ΠΛΗ20
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-6

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………………

Ημερομηνία: ……………………………………………………………………

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ (30% του βαθμού)

(1) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Ο αριθμός των ακμών σε κάθε κλίκα n κορυφών (n≥3) είναι άρτιος αριθμός.
2. Ο αριθμός των ακμών σε κάθε πλήρες διμερές γράφημα με τουλάχιστον n κορυφές (n≥5), είναι άρτιος αριθμός.
3. Ο αριθμός των υπογραφημάτων του K_{10} που είναι ισόμορφα με το K_3 είναι άρτιος αριθμός.
4. Ο αριθμός των υπογραφημάτων του K_{50} που είναι ισόμορφα με το $K_{2,2}$ είναι άρτιος αριθμός.

(2) Ρίχνουμε δύο μη διακεκριμένα ζάρια.

1. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων είναι όσες οι επιλογές, χωρίς επανάληψη, 2 αντικειμένων από 6
2. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων είναι όσες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1+\cdots+x_6=2, x_i\geq 0, i=1,\dots 6$
3. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων που το άθροισμα τους είναι k είναι όσες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1+x_2=k, x_1, x_2\geq 0$
4. Ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων που το άθροισμα τους είναι k είναι όσος ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $(x+x^2+\cdots+x^6)^2$

(3) Το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους 6 που μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Α και Β ώστε κάθε σύμβολο να εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά είναι ίσο με:

1. Το συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^6}{6!}\right)^2$
2. Το συντελεστή του $\frac{x^4}{4!}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^5}{5!}\right)^2$
3. Τα διαφορετικά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν αν ρίξουμε ταυτόχρονα δύο διακεκριμένα ζάρια.
4. Τους τρόπους τοποθέτησης 6 διακεκριμένων βιβλίων σε 2 διακεκριμένα ράφια ώστε σε κάθε ράφι να τοποθετηθεί τουλάχιστον ένα βιβλίο, χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι και με την υπόθεση ότι κάθε ράφι μπορεί να χωρέσει και τα 6 βιβλία.

(4) Έστω $T=\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ ένα αντιφατικό σύνολο προτασιακών τύπων.

1. Για κάθε προτασιακό τύπο ψ, ισχύει ότι $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$.
2. $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}\} \vdash \neg\varphi_n$
3. Ο προτασιακός τύπος $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n)$ είναι ταυτολογία.
4. Για κάθε προτασιακό τύπο ψ, το $T \cup \{\psi\}$ είναι αντιφατικό

(5) Θεωρούμε τις προτάσεις $\varphi \equiv \neg\forall x \exists y (x \neq y \wedge \neg P(x,y))$ *και* $\psi \equiv \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x,y))$.

1. Οι προτάσεις *φ* και *ψ* είναι λογικά ισοδύναμες.
2. Η πρόταση *φ* είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.
3. Η πρόταση *ψ* είναι σε Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή.
4. Η πρόταση *φ* αληθεύει στους φυσικούς, αν το $P(x, y)$ δηλώνει ότι «ο x είναι μικρότερος του y».

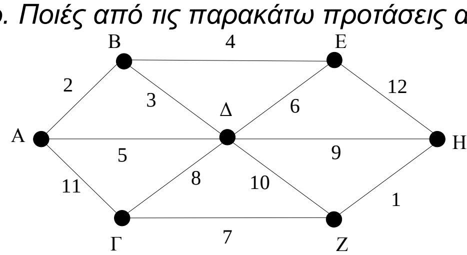
(6) Οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Σε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές για όλα τα ζευγάρια κορυφών s,t η ακμή ελαχίστου βάρους εμφανίζεται στο συντομότερο s-t μονοπάτι.
2. Σε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές η ακμή ελαχίστου βάρους εμφανίζεται σε κάθε ελάχιστο συνδετικό δένδρο.
3. Υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 14 κορυφές.
4. Ένα απλό επίπεδο 4-κανονικό γράφημα με 14 ακμές έχει 9 όψεις.

(7) Για τις ερωτήσεις 1-3 θεωρήστε τον γράφο $K_{n,m}$ με κορυφές των συνόλων ανεξαρτησίας $\{v_1,..,v_n\}$, $\{u_1,\dots,u_m\}$ αντίστοιχα και $1 \leq n < m$. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1. Είναι δυνατόν να διαγράψουμε $(n-1)(m-1)$ ακμές έτσι ώστε ο γράφος που απομένει να είναι συνδετικό δένδρο του $K_{n,m}$.
2. Η κατά-πλάτος διάσχιση του δέντρου ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος 3 (το βάθος της v_1 είναι 0).
3. Η κατά-βάθος διάσχιση του δέντρου ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος $2n$-1 (το βάθος της v_1 είναι 0).
4. Σε ένα συνδεδεμένο γράφο *G* μια ακμή που το ένα άκρο της είναι μια κορυφή βαθμού ένα, υπάρχει σε κάθε συνδετικό δένδρο του *G*.

(8) Θεωρήσατε τον ακόλουθο γράφο. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;



1. Δυο από τα συνδετικά δένδρα του γράφου είναι ο $K_{1,6}$ και ο P_7.
2. Έχει μόνο ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο.
3. Ο αλγόριθμος του Prim με αρχική κορυφή την *Α* θα κατασκευάσει ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο μία από τις ακμές του οποίου θα είναι η (*Δ*, *Ε*).
4. Ο αλγόριθμος του Dijkstra για την εύρεση των συντομότερων μονοπατιών από την κορυφή *Α* προς όλες τις άλλες θα κατασκευάσει το ίδιο δένδρο με τον αλγόριθμο του Prim με αρχική κορυφή την *Α*.

(9) Θεωρούμε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Ένα συνδεόμενο επίπεδο γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν έχει μία μόνο όψη.
2. Ένα επίπεδο γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν έχει n κορυφές και n – 1 ακμές
3. Όλα τα δέντρα με τουλάχιστον 2 κορυφές είναι διχοτομίσιμα γραφήματα.
4. Όλα τα δέντρα με τουλάχιστον 2 κορυφές έχουν περιττό πλήθος φύλλων.

(10) Δίδεται το σύνολο A με τους φυσικούς αριθμούς A={1,2,3,4,5,6,7}

1. Αν η σειρά εισαγωγής σε ένα Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης είναι 7,6,5,4,3,2,1 τότε το δένδρο έχει το μέγιστο δυνατό ύψος
2. Υπάρχει σειρά εισαγωγής των στοιχείων του συνόλου ώστε το δένδρο που προκύπτει να έχει ύψος 2.
3. Υπάρχει σειρά εισαγωγής των στοιχείων του συνόλου ώστε το δένδρο που προκύπτει να έχει ύψος 7.
4. Στο δυαδικό δένδρο αναζήτησης με το ελάχιστο δυνατό ύψος, η αναζήτηση του αριθμού 2, απαιτεί περισσότερες συγκρίσεις από την αναζήτηση του αριθμού 6.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (70% του βαθμού)

Άσκηση 1 (Μονάδες 25)

1) Μια εταιρία αναθέτει σε τρεις διακεκριμένους μηχανικούς την επίβλεψη 3n διακεκριμένων έργων. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η ανάθεση αν:

(i) δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των έργων που θα αναλάβει κάθε μηχανικός.

(ii) κάθε μηχανικός θα αναλάβει την επίβλεψη ακριβώς n έργων.

(iii) Ο 1ος μηχανικός θα αναλάβει 2n έργα.

2) Ένα φορτηγό περιέχει 100 συσκευασίες των 10kg και 100 συσκευασίες των 20kg ενός συγκεκριμένου προϊόντος. Το φορτηγό πρόκειται να εξυπηρετήσει τις ανάγκες δύο διακεκριμένων supermarket που είναι ακριβώς 1000kg και 2000kg αντίστοιχα. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα εξυπηρετηθούν τα δύο supermarket, αν από το πρώτο υπάρχει η απαίτηση να παραλάβει τουλάχιστον 20 συσκευασίες των 10kg και 10 συσκευασίες των 20kg, ενώ από το δεύτερο δεν τίθεται κανένας περιορισμός (Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή).

3) Σε μια αποθήκη που χωρίζεται σε τρία διακεκριμένα μέρη πρόκειται να τοποθετηθούν 100 λίτρα λάδι που θα αγοραστούν σε δοχεία των 5 και 10 λίτρων (τα δοχεία κάθε συσκευασίας είναι όμοια). Να σχηματίσετε γεννήτρια συνάρτηση και να υπολογίσετε το συντελεστή του όρου που δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα δοχεία, ώστε σε κάθε μέρος της αποθήκης να τοποθετηθούν τουλάχιστον δύο συσκευασίες των 5 λίτρων και τουλάχιστον δύο συσκευασίες των 10 λίτρων.

Άσκηση 2 (Μονάδες 35)

α) Έστω p_1, p_2, …, p_n προτασιακές μεταβλητές, με $n \geq 2$. Να διερευνήσετε αν ο παρακάτω προτασιακός τύπος είναι ταυτολογία:

$$\big((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n)\big) \to (p_1 \to p_n)$$

β) Να δείξετε ότι $\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi) \vdash (\neg\varphi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα, εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ δηλώνει ότι «*οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή*». Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

(i) Τύπο $\psi_1(x, y)$ που δηλώνει ότι κάθε κορυφή, διαφορετική από τις x και y, είναι γειτονική προς μία (ακριβώς) από τις x και y.

(ii) Τύπο $\psi_2(x, y)$ που δηλώνει ότι οι κορυφές x και y έχουν μοναδική κοινή γειτονική κορυφή.

(iii) Πρόταση που δηλώνει ότι το γράφημα δεν έχει απλό κύκλο μήκους 3.

δ) Να βρείτε ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα με 7 κορυφές και όχι περισσότερες από 12 ακμές για το οποίο, στην ερμηνεία του (γ), αληθεύει η παρακάτω πρόταση:

$$\forall x \forall y (x \neq y \to \exists z (z \neq x \wedge z \neq y \wedge P(x,z) \wedge P(z,y)))$$

Άσκηση 3 (Μονάδες 20)

Ένα δυαδικό δένδρο με ρίζα ονομάζεται ισορροπημένο όταν για κάθε εσωτερική κορυφή v :
i) αν η v έχει δύο παιδιά, τα ύψη των δύο υποδένδρων με ρίζες τα παιδιά της διαφέρουν το πολύ κατά 1.
ii) αν η v έχει μόνο ένα παιδί, αυτό είναι κατ' ανάγκη φύλλο.

1) Σχεδιάστε τα ισορροπημένα δυαδικά δένδρα *με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών* με ύψος από $h = 0$ έως $h = 4$. Επιβεβαιώστε ότι ο αριθμός των κορυφών n_h των ισορροπημένων δυαδικών δένδρων που κατασκευάσατε, επαληθεύει την ισότητα:

$$n_h = f_{h+3} - 1$$

όπου f_{h+3} είναι ο $h + 3$ -οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci.

2) Δείξτε με επαγωγή στο ύψος h, ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει για τον ελάχιστο αριθμό κορυφών n_h κάθε ισορροπημένου δυαδικού δένδρου ύψους h.

Υπενθύμιση: Η ακολουθία Fibonacci έχει πρώτους όρους $f_1 = f_2 = 1$ και για κάθε φυσικό $k \geq 3$, ο k-οστός της όρος δίνεται από την αναδρομική σχέση $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$.

Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

Μία κάμπια είναι ένα δένδρο το οποίο περιέχει ένα μονοπάτι στο οποίο προσπίπτει τουλάχιστον μία κορυφή για κάθε ακμή του δένδρου.

1. Κατασκευάστε μία κάμπια 12 κορυφών, στην οποία το μέγιστο μονοπάτι έχει μήκος 7.
2. Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι σε κάθε κάμπια n κορυφών που το μέγιστο μονοπάτι της είναι 7, έχει n-6 φύλλα.