Ορισμοί Ασυμπτωτικών Συμβολισμών

$\boldsymbol{f(n)=o(g(n))}$ αν και μόνο αν $\forall c>0, \exists n_o>0$: $0 \le \boldsymbol{f(n) < c \cdot g(n)}$ για κάθε $n \ge n_o$

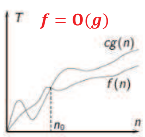
$\boldsymbol{f(n)=O(g(n))}$ αν και μόνο αν $\exists n_o>0, c>0$: $0 \le \boldsymbol{f(n) \le c \cdot g(n)}$ για κάθε $n \ge n_o$

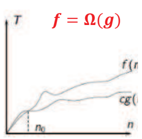
$\boldsymbol{f(n)=\Theta(g(n))}$ αν και μόνο αν $\exists n_o>0, c_1, c_2>0$: $\boldsymbol{0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)}$ για κάθε $n \ge n_o$

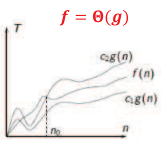
$\boldsymbol{f(n)=\Omega(g(n))}$ αν και μόνο αν $\exists n_o>0, c>0$: $\boldsymbol{f(n) \ge c \cdot g(n) \ge 0}$ για κάθε $n \ge n_o$

$\boldsymbol{f(n)=\omega(g(n))}$ αν και μόνο αν $\forall c>0, \exists n_o>0$: $\boldsymbol{f(n) > c \cdot g(n) \ge 0}$για κάθε $n \ge n_o$

Σύμβολο	Διαβάζουμε: «H f έχει ….. την g» «H g είναι …. της f»	Ασυμπτωτικά
$f=o(g)$	γνήσιο άνω φράγμα	$f<g$
$f=O(g)$	άνω φράγμα	$f \le g$
$f=\Theta(g)$	άνω και κάτω φράγμα	$f=g$
$f=\Omega(g)$	κάτω φράγμα	f≥g
$f=\omega(g)$	γνήσιο κάτω φράγμα	f>g







Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι: **2n=O(n³)**

Απόδειξη:

Έχουμε f(n)=2n, g(n)=n³. Επιλέγουμε n_0=1, c=2.

$$f(n) \le cg(n) \Rightarrow$$
$$2n \le 2n^3 \Rightarrow$$
$$1 \le n^2$$

που ισχύει για κάθε n≥1 (n_0=1)

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι: **2n=o(n²)**

Απόδειξη:

Έστω c>0:

$$f(n) < cg(n) \Rightarrow$$
$$2n < cn^2 \Rightarrow$$
$$2 < cn \Rightarrow$$
$$2/c < n$$

Άρα επιλέγουμε ως n_0 το $\lceil 2/c \rceil$

Ορισμός Ορίων για Απόδειξη Ασυμπτωτικών Συμβολισμών

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} c \ne 0 & \tau ó\tau\varepsilon\ f(n)=\Theta(g(n)) \\ 0 & \tau ó\tau\varepsilon\ f(n)=o(g(n)) \\ +\infty & \tau ó\tau\varepsilon\ f(n)=\omega(g(n)) \end{cases}$$

Και ισχύουν και τα ακόλουθα:

- **Λήμμα 1:** $f(n)=\Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n)=O(g(n))$ και $f(n)=\Omega(g(n))$
- **Λήμμα 2:** Αν $f(n)=o(g(n))$ τότε $f(n)=O(g(n))$
- **Λήμμα 3:** Αν $f(n)=\omega(g(n))$ τότε $f(n)=\Omega(g(n))$

..και ανάποδα:

$f<g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0 \longrightarrow f=o(g)$ αλλά και $f=O(g)$

$f=g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=c(\ne 0) \longrightarrow f=\Theta(g)$ αλλά και $f=\Omega(g)$ και $f=O(g)$

$f>g \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=+\infty \longrightarrow f=\omega(g)$ αλλά και $f=\Omega(g)$

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι $2^n=O(3^n)$

Λύση:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Άρα: $2^n=o(3^n)$ άρα και $2^n=O(3^n)$