ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ7

Ασκηση 1

(Α) Ιεραρχήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας:

$$f_1(n) = \left(\sqrt[n\log n]{n}\right)^n$$

$$f_2(n) = (\log n)^{n^2} + n^4$$

$$f_3(n) = n^{\log^2 n}$$

$$f_4(n) = n\log\log n + \sqrt[3]{n}$$

$$f_5(n) = \frac{n}{\log n}$$

(Β) Να αποδείξετε ότι $\log^2 n + \log n + 1 = \omega(\log n)$

(Γ) Να λύσετε τις αναδρομές:

(1) $T(n) = T\left(\frac{3n}{11}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right) + n$

(2) $T(n) = T(n-1) + 4n$

(2) $T(n) = 51T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt[5]{n^4}$

(3) $T(n) = \sqrt{7}T\left(\frac{n}{7}\right) + \sqrt{n}$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση T(n) = aT(n/b) + f(n), όπου a≥1, b>1 είναι σταθερές, και f(n) είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, τότε T(n) = $\Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε T(n) = $\Theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, για κάποια σταθερά ε>0, και αν υπάρχει σταθερά n_0, τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά c<1, τότε T(n) = $\Theta(f(n))$.

Ασκηση 2

Δίδεται η ακολουθία ακεραίων αριθμών που δημιουργείται από την

$$A(n) = 2\,A(n-1) + 3\,A(n-2), \text{ για } n > 1, \text{ και } A(n) = 1,\ n=0,1$$

1. Σχεδιάστε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που θα υπολογίζει τον n-οστό όρο της ακολουθίας. Παρουσιάστε την αναδρομική σχέση που ορίζει την ασυμπτωτική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

2. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που λύνει το ίδιο πρόβλημα Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης εκτέλεσης του αλγορίθμου?