ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ26

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) *Ο αριθμός των υποσυνόλων με τουλάχιστον 2 στοιχεία ενός συνόλου με n στοιχεία είναι:*

1. $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n-1}$

2. 2^n-n-1

3. ίσος με το πλήθος των n-ψήφιων δυαδικών αριθμών που έχουν τουλάχιστον δύο άσσους.

4. ίσος με το πλήθος των n-ψήφιων δυαδικών αριθμών που αρχίζουν με άσσο και τελειώνουν με 0.

(2) Το πλήθος των τρόπων να κατέβουν 6 διακεκριμένα άτομα στις 4 επόμενες στάσεις του μετρό, έτσι ώστε στην 1η στάση να κατέβει περιττό πλήθος ατόμων και στην 2η στάση να κατέβει άρτιο πλήθος ατόμων είναι ίσο με:

1. Το συντελεστή του x^6 στην παράσταση
$$\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)\left(x+x^3+x^5+\cdots\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^2$$
2. Το συντελεστή του $x^6/6!$ στην παράσταση
$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$
3. Το συντελεστή του $x^6/6!$ στην παράσταση
$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^2$$
4. Το συντελεστή του $x^6/6!$ στην παράσταση
$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^2$$

(3) Δίδεται το σύνολο προτασιακών τύπων: $T=\{p_1\wedge p_2\to p_3,\ p_1\wedge\neg p_2,\ \neg p_1\to p_2\}$

1. $T\vDash p_1\to p_1$

2. $T\vDash p_2\to\neg p_1$

3. $T\vDash p_1\vee p_2\to\neg p_3$

4. $T\vDash p_2\wedge\neg p_2\to p_1$

(4) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Ο τύπος $\exists x \forall y [x \neq y \rightarrow P(x,y)]$

1. αληθεύει στο γράφημα K_4
2. αληθεύει στο γράφημα $K_{1,3}$
3. αληθεύει στο γράφημα $K_{2,3}$
4. αληθεύει στο γράφημα K_1

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών υπάρχει η ακμή από την x στην y. Ο τύπος $\exists x M(x)$ ικανοποιείται στο γράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1,v_2\}$ και σύνολο ακμών $\{(v_1,v_1),(v_2,v_1),(v_2,v_2)\}$ αν η συντομογραφία M(x) ορίζεται ως:

1. $M(x) = P(x,x)$
2. $M(x) = \exists y P(x,y)$
3. $M(x) = \exists y (x \neq y \wedge P(y,x) \wedge P(x,y))$
4. $M(x) = \exists y (P(x,y) \wedge \forall w (P(x,w) \rightarrow w = y))$

(6) Έστω A ο πίνακας γειτνίασης και M ο πίνακας προσπτώσεως του γραφήματος C_n. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Το άθροισμα των στοιχείων του A ισούται με 2n
2. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι 2n
3. Το άθροισμα των στοιχείων του M ισούται με 2n
4. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα M ισούται με n-1.

(7) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που περιέχει σημείο κοπής

1. Το γράφημα μπορεί να περιέχει κύκλο Euler.

2. Το γράφημα μπορεί να περιέχει κύκλο Hamilton.

3. Το γράφημα δεν περιέχει γέφυρες.

4. Η αφαίρεση του σημείου κοπης (και των προσκείμενων ακμών) καθιστά το γράφημα μη συνδεόμενο.

(8) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα αληθεύουν;

1. Κάθε υπογράφημα ενός συνδεόμενου γραφήματος είναι συνδεόμενο.

2. Κάθε επαγόμενο υπογράφημα του K_n, $n \geq 2$ είναι πλήρες

3. Αν ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό k, τότε κάθε υπογράφημά του έχει χρωματικό αριθμό k.

4. Αν ένα γράφημα είναι πλήρες διμερές, τότε κάθε υπογράφημά του είναι πλήρες διμερές.

(9) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα αληθεύουν;

1. Κάθε υπογράφημα ενός συνδεόμενου γραφήματος είναι συνδεόμενο.

2. Κάθε επαγόμενο υπογράφημα του K_n είναι πλήρες.

3. Αν ένα γράφημα έχει n! αυτομορφισμούς, τότε κάθε επαγόμενο υπογράφημα του είναι πλήρες.

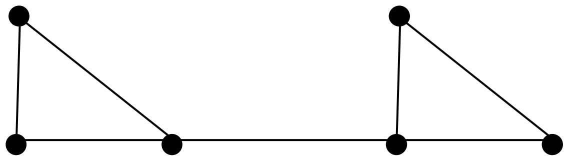
4. Αν ένα γράφημα έχει n!m! αυτομορφισμούς, τότε δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους

Β’ΜΕΡΟΣ

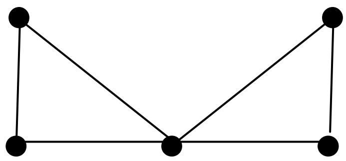
Άσκηση 1 (ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ)

(Ερώτημα 1)
(α) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το K_6 έχει το K100;

(β) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το ακόλουθο έχει το K100;



(γ) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το ακόλουθο έχει το K100;



(Ερώτημα 2) Ένα φορτίο αποτελείται από τρία διαφορετικά είδη κιβωτίων, 20 από το κιβώτιο τύπου Α (με βάρος 100 κιλά), 10 από το κιβώτιο τύπου Β (με βάρος 500 κιλά) και 14 από το κιβώτιο Γ (με βάρος 1000 κιλά). Σχηματίστε τις γεννήτριες συναρτήσεις και προσδιορίστε τους όρους των οποίων οι συντελεστές δίνουν:

a. Τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να φορτωθούν 10 από τα κιβώτια σε ένα φορτηγό, αν υπάρχει περιορισμός να φορτωθούν το λιγότερο 5 από τα Α, το πολύ 5 από τα Β και περιττό πλήθος από τα Γ.
b. Τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να φορτωθεί ένα φορτηγό αν το ωφέλιμο φορτίο του είναι 5 τόνοι (χωρίς τους περιορισμούς του υποερωτήματος 1)

Άσκηση 2 (ΛΟΓΙΚΗ)

(Ερώτημα 1)
Δείξτε ότι $\{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi), \varphi \to (\chi \to \psi), \varphi \to \chi\} \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού.

(Ερώτημα 2)
Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Στην γλώσσα αυτή:

(1) Ερμηνεύστε τις συντομογραφίες:
  a. $D(x) = \exists y[P(x,y) \wedge \forall w(P(x,w) \to w = y)]$
  b. $R(x) = \exists y \exists z[P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z \wedge \forall w(P(x,w) \to w = y \vee w = z)]$

(2) και έπειτα τις προτάσεις:
  a. $\varphi = \forall x[R(x) \to \exists y \exists z(D(y) \wedge D(z) \wedge P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge y \neq z)]$

(3) κατασκευάστε ένα γράφημα 6 κορυφών που αληθεύει ο φ

Άσκηση 3 (ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΩΝ)

Έστω *G* απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που δεν είναι συνδεόμενο. Να δείξετε ότι στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$, κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται είτε με ακμή είτε με μονοπάτι μήκους 2.