

ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ24

ΘΕΜΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

(Άσκηση 1) Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = \log(n!)$$

$$f_2(n) = \log(n^n)$$

Ο συμβολισμός \log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g ($f \equiv g$), αν $f = \Theta(g)$ (ισοδύναμα $\Theta(f) = \Theta(g)$). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g ($f < g$), αν $f = o(g)$.

Υποδειξη: **Τύπος Stirling** (για τον υπολογισμό του παραγοντικού): $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

(Άσκηση 2) Να υπολογίσετε την ακριβή λύση των αναδρομικών σχέσεων:

$$(1) \quad T(n) = \begin{cases} T(n-1) + 4n - 3, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad T(n) = \begin{cases} 5T\left(\frac{n}{3}\right) + 2n^2, & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$$L_1 = (0+1)1^*(0+1)0^*(0+1)$$

$$L_2 = (01+10+00)^*$$

$$L_3 = (0+1)^*11+11(0+1)^*$$

$$L_4 = (0+11)^*(10+111)^*(00+1)^*(100+11)^*$$

$$L_5 = (101+1^*0^*+1^*10^*)^*$$

Άσκηση 2:

1 Δίδεται η κανονική έκφραση: $(1+01)^*+10^*$

(A) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΠΑ) της L

(B) Δώστε το ισοδύναμο Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΝΠΑ) της L

Άσκηση 3:

Δίδονται οι γλώσσες του αλφαβήτου $\{a,b\}$: $L_1 = \{wcw^R, |w| \leq 1\}$, $L_2 = \{wcw^R, |w| \geq 1\}$

εκ των οποίων η μία είναι κανονική και η άλλη δεν είναι κανονική.

(A) Επιλέξτε την γλώσσα που είναι κανονική και αποδείξτε το, δίνοντας κανονική έκφραση που παράγει τις συμβολοσειρές της

(B) Για την γλώσσα που δεν είναι κανονική: Δείξτε ότι δεν είναι κανονική με το λήμμα άντλησης

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΑ

Άσκηση 1: Δώστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες:

$$L_1 = \{0^{3n+2}1^{2n+1} \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^{m+1}b^{2n+2}c^{3n+1}d^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_3 = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 3\}$$

$$L_4 = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*, |x| = |y| + 1\}$$

$$L_4 = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*, |x| + 1 = |y|\}$$

$$L_6 = \{b^m a^n c^k \mid m = n + k\}$$

$$L_7 = \{baa^n b^m ba \mid n < m\}$$

Άσκηση 2

Δίδεται η γλώσσα του αλφαβήτου $\{0,1\}$: $L = \{0^{3n+2}1^{2n+1} \mid n \geq 0\}$

(Α) Δείξτε ότι η L δεν είναι κανονική.

(Β) Δώστε Γραμματική Χωρίς Συμφραζόμενα που παράγει τις συμβολοσειρές της L .

(Γ) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοιβάς που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L .

(Δ) Δώστε Ντετερμινιστικό Αυτόματο Στοιβάς που αναγνωρίζει τις συμβολοσειρές της L .

Το Λήμμα Αντλησης για Κανονικές Γλώσσες:

Έστω L μια άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $x \in L$ με $|x| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = uvw$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v και w ισχύει:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^m w \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

ΘΕΜΑ 5: ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Να κατασκευάσετε ντετερμινιστική μηχανή Turing M , με αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1, \#, Y, N\}$, που να αποφασίζει την γλώσσα της προηγούμενης άσκησης

Θεωρήστε ότι η M με είσοδο $x \in \{0,1\}^*$ ξεκινά την λειτουργία της από τον σχηματισμό $\#x\#$. Οι χαρακτήρες Y (YES) και N (NO) χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την σηματοδότηση της αποδοχής ή της απόρριψη της εισόδου, αντίστοιχα.

(1) Δώστε μια άτυπη περιγραφή της λειτουργίας της M (έναν αλγόριθμο διαχείρισης της ταινίας της).

(2) Δώστε το γράφημα ροής της M (σχηματική αναπαράσταση με χρήση γνωστών μηχανών).