ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μάθημα 1.3:
Διατάξεις

Δημήτρης Ψούνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Οι τέσσερις τύποι διατάξεων και οι προϋποθέσεις για την χρήση του αντίστοιχου τύπου
- Οι μεθοδολογίες για την διαχείριση των περιορισμών

Επίπεδο Β
- Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία
Στόχος της Συνδυαστικής

- Στόχος της Συνδυαστικής είναι να μετράμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ένα (περίπλοκο) γεγονός.
- Για να το κάνουμε αυτό έχουμε τρεις τρόπους:
  - Την καταμέτρηση των τρόπων «με το χέρι» όπου καταγράφουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει το γεγονός και έπειτα τους μετράμε.
  - Τις βασικές αρχές απαρίθμησης, δηλαδή τον κανόνα του αθροίσματος και του γινομένου, όπου σπάμε το βασικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως το άθροισμα ή το γινόμενο των επιμέρους αποτελεσμάτων.
  - Τους μαθηματικούς τύπους των μοντέλων της συνδυαστικής, που είναι μαθηματικοί τύποι που εφαρμόζονται μόνο κάτω από καθορισμένες προϋποθέσεις. Πρόκειται για τους τύπους των συνδυασμών (Μάθημα 1.2) των **διατάξεων (Μάθημα 1.3)** και των διανομών σε υποδοχές (Μάθημα 1.4)
- Οι πιο δύσκολες ασκήσεις είναι αυτές που απαιτούν να συνδυάσουμε τους παραπάνω τρόπους.

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις

- Στα προβληματα συνδυαστικής συχνά στην δομή της λύσης έχουμε k θέσεις (παύλες) και σε κάθε θέση θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο από n διαθέσιμα. Το πρώτο ερώτημα που πρέπει να απαντάμε είναι αν εχει σημασία η σειρά των αντικειμένων ή όχι:
  - Αν η σειρά έχει σημασία, μιλάμε για ένα πρόβλημα διατάξεων. Για παράδειγμα αν πρέπει να κατασκευάσουμε μία ΛΕΞΗ μήκους 4 από το ελληνικό αλφάβητο η σειρά των αντικειμένων (γράμματα) έχει σημασία (αφού αν εναλλάξουμε δύο γράμματα σε μία λέξη προκύπτει διαφορετική λέξη)
  - Αν η σειρά ΔΕΝ έχει σημασία, μιλάμε για ένα πρόβλημα συνδυασμών. Για παράδειγμα στα ΖΑΡΙΑ η σειρά των αντικειμένων δεν έχει σημασία (π.χ. η ζαριά 1-2 με την ζαριά 2-1 είναι ίδια)

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις

Οι τύποι των διατάξεων υπολογίζουν άμεσα την λύση σε ένα πρόβλημα που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

- Θεωρούμε ότι έχουμε έναν **«κουβά»** που περιέχει **αντικείμενα**
- Βάζουμε το χέρι στον κουβά και **επιλέγουμε** μερικά από αυτά
- Έπειτα **βάζουμε τα αντικείμενα αυτά σε μια σειρά** (σε αντίθεση με τους συνδυασμούς που δεν τα βάζουμε σε σειρά)
  - Τέτοια προβλήματα είναι οι ΛΕΞΕΙΣ, οι ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, οι ΑΡΙΘΜΟΙ, οι ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΕΣ.
- Το **διατάσσω (ή βάζω σε σειρά)** είναι το ρήμα – κλειδί που θα συναντήσουμε σε πολλές εκφωνήσεις και θα καταλαβαίνουμε ότι είμαστε σε διατάξεις. Παρατηρήστε ότι όταν κάνουμε μια **διάταξη αντικειμένων** έχει σημασία όχι μόνο ποια αντικείμενα επιλέγουμε αλλά και η σειρά με την οποία τα επιλέγουμε.

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις

Αφού έχουμε καταλάβει ότι έχουμε έναν πρόβλημα διάταξης, υπάρχουν τέσσερις τύποι που μοντελοποιούν αντίστοιχα προβλήματα:

- Οι διατάξεις k αντικειμένων από n χωρίς επανάληψη
  - Όπου οι λύσεις θα δίνονται από την σχέση $P(n,k)$
- Οι διατάξεις k αντικειμένων από n με επανάληψη
  - Όπου οι λύσεις θα δίνονται από την σχέση n^k
- Οι μεταθέσεις n διαφορετικών στοιχείων
  - Όπου οι λύσεις θα δίνονται από την σχέση $n!$
- Οι μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων
  - Όπου οι λύσεις θα δίνονται από την σχέση $\frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_k!}$

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις
1. Διατάξεις Χωρίς Επανάληψη

Έχουμε ένα πρόβλημα διατάξεων χωρίς επανάληψη όταν:

1. Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2. Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΟΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3. Τοποθετούμε k από αυτά σε μια σειρά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί το πολύ μία φορά)

Τότε οι δυνατοί τρόποι διάταξης δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Οι τύποι των διατάξεων μπορούν να εξαχθούν και με έναν απλό κανόνα γινομένου. Π.χ. αν θέλω να κατασκευάσω μια διάταξη μήκους 4 από 10 διακεκριμένα αντικείμενα χωρίς επανάληψη, τότε οι τρόποι είναι:
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7=P(10,4)$

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις
2. Διατάξεις Με Επανάληψη

Έχουμε ένα πρόβλημα διατάξεων με επανάληψη όταν:
1. Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2. Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3. Συμπληρώνουμε k θέσεις ώστε σε κάθε θέση να μπορεί να επαναληφθεί το ίδιο στοιχείο (Δηλαδή στην λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές – από καμία εώς όλες τις θέσεις)

Τότε οι δυνατοί τρόποι διάταξης δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{n^k}$$

Γνωστά προβλήματα Διατάξεων με Επανάληψη είναι το ΠΡΟ-ΠΟ, οι ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙ-ΡΕΣ ενός αλφαβήτου, οι ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ κ.λπ.

Η **επανάληψη** είναι γνωστή και ως επανατοποθέτηση. Δηλαδή βγάζουμε ένα αντικείμενο από τον κουβά, το καταγράφουμε και έπειτα το επανατοποθετούμε στον κουβα και επιλέγουμε το επόμενο με την ίδια διαδικασία.

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις
3. Μεταθέσεις

Έχουμε ένα πρόβλημα μεταθέσεων όταν:
1. Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2. Έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα (ΌΛΑ διαφορετικά μεταξύ τους).
3. Τοποθετούμε και τα n σε μια σειρά, χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο στοιχείο (Δηλαδή διατάσσουμε ΌΛΑ τα αντικείμενα)

Τότε οι δυνατοί τρόποι διάταξης δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{n!}$$

Η έννοια της μετάθεσης έχει να κάνει με το γεγονός ότι διατάσσουμε ΌΛΑ τα αντικείμενα τα οποία έχουμε στην διάθεσή μας.

Παρατηρήστε ότι η μετάθεση n στοιχείων είναι το ίδιο πρόβλημα με την διάταξη n στοιχείων σε n θέσεις χωρίς επανάληψη. Πράγματι ισχύει: $\boxed{P(n,n)=n!}$

Β. Θεωρία
1. Διατάξεις
4. Μεταθέσεις Ομάδων Ομοίων Αντικειμένων

Έχουμε ένα πρόβλημα μεταθέσεων ομάδων ομοίων αντικειμένων όταν:
1. Η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία
2. Έχουμε n αντικείμενα που χωρίζονται σε k ομάδες ομοίων αντικειμένων (με την $1^η$ ομάδα να έχει q_1 αντικείμενα, η $2^η$ ομάδα έχει q_2 αντικείμενα …. η $k^η$ ομάδα έχει q_k αντικείμενα).
3. Τοποθετούμε και τα n σε μια σειρα (Δηλαδή διατάσσουμε ΌΛΑ τα αντικείμενα)

Τότε οι δυνατοί τρόποι διάταξης δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{\frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_k!}}$$

Γνωστά προβλήματα Μεταθέσεων Ομάδων είναι οι ΑΝΑΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜΙΑΣ ΛΕΞΗΣ

Ισχύει στον παραπάνω τύπο ότι: $q_1+q_2+\dots+q_k=n$

Β. Θεωρία
2. Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων
1. ΠΡΟΠΟ

Στο ΠΡΟΠΟ δίνονται 14 αγώνες και ζητείται να συμπληρώσουμε στον καθένα 1 ή Χ ή 2. Πόσες στήλες υπάρχουν;

ΛΥΣΗ:

Ως διατάξεις με επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\boxed{3^{14}=\dots=4.782.969}$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:
1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία (Πράγματι η λύση 1Χ12…1 είναι διαφορετική από την Χ112…1)
2. Έχουμε 3 διαφορετικά αντικείμενα (1 ή Χ ή 2)
3. Στην τελική μας λύση κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεχθεί οσεσδήποτε φορές

Β. Θεωρία
2. Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων
2. Τετραγωνικοί Πίνακες (χωρίς περιορισμούς)

Πόσοι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης 5x5 υπάρχουν με κάθε στοιχείο του πίνακα να είναι 0 ή 1;

ΛΥΣΗ:

Ως διατάξεις με επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\boxed{2^{25}}$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία (Πράγματι έχει σημασία η θέση κάποιου στοιχείου στον πίνακα)
2. Έχουμε n=2 διαφορετικά αντικείμενα (τους δύο αριθμούς 0 ή 1) και k=5*5=25 θέσεις.
3. Στην τελική μας λύση κάθε άντικείμενο μπορεί να επιλεχθεί οσεσδήποτε φορές (π.χ. ο αριθμός 0 μπορεί να επαναληφθεί και στις 25 θέσεις)

Β. Θεωρία
2. Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων
3. Αναγραμματισμοί μίας λέξης (χωρίς περιορισμούς)

Πόσες οι διαφορετικές λέξεις που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα γράμματα της λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ;

ΛΥΣΗ:

Ως μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων οι τρόποι είναι:

$$\boxed{\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}}$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία (είναι συμβολοσειρά)
2. Έχουμε n=8 αντικείμενα που χωρίζονται σε 5 ομάδες ομοίων αντικειμένων (3Α,2Π,1Ν,1Ο,1Ρ).
3. Στην τελική μας λύση διατάσσουμε ΌΛΑ τα αντικείμενα.

Β. Θεωρία
2. Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων
4. Συμβολοσειρές ενός αλφαβήτου (χωρίς περιορισμούς)

Πόσες συμβολοσειρές μήκους 5 του ελληνικού αλφαβήτου υπάρχουν;

ΛΥΣΗ:

Ως διατάξεις με επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\boxed{24^{5}}$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία (Πράγματι η συμβολοσειρα ΚΦΕΡΤ είναι διαφορετική από την ΕΦΚΡΤ)
2. Έχουμε n=24 διαφορετικά αντικείμενα (τα γράμματα) τα οποία τοποθετούμε στον κουβά και k=5 θέσεις.
3. Στην τελική μας λύση κάθε άντικείμενο μπορεί να επιλεχθεί οσεσδήποτε φορές (π.χ. το γράμμα Α μπορεί να επαναληφθεί και στις 5 θέσεις)

Β. Θεωρία
2. Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων
5. Δυαδικές Συμβολοσειρές (χωρίς περιορισμούς)

Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 υπάρχουν;

ΛΥΣΗ:

Ως διατάξεις με επανάληψη οι τρόποι είναι:

$$\boxed{2^{10}}$$

Η άσκηση αυτή είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης έχοντας ως αλφάβητο το {0,1} και 10 θέσεις.

Β. Θεωρία
2. Γνωστά Προβλήματα Διατάξεων
6. Δυαδικές Συμβολοσειρές (με ακριβώς k άσσους)

Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους;

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων (3 άσσοι και 7 μηδενικά):

$$\boxed{\frac{10!}{3!\cdot 7!}}$$

Για να οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει ότι:

1. Στην τελική λύση η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία (είναι συμβολοσειρά)
2. Έχουμε n=10 αντικείμενα που χωρίζονται σε 2 ομάδες ομοίων αντικειμένων (3 άσσοι και 7 μηδενικά).
3. Στην τελική μας λύση διατάσσουμε ΟΛΑ τα αντικείμενα.

Γ. Μεθοδολογία
1. Διάταξη ομοίων αντικείμενων

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Τα αντικείμενα από τα οποία επιλέγουμε μπορεί να είναι τριών κατηγοριών:
Α) Ομοια (= Μη διακεκριμένα). Προσοχή ότι με αυτήν την εκφώνηση εννοούμε ότι ΟΛΑ είναι όμοια.
Β) Ομάδες Ομοίων Αντικειμένων. Π.χ. έχω 5 κόκκινους, 4 άσπρους και 6 πράσινους βόλους, άρα έχω 3 ομάδες ομοίων αντικειμένων
Γ) Διαφορετικά. ΟΛΑ διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους. Μόνο σε αυτήν την περίπτωση μπορώ να χρησιμοποιήσω τους τύπους των συνδυασμών.

Γενικά όταν έχω να διατάξω όμοια αντικείμενα υπάρχει μόνο 1 τρόπος διότι κάθε άλλη λύση θα είναι ακριβώς ίδια με την πρώτη.

Παράδειγμα:

Έστω 50 μη διακεκριμένοι βόλοι. Με πόσους τρόπους μπορώ να διάταξω 5 από αυτούς

ΛΥΣΗ:

Με 1 τρόπο.

Γ. Μεθοδολογία
2. Αντικείμενα σε Σειρά

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Μας ζητείται να μετρήσουμε πόσες διατάξεις υπάρχουν που δύο συγκεκριμένα αντικείμενα είναι σε σειρά. Μετράμε πρώτα (με καταμέτρηση) με πόσους τρόπους τα δύο αντικείμενα τοποθετούνται σε διαδοχικές θέσεις και έπειτα διατάσσουμε τα υπόλοιπα αντικείμενα.

Γενικά όταν μας δίνουν μια διάταξη υπό περιορισμό, πρώτα μετράμε με πόσους τρόπους ικανοποιείται ο περιορισμός και έπειτα μετράμε με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα υπόλοιπα αντικείμενα στις υπόλοιπες θέσεις.

Παράδειγμα:

Πόσοι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ που τα 2Π είναι σε σειρά.

ΛΥΣΗ:

- Τα 2Π τοποθετούνται σε σειρά με 7 τρόπους (στις θέσεις 1-2,2-3,3-4,4-5,5-6,6-7,7-8)
- Στις υπόλοιπες 6 θέσεις τοποθετούμε τα γράμματα 3Α,1Ο,1Ρ,1Ν με

$$\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$$

ως διατάξεις ομάδων ομοίων αντικειμένων.

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι λέξεις είναι: $7\cdot\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$

Γ. Μεθοδολογία
3. Αντικείμενα όχι σε Σειρά

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Μας ζητείται να μετρήσουμε πόσες διατάξεις υπάρχουν που δύο συγκεκριμένα αντικείμενα δεν είναι σε σειρά. Μετράμε πρώτα (με καταμέτρηση) με πόσους τρόπους τα δύο αντικείμενα τοποθετούνται σε διαδοχικές θέσεις και έπειτα διατάσσουμε τα υπόλοιπα αντικείμενα.

Μπορεί να λυθεί και με ΑΦΑΙΡΕΣΗ που είναι γενική μεθοδολογία όταν μας ζητείται να μετρήσουμε κάτι «που ΔΕΝ έχει την ιδιοτητα». Μετράμε ως εξής (όλοι οι τρόποι)-(τρόποι που έχουν την ιδιότητα)

Παράδειγμα:

Πόσοι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ που τα 2Π δεν είναι σε σειρά.

Α' τρόπος:

- Τα 2Π τοποθετούνται σε μη διαδοχικές θέσεις με 21 τρόπους (στις θέσεις 1-3,1-4,1-5,1-6,1-7,1-8,2-4,2-5,2-6,2-7,2-8,3-5,3-6,3-7,3-8,4-6,4-7,4-8,5-7,5-8,6-8)
- Στις υπόλοιπες 6 θέσεις τοποθετούμε τα γράμματα 3Α,1Ο,1Ρ,1Ν με $\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$ ως διατάξεις ομάδων ομοίων αντικειμένων.

Άρα από τον κανόνα του γινομένου οι λέξεις είναι: $21\cdot\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$

Β'Τρόπος: Όλες οι λέξεις είναι: $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$

Οι συμβολοσειρές που τα 2Π είναι σε σειρά είναι: $7\cdot\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$

Συνεπώς οι συμβολοσειρές που τα 2Π δεν είναι σε σειρά είναι: $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}-7\cdot\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$

Γ. Μεθοδολογία
4. Συμβολοσειρές με τουλάχιστον ένα από κάποιο αντικείμενο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Μας ζητείται να κατασκευάσουμε διατάξεις που περιέχουν τουλ. ένα από κάποιο από τα διαθέσιμα αντικείμενα. Η ευθεία καταμέτρηση εδώ δεν δουλεύει γιατί «τουλάχιστον ένα» σημαίνει ή 1 ή 2 ή 3 ή…., άρα απαιτεί μια τεράστια περιπτωσιολογία.

Μπορεί να λυθεί όμως με ΑΦΑΙΡΕΣΗ που εφαρμόζεται με μεγάλη αποδοτικότητα εδώ, αφού το αντίθετο «του τουλάχιστον ένα» είναι το «κανένα». Άρα μετράμε «όλες οι λέξεις» – «οι λέξεις χωρίς το αντικείμενο»

Παράδειγμα:
Πόσες οι συμβολοσειρές μήκους 10 του ελληνικού αλφαβήτου που περιέχουν τουλάχιστον ένα Α
ΛΥΣΗ:
Όλες οι λέξεις μήκους 10 είναι: 24^{10}
Οι λέξεις μήκους 10 που δεν περιέχουν Α είναι: 23^{10}
Συνεπώς οι ζητούμενες λέξεις είναι: $24^{10} - 23^{10}$

Γ. Μεθοδολογία
5. Κυκλικές Διατάξεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Οι κυκλικές διατάξεις είναι μια ειδική κατηγορία άσκησης που τοποθετούμε αντικείμενα σε ένα κυκλικό τραπέζι και θεωρούνται όμοιοι δύο τρόποι εφόσον κινούμενοι δεξιόστροφα γύρω από το τραπέζι συναντήσουμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα.

Στην άσκηση αυτή:
-> Μετράμε τα αντικείμενα σαν να είναι σε μια σειρά
-> Διαιρούμε με το πλήθος των θέσεων (διότι τόσες είναι οι κοινές κυκλικές διατάξεις)

Παράδειγμα:
Σε ένα κυκλικό τραπέζι 4 θέσεων πρόκειται να κάτσουν 4 διακεκριμένα άτομα. Πόσοι είναι οι τρόποι, αν θεωρούνται όμοιες δύο τοποθετήσεις εφόσον κινούμενοι δεξιόστροφα γύρω από το τραπέζι συναντήσουμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα.
ΛΥΣΗ:
- Υπάρχουν 4! δυνατές τοποθετήσεις των ατόμων σε μια σειρά.
- Διαιρώ το αποτέλεσμα με 4 διότι υπάρχουν 4 κυκλικες μετατοπίσεις της ίδιας λύσης.

Άρα έχουμε 4!/4=3! λύσεις.

Γ. Μεθοδολογία
6. Διατάξεις με Εμφύτευση Υποδοχών

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Ένας πολύ δύσκολος περιορισμός είναι όταν μας ζητείται να έχουμε περισσότερα από 2 αντικείμενα στην διάταξή μας που δεν είναι σε σειρά. Εδώ η αφαίρεση δεν μπορεί να δουλέψει.

Υπάρχει ένας ειδικός τρόπος λύσης που απαιτεί γνώση από το επόμενο μάθημα (1.4). Θα μελετήσουμε αυτόν τον τρόπο επίλυσης στο Μάθημα 1.4

Γ. Μεθοδολογία
7. Περίπλοκοι Περιορισμοί

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:
Σε αρκετές εκφωνήσεις δεν θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας κάποιον από τους τύπους λόγω της ύπαρξης κάποιου περιορισμού.

Στις περιπτώσεις αυτές σπάμε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα και σκεφτόμαστε με τους τρόπους που αναλύσαμε σε προηγούμενο μάθημα, δηλαδή:
Είτε διακρίνουμε διαφορετικές περιπτώσεις και συνδυάζουμε τις λύσεις με τον κανόνα αθροίσματος
Είτε κατασκευάζουμε την λύση σε φάσεις (στάδια) και συνδυαζουμε τις λύσεις με τον κανόνα γινομένου.

Παράδειγμα:
Πόσες οι συμβολοσειρές από 3Α,3Β,3Γ που ξεκινούν με Α και τελειώνουν με Α ή Γ.
ΛΥΣΗ:
Διακρίνω περιπτώσεις για τον περιορισμό:
- Να ξεκινά με Α και να τελειώνει με Α. Οι υπόλοιπες 7 θέσεις συμπληρώνονται με $\frac{7!}{3!\,3!\,1!}$ τρόπους
- Να ξεκινά με Α και να τελειώνει με Γ. Οι υπόλοιπες 7 θέσεις συμπληρώνονται με $\frac{7!}{3!\,2!\,2!}$ τρόπους

Άρα από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι

$$\frac{7!}{3!\,3!\,1!} + \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 1

Υπολογίστε:

(Α) Πόσες οι δυνατές απαντήσεις στα Σ/Λ της ΠΛΗ20 (10 ομάδες με 4 ερωτήματα η κάθε μία, όπου κάθε ερώτημα μπορεί να απαντήθεί με Σ ή Λ ή να μην απαντηθεί καθόλου.

(Β) Το πλήθος των λέξεων που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα γράμματα της λέξης ΠΑΤΑΤΕΣ

(Γ) Το πλήθος των λέξεων του αγγλικού αλφαβήτου με μήκος 10

(Δ) Το πλήθους των λέξεων του αγγλικού αλφαβήτου με μήκος 10 χρησιμοποιώντας διαφορετικά γράμματα.

(Ε) Τους τρόπους που μπορούν να κάτσουν σε 4 καρέκλες 4 άτομα, αν η σειρά που κάθονται τα άτομα στις καρέκλες έχει σημασία

(ΣΤ) Τους τρόπους που μπορούν να κάτσουν σε 4 καρέκλες 10 άτομα, αν η σειρά που κάθονται τα άτομα στις καρέκλες έχει σημασία,

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 2

Υπολογίστε:

(Α) Το πλήθος των 10 x 10 τετραγωνικών πινάκων που κάθε στοιχείο του πίνακα είναι ένας αριθμός από το 0 εώς το 5

(Β) Το πλήθος των 10 x 10 σταυρολέξων που μπορούμε να κατασκευάσουμε (Μας ενδιαφέρει η τοποθέτηση λευκών και μάυρων τετραγώνων και όχι η τοποθέτηση των λέξεων)

(Γ) Οι στήλες του ΠΡΟΠΟ που περιέχουν 5 άσσους, 8 Χ, και 1 δυάρι

(Δ) Οι συμβολοσειρές μήκους 10 με 8Α και 2Β

(Ε) Οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 με 5 άσσους

(ΣΤ) Οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους n με k άσσους

(Ζ) Τα nxn σταυρόλεξα με ακριβώς k λευκά τετράγωνα.

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 3

Έχουμε 10 αριθμημένους βόλους, έστω με ετικέτες 1,2,..,10.

(Α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε μια σειρά ώστε οι βόλοι 5 και 8 να εμφανίζονται σε διαδοχικές θέσεις

(Β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε μια σειρά ώστε οι βόλοι 5 και 8 να μην εμφανίζονται σε διαδοχικές θέσεις

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 4

Έστω το αλφάβητο {Α,Β,Γ}. Κατασκευάζουμε συμβολοσειρές μήκους 10:

(Α) Πόσες οι συμβολοσειρές που περιέχουν ακριβώς ένα Α;

(Β) Πόσες οι συμβολοσειρές που περιέχουν το πολύ ένα Α;

(Γ) Πόσες οι συμβολοσειρές που περιέχουν τουλάχιστον ένα Α;

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 5

Σε κυκλικό τραπέζι n θέσεων θα καθίσουν n διακεκριμένα άτομα. Πόσοι οι τρόποι να γίνει η τοποθέτηση; (Σημείωση: Θεωρούνται όμοιοι δύο τρόποι, αν κινούμενοι δεξιόστροφα γύρω από το τραπέζι, συναντήσουμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα)

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 6

Έστω τα γράμματα Α,Β,Β,Γ,Γ,Γ,Γ,Δ,Δ

(Α) Πόσες οι συμβολοσειρές που περιέχουν την συμβολοσειρά ΑΒΒ ή την συμβολοσειρά ΑΓΒ.

(Β) Πόσες οι συμβολοσειρές που αρχίζουν με Δ και τελειώνουν με Β ή Γ

Δ. Ασκήσεις
Ασκηση Κατανόησης 7

Έχουμε 10 αριθμημένους βόλους (1..10). Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους βάλουμε σε μια σειρά, έτσι ώστε στην 1η θέση να έχουμε άρτιο βόλο και στην τελευταία θέση να έχουμε περιττό βόλο;

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε τις μεταθέσεις 21 διακεκριμένων αντικειμένων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{21}$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Υπάρχουν $(10!)^2$ μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται στην 11η θέση.
2. Υπάρχουν 21!/2 μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται πριν το α_2
3. Υπάρχουν 19! μεταθέσεις όπου τα α_1, α_2, και α_3 εμφανίζονται σε διαδοχικές θέσεις με αυτήν τη σειρα.
4. Υπάρχουν 19! μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται στην 1η θέση και το αντικείμενο α_{21} εμφανίζεται στην 21η θέση.

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 2

Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να προγραμματιστούν οι εξετάσεις 5 διαφορετικών μαθημάτων σε μια εξεταστική περίοδο διάρκειας 30 ημερών, ώστε να μην συμπίπτει η εξέταση δύο μαθημάτων την ίδια ημέρα είναι ίσος με:

1. Τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους 30 που περιέχουν 5 άσσους.
2. Τον συντελεστή του x^5 στην παράσταση $(1 + x)^{30}$
3. 30^5
4. 30!/25!

Δ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 3

Ένας καλαθοσφαιριστής εκτελεί 10 διαδοχικές διακεκριμένες βολές. Κάθε βολή μπορεί να είναι εύστοχη ή άστοχη. Ο προπονητής καταγράφει τα αποτελέσματα των βολών το ένα μετά το άλλο. Ο αριθμός των δυνατών καταγραφών που μπορεί να κάνει ο προπονητής είναι:

1. 10!
2. 10^2
3. Τον αριθμό των υποσυνόλων που μπορούν να προκύψουν από ένα σύνολο 10 διακεκριμένων στοιχείων
4. 2^{10}

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Α) Ένας φωτογράφος θέλει να βγάλει γαμήλιες φωτογραφίες που περιλαμβάνουν τους νεόνυμφους και 10 συγκεκριμένα συγγενικά πρόσωπα. Με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετήσει τα 12 πρόσωπα σε μια σειρά ώστε οι νεόνυμφοι να βρίσκονται στο κέντρο της φωτογραφίας (δηλαδή να υπάρχουν 5 άτομα δεξιά τους και 5 αριστερά τους) ;

Β) ‘Ένα παιδί έχει στη διάθεση του 15 τουβλάκια από κάθε ένα από τέσσερα διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετήσει 10 τουβλάκια στη σειρά;

Γ) Έχουμε στη διάθεση μας 15 διακεκριμένα CD και 5 όμοια μεταξύ τους κενά CD. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε το ένα δίπλα στο άλλο σε ένα ράφι;

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Ο διοικητής ενός στρατοπέδου έχει να επιλέξει ανάμεσα σε 50 διακεκριμένους στρατιώτες τρεις στρατιώτες για την πρωινή, απογευματινή και βραδινή σκοπιά.

1) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει αν δεν έχει σημασία σε ποια σκοπιά θα τοποθετηθεί κάθε στρατιώτης που επιλέγεται και δεν μπορεί ένας στρατιώτης να επιλεγεί για περισσότερες από μία σκοπιές;
2) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει αν δεν έχει σημασία σε ποια σκοπιά θα τοποθετηθεί κάθε στρατιώτης που επιλέγεται και μπορεί ένας στρατιώτης να επιλεγεί για περισσότερες από μία σκοπιές;
3) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει αν έχει σημασία σε ποια σκοπιά θα τοποθετηθεί κάθε στρατιώτης που επιλέγεται και δεν μπορεί ένας στρατιώτης να επιλεγεί για περισσότερες από μία σκοπιές;
4) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει αν έχει σημασία σε ποια σκοπιά θα τοποθετηθεί κάθε στρατιώτης που επιλέγεται και μπορεί ένας στρατιώτης να επιλεγεί για περισσότερες από μία σκοπιές;

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Δύο ομάδες (έστω A και B) που αποτελούνται από 8 διακεκριμένους αθλητές η κάθε μια (έστω A_1, A_2,..., A_8 και B_1,B_2, . . . ,B_8) πρόκειται να συναγωνιστούν σε μια σκυταλοδρομία 8 × 100. Ο προπονητής της πρώτης ομάδας ζητά από τον αθλητή A_3 να ξεκινήσει τον αγώνα και δε θέτει κανέναν άλλο περιορισμό ως προς τη σειρά με την οποία θα τρέξουν οι αθλητές της πρώτης ομάδας. Με τη σειρά του ο προπονητής της δεύτερης ομάδας θέτει ως μοναδικό περιορισμό να παρεμβληθούν δύο ακριβώς αθλητές ανάμεσα στους B_1 και B_5 (ή στους B_5 και B_1) στη σειρά με την οποία θα τρέξουν οι αθλητές της δεύτερης ομάδας.

(Α) Με πόσους τρόπους μπορούν να τρέξουν οι αθλητές της ομάδας Α;
(Β) Με πόσους τρόπους μπορούν να τρέξουν οι αθλητές της ομάδας Β;
(Γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να διεξαχθεί ο αγώνας ως προς τη σειρά με την οποία θα αγωνιστούν οι αθλητές των δύο ομάδων;

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Έστω τα γράμματα της λέξης ΣΤΑΣΙΔΙ:
(Α) Πόσες οι συμβολοσειρές που τα 2Σ είναι σε σειρά;
(Β) Πόσες οι συμβολοσειρές που τα 2Σ δεν είναι σε σειρά;
(Γ) Πόσες οι συμβολοσειρές που τα 2Σ είναι σε σειρά και τα 2Ι δεν είναι σε σειρά;

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 5

Ένα κωδικοποιημένο αλφάβητο αποτελείται από τέσσερις παύλες (-), 10 τελείες (.) και τα γράμματα Α,Β.
Α) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους 30 μπορούν να μεταδοθούν με τον κώδικα αυτό αν οι υπόλοιπες 14 θέσεις συμπληρώνονται με κενά;
Β) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους 16 μπορούν να μεταδοθούν με τον κώδικα αυτό αν απαγορεύεται η παρουσία τόσο της συμβολοσειράς ΑΒ όσο και της ΒΑ (δηλαδή απαγορεύεται η παρουσία του Α αμέσως μετά το Β αλλά και η παρουσία του Β αμέσως μετά το Α);

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 6

Έστω 4 πράσινες, 4 κόκκινες και 4 μαύρες μπάλες. Να υπολογιστούν οι τρόποι για την διαταξη των μπαλών σε 6 θέσεις με τον περιορισμό να διαταχθεί το πολύ 1 πράσινη μπάλα.