ΠΛΗ20 – ΤΕΣΤ25

ΣΩΣΤΑ / ΛΑΘΟΣ

(1) Οι διαφορετικές δεκαδικές συμβολοσειρές μήκους n με (ακριβώς) k μηδενικά είναι:

1. $C(n+k-1,k)$
2. $10^n - 9^{n-k}$
3. $9^{n-k}C(n,k)$
4. Όσοι ο συντελεστής του $x^n/n!$ στην e^{10x}

(2) Θεωρούμε 50 διακεκριμένους επιβάτες ενός τραίνου που πρόκειται να κατέβουν στις επόμενες 4 στάσεις. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να συμβεί αυτό είναι:

1. 50^4, αν δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία οι επιβάτες κατεβαίνουν από το τραίνο
2. 4^{50}, αν δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία οι επιβάτες κατεβαίνουν από το τραίνο.
3. $C(53,50)$, αν δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία οι επιβάτες κατεβαίνουν από το τραίνο.
4. Όσοι ο συντελεστής του $x^{50}/50!$ στην παράσταση $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^4$, αν έχει σημασία η σειρά με την οποία οι επιβάτες κατεβαίνουν από το τραίνο

(3) Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες:

1. $p_1 \vee p_2 \rightarrow p_1$
2. $p_1 \rightarrow p_1 \vee p_2$
3. $p_1 \leftrightarrow p_1 \vee p_2$
4. $(p_1 \rightarrow p_1) \vee p_2$.

(4) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Ο τύπος $\forall x \exists y[P(x,y)]$

1. αληθεύει στο γράφημα K_4
2. αληθεύει στο γράφημα $\overline{K_{1,3}}$
3. αληθεύει στο γράφημα $\overline{C_3}$
4. αληθεύει στο γράφημα $\overline{W_{15}}$

(5) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την κορυφή a στην κορυφή b. Οι παρακάτω τύποι αληθεύουν στο γράφημα που αποτελείται από 2 κορυφές v_1,v_2 και σύνολο ακμών $\{(v_1,v_1),(v_1,v_2)\}$

1. $\exists x \exists y P(x,y)$
2. $\forall x\left[P(x,x) \rightarrow \exists y\left(x \neq y \wedge P(x,y)\right)\right]$
3. $\exists x \forall y P(x,y)$
4. $\forall x \exists y P(x,y)$

(6) Έστω A ο πίνακας προσπτώσεως του K_n

1. Το άθροισμα των στοιχείων του A είναι $n(n-1)$
2. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι n^2
3. Το πλήθος των μηδενικών κάθε στήλης του A είναι $n-2$
4. Το πλήθος των άσσων κάθε γραμμής του A είναι $n-1$

(7) Δίνεται το γράφημα K_{10}

1. Το K_{10} περιέχει το K_5 ως επαγόμενο υπογράφημα

2. Το K_{10} έχει κύκλο Euler

3. Το K_{10} περιέχει το $K_{3,3}$ ως επαγόμενο υπογράφημα

4. Το K_{10} περιέχει σύνολο ανεξαρτησίας 3 κορυφών

(8) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 5 κορυφές

1. Αν είναι πλήρες έχει 10 ακμές

2. Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του είναι το πολύ 20.

3. Αν το γράφημα είναι πλήρες διμερες, έχει το πολύ 5 ακμές.

4. Αν δεν είναι συνδεόμενο και αποτελείται από 2 συνεκτικές συνιστώσες τότε έχει το πολύ 4 ακμές.

(9) Συμβολίζουμε με χ(G) τον χρωματικό αριθμό του μη κατευθυνόμενου γραφήματος G. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. $\chi(K_5)=5$

2. $\chi(K_{2,3})=5$

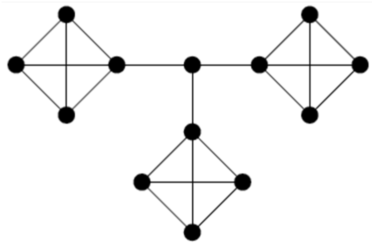
3. $\chi(C_5)=5$

4. $\chi(W_5)=5$

Β'ΜΕΡΟΣ

Άσκηση 1 (ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ)

(Ερώτημα 1) Πόσα υπογραφήματα του K_{100} (όλες οι κορυφές του είναι διακεκριμένες) είναι ισόμορφα με το ακόλουο γράφημα;



(Ερώτημα 2) Σε κυκλικό τραπέζι 9 θέσεων πρόκειται να καθίσουν 6 διακεκριμένοι άνδρες και 3 μη διακεκριμένες γυναίκες. Να υπολογίσετε τους τρόπους να γίνει η τοποθέτηση, αν μεταξύ κάθε δύο γυναικών πρέπει να κάθονται ακριβώς 2 άνδρες. [Σημείωση: Θεωρούνται όμοιοι δύο τρόποι αν κινούμενοι δεξιόστροφα γύρω από το τραπέζι, συναντήσουμε με την ίδια σειρά τα ίδια άτομα]

Άσκηση 2 (ΛΟΓΙΚΗ)

(Ερώτημα 1)

Δείξτε ότι $\{\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi), (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ όταν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα από τα θεωρήματα του προτασιακού λογισμού.

(Ερώτημα 2)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*(*x*, *y*) ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγών κορυφών που συνδέονται με ακμή. Στην γλώσσα αυτή:

a. Ερμηνεύστε τις συντομογραφίες:
   i. $C(x) = \exists y[P(x,y) \land \forall w(P(x,w) \rightarrow w = y)]$
   ii. $D(x,y) = \neg\exists z[P(x,z) \land P(z,y)]$
b. και έπειτα τις προτάσεις:
   i. $\varphi = \forall x \forall y[C(x) \land C(y) \land x \neq y \land P(x,y) \rightarrow D(x,y)]$
   ii. $\psi = \exists x[\forall y D(x,y) \land \forall z(\forall y D(z,y) \rightarrow z = x)]$

κατασκευάστε ένα γράφημα 4 κορυφών που αληθεύει ο φ

Άσκηση 3 (ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΩΝ)

Υπάρχουν διμερή γραφήματα *G=(A, B, E)* με τις παρακάτω ιδιότητες; Εάν ναι, να κατασκευάσετε ένα τέτοιο γράφημα. Εάν όχι, να αιτιολογήσετε το γιατί δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα. Ο ορισμός του διμερούς γραφήματος δίνεται στο βιβλίο «Θεωρία Γράφων», Μ. Μαυρονικόλας, ορισμός 1.6, σελ. 19.

i) Ακολουθία βαθμών (3, 3, 2, 2, 2)

ii) Ακολουθία βαθμών (3, 2, 2, 2, 1, 1)

iii) Με 6 κορυφές και 8 ακμές

iv) Με 6 κορυφές και 10 ακμές