



Ορισμός: Λέμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό σε μία πράξη, αν το αποτέλεσμα της πράξης επί δύο στοιχείων του συνόλου δίνει στοιχείο που παραμένει στο σύνολο:

- Οι φυσικοί είναι κλειστοί στην πράξη της πρόσθεσης.
- Οι φυσικοί δεν είναι κλειστοί στην πράξη του πολλαπλασιασμού.

Θεώρημα: Οι κανονικές γλώσσες είναι κλειστές και στις 5 πράξεις: Ένωση, Τομή, Συμπλήρωμα, Παράθεση, Αστέρι Kleene.

Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην Ένωση

- Η L_1 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_1 . Η L_2 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_2
- Η $L_1 \cup L_2$ περιγράφεται από την κανονική έκφραση $r_1 + r_2$, άρα είναι κανονική γλώσσα.

Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην Παράθεση

- Η L_1 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_1 . Η L_2 είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r_2
- Η $L_1 L_2$ περιγράφεται από την κανονική έκφραση $r_1 r_2$, άρα είναι κανονική γλώσσα.

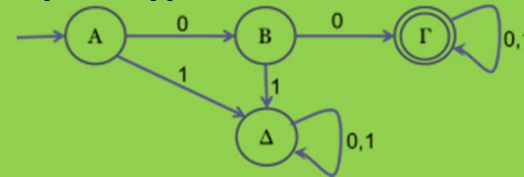
Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στο Αστέρι Kleene

- Η L είναι κανονική, άρα περιγράφεται από μία κανονική έκφραση, έστω r .
- Η L^* περιγράφεται από την κανονική έκφραση r^* , άρα είναι κανονική γλώσσα.

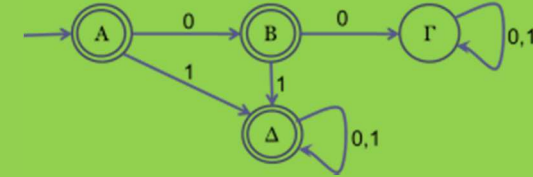
Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στο Συμπλήρωμα

- Η L είναι κανονική άρα υπάρχει ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M που αποφασίζει την γλώσσα.
- Κατασκευάζουμε ΝΠΑ για την \bar{L} ως εξής: Είναι το M , κάνοντας κάθε τελική: μη τελική και κάθε μη τελική: τελική.

Παράδειγμα:



$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ αρχίζει με } 00\}$



$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δεν αρχίζει με } 00\}$

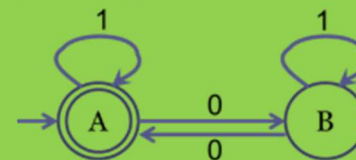
Κλειστότητα των Κανονικών Γλωσσών στην Τομή

- Οι L_1, L_2 είναι κανονικές άρα υπάρχουν ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα M_1, M_2 που τις αποφασίζουν
- Κατασκευάζουμε ΝΠΑ για την $L_1 \cap L_2$ ως εξής: Καταστάσεις: Καρτεσιανό Γινόμενο. Μεταβάσεις: Προσομοιώνουν τα αρχικά αυτόματα. Τελική: Συνδυασμός Τελικών.

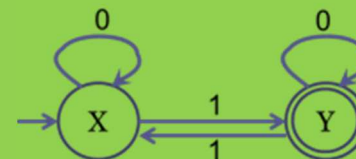
ΝΠΑ για Ένωση: Τελικές: κάθε κατάσταση που περιέχει τελική

ΝΠΑ για Διαφορά: Τελική της L_1 και μη τελική της L_2

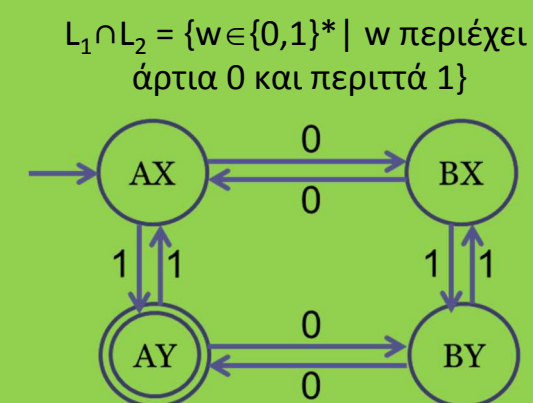
Παράδειγμα:



$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ περιέχει άρτια } 0\}$



$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ περιέχει περιττά } 1\}$

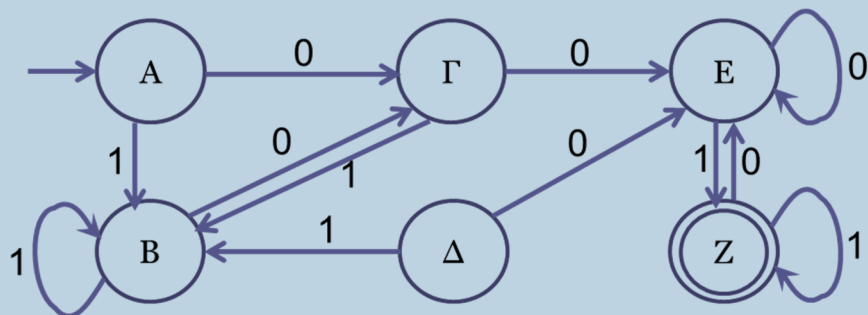


$L_1 \cap L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ περιέχει άρτια } 0 \text{ και περιττά } 1\}$



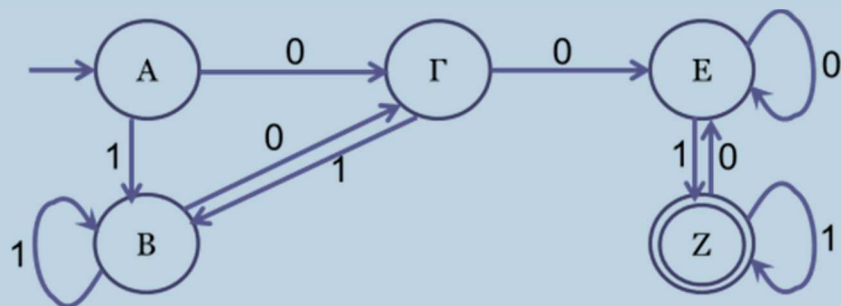
Παράδειγμα:

- Απλοποιούμε το ΝΠΑ του σχήματος:



Κανόνας Απλοποίησης 1: Διαγράφονται οι καταστάσεις που δεν υπάρχει μονοπάτι από την αρχική κατάσταση σε αυτές.

- Απλοποιείται η κατάσταση Δ (δεν υπάρχει μονοπάτι που να οδηγεί σε αυτήν από την αρχική κατάσταση)



Σημείωση:

- Οι κανόνες απλοποίησης είναι επαναληπτικοί. Τους εφαρμόζουμε εωσότου να μην εφαρμόζονται άλλο.

Κανόνας Απλοποίησης 2: Ενοποιούνται καταστάσεις που είναι και οι δύο τελικές ή μη τελικές και έχουν την ίδια συμπεριφορά: Με το ίδιο σύμβολο πηγαίνουν στην ίδια κατάσταση.

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα μετάβασης του ΝΠΑ

		0	1
>	A	Γ	B
	B	Γ	B
	Γ	E	B
	E	E	Z
f	Z	E	Z

Οι A,B ενοποιούνται διότι έχουν την ίδια συμπεριφορά. Μετονομάζω σε K

- Προκύπτει ο πίνακας μετάβασης

		0	1
>	K	Γ	K
	Γ	E	K
	E	E	Z
f	Z	E	Z

Δεν ενοποιούνται. Η μία είναι τελική και η άλλη μη τελική.

- Και σχηματικά είναι:

