ΟΡΙΣΜΟΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

Ορισμοί Ασυμπτωτικών Συμβολισμών

$\boldsymbol{f(n) = o(g(n))}$ αν και μόνο αν $\forall c > 0, \exists n_o > 0$: $0 \le \boldsymbol{f(n) < c \cdot g(n)}$ για κάθε $n \ge n_o$

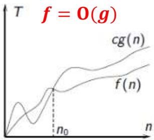
$\boldsymbol{f(n) = O(g(n))}$ αν και μόνο αν $\exists n_o > 0, c > 0$: $0 \le \boldsymbol{f(n) \le c \cdot g(n)}$ για κάθε $n \ge n_o$

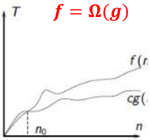
$\boldsymbol{f(n) = \Theta(g(n))}$ αν και μόνο αν $\exists n_o > 0, c_1, c_2 > 0$: $\boldsymbol{0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)}$ για κάθε $n \ge n_o$

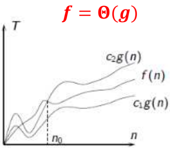
$\boldsymbol{f(n) = \Omega(g(n))}$ αν και μόνο αν $\exists n_o > 0, c > 0$: $\boldsymbol{f(n) \ge c \cdot g(n) \ge 0}$ για κάθε $n \ge n_o$

$\boldsymbol{f(n) = \omega(g(n))}$ αν και μόνο αν $\forall c > 0, \exists n_o > 0$: $\boldsymbol{f(n) > c \cdot g(n) \ge 0}$για κάθε $n \ge n_o$

Σύμβολο	Διαβάζουμε: «Η f έχει ..... την g» «Η g είναι .... της f»	Ασυμπτωτικά
$f = o(g)$	γνήσιο άνω φράγμα	$f < g$
$f = O(g)$	άνω φράγμα	$f \le g$
$f = \Theta(g)$	άνω και κάτω φράγμα	$f = g$
$f = \Omega(g)$	κάτω φράγμα	f≥g
$f = \omega(g)$	γνήσιο κάτω φράγμα	f>g







Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι: **2n=O(n³)**

<u>Απόδειξη:</u>

Έχουμε f(n)=2n, g(n)=n³. Επιλέγουμε n_0=1, c=2.

$$f(n) \le cg(n) \Rightarrow$$

$$2n \le 2n^3 \Rightarrow$$

$$1 \le n^2$$

που ισχύει για κάθε n≥1 (n_0=1)

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι: **2n=o(n²)**

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω c>0:

$$f(n) < cg(n) \Rightarrow$$

$$2n < cn^2 \Rightarrow$$

$$2 < cn \Rightarrow$$

$$2/c < n$$

Άρα επιλέγουμε ως n_0 το $\lceil 2/c \rceil$

Ορισμός Ορίων για Απόδειξη Ασυμπτωτικών Συμβολισμών

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases} c\neq 0 & \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ f(n)=\Theta\big(g(n)\big)\\ 0 & \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ f(n)=o\big(g(n)\big)\\ +\infty & \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ f(n)=\omega\big(g(n)\big)\end{cases}$$

Και ισχύουν και τα ακόλουθα:

- **Λήμμα 1:** $f(n)=\Theta\big(g(n)\big)$ αν και μόνο αν $f(n)=O\big(g(n)\big)$ και $f(n)=\Omega\big(g(n)\big)$
- **Λήμμα 2:** Αν $f(n)=o\big(g(n)\big)$ τότε $f(n)=O\big(g(n)\big)$
- **Λήμμα 3:** Αν $f(n)=\omega\big(g(n)\big)$ τότε $f(n)=\Omega\big(g(n)\big)$

..και ανάποδα:

$f<g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0 \longrightarrow f=o(g)$ αλλά και $f=O(g)$

$f=g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=c(\neq 0) \longrightarrow f=\Theta(g)$ αλλά και $f=\Omega(g)$ και $f=O(g)$

$f>g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=+\infty \longrightarrow f=\omega(g)$ αλλά και $f=\Omega(g)$

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι $2^n=O(3^n)$

Λύση:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

Άρα: $2^n=o(3^n)$ άρα και $2^n=O(3^n)$