

ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ15

ΘΕΜΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(A) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = \sqrt[\log n]{n^{\log^2 n}} + \sqrt[\log^3 n]{n^{\log^5 n}}$$

$$f_2(n) = \log n^n + (\log n)^n$$

$$f_3(n) = \log^n 2^n + \log^2 n^n + \log^n n^2$$

Ο συμβολισμός \log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g ($f \equiv g$), αν $f = \Theta(g)$ (ισοδύναμα $\Theta(f) = \Theta(g)$). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g ($f < g$), αν $f = o(g)$.

(B) (B) Να λύσετε τις αναδρομές:

$$(1) \quad T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n \log n$$

$$(2) \quad T(n) = T\left(\frac{4n}{11}\right) + T\left(\frac{5n}{12}\right) + \log \log n$$

$$(3) \quad T(n) = T\left(\frac{3n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{7}\right) + n$$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, όπου $a \geq 1$, $b > 1$ είναι σταθερές, και $f(n)$ είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, και αν υπάρχει σταθερά n_0 , τέτοια

ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Δίδεται η κανονική έκφραση: 0^*+1^*

(Α) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΠΑ) της L

(Β) Δώστε το ισοδύναμο Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΝΠΑ) της L

(Γ) Απλοποιήστε το παραπάνω ΝΠΑ

Άσκηση 2: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$$L_1 = (0+1)^*0110^*10(0+1)^*011^*$$

$$L_2 = (011+101+11)^*$$

$$L_3 = 0(0+1)^*0 + 1(0+1)^*11$$

$$L_4 = 1^*0^*1^*1(11)^*$$

$$L_5 = (100^*1^*01)^*$$

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

Δίδεται η γλώσσα $L = \{a^n b^{m+1} a^m b^n \mid n, m \geq 0\}$

(Α) Δείξτε ότι η L δεν είναι κανονική

(Β) Δώστε Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της L

Το Λήμμα Αντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$