



ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 3.4: Άλλες Ερμηνείες Κατηγορηματικής Λογικής

Δημήτρης Ψούνης



www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. Σκοπός του Μαθήματος

B. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

1. Σύμπαν με μία κατηγορία δεδομένων

1. Παραδείγματα

2. Σύμπαν με περισσότερες κατηγορίες δεδομένων

1. Παραδείγματα

2. Ερμηνείες των αριθμών

1. Σύμπαν Ακεραίων – Πραγματικών

Γ. Ασκήσεις

1. Ερωτήσεις

2. Εφαρμογές



A. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο A

➤ (-)

Επίπεδο B

- Οι γλώσσες με σύμπαν ακεραίων ή πραγματικούς αριθμούς έχουν χρησιμοποιηθεί κάποιες φορές σε ερωτήματα Σ/Λ των τελικών εξετάσεων.

Επίπεδο Γ

- Οι γλώσσες με σύμπαν στοιχεία του πραγματικού κόσμου. Δεν ζητούνται συχνά στις εξετάσεις παρά μόνο στις εργασίες.



B. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

Η Κατηγορηματική Λογική παρέχει έναν τεράστιο εκφραστικό πλούτο. Ως εκ τούτου μπορούν να κατασκευαστούν ερμηνείες που:

- Ορίζουν ένα σύμπαν από ομοειδή αντικείμενα (π.χ. άνθρωποι) και ορίζονται κατηγορήματα που εκφράζουν σχέσεις των αντικειμένων (π.χ. γονέας, αδελφός κ.λπ.)
- Μας ζητείται να εκφράσουμε προτάσεις της καθομιλουμένης σε κατηγορηματική λογική
 - Και το αντίστροφο: Να μεταφράσουμε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής στα ελληνικά.
- Ορίζουν σύμπαν από ετερόκλητα αντικείμενα, ή ακόμη δεν ορίζουν καθόλου σύμπαν και ζητείται να γράψουμε προτάσεις που συνδέουν τα αντικείμενα με κατηγορήματα που μας ορίζουν.

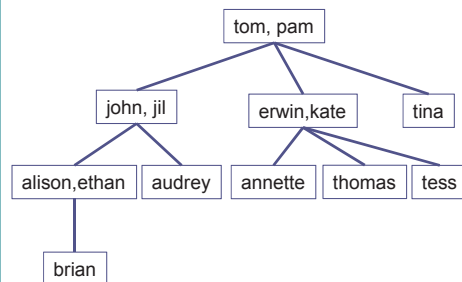
B. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

1. Σύμπαν με μία κατηγορία δεδομένων

Παράδειγμα Ερμηνείας: Ορίζουμε την εξής γλώσσα:

- Ως σύμπαν ορίζεται το σύνολο ατόμων: $|A| = \{tom, pam, john, jil, erwin, kate, tina, alison, ethan, audrey, annette, thomas, tess, brian\}$
- Ορίζονται ως κατηγορήματα τα **father(x,y)** και **mother(x,y)** να αληθεύουν αν το άτομο x είναι πατέρας (αντίστοιχα μητέρα) του ατόμου y. Τα ζεύγη ορισμάτων για τα οποία αληθεύουν τα κατηγορήματα φαίνονται στο διπλανό οικογενειακό δένδρο. Συγκεκριμένα οι tom,pam έχουν παιδιά τους john,erwin,tina, οι john,jil έχουν παιδιά τους alison,audrey και οι erwin,kate έχουν παιδιά τους annette,thomas,tess.
- Ορίζονται τα κατηγορήματα: **male(x)** να αληθεύει με ορίσματα τις σταθερές tom, john, erwin, ethan, thomas, brian και το κατηγορήμα **female(x)** να αληθεύει με ορίσματα τις σταθερές pam, jil, kate, tina, alison, audrey, annette, tess.



Δίνουμε επίσης την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τα ονόματα των ατόμων ως σταθερές στις προτάσεις κατηγορηματικής λογικής.

B. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

2. Σύμπαν με μία κατηγορία δεδομένων (Παραδείγματα)

Ασκηση 1: Τι εκφράζουν οι ακόλουθες προτάσεις κατηγορηματικής λογικής στα ελληνικά και να αποφασίσετε αν είναι Α/Ψ:

1. $father(tom, john)$
2. $\exists x [father(x, tom)]$
3. $\forall x [father(tom, x)]$
4. $\exists x \exists y [father(x, brian) \wedge mother(y, brian)]$
5. $\forall x \exists y [father(y, x)]$
6. $\exists x \forall y [father(x, y)]$

B. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

1. Σύμπαν με μία κατηγορία δεδομένων (Παραδείγματα)

Ασκηση 2: Μεταφράστε τις ακόλουθες προτάσεις στα ελληνικά και έπειτα αποφασίστε αν είναι Α/Ψ:

1. $\forall x [father(x, x)]$
2. $\neg \exists x \exists y [father(x, y)]$
3. $\exists x \exists y \neg [father(x, y)]$
4. $\exists x \neg \exists y [father(x, y)]$
5. $\forall x [man(x) \vee woman(x)]$
6. $\exists x \exists y \exists z [father(x, y) \wedge father(x, z) \wedge y \neq z]$

B. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

1. Σύμπαν με μία κατηγορία δεδομένων (Παραδείγματα)

Ασκηση 3: Κατασκευάστε τις ακόλουθες συντομογραφίες:

1. Την συντομογραφία $K(x)$ να αληθεύει αν το άτομο x έχει τουλ. δύο παιδιά.
2. Την συντομογραφία $siblings(x,y)$ να αληθεύει αν τα άτομα x,y είναι αδέρφια
3. Την συντομογραφία $uncle(x,y)$ να αληθεύει αν το άτομο x είναι θείος του ατόμου y
4. Την συντομογραφία $parent(x,y)$ να αληθεύει αν το άτομο x είναι γονέας του y.
5. Την συντομογραφία $grandparent(x,y)$ να αληθεύει αν το άτομο x είναι παππούς ή γιαγιά του ατόμου y.
6. Την συντομογραφία $is_uncle(x)$ να αληθεύει αν το άτομο x είναι θείος
7. Την συντομογραφία $is_parent(x)$ να αληθεύει αν το άτομο x είναι γονέας.



Β. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

1. Σύμπαν με μία κατηγορία δεδομένων (Παραδείγματα)

Άσκηση 4: Με χρήση των παραπάνω συντομογραφιών κατασκευάστε τις ακόλουθες προτάσεις κατηγορηματικής λογικής και έπειτα αποφασίστε αν είναι αληθές

1. Κάθε θεός είναι άνδρας.
2. Υπάρχει κάποιος που είναι παππούς.
3. Ο θεός της αδελφής της alison είναι θεός της.
4. Τα αδέλφια του brian έχουν δύο παιδιά.
5. Υπάρχει μοναδικό άτομο που έχει τουλ.δύο παιδιά.
6. Υπάρχουν ακριβώς δύο άτομα που έχουν τουλ.δύο παιδιά



Β. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

2. Σύμπαν με περισσότερες κατηγορίες δεδομένων

• Σε κάποιες ασκήσεις:

- Είτε υπονοείται ότι το σύμπαν περιλαμβάνει ετερόκλητα στοιχεία.
- Είτε το σύμπαν δεν ορίζεται καθόλου!

- Τότε μέσω κατηγορημάτων (που ορίζονται στην εκφώνηση) ορίζουμε αμέσως την ιδιότητα που πρέπει να επαληθεύει η μεταβλητή που δεσμεύουμε με ποσοδείκτη
- Συγκρατούμε τον εμπειρικό κανόνα:

- Ο ποσοδείκτης υπάρχει συνδέει τις προτάσεις συνήθως με το λογικό και:

$$\exists x[... \wedge ...]$$

- Ο ποσοδείκτης για κάθε συνδέει τις προτάσεις συνήθως με την λογική συνεπαγωγή:

$$\forall x[... \rightarrow ...]$$

Παραδείγματα:

- Ορίζεται στην εκφώνηση το κατηγορήμα $K(x)$ να αληθεύει αν ο x είναι καθηγητής και ζητείται να εκφράσουμε μία πρόταση της μορφής «Υπάρχει καθηγητής ο οποίος (έχει μια ιδιότητα)». Η μορφή της πρότασης θα είναι:

$$\exists x[K(x) \wedge (...ιδιότητα...)]$$

- Ορίζεται στην εκφώνηση το κατηγορήμα $M(x)$ να αληθεύει αν το x είναι υπολογιστής και ζητείται να εκφράσουμε μία πρόταση της μορφής «Κάθε υπολογιστής (έχει μια ιδιότητα)». Η μορφή της τελικής πρότασης θα είναι:

$$\forall x[M(x) \rightarrow (...ιδιότητα...)]$$



Β. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

2. Σύμπαν με περισσότερες κατηγορίες δεδομένων (Παραδείγματα)

Άσκηση 5: Έστω τα κατηγορήματα $\Phi(x)$, $A(x)$, $\Gamma(x,y)$, $\Sigma(x,y)$ με ερμηνείες «ο x είναι φοιτητής», «ο x είναι αριστούχος φοιτητής», «ο x γνωρίζει τον y », και «ο x θέλει να συνεργαστεί με τον y », αντίστοιχα.

Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα το νόημα των ακόλουθων τύπων:

1. $\forall x[\Phi(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge \Sigma(x,y))]$
2. $\exists x[A(x) \wedge \forall y(\Phi(y) \rightarrow \Sigma(x,y))]$

Δώστε προτάσεις σε κατηγορηματική λογική που εκφράζουν το νόημα των παρακάτω διατυπώσεων των ελληνικών:

1. Μερικοί φοιτητές που είναι αριστούχοι δε θέλουν να συνεργαστούν με κανέναν άλλο φοιτητή.
2. Αν δύο φοιτητές δε γνωρίζονται και θέλουν να συνεργαστούν μεταξύ τους, τότε κανείς τους δεν είναι αριστούχος



Β. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

2. Σύμπαν με περισσότερες κατηγορίες δεδομένων (Παραδείγματα)

Άσκηση 6: Έστω τα κατηγορήματα $C(x)$, $S(x)$, $P(x)$, $T(x,y)$, $E(x,y)$, $F(x,y)$ με ερμηνείες «το x είναι μάθημα», «ο x είναι φοιτητής», «ο x είναι καθηγητής», «ο x διδάσκει το y », «ο x παρακολουθεί το y », «ο x και ο y είναι φίλοι»

Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα το νόημα των ακόλουθων τύπων:

1. $\forall x \forall y[S(x) \wedge P(y) \wedge F(x,y) \rightarrow \exists z(C(z) \wedge T(y,z) \wedge E(x,z))]$
2. $\exists x[C(x) \wedge \forall y(S(y) \rightarrow E(y,x))]$

Δώστε προτάσεις σε κατηγορηματική λογική που εκφράζουν το νόημα των παρακάτω διατυπώσεων των ελληνικών:

1. Κάθε καθηγητής πρέπει να διδάσκει τουλάχιστον δύο διαφορετικά μαθήματα
2. Αν κάποιος φοιτητής παρακολουθεί όλα τα μαθήματα ενός καθηγητή τότε αυτοί είναι φίλοι.



Β. Θεωρία

1. Ερμηνείες εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο

3. Σύμπαν Ακεραίων - Πραγματικών

- Σε κάποιες ασκήσεις υπάρχει η περίπτωση να μας δίνεται ως σύμπαν οι ακέραιοι αριθμοί.
 - Η διαφορά σε σχέση με το σύμπαν των φυσικών είναι ότι στους ακεραίους αριθμούς: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - Δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο
 - Εξακολουθεί το γεγονός ότι δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο.
- Επίσης ενδέχεται το σύμπαν να ορίζεται ότι είναι οι πραγματικοί αριθμοί.
 - Στους πραγματικούς αριθμούς:
 - Ανάμεσα σε κάθε ζεύγος αριθμών υπάρχει πάντα ένας ακόμη πραγματικός αριθμός.
 - Σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς, που ανάμεσα σε κάθε ζεύγος φυσικών δεν υπάρχει απαραίτητα άλλος φυσικός.
 - Στους πραγματικούς ανάμεσα σε κάθε ζεύγος πραγματικών, υπάρχει πάντα ένας πραγματικός αριθμός.



Γ. Ασκήσεις

Ερωτήσεις 1

Θεωρούμε τον τύπο $\forall x \forall y [P(x, y) \rightarrow \exists z (P(x, z) \wedge P(z, y))]$

1. Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών N όπου το $P(x, y)$ σημαίνει ότι το x διαιρείται από το y .
2. Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των πραγματικών R όπου το $P(x, y)$ σημαίνει ότι το $x < y$.
3. Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των ακεραίων Z όπου το $P(x, y)$ σημαίνει ότι το $x < y$.
4. Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών N όπου το $P(x, y)$ σημαίνει ότι το $x < y$.



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Έστω τα κατηγορήματα $\Delta(x)$, $E(x)$, $\Pi(x)$, $B(x)$ και $\Theta(x, y)$ με ερμηνείες «ο x είναι δικηγόρος», «ο x είναι εισαγγελέας», «ο x είναι πολιτικός», «ο x είναι βουλευτής» και «ο x θαυμάζει τον y ». Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

1. Μερικοί δικηγόροι που είναι και πολιτικοί είναι βουλευτές.
2. Μερικοί δικηγόροι θαυμάζουν μόνο εισαγγελείς.
3. Όλοι οι εισαγγελείς θαυμάζουν μόνο εισαγγελείς.



Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Έστω τα κατηγορήματα $CS(x)$, $M(x)$, $OS(x)$, $Uses(x, y)$, και $Likes(x, y)$ με ερμηνείες «ο x είναι πληροφορικός», «ο x είναι μαθηματικός», «το x είναι λειτουργικό σύστημα», «ο x χρησιμοποιεί το y », και «ο x συμπαθεί τον y ».

1. Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα τι εκφράζουν οι παρακάτω τύποι:
 1. $\exists x [CS(x) \wedge \forall y (OS(y) \rightarrow Uses(x, y))]$
 2. $\forall x [(CS(x) \wedge M(x)) \rightarrow \exists y (OS(y) \wedge Uses(x, y))]$
2. Δώστε τύπους κατηγορηματικής λογικής που εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:
 1. Μερικοί πληροφορικοί δε συμπαθούν κανέναν μαθηματικό
 2. Κάθε πληροφορικός δεν συμπαθεί κανένα μαθηματικό.
 3. Αν ένας πληροφορικός συμπαθεί τουλάχιστον δύο μαθηματικούς τότε τουλάχιστον ο ένας από τους δύο είναι και πληροφορικός.