

ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μάθημα 1.5:
Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δημήτρης Ψούνης



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελοποίηση Προβλημάτων Συνδυασμών
2. Μοντελοποίηση Προβλημάτων Διανομής Ομοίων

Γ. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Εξίσωση
2. Εξίσωση με Συντελεστές
3. Συμβολή στο Ζητούμενο Στόχο
4. Εξίσωση με περιορισμούς ανίσωσης
5. Επιλογή από έναν

Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές

A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο A

- Η χρήση απλών γεννητριών για την μοντελοποίηση προβλημάτων συνδυασμών και διανομής ομοίων.
- Οι μεθοδολογίες για τις ειδικές κατηγορίες ασκήσεων.

Επίπεδο B

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

B. Θεωρία Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων ως εξής:

- Καταstrώνουμε **απλή γεννήτρια συνάρτηση (Μάθημα 1.5)** όταν πρέπει να μοντελοποιήσουμε:
 - Ένα πρόβλημα επιλογής (συνδυασμών)
 - Ένα πρόβλημα διανομής ομοίων αντικειμένων σε υποδοχές
- Καταstrώνουμε **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση (Μάθημα 1.6)** όταν πρέπει να μοντελοποιήσουμε:
 - Ένα πρόβλημα διάταξης
 - Ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων χωρίς σειρά στις υποδοχές
- Ενώ μέσω αλγεβρικού «κόλπου» (Μάθημα 1.6) μπορούμε να μοντελοποιήσουμε:
 - Ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων με σειρά στις υποδοχές.

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελοποίηση προβλημάτων συνδυασμών

Για να λύσω ένα πρόβλημα επιλογής (συνδυασμών) καταστρώνω μια απλή (συνήθη) γεννήτρια συνάρτηση ως εξής:

Μεθοδολογία Μοντελοποίησης Προβλημάτων Συνδυασμών

1. Εντοπίζω τα διαφορετικά αντικείμενα από τα οποία κάνω επιλογή
Για κάθε διαφορετικό αντικείμενο γράφω τον απαριθμητή ως μέρος της σειράς:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^n$$

Συγκεκριμένα εμφανίζω τον όρο x^i , αν έχω δικαίωμα να επιλέξω i φορές το συγκεκριμένο αντικείμενο.

2. Γράφω την γεννήτρια ως το γινόμενο των επιμέρους απαριθμητών που έχω καταγράψει.
3. Υποδεικνύω τον συντελεστή του όρου x^k , στο ανάπτυγμα της γεννήτριας όπου k το πλήθος των αντικειμένων που επιλέγω.

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελοποίηση προβλημάτων συνδυασμών

Παράδειγμα μοντελοποίησης προβλημάτων συνδυασμών:

Έστω 5 κόκκινοι, 3 άσπροι και 2 μαύροι βόλοι. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 βόλους, αν πρέπει να επιλέξω άρτιο πλήθος κόκκινων βόλων και περιττό πλήθος άσπρων βόλων;

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώ απλή γεννήτρια συνάρτηση γιατί πρόκειται για πρόβλημα συνδυασμών

- Ο απαριθμητής για τους κόκκινους βόλους είναι: $1 + x^2 + x^4$
- Ο απαριθμητής για τους άσπρους βόλους είναι: $x + x^3$
- Ο απαριθμητής για τους μαύρους βόλους είναι: $1 + x + x^2$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(1 + x^2 + x^4)(x + x^3)(1 + x + x^2)$

Και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^4 στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελοποίηση προβλημάτων συνδυασμών

Υπολογισμός Συντελεστή

Δεν κάνουμε ποτέ υπολογισμό του συντελεστή, αν δεν το ζητάει ρητά η εκφώνηση της άσκησης. Αν μας ζητηθεί κάνουμε το ανάπτυγμα της γεννήτριας, δηλαδή όλες τις πράξεις (επιμεριστικές) προκειμένου να έρθει σε μορφή πολυωνύμου.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned} &(1 + x^2 + x^4)(x + x^3)(1 + x + x^2) = \\ &= (1(x + x^3) + x^2(x + x^3) + x^4(x + x^3))(1 + x + x^2) = \\ &= (x + x^3 + x^3 + x^5 + x^5 + x^7)(1 + x + x^2) = \\ &= (x + 2x^3 + 2x^5 + x^7)(1 + x + x^2) = \\ &= x(1 + x + x^2) + 2x^3(1 + x + x^2) + 2x^5(1 + x + x^2) + x^7(1 + x + x^2) = \\ &= x + x^2 + x^3 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^7 + x^8 + x^9 = \\ &= x + x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 2x^6 + 3x^7 + x^8 + x^9 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο συντελεστής του όρου x^4 είναι 2, που σημαίνει ότι το πρόβλημα έχει 2 λύσεις (Πράγματι με καταμέτρηση οι τρόποι είναι: (2K,1A,1M) και (0K,3A,1M)

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελοποίηση προβλημάτων συνδυασμών

Παρατηρήσεις:

Η γεννήτρια υπολογίζει και πολλά ακόμη προβλήματα σχετικά με την επιλογή αντικειμένων της εκφώνησης. Π.χ.:

- Η επιλογή 3 αντικειμένων υποδεικνύεται από τον συντελεστή του x^3 στο ανάπτυγμα της γεννήτριας. Ο συντελεστής είναι: 3, άρα υπάρχουν 3 λύσεις. Πράγματι με καταμέτρηση οι λύσεις είναι: (2K,1A,0M) και (0K,3A,0M) και (0K,1A,2M).
- Η επιλογή 8 αντικειμένων υποδεικνύεται από τον συντελεστή του x^8 στο ανάπτυγμα της γεννήτριας. Ο συντελεστής είναι: 1, άρα υπάρχουν 1 λύση. Πράγματι με καταμέτρηση οι λύσεις είναι: (4K,3A,1M)
- Η επιλογή 10 αντικειμένων υποδεικνύεται από τον συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας. Ο συντελεστής είναι 0, άρα δεν υπάρχει λύση για την επιλογή 10 αντικειμένων.
- κ.ο.κ.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Ποτέ δεν χρησιμοποιούμε γεννήτρια συνάρτηση εκτός κι αν μας το καθορίζει ρητά η εκφώνηση.

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

2. Μοντελοποίηση προβλημάτων Διανομής Ομοίων

Για να λύσω ένα πρόβλημα διανομής ομοίων αντικειμένων σε υποδοχές καταστρώνω μια απλή (συνήθη) γεννήτρια συνάρτηση ως εξής:

Μεθοδολογία Μοντελοποίησης Προβλημάτων Διανομής Ομοίων

1. Εντοπίζω τις υποδοχές στις οποίες κάνω διανομή των ομοίων
Για κάθε υποδοχή γράφω τον απαριθμητή ως μέρος της σειράς:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots + x^n$$

Συγκεκριμένα εμφανίζω τον όρο x^i , αν έχω δικαίωμα να έχω i αντικείμενα στην υποδοχή.

2. Γράφω την γεννήτρια ως το γινόμενο των επιμέρους απαριθμητών που έχω καταγράψει.
3. Υποδεικνύω τον συντελεστή του όρου x^k , στο ανάπτυγμα της γεννήτριας όπου k το πλήθος των αντικειμένων που διανέμω.

B. Θεωρία

1. Απλές Γεννήτριες Συναρτήσεις

2. Μοντελοποίηση προβλημάτων Διανομής Ομοίων

Παράδειγμα μοντελοποίησης προβλημάτων διανομής ομοίων:

Έχουμε 50 μη διακεκριμένους βόλους. Με πόσους τρόπους μπορώ να τους μοιράσω σε 3 παιδιά, ώστε το 1^ο παιδί να πάρει το πολύ 3 βόλους, το 2^ο παιδί περιπτό πλήθος βόλων και το 3^ο παιδί τουλάχιστον 4 βόλους.

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώ απλή γεννήτρια συνάρτηση γιατί πρόκειται για πρόβλημα διανομής ομοίων.

- Ο απαριθμητής για την 1^η υποδοχή (1^ο παιδί) είναι: $1 + x + x^2 + x^3$
- Ο απαριθμητής για την 2^η υποδοχή (2^ο παιδί) είναι: $x + x^3 + x^5 + \dots + x^{49}$
- Ο απαριθμητής για την 3^η υποδοχή (3^ο παιδί) είναι: $x^4 + x^5 + \dots + x^{50}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(1 + x + x^2 + x^3)(x + x^3 + x^5 + \dots + x^{49})(x^4 + x^5 + \dots + x^{50})$

Και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{50} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Γ. Μεθοδολογία

1. Εξίσωση

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Μία σημαντική κατηγορία ασκήσεων είναι προβλήματα που μπορούν να μοντελοποιηθούν με εξίσωση. Ως διανομή ομοίων το πρόβλημα μοντελοποιείται με απλή γεννήτρια συνάρτηση.

Παράδειγμα: Έστω 50 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ, 60 χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και 80 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 40 χαρτονομίσματα;

ΛΥΣΗ: Το πρόβλημα μοντελοποιείται με την εξίσωση:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40 \quad x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0$$

Όπου x_1 τα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ, x_2 τα χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και x_3 τα χαρτονομίσματα των 20 ευρώ που επιλέγουμε αντίστοιχα.

Το πρόβλημα είναι διανομή ομοίων άρα μοντελοποιείται με απλή γεννήτρια:

- Ο απαριθμητής για την x_1 είναι $1 + x + x^2 + \dots + x^{40}$
- Ο απαριθμητής για την x_2 είναι $1 + x + x^2 + \dots + x^{40}$
- Ο απαριθμητής για την x_3 είναι $1 + x + x^2 + \dots + x^{40}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})^3$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{40} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

Γ. Μεθοδολογία

2. Εξίσωση με Συντελεστές

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Όταν έχω μια εξίσωση με συντελεστές στις μεταβλητές, τότε γράφω κανονικά τους απαριθμητές, αλλά στους εκθέτες γράφω τα πολλαπλάσια του συντελεστή.

Παράδειγμα: Να μοντελοποιηθεί με γεννήτρια συνάρτηση το πρόβλημα της εύρεσης των ριζών της εξίσωσης:

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 1000 \quad x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0$$

ΛΥΣΗ:

Η εξίσωση γράφεται: $z_1 + z_2 + z_3 = 1000$ όπου:

- Το z_1 είναι πολλαπλάσιο του 5, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{1000}$
- Το z_2 είναι πολλαπλάσιο του 10, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{1000}$
- Το z_3 είναι πολλαπλάσιο του 20, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{1000}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι:

$$(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{1000})(1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{1000})(1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{1000})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας



Γ. Μεθοδολογία

3. Συμβολή στο Ζητούμενο Στόχο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Προσοχή στις εκφωνήσεις που κάθε επιλογή που κάνουμε συμβάλλει διαφορετικά στο ζητούμενο στόχο. Τότε καταστρώνουμε μια εξίσωση που δείχνει την συμβολή στο ζητούμενο στόχο και έπειτα μοντελοποιούμε με γεννήτρια το πρόβλημα που προκύπτει.

Συνήθεις εκφωνήσεις είναι να επιλέγουμε χαρτονομίσματα που αθροίζουν σε ποσό και να επιλέγουμε βάρη που αθροίζουν σε ένα συνολικό βάρος.

Παράδειγμα: Έστω 50 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ, 60 χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και 80 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε χαρτονομίσματα αξίας 1000 ευρώ;

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώ απλή γεννήτρια διότι είναι πρόβλημα επιλογής όπου στους εκθέτες εκφράζουμε την συμβολή στο ζητούμενο στόχο:

$$(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{250})(1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{600})(1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{1000})$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{1000} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας



Γ. Μεθοδολογία

4. Εξίσωση με Ανισώσεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Όταν καταστρώνω μια εξίσωση για να μοντελοποιήσω μια γεννήτρια, ενδέχεται να διατυπώνεται και κάποιος περιορισμός ανίσωσης μεταξύ των μεταβλητών που χρησιμοποιούμε. Τότε εφαρμόζουμε μια ιδιαίτερη μεθοδολογία.

Παράδειγμα: 100 άνθρωποι (μη διακεκριμένοι) βρίσκονται σε ένα τρένο και πρόκειται να κατέβουν όλοι στις 4 επόμενες στάσεις. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση όταν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των επιβατών που θα κατέβουν στην δεύτερη στάση είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των επιβατών που θα κατέβουν στην τρίτη και μικρότερος ή ίσος αυτών που θα κατέβουν στην πρώτη στάση.

ΛΥΣΗ:

Αν x_1, x_2, x_3, x_4 τα πλήθη επιβατών που κατεβαίνουν στις 4 στάσεις, θέλουμε να ισχύει:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \quad (1)$$

όπου $x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0$

Με τους περιορισμούς ανίσωσης:

$$\text{και } x_2 \geq x_3 \quad (3)$$



Γ. Μεθοδολογία

4. Εξίσωση με Ανισώσεις

(....συνέχεια....)

Η ανίσωση (2) γράφεται: $x_2 + s_2 = x_1 \quad (3)$ όπου $s_2 \geq 0$

και η ανίσωση (3) γράφεται: $x_3 + s_3 = x_2 \quad (4)$ όπου $s_3 \geq 0$

Αντικαθιστώ την (3) στην (1) και έχω:

$$(x_2 + s_2) + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \Leftrightarrow$$

$$2x_2 + s_2 + x_3 + x_4 = 100$$

Στην οποία αν αντικαταστήσουμε την (4) παίρνουμε:

$$2(x_3 + s_3) + s_2 + x_3 + x_4 = 100 \Leftrightarrow$$

$$2x_3 + 2s_3 + s_2 + x_3 + x_4 = 100 \Leftrightarrow$$

$$3x_3 + 2s_3 + s_2 + x_4 = 100$$



Γ. Μεθοδολογία

4. Εξίσωση με Ανισώσεις

Η οποία γράφεται:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 100$$

όπου:

- Το z_1 είναι πολ/σιο του 3, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{99}$
- Το z_2 είναι πολ/σιο του 2, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100}$
- Το z_3 είναι χωρίς περιορισμό, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x + x^2 + \dots + x^{100}$
- Το z_4 είναι χωρίς περιορισμό, άρα έχει απαριθμητή: $1 + x + x^2 + \dots + x^{100}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι:

$$(1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{99}) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{100})^2$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του x^{100} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Γ. Μεθοδολογία

5. Επιλογή από Έναν

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Μία ειδική άσκηση είναι η επιλογή από ένα. Στην άσκηση αυτή μοιράζουμε κάποια αντικείμενα σε δύο άτομα, αλλά κάθε άτομο πρέπει να πάρει συγκεκριμένο πλήθος αντικειμένων. Αν και φαίνεται διανομή, είναι πρόβλημα επιλογής άρα μοντελοποιείται ως συνδυασμοί για το ένα από τα δύο άτομα.

Παράδειγμα: Έχουμε 6 αντίτυπα του βιβλίου B1, 7 αντίτυπα του B2, 11 αντίτυπα του B3.

Κατασκευάστε γεννήτρια ώστε δύο φοιτητές να πάρουν 12 βιβλία και το λιγότερο 2 αντίτυπα από κάθε βιβλίο. Σε ποιο συντελεστή της γεννήτριας βρίσκεται η απάντηση?

ΛΥΣΗ: Αρκεί να επιλέξω έναν έγκυρο συνδυασμό 12 βιβλίων για τον έναν φοιτητή. Ο άλλος θα πάρει τα υπόλοιπα. Προσέχουμε ωστόσο π.χ. να επιτρέψουμε να πάρει ο 1ος φοιτητής το πολύ 4 βιβλία B1, έτσι ώστε να περισσέψουν 2 βιβλία B1 για να ικανοποιηθεί ο περιορισμός του 2ου φοιτητή.

- Βιβλία B1 (από 2 έως 4), άρα απαριθμητής: $x^2 + x^3 + x^4$
- Βιβλία B2 (από 2 έως 5), άρα απαριθμητής: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
- Βιβλία B3 (από 2 έως 9), άρα απαριθμητής: $x^2 + x^3 + \dots + x^9$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι:

$$(x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + \dots + x^9)$$

Και το ζητούμενο είναι ο συντελεστής του όρου x^{12} στο ανάπτυγμα της γεννήτριας

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 1

(Α) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα επιλογής k αντικειμένων από n χωρίς επανάληψη.

(Β) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών επιλογών;

(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 2

(Α) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα επιλογής k αντικειμένων από n με επανάληψη.

(Β) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών επιλογών;

(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;

Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 3

(Α) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα διανομής n ομοίων αντικειμένων σε m υποδοχές.

(Β) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών διανομών;

(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε την παράσταση $A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο συντελεστής του x^k στην $A(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των διανομών n ίδιων αντικειμένων σε k διακεκριμένες υποδοχές.
2. Ο συντελεστής του x^k στην $A(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των διανομών k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές.
3. Ο συντελεστής του x^k στην $A(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που περιέχουν k μηδενικά.
4. Ο συντελεστής του x^k στην $A(x)$ είναι ίσος με τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $n+k-1$ που σχηματίζονται από k άσσους και $n-1$ μηδενικά.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Να καταστρωθεί η γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον όρο του οποίου συντελεστής δίνει τους τρόπους να επιλέξουμε 15 αντικείμενα από 30Α, 30Β και 30Γ αν πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον δύο Α, τουλάχιστον τρία Β, τουλάχιστον 4Γ και το πολύ 10 από τα αντικείμενα Γ.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Έχουμε στην διάθεση μας 4 κέρματα των 2 ευρώ, 5 κέρματα του 1 ευρώ και 7 κέρματα των 0.50 ευρώ. Να διατυπώσετε την γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής υπολογίζει τους τρόπους επιλογής 3 κερμάτων;



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 3

Να διατυπώσετε την γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής υπολογίζει τους τρόπους διανομής 20 όμοιων βόλων σε 3 παιδιά όταν:

1. Το 1^ο παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 4 βόλους.
2. Το 1^ο παιδί πρέπει να πάρει το πολύ 2 βόλους.
3. Κάθε παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 3 βόλους
4. Το 1^ο παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 2 και το πολύ 5 βόλους.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 4

Ένας αθλητής θέλει να τοποθετήσει 50 κιλά στη μιά άκρη μιας μπάρας. Στο γυμναστήριο είναι διαθέσιμα πρακτικά απεριορίστα βάρη του 1 κιλού και των 2 κιλών, 1 μόνο βάρος των 5 κιλών και 2 μόνο βάρη των 10 κιλών. Να γράψετε γεννήτρια συνάρτηση που να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους ο αθλητής μπορεί να επιτύχει το στόχο του. Ποιας δύναμης το συντελεστή πρέπει να υπολογίσουμε;



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 5

100 πελάτες ενός ταξιδιωτικού γραφείου (που θεωρούνται μη διακεκριμένοι) πρόκειται να επιλέξουν προορισμό για τις θερινές τους διακοπές από 3 διαθέσιμους προορισμούς, έστω Α, Β και Γ. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε την δύναμη του x της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων να γίνει αυτό, όταν

- Α. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των πελατών που θα επιλέξουν κάθε προορισμό.
- Β. Στον προορισμό Α πρέπει να πάνε τουλάχιστον όσοι επιβάτες πάνε στον προορισμό Β και στον προορισμό Β πρέπει να πάνε τουλάχιστον όσοι επιβάτες πάνε στον προορισμό Γ.