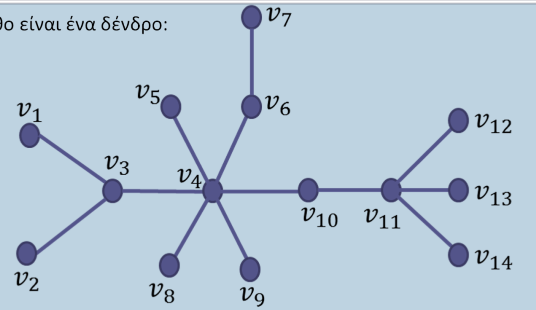
ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΕΝΔΡΟΥ

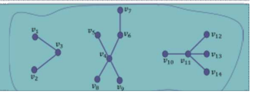
Ορισμός: (Θεώρημα των Δένδρων)
Τα ακόλουθα είνα6οδύναμα:
1. Το γράφημα είνα6**δένδρο** (δηλαδή υπάρχε6μοναδ6κό απλό μονοπάτ6από κάθε κορυφή $v_i \in V$ σε κάθε κορυφή $v_j \in V$ $(i \neq j)$)
2. Το γράφημα είνα6**συνδεόμενο και άκυκλο**
3. Το γράφημα είνα6**συνδεόμενο και έχει $|V| - 1$ ακμές**
4. Το γράφημα είνα6**άκυκλο και έχει $|V| - 1$ ακμές**
5. Το γράφημα είνα6**ελαχιστοτικά συνδεδέμένο** (είνα6συνδεδεμένο κα6αν του αφαφέσουμε έστω μία ακμή παύε6να είνα6συνδεδεμένο)
6. Το γράφημα είνα6**μεγιστοτικά άκυκλο** (είνα6άκυκλο κα6αν του προσθέσουμε έστω μία ακμή παύε6να είνα6άκυκλο)

Τελ6κά το δένδρο είνα6ένα άκυκλο συνδεόμενο γράφημα με n-1 ακμές που υπάρχε6μοναδ6κό απλό μονοπάτ6μεταξύ κάθε δύο δ6αφορετ6κών κορυφών

Παράδειγμα: Το ακόλουθο είναι ένα δένδρο:



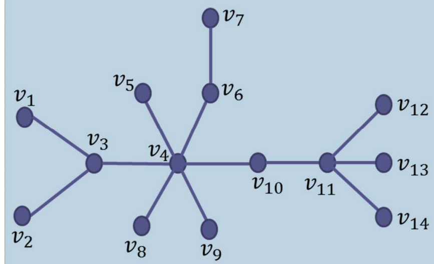
Ορισμός: (Δάσος)
Ένα γράφημα $G(V,E)$ είνα6δάσος αν είνα6η ένωση δένδρων
Ή 6οδύναμα είνα6ένα μη συνδεόμενο γράφημα που κάθε συνεκτ6κή συν6στώσα είνα6δένδρο

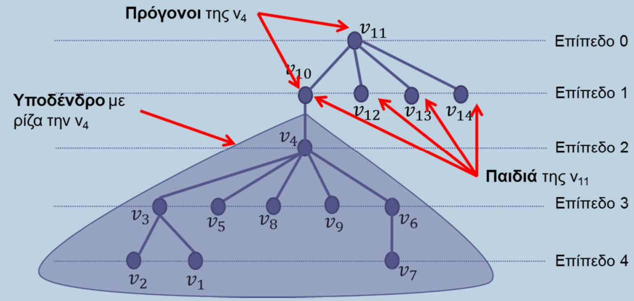


ΡΙΖΩΜΕΝΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΔΕΝΔΡΟΥ

Ορισμός: (Ριζωμένη Απεικόνιση Δένδρου)
Κάθε δένδρο μπορεί να αναπαρασταθεί δ6ατεταγμένα, αν επ6λέξουμε μ6α κορυφή ως τη ρίζα του δένδρου. Με βάση αυτήν την απε6κόν6ση ορίζουμε:
- Το **επίπεδο** (ή **βάθος**) **κορυφής** που είνα6η απόσταση (σε πλήθος ακμών) της κορυφής από τη ρίζα (στο παράδε6γμα το επίπεδο της κορυφής v_6 είνα63)
- Το **ύψος** του δένδρου που είνα6το μέγ6το επίπεδο κορυφής (στο παράδε6γμα = 4)
- Το **βαθμό του δένδρου** που είνα6ο μέγ6τος βαθμός κορυφής (στο παράδε6γμα =6 λόγω της v4)
- Κάθε κορυφή με βαθμό 1 λέγετα6**φύλλο** (ή **τερματική κορυφή** ή **μενταγιον**)
- Κάθε κορυφή με βαθμό >1 λέγετα6**εσωτερική κορυφή** (ή **κορυφή διακλάδωσης**)
- Ισχύε6σε κάθε δένδρο ο τύπος: **n=φ+ε**
  - Όπου n: πλήθος κορυφών, φ: πλήθος φύλλων, ε: πλήθος εσωτερ6κών κορυφών

Παράδειγμα: Βλέπουμε ένα δένδρο (αρ6στερά) κα6μία ρ6ζωμένη απε6κόν6σή του (επ6λέγοντας ως ρίζα την v_{11})





ΛΗΜΜΑΤΑ ΣΤΑ ΔΕΝΔΡΑ

Λήμματα που ισχύουν στα δένδρα:

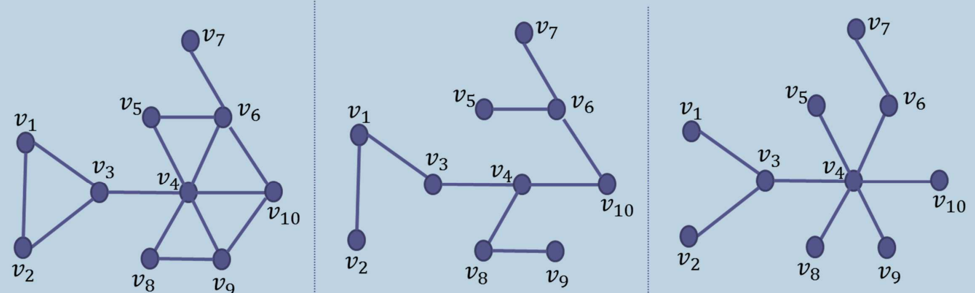
1. Κάθε **δένδρο** είνα6**απλό** γράφημα
2. Κάθε **δένδρο** είνα6**διχοτομίσιμο** γράφημα
3. Κάθε **δένδρο** είνα6**επίπεδο** γράφημα
4. Κάθε **δένδρο** με |V|≥2 έχε6τουλάχ6τον 2 φύλλα.
5. Κάθε **δένδρο** με |V|>2 έχε6τουλάχ6τον μία εσωτερ6κή κορυφή
6. Αν μ6α κορυφή έχε6βαθμό k, τότε το δένδρο έχε6τουλάχ6τον k φύλλα.
7. Κάθε **εσωτερική κορυφή** είνα6**σημείο κοπής** κα6**κάθε ακμή** είνα6**γέφυρα**.
8. Αν αφα6ρέσουμε ένα φύλλο από ένα δένδρο, τότε το γράφημα παραμένε6δένδρο
9. Κάθε **μεγιστοτικό μονοπάτι** ξεκ6νάε6κα6καταλήγε6σε φύλλο.

ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

Ορισμός: Σε ένα συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ ορίζουμε ως **συνδετικό δένδρο T** (ή αλλ6ώς **γεννητορικό** ή **επικαλυπτικό** δένδρο) του γραφήματος:
Ένα υπογράφημα του G που είνα6δένδρο κα6περ6έχε6όλες τ6ς κορυφές του G

Παρατηρήσε6ς:
- Ένα γράφημα έχε6συνδετ6κό δένδρο αν κα6μόνο αν είνα6συνδεόμενο
- Ένα γράφημα μπορεί να έχε6πολλά συνδετ6κά δένδρα.
- Ένα δένδρο έχε6μόνο ένα συνδετ6κό δένδρο (τον εαυτό του)
- Ένα συνδετ6κό δένδρο μπορεί να υπολογ6τεί με τον αλγόρ6θμο δ6άσχ6σης πρώτα κατά βάθος κα6τον αλγόρ6θμο δ6άσχ6σης πρώτα κατά πλάτος.

Παράδειγμα: Βλέπουμε ένα γράφημα κα6δύο συνδετ6κά του δένδρα (ένα γράφημα έχε6πολλά συνδετ6κά δένδρα)



$G = (V,E)$ $T_1 = (V,E')$ $T_2 = (V,E'')$

ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΚΑΤΑ ΒΑΘΟΣ

Σκιαγράφηση Αλγορίθμου **Πρώτα κατά Βάθος**:

«Βολίδα που εξερευνά το γράφο κατασκευάζοντας το συνδετικό δένδρο»

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεόμενο γράφημα και παράγει ένα συνδετικό δένδρο.

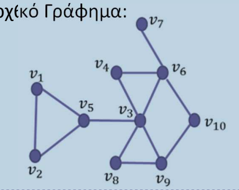
Στην αρχικοποίηση:
- Τοποθετούμε την βολίδα σε μία (αυθαίρετη) κορυφή. Την κορυφή την τοποθετούμε στο συνδετικό δένδρο

Σε κάθε βήμα:
- Αν υπάρχει γειτονική κορυφή που δεν έχει επισκεφθεί, μεταβαίνει και την τοποθετεί στο συνδετικό δένδρο μαζί με την ακμή μετάβασης.
- Αν δεν υπάρχει κορυφή που δεν έχει επισκεφθεί, πηγαίνει στην ακριβώς προηγούμενη κορυφή που είχε επισκεφθεί.

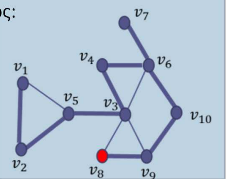
Τερματισμός:
- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

Παράδειγμα:

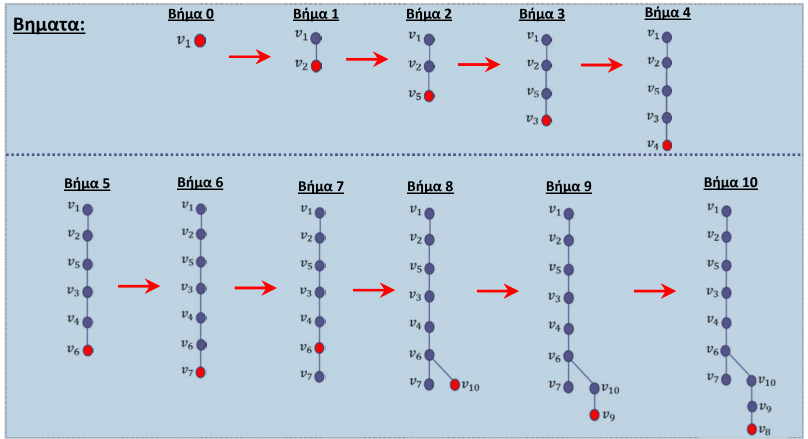
Αρχικό Γράφημα:



Συνδετικό Δένδρο της Κατά Βάθος:



Βηματα:



ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΟΣ

Σκιαγράφηση Αλγορίθμου **Πρώτα κατά Πλάτος**:

«κατασκευή του δένδρου κατά επίπεδα»

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεόμενο γράφημα και παράγει ένα συνδετικό δένδρο.

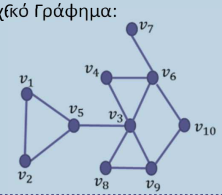
Στην αρχικοποίηση:
- Τοποθετούμε αυθαίρετα μία κορυφή στο συνδετικό δένδρο

Σε κάθε βήμα:
- Επιλέγουμε τρέχουσα κορυφή (με βάση την σειρά με την οποία μπήκε στο συνδετικό δένδρο)
- Κάθε γειτονική της κορυφή που δεν έχει μπει στο δένδρο την θέτουμε ως παιδί της (με αυθαίρετη σειρά)

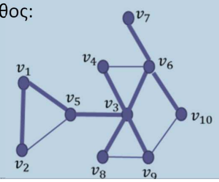
Τερματισμός:
- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

Παράδειγμα:

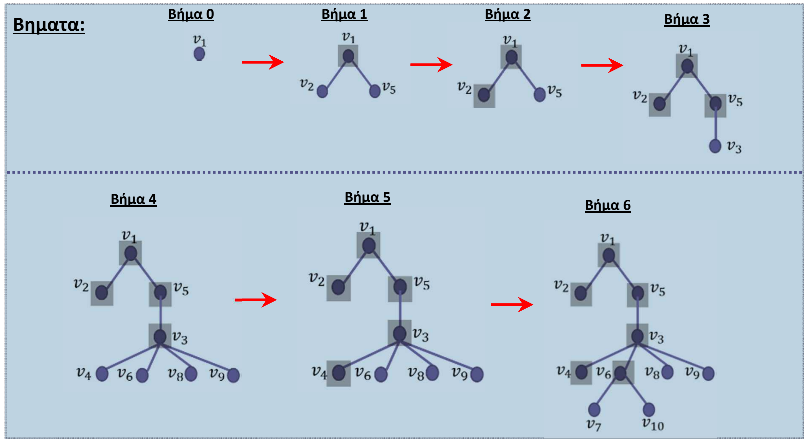
Αρχικό Γράφημα:



Συνδετικό Δένδρο της Κατά Βάθος:



Βηματα:



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ PRIM

Ορισμός: Σε ένα συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E,W)$ ορίζουμε ως **ελάχιστο συνδετικό δένδρο Τ** (ή αλλιώς ελάχιστο **γεννητορικό** ή ελάχιστο **επικαλυπτικό** δένδρο) του γραφήματος:
- Ένα υπογράφημα του G που είναι δένδρο, περιέχει όλες τις κορυφές του G και έχει ελάχιστο βάρος (άθροισμα βαρών των ακμών του)

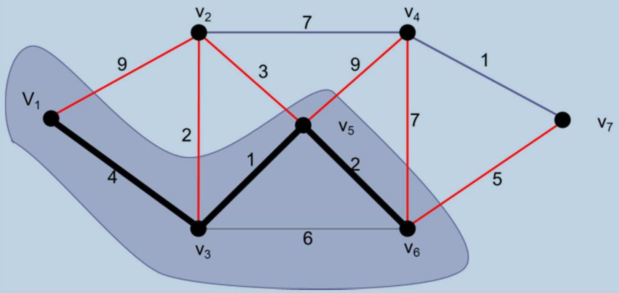
Σκιαγράφηση Αλγορίθμου Prim:

Στην αρχικοποίηση:
- Τοποθετούμε αυθαίρετα μία κορυφή στο συνδετικό δένδρο

Σε κάθε βήμα:
- Υποψήφιες ακμές για να μπουν στο συνδετικό δένδρο είναι εκείνες οι ακμές που έχουν το ένα τους άκρο στο υπο κατασκευή συνδετικό δένδρο και το άλλο τους άκρο εκτός του συνδετικού δένδρου.
- Επιλέγεται η ακμή με το ελάχιστο βάρος από τις υποψήφιες
- Η ακμή εισάγεται στο δένδρο καθώς και το άκρο της που δεν ανήκε στο δένδρο.

Τερματισμός:
- Όταν όλες οι κορυφές εισαχθούν στο δένδρο.

Παράδειγμα: Σχηματική απεικόνιση μετά την εκτέλεση 3 βημάτων σε ένα γράφημα:



Επόμενη ακμή που επιλέγεται είναι η $[v_2,v_3]$

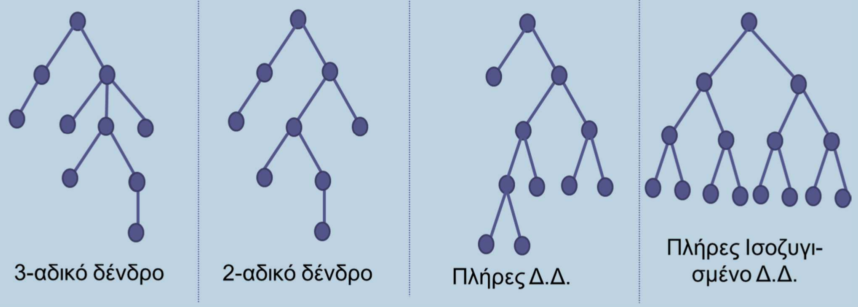
ΣΥΝΟΨΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

	Dijkstra	Prim	Κατά Βάθος	Κατά Πλάτος	
Συντομότερα Μονοπάτια	√	×	×	Αν όλα τα βάρη ίδια: √	$(+C)>0$: Δεν διατηρείται $(\times C)>0$: Διατηρείται
Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο	Αν όλα τα βάρη ίδια: √	√	Αν όλα τα βάρη ίδια: √	Αν όλα τα βάρη ίδια: √	$(+C)>0$: Διατηρείται $(\times C)>0$: Διατηρείται
Συνδετικό Δένδρο	√	√	√	√	
	Αρν.Βάρη: ×	Αρν.Βάρη: √			

Ορισμοί:

- Το **m-αδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει το πολύ m παιδιά
- Το **δυαδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει το πολύ 2 παιδιά
- Το **πλήρες δυαδικό δένδρο** είναι ριζωμένο δένδρο που κάθε κορυφή έχει 0 ή 2 παιδιά
- Το **πλήρες ισοζυγισμένο δυαδικό δένδρο** είναι πλήρες δυαδικό δένδρο και όλα τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο του δένδρου.

Παράδειγμα: Το ακόλουθο είναι ένα δένδρο:



Λήμματα:

- Ένα **πλήρες ισοζυγισμένο δυαδικό δένδρο** με ύψος H έχει συνολικά $2^{H+1}-1$ κορυφές όπου:
  - οι 2^H είναι φύλλα και
  - οι 2^H-1 είναι εσωτερικές κορυφές
- Σε ένα πλήρες δυαδικό ισοζυγισμένο δένδρο ύψους H ισχύει $H=\log_2 t$ (όπου t τα φύλλα του δένδρου)
- Σε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους H ισχύει $H \geq \log_2 t$ (όπου t τα φύλλα του δένδρου)

Ορισμός: Ένα **Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης** είναι ένα Δυαδικό Δένδρο που σε κάθε κορυφή του έχει αποθηκευτεί μια πληροφορία με την ιδιότητα:

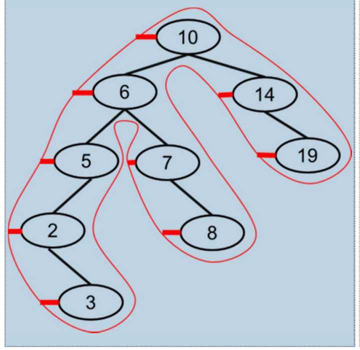
- Στις κορυφές του αριστερού του υποδένδρου έχουν αποθηκευτεί τιμές «μικρότερες» της ρίζας.
- Στις κορυφές του δεξιού του υποδένδρου έχουν αποθηκευτεί τιμές «μεγαλύτερες» της ρίζας.
- Η ίδια ιδιότητα ισχύει σε οποιοδήποτε υποδένδρο του δυαδικού δένδρου αναζήτησης

ΔΙΑΣΧΙΣΕΙΣ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ:

Την **προδιατεταγμένη διάσχιση**. Που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:

- Τρέχουσα Κορυφή, Αριστερό Υποδένδρο, Δεξί Υποδένδρο
- (Γραμμή Αριστερά)

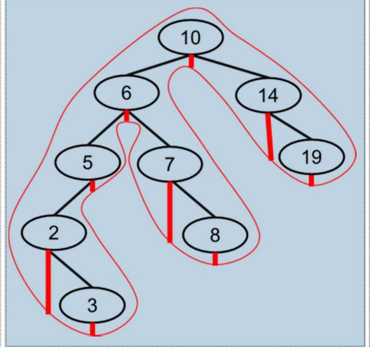
(σειρά επίσκεψης): 10,6,5,2,3,7,8,14,19



Την **ενδοδιατεταγμένη διάσχιση**. Που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:

- Αριστερό Υποδένδρο, Τρέχουσα Κορυφή, Δεξί Υποδένδρο
- (Γραμμή Κάτω)

(σειρά επίσκεψης): 2,3,5,6,7,8,10,14,19



Την **μεταδιατεταγμένη διάσχιση**. Που εκτελεί τη σειρά επίσκεψης:

- Αριστερό Υποδένδρο, Δεξί Υποδένδρο, Τρέχουσα Κορυφή
- (Γραμμή Δεξιά)

(σειρά επίσκεψης): 2,3,5,6,7,8,10,14,19