ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Μάθημα 1.6:
Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α

- Η χρήση εκθετικών γεννητριών για την μοντελοποίηση προβλημάτων διατάξεων και διανομής διαφορετικών.
- Οι μεθοδολογίες για τις ειδικές κατηγορίες ασκήσεων.

Επίπεδο Β

- (-)

Επίπεδο Γ

- (-)

Β. Θεωρία
Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων ως εξής:

- Καταστρώνουμε απλή γεννήτρια συνάρτηση (Μάθημα 1.5) όταν πρέπει να μοντελοποιήσουμε:
  - Ένα πρόβλημα επιλογής (συνδυασμών)
  - Ένα πρόβλημα διανομής ομοίων αντικειμένων σε υποδοχές
- Καταστρώνουμε **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση (Μάθημα 1.6)** όταν πρέπει να μοντελοποιήσουμε:
  - Ένα πρόβλημα διάταξης
  - Ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων χωρίς σειρά στις υποδοχές
- Ενώ μέσω αλγεβρικού «κόλπου» **(Μάθημα 1.6)** μπορούμε να μοντελοποιήσουμε:
  - Ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων με σειρά στις υποδοχές.

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελόποίηση προβλημάτων διατάξεων

Για να λύσω ένα πρόβλημα διάταξης καταστρώνω μια εκθετική γεννήτρια συνάρτηση ως εξής:

Μεθοδολογία Μοντελοποίησης Προβλημάτων Διατάξεων

1. Εντοπίζω τα διαφορετικά αντικείμενα τα οποία διατάσσω

   Για κάθε διαφορετικό αντικείμενο γράφω τον απαριθμητή ως μέρος της σειράς:

   $$\boxed{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots}$$

   Συγκεκριμένα εμφανίζω τον όρο $x^i/i!$, αν έχω δικαίωμα να έχω i φορές το συγκεκριμένο αντικείμενο στην διάταξη.
2. Γραφω την γεννήτρια ως το γινόμενο των επιμέρους απαριθμητών που έχω καταγράψει.
3. Υποδεικνύω τον συντελεστή του όρου $x^k/k!$, στο ανάπτυγμα της γεννήτριας όπου k το πλήθος των θέσεων της διάταξης.

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελόποίηση προβλημάτων διατάξεων

Παράδειγμα μοντελοποίησης προβλήματος διάταξης:

Με πόσους τρόπους μπορώ να κατασκευάσω μια δυαδική συμβολοσειρά με άρτιους άσσους και περιττά μηδενικά, μήκους 5;

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώ εκθετική γεννήτρια συνάρτηση γιατί πρόκειται για πρόβλημα διάταξης

- Ο απαριθμητής για τους άσσους είναι: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$
- Ο απαριθμητής για τα μηδενικά είναι: $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)\cdot\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)$

Και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^5/5!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

1. Μοντελόποίηση προβλημάτων διατάξεων

Υπολογισμός Συντελεστή

Όπως είδαμε κάνουμε υπολογισμό του συντελεστή μόνο εφόσον μας το ζηταει ρητά η εκφώνηση της άσκησης

ΛΥΣΗ:

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)\cdot\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^2}{2!}\cdot x+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{x^5}{5!}+\frac{x^4}{4!}\cdot x+\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{x^5}{5!}=$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{2!3!}+\frac{x^7}{2!5!}+\frac{x^5}{4!}+\frac{x^7}{4!3!}+\frac{x^9}{4!5!}=$$

Άρα ο ζητούμενος όρος εμφανίζεται ως:

$$\frac{x^5}{5!}+\frac{x^5}{2!3!}+\frac{x^5}{4!}=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^5}{2!3!}\cdot\frac{5!}{5!}+\frac{x^5}{4!}\cdot\frac{5!}{5!}=\frac{x^5}{5!}+\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{x^5}{5!}+\frac{5!}{4!}\cdot\frac{x^5}{5!}=\left(1+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{4!}\right)\cdot\frac{x^5}{5!}$$

Συνεπώς ο ζητούμενος συντελεστής είναι:

$$1+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{4!}$$

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

2. Μοντελόποίηση προβλημάτων Διανομής Διαφορετικών Χωρίς Σειρά

Για να λύσω ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές (χωρίς σειρά στις υποδοχές) καταστρώνω μια εκθετική γεννήτρια συνάρτηση ως εξής:

Μεθοδολογία Μοντελοποίησης Προβλημάτων Διανομής Διαφορετικών Χ.Σ.

1. Εντοπίζω τις υποδοχές στις οποίες κάνω διανομή των διαφ/κων Χ.Σ.
   Για κάθε υποδοχή γράφω τον απαριθμητή ως μέρος της σειράς:

$$\boxed{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots}$$

   Συγκεκριμένα εμφανίζω τον όρο $x^i/i!$, αν έχω δικαίωμα να έχω i αντικείμενα στην υποδοχή.
2. Γραφω την γεννήτρια ως το γινόμενο των επιμέρους απαριθμητών που έχω καταγράψει.
3. Υποδεικνύω τον συντελεστή του όρου $x^k/k!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας όπου k το πλήθος των αντικειμένων που διανέμω.

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

2. Μοντελόποίηση προβλημάτων Διανομής Διαφορετικών Χωρίς Σειρά

Παράδειγμα μοντελοποίησης προβλημάτων διανομής διαφορετικών χ.σ.:

Έχουμε 10 αριθμημένους βόλους. Με πόσους τρόπους μπορώ να τους μοιράσω σε 3 παιδιά, ώστε το 1ο παιδί να πάρει ακριβώς 3 βόλους, το 2ο παιδί να πάρει το πολύ 2 βόλους και το 3ο παιδί τουλάχιστον 6 βόλους.

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώ εκθετική γεννήτρια συνάρτηση γιατί πρόκειται για πρόβλημα διανομής διαφορετικών χωρίς σειρά.

- Ο απαριθμητής για την 1η υποδοχή (1ο παιδί) είναι: $\frac{x^3}{3!}$
- Ο απαριθμητής για την 2η υποδοχή (2ο παιδί) είναι: $1+x+\frac{x^2}{2!}$
- Ο απαριθμητής για την 3η υποδοχή (3ο παιδί) είναι: $\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{x^{10}}{10!}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $\frac{x^3}{3!}\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\cdot\left(\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{x^{10}}{10!}\right)$

Και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^{10}/10!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

3. Μοντελόποίηση προβλημάτων Διανομής Διαφορετικών Με Σειρά

Για να λύσω ένα πρόβλημα διανομής διαφορετικών αντικειμένων σε υποδοχές (με σειρά στις υποδοχές) καταστρώνω μια εκθετική γεννήτρια:

Μεθοδολογία Μοντελοποίησης Προβλημάτων Διανομής Διαφορετικών Μ.Σ.

1. Εντοπίζω τις υποδοχές στις οποίες κάνω διανομή των διαφ/κων Μ.Σ.

   Για κάθε υποδοχή γράφω τον απαριθμητή ως μέρος της σειράς:

$$\boxed{1+x+2!\frac{x^2}{2!}+3!\frac{x^3}{3!}+4!\frac{x^4}{4!}+5!\frac{x^5}{5!}+6!\frac{x^6}{6!}+\ldots+n!\frac{x^n}{n!}+\ldots}$$

   Συγκεκριμένα εμφανίζω τον όρο $x^i/i!$, αν έχω δικαίωμα να έχω i αντικείμενα στην υποδοχή (*πολλαπλασιασμένο με τους τρόπους διάταξης στην υποδοχή*).
2. Γραφω την γεννήτρια ως το γινόμενο των επιμέρους απαριθμητών που έχω καταγράψει.
3. Υποδεικνύω τον συντελεστή του όρου $x^k/k!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας όπου k το πλήθος των αντικειμένων που διανέμω.

Β. Θεωρία

1. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

3. Μοντελόποίηση προβλημάτων Διανομής Διαφορετικών Με Σειρά

Παράδειγμα μοντελοποίησης προβλημάτων διανομής διαφορετικών μ.σ.:

Έχουμε 10 επιβάτες σε ένα τρένο. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν στις 3 στάσεις που απομένουν, ώστε στην 1η στάση να κατέβουν ακριβώς 3 επιβάτες, στη 2η στάση να κατέβουν το πολύ 2 επιβάτες και στη 3η στάση τουλάχιστον 6 επιβάτες, αν έχει σημασία η σειρά με την οποία κατεβαίνουν οι επιβάτες στις στάσεις.

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώ εκθετική γεννήτρια συνάρτηση γιατί πρόκειται για πρόβλημα διανομής διαφορετικών, αλλά πολλαπλασιάζω κάθε όρο με τους τρόπους διάταξης των αντικειμένων στις υποδοχές.

- Ο απαριθμητής για την 1η υποδοχή (1η σταση) είναι: $3!\frac{x^3}{3!}$
- Ο απαριθμητής για την 2η υποδοχή (2η σταση) είναι: $1+x+2!\frac{x^2}{2!}$
- Ο απαριθμητής για την 3η υποδοχή (3η σταση) είναι: $6!\frac{x^6}{6!}+7!\frac{x^7}{7!}+\ldots+10!\frac{x^{10}}{10!}$

Συνεπώς η γεννήτρια είναι: $\left(3!\cdot\frac{x^3}{3!}\right)\cdot\left(1+x+2!\cdot\frac{x^2}{2!}\right)\cdot\left(6!\cdot\frac{x^6}{6!}+7!\cdot\frac{x^7}{7!}+\ldots+10!\cdot\frac{x^{10}}{10!}\right)$

Και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^{10}/10!$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας.

Β. Θεωρία

2. Εναλλακτικές Αναπαραστάσεις Γεννητριών

Ισχύουν οι εξής συμβολισμοί για τους απαριθμητές:

- Απαριθμητής απλής γεννήτριας: $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
- Απαριθμητής εκθετικής γεννήτριας: $e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την καταγραφή γεννητριών με πιο κομψο τρόπο. Από τα παραπάνω προκύπτουν

Εκθετικός Απαριθμητής για άρτιο πλήθος $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Εκθετικός Απαριθμητής για περιττό πλήθος $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

Απλή Γεννήτρια χωρίς περιορισμούς $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$

Εκθετική Γεννήτρια χωρίς περ/μους $e^{nx} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$

Β. Θεωρία

3. Υπολογισμός Συντελεστών

- Ο υπολογισμός συντελεστών δεν ζητειται στις εξετάσεις. Ωστόσο θα πρέπει να γνωρίζουμε να εξάγουμε τον συντελεστή των γεννητριών που αντιστοιχούν στα μοντέλα της συνδυαστικής:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ	ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ	ΟΡΟΣ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ
Διαταξεις k από n χωρίς επανάληψη	$(1+x)^n$	$\frac{x^k}{k!}$	$P(n,k)$
Διαταξεις k από n με επανάληψη	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^n$	$\frac{x^k}{k!}$	n^k
Μεταθέσεις Ομάδων Ομοίων	$\frac{x^{q_1}}{q_1!}\cdot\frac{x^{q_2}}{q_2!}\cdot\frac{x^{q_3}}{q_3!}\dots\frac{x^{q_k}}{q_k!}$	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{n!}{q_1!q_2!q_3!\dots q_k!}$
Μεταθέσεις Διαφορετικών	x^n	$\frac{x^n}{n!}$	$n!$
Συνδυασμοί k από n χωρίς επανάληψη	$(1+x)^n$	x^k	$\binom{n}{k}$
Συνδυασμοί k από n με επανάληψη	$(1+x+x^2+x^3+\dots)^n$	x^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Διανομή n ομοίων σε m υποδοχές	$(1+x+x^2+x^3+\dots)^m$	x^n	$\binom{n+m-1}{n}$
Διανομή n διαφ/κων σε m υποδοχές (χωρις σειρά)	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^m$	$\frac{x^n}{n!}$	m^n
Διανομή n διαφ/κων σε m υποδοχές (με σειρά)	$(1+x+x^2+x^3+\dots)^m$	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Ένα πλοίο διαθέτει 48 σημαίες, από τις οποίες 12 κόκκινες, 12 άσπρες, 12 μπλέ και 12 μαύρες. Δώδεκα από αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε ένα κατακόρυφο ιστό ώστε να ανταλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση για τον υπολογισμό του πλήθους των μηνυμάτων που χρησιμοποιούν άρτιο αριθμό από μπλε σημαίες και περιττό αριθμό από άσπρες σημαίες.

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Βρείτε γεννήτρια συνάρτηση για την εύρεση του πλήθους των διαφορετικών συμβολοσειρών μήκους n με τα γράμματα Α,Β,Γ όταν κάθε γράμμα πρέπει να επιλεγεί τουλάχιστον 1 φορά, το Α πρέπει να επιλεγεί άρτιο πλήθος φορών και το Γ περιττό πλήθος φορών.

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Η βουλή πρόκειται να ορίσει 8 επιτροπές από 20 βουλευτές. Κάθε επιτροπή είναι το πολύ 4μελής και θα πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα μέλος. Κάθε ένας από τους 20 βουλευτές πρέπει να συμμετέχει σε ακριβώς 1 επιτροπή. Διατυπώστε γεννήτρια συνάρτηση για το πρόβλημα και υποδείξτε τον συντελεστή του όρου στον οποίο βρίκεται το πλήθος των τρόπων συγκρότησης των επιτροπών.

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 4

(A) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα διάταξης k αντικειμένων από n χωρίς επανάληψη.
(B) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών επιλογών;
(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 5

(Α) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα διάταξης k αντικειμένων από n με επανάληψη.
(Β) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών επιλογών;
(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 6

(Α) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα μεταθέσεων n διαφορετικών αντικειμένων.
(Β) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών επιλογών;
(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 7

(Α) Δώστε την γεννήτρια συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα μεταθέσεων n αντικειμένων που χωρίζονται σε k ομάδες ομοίων αντικειμένων, όπου η 1η ομάδα έχει q_1 αντικείμενα, η 2η ομάδα έχει q_2 αντικείμενα και η kη ομάδα έχει q_k αντικείμενα.

(Β) Ποιου όρου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των δυνατών επιλογών;

(Γ) Ποια είναι η τιμή του συγκεκριμένου συντελεστή;

Γ. Ασκήσεις
Ερωτήσεις 1

Συμβολίζουμε με α_6 τον αριθμό των ακολουθιών με 6 γράμματα από το σύνολο {Α, Β, Γ, Δ} όπου το Α εμφανίζεται άρτιο και το Β περιττό αριθμό φορών.

1. Το α_6 είναι ο συντελεστής του x^6 στην παράσταση

$$\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)\left(x+x^3+x^5+\cdots\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^2$$

2. Το α_6 είναι ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

3. Το α_6 είναι ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^2$$

4. Το α_6 είναι ο συντελεστής του $x^6/6!$ στην παράσταση

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^2$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Έχουμε έναν αριθμό από ίδιες πράσινες μπάλες και από αριθμημένες (διακεκριμένες) κόκκινες μπάλες που διανέμονται σε m διακεκριμένες υποδοχές. Θεωρούμε ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία τοποθετούνται οι μπάλες στις υποδοχές. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών διανομών για:

A. την διανομή $n \geq m$ ίδιων πράσινων μπαλών ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον μία πράσινη μπάλα.
B. την διανομή $k \geq m$ αριθμημένων κόκκινων μπαλών ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον μία κόκκινη μπάλα.
C. την διανομή $n \geq m$ ίδιων πράσινων μπαλών και n αριθμημένων κόκκινων μπαλών ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή και κάθε υποδοχή να έχει τον ίδιο αριθμό από πράσινες και κόκκινες μπάλες.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Έχουμε μία συλλογή Σ από πιόνια που στο καθένα είναι γραμμένο ένα γράμμα της ελληνικής αλφαβήτου. Η συλλογή Σ είναι τέτοια που το ίδιο φωνήεν να μην εμφανίζεται σε περισσότερα από ένα πιόνι, ενώ αντίθετα υπάρχει απεριόριστος αριθμός από πιόνια για κάθε σύμφωνο.

Α. Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό a_n των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς να επιλέξει n γράμματα από την συλλογή Σ.

Β. Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό a_n των διαφορετικών λέξεων (με ή χωρίς νόημα) που μπορεί να κατασκευάσει κανείς με n γράμματα από την συλλογή Σ.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Σε μια αίθουσα συνεδριάσεων πρόκειται να εισέλθουν 12 διακεκριμένα άτομα χρησιμοποιώντας 3 διακεκριμένες εισόδους. Επιπλέον σε κάθε είσοδο θα επιτραπεί να εισέλθουν το πολύ 6 άτομα. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο τους οποίου ο συντελεστής θα μας δώσει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να εισέλθουν στην αίθουσα τα 12 άτομα αν έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχονται τα άτομα σε κάθε είσοδο.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Α) Σχηματίστε τη γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε το συντελεστή που μας δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να καθίσουν *n* θεατές σε 7 διακεκριμένες σειρές ενός θεάτρου αν σε κάθε σειρά πρέπει να καθίσουν τουλάχιστον 2 θεατές, στην τελευταία σειρά δεν θα πρέπει να καθίσουν πάνω από 10 θεατές και κάθε σειρά αποτελείται από 15 θέσεις. Στο ερώτημα αυτό μας ενδιαφέρει μόνο το πόσοι θεατές θα καθίσουν σε κάθε σειρά και όχι ποιοι συγκεκριμένοι. Επιπλέον δε μας ενδιαφέρει η διάταξη τοποθέτησης των θεατών σε κάθε σειρά.

Β) Πως διαφοροποιείται η απάντηση στο Α) όταν έχει σημασία ποιοι συγκεκριμένοι θεατές κάθονται σε κάθε σειρά, αλλά όχι η διάταξη των θεατών σε κάθε σειρά;

Γ) Πως διαφοροποιείται η απάντηση στο Α) όταν έχει σημασία ποιοι συγκεκριμένοι θεατές κάθονται σε κάθε σειρά καθώς και η διάταξη των θεατών σε κάθε σειρά (από τα αριστερά προς τα δεξιά όπως βλέπουν τη σκηνή), χωρίς όμως να λαμβάνονται υπόψη οι τυχόν κενές θέσεις κάθε σειράς;