ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ιδιότητες Δυνάμεων	Λογάριθμοι με βάση το b	Λογάριθμοι με βάση το 2	Ιδιότητες Αθροισμάτων
$\alpha^0 = 1,\ \alpha^1 = \alpha$	$x = log_b a \quad ανν \quad b^x = a$	$x = loga \quad ανν \quad 2^x = a$	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
$\alpha^{-1} = 1/\alpha$, $\alpha^{-k} = 1/a^k$	$log_b(x \cdot y)$ $= log_b(x) + log_b(y)$	$log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$a^{m^n} = a^{(m^n)}$ $(a^m)^n = a^{mn}$	$log_b\left(\frac{x}{y}\right)$ $= log_b(x) - log_b(y)$	$log\left(\frac{x}{y}\right) = log(x) - log(y)$	$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m/a^n = a^{m-n}$	$(log_b a)^X = log_b{}^X a$	$(loga)^X = log^X a$	$\sum_{i=A}^{B} c = c\sum_{i=A}^{B} 1, \qquad c: σταθ.$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $a^m/b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$log_b a^X = X \cdot log_b a$	$loga^X = X \cdot loga$ $\log(a^X) = X \cdot loga$	$\sum_{i=1}^{X}[A+B] = \sum_{i=1}^{X} A + \sum_{i=1}^{X} B$
$\sqrt{x} = x^{1/2} = x^{0.5}$	$b^{log_b X} = X$	$2^{logX} = X$	$\sum_{i=A}^{B} 1 = B - A + 1$
$\sqrt[A]{x^B} = x^{\frac{B}{A}}$	$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$	$loga = \frac{log_c a}{log_c 2}$	

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Παράδειγμα: Ιεραρχήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας:

$$\sqrt{n^6} + 5n(n+1) \qquad 4n^{logn} \qquad n^2 + 2 \cdot 5^n$$

Απάντηση:

$f_1(n) = \sqrt{n^6} + 5n(n+1) = n^{\frac{6}{2}} + 5n^2 + 5n$
$= n^3 + 5n^2 + 5n = \Theta(n^3)$
$f_2(n) = 4n^{logn} = \Theta(n^{logn})$
$f_3(n) = n^2 + 2 \cdot 5^n = \Theta(5^n)$

(1): Επειδή κάνουμε ασυμπτωτική σύγκριση των συναρτήσεων εξάγουμε το Θ(.) των συναρτήσεων Αν έχουμε έστω μία απροσδιόριστη συνάρτηση προχωράμε στο επόμενο βήμα

Σε περίπτωση απροσδιοριστίας => Εκθετικές με βάση 2 στους όρους του αθροίσματος

Εκφράζουμε τις συναρτήσεις ως εκθετικές με βάση το 2:

f_1: $n^3 \quad = 2^{\log(n^3)}$
f_2: $n^{logn} = 2^{\log(n^{logn})}$
f_3: $5^n \quad = 2^{\log(5^n)}$

(2): Γράφουμε τα Θ(.) ως εκθετικές με βάση το 2.

Για τους εκθέτες έχουμε:

f_1: $\log(n^3) = 3\log n$
f_2: $\log(n^{logn}) = \log n \cdot \log n = (\log n)^2 = log^2 n$
f_3: $\log(5^n) \quad = n \cdot \log 5 = 2{,}32n$

(3): Κάνουμε πράξεις στους εκθέτες για να είναι όλες οι μορφές στην βασική ιεραρχία.

Σε περίπτωση απροσδιοριστίας => Ξανά εκθετικές με βάση το 2

Ισχύει: $3\log n < log^2 n < 2{,}32n$

Άρα έπεται: $f_1 < f_2 < f_3$

(4): Σε περίπτωση ισόπαλίας => Προτεραιότητα στον πολλαπλασιασμό και έπειτα στην πρόσθεση (εναλλακτικά όρια με χρήση κανόνα De L'Hospital)

ΚΛΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΙΕΡΑΡΧΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ:

ΣΤΑΘΕΡΕΣ < ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ < ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ < ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ < ΥΠΕΡΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

$\Theta(1) \qquad \Theta(log^K n) \qquad \Theta(n^K) \qquad \Theta(\alpha^n) \qquad \Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$

Και πιο αναλυτικά:

	Μορφή Συναρτήσεων	Σχόλια
ΣΤΑΘΕΡΕΣ	$\Theta(1)$	
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ	$loglogn < logn < log^K n$	Το K>1 σταθερά «καθαρό» n
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ	$n < n^2 < \cdots < n^K$	Το K σταθερά «καθαρό» n
ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ	$a^n < \cdots < 2^n < 3^n < \cdots < b^n$	a>1,b: Σταθερές «καθαρό» n
ΥΠΕΡΕΚΘΕΤΙΚΕΣ	$n! < n^n$	«καθαρό» n

Μικρότερη Πολυπλοκότητα
= Πιο Γρήγορος Αλγόριθμος
= Καλύτερη Πολυπλοκότητα

Μεγαλύτερη Πολυπλοκότητα
= Πιο Αργός Αλγόριθμος
= Χειρότερη Πολυπλοκότητα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μία συνάρτηση που δεν έχει μία από τις παραπάνω μορφές είναι **απροσδιόριστη** και για να την συγκρίνουμε με άλλες πρέπει να ακολουθήσουμε ειδική διαδικασία (εκθετικές με βάση το 2)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ (Υπολογισμός Θ)

Υπολογισμός του Θ(.) μιας συνάρτησης πολυπλοκότητας

- Για να εξάγουμε το Θ(.) μιας συνάρτησης πολυπλοκότητας, θα πρέπει να κάνουμε τις όποιες επιμεριστικές ιδιότητες έτσι ώστε να έχουμε **«καθαρά» αθροίσματα**. Κάνουμε και τυχόν εύκολες πράξεις (ρίζες=>δυνάμεις, απλοποίηση λογαρίθμων κ.λπ.)
- Έπειτα επιλέγουμε τον **μέγιστο** από τους όρους του αθροίσματος, και τον **εισάγουμε** στο **Θ(.)**
- **Προσοχή** ότι απαλείφονται οι σταθερές που είναι πολλαπλασιασμένες με τους όρους του αθροίσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$T(n) = n(n+1) = n^2 + n = \Theta(n^2)$$

$$T(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{1}{6}n = \Theta(n^3)$$

Στοιχειώδης Ιεραρχία Συναρτήσεων πολυπλοκότητας:

ΣΤΑΘΕΡΕΣ < ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ < ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ < ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ < ΥΠΕΡΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

- όπου:
  - Σταθερές είναι συναρτήσεις που δεν υπάρχει το n. Εχουμε: $T(n) = \Theta(1)$
  - Λογαριθμικές είναι συναρτήσεις της μορφής:
    $T(n) = \Theta(\log^k n)$ — Όπου k είναι σταθερα >0
  - Πολυωνυμικές είναι συναρτήσεις της μορφής:
    $T(n) = \Theta(n^k)$ — Όπου k είναι σταθερα >0
  - Εκθετικές είναι συναρτήσεις της μορφής:
    $T(n) = \Theta(a^n)$ — Όπου a είναι σταθερα >1
  - Υπερεκθετικές είναι οι εξής δύο συναρτήσεις:
    $T(n) = \Theta(n!)$ και $T(n) = \Theta(n^n)$ με $n! < n^n$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ (και ΕΚΤΙΜΗΣΗ) ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Ο λογάριθμος μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Τον υπολογίζουμε σύμφωνα με την εξίσωση του λογαρίθμου (δοκιμάζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις)

Παράδειγμα 1: $log_2 32 =?$

Λύση: $log_2 32 = 5$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$\underline{2^x = 32}$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^{\boxed{5}} = 32$

Παράδειγμα 2: $log_6 216 =?$

Λύση: $log_6 216 = 3$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$\underline{6^x = 216}$
$6^1 = 6$
$6^2 = 36$
$6^{\boxed{3}} = 216$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Ο λογάριθμος δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς, αλλά παρατηρούμε ότι βάση και αριθμός του λογαρίθμου είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού. Τότε κάνουμε αλλαγή βάσης βάζοντας νέα βάση τον κοινό αριθμό τ. Τον υπολογίζουμε σύμφωνα με την εξίσωση του λογαρίθμου (δοκιμάζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις)

Παράδειγμα: $log_9 27 =?$

Λύση: $log_9 27 = \frac{log_3 27}{log_3 9} = \frac{3}{2} = 1.5$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$\underline{3^x = 27}$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Ο λογάριθμος δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς, ούτε η βάση και ο αριθμός του λογαρίθμου είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού. Τότε κάνουμε εκτίμηση του λογαρίθμου υπολογίζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις της βάσης στις οποίες μπορούμε να εντοπίσουμε τον αριθμό.

Παράδειγμα: $log_2 11 =?$

Λύση: $3 < log_2 11 < 4$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$\underline{2^x = 11}$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^{\boxed{3}} = 8$
$2^{\boxed{4}} = 16$ ← 11

ΟΡΙΑ και ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Ορισμός Ορίων για Απόδειξη Ασυμπτωτικών Συμβολισμών

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} c \neq 0 & τότε\ f(n) = \Theta(g(n)) \\ 0 & τότε\ f(n) = o(g(n)) \\ +\infty & τότε\ f(n) = \omega(g(n)) \end{cases}$$

Και ισχύουν και τα ακόλουθα:

- **Λήμμα 1:** $f(n) = \Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$
- **Λήμμα 2:** Αν $f(n) = o(g(n))$ τότε $f(n) = O(g(n))$
- **Λήμμα 3:** Αν $f(n) = \omega(g(n))$ τότε $f(n) = \Omega(g(n))$

..και ανάποδα:

$f < g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0 \longrightarrow f = o(g)$ αλλά και $f = O(g)$

$f = g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = c(\neq 0) \longrightarrow f = \Theta(g)$ αλλά και $f = \Omega(g)$ και $f = O(g)$

$f > g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \longrightarrow f = \omega(g)$ αλλά και $f = \Omega(g)$

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι $2^n = O(3^n)$

Λύση:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Άρα: $2^n = o(3^n)$ άρα και $2^n = O(3^n)$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ (MASTER THEOREM)

Το Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση $\mathbf{T(n) = aT}\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
όπου a≥1, b>1 είναι σταθερές, και $f(n)$ είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

Α) Αν $f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$ για κάποια σταθερά ε>0, τότε: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

Β) Αν $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ τότε: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\log n\right)$

Γ) Αν $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$ για κάποια σταθερά ε>0 και $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ για κάποια σταθερά c<1, τότε: $T(n) = \Theta(f(n))$

Παραδείγματα:

$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Έχω: $a=8,\quad b=2,\quad f(n)=n,\quad \log_b a = \log_2 8 = 3$
Ισχύει: $f(n) = n = O(n^{3-\varepsilon})$ για κάποια σταθερά ε>0
Άρα από την Α' περίπτωση του Θεωρήματος Κυριαρχίας έπεται ότι: $T(n) = \Theta(n^3)$

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Έχω: $a=9,\quad b=3,\quad f(n)=n^2,\quad \log_b a = \log_3 9 = 2$
Ισχύει: $f(n) = n^2 = \Theta(n^2)$
Άρα από την Β' περίπτωση του Θεωρήματος Κυριαρχίας έπεται ότι: $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

Έχω: $a=4,\quad b=2,\quad f(n)=n^3,\quad \log_b a = \log_2 4 = 2$
Ισχύει: $f(n) = n^3 = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ για κάποια σταθερά ε>0
Ελέγχω αν υπάρχει c<1 τέτοιο ώστε:

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow 4f\left(\frac{n}{2}\right) \le cf(n) \Leftrightarrow 4\left(\frac{n}{2}\right)^3 \le cn^3 \Leftrightarrow 4\frac{n^3}{2^3} \le cn^3 \Leftrightarrow \frac{4}{8} \le c \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le c$$

Άρα ισχύει για ½≤c<1.
Άρα από την Γ' περίπτωση του Θεωρήματος Κυριαρχίας έπεται ότι: $T(n) = \Theta(n^3)$

Σύγκριση:

$f(n)\ ?\ n^{\log_b a}$

$<$ → Α'ΘΚ
$=$ → Β'ΘΚ
$>$ → Γ'ΘΚ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Η **μέθοδος της επανάληψης** χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$\mathbf{T}(n) = \begin{cases} \alpha T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), & n > n_0 \\ c, & n = n_0 \end{cases}$$

- Όταν το ζητάει ρητά η εκφώνηση
- Όταν αποτυγχάνει το θεώρημα κυριαρχίας
- Όταν δεν θέλουμε απλά μία ασυμπτωτική εκτίμηση

1. Κάνουμε 3 εφαρμογές της αναδρομικής σχέσης (μέχρι να φτάσουμε στη μορφή: $\mathrm{T(n)} = a^3 T\left(\frac{n}{b^3}\right)$). Χρήσιμο το πρόχειρο
2. Εκτίμηση της σειράς που προκύπτει μετά από k επαναλήψεις (μας καθοδηγεί ο όρος: $T\left(\frac{n}{b^k}\right)$)
3. Υπολογίζουμε πότε σταματάει η αναδρομή (Θέτουμε $\frac{n}{b^k} = n_0$ και λύνουμε ως προς k). Π.χ. αν $n_0 = 1$, τότε $\mathrm{k} = \log_b n$
4. Αντικατάσταση του k στον τύπο του βήματος 2
5. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμος ο τύπος: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Πρόχειρο:
$$\mathrm{T}(n) = 3T\left(\tfrac{n}{4}\right) + n^2$$
$$T\left(\tfrac{n}{4}\right) = 3T\left(\tfrac{n}{4^2}\right) + \left(\tfrac{n}{4}\right)^2$$
$$T\left(\tfrac{n}{4^2}\right) = 3T\left(\tfrac{n}{4^3}\right) + \left(\tfrac{n}{4^2}\right)^2$$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 & n > 1 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$$

Λύση:

$$\mathrm{T}(n) = 3T\left(\tfrac{n}{4}\right) + n^2 = 3\left[3T\left(\tfrac{n}{4^2}\right) + \left(\tfrac{n}{4}\right)^2\right] + n^2$$
$$= 3^2T\left(\tfrac{n}{4^2}\right) + 3\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + n^2 = 3^2\left[3T\left(\tfrac{n}{4^3}\right) + \left(\tfrac{n}{4^2}\right)^2\right] + 3\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + n^2$$
$$= 3^3T\left(\tfrac{n}{4^3}\right) + 3^2\left(\tfrac{n}{4^2}\right)^2 + 3\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + n^2 =$$
$$= \cdots =$$
$$= 3^kT\left(\tfrac{n}{4^k}\right) + 3^{k-1}\left(\tfrac{n}{4^{k-1}}\right)^2 + \cdots + 3^2\left(\tfrac{n}{4^2}\right)^2 + 3\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + n^2 =$$

Η αναδρομή σταματά όταν $\frac{n}{4^k} = 1 \Rightarrow \mathrm{n} = 4^k \Rightarrow \mathrm{k} = \log_4 n$

$$= 3^{\log_4 n}T\left(\tfrac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + 3^{\log_4 n-1}\left(\tfrac{n}{4^{\log_4 n-1}}\right)^2 + \cdots + 3^2\left(\tfrac{n}{4^2}\right)^2 + 3\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + n^2 =$$
$$= 3^{\log_4 n}T(1) + 3^{\log_4 n-1}\left(\tfrac{n}{4^{\log_4 n-1}}\right)^2 + \cdots + 3^2\left(\tfrac{n}{4^2}\right)^2 + 3\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + n^2 =$$
$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} 3^i\left(\tfrac{n}{4^i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} 3^i\frac{n^2}{(4^i)^2} = n^2\sum_{i=0}^{\log_4 n-1}\frac{3^i}{(4^2)^i} =$$
$$= n^2\sum_{i=0}^{\log_4 n-1}\frac{3^i}{16^i} = n^2\sum_{i=0}^{\log_4 n-1}\left(\tfrac{3}{16}\right)^i =$$
$$= n^2\frac{\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n}-1}{\frac{3}{16}-1} = \Theta(n^2)$$

0

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $T(n) = \alpha T(n-b) + c$

Η **μέθοδος της επανάληψης** χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$\mathbf{T}(n) = \begin{cases} \alpha T(n-b) + c, & n > n_0 \\ d, & n = n_0 \end{cases}$$

- Όταν το ζητάει ρητά η εκφώνηση
- Προσοχη: $\alpha \neq 1$

1. Κάνουμε 3 εφαρμογές της αναδρομικής σχέσης (μέχρι να φτάσουμε στη μορφή: $\mathrm{T(n)} = a^3T(n-bk)$). Χρήσιμο το πρόχειρο
2. Εκτίμηση της σειράς που προκύπτει μετά από k επαναλήψεις (μας καθοδηγεί ο όρος: $T(n-bk)$)
3. Υπολογίζουμε πότε σταματάει η αναδρομή (Θέτουμε $n - bk = n_0$ και λύνουμε ως προς k). Π.χ. αν $n_0 = 0$, τότε $\mathrm{k} = n/b$
4. Αντικατάσταση του k στον τύπο του βήματος 2
5. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμοι οι τύποι: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Πρόχειρο:
$$\mathrm{T}(n) = 3T(n-2) + 4$$
$$T(n-2) = 3T(n-4) + 4$$
$$T(n-4) = 3T(n-6) + 4$$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} 3T(n-2) + 4 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$\mathrm{T}(n) = 3T(n-2) + 4 = 3[3T(n-4) + 4] + 4$$
$$= 3^2T(n-4) + 3\cdot 4 + 4 = 3^2[3T(n-6) + 4] + 3\cdot 4 + 4$$
$$= 3^3T(n-6) + 3^2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 4 =$$
$$= \cdots =$$
$$= 3^kT(n-2k) + 3^{k-1}\cdot 4 + \cdots + 3^2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 4 =$$

Η αναδρομή σταματά όταν $n - 2k = 0 \Rightarrow \mathrm{k} = n/2$

$$= 3^{\frac{n}{2}}T(0) + 3^{\frac{n}{2}-1}\cdot 4 + \cdots + 3^2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 4 =$$
$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\left[3^{\frac{n}{2}-1} + \cdots + 3^2 + 3 + 1\right] =$$
$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 3^i =$$
$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\frac{3^{\frac{n}{2}}-1}{3-1} =$$
$$= 3^{\frac{n}{2}} + 2\left[3^{\frac{n}{2}} - 1\right] = \Theta\left(3^{\frac{n}{2}}\right)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $T(n) = T(n-b) + f(n)$

Η **μέθοδος της επανάληψης** (κάνοντας άθροισμα κατά μέλη) χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$\mathbf{T}(n) = \begin{cases} T(n-b) + f(n), & n > n_0 \\ c, & n = n_0 \end{cases}$$

1. Γράφουμε όλους τους αναδρομικούς όρους T(n), T(n-1),… μέχρι και την οριακή περίπτωση της αναδρομής
2. Προσθέτουμε τις εξισώσεις κατά μέλη
3. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμοι οι τύποι: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} T(n-1) + 3n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$T(n) = \cancel{T(n-1)} + 3n$$
$$\cancel{T(n-1)} = \cancel{T(n-2)} + 3(n-1)$$
$$\cancel{T(n-2)} = \cancel{T(n-3)} + 3(n-2)$$
$$\ldots$$
$$\cancel{T(2)} = \cancel{T(1)} + 3\cdot 2$$
$$\cancel{T(1)} = \cancel{T(0)} + 3\cdot 1$$
$$\cancel{T(0)} = 1 \qquad (+)$$

$$T(n) = 3n + 3(n-1) + 3(n-2) + \ldots + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1$$
$$= 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + \ldots + 3(n-2) + 3(n-1) + 3n$$
$$= 1 + 3[1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n]$$
$$= 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 3\frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= 1{,}5n^2 + 1{,}5n + 1$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Λύση της αναδρομής: $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

1. Αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ τότε $\boxed{T(n) = \Theta(f(n))}$ (δραστ.3.6)
2. Αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ τότε $\boxed{T(n) = \Theta(f(n)\cdot\log n)}$ (δραστ.3.6)
3. Αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$ τότε η δραστηριότητα 3.6 έχει αποτύχει και πάμε υποχρεωτικά με δένδρο αναδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12} < 1$ άρα από την δραστ.3.6 ισχύει: $T(n) = \Theta(n^2)$

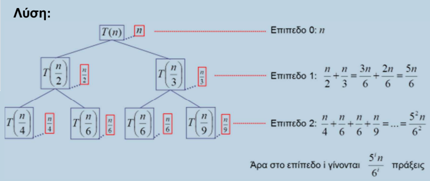
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ άρα από την δραστ.3.6 ισχύει: $T(n) = \Theta(n\cdot\log n)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$T(n) = \begin{cases} T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + n, & \alpha\nu\ n > 1 \\ 1, & \alpha\nu\ n = 1 \end{cases}$$

Λύση:



Το ύψος του δένδρου είναι $\log_2 n$ (αν c είναι ο μικρότερος από τους δύο παρονομαστές (δηλ. c=min{a,b}) έπεται ότι το ύψος του δένδρου είναι $\log_c n$.)

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 5^i\frac{n}{6^i} = n\sum_{i=0}^{\log n}\frac{5^i}{6^i} =$$
$$= n\sum_{i=0}^{\log n}\left(\frac{5}{6}\right)^i = n\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\log n+1} - 1}{\frac{5}{6} - 1} =$$
$$= 6n\cdot(0{,}83)^{\log n+1} - 6n$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

Παράδειγμα: Υπολογίστε ασυμπτωτικά άνω και κάτω φραγματα του αθροίσματος:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n}\log i$$

Υπολογισμός Άνω Φράγματος: Εκτιμούμε από ποια ποσότητα είναι πάντα μικρότερος ο όρος του αθροίσματος

Άνω Φράγμα: (αφού ισχύει ότι $\log i \le \log n$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n}\log i \le \sum_{i=1}^{n}\log n = \log n\sum_{i=1}^{n} 1 = \log n\,(n - 1 + 1) = n\log n = \Theta(n\log n)$$

Συνεπώς $T(n) = O(n\log n)$

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος: Εκτιμούμε από ποια ποσότητα είναι πάντα μεγαλύτερος ο όρος του αθροίσματος. Στην άσκηση αυτή έχουμε και μία αρκετά έξυπνη ιδέα!

Κάτω Φράγμα:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n}\log i \ge \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log i \ge \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log\frac{n}{2} = \log\frac{n}{2}\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} 1 = \log\frac{n}{2}\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} 1 = (\log n - \log 2)\left(n - \frac{n}{2} + 1\right) = (\log n - 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) =$$
$$= \frac{n}{2}\log n - \frac{n}{2} + \log n - 1 = \Theta(\mathrm{n}\log\mathrm{n})$$

Συνεπώς $T(n) = \Omega(n\log n)$

Αν το άνω και το κάτω φράγμα είναι ίδια τότε ισχύει και το Θ(.) του κοινού φράγματος. Αλλιώς ισχύουν τα φράγματα της συνάρτησης πολυπλοκότητας που έχουμε υπολογίσει

Συνεπώς αφού $T(n) = O(n\log n)$ και $T(n) = \Omega(n\log n)$ ισχύει ότι: $T(n) = \Theta(n\log n)$