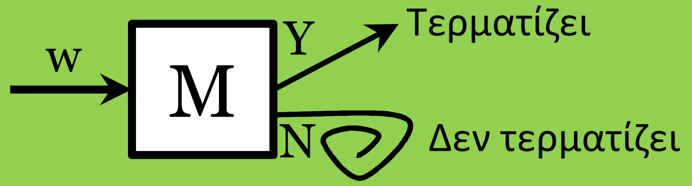
Μία Μηχανή Turing θα λέμε ότι **αποδέχεται** (ή ημι-αποφασίζει ή αναγνωρίζει) μία γλώσσα αν για κάθε συμβολοσειρά εισόδου w:

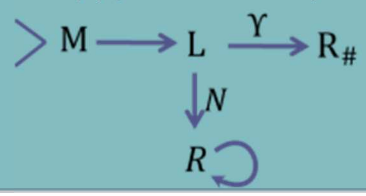
- <u>Τερματίζει</u> με σχηματισμό (h, #u<u>a</u>v#) αν $w \in L$
- <u>Δεν Τερματίζει</u> αν $w \notin L$ (πέφτει σε βρόχο)

Αν για μία γλώσσα L υπάρχει μηχανή Turing που την ημι-αποφασίζει **λέγεται Turing Αποδεκτή** (ή Αναδρομικά Απαριθμήσιμη ή Turing-Απαριθμήσιμη ή Αναγνωρίσιμη) Γλώσσα

Σχηματικά απεικονίζουμε μια αποδεκτή γλώσσα ως εξής:



ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε Turing-Αποφασίσιμη γλώσσα είναι Turing-Αποδεκτή γλώσσα.
(Σκιαγράφηση Απόδειξης αν M αποφασίσιμη:)



<u>**Θεώρημα:**</u> Η γλώσσα $\boldsymbol{H} = \{< M, w >|$ Η Μ τερματίζει με είσοδο w$\}$ είναι **αποδεκτή** γλώσσα

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος:</u>

Δείχνουμε ότι η Η είναι αποδεκτή γλώσσα κατασκευάζοντας μία μηχανή Turing M' η οποία ημι-αποφασίζει την Η ως εξής. Η M' με είσοδο <M,w> λειτουργεί όπως η καθολική μηχανή Turing U, δηλαδή προσομοιώνει την λειτουργία της μηχανής Truing M με είσοδο w.

Είναι προφανές ότι:

- Αν η Μ με είσοδο w τερματίζει, τότε θέτουμε την M' να τερματίζει.
- Αν η Μ με είσοδο w κρεμάει, μπορούμε να το «πιάσουμε» (π.χ. θέτοντας έναν ειδικο χαρακτήρα στο αριστερό άκρο της ταινίας της Μ και αν διαβαστεί αυτός ο χαρακτήρας, τότε η M' θα πέφτει σε ατέρμονα βρόχο).
- Αν η Μ με είσοδο w δεν τερματίζει, τότε και η M' δεν τερματίζει.

Συνεπώς η M' ημι-αποφασίζει την Η, άρα η Η είναι αποδεκτή γλώσσα.

Η L_1 είναι Αποδεκτή Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την ημι-αποφασίζει έστω M_1
Η L_2 είναι Αποδεκτή Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την ημι-αποφασίζει έστω M_2

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στην **Ένωση**

Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M’ η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
Εκτελεί **εναλλάξ** τις M_1 και M_2, δηλαδή τρέχει εναλλάξ ένα βήμα στην M_1, ένα βήμα στην M_2 κ.ο.κ. Εάν σε κάποιο βήμα μία από τις δύο τερματίσει, τότε θέτουμε την M’ να τερματίσει.

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στην **Τομή**

Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M’ η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1) Τρέχει την M_1 με είσοδο w.
Αν η M_1 δεν τερματίσει (άρα η w δεν ανήκει στην L_1), τότε και η M’ δεν τερματίζει (όπως θα όφειλε, αφού η w δεν ανήκει στην $L_1 \cap L_2$)
Αν η M_1 τερματίσει (άρα η w ανήκει στην L_1), τότε και η M’ προχωρά στο επόμενο βήμα.
2) Τρέχει την M_2 με είσοδο w.
Αν η M_2 δεν τερματίσει (άρα η w δεν ανήκει στην L_2), τότε και η M’ δεν τερματίζει (όπως θα όφειλε, αφού η w δεν ανήκει στην $L_1 \cap L_2$)
Αν η M_2 τερματίσει (άρα η w ανήκει στην L_2), τότε και η M’ τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στην **Παράθεση**

Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M’ η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1. Πρώτα μία μηχανή Turing διαχωριστής D παράγει όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της συμβολοσειράς w στην παράθεση δύο συμβολοσειρών w_1 και w_2 (δηλαδή όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της w ως w_1w_2.)
2. Για κάθε διαχωρισμό εξετάζεται παράλληλα αν η συμβολοσειρά w ανήκει στην παράθεση ως εξής:
   - Για τον πρώτο διαχωρισμό: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2.
   - Για τον δεύτερο διαχωρισμό: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2.

   …
   - Για τον τελευταίο διαχωρισμό: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2.
3. Αν σε κάποιο βήμα τερματίσουν οι δύο μηχανές που εξετάζουν έναν διαχωρισμό, τότε η M’ τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στο **Αστέρι Kleene**

Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M’ η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1. Πρώτα μία μηχανή Turing διαχωριστής D παράγει όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της συμβολοσειράς w στην παράθεση 1..|w| συμβολοσειρών (δηλαδή όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της w ως $w_1w_2…w_k$ με k=1,2,…|w|)
2. Για κάθε διαχωρισμό εξετάζεται παράλληλα αν η συμβολοσειρά w ανήκει στο αστέρι Kleene:
   - Για τον πρώτο διαχωρισμό, έστω $w_1w_2…w_i$: Τρέχει ένα βήμα στην M με είσοδο w_1, ένα βήμα της M με είσοδο w_2,…, ένα βήμα της M με είσοδο w_i.

   …
   - Για τον τελευταίο διαχωρισμό $w_1w_2…w_j$: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2…, ένα βήμα της M με είσοδο w_j.
1. Αν σε κάποιο βήμα τερματίσουν όλες οι μηχανές που εξετάζουν έναν διαχωρισμό, τότε η M’ τερματίζει.