ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ και ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Μάθημα 5.1:
Μηχανές Turing που υπολογίζουν Συναρτήσεις

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- Η λειτουργία και ο σχεδίασμος Μ.Τ. είναι SOS για τις τελικές εξετάσεις
- Διάγραμμα Ροής Μ.Τ.

Επίπεδο Β
- Διάγραμμα Κατάστασης Μ.Τ.
- Σχηματισμός, Κατάσταση και σχέση «παράγει» στις Μ.Τ.

Επίπεδο Γ
- (-)

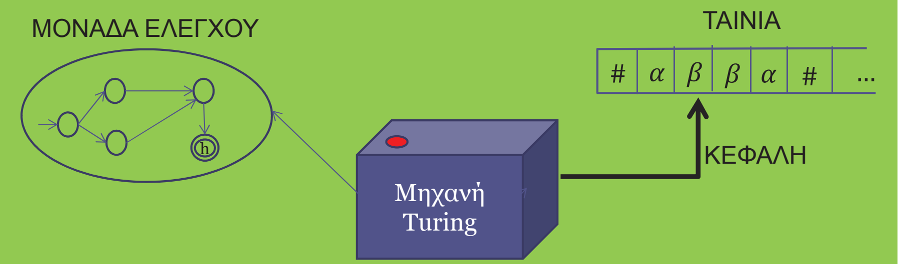
Β. Θεωρία

1. Μηχανή Turing

1. Δομικά Στοιχεία μιας μηχανής Turing

Δομικά Στοιχεία μιας κλασικής **Μηχανής Turing:**

- Μία **μονάδα ελέγχου** (όπως το αυτόματο των κανονικών γλωσσών), δηλαδή έναν μηχανισμό καταστάσεων-μεταβάσεων.
  - Η μονάδα ελέγχου έχει μία μοναδική τελική κατάσταση που συμβολίζεται με **h**
- Επιπλέον όμως έχει μία **ταινία συμβόλων** απεριόριστου μεγέθους:
  - Έχει αρχή (το αριστερότερο κελί) και είναι απεριόριστου μήκους προς τα δεξιά.
  - Το ειδικό σύμβολο # δείχνει ότι το κελί είναι κενό.
- Έχει μια **κεφαλή** που δείχνει σε ένα συγκεκριμένο κελί της ταινίας.



Β. Θεωρία

1. Μηχανή Turing

2. Τρόπος Λειτουργίας Μηχανής Turing

Προσοχή στον τρόπο λειτουργίας της μηχανής Turing (καμία σχέση με τα προηγούμενα).

Αρχικοποίηση

- Προτού καν ξεκινήσει την λειτουργία της, έχουμε περάσει την είσοδο στην ταινία.
- Συνήθως η είσοδος w είναι περασμένη ως #w# που σημαίνει ότι:
  - Το αριστερότερο κελί είναι #
  - Μετά στα διαδοχικά κελιά είναι η συμβολοσειρά w
  - Αμέσως μετά όλα τα κελιά είναι κενά.
  - Η κεφαλή βρίσκεται συνήθως στην αρχή της ταινίας (καθορίζεται από την εκφώνηση)

Σε κάθε βήμα:

- Η μηχανή κοιτά την κατάσταση του αυτομάτου και το σύμβολο της κεφαλής.
- Εκτελείται η ενέργεια που καθορίζει η μετάβαση που μπορεί να είναι αποκλειστικά μία από τις εξής:
  - Κίνησε Αριστερά την Κεφαλή (Συμβολίζεται **L**)
  - Κίνησε Δεξιά την Κεφαλή (Συμβολίζεται **R**)
  - Αντικατέστησε το σύμβολο του κελιού που δείχνει η κεφαλή με το σύμβολο σ (συμβολίζεται **σ**)
- Η μετάβαση θα συμβολίζεται στο αυτόματο ως:

- Α είναι η κατάσταση που βρισκόμαστε.
- κ είναι το σύμβολο του κελιού που δείχνει η κεφαλή
- Χ είναι L ή R ή σ

Τερματισμός: Όταν γίνει η μετάβαση στην τελική κατάσταση h

Β. Θεωρία

1. Μηχανή Turing

3. Τυπικός Ορισμός Ντετερμινιστικής Μηχανής Turing

Μια Ντετερμινιστική Μηχανή Turing είναι μια 5-άδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ όπου:

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων
- Σ είναι το αλφάβητο ταινίας που υποχρεωτικά περιέχει το κενό (#).
- $\delta: K \times \Sigma \rightarrow K \times (\Sigma \cup \{L, R\})$ είναι η συνάρτηση μετάβασης. *Π.χ. η κίνηση* $\delta(q_0, 1) = (q_1, R)$ *σημαίνει ότι είμαστε στην q_0 και η κεφαλή δείχνει σε 1, οπότε μεταβαίνουμε στην q_1 και μετακινούμε την κεφαλή μία θέση δεξιά)*
- $s \in K$ είναι η αρχική κατάσταση
- $h \in K$ είναι η τελική κατάσταση.

- Η μηχανή είναι ντετερμινιστική αφού έχουμε συνάρτηση μετάβασης (καθορίζεται με μοναδικό τρόπο η μετάβαση του αυτομάτου με κάθε συνδυασμό κατάστασης και συμβόλου ταινίας)

Συμπεριφορά μιας Μηχανής Turing

Μία μηχανή Turing μπορεί να έχει μία από τις ακόλουθες συμπεριφορές:

- Να τερματίζει: Όταν φτάνει στην μοναδική τελική κατάσταση h
- Να πέφτει σε βρόχο: Αν π.χ. έχουμε κίνηση της μορφής $\delta(q, \sigma) = (q, \sigma)$
- Να κρεμάει: Αν γίνει μετάβαση L, όταν είμαστε στο 1ο κελί της ταινίας.

Σημαντικό! Μια μηχανή Turing που έχει γραφτεί σωστά θα εκτελεί μια ενέργεια πάνω στην ταινία της. Είναι προγραμματιστικό λάθος να κρεμάει ή να πέφτει σε βρόχο.

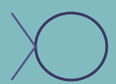
Β. Θεωρία

1. Μηχανή Turing

4. Διάγραμμα Καταστάσεων Μηχανής Turing

Διάγραμμα Καταστάσεων μηχανής Turing είναι μια σχηματική απεικόνιση της συνάρτησης μετάβασης της μηχανής.

- Η αρχική κατάσταση συμβολίζεται:



- Η μετάβαση $\delta(q_0, 1) = (q_1, R)$ συμβολίζεται:

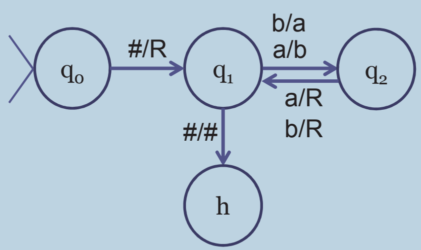
- Η (μοναδική) τελική κατάσταση h συμβολίζεται με:

Β. Θεωρία

1. Μηχανή Turing

5. Παραδείγματα Απλών Μηχανών Turing.

Ασκηση 1: Θεωρούμε την μηχανή Turing M_A που περιγράφεται από το ακόλουθο διάγραμμα καταστάσεων. Αφού μελετήσετε την συμπεριφορά της με είσοδο την συμβολοσειρά #abb# με την κεφαλή να βρίσκεται στην αρχή της ταινίας, δώστε μία άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της μηχανής.

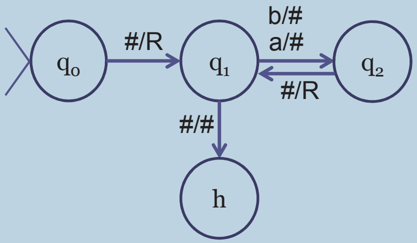


Β. Θεωρία

1. Μηχανή Turing

5. Παραδείγματα Απλών Μηχανών Turing.

Ασκηση 2: Θεωρούμε την μηχανή Turing M_B που περιγράφεται από το ακόλουθο διάγραμμα καταστάσεων. Αφού μελετήσετε την συμπεριφορά της με είσοδο την συμβολοσειρά #ba# με την κεφαλή να βρίσκεται στην αρχή της ταινίας, δώστε μία άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της μηχανής.



Β. Θεωρία

2. Σχέση «Παράγει»

1. Κατάσταση μιας Μ.Τ.

Κατάσταση μιας Μ.Τ. είναι μια ενιαία περιγραφή που καθορίζει την τρέχουσα κατάσταση της Μ.Τ. (δηλαδή μια φωτογραφία της κατάστασης στην οποία βρισκόμαστε). Στην κατάσταση ορίζουμε με έναν μαθηματικό τρόπο:
1. Σε ποια κατάσταση βρίσκεται η μονάδα ελέγχου
2. Σε ποια θέση της ταινίας βρίσκεται η κεφαλή
3. Ποια είναι η συμβολοσειρά στην ταινία.

Παραδείγματα:
Η M_A που μελετήσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα πέρασε από τις καταστάσεις Μ.Τ.:
- **(q_2,#bab)** που σημαίνει ότι
  - Η μονάδα ελέγχου ήταν στην κατάσταση q_2
  - Η ταινία είχε τα σύμβολα #bab##########.....
  - Η κεφαλή δείχνει στο τρίτο κελί της ταινίας που έχει το σύμβολο α
- **(h,#abb#)** που σημαίνει ότι
  - Η μονάδα ελέγχου ήταν στην κατάσταση h
  - Η ταινία είχε τα σύμβολα #abb##########.....
  - Η κεφαλή δείχνει στο πέμπτο κελί της ταινίας που έχει το σύμβολο #

Παραδείγματα καταστάσεων Μ.Τ.:
- (q1,baa#)
- (h,######a)

Β. Θεωρία

2. Σχέση «Παράγει»

2. Σχηματισμός μιας Μ.Τ.

Σχηματισμός μιας Μ.Τ. είναι ένας πιο μαθηματικός τρόπος να απεικονίσουμε την ίδια πληροφορία με αυτήν της κατάστασης μιας Μ.Τ. και συγκεκριμένα ως ένα μέλος του καρτεσιανού γινομένου:

$$K \times \Sigma^* \times \Sigma \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\})$$

Όπου
- το 1ο μέλος είναι η τρέχουσα κατάσταση
- Το 2ο μέλος είναι η συμβολοσειρά από την αρχή της ταινίας, εώς και το κελί αριστερά της κεφαλής
- Το 3ο μέλος είναι το σύμβολο του κελιού που δείχνει η κεφαλή
- Το 4ο μέλος είναι η συμβολοσειρά στα δεξιά της κεφαλής.

Παραδείγματα:
- Η κατάσταση Μ.Τ. **(q_2,#bab)** αντιστοιχεί στον σχηματισμό Μ.Τ. **(q_2,#b,α,b)**
- Η κατάσταση Μ.Τ. **(h,#abb#)** αντιστοιχεί στον σχηματισμό Μ.Τ. **(h,#abb,#,ε)**

Β. Θεωρία

2. Σχέση «Παράγει»

3. Σχέση «Παράγει»

Η σχέση «παράγει» ορίζεται για να έχουμε έναν μαθηματικό τρόπο περιγραφής του τι κάνει η μια μηχανή Turing.
- Τυπικά για μία Μηχανή Turing M=(K,Σ,δ,s,h) λέμε ότι ο σχηματισμός (q_1, w_1, a_1, u_1) παράγει σε ένα βήμα τον σχηματισμό (q_2, w_2, a_2, u_2) και γράφουμε:
$$(q_1, w_1, a_1, u_1) \vdash_{\boldsymbol{M}} (q_2, w_2, a_2, u_2)$$
- αν και μόνο αν μεταβαίνουμε από το 1ο σχηματισμό στον 2ο ακολουθώντας την μετάβαση που ορίζεται στην συνάρτηση μετάβασης ως $\delta(q_1, \alpha_1)$

Ορίζουμε επίσης τις σχέσεις:
- **«Παράγει σε n βήματα»** και συμβολίζουμε με $\vdash_M^n$ όπου κάνουμε n εφαρμογές της σχέσης «παράγει σε ένα βήμα»
- **«Παράγει»** και συμβολίζουμε με $\vdash_M^*$ όπου κάνουμε 0,1,2,…. εφαρμογές της σχέσης «παράγει σε ένα βήμα»

Συνεπώς ένας υπολογισμός της Μ.Τ. είναι ο $(s, \varepsilon, \#, w\#) \vdash_M^* (h, w_1, a, w_2)$

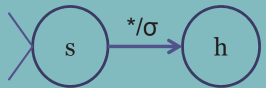
Β. Θεωρία

3. Διάγραμμα Ροής Μ.Τ.

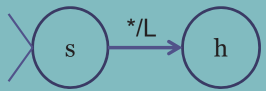
1. Στοιχειώδεις Μ.Τ.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε μηχανές Turing που κάνουν μία ουσιαστική δουλειά, ορίζουμε απλές μηχανές που θα χρησιμοποιήσουμε ως δομικά στοιχεία σε πιο περίπλοκες μηχανές.
Οι μηχανές που ορίζει το βιβλίο του ΕΑΠ είναι οι εξής (* σημαίνει «οτιδήποτε»):

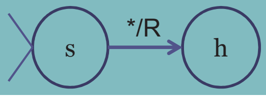
M_σ ή σ : «Γράψιμο Συμβόλου σ»



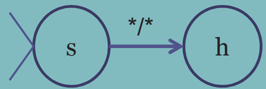
M_L ή L : «Κίνηση Αριστερά»



M_R ή R : «Κίνηση Δεξιά»

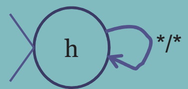


$M_>$ ή > «Μηχανή αρχή»



(*/* σημαίνει «ότι αφήνουμε την ταινία ανέπαφη»):

M_h ή h «Μηχανή-Τέλος»



Β. Θεωρία

3. Διάγραμμα Ροής Μ.Τ.

1. Στοιχειώδεις Μ.Τ.

Συνθέτουμε πιο σύνθετες μηχανές στις οποίες ενώνουμε στοιχειώδεις μηχανές με μεταβάσεις που διαβάζονται ως εξής:

Σύμβολα Μεταβάσεων

$\longrightarrow$ Υποχρεωτική Μετάβαση (την ακολουθούμε υποχρεωτικά)

$\xrightarrow{x}$ Μετάβαση αν η κεφαλή δείχνει στο σύμβολο x

$\xrightarrow{\sigma \neq \#}$ Μετάβαση με αποθήκευση συμβόλου. Η μηχανή θυμάται ότι διάβασε το σύμβολο σ και μπορούμε έπειτα να γράψουμε το σύμβολο σ στην ταινία με την μηχανή **σ**.

Κατά σύμβαση του ΕΑΠ αν δεν καθορίζεται μετάβαση από μια στοιχειώδη μηχανή, τότε το αυτόματο τερματίζει.

Παράδειγμα: Η ακόλουθη μηχανή Turing μετακινεί την κεφαλή μία θέση δεξιά, διαβάζει το σύμβολο, πάει μία θέση δεξιά και γράφει το σύμβολο σ, γίνεται μία κίνηση δεξιά ακόμη και η μηχανή τερματίζει.

$$>R \xrightarrow{\sigma \neq \#} R \rightarrow \sigma \rightarrow R$$

Η μηχανή αυτή με είσοδο #<u>a</u>ab# η κεφαλή πηγαίνει δεξιά #a<u>a</u>b# διαβάζει το σύμβολο σ=α, μετακινεί την κεφαλή μια θέση δεξιά #aa<u>b</u>#, γράφεται το σύμβολο σ=α (κατάσταση ταινίας #aa<u>a</u>#) και η κεφαλή μετακινείται δεξιά (κατάσταση ταινίας #aaa<u>#</u>) και τερματίζει.

Β. Θεωρία

3. Διάγραμμα Ροής Μ.Τ.

1. Στοιχειώδεις Μ.Τ.

Και οι ακόλουθες μηχανές Turing ορίζονται στο βιβλίο ΕΑΠ, θεωρούνται στοιχειώδεις και μπορούμε να τις χρησιμοποιήσαμε για να κατασκευάσουμε ακόμη πιο περίπλοκες μηχανές.

R^2: «Δύο θέσεις δεξιά»

$$>R \longrightarrow R$$

Ομοίως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μηχανή L^2

Γενικότερα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μηχανές L^k,R^k για k κάποιον φυσικό αριθμό.

$R_\#$: «Δεξιά μέχρι να συναντήσεις #»

Σχηματικά Διαβάζεται: «Όσο δεν διαβάζεις # πήγαινε δεξιά
Ομοίως ορίζεται η μηχανή $L_\#$

$R_{\overline{\#}}$: «Δεξιά μέχρι να συναντήσεις μη κενό»

Σχηματικά Διαβάζεται: «Όσο διαβάζεις # πήγαινε δεξιά
Ομοίως ορίζεται η μηχανή $L_{\overline{\#}}$

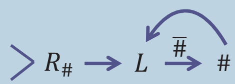
Β. Θεωρία

3. Διάγραμμα Ροής Μ.Τ.

2. Σύνθετες Μ.Τ.

Με χρήση των παραπάνω Μ.Τ. μπορούμε να κατασκευάσουμε πιο σύνθετες Μηχανές Turing οι οποίες πλέον είναι στοιχειώδεις αλγόριθμοι που εκτελούν μια ενέργεια πάνω στην ταινία της Μηχανής Turing.

Άσκηση 1: Δώστε άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της ακόλουθης Μ.Τ. με είσοδο #w# όπου $w \in \{0,1\}^*$

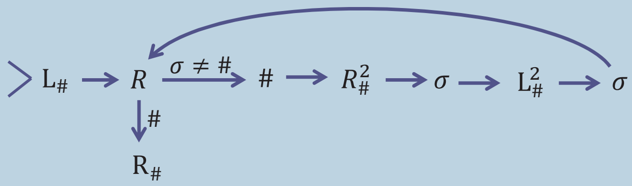


Β. Θεωρία

3. Διάγραμμα Ροής Μ.Τ.

2. Σύνθετες Μ.Τ.

Άσκηση 2: Δώστε άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της ακόλουθης Μ.Τ. με είσοδο #w# όπου $w \in \{0,1\}^*$



Β. Θεωρία

4. Χρήση των Μηχανών Turing

1. Μηχανές Turing που υπολογίζουν συναρτήσεις

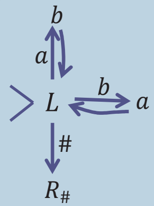
Η δουλειά που τυπικά εκτελούν οι μηχανές Turing είναι να **υπολογίζουν συναρτήσεις συμβολοσειρών:**

- Έστω μια συνάρτηση $f: \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$ με $\Sigma_0^* = \Sigma - \{\#\}$
- Λέμε ότι η μηχανή Turing M υπολογίζει την f αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ με $f(w) = u$ ισχύει ότι:

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#u\underline{\#})$$

- Αν υπάρχει μηχανή Turing που υπολογίζει μια συνάρτηση f, λέμε ότι η συνάρτηση είναι Turing υπολογίσιμη ή αναδρομική

Παράδειγμα: Η ακόλουθη μηχανή Turing υπολογίζει την συνάρτηση $f(w) = \overline{w}$ όπου $\overline{w}$ η συμβολοσειρά που προκύπτει από την w μετατρέποντας κάθε a σε b και κάθε b σε a. (Σημείωση: $\Sigma = \{a, b\}$)



Β. Θεωρία

4. Χρήση των Μηχανών Turing

1. Μηχανές Turing που υπολογίζουν συναρτήσεις

Άσκηση: Κατασκευάστε μηχανή Turing που υπολογίζει την συνάρτηση $f(w) = ww^R$ όπου $w \in \{0,1\}^*$.

Β. Θεωρία

4. Χρήση των Μηχανών Turing

2. Επεκτάσεις των Μηχανών Turing

Ορίζονται **επεκτάσεις των Μηχανών Turing** με διάφορους τρόπους:

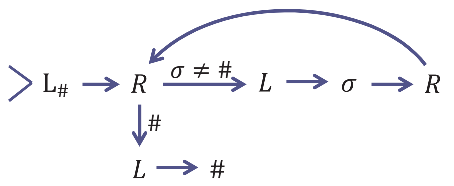
1. Μηχανή Turing με άπειρη ταινία και προς τις δύο κατευθύνσεις.
2. Μηχανή Turing με πολλές ταινίες και μία κεφαλή ανά ταινία
3. Μηχανή Turing με μία ταινία και πολλές κεφαλές
4. Μηχανή Turing με διδιάστατη και γενικότερα πολυδιάστατη ταινία

Αποδεικνύεται ότι όλες οι παραπάνω μηχανές μπορούν να προσομοιωθούν από την κλασική μηχανή Turing που μελετάμε στο μάθημα αυτό.

!! Στις εξετάσεις ζητείται υπολογισμός με κλασική μηχανή Turing, αλλά θεωρητικά σε επόμενα μαθήματα θα συναντήσουμε μηχανές Turing της περίπτωσης 2 !!

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

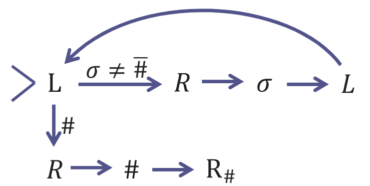
Η ακόλουθη μηχανή Turing ορίζεται ως η μηχανή αριστερής ολίσθησης, δηλαδή η μηχανή που κάνει την παραγωγή: $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_{M}^{*} (h, w\underline{\#})$ όπου $w \in \{\alpha, \beta\}^*$



Επαληθεύστε την λειτουργία της μηχανής με είσοδο τη συμβολοσειρά #abb#

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Η ακόλουθη μηχανή Turing ορίζεται ως η μηχανή δεξιάς ολίσθησης, δηλαδή η μηχανή που κάνει την παραγωγή: $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_{M}^{*} (h, \#\#w\underline{\#})$ όπου $w \in \{\alpha, \beta\}^*$



Επαληθεύστε την λειτουργία της μηχανής με είσοδο τη συμβολοσειρά #abb#

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Κατασκευάστε μηχανή Turing που υπολογίζει την αναδρομική συνάρτηση f που ορίζεται ως εξής:
- Η f δέχεται ως όρισμα έναν αριθμό στο μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης (π.χ. ο αριθμός 3 γράφεται 111 και ο αριθμός 5 γράφεται 11111) και να υπολογίζει τον επόμενό του w'.
- Συνεπώς ζητείται Μ.Τ. που υπολογίζει την συνάρτηση f(w)=w' και κάνει τον υπολογισμό: $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_{M}^{*} (h, \#w'\underline{\#})$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Κατασκευάστε μηχανή Turing που υπολογίζει την αναδρομική συνάρτηση f που ορίζεται ως εξής:
- Η f δέχεται ως όρισμα έναν αριθμό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και να υπολογίζει τον επόμενό του w'. Ο υπολογισμός να γίνεται μόνο για τους αριθμούς>=1.
- Συνεπώς ζητείται Μ.Τ. που υπολογίζει την συνάρτηση f(w)=w' και κάνει τον υπολογισμό: $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_{M}^{*} (h, \#w'\underline{\#})$