ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ20

ΘΕΜΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Άσκηση 1) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = (\log n^n)^n$$

$$f_2(n) = \log(n^n)^n$$

$$f_3(n) = \log^n n$$

Ο συμβολισμός log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g (f ≡ g), αν f = Θ(g) (ισοδύναμα Θ(f) = Θ(g)). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g (f < g), αν f = o(g).

(Ασκηση 2) Να λύσετε τις αναδρομές:

(1) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + \log n$

(2) $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση T(n) = aT(n/b) + f(n), όπου a≥1, b>1 είναι σταθερές, και f(n) είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, τότε T(n) = $\Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε T(n) = $\Theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, και αν υπάρχει σταθερά n_0, τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά c<1, τότε T(n) = $\Theta(f(n))$.

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$L_1 = 1(0+1)^*11^*(0+1)(0+1)1$

$L_2 = (10010+00)^*$

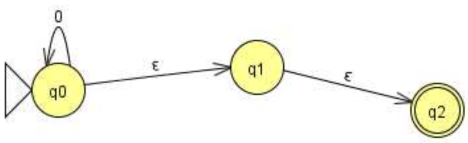
$L_3 = 00+11$

$L_4 = (10+01)^*(01+00)^* (101)^*(00+001)^*$

$L_5 = (0^*10^*1)^*$

<u>Άσκηση 2:</u>

(Α) Βρείτε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα που αναγνωρίζει το αυτόματο του παρακάτω σχήματος.



(Β) Μετατρέψτε το παραπάνω μη ντετερμινιστικό (μη αιτιοκρατικό) αυτόματο με ε κινήσεις σε μη ντετερμινιστικό αυτόματο χωρίς ε κινήσεις.

(Γ) Μετατρέψτε το μη ντετερμινιστικό αυτόματο του ερωτήματος Β σε ντετερμινιστικό.

(Δ) Ελαχιστοποιήστε τις καταστάσεις του αυτομάτου του ερωτήματος Γ και δείξτε ότι δεν υπάρχει άλλο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο με λιγότερες καταστάσεις που να δέχεται την ίδια γλώσσα, βρίσκοντας ένα κατάλληλο πλήθος συμβολοσειρών ανά δύο διακρινόμενων.

Ορισμός (Διακρινόμενες συμβολοσειρές)

Έστω L μια γλώσσα πάνω σε ένα αλφάβητο Σ. Θα λέμε ότι δύο συμβολοσειρές $x, y, \in \Sigma^*$ διακρίνονται ή είναι διακρινόμενες όσον αφορά την L, αν υπάρχει συμβολοσειρά z, που μπορεί να εξαρτάται από τις x και y, ώστε μία και μόνο μία από τις xz και yz ν' ανήκει στην L.
Οι x και y είναι μη διακρινόμενες, αν δε συμβαίνει το παραπάνω: για οποιοδήποτε z, οι xz και yz ή και οι δύο ανήκουν στην L ή καμιά τους.

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΑ

Άσκηση 1: Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες:

$\mathrm{L}_1 = \{c^{3n+2}a^{n+1} \mid n \geq 0\}$

$\mathrm{L}_2 = \{a^{2m}d^{3n+2}a^{2n+1}d^{m} \mid n, m \geq 0\}$

$\mathrm{L}_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 3\}$

$\mathrm{L}_4 = \{ wxw^R \mid w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}\}$

$\mathrm{L}_5 = \{a^n b^m c^{m+k} d^k a^n \mid n, m, k \geq 0\}$

$\mathrm{L}_6 = \{bbcca^k b^k aaba^n b^m \mid n > m, k \geq 0\}$

$\mathrm{L}_7 = \{a^n b^m \mid n > m \text{ ή } m > n\}$

Άσκηση 2

Έστω Σ το αλφάβητο Σ={a,b} και L η γλώσσα που σχηματίζεται ακριβώς και μόνον με τους κανόνες

- $a \in L$
- Αν $x \in L$, τότε και $aaxb \in L$

(Α) Δείξτε ότι η L δεν είναι κανονική.

(Β) Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της L.

(Γ) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοίβας που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L

Το Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ **για κάθε φυσικό** $m \geq 0$

ΘΕΜΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Κατασκευάστε Μηχανή Turing στο αλφάβητο {0,1} η οποία με είσοδο #w<u>#</u> να παράγει την έξοδο #w#w^R<u>#</u>