ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ σε ΔΕΚΑΔΙΚΟ

Ένας **αριθμός συστήματος με βάση το b** μετατρέπεται **στο δεκαδικό** από τον τύπο:

$$\alpha_{n-1} \times b^{n-1} + \alpha_{n-2} \times b^{n-2} + \cdots + \alpha_1 \times b^1 + \alpha_0 \times b^0 + \alpha_{-1} \times b^{-1} + \alpha_{-2} \times b^{-2} + \cdots + \alpha_{-m} \times b^{-m}$$

και συμβολίζεται ως: $(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \dots \alpha_1\alpha_0 \,.\, \alpha_{-1}\alpha_{-2} \dots \alpha_{-m})_b$ όπου b: είναι η βάση του συστήματος

Παραδείγματα:

Από Δυαδικό σε Δεκαδικό:

$$(1100.101)_2 = \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0 + \mathbf{1} \times 2^{-1} + \mathbf{0} \times 2^{-2} + \mathbf{1} \times 2^{-3} = 8 + 4 + 0 + 0 + 0.5 + 0 + 0.125 = 12.625$$

Από Οκταδικό σε Δεκαδικό:

$$(23.1)_8 = 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 1 \times 8^{-1} = 16 + 3 + 0.125 = 19.125$$

Από Δεκαεξαδικό σε Δεκαδικό:

$$(AA.8)_{16} = 10 \times 16^1 + 10 \times 16^0 + 8 \times 16^{-1} = 160 + 10 + 0.5 = 170.5$$

Από Τετραδικό σε Δεκαδικό:

$$(31)_4 = 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0 = 12 + 1 = 13$$

16δικός	Δεκαδικός
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7

16δικός	Δεκαδικός
8	8
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Εμπειρικά (για δυαδικούς ακέραιους)

Αριθμός προς μετατροπή

$(1100101)_2$ →

Γράφουμε Ανάποδα τις δυνάμεις του 2

$\boxed{64}$	$\boxed{32}$	16	8	$\boxed{4}$	2	$\boxed{1}$
1	1	0	0	1	0	1

Επιλέγουμε αυτά που έχουν άσσο

→ $64 + 32 + 4 + 1 = (101)_{10}$

Αθροίζουμε

Για την **μετατροπή ενός δεκαδικού σε άλλο σύστημα αρίθμησης** (με βάση b):

- **Ακέραιο Μέρος:** Πραγματοποιούμε **διαιρέσεις με το b** μέχρι το πηλίκο να γίνει 0. Ο αριθμός είναι η αντίστροφη σειρά των υπολοίπων.
- **Κλασματικό Μέρος**: Πραγματοποιούμε διαδοχικούς **πολ/μους** μόνο του κλασματικού μέρους **με το b** (το ακέραιο μέρος του γινομένου είναι το επόμενο δεκαδικό ψηφίο). Σταματάμε όταν το κλασμ.μέρος γίνει 0.

Παράδειγμα: Μετατροπή του $(13.67)_{10}$ σε δυαδικό με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων

Ακέραιο μέρος

Αριθμός /2	Πηλίκο	Υπόλοιπο
13/2	6	1
6/2	3	0
3/2	1	1
1/2	0	1

$(1101)_2$

Κλασματικό μέρος

Αριθμός*2	Γινόμενο	Ακέραιο Μέρος
0.67 * 2	1.34	1
0.34 * 2	0.68	0
0.68 * 2	1.32	1

$(0.101)_2$

Άρα $(13.67)_{10} = (1101.101)_2$

<u>Εμπειρικά</u> (για μετατροπή ακεραίων σε δυαδικό)

Μετατροπή του 41

Ανάποδα τις δυνάμεις του 2 που δεν υπερβαίνουν τον αριθμό

32 16 8 4 2 1

$$\begin{array}{r} 41 \\ -32 \\ \hline 9 \end{array}$$

$\boxed{32}$ 16 8 4 2 1

$\boxed{1}$

$$\begin{array}{r} 9 \\ -8 \\ \hline 1 \end{array}$$

32 ~~16~~ $\boxed{8}$ 4 2 1

1 0 $\boxed{1}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\boxed{32}$ ~~16~~ $\boxed{8}$ ~~4~~ ~~2~~ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ 0 $\boxed{1}$ 0 0 $\boxed{1}$

$(43)_{10} = (101001)_2$

ΣΧΕΣΗ ΔΥΑΔΙΚΟΥ με ΟΚΤΑΔΙΚΟ και 16ΔΙΚΟ

- Κάθε **8αδικό ψηφίο** αντιστοιχεί σε **τριάδα δυαδικών** ψηφίων
- Κάθε **16αδικό ψηφίο** αντιστοιχεί σε **τετράδα δυαδικών** ψηφίων

Οκταδικό Ψηφίο	Τριάδα Δυαδικών Ψηφίων
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

16δικό Ψηφίο	Τετράδα Δυαδικών Ψηφίων
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

16δικό Ψηφίο	Τετράδα Δυαδικών Ψηφίων
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Παράδειγμα: $(154.02)_8$ σε δυαδικό

1 5 4 . 0 2

001 101 100 . 000 010 = ~~00~~1101100.00001~~0~~

Συνεπώς: $(154.02)_8 = (1101100.0001)_2$

Παράδειγμα: $(74F.1B)_{16}$ σε δυαδικό

7 4 F . 1 C

0111 0100 1111 . 0001 1100 = ~~0~~11101001111.000111~~00~~

Συνεπώς: $(74F.1B)_{16} = (11101001111.000111)_2$

Παράδειγμα: $(1101101110.0100111)_2$ σε οκταδικό

001 101 101 110 . 010 011 100

1 5 5 6 . 2 3 4

Συνεπώς: $(1101101110.0100111)_2 = (1556.234)_8$

Παράδειγμα: <u>$(1101101110.0100111)_2$ σε 16δικό</u>

0011 0110 1110 . 0100 1110

3 6 E . 4 E

Συνεπώς: $(1101101110.0100111)_2 = (36E.4E)_{16}$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Πρόσθεση σε Σύστημα Αρίθμησης με βάση **b**:
- Γράφουμε τους αριθμούς τον ένα κάτω απ' τον άλλο με ευθυγράμμιση στην ίδια τάξη ψηφίων (υποδιαστολή).
- Κάνουμε την πρόσθεση από δεξιά προς τα αριστερά κατά την ίδια τάξη ψηφίων.
- Σε περίπτωση που το άθροισμα είναι μεγαλύτερο (ή ίσο) του **b** μεταφέρουμε κρατούμενο 1 μονάδα (**συμβολίζει μια b-άδα**) στην αμέσως αριστερή στήλη και καταγράφουμε το αποτέλεσμα.

Δυαδικό :

```
     111 1
     1011.01
(+)    10.111
-------------
     1110.001
```

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	2
1	3
Κρατούμενο 0	Κρατούμενο 1

Οκτάδικο:

```
      1  1
      57.07
(+)   11.231
-------------
      70.321
```

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	8
1	9
2	10
3	11
4	12
5	13
6	14
7	15
Κρατούμενο 0	Κρατούμενο 1

16δικό:

```
      11
      AA.81
(+)   1C.802
-------------
      C7.012
```

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	16
1	17
2	18
3	19
4	20
5	21
6	22
7	23
8	24
9	25
10 (A)	26
11 (B)	27
12 (C)	28
13 (D)	29
14 (E)	30
15 (F)	31
Κρατούμενο 0	Κρατούμενο 1

Αφαίρεση σε Σύστημα Αρίθμησης με βάση **b**:
- Η αφαίρεση γίνεται όπως στο δεκαδικό από τα δεξιά προς τα αριστερά
- Αν το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο του αφαιρετέου:
    - Προσθέτουμε b μονάδες στο τρέχον ψηφίο του μειωτέου
    - Προσθέτουμε μία μονάδα στο αριστερό του τρέχοντος ψηφίο του αφαιρετέου

Δεκαδικό :
Δέκα Μονάδες στο Ψηφίο του Μειωτέου
Μία Μονάδα στο Αριστερό ψηφίο του Αφαιρετέου

$$\begin{array}{ccccc} & & & 14 & \\ & 3 & 5 & \cancel{4} & 9 \\ & & 4 & & \\ (-) & & \cancel{3} & 7 & 8 \\ \hline & 3 & 1 & 7 & 1 \end{array}$$

Δυαδικό :
Δύο Μονάδες στο Ψηφίο του Μειωτέου
Μία Μονάδα στο Αριστερό ψηφίο του Αφαιρετέου

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & 2 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ & & 1 & 2 & 1 & 2 & \\ (-) & 1 & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Οκτάδικο:
Οκτώ Μονάδες στο Ψηφίο του Μειωτέου
Μία Μονάδα στο Αριστερό ψηφίο του Αφαιρετέου

$$\begin{array}{cccc} & & 11 & 10 \\ & 7 & \cancel{3} & \cancel{2} \\ & 1 & 7 & \\ (-) & & \cancel{6} & 4 \\ \hline & 6 & 4 & 6 \end{array}$$

16δικό:
Δεκαξι Μονάδες στο Ψηφίο του Μειωτέου
Μία Μονάδα στο Αριστερό ψηφίο του Αφαιρετέου

$$\begin{array}{cccc} & & & 26 \\ & 12 & 10 & \cancel{10} \\ & C & A & A \\ & & 3 & \\ & & \cancel{2} & 15 \\ (-) & & 2 & F \\ \hline & 12 & 7 & 11 \\ & C & 7 & B \end{array}$$

Με το **συμπλήρωμα ως προς 2** έχουμε την δυνατότητα να κάνουμε εύκολα πράξεις προσημασμένων ακεραίων στο δυαδικό:
- Προετοιμάζουμε τους αριθμούς με βάση το μήκος λέξης (συμπληρώνουμε αριστερά με 0, για να συμπληρωθεί το μήκος). Οι αρνητικοί απεικονίζονται με συμπλήρωμα ως προς 2 (Αντίστροφη bits και έπειτα συν μία μονάδα)
- Όλες οι πράξεις γίνονται προσθέσεις! Τυχόν κρατούμενο αγνοείται!

Άσκηση: Κάντε τις πράξεις 15-17, -15+17, με την τεχνική του συμπληρώματος ως προς 2 σε υπολογιστή με μήκος λέξης 8 δυαδικών ψηφίων.

Λύση: Προεργασία:

Ο αριθμός 15 είναι: 00001111

Ο αριθμός -15:
- Ο αριθμός +15 είναι : 00001111
- Το συμπλήρωμα ως προς 1 : 11110000
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 :11110001

Άρα ο αριθμός -15 είναι: 11110001

Ο αριθμός 17 είναι: 00010001

Ο αριθμός -17:
- Ο αριθμός +17 είναι : 00010001
- Το συμπλήρωμα ως προς 1 : 11101110
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 :11101111

Άρα ο αριθμός -17 είναι: 11101111

Συνεπώς: $(15)_{10} - (17)_{10} = (15)_{10} + (-17)_{10}$
$(00001111)_2 + (11101111)_2$

```
    1 1 1 1
   00001111
(+) 11101111
   --------
   11111110
```

Το αποτέλεσμα είναι:
11111110
Το συμπλήρωμα ως προς 1
00000001
Το συμπλήρωμα ως προς 2
00000010
Άρα ο αριθμός στο 10δικό
2

Άρα: $(15)_{10} + (-17)_{10} = (11011110)_2 = (-2)_{10}$

Συνεπώς: $-(15)_{10} + (17)_{10} = (-15)_{10} + (17)_{10}$
$(11110001)_2 + (00010001)_2$

```
  1 1 1 1       1
    11110001
(+) 00010001
   ---------
   ~~1~~00000010
```

Άρα: $(-15)_{10} + (17)_{10} = (00000010)_2 = (2)_{10}$

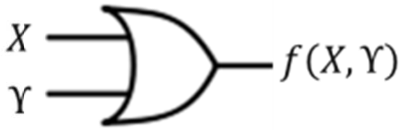
ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

Λογική Πύλη

Αληθοπίνακας

Λογική Συνάρτηση

ΛΟΓΙΚΟ OR

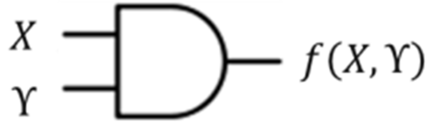


X	Y	$f(X,Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f(X,Y) = X + Y$

$f(X,Y) = X \text{ OR } Y$

ΛΟΓΙΚΟ AND

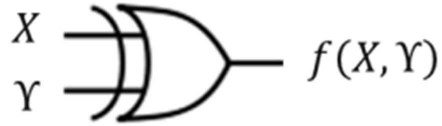


X	Y	$f(X,Y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$f(X,Y) = X \cdot Y$

$f(X,Y) = X \text{ AND } Y$

ΛΟΓΙΚΟ XOR

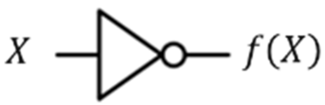


X	Y	$f(X,Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(X,Y) = X \oplus Y$

$f(X,Y) = X \text{ XOR } Y$

ΛΟΓΙΚΟ NOT

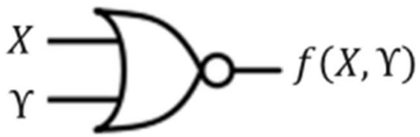


X	Έξοδος $f(X)$
0	1
1	0

$f(X) = X'$

$f(X) = \text{NOT}(X)$

ΛΟΓΙΚΟ NOR

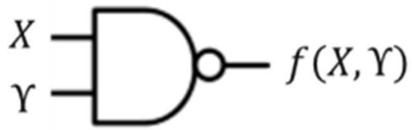


X	Y	$f(X,Y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$f(X,Y) = (X + Y)'$

$f(X,Y) = X \text{ NOR } Y$

ΛΟΓΙΚΟ NAND

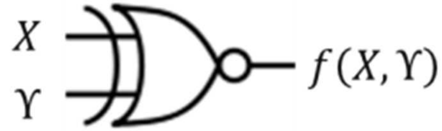


X	Y	$f(X,Y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(X,Y) = (XY)'$

$f(X,Y) = X \text{ NAND } Y$

ΛΟΓΙΚΟ XNOR



X	Y	$f(X,Y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$f(X,Y) = (X \oplus Y)'$

$f(X,Y) = X \text{ XNOR } Y$

Λογική Συνάρτηση σε Αληθοπίνακα

Άλγεβρα Boole και κατασκευή βοηθητικών στηλών.

$$Z = (X\ XOR\ Y) AND\ (X\ AND\ NOT\ Y)$$

X	Y	K = X XOR Y	L = NOT Y	$M = X\ AND\ L$	$Z = K\ AND\ M$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Αληθοπίνακας σε Λογική Συνάρτηση:

Στις γραμμές που η συνάρτηση έχει τιμή 1 γράφουμε ένα γινόμενο (Αν η μεταβλητή είναι 1, τότε γράφουμε το όνομα της μεταβλητής, αλλιώς γράφουμε το συμπλήρωμα). Η συνάρτηση είναι το άθροισμα των γινομένων

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Λύση:

Έχουμε F=1 όταν:

- $X = 0, Y = 0, Z = 0$
- $X = 0, Y = 1, Z = 0$
- $X = 1, Y = 0, Z = 0$
- $X = 1, Y = 1\ Z = 0$
- $X = 1, Y = 1, Z = 1$

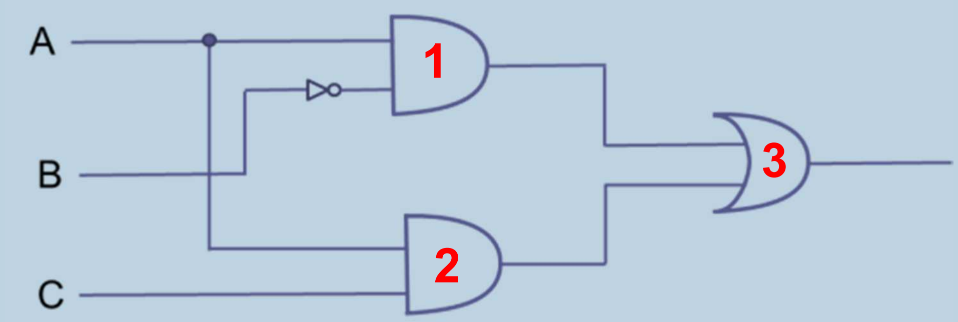
Άρα η συνάρτηση είναι:

$$F = X'Y'Z' + X'YZ' + XY'Z' + XYZ' + XYZ$$

Λογική Συνάρτηση σε Κύκλωμα

«Από Μέσα Προς τα Έξω» με βάση την προτεραιότητα των πράξεων της συνάρτησης

AB'+AC=(A(B'))+(AC)

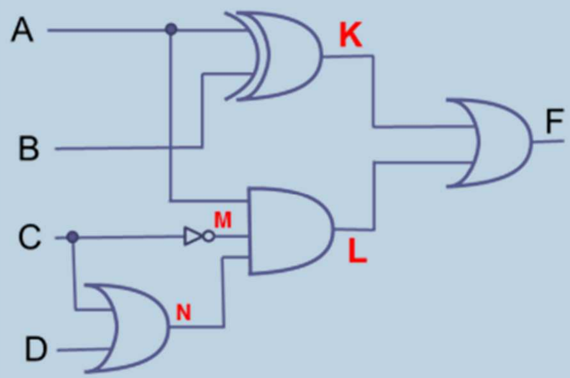


Κύκλωμα σε Αληθοπίνακα:

Προς τα εμπρός δίνοντας ονόματα στις ενδιάμεσες πύλες

Κύκλωμα σε Λογική Συνάρτηση:

Προς τα πίσω δίνοντας ονόματα στις ενδιάμεσες πύλες



$F = K\ OR\ L$

$\downarrow$ $K = (A\ XOR\ B)$

$F = (A\ XOR\ B)\ OR\ L$

$\downarrow$ $L = (A\ AND\ M\ AND\ N)$

$F = (A\ XOR\ B)\ OR\ (A\ AND\ M\ AND\ N)$

$\downarrow$ $M = (NOT\ C)$

$F = (A\ XOR\ B)\ OR\ (A\ AND\ (NOT\ C)\ AND\ N)$

$\downarrow$ $N = (C\ OR\ D)$

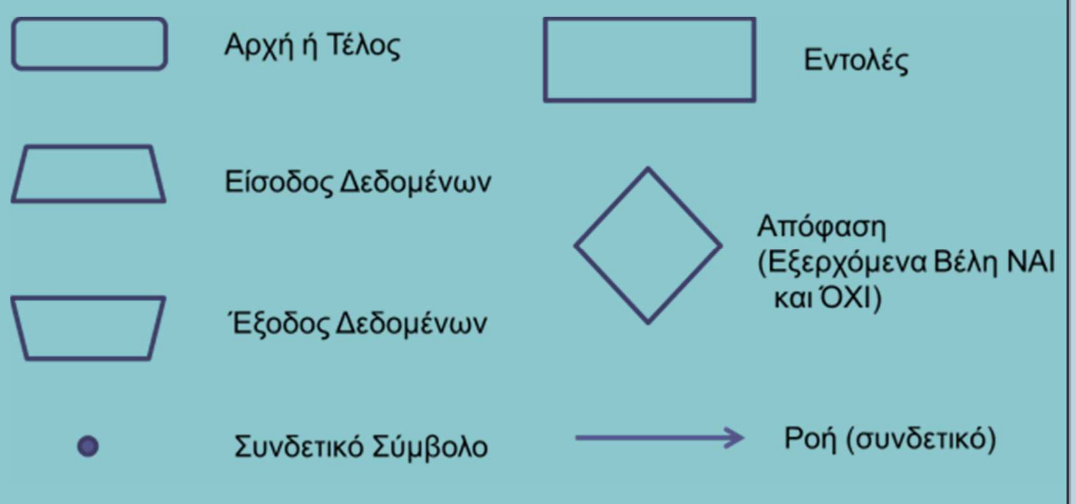
$F = (A\ XOR\ B)\ OR\ (A\ AND\ (NOT\ C)\ AND\ (C\ OR\ D))$

Αληθοπίνακας σε Κύκλωμα:

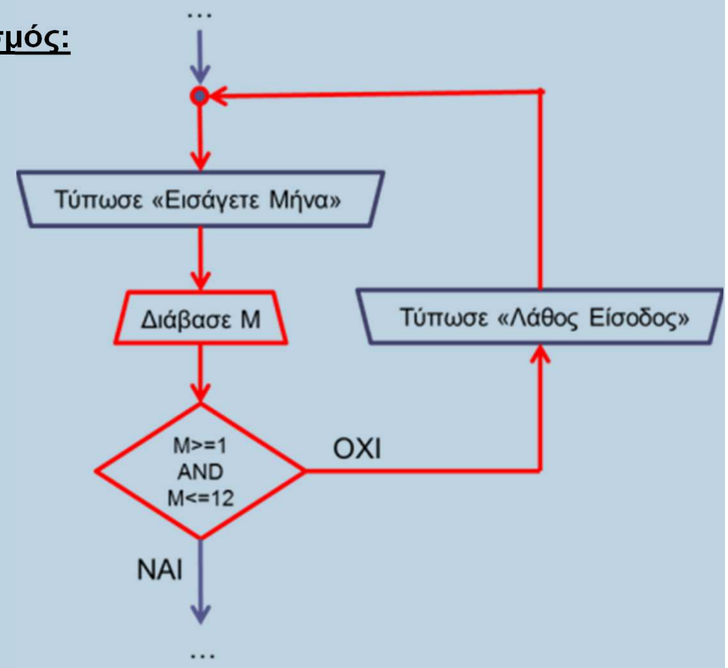
Πρώτα αληθοπίνακας σε λογική συνάρτηση και έπειτα λογική συνάρτηση σε κύκλωμα

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ (FLOW CHART)

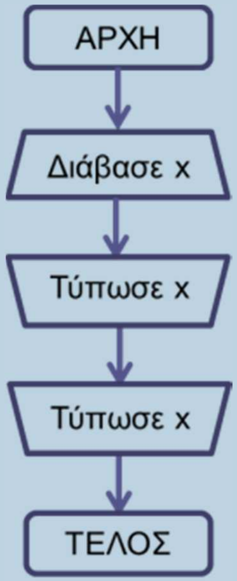
Δομικά Στοιχεία του Διαγράμματος Ροής Προγράμματος



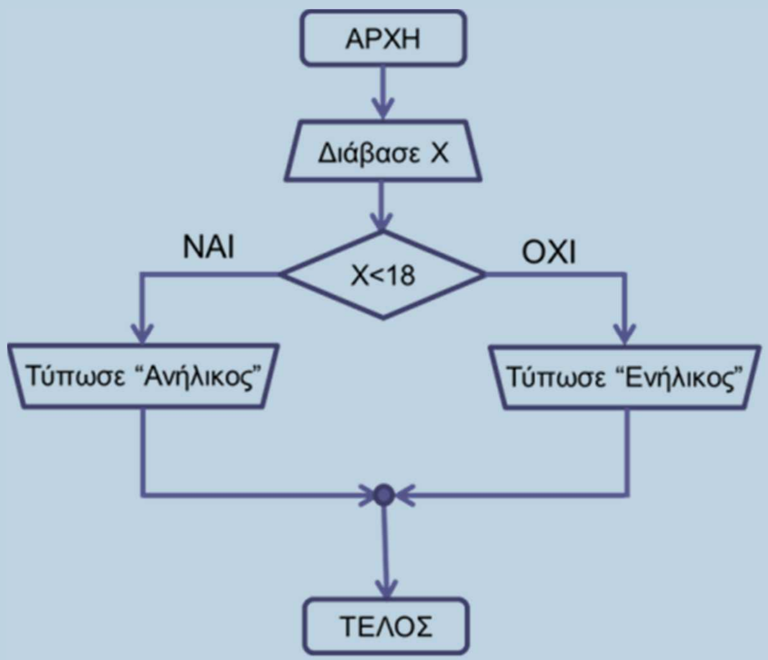
Αμυντικός Προγραμματισμός:
Π.χ. έλεγχος σωστής εισόδου μήνα (1-12)



Είσοδος - Έξοδος:
Π.χ. Τυπώνει 2 φορές αυτό που διαβάζει:



Συνθήκη: Π.χ. έλεγχος ηλικίας μαθητών



Επανάληψη:
Π.χ. Προπαίδεια του 7