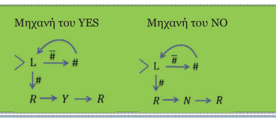
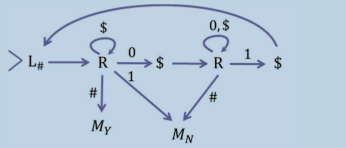
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΩΝ ΓΛΩΣΣΩΝ

Μία **μηχανή Turing** θα λέμε ότι αποφασίζει μία γλώσσα αν για κάθε συμβολοσειρά εισόδου w:
- Τερματίζει με σχηματισμό (h, #Y#) αν $w \in L$
- Τερματίζει με σχηματισμό (h, #N#) αν $w \notin L$

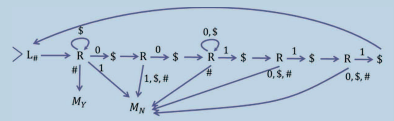
Αν για μία γλώσσα L υπάρχει μηχανή Turing που την αποφασίζει λέγεται Turing-Αποφασίσιμη (ή Αναδρομική ή Επιλύσιμη ή Αποφασίσιμη Γλώσσα)



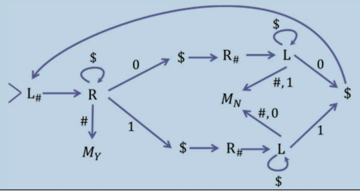
Ισότητα $L = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$



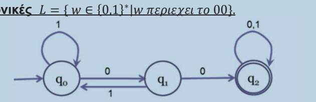
Αναλογία $L = \{0^{2n} 1^{3n} | n \geq 0\}$



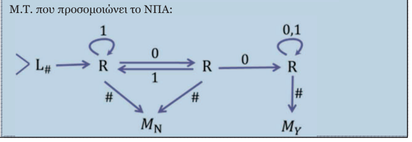
Παλινδρομικότητα $L = \{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$



Κανονικές $L = \{ w \in \{0,1\}^* | w \text{ περιεχει το } 00\}$.



Μ.Τ. που προσομοιώνει το ΝΠΑ:



ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $L_1 \leq L_2$ (Υπάρχει αναγωγή από την L_1 στην L_2). Τότε ισχύουν τα εξής:
1. Αν η L_2 είναι Turing-Αποφασίσιμη, τότε και η L_1 είναι Turing-Αποφασίσιμη
2. **Αν η L_1 δεν είναι Turing-Αποφασίσιμη, τότε και η L_2 δεν είναι Turing-Αποφασίσιμη**
3. Αν η L_2 είναι Turing-Αποδεκτή, τότε και η L_1 είναι Turing-Αποδεκτή
4. Αν η L_1 είναι μη Turing-Αποδεκτή, τότε και η L_2 είναι μη Turing-Αποδεκτή

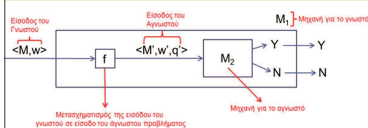
Από την εκφώνηση εντοπίζουμε την **γνωστή** και την **άγνωστη** μη επιλύσιμη γλώσσα. Για κάθε μία από αυτές εντοπίζουμε την είσοδό τους και το ερώτημα το οποίο θέτουν.

Γνωστή μη επιλύσιμη:

$H = \{\underbrace{<M,w>}_{\text{Είσοδος Γνωστής}} | \underbrace{H \text{ M με τερματίζει με είσοδο w}}_{\text{Ερώτημα Γνωστής}}\}$

Αγνωστή μη επιλύσιμη:

$Q = \{\underbrace{<M,w,q>}_{\text{Είσοδος Αγνωστής}} | \underbrace{H \text{ M με είσοδο w περνάει από την κατάσταση q}}_{\text{Ερώτημα Αγνωστής}}\}$



Απόδειξη: Γνωστή μη επιλύσιμη γλώσσα:
$L_1 = \{< M,w >| H \text{ M με τερματίζει με είσοδο w}\}$
Αγνωστή μη επιλύσιμη γλώσσα: $L_2 = \{< M,w,q >| H \text{ M με είσοδο w περνάει από την κατάσταση q}\}$

Έστω ότι η γλώσσα L_2 είναι αποφασίσιμη, άρα υπάρχει μια μηχανή Turing που την αποφασίζει, εστω M_2. Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing M_1 που αποφασίζει τη γλώσσα L_1 ως εξής: — standard

Η M_1 με είσοδο <M,w> θέτει M'=M, w'=w και q=τελική κατάσταση του M. Έπειτα περνάει την είσοδο <M',w',q> στη μηχανή M_2 — Περιγραφή του μετασχηματισμού

1. Αν η M_2 απαντήσει ΝΑΙ,
   τότε η M περνάει από την τελική κατάσταση h, με είσοδο w, — YES στο ερώτημα του αγνωστού
   άρα η M τερματίζει με είσοδο w, — YES στο ερώτημα του γνωστού
   θέτουμε τη M_1 να απαντήσει ΝΑΙ.
2. Αν η M_2 απαντήσει ΟΧΙ,
   τότε η M δεν περνάει από την τελική κατάσταση h, με είσοδο w, — NO στο ερώτημα του αγνωστού
   άρα η M δεν τερματίζει με είσοδο w, — NO στο ερώτημα του γνωστού
   θέτουμε τη M_1 να απαντήσει ΟΧΙ.

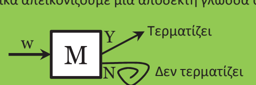
Κατασκευάσαμε μια Μ.Τ. που αποφασίζει την L_1. Άτοπο. Άρα η L_2 δεν είναι αποφασίσιμη — standard

ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

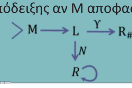
Μία Μηχανή Turing θα λέμε ότι **αποδέχεται** (ή ημι-αποφασίζει ή αναγνωρίζει) μία γλώσσα αν για κάθε συμβολοσειρά εισόδου w:
- Τερματίζει με σχηματισμό (h, #uav#) αν $w \in L$
- Δεν Τερματίζει αν $w \notin L$ (πέφτει σε βρόχο)

Αν για μία γλώσσα L υπάρχει μηχανή Turing που την ημι-αποφασίζει **λέγεται Turing Αποδεκτή** (ή Αναδρομικά Απαριθμήσιμη ή Turing-Απαριθμήσιμη ή Αναγνωρίσιμη) Γλώσσα

Σχηματικά απεικονίζουμε μια αποδεκτή γλώσσα ως εξής:



ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε Turing-Αποφασίσιμη γλώσσα είναι Turing-Αποδεκτή γλώσσα.
(Σκιαγράφηση Απόδειξης αν M αποφασίσιμη:)



Θεώρημα: Η γλώσσα $\boldsymbol{H} = \{< M,w >| \text{H M τερματίζει με είσοδο w}\}$ είναι **αποδεκτή** γλώσσα

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Δείχνουμε ότι η H είναι αποδεκτή γλώσσα κατασκευάζοντας μία μηχανή Turing M' η οποία ημι-αποφασίζει την H ως εξής. H M' με είσοδο <M,w> λειτουργεί όπως η καθολική μηχανή Turing U, δηλαδή προσομοιώνει την λειτουργία της μηχανής Truing M με είσοδο w.

Είναι προφανές ότι:
- Αν η M με είσοδο w τερματίζει, τότε θέτουμε την M' να τερματίζει.
- Αν η M με είσοδο w κρεμάει, μπορούμε να το «πιάσουμε» (π.χ. θέτοντας έναν ειδικο χαρακτήρα στο αριστερό άκρο της ταινίας της M και αν διαβαστεί αυτός ο χαρακτήρας, τότε η M' θα πέφτει σε ατέρμονα βρόχο).
- Αν η M με είσοδο w δεν τερματίζει, τότε και η M' δεν τερματίζει.

Συνεπώς η M' ημι-αποφασίζει την H, άρα η H είναι αποδεκτή γλώσσα.

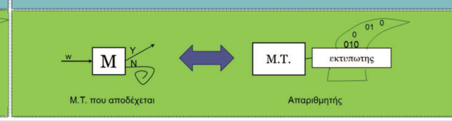
ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός:
- Μία γλώσσα θα λέγεται **λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν διαθέτει λεξικογραφικό Turing-Απαριθμητή
- **Λεξικογραφικός Turing Απαριθμητής** είναι μία Μ.Τ. που εκτυπώνει μία-μία τις συμβολοσειρές της γλώσσας με λεξικογραφική σειρά

Θεώρημα:
- Μία γλώσσα είναι **λεξικογραφικά Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν είναι **Turing-Αποφασίσιμη** γλώσσα

Ορισμός:
- Μία γλώσσα θα λέγεται **Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν διαθέτει Turing-Απαριθμητή
- **Turing Απαριθμητής** είναι μία Μ.Τ. που και πάλι εκτυπώνει όλες τις συμβολοσειρές της γλώσσας:
  - Ωστόσο τις εκτυπώνει με τυχαία σειρά και πιθανώς με επαναλήψεις
  - Όμως αν μια συμβολοσειρα ανήκει στην γλώσσα, τότε εγγυημένα σε κάποιο βήμα εκτύπωσης αυτή θα εκτυπωθεί!

Θεώρημα:
- Μία γλώσσα είναι **Turing-Απαριθμήσιμη** αν και μόνο αν είναι **Turing-Αποδεκτή** γλώσσα



Η Γλώσσα L={M | |L(M)|>3} είναι απαριθμήσιμή

Δοθείσης μιας μηχανής Turing M, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μηχανή Turing M' η οποία με τη διαδικασία της χελιδονοούρας απαριθμεί τις λέξεις της L(M). Συγκεκριμένα χρησιμοποιεί τη λεξικογραφική σειρά του αλφαβήτου της M και συγκεκριμένα:
Επαναλαμβάνει σε φάσεις:
- Στην 1η φάση παράγει την πρώτη συμβολοσειρά του Σ*
- Στην 2η φάση παράγει τις 2 πρώτες συμβολοσειρές του Σ*
- Στην 3η φάση παράγει τις 3 πρώτες συμβολοσειρές του Σ*
  κ.οκ.
- Στην n-οστή φάση προσομοιώνουμε την M κατά n βήματα στις n πρώτες συμβολοσειρές.

Κάθε συμβολοσειρά με την οποία η M τερματίζει, τυπώνεται και προχωράμε στην επόμενη φάση.
Τρέχουμε την M' και αν σε κάποια φάση οι λέξεις που απαριθμήσει γίνουν 4, τερματίζει. Αλλιώς δεν τερματίζει.
Κατασκευάσαμε Μ.Τ. η οποία ημιαποφασίζει την L άρα αυτή είναι αποδεκτή, άρα και απαριθμήσιμη.

ΚΛΕΙΣΤΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΦΑΣΙΣΙΜΩΝ

Η L_1 είναι Αποδεκτή Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την ημι-αποφασίζει έστω M_1
Η L_2 είναι Αποδεκτή Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την ημι-αποφασίζει έστω M_2

Κλειστότητα των Αποφασισίμων Γλωσσών στην **Ένωση**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1) Τρέχει την M_1 με είσοδο w. Αν η M_1 απαντήσει ΝΑΙ, τότε η M' απαντά ΝΑΙ και τερματίζει. Αν η M_1 απαντήσει ΌΧΙ προχωράει στο βήμα 2:
2) Τρέχει την M_2 με είσοδο w. Αν η η M_2 απαντήσει ΝΑΙ, τότε η M' απαντά ΝΑΙ και τερματίζει. Αν η M_2 απαντήσει ΌΧΙ τότε απαντά ΌΧΙ και τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποφασισίμων Γλωσσών στην **Τομή**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1) Τρέχει την M_1 με είσοδο w. Αν η M_1 απαντήσει ΟΧΙ, τότε η M' απαντά ΟΧΙ και τερματίζει. Αν η M_1 απαντήσει ΝΑΙ προχωρά στο βήμα 2:
2) Τρέχει την M_2 με είσοδο w. Αν η η M2 απαντήσει ΟΧΙ, τότε η M' απαντά ΟΧΙ και τερματίζει. Αν η M_2 απαντήσει ΝΑΙ τότε η M' απαντά ΝΑΙ και τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποφασισίμων Γλωσσών στην **Παράθεση**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1. Πρώτα μία μηχανή Turing διαχωριστής D παράγει όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της συμβολοσειράς w στην παράθεση δύο συμβολοσειρών w_1 και w_2 (δηλαδή όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της w ως $w_1 w_2$.)
2. Για κάθε δυνατό διαχωρισμό: Τρέχει την M_1 με είσοδο w_1 και την M_2 με είσοδο w_2. Αν και οι δύο μηχανές απαντήσουν ΝΑΙ, τότε η M' τερματίζει απαντώντας ΝΑΙ

Αν όλοι οι δυνατοί διαχωρισμοί απαντηθούν ΌΧΙ, τότε και η M' τερματίζει απαντώντας ΌΧΙ.

Κλειστότητα των Αποφασισίμων Γλωσσών στο **Συμπλήρωμα**
Η L είναι Αποφασίσιμη Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την αποφασίζει έστω M

Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1) Τρέχει την M με είσοδο w.
- Αν η M απαντήσει ΟΧΙ, τότε η M' απαντά ΝΑΙ και τερματίζει.
- Αν η M απαντήσει ΟΧΙ, τότε η M' απαντάει ΌΧΙ και τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποφασισίμων Γλωσσών στο **Αστέρι Kleene**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1. Πρώτα μία μηχανή Turing διαχωριστής D παράγει όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της συμβολοσειράς w στην παράθεση 1..|w| συμβολοσειρών (δηλαδή όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της w ως $w_1 w_2 \ldots w_k$ με k=1,2,…|w|)
2. Για κάθε δυνατό διαχωρισμό: Τρέχει την M διαδοχικά με εισόδους $w_1, w_2, \ldots, w_k$. Αν η M απαντήσει ΝΑΙ για όλες τις συμβολοσειρές τότε η M' τερματίζει απαντώντας ΝΑΙ.

Αν όλοι οι δυνατοί διαχωρισμοί απαντηθούν ΌΧΙ, τότε και η M' τερματίζει απαντώντας ΌΧΙ.

ΚΛΕΙΣΤΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΔΕΚΤΩΝ

Η L_1 είναι Αποδεκτή Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την ημι-αποφασίζει έστω M_1
Η L_2 είναι Αποδεκτή Γλώσσα, άρα υπάρχει μία μηχανη Turing που την ημι-αποφασίζει έστω M_2

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στην **Ένωση**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
Εκτελεί **εναλλάξ** τις M_1 και M_2, δηλαδή τρέχει εναλλάξ ένα βήμα στην M_1, ένα βήμα στην M_2 κ.ο.κ. Εάν σε κάποιο βήμα μία από τις δύο τερματίσει, τότε θέτουμε την M' να τερματίσει.

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στην **Τομή**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1) Τρέχει την M_1 με είσοδο w.
Αν η M_1 δεν τερματίσει (άρα η w δεν ανήκει στην L_1), τότε και η M' δεν τερματίζει (όπως θα όφειλε, αφού η w δεν ανήκει στην $L_1 \cap L_2$)
Αν η M_1 τερματίσει (άρα η w ανήκει στην L_1), τότε και η M' προχωρά στο επόμενο βήμα.
2) Τρέχει την M_2 με είσοδο w.
Αν η M_2 δεν τερματίσει (άρα η w δεν ανήκει στην L_2), τότε και η M' δεν τερματίζει (όπως θα όφειλε, αφού η w δεν ανήκει στην $L_1 \cap L_2$)
Αν η M_2 τερματίσει (άρα η w ανήκει στην L_2), τότε και η M' τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στην **Παράθεση**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1. Πρώτα μία μηχανή Turing διαχωριστής D παράγει όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της συμβολοσειράς w στην παράθεση δύο συμβολοσειρών w_1 και w_2 (δηλαδή όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της w ως $w_1 w_2$.)
2. Για κάθε διαχωρισμό εξετάζεται παράλληλα αν η συμβολοσειρά w ανήκει στην παράθεση ως εξής:
   - Για τον πρώτο διαχωρισμό: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2.
   - Για τον δεύτερο διαχωρισμό: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2.
   …
   - Για τον τελευταίο διαχωρισμό: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2.
3. Αν σε κάποιο βήμα τερματίσουν οι δύο μηχανές που εξετάζουν έναν διαχωρισμό, τότε η M' τερματίζει.

Κλειστότητα των Αποδεκτών Γλωσσών στο **Αστέρι Kleene**
Κατασκευάζουμε μία μηχανή Turing, έστω M' η οποία με είσοδο w λειτουργεί ως εξής:
1. Πρώτα μία μηχανή Turing διαχωριστής D παράγει όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της συμβολοσειράς w στην παράθεση 1..|w| συμβολοσειρών (δηλαδή όλους τους δυνατούς διαχωρισμούς της w ως $w_1 w_2 \ldots w_k$ με k=1,2,…|w|)
2. Για κάθε διαχωρισμό εξετάζεται παράλληλα αν η συμβολοσειρά w ανήκει στο αστέρι Kleene:
   - Για τον πρώτο διαχωρισμό, έστω $w_1 w_2 \ldots w_i$: Τρέχει ένα βήμα στην M με είσοδο w_1, ένα βήμα της M με είσοδο w_2,…, ένα βήμα της M με είσοδο w_i.
   …
   - Για τον τελευταίο διαχωρισμό $w_1 w_2 \ldots w_j$: Τρέχει ένα βήμα στην M_1 με είσοδο w_1 ένα βήμα της M_2 με είσοδο w_2…, ένα βήμα της M με είσοδο w_j.
1. Αν σε κάποιο βήμα τερματίσουν όλες οι μηχανές που εξετάζουν έναν διαχωρισμό, τότε η M' τερματίζει.