



ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μάθημα 4.5: Κύκλος Hamilton

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

1. Ορισμός
2. Πως δείχνουμε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton
3. Πως δείχνουμε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές



Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Νέοι Ορισμοί (Κύκλος Hamilton)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις



Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

1. Ορισμός

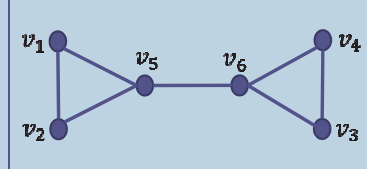
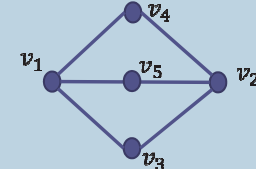
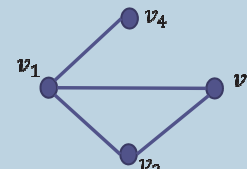
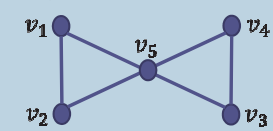
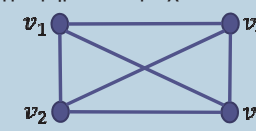
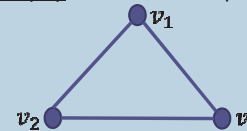
Ορισμός:

Ένας **κύκλος Hamilton** σε έναν γράφο $G = (V, E)$ είναι ένας κύκλος που:

- Περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος
- Περνάει από **κάθε κορυφή ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά**

Αν ένας γράφος έχει κύκλο Hamilton τότε καλείται **Αμιλτονιακός Γράφος** ή **Γράφος Hamilton**.

Άσκηση: Ποια από τα παρακάτω γραφήματα περιέχουν κύκλο Hamilton;

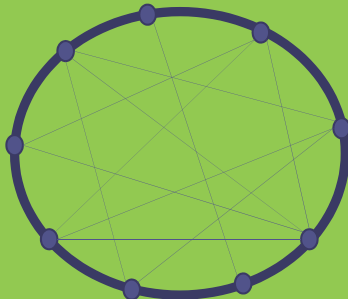


Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

1. Ορισμός

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Αν ξέρω ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε θα πρέπει να σκέφτομαι ότι το γράφημα μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο ως εξής:



Δηλαδή είναι καθαρός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος

- Ο κύκλος αποτελείται από n ακμές.
- Το γράφημα μπορεί να έχει και οσεςδήποτε επιπλέον ακμές
- Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2

Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

2. Πως δείχνω ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton

Για να δείξω ότι ένα γράφημα **έχει κύκλο Hamilton** έχω 3 τρόπους:

1. **Καταγράφοντας τον στο γράφημα** (δηλαδή καταγράφω την ακολουθία κορυφών που συνδέονται με διαδοχικές ακμές και δημιουργούν τον κύκλο Hamilton)
2. **Δείχνοντας ότι ισχύει το θεώρημα Dirac:**
 1. «Αν κάθε κορυφή έχει βαθμό $\geq n/2$ τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton» (όπου $n > 3$ είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος)
3. **Δείχνοντας ότι ισχύει το θεώρημα Ore:**
 1. «Αν κάθε ζεύγος κορυφών έχει άθροισμα βαθμών $\geq n$ τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton» (όπου $n > 3$ είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος)

Τα θεωρήματα αυτά είναι αδύναμα (διότι δεν είναι ισοδυναμίες) άρα δεν θα τα δούμε συχνά να χρησιμοποιούνται στην πράξη. Πρακτικά εξασφαλίζουν μία συνθήκη ύπαρξης του κύκλου Hamilton εφόσον το γράφημα έχει πολλές ακμές, που είναι και λογικό να υπάρχει κύκλος Hamilton. Μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί ένας αποδοτικός τρόπος (αλγόριθμος) εξέτασης του αν το γράφημα έχει κύκλο Hamilton. Το πρόβλημα είναι NP-Complete (βλέπε ΠΛΗ30)

Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

3. Πως δείχνω ότι ένα γράφημα ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton

Για να δείξω ότι ένα γράφημα **ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton** έχω 4 πολύ απλά και προφανή κριτήρια.

1. Το γράφημα **δεν είναι συνδεδεμένο**
2. Το γράφημα περιέχει **σημείο κοπής**
3. Το γράφημα περιέχει **γέφυρα**
4. Έστω **μία κορυφή έχει βαθμό 1**
5. Δείχνοντας κατασκευαστικά ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton
 - Σε έναν κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2
 - Αφαιρούμε διαδοχικά ακμές από κάθε κορυφή με βαθμό > 2 μέχρι να αποκτήσει βαθμό 2 με όλους τους δυνατούς τρόπους
 - Θα πρέπει σε κάθε περίπτωση αφαίρεσης ακμών να οδηγούμαστε ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton.

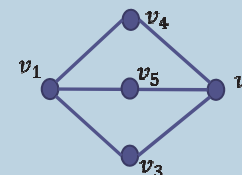
Η απόδειξη ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton, ανήκει στην κατηγορία των αποδείξεων εξαντλητικής περιπτώσεως. Δηλαδή διακρίνουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για να αποκτήσει μία κορυφή βαθμό 2 και έπειτα για κάθε μία από αυτές αποδεικνύουμε ότι δεν γίνεται να έχει κύκλο Hamilton.

Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

3. Πως δείχνω ότι ένα γράφημα ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton

Παράδειγμα 1: Αποδείξτε ότι το ακόλουθο γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton:



Έστω ότι το γράφημα έχει κύκλο Hamilton. Τότε στον κύκλο Hamilton κάθε κορυφή έχει βαθμό 2. Επιβάλλω η κορυφή v_1 να έχει βαθμό 2. Πρέπει να αφαιρέσουμε μία ακμή και διακρίνω 3 περιπτώσεις:

1. Αφαιρώ την ακμή $[v_1, v_4]$. Τότε η κορυφή v_4 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton
 2. Αφαιρώ την ακμή $[v_1, v_5]$. Τότε η κορυφή v_5 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton
 3. Αφαιρώ την ακμή $[v_1, v_3]$. Τότε η κορυφή v_3 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton
- Συνεπώς το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton**

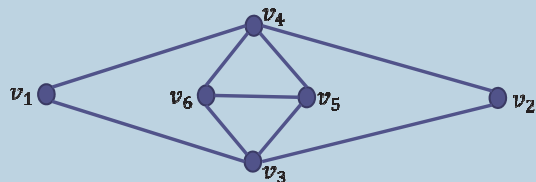


Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

3. Πως δείχνω ότι ένα γράφημα ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton

Παράδειγμα 2: Αποδείξτε ότι το ακόλουθο γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton:



Έστω ότι το γράφημα έχει κύκλο Hamilton. Τότε στον κύκλο Hamilton κάθε κορυφή έχει βαθμό 2. Επιβάλλω η κορυφή v_4 να έχει βαθμό 2. Υπάρχουν 6 δυνατές περιπτώσεις:

1. Αφαιρώ τις ακμές $[v_4, v_1]$, $[v_4, v_6]$. Τότε η κορυφή v_1 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton



2. Αφαιρώ τις ακμές $[v_4, v_1]$, $[v_4, v_5]$. Τότε η κορυφή v_1 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton



Β. Θεωρία

1. Κύκλος Hamilton

3. Πως δείχνω ότι ένα γράφημα ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton

(....συνέχεια...)

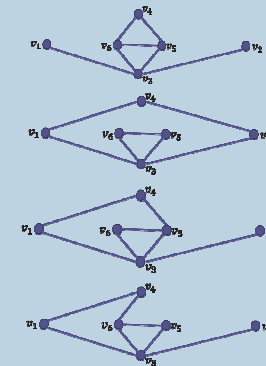
3. Αφαιρώ τις ακμές $[v_4, v_1]$, $[v_4, v_2]$. Τότε η κορυφή v_1 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton

4. Αφαιρώ τις ακμές $[v_4, v_6]$, $[v_4, v_5]$. Τότε η κορυφή v_3 είναι σημείο κοπής. Δεν υπάρχει κ. Hamilton

5. Αφαιρώ τις ακμές $[v_4, v_6]$, $[v_4, v_2]$. Τότε η κορυφή v_2 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton

6. Αφαιρώ τις ακμές $[v_4, v_5]$, $[v_4, v_2]$. Τότε η κορυφή v_2 θα έχει βαθμό 1. Δεν υπάρχει κ. Hamilton

Συνεπώς το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton



Αν σε μια περίπτωση δεν ήταν αποδείξιμο ότι δεν έχει κύκλο Hamilton, θα συνεχίζαμε επιβάλλοντας μία άλλη κορυφή βαθμού >2 να έχει βαθμό 2, διακρίνοντας κατάλληλες υποπεριπτώσεις κ.ο.κ.

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 1

Θεωρούμε την κλάση των απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων με τουλάχιστον 4 κορυφές που έχουν κύκλο Hamilton και διατηρούν αυτή την ιδιότητα αν αφαιρεθεί οποιαδήποτε ακμή τους.

α) Να κατασκευάσετε ένα τέτοιο γράφημα με 6 κορυφές και 9 ακμές. Να αναφέρετε 2 διαφορετικούς κύκλους Hamilton στο γράφημα που κατασκευάσατε.

β) Έστω G ένα αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα αυτής της κλάσης με n κορυφές. Να δείξετε ότι το G έχει τουλάχιστον $3n/2$ ακμές.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 3$, το $K_{n,n}$ ανήκει σε αυτή την κλάση γραφημάτων, δηλαδή συνεχίζει να έχει κύκλο Hamilton ακόμη και αφού αφαιρεθεί οποιαδήποτε ακμή του.

Λύση:

α) Το $K_{3,3}$ είναι ένα τέτοιο γράφημα. Δίνουμε το γράφημα και δύο κύκλους Hamilton.

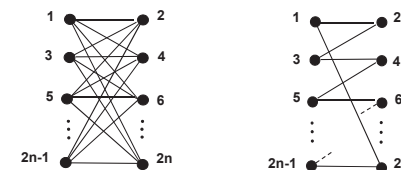


β) Κάθε κορυφή πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 3, διότι αν αφαιρέσουμε μια ακμή που προσπίπτει σ' αυτήν πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 2 ώστε να εξακολουθεί να υπάρχει και πάλι κύκλος Hamilton. Άρα συνολικά έχουμε τουλάχιστον $3n$ ακμές κι επειδή κάθε ακμή μετρείται δύο φορές, το πλήθος των ακμών πρέπει να είναι τουλάχιστον $3n/2$

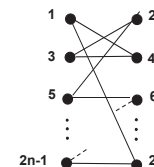
Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 1

γ) Το $K_{n,n}$ έχει κύκλο Hamilton όπως φαίνεται παρακάτω.



Ο κύκλος Hamilton είναι $(1, 2, 3, 4, \dots, 2n-1, 2n, 1)$. Αν διαγραφεί μια ακμή που ανήκει στον αρχικό κύκλο Hamilton, η $\{1, 2\}$ για παράδειγμα, τότε μπορούμε να την «παρακάμψουμε» χρησιμοποιώντας τη διαδρομή $1, 4, 3, 2, 5$, και μετά ακολουθώντας τον αρχικό κύκλο Hamilton. Έτσι προκύπτει ο κύκλος $(1, 4, 3, 2, 5, 6, \dots, 2n-1, 2n, 1)$ που φαίνεται στο σχήμα.



Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 2

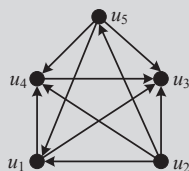
Σε ένα κατευθυντικό γράφημα, ένα κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton είναι ένα μονοπάτι που ξεκινά από μια κορυφή και ακολουθώντας την φορά των ακμών που χρησιμοποιεί, καταλήγει σε κάποια άλλη αφού επισκεφτεί όλες τις κορυφές του γραφήματος.

α) Δώστε έναν αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του K_5 και βρείτε ένα κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton στο προκύπτον γράφημα.

β) Δείξτε με επαγωγή στο ότι αν στο K_n δώσουμε έναν αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του, τότε στο κατευθυντικό γράφημα που προκύπτει υπάρχει κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton.

ΛΥΣΗ:

α) Ένας αυθαίρετος προσανατολισμός των ακμών του K_5 φαίνεται παρακάτω.



Ένα κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton είναι το $u_2 - u_5 - u_1 - u_4 - u_3$

Γ. Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 2

β) Για $n = 2$ προφανώς υπάρχει το κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton.

Έστω ότι στο πλήρες γράφημα K_n , $n \geq 2$, αν δώσουμε αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του, υπάρχει κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton. Θεωρούμε το K_{n+1} και ένα αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του. Έστω u μια οποιαδήποτε κορυφή του. Αν αφαιρεθεί η u , το γράφημα που απομένει είναι το (προσανατολισμένο) K_n το οποίο σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής έχει κατευθυντικό μονοπάτι Hamilton p με αρχή έστω την κορυφή x και πέρας την y . Αν υπάρχει η ακμή ux (δηλ. αν η φορά της είναι από την u στην x) τότε στο K_{n+1} υπάρχει το μονοπάτι Hamilton που αρχίζει με την u και μέσω της ux συνεχίζει με το p . Παρόμοια, αν υπάρχει η ακμή yu τότε στο K_{n+1} υπάρχει το μονοπάτι Hamilton που αρχίζει με το p και τελειώνει με την u . Απομένει λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση όπου η φορά των ακμών μεταξύ της u και της x είναι η xu και της u και της y , ή uy . Σε αυτή την περίπτωση όμως (βλέπε σχήμα), μια και η φορά των ακμών μεταξύ της u και των κορυφών του μονοπατιού αντιστρέφεται (ξεκινά με ακμή προς την u και καταλήγει με ακμή από την u), θα πρέπει αναγκαστικά να υπάρχουν στο p δύο διαδοχικές κορυφές v και w , με ακμές vu και uw . Το ζητούμενο μονοπάτι στο K_{n+1} λοιπόν ξεκινά με την x και ακολουθεί το p μέχρι την v . Στη συνέχεια χρησιμοποιεί τις ακμές vu και uw και τέλος το τελευταίο τμήμα του p από την w μέχρι την y .

Δ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 1

Για ποιες τιμές των n, m τα ακόλουθα γραφήματα έχουν κύκλο Hamilton:

1. Η κλίκα K_n
2. Το συμπλήρωμα της $\overline{K_n}$
3. Ο απλός κύκλος C_n
4. Το συμπλήρωμα του $\overline{C_n}$
5. Ο τροχός W_n
6. Το συμπλήρωμα του $\overline{W_n}$
7. Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$
8. Το συμπλήρωμα του $\overline{K_{n,m}}$

Δ. Ασκήσεις

Ασκηση Κατανόησης 2

Ένα *μονοπάτι Hamilton* είναι ένα μονοπάτι που περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος. Να αποδειχθεί ότι εάν ένα γράφημα περιέχει τρεις (3) κορυφές βαθμού 1 τότε το γράφημα αυτό δεν περιέχει ένα μονοπάτι Hamilton.



Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 3

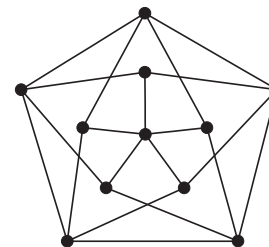
Να αποδείξετε ότι κάθε γράφημα που περιέχει κύκλο Hamilton δεν περιέχει σημεία κοπής (σημεία αρθρώσεως)



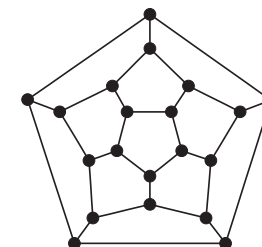
Δ. Ασκήσεις

Άσκηση Κατανόησης 4

Να βρείτε κύκλους Hamilton στα παρακάτω γραφήματα:



Σχήμα 2.α



Σχήμα 2.β



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Σε ένα απλό γράφημα με κύκλους Euler και Hamilton, ο κύκλος Euler έχει τουλάχιστον τόσες ακμές όσες ο κύκλος Hamilton
2. Σε ένα απλό γράφημα αν αφαιρεθεί μία ακμή ενός κύκλου Hamilton το γράφημα που προκύπτει δεν έχει κύκλο Hamilton
3. Σε ένα απλό γράφημα αν αφαιρεθεί μία ακμή ενός κύκλου Euler το γράφημα που προκύπτει δεν έχει κύκλο Euler
4. Το γράφημα $K_{m,n}$ έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν το $m+n$ είναι άρτιος αριθμός



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 2

Ποιες από τις παρακάτω ιδιότητες διατηρούνται όταν προσθέτουμε ακμές σε ένα γράφημα; Δηλαδή, για ποιες από τις παρακάτω ιδιότητες ισχύει ότι αν $G(V, E)$ είναι ένα γράφημα που έχει την ιδιότητα Π , και $G'(V, E'), E \subseteq E'$, είναι ένα γράφημα που προκύπτει από το G με την προσθήκη επιπλέον ακμών (όχι κορυφών), τότε το G' διατηρεί την ιδιότητα Π .

1. Η ιδιότητα ότι «το γράφημα έχει κύκλο Hamilton»
2. Η ιδιότητα ότι «το γράφημα είναι συνδεόμενο».
3. Η ιδιότητα ότι «το γράφημα έχει κύκλο Euler».
4. Η ιδιότητα ότι «το γράφημα δεν έχει σημείο κοπής».



Δ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 3

Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που έχει και κύκλο Hamilton και κύκλο Euler.

1. Αν κάθε κορυφή του έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2, τότε αν αφαιρέσουμε τις ακμές του κύκλου Hamilton το υπολειπόμενο γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Euler.
2. Αν κάθε κορυφή του έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2, τότε αν αφαιρέσουμε τις ακμές του κύκλου Euler το υπολειπόμενο γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Hamilton.
3. Αν αφαιρέσουμε μία ακμή του, τότε το υπολειπόμενο γράφημα παύει να έχει και κύκλο Euler και κύκλο Hamilton.
4. Αν ο κύκλος Hamilton είναι άρτιος, το πλήθος των κορυφών του γραφήματος είναι άρτιο.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Κατασκευάστε 4 απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα 6 κορυφών όπου:

1. Το πρώτο έχει κύκλο Hamilton και έχει κύκλο Euler
2. Το δεύτερο δεν έχει κύκλο Hamilton και έχει κύκλο Euler
3. Το τρίτο έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler
4. Το τέταρτο δεν έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Ένα τριμερές γράφημα είναι ένα γράφημα στο οποίο οι κόμβοι του διαμερίζονται σε τρία σύνολα ανεξαρτησίας. Το $K_{m,n,k}$ είναι το τριμερές γράφημα στο οποίο τα τρία σύνολα ανεξαρτησίας A,B,Γ έχουν αντίστοιχα m,n και k κορυφές και στο οποίο κάθε κορυφή σε κάθε σύνολο από τα A,B και Γ είναι συνδεδεμένη με όλες τις άλλες κορυφές στα άλλα δύο σύνολα.

1. Δείξτε ότι το γράφημα $K_{2,4,6}$ έχει κύκλο Hamilton
2. Δείξτε ότι το $K_{n,2n,3n}$ έχει κύκλο Hamilton.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 3

Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι το γράφημα K_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 3$.



Δ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 4

Αποδείξτε ότι το ακόλουθο γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton:

