

# ΠΛΗ20

## ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

### Μάθημα 1.4: Διανομές σε Υποδοχές

Δημήτρης Ψούνης



[www.psounis.gr](http://www.psounis.gr)



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### A. Σκοπός του Μαθήματος

#### B. Θεωρία

##### 1. Διανομές σε Υποδοχές

1. Διανομή Ομοίων Αντικειμένων σε Υποδοχές
2. Διανομή Διαφορετικών Αντικειμένων χωρίς σειρά στις Υποδοχές
3. Διανομή Διαφορετικών Αντικειμένων με σειρά στις Υποδοχές

##### 2. Γνωστά Προβλήματα Διανομών

1. Εξίσωση

#### Γ. Μεθοδολογία Ασκήσεων

1. Διανομή Ομάδων Ομοίων
2. Διανομή Ομοίων με Περιορισμό
3. Διάταξη με Εμφύτευση Υποδοχών

#### Δ. Ασκήσεις

1. Ασκήσεις Κατανόησης
2. Ερωτήσεις
3. Εφαρμογές



## A. Σκοπός του Μαθήματος

### Επίπεδο A

- Οι τρεις τύποι διανομών και οι προϋποθέσεις για την χρήση του αντίστοιχου τύπου
- Οι μεθοδολογίες για την διαχείριση των περιορισμών

### Επίπεδο B

- Γνωστά Προβλήματα Διανομών

### Επίπεδο Γ

- (-)



## B. Θεωρία

### Στόχος της Συνδυαστικής

- Στόχος της Συνδυαστικής είναι να μετράμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ένα (περίπλοκο) γεγονός.
- Για να το κάνουμε αυτό έχουμε τρεις τρόπους:
  - Την καταμέτρηση των τρόπων «με το χέρι» όπου καταγράφουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει το γεγονός και έπειτα τους μετράμε.
  - Τις βασικές αρχές απαρίθμησης, δηλαδή τον κανόνα του αθροίσματος και του γινομένου, όπου σπάμε το βασικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως το άθροισμα ή το γινόμενο των επιμέρους αποτελεσμάτων.
  - Τους μαθηματικούς τύπους των μοντέλων της συνδυαστικής, που είναι μαθηματικοί τύποι που εφαρμόζονται μόνο κάτω από καθορισμένες προϋποθέσεις. Πρόκειται για τους τύπους των συνδυασμών (Μάθημα 1.2) των διατάξεων (Μάθημα 1.3) και των διανομών σε υποδοχές (Μάθημα 1.4)
- Οι πιο δύσκολες ασκήσεις είναι αυτές που απαιτούν να συνδυάσουμε τους παραπάνω τρόπους.

## B. Θεωρία

### 1. Διανομές σε Υποδοχές

Οι τύποι των διανομών υπολογίζουν άμεσα την λύση σε ένα πρόβλημα που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

- Θεωρούμε ότι έχουμε  $n$  αντικείμενα και  $m$  διακεκριμένες υποδοχές (κουτιά).
- Έπειτα διανέμουμε (μοιράζουμε) ΌΛΑ τα αντικείμενα στις υποδοχές

- Το διανέμω (ή μοιράζω) είναι το ρήμα – κλειδί που θα συναντήσουμε σε πολλές εκφωνήσεις και θα καταλαβαίνουμε ότι είμαστε σε διανομές

## B. Θεωρία

### 1. Διανομές σε Υποδοχές

Οι τύποι των διανομών χωρίζονται σε περιπτώσεις, ανάλογα με τον τύπο των αντικειμένων ( $n$ ) που μοιράζουμε στις υποδοχές:

- Αν όλα τα αντικείμενα είναι όμοια,

- Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής ομοίων:  $\binom{n+m-1}{n}$

- Αν όλα τα αντικείμενα είναι διαφορετικά και η σειρά στις υποδοχές δεν έχει σημασία

- Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών χωρίς σειρά:  $m^n$

- Αν όλα τα αντικείμενα είναι διαφορετικά και η σειρά στις υποδοχές έχει σημασία

- Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών με σειρά:  $\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$

## B. Θεωρία

### 1. Διανομές σε Υποδοχές

#### 1. Διανομή Ομοίων Αντικείμενων σε Υποδοχές

Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής ομοίων όταν:

1. Τα αντικείμενα είναι ΌΛΑ όμοια μεταξύ τους.
2. Κάθε υποδοχή μπορεί να πάρει από κανένα έως όλα τα αντικείμενα

Τότε οι δυνατοί τρόποι διανομής δίνονται από τον ακόλουθο τύπο (όπου  $n$  το πλήθος των αντικείμενων και  $m$  το πλήθος των υποδοχών):

$$\binom{n+m-1}{n}$$

## B. Θεωρία

### 1. Διανομές σε Υποδοχές

#### 2. Διανομή Διαφορετικών Αντικείμενων σε Υποδοχές Χωρίς Σειρά

Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών χωρίς σειρά όταν:

1. Τα αντικείμενα είναι ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους.
2. Κάθε υποδοχή μπορεί να πάρει από κανένα έως όλα τα αντικείμενα
3. Η σειρά των αντικειμένων σε κάθε υποδοχή δεν έχει σημασία

Τότε οι δυνατοί τρόποι διανομής δίνονται από τον ακόλουθο τύπο (όπου  $n$  το πλήθος των αντικείμενων και  $m$  το πλήθος των υποδοχών):

$$m^n$$

Ο παραπάνω τύπος υπολογίζεται μέσω της υπολογιζόμενης ποσότητας  $C(A,B)=A!/B!(A-B)!$ , δηλαδή υπολογίζεται ως:

$$\binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(n+m-1-n)!} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

## B. Θεωρία

### 1. Διανομές σε Υποδοχές

#### 3. Διανομή Διαφορετικών Αντικειμένων σε Υποδοχές Με Σειρά

Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών με σειρά όταν:

1. Τα αντικείμενα είναι ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους.
2. Κάθε υποδοχή μπορεί να πάρει από κανένα έως όλα τα αντικείμενα
3. Η σειρά των αντικειμένων σε κάθε υποδοχή έχει σημασία

Τότε οι δυνατοί τρόποι διανομής δίνονται από τον ακόλουθο τύπο (όπου  $n$  το πλήθος των αντικειμένων και  $m$  το πλήθος των υποδοχών):

$$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$$

## B. Θεωρία

### 2. Γνωστά Προβλήματα Διανομών

#### 1. Εξίσωση

Πόσες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40$$

Όπου  $x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0$

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η διανομή 40 όμοιων αντικειμένων (οι 40 μονάδες) σε 3 διακεκριμένες υποδοχές (οι 3 μεταβλητές). Άρα οι λύσεις είναι:

$$\binom{40+3-1}{40} = \binom{42}{40}$$

## Γ. Μεθοδολογία

### 1. Διανομή ομάδων ομοίων αντικειμένων

#### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Η διανομή ομάδων ομοίων αντικειμένων δεν καλύπτεται από κάποιο τύπο, και την διαχειριζόμαστε ως εξής:

Διανέμουμε ξεχωριστά κάθε ομάδα ομοίων αντικειμένων ως διανομή ομοίων. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου.

#### Παράδειγμα:

Έστω 5 πράσινοι, 10 κόκκινοι και 8 άσπροι βόλοι. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους διανείμουμε σε 3 παιδιά.

#### ΛΥΣΗ:

- Η διανομή των 5 όμοιων πράσινων βόλων στις 3 υποδοχές γίνεται με  $\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5}$
- Η διανομή των 10 όμοιων κόκκινων βόλων στις 3 υποδοχές γίνεται με:  $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10}$
- Η διανομή των 8 όμοιων άσπρων βόλων στις 3 υποδοχές γίνεται με:  $\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8}$

Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι:

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{12}{10} \cdot \binom{10}{8}$$

## Γ. Μεθοδολογία

### 2. Διανομή ομοίων αντικειμένων υπό περιορισμό

#### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Η διανομή ομοίων υπό περιορισμό, γίνεται κάνοντας διαχείριση πρώτα του περιορισμού και έπειτα γίνεται το μοίρασμα των υπολοίπων αντικειμένων.

Γενικά κάνουμε σπάσιμο του προβλήματος σε υποπροβλήματα και έπειτα συνδυασμός των λύσεων είτε με τον κανόνα του αθροίσματος είτε με τον κανόνα του γινομένου.

#### Παράδειγμα:

Έστω 100 κόκκινοι βόλοι. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους μοιράσουμε σε 3 παιδιά έτσι ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 5 βόλους.

#### ΛΥΣΗ:

- Δίνουμε πρώτα 5 βόλους σε κάθε παιδί για να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό. Δίνουμε έτσι 15 βόλους.
- Απομένουν 85 βόλοι τους οποίους μοιράζουμε στα 3 παιδιά με

$$\binom{85+3-1}{85} = \binom{87}{85}$$

ως διανομή ομοίων.

## Γ. Μεθοδολογία

### 3. Διατάξεις με εμφύτευση υποδοχών

#### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Ένας ιδιαίτερα δύσκολος περιορισμός είναι όταν μας ζητείται να έχουμε περισσότερα από 2 αντικείμενα που δεν είναι σε σειρά. Τότε:

A) Τοποθετούμε τα «προβληματικά» αντικείμενα, έστω τα A, σε σειρά.

B) Βάζουμε μια υποδοχή ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικά A (συχνά και στην αρχή και στο τέλος της σειράς)

Γ) Τοποθετούμε μία θέση σε κάθε υποδοχή για την ικανοποίηση των περιορισμών

Δ) Μοιράζουμε τις υπόλοιπες θέσεις στον περιορισμό ως διανομή ομοίων

E) Διατάσσουμε τα «άλλα» αντικείμενα, έστω τα B, στις θέσεις.

## Γ. Μεθοδολογία

### 3. Διατάξεις με εμφύτευση υποδοχών

5 μη διακεκριμένοι πράσινοι βόλοι και 9 μη διακεκριμένοι κόκκινοι βόλοι πρόκειται να τοποθετηθούν σε μία σειρά. Να υπολογιστούν οι τρόποι για να γίνει η τοποθέτηση, αν δεν πρέπει να έχουμε πράσινους βόλους σε διαδοχικές θέσεις.

#### ΛΥΣΗ:

A) Τοποθετούμε τους πράσινους βόλους σε σειρά (με 1 τρόπο).

ΠΠΠΠΠ

B) Βάζουμε μια υποδοχή ανάμεσα σε κάθε δύο Π. Τοποθετούμε έτσι 6 θέσεις  
υΠυΠυΠυΠυΠυ

Γ) Τοποθετούμε μία θέση σε κάθε υποδοχή που είναι μεταξύ 2 Π. Τοποθετούμε έτσι 4 θέσεις.

Δ) Μοιράζουμε τις υπόλοιπες 5 θέσεις στις 6 υποδοχές. Ως διανομή ομοίων οι τρόποι είναι

$$\binom{5+6-1}{5} = \binom{10}{5}$$

E) Οι 9 κόκκινοι βόλοι τοποθετούνται στις 9 θέσεις (με 1 τρόπο).

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι:

$$1 \cdot \binom{10}{5} \cdot 1 = \binom{10}{5}$$

## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 1

Υπολογίστε:

(A) Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 13 διαφορετικά βιβλία σε 13 φοιτητές

(B) Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 10 κέρματα του ενός ευρώ σε 20 άτομα

(Γ) Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν 100 επιβάτες ενός λεωφορείου στις 4 στάσεις που απομένουν, θεωρώντας ότι έχει σημασία η σειρά που κατεβαίνουν τα άτομα στις στάσεις.

(Δ) Με πόσους τρόπους μπορώ να κατασκευάσω μια φράση 4 το πολύ λέξεων χρησιμοποιώντας ακριβώς μία φορά κάθε γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου.

(E) Με πόσους τρόπους μπορώ να τοποθετήσω 20 διακεκριμένα βιβλία σε 5 ράφια μιας βιβλιοθήκης αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι

## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 2

Σε ένα τραίνο επιβιβάζονται 10 επιβάτες. Το τραίνο σταματά συνολικά σε 12 σταθμούς (περιλαμβάνοντας τον τερματικό σταθμό). Να υπολογίσετε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η αποβίβαση των επιβατών όταν

1. Μας ενδιαφέρει μόνο το πλήθος των επιβατών που κατεβαίνουν σε κάθε στάση
2. Μας ενδιαφέρει εκτός από το πλήθος και το ποιοι επιβάτες κατεβαίνουν σε κάθε στάση αλλά και η σειρά αποβίβασής τους.



## Δ. Ασκήσεις

### Ασκηση Κατανόησης 3

Διανέμουμε 20 πράσινους βόλους σε 3 παιδιά. Να υπολογιστούν οι τρόποι να γίνει η διανομή όταν:

1. Το 1<sup>ο</sup> παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 4 βόλους.
2. Το 1<sup>ο</sup> παιδί πρέπει να πάρει το πολύ 2 βόλους.
3. Κάθε παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 3 βόλους
4. Το 1<sup>ο</sup> παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 2 και το πολύ 5 βόλους.



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 1

Ο αριθμός των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης  $x_1 + \dots + x_m = n, x_i \geq 0, i = 1, \dots, m$  είναι:

1. Ο αριθμός των συνδυασμών  $m$  αντικειμένων από  $n$
2. Ο αριθμός των τρόπων διανομής  $n$  μη διακεκριμένων αντικειμένων σε  $m$  διακεκριμένες υποδοχές
3. Ο αριθμός των διατάξεων  $n+m-1$  αντικειμένων, όταν τα  $n$  από αυτά αποτελούν μια ομάδα μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων και τα υπόλοιπα μία άλλη ομάδα επίσης μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων
4. Ίσος με το συντελεστή του  $x^n$  στην παράσταση  $(1+x)^{n+m-1}$



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 2

Οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν 10 όμοιες (μη διακεκριμένες) καραμέλες σε 3 διακεκριμένα παιδιά είναι:

1. Ίσος με τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 10 από 12 παιδιά όπου έχει σημασία η σειρά επιλογής
2. Ίσος με τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 10 από 12 παιδιά χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής
3. Ίσος με τους τρόπους επιλογής 10 χρωμάτων από 3 χρώματα όπου επιτρέπεται η επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής
4. Ίσος με τους τρόπους επιλογής 3 χρωμάτων από 10 χρώματα όπου επιτρέπεται η επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής



## Δ. Ασκήσεις

### Ερωτήσεις 3

Το πλήθος των διαφορετικών ζαριών που υπάρχουν, όταν ρίχνουμε δύο μη διακεκριμένα ζάρια είναι ίσοι με:

1. Το πλήθος των τρόπων διανομής 2 μη διακεκριμένων αντικειμένων σε 6 υποδοχές.
2. Το πλήθος των συμβολοσειρών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με 5A και 2B.
3. Την επιλογή 5 αντικειμένων από 7 διακεκριμένα αντικείμενα χωρίς επανάληψη.
4. Την διάταξη 5 μη διακεκριμένων πράσινων βόλων και 2 μη διακεκριμένων κόκκινων βόλων.



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 1

Έχουμε στη διάθεσή μας 10 μπάλες κόκκινου χρώματος, 8 μπάλες πράσινου χρώματος και 6 μπάλες μπλε χρώματος. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν όλες οι μπάλες σε τρία διακεκριμένα παιδιά (χωρίς να έχει σημασία η σειρά με την οποία δίνονται οι μπάλες σε κάθε παιδί) ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον μια μπάλα κάθε χρώματος.



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 2

Σε ένα ράφι ενός σούπερ-μάρκετ βρίσκονται 8 κονσέρβες ενός είδους, 12 ενός δεύτερου και 10 ενός τρίτου. Υπολογίστε τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να αγοραστούν όλες οι κονσέρβες από τρεις πελάτες και κάθε ένας αγόρασε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος.



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 3

Σε 10 διακεκριμένα παιδιά πρόκειται να μοιραστούν 15 όμοιες (μη διακεκριμένες) σοκολάτες και 10 ακόμη διαφορετικά μεταξύ τους (διακεκριμένα) δώρα. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να μοιραστούν οι σοκολάτες και τα δώρα, ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον μία σοκολάτα.



## Δ. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 4

10 γυναίκες και 20 άνδρες πρόκειται να τοποθετηθούν σε μία σειρά, έτσι ώστε να μην βρίσκονται γυναίκες σε διαδοχικές θέσεις. Να υπολογίσετε τους τρόπους όταν

- A) Οι άνδρες θεωρούνται μη διακεκριμένοι και οι γυναίκες μη διακεκριμένες
- B) Οι άνδρες θεωρούνται μη διακεκριμένοι και οι γυναίκες διακεκριμένες
- Γ) Οι άνδρες θεωρούνται διακεκριμένοι και οι γυναίκες μη διακεκριμένες
- Δ) Οι άνδρες θεωρούνται διακεκριμένοι και οι γυναίκες διακεκριμένες.