ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ/2

Μάθημα 5.1:
Παραστάσεις Γραφημάτων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Νέοι Ορισμοί (Πίνακας Γειτνίασης – Πίνακας Πρόσπτωσης)
- Ασκήσεις: Ερωτήσεις
- Ασκήσεις: Ασκήσεις Κατανόησης

Επίπεδο Β

- Ασκήσεις: Εφαρμογές

Επίπεδο Γ

- Ασκήσεις: Λυμένες Ασκήσεις

Β. Θεωρία

1. Πίνακας Γειτνίασης

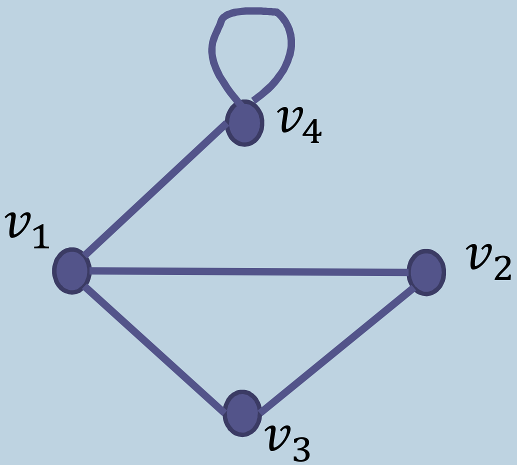
1. Ορισμός για Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός:

Ο **πίνακας γειτνίασης** (ή **μητρώο σύνδεσης**) ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n είναι ένας n x n τετραγωνικός πίνακας που ορίζεται ως:

$$A_{n\times n} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ [v_i, v_j] \in E \\ 0, & \alpha\nu\ [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα γειτνίασής του:



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

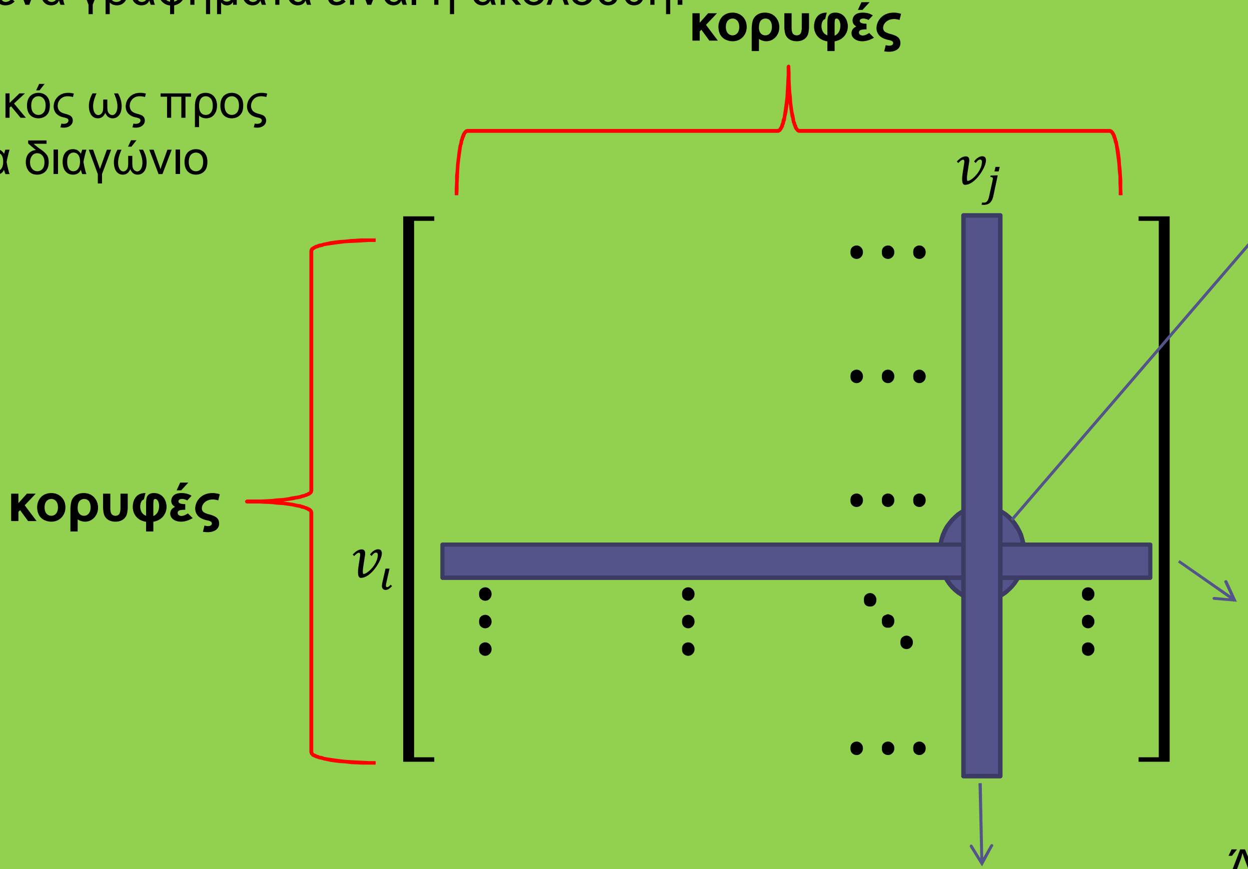
Β. Θεωρία

1. Πίνακας Γειτνίασης

2. Ορισμός για Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα γειτνίασης σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι η ακόλουθη:

- Συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο



Το στοιχείο $a_{i,j}$ είναι
0: αν δεν υπάρχει η ακμή που συνδέει τις v_i, v_j
1: αν υπάρχει η ακμή που συνδέει τις v_i, v_j

Άθροισμα των στοιχείων της γραμμής i ισούται με $\mathrm{d}(v_i)$

Άθροισμα των στοιχείων της στήλης j ισούται με $\mathrm{d}(v_i)$

Άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα ισούται με

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(v_i) = 2m$$

ΠΛΗΘΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: n^2

Β. Θεωρία

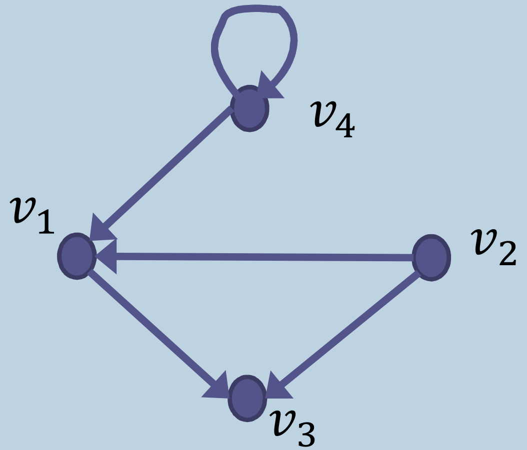
1. Πίνακας Γειτνίασης

2. Ορισμός για Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός:
Ο **πίνακας γειτνίασης** (ή **μητρώο σύνδεσης**) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n είναι ένας n x n τετραγωνικός πίνακας που ορίζεται ως:

$$\mathrm{A}_{n\times n} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \alpha\nu\ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

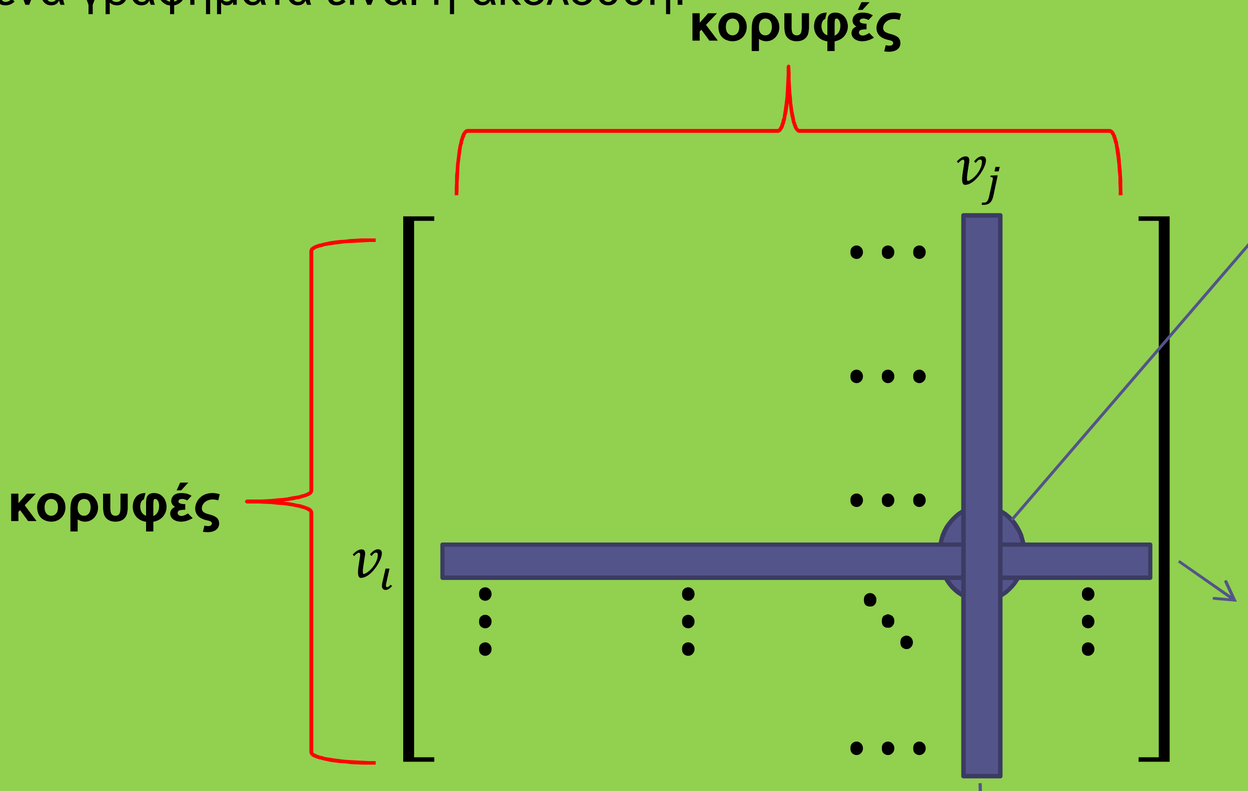
Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα γειτνίασής του:



$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Β. Θεωρία
1. Πίνακας Γειτνίασης
2. Ορισμός για Κατευθυνόμενα Γραφήματα

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα γειτνίασης σε κατευθυνόμενα γραφήματα είναι η ακόλουθη:



Το στοιχείο $a_{\iota,j}$ είναι
0: αν δεν υπάρχει η ακμή από την v_ι στην v_j
1: αν υπάρχει η ακμή από την v_ι στην v_j

Άθροισμα των στοιχείων της γραμμής i ισούται με έξω βαθμό κορυφής $d^+(v_\iota)$

ΠΛΗΘΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: n^2

Άθροισμα των στοιχείων της στήλης j με έσω βαθμό κορυφής $d^-(v_j)$

Άθροισμα όλων των στοιχεί-ων του πίνακα ισούται με

$$\sum_{\iota=1}^{n} d^+(v_\iota) = m$$

Β. Θεωρία

1. Πίνακας Γειτνίασης

3. Θεώρημα (υπολογισμού μονοπατιών)

Θεώρημα (υπολογισμού μονοπατιών):
Το στοιχείο (i, j) του πίνακα A^k (ο πίνακας γειτνίασης υψωμένος στην k δυναμη) δίνει πόσα μονοπάτια μήκους k υπάρχουν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j

Πόρισμα 1:
Το στοιχείο (i, j) του πίνακα $A + A^2 + \cdots + A^k$ δίνει πόσα μονοπάτια μήκους το πολύ k υπάρχουν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j

Πόρισμα 2:
Αν ένα μη διαγώνιο στοιχείο (i, j) του πίνακα $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ (όπου n=|V|) είναι 0, τότε το γράφημα δεν είναι συνδεόμενο.

Β. Θεωρία

2. Πίνακας Πρόσπτωσης

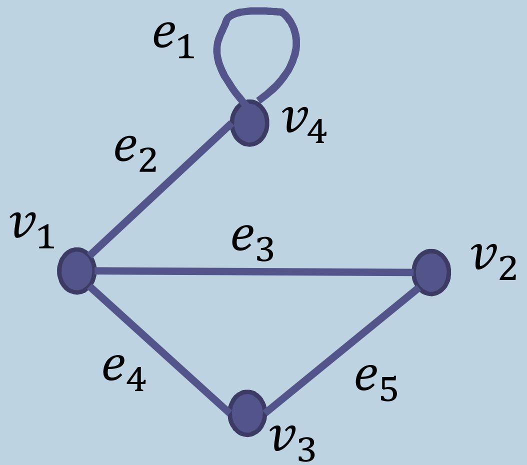
1. Ορισμός για Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός:

Ο **πίνακας πρόσπτωσης** (ή **μητρώο εφαπτόμενων ακμών**) ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n, |E|=m είναι ένας n x m πίνακας που ορίζεται ως:

$$\mathrm{A}_{n\times m} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν η κορυφη } v_i \text{ ειναι ακρο της } e_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα πρόσπτωσής



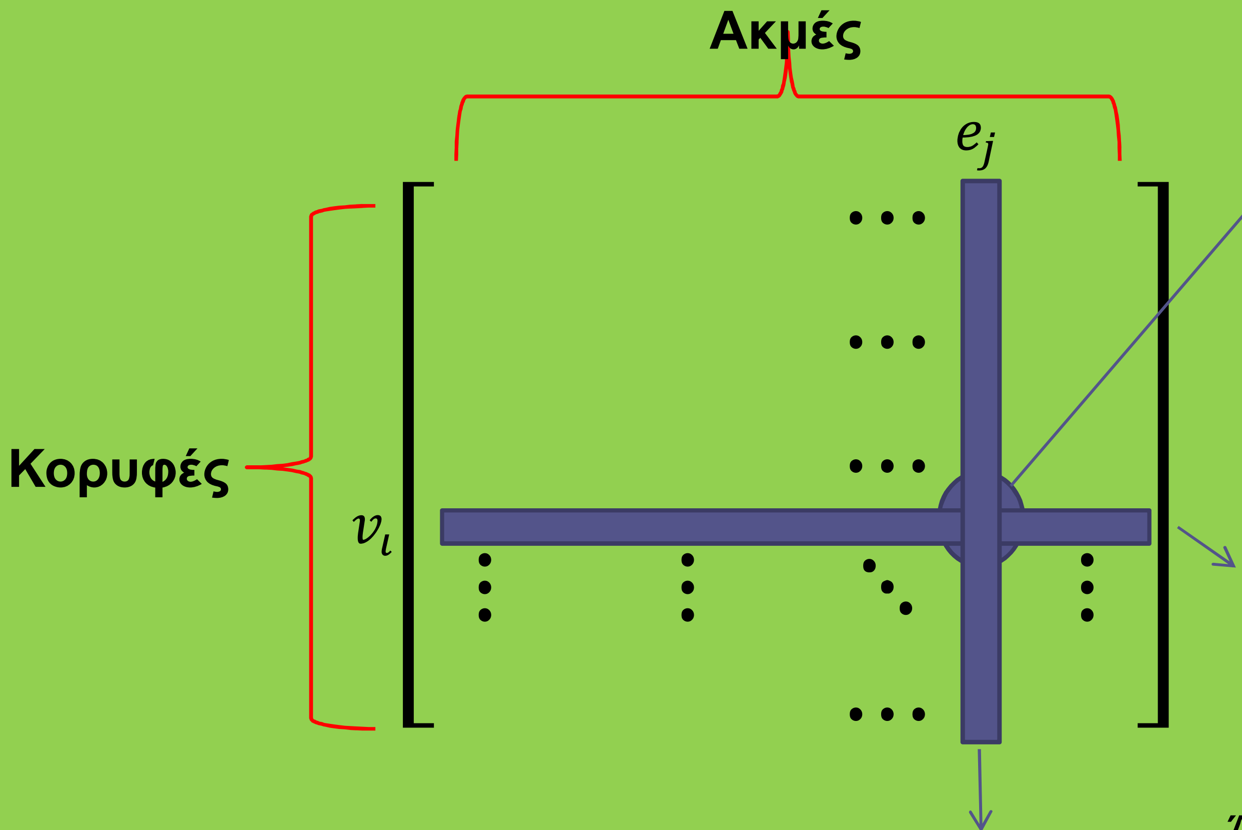
$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Β. Θεωρία

2. Πίνακας Πρόσπτωσης

2. Ορισμός για Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα πρόσπτωσης σε **απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα** είναι η ακόλουθη:



Το στοιχείο $a_{i,j}$ είναι
0: αν η ακμή e_j δεν είναι άκρο της v_i
1: αν η ακμή e_j είναι άκρο της v_i

Άθροισμα των στοιχείων της γραμμής i ισούται με $d(v_i)$

ΠΛΗΘΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: nm

Μία στήλη έχει:
- 2 άσσους
- n-2 μηδενικά

Άθροισμα όλων των στοιχεί-ων του πίνακα ισούται με $2m$

Β. Θεωρία

2. Πίνακας Πρόσπτωσης

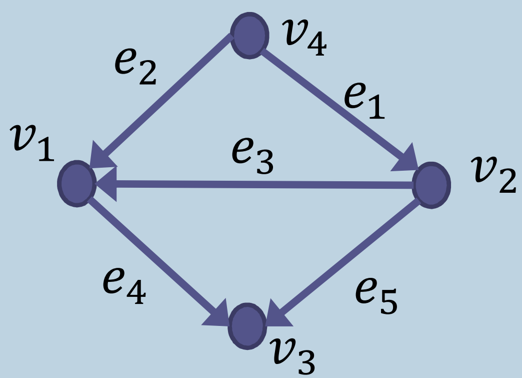
2. Ορισμός για Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός:

Ο **πίνακας πρόσπτωσης** (ή **μητρώο εφαπτόμενων ακμών**) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n, |E|=m είναι ένας n x m πίνακας που ορίζεται ως:

$$A_{n\times m} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \eta\ \kappa o\rho\upsilon\varphi\eta\ v_i\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ \alpha\rho\chi\eta\ \tau\eta\varsigma\ e_j \\ -1, & \alpha\nu\ \eta\ \kappa o\rho\upsilon\varphi\eta\ v_i\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ \pi\varepsilon\rho\alpha\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ e_j \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα πρόσπτωσής



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Διαπιστώστε τι ιδιότητα έχουν τα γραφήματα που αντιστοιχούν στους ακόλουθους πίνακες γειτνίασης (θεωρούμε ότι n≥2)

1. $\mathrm{A}_{n\times n} = \left(\mathrm{a}_{i,j}\right) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 2, & i = j \end{cases}$

2. $\mathrm{A}_{n\times n} = \left(\mathrm{a}_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$

3. $\mathrm{A}_{n\times n} = \left(\mathrm{a}_{i,j}\right) = \begin{cases} 1, & i = j+1, j = 1, \dots, n-1 \\ 1, & i = j-1, j = 2, \dots n \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Διαπιστώστε τι ιδιότητα έχουν τα γραφήματα που αντιστοιχούν στους ακόλουθους πίνακες γειτνίασης (θεωρούμε ότι n:άρτιος≥2)

1. $A_{n\times n} = (a_{i,j}) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1, & i \neq j, 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, 1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ 1, & i \neq j, \frac{n}{2} < i \leq n, \frac{n}{2} < j \leq n \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$

2. $A_{n\times n} = (a_{i,j}) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, 1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ 0, & \frac{n}{2} < i \leq n, \frac{n}{2} < j \leq n \\ 1, & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$

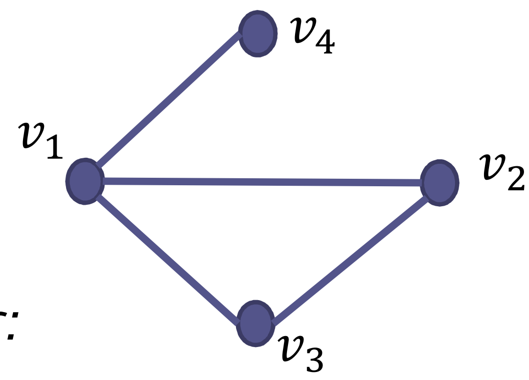
Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Να σχεδιαστεί ένα απλό συνδεδεμένο μη-κατευθυνόμενο γράφημα, χωρίς ανακυκλώσεις, για το οποίο ο πίνακας γειτνίασης και ο πίνακας πρόσπτωσης είναι ίδιοι όταν τηρείται η ίδια διάταξη των κορυφών και στους δύο πίνακες (εξαιρείται το τετριμμένο γράφημα).

Δ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 4

Για μη-κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς ανακυκλώσεις, αν Μ είναι ο πίνακας πρόσπτωσης, να εξετάσετε τι αναπαριστούν (i) τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $M \cdot M^T$, και (ii) τα μη διαγώνια στοιχεία του $M \cdot M^T$. Υπενθυμίζεται ότι M^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του Μ.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1



Στο ακόλουθο γράφημα εξετάστε αν ισχύουν οι ακόλουθες Προτάσεις που αφορούν τον πίνακα γειτνίασης Α του γραφήματος:

1. Το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα ισούται με 8

2. Το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του A^2 ισούται με 8

3. Το στοιχείο (2,2) του πίνακα A^3 ισούται με 2

4. Κανένα στοιχείο του πίνακα $A+A^2$ δεν είναι ίσο με 0

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Έστω Α ο πίνακας γειτνίασης και Π ο πίνακας πρόσπτωσης ενός μη κατευθυντικού (μη κατευθυνόμενου) απλού γραφήματος.

1. Το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης γραμμής του Α είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης στήλης.

2. Ο αριθμός των άσσων του Α είναι άρτιος.

3. Το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης γραμμής του Π είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της *i*-οστης στήλης.

4. Είναι δυνατόν να υπάρχει στήλη στον Π μόνο με μηδενικά.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 3

Έστω K_n το πλήρες γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές, A ο πίνακας γειτνίασης του K_n, και M ο πίνακας πρόσπτωσης του K_n. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

1. Ο πίνακας γειτνίασης A περιέχει μόνο 1.

2. Ο αριθμός των στοιχείων του πίνακα πρόσπτωσης M είναι ίσος με $n^2(n-1) / 2$.

3. Ο αριθμός των 0 στον πίνακα πρόσπτωσης M είναι ίσος με $3\binom{n}{3}$.

4. Το αθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του Α ισούται με n

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Έστω Α ο πίνακας γειτνίασης του K_5. Συμβολίζουμε με d_n την κοινή τιμή των διαγωνίων στοιχείων του A^n και με a_n την κοινή τιμή των μη διαγωνίων στοιχείων του A^n. Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι ισχύουν τα εξής (α) $a_{n+1}=d_n+3a_n$ (β) $d_{n+1}=4a_n$

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Γράψτε τον πίνακα γειτνίασης A για το γράφημα G που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα και εξετάστε τη σχέση

(i) των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα A^2 με τους βαθμούς των κορυφών του G και

(ii) του ίχνους του πίνακα A^3 (*ίχνος* ενός πίνακα είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του) με τον αριθμό των τριγώνων (κύκλων μήκους *3*) του G.