

# ΠΛΗ30

## ΕΝΟΤΗΤΑ 6: NP-πληρότητα

Μάθημα 6.3:  
Αναγωγές Θεωρίας Γράφων - Μέρος 1<sup>ο</sup>

Δημήτρης Ψούνης



[www.psounis.gr](http://www.psounis.gr)



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## A. Σκοπός του Μαθήματος

## B. Θεωρία

### 1. Εισαγωγή

1. Σχήμα Απόδειξης Αναγωγής
2. Αναγωγές της Προτασιακής Λογικής

### 2. Το πρόβλημα INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

1. INDEPENDENT-SET ανήκει στο NP
2. 3SAT ανάγεται στο INDEPENDENT-SET

### 3. Το πρόβλημα CLIQUE είναι NP-πλήρες

1. CLIQUE ανήκει στο NP
2. INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE

### 4. Το πρόβλημα VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες

1. VERTEX-COVER ανήκει στο NP
2. INDEPENDENT-SET ανάγεται στο VERTEX-COVER

### 5. Το πρόβλημα SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες

1. SUBGRAPH-ISOMORPHISM ανήκει στο NP
2. CLIQUE ανάγεται στο SUBGRAPH-ISOMORPHISM

## Γ. Ασκήσεις

1. Το  $(n/2)$ -CLIQUE είναι NP-πλήρες
2. Το KITE είναι NP-πλήρες
3. Το k-DENSEST-SUBGRAPH είναι NP-πλήρες
4. Το k-LIGHTEST-SUBGRAPH είναι NP-πλήρες



## A. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

### Επίπεδο A

➤ (-)

### Επίπεδο B

- Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες
- Το CLIQUE είναι NP-πλήρες
- Το VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες
- Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες
- Το k-DENSEST-SUBGRAPH είναι NP-πλήρες
- Το k-LIGHTEST-SUBGRAPH είναι NP-πλήρες

### Επίπεδο Γ

- Το KITE είναι NP-πλήρες
- Το  $(n/2)$ -CLIQUE είναι NP-πλήρες
- Το NOT-ALL-ZERO-SAT είναι NP-πλήρες



## B. Θεωρία

### 1. Εισαγωγή

#### 1. Σχήμα Απόδειξης Αναγωγής

**Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα  $\Pi$  είναι NP-πλήρες, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:**

##### 1. Αποδεικνύουμε ότι $\Pi \in NP$

- Είτε δίνοντας μη ντετερμινιστική μηχανή Turing-μάντη που «μαντεύει» την λύση και έπειτα επαληθεύει ότι είναι όντως λύση του προβλήματος.
- Είτε δίνοντας ντετερμινιστική μηχανή Turing-επαληθευτή που δεδομένης μιας λύσης (πιστοποιητικό) επαληθεύει σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο ότι είναι λύση του προβλήματος.

##### 2. Δίνουμε μια πολυωνυμική αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα $\Pi'$ στο πρόβλημα $\Pi$ (Η αναγωγή συμβολίζεται με $\Pi' \leq \Pi$ )

- Όπου δίνουμε έναν κανόνα μετασχηματισμού της εισόδου  $E'$  του γνωστού προβλήματος  $\Pi'$  σε είσοδο  $E$  του αγνώστου προβλήματος  $\Pi$  έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο:

Αποτέλεσμα του  $\Pi(E)$  **ισοδύναμο** με αποτέλεσμα του  $\Pi'(E')$

Και δείχνουμε ότι η κατασκευή θέλει πολυωνυμικό χρόνο

- Θα χρησιμοποιούμε τον «μάντη» για να αποδεικνύουμε ότι ανήκει στο NP.
- Αν αποδείξουμε μόνο το 2<sup>ο</sup> σκέλος, τότε το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο (NP-Hard)

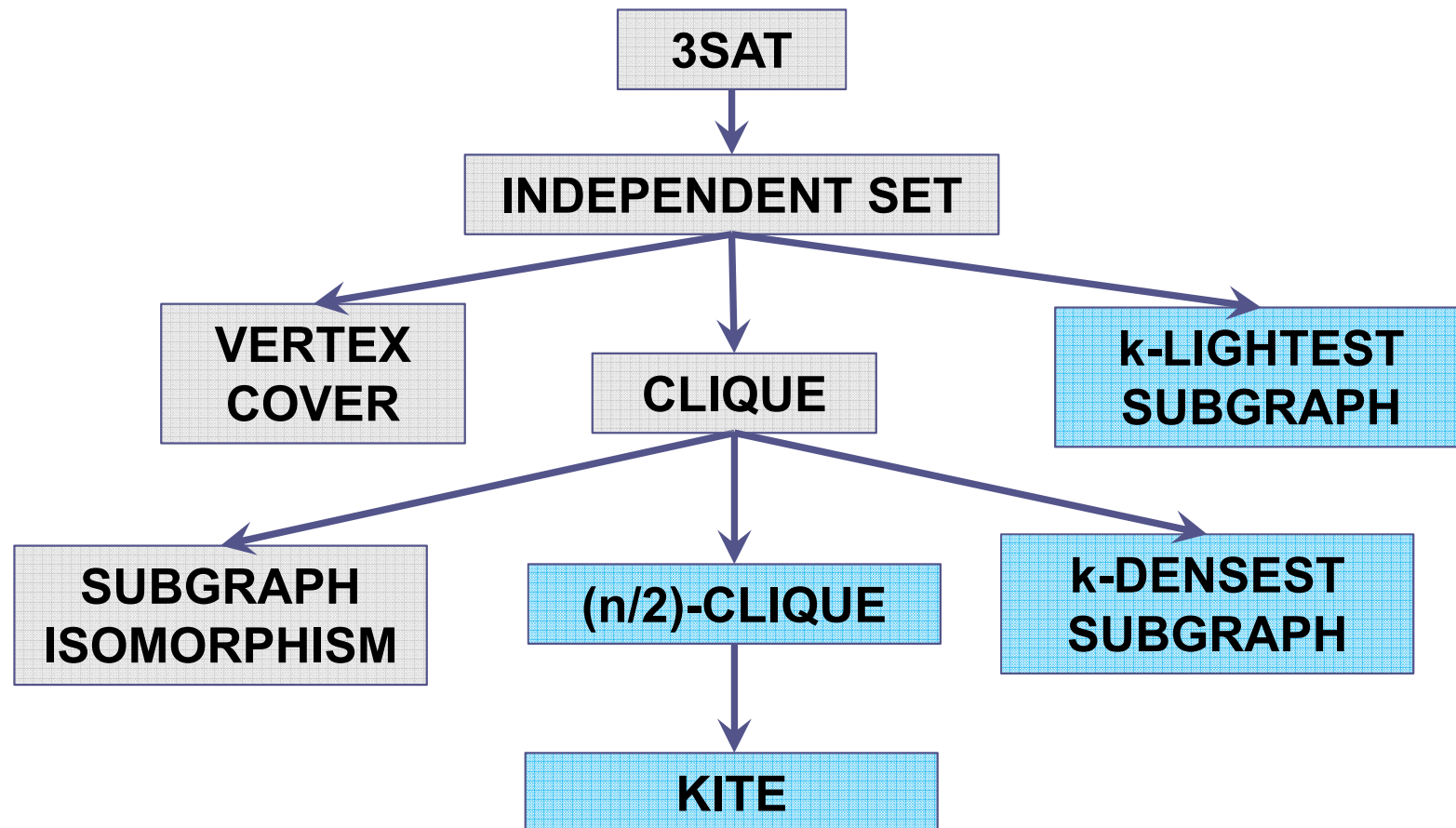


# Β. Θεωρία

## 1. Εισαγωγή

## 2. Αναγωγές της Θεωρίας Γράφων

- Με αφετηρία το πρόβλημα 3SAT κάνουμε αναγωγές σε προβλήματα της θεωρίας γράφων. Στο σημερινό μάθημα ασχολούμαστε με προβλήματα που αναζητούμε ένα υποσύνολο των κορυφών με κάποια ιδιότητα.
- Οι αναγωγές που θα δούμε παρουσιάζονται στο παρακάτω δένδρο αναγωγών:





## B. Θεωρία

### 2. Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

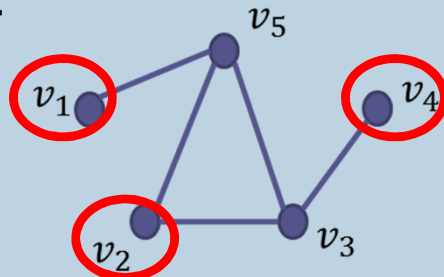
Η διατύπωση του προβλήματος INDEPENDENT-SET έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα INDEPENDENT-SET:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος  $G=(V,E)$ , ακέραιος  $k$
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος ανεξάρτητο υποσύνολο  $k$  κορυφών.
  - (Υπενθύμιση: Ανεξάρτητο Σύνολο είναι υποσύνολο των κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή)

Στιγμιότυπα:

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο γράφημα έχει σημειωθεί ένα σύνολο ανεξαρτησίας 3 κορυφών:



Το σύνολο ανεξαρτησίας είναι  $V'=\{v_1, v_2, v_4\}$

1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα 3SAT στο πρόβλημα INDEPENDENT-SET σε πολ/κο χρόνο

## B. Θεωρία

### 2. Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

#### 1. Το INDEPENDENT-SET ανήκει στο NP

##### 1. Δείχνουμε ότι το INDEPENDENT-SET ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου  $G=(V,E)$  με  $n=|V|$  κορυφές και  $m=|E|$  ακμές και ενός ακεραίου  $k$ :

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο  $O(k)$  μαντεύουμε ένα υποσύνολο  $k$  κορυφών του γραφήματος και έπειτα
- Επαληθεύουμε ότι ανά δύο οι  $k$  κορυφές δεν συνδέονται με ακμή. Ελέγχεται δηλαδή ότι όντως δεν υπάρχουν οι  $k(k-1)/2$  δυνατές ακμές. Ο έλεγχος απαιτεί χρόνο  $O(k^2)$

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα INDEPENDENT-SET ανήκει στο NP



## B. Θεωρία

### 2. Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

### 2. Το 3SAT ανάγεται στο INDEPENDENT-SET σε πολυωνυμικό χρόνο

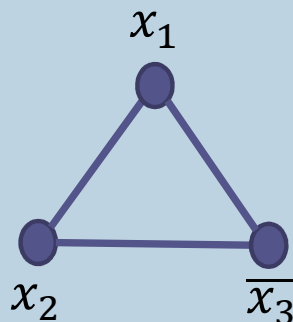
#### 2.A) Το 3SAT ανάγεται στο INDEPENDENT SET

Δίνουμε αναγωγή από το 3SAT στο INDEPENDENT-SET, δηλαδή δεδομένης μιας φόρμουλας  $\varphi$  του 3SAT κατασκευάζουμε γράφο  $G=(V,E)$  και επιλέγουμε  $k$  τέτοιο ώστε:

**$\varphi$  ικανοποιήσιμη  $\Leftrightarrow G$  έχει ανεξάρτητο σύνολο  $k$  κορυφών**

#### Η αναγωγή είναι η εξής:

- Για κάθε πρόταση του 3SAT κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο στο γράφημα. Π.χ. η πρόταση  $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$  μετασχηματίζεται στο τρίγωνο που έχουμε αντιστοιχήσει σε κάθε κορυφή το όνομα του αντίστοιχου όρου.







## B. Θεωρία

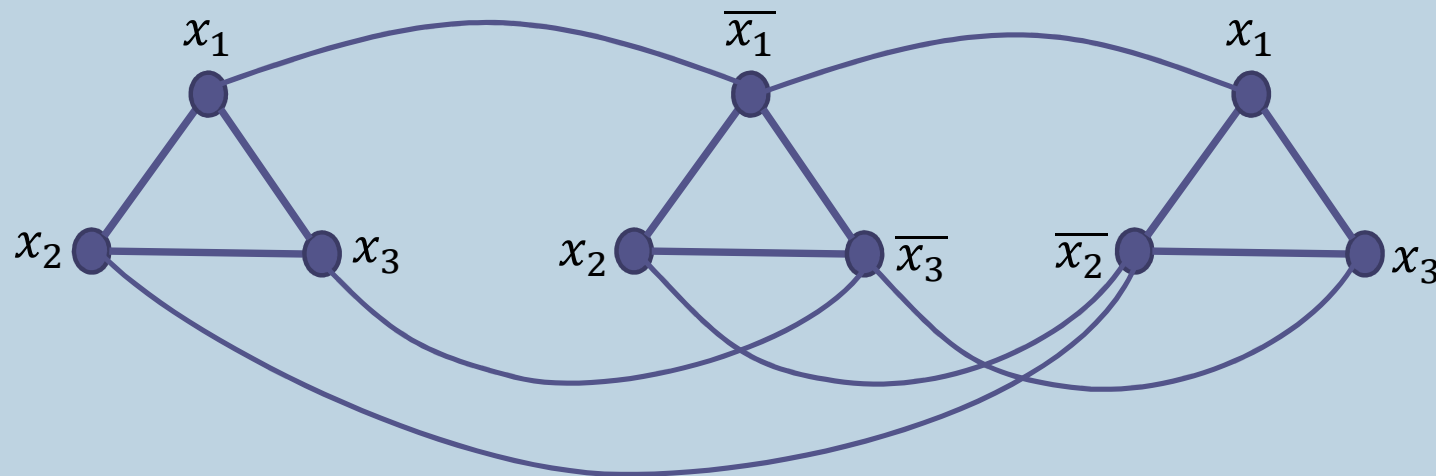
### 2. Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

### 2. Το 3SAT ανάγεται στο INDEPENDENT-SET σε πολυωνυμικό χρόνο

- Συνδέουμε κάθε εμφάνιση της μεταβλητής  $x_i$  με κάθε εμφάνιση άρνησής της  $\bar{x}_i$ .
- Π.χ. η πρόταση

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

μετασχηματίζεται στο γράφημα:



- Επιλέγουμε το  $k$  να είναι ίσο με το πλήθος των προτάσεων του 3SAT (στο παράδειγμα έχω λ.χ  $k=3$ )



## B. Θεωρία

### 2. Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

#### 2. Το 3SAT ανάγεται στο INDEPENDENT-SET σε πολυωνυμικό χρόνο

- **Ευθύ:**

- Έστω ότι υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί την φόρμουλα.
- Τότε σε κάθε πρόταση τουλάχιστον ένας όρος είναι A.
- Επιλέγουμε από κάθε τρίγωνο ακριβώς έναν όρο που αντιστοιχεί σε A στην ανάθεση. Από κάθε τρίγωνο δεν μπορεί να επιλεγεί άλλη κορυφή. Επίσης κάθε όρος στο γράφημα συνδέεται με την άρνησή του, οπότε δεν είναι δυνατόν σε άλλο τρίγωνο να έχει επιλεγεί η άρνησή του (αφού στην ανάθεση ο συγκεκριμένος όρος θα έχει μόνο μία τιμή)
- Άρα υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος  $m$

- **Αντίστροφο:**

- Έστω ότι το γράφημα έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους  $m$ .
- Σε κάθε τρίγωνο ακριβώς 1 κορυφή θα έχει επιλεγεί. Θέτουμε τον αντίστοιχο όρο αληθή και στις υπόλοιπες κορυφές αναθέτουμε τυχαία τιμή (εκτός και αν η τιμή του καθορίζεται από άλλο τρίγωνο).
- Επειδή το σύνολο είναι ανεξάρτητο και επειδή κάθε μεταβλητή συνδέεται με τις αρνήσεις της, είτε θα επιλεγεί η μεταβλητή (την θέτουμε A), είτε η άρνησή της (την θέτουμε Ψ).
- Άρα υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί την  $\phi$ .



## B. Θεωρία

### 2. Το INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες

#### 2. Το 3SAT ανάγεται στο INDEPENDENT-SET σε πολυωνυμικό χρόνο

##### 2.B) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Προφανώς ο χρόνος κατασκευής του γραφήματος της αναγωγής από μία 3SAT φόρμουλα είναι πολυωνυμικός.

( Τυπικά κατασκευάζουμε τον πίνακα γειτνίασης διάστασης  $3m \times 3m$  σε χρόνο  $O(m^2)$  αρχικοποιημένο με 0 σε κάθε κελί (δηλαδή ότι δεν υπάρχει ακμή στο γράφημα). Έπειτα σε κάθε μεταβλητή αντιστοιχούμε τον όρο της και έπειτα (α) βάζουμε τις ακμές κάθε τριγώνου σε σταθερό χρόνο και (β) τις ακμές που συνδέουν ανά δύο τις κορυφές σε χρόνο  $O(m^2)$ . Άρα ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός και ίσος με  $O(m^2)$  )



## B. Θεωρία

### 3. Το CLIQUE είναι NP-πλήρες

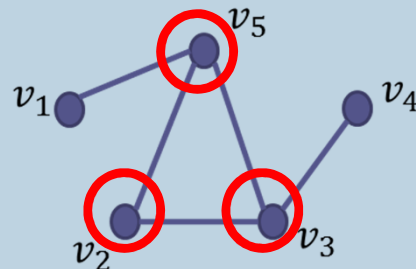
Η διατύπωση του προβλήματος CLIQUE έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα CLIQUE:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος  $G=(V,E)$ , ακέραιος  $k$
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κλίκα  $k$  κορυφών.
  - (Υπενθύμιση: Κλίκα είναι υποσύνολο των κορυφών που συνδέονται με ακμή)

Στιγμιότυπα:

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο γράφημα έχει σημειωθεί μία κλίκα 3 κορυφών:



Η κλίκα είναι  $V'=\{v_2, v_3, v_5\}$   
Δεν υπάρχει κλίκα 4 κορυφών.

1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα INDEPENDENT-SET ανάγεται στο πρόβλημα CLIQUE σε πολ/κο χρόνο



## B. Θεωρία

### 3. Το CLIQUE είναι NP-πλήρες

#### 1. Το CLIQUE ανήκει στο NP

##### 1. Δείχνουμε ότι το CLIQUE ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου  $G=(V,E)$  με  $n=|V|$  κορυφές και  $m=|E|$  ακμές και ενός ακεραίου  $k$ :

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο  $O(k)$  μαντεύουμε ένα υποσύνολο  $k$  κορυφών του γραφήματος και έπειτα
- Επαληθεύουμε ότι ανά δύο οι  $k$  κορυφές συνδέονται με ακμή. Ελέγχεται δηλαδή ότι όντως υπάρχουν οι  $k(k-1)/2$  δυνατές ακμές. Ο έλεγχος απαιτεί χρόνο  $O(k^2)$

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα CLIQUE ανήκει στο NP



## B. Θεωρία

### 3. Το CLIQUE είναι NP-πλήρες

### 2. Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE σε πολυωνυμικό χρόνο

#### 2.A) Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE

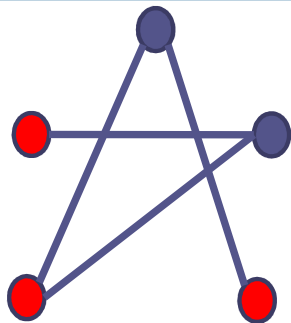
Δίνουμε αναγωγή από το INDEPENDENT-SET στο CLIQUE δηλαδή δεδομένου ενός γράφου  $G=(V,E)$  και ενός ακεραίου  $k$  του INDEPENDENT-SET κατασκευάζουμε γράφο  $G'=(V',E')$  και επιλέγουμε ακεραίο  $k'$  τέτοιο ώστε:

**$G$  έχει ανεξάρτητο σύνολο  $k$  κορυφών  $\Leftrightarrow G'$  έχει κλίκα  $k'$  κορυφών**

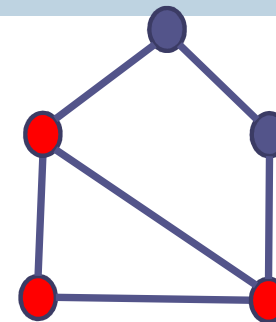
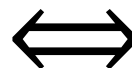
#### Η αναγωγή είναι η εξής:

- Επιλέγουμε  $G'$ =Συμπλήρωμα του  $G$  και θέτουμε  $k'=k$   
(Υπενθύμιση: Συμπλήρωμα του  $G$ : είναι το γράφημα με τις ίδιες κορυφές και όσες ακμές λείπουν από το αρχικό γράφημα)

Παράδειγμα



Αρχικό Γράφημα έχει  
ανεξ. σύνολο  $k$  κορυφών



Συμπλήρωμα έχει  
κλικά  $k$  κορυφών



## B. Θεωρία

### 3. Το CLIQUE είναι NP-πλήρες

### 2. Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE σε πολυωνυμικό χρόνο

- **Ευθύ:**

- Έστω ότι  $G$  έχει σύνολο ανεξαρτησίας  $k$  κορυφών
- Αυτό σημαίνει ότι οι  $k$  κορυφές δεν συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα
- Συνεπώς θα συνδέονται με ακμή στο συμπλήρωμα του  $G$ .
- Άρα το συμπλήρωμα του  $G$  έχει κλίκα  $k$  κορυφών.

- **Αντίστροφο:**

- Έστω ότι το συμπλήρωμα του  $G$  έχει κλίκα  $k$  κορυφών.
- Αυτό σημαίνει ότι οι  $k$  κορυφές συνδέονται με ακμή στο συμπλήρωμα
- Άρα δεν θα συνδέονται με ακμή στο αρχικό γράφημα.
- Συνεπώς το αρχικό γράφημα έχει ανεξάρτητο σύνολο  $k$  κορυφών.



## B. Θεωρία

### 3. Το CLIQUE είναι NP-πλήρες

### 2. Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο CLIQUE σε πολυωνυμικό χρόνο

#### **2.B) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου**

Προφανώς ο χρόνος της αναγωγής είναι πολυωνυμικός.

(Τυπικά αν ο γράφος είναι αποθηκευμένος σε πίνακα γειτνίασης, σαρώνουμε τον πίνακα και μετατρέπουμε κάθε 0 σε 1 και κάθε 1 σε 0 (εκτός των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου). Αυτό γίνεται σε χρόνο  $O(n^2)$  όπου  $n$  οι κορυφές του γραφήματος)





## B. Θεωρία

### 4. Το VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες

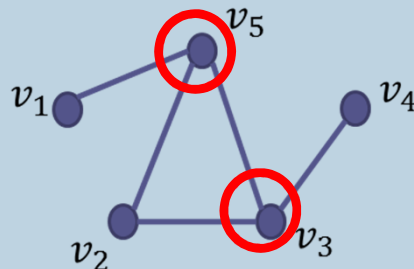
Η διατύπωση του προβλήματος VERTEX-COVER έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα VERTEX-COVER:

- **Είσοδος:** Απλός μη κατευθυνόμενος γράφος  $G=(V,E)$ , ακέραιος  $k$
- **Ερώτημα:** Έχει ο γράφος κάλυμμα  $k$  κορυφών.
  - (Ορισμός: Κάλυμμα είναι υποσύνολο των κορυφών τέτοιο ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον το ένα άκρο της σε κορυφή του συνόλου)

Στιγμιότυπα:

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο γράφημα έχει σημειωθεί ένα κάλυμμα 2 κορυφών:



Το κάλυμμα είναι  $V'=\{v_3, v_5\}$   
Δεν υπάρχει κάλυμμα 1 κορυφής.  
Υπάρχουν καλύμματα 3, 4 και 5 κορυφών

1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα INDEPENDENT-SET ανάγεται στο πρόβλημα VERTEX-COVER σε πολ/κο χρόνο



## B. Θεωρία

### 4. Το VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες

#### 1. Το VERTEX-COVER ανήκει στο NP

##### 1. Δείχνουμε ότι το VERTEX-COVER ανήκει στο NP

Δεδομένου ενός γράφου  $G=(V,E)$  με  $n=|V|$  κορυφές και  $m=|E|$  ακμές και ενός ακεραίου  $k$ :

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο  $O(k)$  μαντεύουμε ένα υποσύνολο  $k$  κορυφών του γραφήματος και έπειτα
- Επαληθεύουμε ότι κάθε ακμή έχει τουλάχιστον το ένα της άκρο σε κορυφή του συνόλου. Ο έλεγχος απαιτεί χρόνο  $O(mk)$

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα VERTEX-COVER ανήκει στο NP



## B. Θεωρία

### 4. Το VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες

### 2. Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο VERTEX-COVER σε πολ/κό χρόνο

#### 2.A) Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο VERTEX-COVER

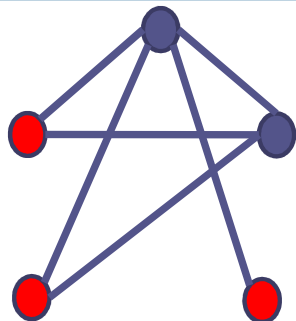
Δίνουμε αναγωγή από το INDEPENDENT-SET στο VERTEX-COVER δηλαδή δεδομένου ενός γράφου  $G=(V,E)$  και ενός ακεραίου  $k$  του INDEPENDENT-SET κατασκευάζουμε γράφο  $G'=(V',E')$  και επιλέγουμε ακεραίο  $k'$  τέτοιο ώστε:

**$G$  έχει ανεξάρτητο σύνολο  $k$  κορυφών  $\Leftrightarrow G'$  έχει κάλυμμα  $k'$  κορυφών**

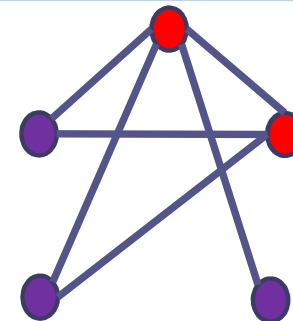
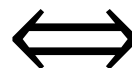
#### Η αναγωγή είναι η εξής:

- Επιλέγουμε  $G'=G$  και θέτουμε  $k'=n-k$   
(Παρατηρούμε ότι όλες οι ακμές θα έχουν τουλάχιστον το ένα τους άκρο στις υπόλοιπες κορυφές εκτός αυτών που ανήκουν στο ανεξάρτητο σύνολο)

Παράδειγμα



Γράφημα που έχει  
ανεξ. σύνολο  $k$  κορυφών



Γράφημα που έχει  
κάλυμμα  $n - k$  κορυφών



## B. Θεωρία

### 4. Το VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες

### 2. Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο VERTEX-COVER σε πολ/κό χρόνο

- **Ευθύ:**

- Έστω ότι  $G$  έχει σύνολο ανεξαρτησίας  $k$  κορυφών
- Αυτό σημαίνει ότι οι  $k$  κορυφές δεν συνδέονται με ακμή. Άρα δεν υπάρχει ακμή που να έχει και τα δύο της άκρα στις  $k$  κορυφές.
- Συνεπώς όλες οι ακμές είτε θα έχουν και τα δύο τους άκρα στις υπόλοιπες  $n-k$  κορυφές, είτε το ένα άκρο στις  $n-k$  κορυφές.
- Άρα όλες οι ακμές θα έχουν τουλάχιστον το ένα άκρο τους στις  $n-k$  κορυφές.
- Άρα το γράφημα  $G$  θα έχει κάλυμμα  $n-k$  κορυφών.

- **Αντίστροφο:**

- Έστω ότι το συμπλήρωμα του  $G$  έχει κάλυμμα  $n-k$  κορυφών.
- Άρα κάθε ακμή έχει τουλάχιστον το ένα της άκρο στις  $n-k$  κορυφές, άρα το πολύ το ένα της άκρο θα προσπίπτει σε κάποια από τις υπόλοιπες  $k$  κορυφές.
- Άρα δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει 2 από τις υπόλοιπες  $k$  κορυφές.
- Άρα οι  $k$  κορυφές αποτελούν σύνολο ανεξαρτησίας του αρχικού γραφήματος.



## B. Θεωρία

4. Το VERTEX-COVER είναι NP-πλήρες

2. Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο VERTEX-COVER σε πολ/κό χρόνο

### 2.B) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Προφανώς ο χρόνος της αναγωγής είναι πολυωνυμικός.

( Τυπικά θέτουμε  $k'=n-k$  και  $G'=G$  άρα ο χρόνος της αναγωγής είναι σταθερός  $O(1)$  )



## B. Θεωρία

### 5. Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες

Η διατύπωση του προβλήματος SUBGRAPH-ISOMORPHISM έχει ως ακολούθως:

Το πρόβλημα SUBGRAPH-ISOMORPHISM:

- **Είσοδος:** Γραφήματα  $G_1, G_2$
- **Ερώτημα:** Υπάρχει υπογράφημα του  $G_1$  ισόμορφο του  $G_2$ 
  - Υπενθύμιση 1: Υπογράφημα του  $G$ : Οποιοδήποτε μέρος του  $G$  (Υποσύνολο των κορυφών και των ακμών)
  - Υπενθύμιση 2: Ισομορφικά Γραφήματα: Όμοια Γραφήματα, πιθανόν με διαφορετικά ονόματα στις κορυφές.

➤ Για να το αποδείξουμε:

1. Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
2. Ανάγουμε το πρόβλημα CLIQUE ανάγεται στο πρόβλημα SUBGRAPH-ISOMORPHISM σε πολυωνυμικό χρόνο



## B. Θεωρία

### 5. Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες

#### 1. Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM ανήκει στο NP

##### 1. Δείχνουμε ότι το SUBGRAPH-ISOMORPHISM ανήκει στο NP

Δεδομένων δύο γραφημάτων  $G_1$ ,  $G_2$ :

- Σε μη ντετερμινιστικό χρόνο  $O(k)$  μαντεύουμε ένα υποσύνολο  $k$  κορυφών του γραφήματος  $G_1$
- Μαντεύουμε ένα υποσύνολο  $m$  ακμών που προσπίπτουν σε αυτές τις κορυφές σε χρόνο  $O(k^2)$
- Και μαντεύουμε την μετονομασία των κορυφών του  $G_2$  σε χρόνο  $O(k)$

και έπειτα

- Επαληθεύουμε ότι τα δύο γραφήματα είναι ισόμορφα (σε χρόνο  $O(k^2)$  ταυτίζοντας τις ακμές τους)

Ο συνολικός χρόνος είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς το πρόβλημα SUBGRAPH-ISOMORPHISM ανήκει στο NP



## B. Θεωρία

### 5. Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες

### 2. Το CLIQUE ανάγεται στο SUBGRAPH-ISOMORPHISM σε πολ/κό χρόνο

#### 2.A) Το CLIQUE ανάγεται στο SUBGRAPH-ISOMORPHISM

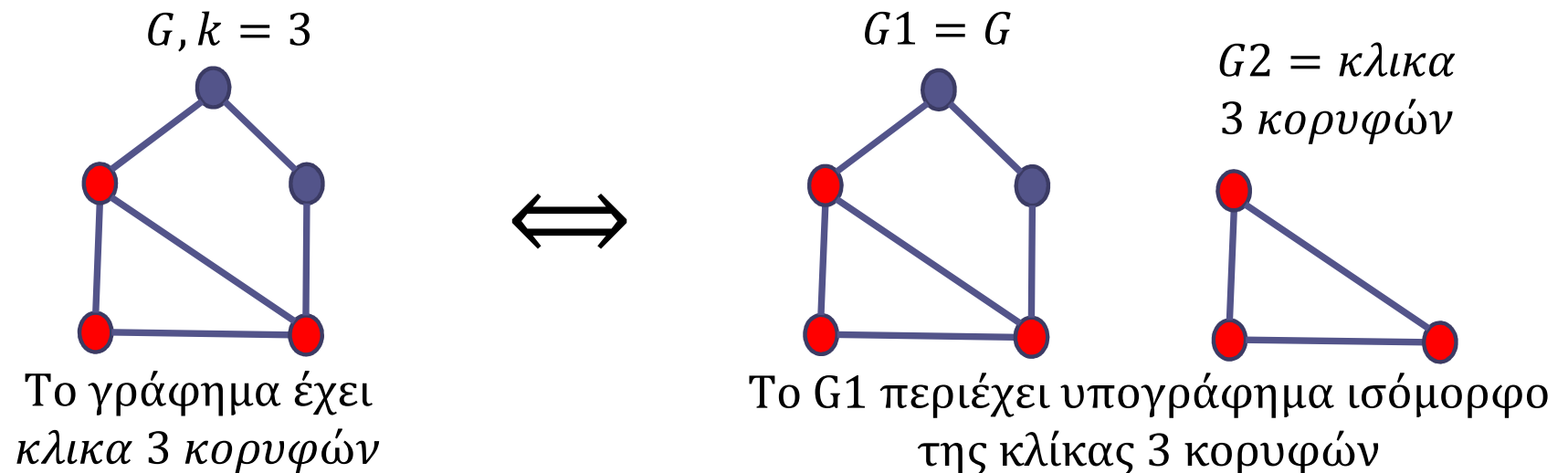
Δίνουμε αναγωγή από το CLIQUE στο SUBGRAPH-ISOMORPHISM δηλαδή δεδομένου ενός γράφου  $G=(V,E)$  και ενός ακεραίου  $k$  του CLIQUE κατασκευάζουμε γράφους  $G1, G2$  έτσι ώστε:

**$G$  έχει κλίκα  $k$  κορυφών  $\Leftrightarrow G1$  περιέχει ισομορφικό υπογράφημα του  $G2$**

**Η αναγωγή είναι η εξής:**

- Επιλέγουμε  $G1=G$  και θέτουμε  $G2=$ Κλίκα  $k$  κορυφών

Παράδειγμα







## B. Θεωρία

### 5. Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες

#### 2. Το CLIQUE ανάγεται στο SUBGRAPH-ISOMORPHISM σε πολ/κό χρόνο

- **Ευθύ:**

- Έστω ότι  $G$  έχει κλίκα  $k$  κορυφών
- Άρα το  $G_1$  (που είναι το  $G$ ) περιέχει ισομορφικό υπογράφημα του  $G_2$  (δηλαδή της κλίκας  $k$  κορυφών)

- **Αντίστροφο:**

- Έστω ότι το  $G_1$  περιέχει το  $G_2$  ως υπογράφημα.
- Αφού το  $G_2$  είναι η κλίκα  $k$  κορυφών, το  $G(=G_1)$  περιέχει κλίκα  $k$  κορυφών



## B. Θεωρία

5. Το SUBGRAPH-ISOMORPHISM είναι NP-πλήρες

2. Το CLIQUE ανάγεται στο SUBGRAPH-ISOMORPHISM σε πολ/κό χρόνο

### 2.B) Δείχνουμε ότι η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου

Προφανώς ο χρόνος της αναγωγής είναι πολυωνυμικός.

( Τυπικά θέτουμε  $G_1 = G$  και κατασκευάζουμε την κλίκα  $k$  κορυφών σε χρόνο  $O(k^2)$  )



# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 1

### Το CLIQUE ανάγεται στο $(n/2)$ -CLIQUE

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα  $(n/2)$ -CLIQUE:

- Είσοδος: Απλό Μη κατευθυνόμενο Γράφημα  $G=(V,E)$
- Ερώτημα: Έχει ο  $G$  κλίκα μεγέθους  $n/2$  ( όπου  $n=|V|$  )

Θεωρείστε δεδομένο ότι το πρόβλημα CLIQUE είναι NP-πλήρες



# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 2

### Το $(n/2)$ -CLIQUE ανάγεται στο KITE

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα KITE:

- Είσοδος: Απλό Μη κατευθυνόμενο Γράφημα  $G=(V,E)$  με  $|V|=2n$  κορυφές
- Ερώτημα: Έχει ο  $G$  χαρτατό μεγέθους  $n$ ;
  - Χαρτατός είναι ένα γράφημα που έχει άρτιο πλήθος κορυφών στο οποίο  $n$  από τους κόμβους αποτελούν μία κλίκα και οι υπόλοιποι  $n$  κόμβοι είναι συνδεδεμένοι σε ένα απλό μονοπάτι, την «ουρά» του χαρτατού, η οποία είναι συνδεδεμένη με έναν από τους κόμβους της κλίκας.

Θεωρείστε δεδομένο ότι το πρόβλημα  $(n/2)$ -CLIQUE είναι NP-πλήρες



# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 3

### Το CLIQUE ανάγεται στο k-DENSEST-SUBGRAPH

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του k-πυκνότερου υπογράφου (k-DENSEST-SUBGRAPH):

- Είσοδος: Απλό Μη κατευθυνόμενο Γράφημα  $G=(V,E)$ , ακέραιος  $k$ , ακέραιος  $m$
- Ερώτημα: Υπάρχει υποσύνολο  $k$  κορυφών του  $G$ , με τουλάχιστον  $m$  ακμές

Θεωρείστε δεδομένο ότι το πρόβλημα CLIQUE είναι NP-πλήρες



# Γ. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 4

### Το INDEPENDENT-SET ανάγεται στο k-LIGHTEST-SUBGRAPH

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του k-αραιότερου υπογράφου (k-LIGHTEST-SUBGRAPH):

- Είσοδος: Απλό Μη κατευθυνόμενο Γράφημα  $G=(V,E)$ , ακέραιος  $k$ , ακέραιος  $m$
- Ερώτημα: Υπάρχει υποσύνολο  $k$  κορυφών του  $G$ , με το πολύ  $m$  ακμές

Θεωρείστε δεδομένο ότι το πρόβλημα INDEPENDENT-SET είναι NP-πλήρες