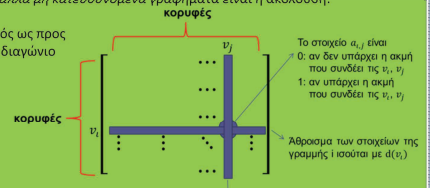
ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Ορισμός: Ο πίνακας γειτνίασης (ή μητρώο σύνδεσης) ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n είναι ένας n x n τετραγωνικός πίνακας που ορίζεται ως:

$$A_{n\times n} = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } [v_i, v_j] \in E \\ 0, & \text{αν } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

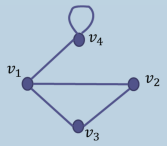
ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα γειτνίασης σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι η ακόλουθη:

- Συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο



ΠΛΗΘΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: n^2

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα γειτνίασής του:



$$A = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Θεώρημα (υπολογισμού μονοπατιών):
Το στοιχείο (i, j) του πίνακα A^k (ο πίνακας γειτνίασης υψωμένος στην k δυναμη) δίνει πόσα μονοπάτια μήκους k υπάρχουν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j

Πόρισμα 1:
Το στοιχείο (i, j) του πίνακα $A + A^2 + \cdots + A^k$ δίνει πόσα μονοπάτια μήκους το πολύ k υπάρχουν από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j

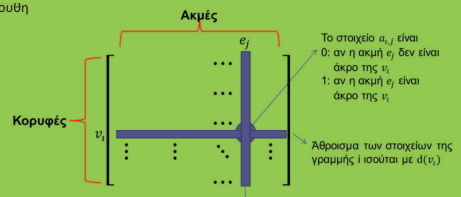
Πόρισμα 2:
Αν ένα μη διαγώνιο στοιχείο (i, j) του πίνακα $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ (όπου n=|V|) είναι 0, τότε το γράφημα δεν είναι συνδεόμενο.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΕΩΣ

Ορισμός: Ο πίνακας γειτνίασης (ή μητρώο σύνδεσης) ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V,E) με |V|=n είναι ένας n x n τετραγωνικός πίνακας που ορίζεται ως:

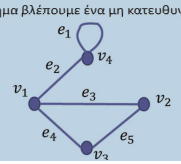
$$A_{n\times n} = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } [v_i, v_j] \in E \\ 0, & \text{αν } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ: Η μορφή που πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας για τον πίνακα πρόσπτωσης σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα είναι η ακόλουθη



ΠΛΗΘΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: nm

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα γειτνίασής του:



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ΙΣΟΜΟΡΦΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ορισμός: Δύο γραφήματα $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι **ισομορφικά**, αν υπάρχει συνάρτηση $f: V_1 \to V_2$ 1-1 και επί, τέτοια ώστε $(v_i, v_j) \in E_1$ και $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ και αντίστροφα.
Η f λέγεται **συνάρτηση ισομορφισμού** ή **ισομορφισμός** του G_1 με το G_2

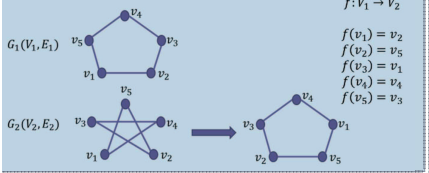
Με απλά λόγια:
- Υπάρχει αντιστοίχιση των κορυφών ώστε να ταυτίζονται οι ακμές.

Θεώρημα: Για δύο ισομορφικά γραφήματα $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ ισχύει ότι με κάποια κατάλληλη διάταξη των κορυφών οι πίνακες γειτνίασης των δύο γραφημάτων ταυτίζονται

Παράδειγμα: Στο σχήμα βλέπουμε δύο ισόμορφα γραφήματα. Η αναδιάταξη των κορυφών του G_2 ώστε να ταυτίζονται οι κορυφές προκύπτει από την συνάρτηση ισομορφισμού

$$f: V_1 \to V_2$$

$$f(v_1) = v_2$$
$$f(v_2) = v_5$$
$$f(v_3) = v_1$$
$$f(v_4) = v_4$$
$$f(v_5) = v_3$$



Ορισμός:
Αυτομορφισμός είναι ένας ισομορφισμός από ένα γράφημα στον εαυτό του
- Το K_n έχει $n!$ αυτομορφισμούς
- Το $K_{n,m}$ έχει $n!\,m!$ αυτομορφισμούς

Αυτοσυμπληρωματικό καλείται ένα γράφημα, αν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.
- έχει $m = n(n-1)/4$ ακμές
- Το μονοπάτι 4 κορυφών είναι αυτοσυμπληρωματικό γράφημα
- Ο κύκλος 5 κορυφών είναι αυτοσυμπληρωματικό γράφημα

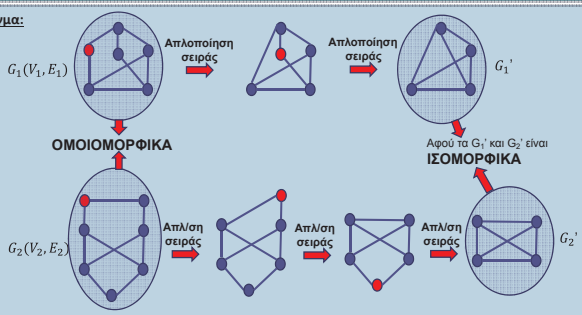
Για να δείξω ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά:
- Δίνω τη συνάρτηση ισομορφισμού
- Δείχνω ότι τα συμπληρώματα είναι ισομορφικά

Για να δείξω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
- Βρίσκω μία αναλλοίωτη ιδιότητα που δεν διατηρείται π.χ.
  - έχει n κορυφές, έχει m ακμές, έχει κορυφή βαθμού k, έχει κύκλο Euler, έχει κύκλο Hamilton, είναι συνδεόμενο, είναι επίπεδο κ.λπ.

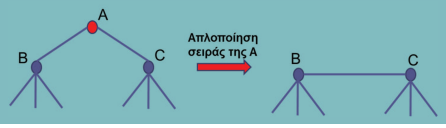
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ορισμός: Δύο γραφήματα καλούνται **ομοιομορφικά** αν μπορούν να απλοποιηθούν (με απλοποιήσεις σειράς) σε ισομορφικά γραφήματα.

Παράδειγμα:



Απλοποίηση σειράς είναι μια πράξη, πάνω σε γράφημα που «απαλείφει» κορυφές βαθμού 2:

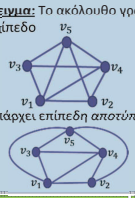


ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ορισμός: Ένα γράφημα είναι **επίπεδο**, αν μπορούμε να το απεικονίσουμε στο επίπεδο, χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.
- Μία απεικόνιση στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του λέγεται **επίπεδη αποτύπωση** του γραφήματος
- Κάθε τμήμα του επιπέδου που ορίζεται από απλό κύκλο της αποτύπωσης λέγεται **όψη** της αποτύπωσης
- Το **πλήθος των όψεων**: Συμβολίζεται με **o** και προσοχή ότι συμπεριλαμβάνει πάντα και την εξωτερική όψη
- **Βαθμός της όψης** o_i το πλήθος των ακμών που περιέχει ο απλός κύκλος της όψης (συμβολίζεται με $d(o_i)$)

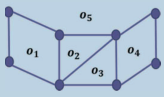
Σε ένα επίπεδο γράφημα:
- $\sum_{i=1}^{o} d(o_i) \le 2m$
- Αν είναι και συνδεόμενο ισχύει ο τύπος του Euler: $o = m - n + 2$

Παράδειγμα: Το ακόλουθο γράφημα είναι επίπεδο



διότι υπάρχει επίπεδη αποτύπωσή του:

Παράδειγμα: Στην ακόλουθη επίπεδη αποτύπωση έχουμε 5 όψεις



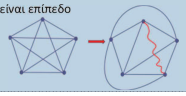
Και ισχύει για τους βαθμούς των όψεων:
$d(o_1) = 4, d(o_2) = 3, d(o_3) = 3, d(o_4) = 4, d(o_5) = 8$

Ένα γράφημα **είναι επίπεδο** αν:
- Μπορούμε να το ζωγραφίσουμε στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του!
- Δεν περιέχει ως υπογράφημα το K5 ή το K3,3 και δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K5 ή του K3,3 (από θ.Kuratowski)

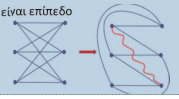
Ένα γράφημα **δεν είναι επίπεδο** αν:
- Είναι απλό και ισχύει m > 3n-6
- Περιέχει ως υπογράφημα το K5 (από θ.Kuratowski)
- Περιέχει ως υπογράφημα το K3,3 (από θ.Kuratowski)
- Περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό του K5 ή το K3,3(από θ.Kuratowski)

Θεώρημα Kuratowski: Ένα γράφημα είναι επίπεδο **αν και μόνο αν** δεν περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ (ή ομοιομορφικό αυτών)

Το K_5 δεν είναι επίπεδο



Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο



Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ DIJKSTRA

Σκιαγράφηση Αλγόριθμου Dijkstra:

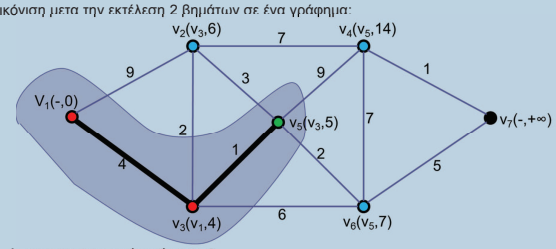
Κατά την διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου σημειώνουμε σε κάθε κορυφή v:
- L[v] το κόστος του καλύτερου μονοπατίου για να πάμε από την αφετηρία s στην κορυφή v
- P[v] είναι η κορυφή μέσω της οποίας καταλήγουμε στην κορυφή v

Στην αρχικοποίηση:
- Θέτουμε όλες τις ετικέτες L[v]=+∞ εκτός της αφετηρίας που έχει L[s]=0

Σε κάθε βήμα:
- Οριστικοποιείται η κορυφή με το μικρότερο κόστος από τις μη οριστικοποιημένες
- Διορθώνονται οι ετικέτες των γειτονικών μη οριστικοποιημένων κορυφών (σε περίπτωση που βρεθεί καλύτερο μονοπάτι από την κορυφή που οριστικοποιήθηκε)

Τερματισμός:
- Όταν οριστικοποιηθεί η κορυφή τερματισμού t.

Παράδειγμα:
Σχηματική απεικόνιση μετά την εκτέλεση 2 βημάτων σε ένα γράφημα:



Επόμενη κορυφή που οριστικοποιείται είναι η v2