ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $T(n) = aT(n-b) + c$

Η **μέθοδος της επανάληψης** χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$T(n) = \begin{cases} aT(n-b) + c, & n > n_0 \\ d, & n = n_0 \end{cases}$$

- Όταν το ζητάει ρητά η εκφώνηση
- Προσοχη: $\alpha \neq 1$

1. Κάνουμε 3 εφαρμογές της αναδρομικής σχέσης (μέχρι να φτάσουμε στη μορφή: $T(n) = a^3T(n-bk)$). Χρήσιμο το πρόχειρο
2. Εκτίμηση της σειράς που προκύπτει μετά από k επαναλήψεις (μας καθοδηγεί ο όρος: $T(n-bk)$)
3. Υπολογίζουμε πότε σταματάει η αναδρομή (Θέτουμε $n - bk = n_0$ και λύνουμε ως προς k). Π.χ. αν $n_0 = 0$, τότε $k = n/b$
4. Αντικατάσταση του k στον τύπο του βήματος 2
5. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμοι οι τύποι: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Πρόχειρο:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-2)+4 \\ T(n-2) &= 3T(n-4)+4 \\ T(n-4) &= 3T(n-6)+4 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n-2)+4 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-2)+4 = 3[3T(n-4)+4]+4 \\ &= 3^2T(n-4)+3\cdot 4+4 = 3^2[3T(n-6)+4]+3\cdot 4+4 \\ &= 3^3T(n-6)+3^2\cdot 4+3\cdot 4+4 = \\ &= \cdots = \\ &= 3^kT(n-2k)+3^{k-1}\cdot 4+\cdots+3^2\cdot 4+3\cdot 4+4 = \end{aligned}$$

Η αναδρομή σταματά όταν $n - 2k = 0 \Rightarrow k = n/2$

$$= 3^{\frac{n}{2}}T(0) + 3^{\frac{n}{2}-1}\cdot 4 + \cdots + 3^2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 4 =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\left[3^{\frac{n}{2}-1} + \cdots + 3^2 + 3 + 1\right] =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 3^i =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 4\frac{3^{\frac{n}{2}}-1}{3-1} =$$

$$= 3^{\frac{n}{2}} + 2\left[3^{\frac{n}{2}} - 1\right] = \Theta\left(3^{\frac{n}{2}}\right)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $T(n) = T(n-b) + f(n)$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ www.psounis.gr

Η **μέθοδος της επανάληψης** (κάνοντας άθροισμα κατά μέλη) χρησιμοποιείται για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης

$$T(n) = \begin{cases} T(n-b) + f(n), & n > n_0 \\ c, & n = n_0 \end{cases}$$

1. Γράφουμε όλους τους αναδρομικούς όρους T(n), T(n-1),… μέχρι και την οριακή περίπτωση της αναδρομής
2. Προσθέτουμε τις εξισώσεις κατά μέλη
3. Υπολογισμός της σειράς που προκύπτει. Χρήσιμοι οι τύποι: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Παράδειγμα: Να λύσετε την αναδρομή:

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1)+3n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} T(n) &= \cancel{T(n-1)} + 3n \\ \cancel{T(n-1)} &= \cancel{T(n-2)} + 3(n-1) \\ \cancel{T(n-2)} &= \cancel{T(n-3)} + 3(n-2) \\ &\ldots \\ \cancel{T(2)} &= \cancel{T(1)} + 3\cdot 2 \\ \cancel{T(1)} &= \cancel{T(0)} + 3\cdot 1 \\ \cancel{T(0)} &= 1 \qquad (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 3n+3(n-1)+3(n-2)+\ldots+3\cdot 2+3\cdot 1+1 \\ &= 1+3\cdot 1+3\cdot 2+\ldots+3(n-2)+3(n-1)+3n \\ &= 1+3[1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n] \\ &= 1+3\sum_{i=1}^{n} i = 1+3\frac{n(n+1)}{2} = \\ &= 1{,}5n^2+1{,}5n+1 \end{aligned}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ www.psounis.gr

Λύση της αναδρομής: $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

1. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$ τότε $\boxed{T(n)=\Theta(f(n))}$ (δραστ.3.6)
2. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ τότε $\boxed{T(n)=\Theta(f(n)\cdot\log n)}$ (δραστ.3.6)
3. Αν $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$ τότε η δραστηριότητα 3.6 έχει αποτύχει και πάμε υποχρεωτικά με δένδρο αναδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}<1$ άρα από την

δραστ.3.6 ισχύει: $T(n)=\Theta(n^2)$

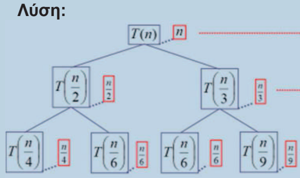
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να υπολογίσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της αναδρομής: $T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+n$

Λύση:
Ισχύει: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ άρα από την
δραστ.3.6 ισχύει: $T(n)=\Theta(n\cdot\log n)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$T(n) = \begin{cases} T\left(\frac{n}{2}\right)+T\left(\frac{n}{3}\right)+n, & \alpha\nu\ n>1 \\ 1, & \alpha\nu\ n=1 \end{cases}$$

Λύση:



Επιπεδο 0: n

Επιπεδο 1: $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}=\frac{3n}{6}+\frac{2n}{6}=\frac{5n}{6}$

Επιπεδο 2: $\frac{n}{4}+\frac{n}{6}+\frac{n}{6}+\frac{n}{9}=\ldots=\frac{5^2n}{6^2}$

Άρα στο επίπεδο i γίνονται $\frac{5^i n}{6^i}$ πράξεις

Το ύψος του δένδρου είναι $\log_2 n$ (αν c είναι ο μικρότερος από τους δύο παρονομαστές (δηλ. c=min{a,b}) έπεται ότι το ύψος του δένδρου είναι $\log_c n$.)

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{\log n} 5^i\frac{n}{6^i} = n\sum_{i=0}^{\log n}\frac{5^i}{6^i} = \\ &= n\sum_{i=0}^{\log n}\left(\frac{5}{6}\right)^i = n\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\log n+1}-1}{\frac{5}{6}-1} = \\ &= 6n\cdot(0{,}83)^{\log n+1} - 6n \end{aligned}$$