_n$
6. Το συμπλήρωμα του  $\overline{W_n}$
7. Το πλήρες διμερές γράφημα  $K_{n,m}$
8. Το συμπλήρωμα του  $\overline{K_{n,m}}$



# Δ. Ασκήσεις

## Άσκηση Κατανόησης 2

Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να προσθέσουμε στο ακόλουθο γράφημα, ώστε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Euler; Να προσθέσετε ένα τέτοιο σύνολο ακμών στο γράφημα και να βρείτε έναν κύκλο Euler στο γράφημα που προκύπτει.





# Δ. Ασκήσεις

## Άσκηση Κατανόησης 3

Να κατασκευάσετε τρία απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα με 7 κορυφές το καθένα τέτοια ώστε:

1. Το πρώτο να έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες (συνδεόμενα τμήματα).
2. Το δεύτερο να έχει κύκλο Euler και να περιέχει κορυφή που είναι σημείο αρθρωσης
3. Το τρίτο να έχει κύκλο Euler και να έχει 14 ακμές



# Δ. Ασκήσεις

## Ερωτήσεις 1

Δίνεται απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό ( $\geq 2$ ). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Το γράφημα έχει κύκλο Euler
2. Υπάρχει επαγόμενο υπογράφημά του που έχει κύκλο Euler.
3. Το συμπλήρωμά του έχει κύκλο Euler, αν το πλήθος κορυφών του γραφήματος είναι άρτιος αριθμός.
4. Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι ίσος με 2



# Δ. Ασκήσεις

## Ερωτήσεις 2

Δίνεται απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό ( $\geq 2$ ). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Αν το γράφημα είναι διχοτομίσιμο, τότε έχει κύκλο Euler
2. Αν το γράφημα είναι 2-κανονικό, τότε έχει κύκλο Euler
3. Αν το γράφημα είναι κλίκα τότε έχει κύκλο Euler
4. Αν το γράφημα είναι 2-χρωματίσιμο, τότε έχει κύκλο Euler



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 3

Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1. Υπάρχει γράφημα με 5 κορυφές και 5 ακμές που είναι συνδεόμενο και δεν έχει κύκλο Euler.
2. Υπάρχει απλό γράφημα με 2012 κορυφές που τόσο αυτό όσο και το συμπληρωματικό του έχουν κύκλο Euler.
3. Αν προσθέσουμε μία ακμή σε ένα γράφημα που έχει κύκλο Euler, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Euler.
4. Υπάρχει γράφημα 5 κορυφών, που τόσο αυτό, όσο και το συμπλήρωμα του έχουν κύκλο Euler.





# Δ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 1

Δείξτε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 5 κορυφές και 9 ακμές:

1. Είναι συνδεόμενο
2. Δεν έχει κύκλο Euler



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 2

Θεωρούμε την οικογένεια γραφημάτων  $\Gamma$ , που ορίζεται από τον εξής αναδρομικό ορισμό:

- Το απλούστερο γράφημα που ανήκει στην  $\Gamma$ , είναι το γράφημα  $K_3$ .
- Αν  $G$  ανήκει στην κλάση  $\Gamma$ , τότε στην  $\Gamma$  ανήκει και το γράφημα  $G'$  που προκύπτει αν προσθέσουμε δύο νέες κορυφές  $u, v$  και συνδέσουμε και τις 2 αυτές τις κορυφές με ακριβώς 2 κορυφές του  $G$ .

(A) Κατασκευάστε όλα τα γραφήματα 5 κορυφών που ανήκουν στην κλάση  $\Gamma$ .

(B) Αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι ένα γράφημα της κλάσης  $\Gamma$  έχει κύκλο Euler.