

ΠΛΗ30 – ΤΕΣΤ14

ΘΕΜΑ 1: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις κατά αύξουσα τάξη μεγέθους:

$$f_1(n) = \frac{n + n \log n}{\log \log n}$$

$$f_2(n) = (1,01)^n + \log(50^n)$$

$$f_3(n) = n^2 \log n + \log^2 3^n$$

Ο συμβολισμός \log παριστάνει λογάριθμο με βάση το 2. . Η συνάρτηση f έχει την ίδια τάξη μεγέθους (ίδιο ρυθμό αύξησης) με την g ($f \equiv g$), αν $f = \Theta(g)$ (ισοδύναμα $\Theta(f) = \Theta(g)$). Η συνάρτηση f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους (μικρότερο ρυθμό αύξησης) από την g ($f < g$), αν $f = o(g)$.

(B) Να λύσετε τις αναδρομές:

$$(1) \quad T(n) = T\left(\frac{7n}{8}\right) + T\left(\frac{n}{15}\right) + n^2$$

$$(2) \quad T(n) = 16T\left(\frac{n}{128}\right) + \sqrt[3]{n^4}$$

$$(3) \quad T(n) = 33T\left(\frac{n}{5}\right) + \sqrt[3]{n}$$

$$(4) \quad T(n) = T(n-1) + 2n^2 + 3n$$

Στη συνέχεια, να διαταχθούν οι λύσεις τους κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Θεώρημα Κυριαρχίας: Έστω η αναδρομική εξίσωση $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, όπου $a \geq 1$, $b > 1$ είναι σταθερές, και $f(n)$ είναι μια ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, και αν υπάρχει σταθερά n_0 , τέτοια

ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε γνωστό ότι: $\sum_{i=1}^n i^2 = \Theta(n^3)$ και $\sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2)$

ΘΕΜΑ 3: ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Άσκηση 1:

Κατασκευάστε Κανονικές Εκφράσεις για τις Γλώσσες του αλφαβήτου $\{0,1\}$:

$$L_1 = \{ w \mid w \text{ τελειώνει με } 101 \}$$

$$L_2 = \{ w \mid w \text{ αρχίζει με } 001 \}$$

$$L_3 = \{ w \mid w \text{ περιέχει το } 0101 \}$$

$$L_4 = \{ w \mid w \text{ έχει μήκος } 2 \}$$

$$L_5 = \{ w \mid w \text{ έχει μήκος το πολύ } 2 \}$$

$$L_6 = \{ w \mid w \text{ έχει μήκος που είναι πολλαπλάσιο του } 3 \}$$

$$L_7 = \{ w \mid w \text{ έχει περιττό μήκος ή τελειώνει με } 01 \}$$

$$L_8 = \{ w \mid w \text{ δεν τελειώνει με } 10 \}$$

$$L_9 = \{ w \mid w \text{ δεν περιέχει το } 1 \}$$

Άσκηση 2: Κατασκευάστε ΜΠΑ για τις κανονικές εκφράσεις:

$$L_1 = 1*110*110*111*$$

$$L_2 = (0101+111+0)*$$

$$L_3 = 0(0+1)^* + (0+1)^*11$$

$$L_4 = 1*0*1*0*$$

$$L_5 = (0*1*01)*$$

Άσκηση 3:

Δίδονται οι γλώσσες του αλφαβήτου $\{0,1\}$: $L_1=\{w|w \text{ τελειώνει με } 11\}$ και $L_2=\{w|w \text{ περιέχει το } 0\}$

(Α) Δώστε κανονικές εκφράσεις των L_1 και L_2

(Β) Δώστε Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΠΑ) των L_1 και L_2

(Γ) Δώστε τα ισοδύναμα ΝΠΑ των L_1 και L_2

(Δ) Δώστε το ΝΠΑ της τομής των δύο γλωσσών (Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο κλειστότητας της τομής)

(Ε) Απλοποιήστε το ΝΠΑ του ερωτήματος (Δ)

ΘΕΜΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΑ

Να δείξετε ότι η γλώσσα: $\{wcw^R : w \in \{a,b\}^*\}$ δεν είναι κανονική.