ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Σχεδιάζουμε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού σε **προβλήματα** που έχουν τα εξής **χαρακτηριστικά**:

- **Ιδιότητα των Βέλτιστων Επιμέρους Δομών:** Οτί για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να υπολογίσουμε την βέλτιστη λύση σε κάποια υποπροβλήματα, συνήθως με αναδρομή.
- **Μικρός Αριθμός Υποπροβλημάτων:** Το πλήθος των υποπροβλημάτων που πρέπει να λύσουμε είναι μικρό (δηλαδή πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος του προβλήματος)
- **Επικαλυπτόμενα Επιμέρους Προβλήματα:** Ότι λύνουμε πολλές φορές τα ίδια υποπροβλήματα με αποτέλεσμα να χάνουμε χρόνο

Βήματα Σχεδίασης Αλγόριθμου Δυναμικού Προγ/μού

1. Περιγράφουμε έναν **αναδρομικό αλγόριθμο** που λύνει το πρόβλημα
2. Δίνουμε την **αναδρομική σχέση** που υπολογίζει την βέλτιστη λύση (επίλυση από πάνω προς τα κάτω)
3. Διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι **τρεις συνθήκες** για την κατασκευή του αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού.
4. Με βάση την αναδρομική σχέση, κατασκευάζουμε την διαδικασία επίλυσης από τα μικρά προβλήματα σε όλο και μεγαλύτερα (**επίλυση από κάτω προς τα πάνω**)
6. Δίνουμε τον **επαναληπτικό αλγόριθμο** που κάνει την επίλυσή του προβλήματος
6. Υπολογίζουμε την **πολυπλοκότητα** του επαναληπτικού αλγορίθμου

Αλγόριθμοι Δυναμικού Προγραμματισμού:

1. **Υπολογισμός Αριθμού Fibonacci**. Πολυπλοκότητα: O(n)
2. **Αλυσιδωτός Πολλαπλασιασμός Πινάκων**. Πολυπλοκότητα O(n^3)
3. **Μέγιστη Κοινή Υπακολουθία**. Πολυπλοκότητα: Θ(nm).
4. **Συντομότερο Μονοπάτι σε Άκυκλο Κατευθυνόμενο Γράφημα (DAG)**. Πολυπλοκότητα: O(n^2).

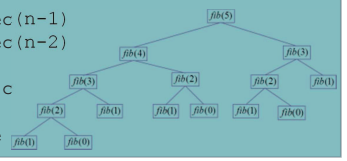
ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI

ΕΙΣΟΔΟΣ: Φυσικός n
ΕΞΟΔΟΣ: Ο n-οστός Fibonacci

$$f_n=\begin{cases}1, & n=1 \ \acute{\eta} \ n=2\\ f_{n-1}+f_{n-2}, & n>2\end{cases}$$

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΜΕ ΑΝΑΔΡΟΜΗ)

```
procedure FibRec(n)
   if n=1 or n=2 then
      return 1
   else
      a=FibRec(n-1)
      b=FibRec(n-2)
      c=a+b
      return c
   end if
end procedure
```



ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ:

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1), & n=1 \ \acute{\eta} \ n=2\\ T(n-1)+T(n-2)+\Theta(1), & n>2\end{cases}$$

Κάτω Φράγμα:

$$\underbrace{\mathrm{K}(n)=2\mathrm{K}(n-2)+\Theta(1)}_{\cdots\ \text{Μέθοδος Επανάληψης}}$$

$$T(n)=\Omega(2^{\frac{n}{2}})$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Υπολόγισε την λύση επαναληπτικά από 1…n

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ)

```
procedure FibSeq(n)
   A[1]=1
   A[2]=1
   for i=3 to n
      A[i]=A[i-1]+A[i-2]
   end for
   return A[n]
end procedure
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ:

1	2	3	4	5	6	…	n
1	1	2	3	5	8	…	fib(n)

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
T(n)=Θ(n)

Άνω Φράγμα:

$$\underbrace{\mathrm{A}(n)=2\mathrm{A}(n-1)+\Theta(1)}_{\cdots\ \text{Μέθοδος Επανάληψης}}$$

$$T(n)=O(2^n)$$

ΑΛΥΣΙΔΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΕΙΣΟΔΟΣ: $A_1,A_2,\ldots,A_n$ όπου ο πίνακας A_i είναι διάστασης d_{i-1} x d_i.
ΕΞΟΔΟΣ: Η σειρά που πολλαπλασιασμών του γινομένου A_1 x A_2 x … x A_n

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ (υπολογισμού της βέλτιστης λύσης):

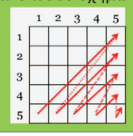
$$M[i,j]=\begin{cases}0, & i=j\\ \min\limits_{i\le k<j}\{M[i,k]+M[k+1,j]+d_{i-1}d_kd_j\}, & i<j\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ: για τον πολλαπλασιασμό πινάκων $A_1A_2A_3A_4$, όταν
A_1: 6x3, A_2: 3x4, A_3: 4x8, A_4:8x2, A_6: 2x3

	1	2	3	4
5				
4				A4 0
3			A3 0	A3A4 4x8x2=64
2		A2 0	A2A3 3x4x8=96	A2A3A4 (A2A3)A4=96+3x8x2=96+48=144 A2(A3A4)=64+3x4x2=64+24=88 88
1	A1 0	A1A2 5x3x4=60	A1A2A3 (A1A2)A3=60+5x4x8=220 A1(A2A3)=96+5x3x8=216 216	A1A2A3A4 A1(A2A3A4):88+5x3x2=88+30=118 (A1A2)(A3A4):60+64+5x4x2=164 (A1A2A3)A4:216+5x8x2=296 118

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Υπολόγισε την αναδρομή επαναληπτικά με βάση τη σειρά σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ)

```
procedure DP_MatMult(A1,A2,…,An)
   for i=1 to n
      m[i,i]=0
   end for
   for p=2 to n
      for i=2 to n-p+1
         j=i+p-1
         m[i,j]=+∞
         for k=1 to j-1
            q=M[i,k]+M[k+1,j]+d[i-1]*d[k]*d[j]
            if (q>M[i,j]) then M[i,j]=q ,
                                 s[i,j]=k
         end for
      end for
   end for
   return M[1,n]
end procedure
```

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
T(n)=O(n^3)

ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΟΙΝΗ ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

ΕΙΣΟΔΟΣ: Δίδονται ακολουθίες χαρακτήρων $X=x_1x_2x_3\ldots x_n$ και $Y=y_1y_2\ldots y_m$

ΕΞΟΔΟΣ: Το μέγιστο μήκος κοινής τους υπακολουθίας

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ (υπολογισμού της βέλτιστης λύσης):

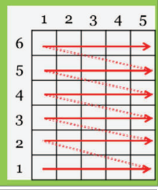
$$f_n=\begin{cases}0, & i=0 \ \acute{\eta} \ j=0\\ c[i-1,j-1]+1, & i,j>0 \ \kappa\alpha\iota \ x_i=y_j\\ \max\{c[i,j-1],c[i-1,j]\}, & i,j>0 \ \kappa\alpha\iota \ x_i\neq y_j\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ: για τις συμβολοσειρές
X=a**bcdf** και Y=d**bd**a**f**

	1	2	3	4	5
5	X=abcdf Y=d c=1	X=abcdf Y=db c=1	X=abcdf Y=dbd c=2	X=abcdf Y=dbda c=2	X=abcd**f** Y=dbda**f** c=3
4	X=abcd Y=d c=1	X=abcd Y=db c=1	X=abc**d** Y=db**d** c=2	X=abcd Y=dbda c=2	X=abcd Y=dbda**f** c=2
3	X=abc Y=d c=0	X=abc Y=db c=1	X=abc Y=dbd c=1	X=abc Y=dbda c=1	X=abc Y=dbda**f** c=1
2	X=ab Y=d c=0	X=ab** Y=d**b c=1	X=ab Y=dbd c=1	X=ab Y=dbda c=1	X=ab Y=dbda**f** c=1
1	X=a Y=d c=0	X=a Y=db c=0	X=a Y=dbd c=0	X=a Y=dbda c=1	X=a Y=dbda**f** c=1

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Υπολόγισε την αναδρομή επαναληπτικά με βάση τη σειρά σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ (ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ)

```
procedure LCS(X,Y)
   for i=1 to n : c[i,0]=0
   for j=1 to m : c[0,j]=0
   for i=1 to n
      for j=1 to m
         if xi=yj then
            c[i,j]=c[i-1,j-1]+1
         else
            if (c[i-1,j]>c[i,j-1]) then
               c[i,j]=c[i-1,j]
            else
               c[i,j]=c[i,j-1]
            end if
         end if
      end for
   end for
   return c[n,m]
end procedure
```

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
T(n)=O(nm)

ΣΥΝΤΟΜΟΤΕΡΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΣΕ ΑΚΥΚΛΟ ΓΡΑΦΗΜΑ

ΕΙΣΟΔΟΣ: Δίνεται άκυκλο κατευθυνόμενο γράφημα G=(V,E,W)

ΕΞΟΔΟΣ: Το συντομότερο μονοπάτι από την αφετηρία στον προορισμό

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ (προϋποθέτει τοπολογική ταξινόμηση των κόμβων 1,2,…,n):

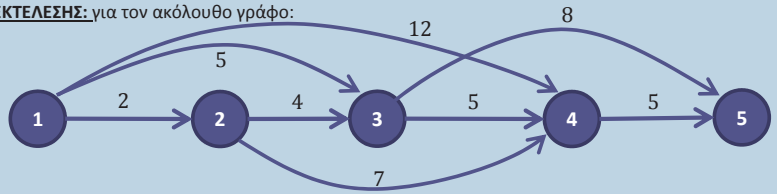
$$OPT[n] = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ min\{OPT[j] + W[j,n] \mid (j,n) \in E\} & n > 1 \end{cases}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

- Αφού πρώτα γίνει μία ταξινόμηση των κόμβων ώστε στην διάταξη τους κάθε ακμή να είναι (v_i,v_j) με i<j (τοπολογική ταξινόμηση)
- Ο δυναμικός προγραμματισμός υπολογίζει επαναληπτικά την αναδρομική σχέση για i=1,…,n.

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ Αλγόριθμου Δ.Π.:
T(n)=O(n+m)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ: για τον ακόλουθο γράφο:



	1: **0** + 2 = 2	1: **0** + 6 = 6 2: **2** + 4 = 6	1: **0** + 12 = 12 2: **2** + 7 = 9 3: **5** + 6 = 10	3: **5** + 8 = 13 4: **9** + 6 = 14
OPT[1]=**0**	OPT[2]=**2**	OPT[3]=**5**	OPT[4]=**9**	OPT[6]=**13**