

# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

### Μάθημα 1.1: Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

Δημήτρης Ψούνης



[www.psounis.gr](http://www.psounis.gr)



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## **A. Σκοπός του Μαθήματος**

## **B. Θεωρία**

1. Στόχος της Συνδυαστικής
2. Τρόποι Απαρίθμησης
  1. Καταμέτρηση
  2. Αρχές Απαρίθμησης
    1. Ο κανόνας του αθροίσματος
    2. Ο κανόνας του γινομένου
  3. Γενίκευση των Αρχών Απαρίθμησης
  4. Μαθηματικοί τύποι της Συνδυαστικής

## **Γ. Ασκήσεις**

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές



## Α. Σκοπός του Μαθήματος

### Επίπεδο Α

- Η Καταμέτρηση ως τρόπος επίλυσης συνδυαστικών προβλημάτων
- Η γνώση του πότε χρησιμοποιούμε τον κανόνα του αθροίσματος και τον κανόνα του γινομένου

### Επίπεδο Β

- (-)

### Επίπεδο Γ

- (-)



## B. Θεωρία

### 1. Στόχος της Συνδυαστικής

- Στόχος της Συνδυαστικής είναι να μετράμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ένα (περίπλοκο) γεγονός.
- Για να το κάνουμε αυτό έχουμε τρεις τρόπους:
  - Την καταμέτρηση των τρόπων «με το χέρι» όπου καταγράφουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει το γεγονός και έπειτα τους μετράμε.
  - Τις βασικές αρχές απαρίθμησης, δηλαδή τον κανόνα του αθροίσματος και του γινομένου, όπου σπάμε το βασικό πρόβλημα σε υποπρόβλήματα και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως το άθροισμα ή το γινόμενο των επιμέρους αποτελεσμάτων.
  - Τους μαθηματικούς τύπους των μοντέλων της συνδυαστικής, που είναι μαθηματικοί τύποι που εφαρμόζονται μόνο κάτω από καθορισμένες προϋποθέσεις. Πρόκειται για τους τύπους των συνδυασμών (Μάθημα 1.2) των διατάξεων (Μάθημα 1.3) και των διανομών σε υποδοχές (Μάθημα 1.4)
- Οι πιο δύσκολες ασκήσεις είναι αυτές που απαιτούν να συνδυάσουμε τους παραπάνω τρόπους.



## Β. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 1. Καταμέτρηση

- Ο 1<sup>ος</sup> τρόπος για να μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός, είναι να καταμετρήσουμε τους τρόπους. Αυτό σημαίνει ότι:
  - Καταγράφουμε στο χαρτί έναν έναν τους τρόπους, χρησιμοποιώντας κάποιον συμβολισμό για να τους απεικονίσουμε.
  - Έπειτα μετράμε πόσοι είναι (π.χ. έστω ότι είναι  $X$ ) και λέμε «άρα με  $X$  τρόπους» ή «έχει  $X$  λύσεις»

#### Παράδειγμα 1

Πόσοι είναι οι τρόποι να τοποθετήσουμε τα γράμματα Α,Β,Γ σε μια σειρά;

**ΛΥΣΗ:**

Με καταμέτρηση οι τρόποι είναι: ΑΒΓ,ΑΓΒ,ΒΑΓ,ΒΓΑ,ΓΑΒ,ΓΒΑ, άρα είναι 6 τρόποι

#### Παράδειγμα 2

Πόσα τα δυνατά υποσύνολα με 2 στοιχεία του συνόλου  $\{1,2,3,4\}$

**ΛΥΣΗ:**

Με καταμέτρηση τα υποσύνολα είναι:

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$

άρα είναι 6.



## Β. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 2. Αρχές Απαρίθμησης

- Προφανώς η καταμέτρηση δεν ενδείκνυται για πιο περίπλοκα προβλήματα όπου οι λύσεις είναι πάρα πολλές.
- Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να σπάσουμε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα τα οποία λύνονται πιο εύκολα.
- Υπάρχουν δύο τρόποι:
  - Να διακρίνουμε διαφορετικές περιπτώσεις στις οποίες σπάει το πρόβλημα (Επαληθεύουμε την ερώτηση: συμβαίνει Ή το ένα Ή το άλλο)
    - Τότε μετράμε τους τρόπους για κάθε περίπτωση και προσθέτουμε τα αποτελέσματα (χρησιμοποιώντας τον κανόνα του αθροίσματος)
  - Να καταλάβουμε ότι η λύση αποτελείται από ανεξάρτητα μέρη (Επαληθεύουμε την ερώτηση: συμβαίνει ΚΑΙ το ένα ΚΑΙ το άλλο)
    - Τότε μετράμε τους τρόπους για κάθε περίπτωση και πολλαπλασιάζουμε τα αποτελέσματα (χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου)



## B. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 2. Αρχές Απαρίθμησης (1. Ο κανόνας του αθροίσματος)

- Η χρήση του κανόνα του αθροίσματος γίνεται όταν μπορούμε να διακρίνουμε διαφορετικές περιπτώσεις στις οποίες σπάει το πρόβλημα
  - Για να βεβαιωθούμε ότι η απόφασή μας είναι σωστή, αφού έχουμε καταγράψει ποιες είναι οι περιπτώσεις, θέτουμε στον εαυτό μας την ερώτηση: συμβαίνει ‘Η η μία περίπτωση ‘Η η άλλη περίπτωση
- Τότε μετράμε τους τρόπους για κάθε περίπτωση και προσθέτουμε τα αποτελέσματα κάνοντας χρήση του κανόνα του αθροίσματος:

#### ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Έστω μια επιλογή (γεγονός) A που μπορεί να γίνει με m τρόπους  
και μια επιλογή (γεγονός) B που μπορεί να γίνει με n τρόπους

Τότε

οι τρόποι που μπορεί να γίνει ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ είναι  $m+n$



## Β. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 2. Αρχές Απαρίθμησης (1. Ο κανόνας του αθροίσματος)

- Ας δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής του κανόνα του αθροίσματος

##### Παράδειγμα 3

Σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών ο πωλητής μας δίνει την δυνατότητα να επιλέξουμε από 6 κουζίνες και 8 ψυγεία. Θέλουμε να επιλέξουμε ακριβώς μία συσκευή. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να κάνουμε την επιλογή;

##### **ΛΥΣΗ:**

Από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι  $6+8=14$

##### Παράδειγμα 4

Έχουμε στην βιβλιοθήκη μας 3 βιβλία φυσικής και 4 βιβλία μαθηματικών. Θέλουμε να επιλέξουμε δύο βιβλία του ίδιου αντικειμένου για να τα μελετήσουμε. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;

##### **ΛΥΣΗ:**

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Να επιλέξουμε βιβλία φυσικής: Με καταμέτρηση οι τρόποι είναι:  $\Phi_1\Phi_2, \Phi_1\Phi_3, \Phi_2\Phi_3$ , άρα 3 τρόποι.
- Να επιλέξουμε βιβλία μαθηματικών: Με καταμέτρηση οι τρόποι είναι:  
 $M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, M_2M_3, M_2M_4, M_3M_4$ , άρα 6 τρόποι

Άρα από τον κανόνα του αθροίσματος υπάρχουν  $3+6=9$  τρόποι.





## Β. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 2. Αρχές Απαρίθμησης (2. Ο κανόνας του γινομένου)

- Η χρήση του κανόνα του γινομένου γίνεται όταν μπορούμε να διακρίνουμε ότι η λύση αποτελείται από μέρη τα οποία είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.
  - Για να βεβαιωθούμε ότι η απόφασή μας είναι σωστή, αφού έχουμε καταγράψει ποια είναι τα μέρη, θέτουμε στον εαυτό μας την ερώτηση: συμβαίνει ΚΑΙ το ένα μέρος ΚΑΙ το άλλο μέρος ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ
- Τότε συμπληρώνουμε την λύση σε στάδια (φάσεις) μετρώντας ξεχωριστά τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί το κάθε μέρος και πολλαπλασιάζουμε τα επιμέρους αποτελέσματα κάνοντας χρήση του κανόνα του γινομένου:

#### ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Έστω μια επιλογή (γεγονός) Α που μπορεί να γίνει με  $m$  τρόπους και μια επιλογή (γεγονός) Β που μπορεί να γίνει με  $n$  τρόπους

Τότε

οι τρόποι που μπορεί να γίνουν ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ είναι  $m \cdot n$



## Β. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 2. Αρχές Απαρίθμησης (2. Ο κανόνας του γινομένου)

➤ Ας δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής του κανόνα του γινομένου

##### Παράδειγμα 5

Πόσοι 4ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που ξεκινούν με 2, το 2<sup>ο</sup> ψηφίο τους είναι ζυγός (άρτιος), το 3<sup>ο</sup> ψηφίο είναι μονός (περιττός) και το 4<sup>ο</sup> ψηφίο τους είναι πολ/σιο του 5.

##### **ΛΥΣΗ:**

Για το 1<sup>ο</sup> ψηφίο έχουμε 1 τρόπο (υποχρεωτικά το 2)

Για το 2<sup>ο</sup> ψηφίο έχουμε 5 τρόπους (με καταμέτρηση θα είναι 0,2,4,6 ή 8)

Για το 3<sup>ο</sup> ψηφίο έχουμε 5 τρόπους (με καταμέτρηση θα είναι 1,3,5,7 ή 9)

Για το 4<sup>ο</sup> ψηφίο έχουμε 2 τρόπους (με καταμέτρηση θα είναι 0 ή 5)

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι  $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$  τρόποι

##### Παράδειγμα 6

Για την παραγγελία του καινούργιου μας υπολογιστή μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ 4 κουτιών, 5 οθονών, 6 πληκτρολογίων και 4 ποντικιών. Πόσοι οι τρόποι να κατασκευάσουμε τον υπολογιστή μας, θεωρώντας ότι θα πάρουμε ένα από κάθε μέρος.

##### **ΛΥΣΗ:**

Για το κουτί έχουμε 4 επιλογές, για την οθόνη 5 επιλογές, για το πληκτρολόγιο 6 επιλογές και το ποντίκι 4 επιλογές.

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 480$  τρόποι



## Β. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 3. Γενίκευση Αρχών Απαρίθμησης

- Οι αρχές απαρίθμησης γενικεύονται και για περισσότερα γεγονότα:

##### ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Έστω μια επιλογή (γεγονός)  $A_1$  που μπορεί να γίνει με  $n_1$  τρόπους  
μια επιλογή (γεγονός)  $A_2$  που μπορεί να γίνει με  $n_2$  τρόπους

...

μία επιλογή (γεγονός)  $A_k$  που μπορεί να γίνει με  $n_k$  τρόπους

Τότε

οι τρόποι που μπορεί να γίνει ΕΝΑ από τα παραπάνω γεγονότα  
είναι  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$

##### ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Έστω μια επιλογή (γεγονός)  $A_1$  που μπορεί να γίνει με  $n_1$  τρόπους  
μια επιλογή (γεγονός)  $A_2$  που μπορεί να γίνει με  $n_2$  τρόπους

...

μία επιλογή (γεγονός)  $A_k$  που μπορεί να γίνει με  $n_k$  τρόπους

Τότε

οι τρόποι που μπορεί να γίνουν ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ όλα τα παραπάνω γεγονότα  
είναι  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$



## B. Θεωρία

### 2. Τρόποι Απαρίθμησης

#### 4. Μαθηματικοί Τύποι της Συνδυαστικής

- Οι αρχές απαρίθμησης είναι ο θεμέλιος λίθος της συνδυαστικής. Όλα όσα θα μάθουμε στηρίζονται σε αυτούς τους δύο απλούς κανόνες.
- Ωστόσο θα μάθουμε στα επόμενα μαθήματα κάποιους μαθηματικούς τύπους, οι οποίοι μοντελοποιούν συγκεκριμένα προβλήματα και εξάγουν άμεσα την λύση. Τα μοντέλα των μαθηματικών τύπων είναι:
  - Οι τύποι των συνδυασμών, που μοντελοποιούν προβλήματα επιλογής (Μάθημα 1.2)
  - Οι τύποι των διατάξεων, που μοντελοποιούν προβλήματα τοποθέτησης αντικειμένων σε μια σειρά (Μάθημα 1.3)
  - Οι τύποι των διανομών αντικειμένων σε υποδοχές, που μοντελοποιούν προβλήματα μοιράσματος αντικειμένων σε κουτιά (Μάθημα 1.4)
- Ακόμη και όταν κάνουμε χρήση των τύπων, ενδέχεται να πρέπει πρώτα να σπάσουμε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα, γι' αυτό θα πρέπει να καταλάβουμε καλά πότε χρησιμοποιούμε τον κανόνα του αθροίσματος και τον κανόνα του γινομένου.



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 1

Έστω ότι έχω 1 χαρτονόμισμα των 5€, 1 χαρτονόμισμα των 10€ και 1 χαρτονόμισμα των 20€ και 1 χαρτονόμισμα των 50€

1. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 2 από τα παραπάνω χαρτονομίσματα;
2. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 3 από τα παραπάνω χαρτονομίσματα;



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 2

Σε ένα ράφι της βιβλιοθήκης μου έχω 8 διαφορετικά βιβλία στοιχισμένα το ένα δίπλα στο άλλο.

1. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 2 βιβλία τα οποία να είναι σε σειρά (το ένα δίπλα στο άλλο)
2. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 2 βιβλία τα οποία δεν είναι σε σειρά.



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 3

Το τμήμα στο οποίο σπουδάζει ένας φοιτητής προσφέρει 3 μαθήματα μαθηματικών, 2 μαθήματα φυσικής και 2 μαθήματα χημείας.

1. Πόσες είναι οι διαφορετικές επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει ένα μόνο μάθημα από όλα τα παραπάνω;
2. Πόσες είναι οι διαφορετικές επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει δύο μαθήματα εκ των οποίων το ένα πρέπει να είναι υποχρεωτικά μάθημα μαθηματικών;



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 4

Το τμήμα στο οποίο σπουδάζει ένας φοιτητής προσφέρει 3 μαθήματα μαθηματικών, 2 μαθήματα φυσικής και 2 μαθήματα χημείας.

1. Πόσες είναι οι επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει 1 μάθημα μαθηματικών, 1 μάθημα φυσικής και 1 μάθημα χημείας;
2. Πόσες είναι οι επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει δύο μαθήματα διαφορετικών αντικειμένων;





## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 5

A) Ένας υποψήφιος αγοραστής αυτοκινήτου έχει υπόψη δύο μάρκες αυτοκινήτων, και συγκεκριμένα 5 μοντέλα αυτοκινήτων από την πρώτη μάρκα και 4 μοντέλα αυτοκινήτων από τη δεύτερη μάρκα. Πόσες συνολικά επιλογές έχει ο αγοραστής αν θέλει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο;

B) Ένας υποψήφιος αγοραστής αυτοκινήτου έχει καταλήξει σε μια μάρκα αυτοκινήτων, και συγκεκριμένα 5 διαφορετικά μοντέλα αυτοκινήτων που κάθε ένα από αυτά διατίθεται σε 4 χρώματα. Πόσες διαφορετικές επιλογές έχει ο αγοραστής για να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αν διαφορετικά χρώματα του ίδιου μοντέλου αυτοκινήτων αποτελούν διαφορετικές επιλογές ;



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 6

Έχουμε θέσει 4 καρέκλες σε μια σειρά και πρόκειται να κάτσουν σε αυτές 4 άτομα που θα επιλέξουμε από τους 20 καλεσμένους μας. Αν έχει σημασία η σειρά με την οποία θα κάτσουν τα άτομα στις καρέκλες, να υπολογίσετε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των ατόμων.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 1

Στο multiplex της πόλης μας, παίζονται 3 περιπέτειες (2 αμερικανικές και 1 γαλλική) και 6 κωμωδίες (2 ιταλικές και 4 αμερικάνικες). Πρόκειται να επιλέξουμε πόσες ταινίες θα δούμε:

1. Οι τρόποι για να επιλέξουμε μία ταινία είναι  $3 \cdot 6$
2. Οι τρόποι για να επιλέξουμε μία περιπέτεια και μία κωμωδία είναι 9
3. Οι τρόποι για να επιλέξουμε μία γαλλική ταινία και μία κωμωδία είναι 16.
4. Οι τρόποι για να επιλέξουμε 2 περιπέτειες είναι 6.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 2

Προγραμματίζουμε τις θερινές μας διακοπές. Αν μείνουμε στην Ελλάδα έχουμε να επιλέξουμε από 5 προορισμούς (3 σε νησιά και 2 σε πόλεις) ενώ αν μεταβούμε στο εξωτερικό έχουμε 10 διαθέσιμους προορισμούς (6 σε νησιά και 4 σε πόλεις).

1. Οι τρόποι για να επιλέξουμε έναν προορισμό είναι 15
2. Οι τρόποι για να επιλέξουμε έναν προορισμό της Ελλάδος και έναν του εξωτερικού είναι 15
3. Οι τρόποι για να επιλέξουμε έναν προορισμό σε νησί της Ελλάδας και έναν προορισμό σε νησί του εξωτερικού είναι 18.
4. Οι τρόποι για να επιλέξουμε δύο νησιά της Ελλάδος είναι 6.



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 1

Σε μία έκθεση αυτοκινήτων υπάρχουν 5 διαφορετικά αυτοκίνητα του κατασκευαστή Α, 6 διαφορετικά αυτοκίνητα του κατασκευαστή Β, και 8 διαφορετικά αυτοκίνητα του κατασκευαστή Γ. Ο υπεύθυνος της έκθεσης θέλει να επιλέξει ένα ζεύγος αυτοκινήτων διαφορετικών κατασκευαστών και να τα τοποθετήσει πίσω από τη βιτρίνα της έκθεσης. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό;



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 2

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που αρχίζουν με άρτιο αριθμό (εκτός του 0) και περιέχουν ακριβώς μία εμφάνιση του 8;



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 3

Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών των αριθμών:

A) 24

B) 180