

Οι Νόμοι της Προτασιακής Λογικής:

- Είναι ταυτολογίες.
- Τους χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε έναν τύπο σε έναν ισοδύναμό του.

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση
1	Αντιμεταθετικότητα	$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$ $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
2	Προσεταιριστικότητα	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$
3	Επιμεριστικότητα	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
4	Διπλή Άρνηση	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
5	Άρνηση Συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
6	De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
7	Αντιθετοαναστροφή	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
8	Εξαγωγή	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$
9	1 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
10	2 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
11	Αποκλεισμός Τρίτου	$\varphi \vee \neg\varphi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος του τύπου:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow \neg(p_1 \vee p_2)$$

που χρησιμοποιεί μόνο τους σύνδεσμους { \neg , \rightarrow }

Λύση: Στον τύπο:

$$(\underline{p_1 \wedge \neg p_2}) \rightarrow \neg(p_1 \vee p_2)$$

Εφαρμόζω το νόμο άρνησης συνεπαγωγής:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\underline{\neg p_1 \vee p_2})$$

Εφαρμόζω το νόμο διπλής άρνησης:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\underline{\neg\neg p_1 \vee p_2})$$

Εφαρμόζω το 1^ο νόμο αντικατάστασης:

$$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg(\neg p_1 \rightarrow p_2)$$

Χρήσιμος για την χρήση των τύπων μπορεί να φανεί ο παρακάτω πίνακας:

Μετατροπή συνδέσμων	Χρήση του νόμου	Νόμος
Από \rightarrow σε \vee και αντίστροφα	1 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
Από \rightarrow σε \wedge και αντίστροφα	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
Από \vee σε \wedge και αντίστροφα	Νόμοι De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
Από \leftrightarrow σε \wedge , \rightarrow και αντίστροφα	2 ^{ος} νόμος αντικατάστασης	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

ΠΡΟΤΑΣΗ(φ): που θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο

- Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p , δηλαδή ότι ισχύει η $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(p)$
 - Κάνουμε απόδειξη ότι ισχύει η πρόταση για μια προτασιακή μεταβλητή.
- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ, ψ , δηλαδή ότι ισχύουν $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\varphi)$, $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\psi)$
- Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι ισχύουν:
 $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\neg\varphi)$, $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\varphi \vee \psi)$,
 $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\varphi \wedge \psi)$, $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\varphi \rightarrow \psi)$
 $\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}(\varphi \leftrightarrow \psi)$

Ορισμός: Ένα σύνολο συνδέσμων θα λέγεται πλήρες σύνολο συνδέσμων (ή επαρκές σύνολο συνδέσμων) αν κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να μετατραπεί σε έναν ισοδύναμο που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο.

- Εμπειρικά για να είναι ένα σύνολο συνδέσμων πλήρες, απαιτείται να υπάρχει σε αυτό το \neg και τουλάχιστον ένας ακόμη διμελής σύνδεσμος.
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων είναι πλήρες κάνω επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων:
- Για να δείξω ότι ένα σύνολο συνδέσμων ΔΕΝ είναι πλήρες κατασκευάζω έναν τύπο που δεν μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Λύση:

Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για μία προτασιακή μεταβλητή p , δηλαδή ότι ο τύπος p έχει ίσες αριστερές και δεξιές παρενθέσεις

- Απόδειξη: Ο τύπος p έχει 0 αριστερές και 0 δεξιές παρενθέσεις. Συνεπώς ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για δύο τύπους φ, ψ , δηλαδή ότι ισχύει $L_\varphi = R_\varphi$ και $L_\psi = R_\psi$. (Συμβολίζουμε με L_x το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων του τύπου x , και με R_x το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων του τύπου x)

Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι ισχύει για τους τύπους $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ δηλαδή ότι:

- Ο τύπος $(\neg\varphi)$ έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\neg\varphi)$ έχει $L_\varphi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $R_\varphi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\varphi = R_\varphi$ άρα και $L_\varphi + 1 = R_\varphi + 1$
- Ο τύπος $(\varphi \vee \psi)$ έχει ίσο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Πράγματι ο τύπος $(\varphi \vee \psi)$ έχει $L_\varphi + L_\psi + 1$ αριστερές παρενθέσεις και $R_\varphi + R_\psi + 1$ δεξιές παρενθέσεις. Από επαγωγική υπόθεση έχω $L_\varphi = R_\varphi$ και $L_\psi = R_\psi$, άρα και $L_\varphi + L_\psi + 1 = R_\varphi + R_\psi + 1$.
- Η απόδειξη για τους τύπους $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ είναι όμοια με την $(\varphi \vee \psi)$.