ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Πίνακας Αλήθειας Λογικών Συνδέσμων:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Ταυτολογία: είναι τύπος που είναι Α για όλες τις αποτιμήσεις

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg p \rightarrow q$ είναι ταυτολογία

Λύση:

p	q	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
Α	Α	$(A \wedge \neg A) \rightarrow A = \Psi \rightarrow A = A$
Α	Ψ	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Psi = \Psi \rightarrow \Psi = A$
Ψ	Α	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow A = \Psi \rightarrow A = A$
Ψ	Ψ	$(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow \Psi = \Psi \rightarrow \Psi = A$

Γνωστες Ταυτολογίες είναι οι μορφές τύπων:

1. $\boldsymbol{\varphi} \vee \neg\boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
2. $\varphi \rightarrow \psi$ όπου φ=Αντίφαση (Μορφή $\boldsymbol{\Psi} \rightarrow \cdots$) ή ψ=Ταυτολογία (Μορφή ... $\rightarrow \mathbf{A}$)
3. $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
4. $\boldsymbol{\varphi} \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
5. Όλες οι μορφές τύπων νόμων της προτασιακής λογικής
6. Όλες οι μορφές τύπων συντακτικών αντικατάσεων στα αξιωματικά σχήματα του προτασιακού λογισμού

Προτεραιότητα λογικών συνδέσμων:

(1) $\neg$ **(2)** $\vee$, $\wedge$ **(3)** $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Αντίφαση: είναι τύπος που είναι Ψ για όλες τις αποτιμήσεις

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ είναι αντίφαση

Λύση:

p	q	$p \wedge \neg(q \rightarrow p)$
Α	Α	$A \wedge \neg(A \rightarrow A) = A \wedge \neg A = \Psi$
Α	Ψ	$A \wedge \neg(\Psi \rightarrow A) = A \wedge \neg A = \Psi$
Ψ	Α	$\Psi \wedge \neg(A \rightarrow \Psi) = \Psi \wedge \neg \Psi = \Psi$
Ψ	Ψ	$\Psi \wedge \neg(\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \wedge \neg A = \Psi$

Γνωστές Αντιφάσεις είναι οι μορφές τύπων

- $\boldsymbol{\varphi} \wedge \neg\boldsymbol{\varphi}$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος
- $\varphi \rightarrow \psi$ όπου φ=Ταυτολογία και ψ=Αντίφαση (Μορφή $\mathbf{A} \rightarrow \boldsymbol{\Psi}$)
- $\neg\varphi$ όπου φ=Ταυτολογία
- $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ όπου φ οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος

Ικανοποιήσιμος: είναι τύπος που είναι Α σε τουλάχιστον μία αποτίμηση

Παράδειγμα: Ο τύπος $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ είναι ικανοποιήσιμος

Λύση:

p	q	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$
Α	Α	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = A \rightarrow (A \rightarrow A) = A \rightarrow A = A$
Α	Ψ	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = A \rightarrow (A \rightarrow \Psi) = A \rightarrow \Psi = \Psi$
Ψ	Α	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow A) = \Psi \rightarrow A = A$
Ψ	Ψ	$p \rightarrow (p \rightarrow q) = \Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Psi) = \Psi \rightarrow A = A$

<u>Κανονική Διαζευκτική Μορφή:</u>

Ένας τύπος είναι σε <u>κανονική διαζευκτική μορφή (ΚΔΜ)</u>, αν είναι της μορφής:

$$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$$

όπου κάθε ψ_i είναι της μορφής:

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$$

Και τα x_{ij} είναι μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών

<u>Βήματα κατασκευής κανονικής διαζευκτικής μορφής</u>

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου.
2. Εκφράζουμε σαν σύζευξη (and) κάθε γραμμή που αληθεύει. Στην σύζευξη θέτουμε p αν $\alpha(p) = \mathrm{A}$ και $\neg p$ αν $\alpha(p) = \Psi$.
3. Ο τύπος είναι η διάζευξη (or) όλων των συζεύξεων.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί η Κ.Δ.Μ. του τύπου: $p \to \neg(q \to r)$

Λύση:

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του τύπου:

p	q	r	$p \to \neg(q \to r)$
Α	Α	Α	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\mathrm{A} \to \mathrm{A}) = \mathrm{A} \to \Psi = \Psi$
Α	Α	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\mathrm{A} \to \Psi) = \mathrm{A} \to \mathrm{A} = \mathrm{A}$
Α	Ψ	Α	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\Psi \to \mathrm{A}) = \mathrm{A} \to \Psi = \Psi$
Α	Ψ	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \mathrm{A} \to \neg(\Psi \to \Psi) = \mathrm{A} \to \Psi = \Psi$
Ψ	Α	Α	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\mathrm{A} \to \mathrm{A}) = \Psi \to \Psi = \mathrm{A}$
Ψ	Α	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\mathrm{A} \to \Psi) = \Psi \to \mathrm{A} = \mathrm{A}$
Ψ	Ψ	Α	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\Psi \to \mathrm{A}) = \Psi \to \Psi = \mathrm{A}$
Ψ	Ψ	Ψ	$p \to \neg(q \to r) = \Psi \to \neg(\Psi \to \Psi) = \Psi \to \Psi = \mathrm{A}$

- Η 2η γραμμή: $p \wedge q \wedge \neg r$
- Η 5η γραμμή: $\neg p \wedge q \wedge r$
- Η 6η γραμμή: $\neg p \wedge q \wedge \neg r$
- Η 7η γραμμή: $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
- Η 8η γραμμή: $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Άρα η Κανονική Διαζευκτική Μορφή του τύπου είναι:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$