ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μάθημα 3.6:
Θεωρία Κατηγορηματικής Λογικής

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Ορισμός Αλήθειας Tarski
- Εύρεση Αλήθειας Τύπου με τον Ορισμό Αλήθειας Tarski.
- Έγκυρος ή Λογικά Αληθής Τύπος

Επίπεδο Β
- Ικανοποιήσιμος Τύπος
- Ικανοποιήσιμο Σύνολο Τύπων
- Λογική Συνεπαγωγή

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski

Υπάρχουν δύο τρόποι για να μεταφράσουμε μια πρόταση:
- Ο εμπειρικός τρόπος που μάθαμε στα προηγούμενα μαθήματα, δηλαδή με βασικό εργαλείο τον μεταφραστικό πίνακα.
- Ο τυπικός τρόπος είναι να μεταφράζουμε με χρήση του ορισμού του Tarski.

Θα ξεκινήσουμε με δύο εισαγωγικούς ορισμούς:

Ορισμός:
- Έστω ερμηνεία A, τύπος φ και αποτίμηση v.
  - Θα γράφουμε $A \models \varphi[v]$ αν ο τύπος φ αληθεύει στην ερμηνεία A με την αποτίμηση v (λέμε ότι η ερμηνεία ικανοποιεί τον τύπο)
  - Θα γράφουμε $A \not\models \varphi[v]$ αν ο τύπος φ δεν αληθεύει στην ερμηνεία A με την αποτίμηση v (λέμε ότι η ερμηνεία δεν ικανοποιεί τον τύπο)
- Ειδικά αν ο τύπος αληθεύει ανεξάρτητα από την αποτίμηση θα λέμε ότι η A είναι μοντέλο της φ και θα γράφουμε $A \models \varphi$.
- Άρα όταν η πρόταση αληθεύει ανεξάρτητα από την αποτίμηση, θα λέμε ότι η ερμηνεία είναι μοντέλο της φ

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski

- Ο ορισμός αλήθειας του Tarski μεταφράζει κάθε δομή τύπου:

Ορισμός Αλήθειας Tarski
Έστω Α ερμηνεία, v αποτίμηση και φ τύπος. Η εύρεση για το αν η v ικανοποιεί τον φ στην Α (ή ότι η ο φ αληθεύει για την v στην Α) και συμβολίζουμε με $A \vDash \varphi[v]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1. $A \vDash t_1 \approx t_2[v]$ $\Leftrightarrow$ $v(t_1) = v(t_2)$
2. $A \vDash P(t_1, \dots, t_n)[v]$ $\Leftrightarrow$ $(v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P^A$
3. $A \vDash \neg\varphi[v]$ $\Leftrightarrow$ δεν ισχύει ότι $A \vDash \varphi[v]$
4. $A \vDash \varphi \wedge \psi[v]$ $\Leftrightarrow$ $A \vDash \varphi[v]$ και $A \vDash \psi[v]$
5. $A \vDash \varphi \vee \psi[v]$ $\Leftrightarrow$ $A \vDash \varphi[v]$ ή $A \vDash \psi[v]$
6. $A \vDash \varphi \rightarrow \psi[v]$ $\Leftrightarrow$ Αν $A \vDash \varphi[v]$ τότε $A \vDash \psi[v]$
7. $A \vDash \varphi \leftrightarrow \psi[v]$ $\Leftrightarrow$ $A \vDash \varphi[v]$ αν και μόνο αν $A \vDash \psi[v]$
8. $A \vDash \forall x\varphi[v]$ $\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|a)]$
9. $A \vDash \exists x\varphi[v]$ $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|a)]$

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski
1. Ο κανόνας της ισότητας

Ο κανόνας 1 του ορισμού Tarski:
$$A \vDash t_1 \approx t_2[v] \quad \Leftrightarrow \quad v(t_1) = v(t_2)$$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει την ισότητα., δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:
$$t_1 \approx t_2$$
- τότε δεδομένης της ερμηνείας Α και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 1 η πρόταση μεταφράζεται στην:
$$v(t_1) = v(t_2)$$
- Όπου $v(t_1)$ η αποτίμηση του όρου t_1 και $v(t_2)$ η αποτίμηση του όρου t_2

Παράδειγμα 1:
- Στο σύμπαν των φυσικών αριθμών, με την απότίμηση $v(x) = 1, v(y) = 2$ η παράσταση
$$A \vDash y \approx x\,[v]$$
- Μεταφράζεται με χρήση του κανόνα 1 στην παράσταση 2=1

Παράδειγμα 2:
- Στο σύμπαν των φυσικών αριθμών, με την απότίμηση $v(x) = 3, v(y) = 2$, την ερμηνεία των συναρτησιακών συμβόλων f(x,y): $f^A(x,y) = x + y$ και g(x,y): $g^A(x,y) = x * y$ η παράσταση
$$A \vDash f(g(x,x),y) \approx g(x,y)\,[v]$$
- Μεταφράζεται με χρήση του κανόνα 1 στην παράσταση 11=6

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski
2. Ο κανόνας του κατηγορηματικού συμβόλου

Ο κανόνας 2 του ορισμού Tarski:
$$A \vDash P(t_1, \dots, t_n)[v] \qquad \Leftrightarrow \quad (v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P^A$$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν ατομικό τύπο που αποτελείται από ένα κατηγορηματικό σύμβολο, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:
$$A \vDash P(t_1, \dots, t_n)[v]$$
- τότε δεδομένης της ερμηνείας Α και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 1 η πρόταση μεταφράζεται στην:
$$(v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P^A$$
Όπου $v(t_i)$ η αποτίμηση του όρου t_i για $i = 1, \dots, n$ και P^A είναι η ερμηνεία του κατηγορήματος P (με άλλα λόγια ότι η διατεταγμένη n-άδα με την αποτίμηση των ορισμάτων ανήκει στην σχέση που εκφράζεται από το κατηγορηματικό σύμβολο).
- Αμέσως μετά την εφαρμογή του κανόνα 2 μεταφράζουμε περαιτέρω την παραπάνω πρόταση ως:
$$P^A(v(t_1), \dots, v(t_n)) \text{ αληθές}$$
Δηλαδή ότι το κατηγόρημα με τα συγκεκριμένα ορίσματα είναι αληθές

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski
2. Ο κανόνας του κατηγορηματικού συμβόλου

Παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα 2:
Στο σύμπαν των φυσικών αριθμών, με την απότίμηση $v(x) = 1, v(y) = 2$ και την ερμηνεία του κατηγορήματος $< (x,y)$: $<^A (x,y)$ να αληθεύει αν $x < y$ η παράσταση
$$A \vDash < (y,x)\,[v]$$
- Μεταφράζεται με χρήση του κανόνα 1 στην παράσταση
$$(2,1) \in <^A$$
- Και περαιτέρω σημαίνει (πάντα φτάνουμε στο 2ο επίπεδο όταν ερμηνεύουμε κατηγορηματικό σύμβολο):
$$<^A (2,1) \text{ αληθές}$$
- Επομένως σημαίνει ότι: 2<1

Παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα 2:
- Στο σύμπαν των φυσικών αριθμών με $v(x) = 3$, την ερμηνεία των συναρτήσεων f(x,y): $f^A(x,y) = x + y$ και g(x,y): $g^A(x,y) = x * y$, του κατηγορήματος $D(x,y)$: $D^A(x,y)$ να αληθεύει αν x διαιρείται από το y και την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A = 1$ η παράσταση
$$A \vDash D(g(x,x), f(c,c))\,[v]$$
- Μεταφράζεται με χρήση του κανόνα 1 στην παράσταση
$$(9,2) \in D^A$$
- Και περαιτέρω σημαίνει $D^A(9,2)$ αληθές
- Επομένως σημαίνει ότι: «το 9 διαιρείται από το 2»

Β. Θεωρία

1. Ορισμός Αλήθειας Tarski

3. Ο κανόνας του μονοθέσιου συνδέσμου ¬

Ο κανόνας 3 του ορισμού Tarski:

$$A \vDash \neg\varphi[v] \quad \Leftrightarrow \quad \text{δεν ισχύει ότι } A \vDash \varphi[v]$$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που έχει την μορφή της άρνησης ενός τύπου, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:
$$A \vDash \neg\varphi[v]$$
- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 3 η πρόταση μεταφράζεται στην:
$$\text{δεν ισχύει ότι } A \vDash \varphi[v]$$
- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλο κανόνα για τον τύπο φ

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών αριθμών, με την απότίμηση $v(x) = 1, v(y) = 2$ να μεταφραστεί η παράσταση $\neg(y \approx x)$ με χρήση του ορισμού του Tarski:

Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$A \vDash \neg(y \approx x)\ [v]$ (εφαρμόζω κανόνα 3)
$\Leftrightarrow$ δεν ισχύει $A \vDash y \approx x\ [v]$ (εφαρμόζω κανόνα 1)
$\Leftrightarrow$ δεν ισχύει $2 = 1$

Β. Θεωρία

1. Ορισμός Αλήθειας Tarski

4. Ο κανόνας του διθέσιου συνδέσμου ∧

Ο κανόνας 4 του ορισμού Tarski:

$$A \vDash \varphi \wedge \psi[v] \quad \Leftrightarrow \quad A \vDash \varphi[v] \text{ και } A \vDash \psi[v]$$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που συνδέει δύο τύπους με τον λογικό σύνδεσμο ΚΑΙ, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:
$$A \vDash \varphi \wedge \psi[v]$$
- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 4 η πρόταση μεταφράζεται στην:
$$A \vDash \varphi[v] \text{ και } A \vDash \psi[v]$$
- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλους κανόνες για τους τύπους φ και ψ

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών, την ερμηνεία του κατηγορήματος $D(x,y)$: $D^A(x,y)$ να αληθεύει αν x διαιρείται από το y και την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A = 1$ και d: $d^A = 3$ με χρήση του ορισμού του Tarski να μεταφράσετε την πρόταση: $D(d,c) \wedge c \approx d$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$A \vDash D(d,c) \wedge c \approx d[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 4)
$\Leftrightarrow A \vDash D(d,c)\ [v]$ και $A \vDash c \approx d[v]$ (εφαρμόζω κανόνες 2 και 1)
$\Leftrightarrow (3,1) \in D^A$ και $1 = 3$
$\Leftrightarrow D^A(3,1)$ αληθές και $1 = 3$
$\Leftrightarrow$ *3 διαιρειται από το* 1 και $1 = 3$

Β. Θεωρία

1. Ορισμός Αλήθειας Tarski

5. Ο κανόνας του διθέσιου συνδέσμου ∨

Ο κανόνας 5 του ορισμού Tarski:

$$A \vDash \varphi \vee \psi[v] \quad \Leftrightarrow \quad A \vDash \varphi[v] \text{ ή } A \vDash \psi[v]$$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που συνδέει δύο τύπους με τον λογικό σύνδεσμο Ή, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:
$$A \vDash \varphi \vee \psi[v]$$
- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 5 η πρόταση μεταφράζεται στην:
$$A \vDash \varphi[v] \text{ ή } A \vDash \psi[v]$$
- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλους κανόνες για τους τύπους φ και ψ

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $P(x)$: $P^A(x)$ να αληθεύει αν x είναι πρώτος και την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A = 2$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\mathrm{P(c)} \vee \neg P(c)$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$A \vDash \mathrm{P(c)} \vee \neg P(c)[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 5)
$\Leftrightarrow A \vDash \mathrm{P(c)}[v]$ ή $A \vDash \neg P(c)[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 2 και 3)
$\Leftrightarrow (2) \in P^A$ ή δεν ισχύει $A \vDash P(c)[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)
$\Leftrightarrow P^A(2)$ αληθές ή δεν ισχύει $(2) \in P^A$
$\Leftrightarrow$ *το* 2 *ειναι πρώτος* ή δεν ισχύει ότι το 2 είναι πρώτος

Β. Θεωρία

1. Ορισμός Αλήθειας Tarski

6. Ο κανόνας του διθέσιου συνδέσμου →

Ο κανόνας 6 του ορισμού Tarski:

$$A \vDash \varphi \rightarrow \psi[v] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Αν } A \vDash \varphi[v] \text{ τότε } A \vDash \psi[v]$$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που συνδέει δύο τύπους με τον λογικό σύνδεσμο →, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:
$$A \vDash \varphi \rightarrow \psi[v]$$
- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 6 η πρόταση μεταφράζεται στην:
$$\text{Αν } A \vDash \varphi[v] \text{ τότε } A \vDash \psi[v]$$
- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλους κανόνες για τους τύπους φ και ψ

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την αποτίμηση της μεταβλητής $v(x) = 1$ την ερμηνεία της συνάρτησης f(x): $f^A(x) = x + 2$ και την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A = 2$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\neg(c \approx x) \rightarrow f(c) \approx f(f(x))$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$A \vDash \neg(c \approx x) \rightarrow f(c) \approx f(f(x))[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 6)
$\Leftrightarrow$ Αν $A \vDash \neg(c \approx x)[v]$ τότε $A \vDash f(c) \approx f(f(x))[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 3 και 1)
$\Leftrightarrow$ Αν δεν ισχύει $A \vDash c \approx x[v]$ τότε 4=5 (εφαρμόζω κανόνα 1)
$\Leftrightarrow$ Αν δεν ισχύει $2 = 1$ τότε 4=5

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski
7. Ο κανόνας του διθέσιου συνδέσμου ↔

Ο κανόνας 7 του ορισμού Tarski:

$A \vDash \varphi \leftrightarrow \psi[v] \quad \Leftrightarrow \quad A \vDash \varphi[v]$ αν και μόνο αν $A \vDash \psi[v]$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που συνδέει δύο τύπους με τον λογικό σύνδεσμο ↔, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:

$$A \vDash \varphi \leftrightarrow \psi[v]$$

- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 7 η πρόταση μεταφράζεται στην:

$$A \vDash \varphi[v] \text{ αν και μόνο αν } A \vDash \psi[v]$$

- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλους κανόνες για τους τύπους φ και ψ

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την αποτίμηση της μεταβλητής $v(x) = 1$ την ερμηνεία της συνάρτησης f(x): $f^A(x) = x + 2$ και την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A = 2$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\neg(c \approx x) \leftrightarrow f(c) \approx f(f(x))$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:
$A \vDash \neg(c \approx x) \leftrightarrow f(c) \approx f(f(x))[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 7)
$\Leftrightarrow$ $A \vDash \neg(c \approx x)[v]$ αν και μόνο αν $A \vDash f(c) \approx f(f(x))[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 3 και 1)
$\Leftrightarrow$ δεν ισχύει $A \vDash c \approx x[v]$ αν και μόνο αν 4=5 (εφαρμόζω κανόνα 1)
$\Leftrightarrow$ δεν ισχύει $2 = 1$ αν και μόνο αν 4=5

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski
8. Ο κανόνας του ποσοδείκτη ∀

Ο κανόνας 8 του ορισμού Tarski:

$A \vDash \forall x\varphi[v] \quad \Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|\alpha)]$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που έχει τη μορφή $\forall x[\dots]$, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:

$$A \vDash \forall x\varphi\ [v]$$

- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 8 η πρόταση μεταφράζεται στην:

για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|\alpha)]$

  - όπου η παράσταση $[v(x|\alpha)]$ διαβάζεται «η αποτίμηση της μεταβλητής x είναι α» που σημαίνει ότι όταν κάνουμε την αποτίμηση της μεταβλητής x θα την αντικαταστήσουμε με το α.
- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλο κανόνα για τον τύπο φ.

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $P(x, y)$: $P^A(x, y)$ να αληθεύει αν x <y με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\forall x P(x, x)$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:
$A \vDash \forall x P(x,x)[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 8)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $A \vDash P(x,x)[v(x|\alpha)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $(\alpha, \alpha) \in P^A$ $\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $P^A(\alpha,\alpha)$ $\alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$ P^A $\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |A|$: $\alpha < \alpha$

Β. Θεωρία
1. Ορισμός Αλήθειας Tarski
9. Ο κανόνας του ποσοδείκτη ∃

Ο κανόνας 9 του ορισμού Tarski:

$A \vDash \exists x\varphi[v] \quad \Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|\alpha)]$

- Είναι ο κανόνας που μεταφράζει έναν μη ατομικό τύπο που έχει τη μορφή $\exists x[\dots]$, δηλαδή αν ένας τύπος έχει την μορφή:

$$A \vDash \exists x\varphi\ [v]$$

- τότε δεδομένης της ερμηνείας A και της αποτίμησης v εφαρμόζοντας τον κανόνα 9 η πρόταση μεταφράζεται στην:

υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \vDash \varphi[v(x|\alpha)]$

  - όπου η παράσταση $[v(x|\alpha)]$ διαβάζεται όπως πριν «η αποτίμηση της x είναι α»
  - Παρατηρήστε ότι η x είναι ελεύθερη μετά την εφαρμογή του κανόνα.
- Και συνεχίζουμε την μετάφραση επιλέγοντας κατάλληλο κανόνα για τον τύπο φ.

Παράδειγμα:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $P(x, y)$: $P^A(x, y)$ να αληθεύει αν x ≥y με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\exists x P(x, x)$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:
$A \vDash \exists x P(x,x)[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 8)
$\Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $A \vDash P(x,x)[v(x|\alpha)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)
$\Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $(\alpha, \alpha) \in P^A$ $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $P^A(\alpha,\alpha)$ $\alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$ P^A $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\alpha \in |A|$: $\alpha \geq \alpha$

Β. Θεωρία
2. Εύρεση Αλήθειας Τύπου
1. Μεθοδολογία

- Η διαδικασία της μετάφρασης ενός τύπου μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:
  - (Α) Με τον τρόπο που μάθαμε στα 5 προηγούμενα μαθήματα, δηλαδή έχοντας σαν βασικά εργαλείο τον μεταφραστικό πίνακα του μαθήματος 3.1
  - (Β) Με τον ορισμό του Tarski
- Οι δύο τρόποι δίνουν μια μετάφραση διαφορετικής οπτικής μορφής με το ίδιο νόημα.
- Η απόφαση για το αν ένας τύπος είναι αληθής ή ψευδής γίνεται με τους τρόπους που έχουμε μάθει στα προηγούμενα μαθήματα.

- Ισχύει ότι ΠΟΤΕ δεν θα κάνουμε εφαρμογή του ορισμού του Tarski για να κάνουμε την μετάφραση ενός τύπου εκτός και αν ΜΑΣ ΤΟ ΖΗΤΑΕΙ ΡΗΤΑ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ
  - Θα χρησιμοποιούμε τυπικά τον ορισμό του Tarski για να μεταφράσουμε την πρόταση.
  - Για την σωστή εφαρμογή των βημάτων ίσως να μας φανεί χρήσιμο να κατασκευάσουμε το δενδροδιάγραμμα του τύπου, αφού σε κάθε βήμα ο τύπος θα έχει μια συγκεκριμένη μορφή από τις 9 μορφές.
  - Θα καταλάβουμε αν είναι Α/Ψ από τις γνώσεις μας του μεταφραστικού πίνακα.

Β. Θεωρία
2. Ορισμός Αλήθειας Τύπου
2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $\mathrm{P}(x,y)$: $\mathrm{P}^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x<y$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\forall x \forall y[\mathrm{P}(x,y) \to \neg \mathrm{P}(y,x)]$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:

$\mathrm{A} \vDash \forall x \forall y[\mathrm{P}(x,y) \to \neg \mathrm{P}(y,x)][v]$ (εφαρμόζω κανόνα 8)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|: \mathrm{A} \vDash \forall y[\mathrm{P}(x,y) \to \neg \mathrm{P}(y,x)][v(x|\alpha)]$ (εφαρμόζω κανόνα 8)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$, για κάθε $\beta \in |\mathrm{A}|: \mathrm{A} \vDash [\mathrm{P}(x,y) \to \neg \mathrm{P}(y,x)][v(x|\alpha, y|\beta)]$ (εφαρμόζω κανόνα 6)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$, για κάθε $\beta \in |\mathrm{A}|$:
αν $\mathrm{A} \vDash \mathrm{P}(x,y)[v(x|\alpha, y|\beta)]$
τότε $\mathrm{A} \vDash \neg \mathrm{P}(y,x)[v(x|\alpha, y|\beta)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2 και 3)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$, για κάθε $\beta \in |\mathrm{A}|$:
αν $(\alpha,\beta) \in P^A$ τότε δεν ισχύει $\mathrm{A} \vDash \mathrm{P}(y,x)[v(x|\alpha, y|\beta)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$, για κάθε $\beta \in |\mathrm{A}|$: αν $(\alpha,\beta) \in P^A$ τότε δεν ισχύει $(\beta,\alpha) \in P^A$
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$, για κάθε $\beta \in |\mathrm{A}|$: αν $P^A(\alpha,\beta)$ *αληθες* τότε δεν ισχύει $P^A(\beta,\alpha)$ *αληθες*
$\Leftrightarrow$ για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$, για κάθε $\beta \in |\mathrm{A}|$: αν $\alpha<\beta$ τότε δεν ισχύει $\beta<\alpha$

Που είναι προφανώς αληθής.

Β. Θεωρία
2. Ορισμός Αλήθειας Τύπου
2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 2:
Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $\mathrm{P}(x,y)$: $\mathrm{P}^A(x,y)$ να αληθεύει αν x *διαιρειται από το* y, την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A=2$ και την αποτίμηση της μεταβλητής v(y)=1, με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\exists x\mathrm{P}(x,\mathrm{c}) \to \forall x \mathrm{P}(x,\mathrm{y})$
Λύση: Εφαρμόζω τον ορισμό Tarski:
$\mathrm{A} \vDash \exists x\mathrm{P}(x,\mathrm{c}) \to \forall x\mathrm{P}(x,\mathrm{y})[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 6)
$\Leftrightarrow$ *Αν* $\mathrm{A} \vDash \exists x\mathrm{P}(x,\mathrm{c})[v]$ *τότε* $\mathrm{A} \vDash \forall x\mathrm{P}(x,\mathrm{y})[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 9 και 8)
$\Leftrightarrow$ Αν υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|$: $\mathrm{A} \vDash \mathrm{P}(x,\mathrm{c})[v(x|\alpha)]$
τότε για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|: \mathrm{A} \vDash \mathrm{P}(x,\mathrm{y})[v(x|\alpha)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)
$\Leftrightarrow$ Αν υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|: (\alpha,2) \in P^A$
τότε για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|: (\alpha,1) \in P^A$
$\Leftrightarrow$ Αν υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|: P^A(\alpha,2)$ *αληθές τότε* για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|: P^A(\alpha,1)$ *αληθες*
$\Leftrightarrow$ Αν υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|$ *τετοιο ώστε το α να διαιρειται με το* 2
τότε για κάθε $\alpha \in |\mathrm{A}|$: *το α διαιρειται με το* 1.

Η οποιά αληθεύει, αφού η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αληθής (π.χ. για α=4), ενώ και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής αληθεύει (αφού όλοι οι φυσικοί διαιρούνται ακριβώς με το 1). Άρα ο τύπος είναι A→A=A

(Για περαιτέρω εξάσκηση βλ. ασκ.κατανοήσης 1-3)

Β. Θεωρία
3. Ικανοποιήσιμος Τύπος
1. Ορισμός Ικανοποιήσιμου Τύπου

Ορισμός:
Ένας τύπος θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμος, αν υπάρχει δομή (ερμηνεία) και αποτίμηση που ικανοποιεί τον τύπο.

Μια δομή που ικανοποιεί τον τύπο θα λέμε ότι είναι μοντέλο του τύπου

Μεθοδολογία:
Μελετάμε αν ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος δοκιμάζοντας τις γνωστές ερμηνείες που έχουμε μελετήσει.

Σημαντικό!! Η καλύτερη ερμηνεία για να εξετάσουμε αν ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος είναι η γλώσσα των κατευθυνόμενων γραφημάτων (βλ.επόμενο μάθημα):

- Για να αποδείξουμε ότι ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος:
  - Διατυπώνουμε την ερμηνεία και την αποτίμηση (αν απαιτείται), μεταφράζουμε την πρόταση και δείχνουμε ότι είναι αληθής.
- Για να αποδείξουμε ότι ο τύπος δεν είναι ικανοποιήσιμος:
  - Δείχνουμε ότι η άρνηση του τύπου είναι λογικά έγκυρος τύπος (βλέπε ορισμό λογικά έγκυρου τύπου)

Β. Θεωρία
3. Ικανοποίησιμος Τύπος
2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:
Έστω P/2 κατηγορηματικό σύμβολο. Να εξετάσετε αν ο τύπος $\exists x \forall y \mathrm{P}(x,y)$ είναι ικανοποιήσιμος

Λύση:
Έστω η ερμηνεία με σύμπαν τους φυσικούς αριθμούς: $|A|=\mathbb{N}$ και με ερμηνεία του κατηγορηματικού συμβόλου P: $P^A(x,y)$ είναι αληθές ανν $x \le y$. Τότε η πρόταση ερμηνεύεται ως:
«Υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος ή ίσος από όλους τους φυσικούς»
Και είναι αληθής (για x=0)

Παράδειγμα 2:
Έστω P/2 κατηγορηματικό σύμβολο, c:σταθερά και f/3 κατηγορηματικό σύμβολο. Να εξετάσετε αν ο τύπος $\exists x\mathrm{P}(x,\mathrm{f}(x)) \to \forall x P(f(x),c)$ είναι ικανοποιήσιμος
Λύση: Έστω η ερμηνεία με σύμπαν τους φυσικούς αριθμούς: $|A|=\mathbb{N}$ και με ερμηνεία του κατηγορηματικού συμβόλου P: $P^A(x,y)$ είναι αληθές ανν $x \ge y$ και την ερμηνεία του συν.συμβ. f: $f^A(x)=x^2$ και την ερμηνεία της σταθεράς $c^A=0$
Τότε η πρόταση γράφεται ως: $\exists x[\mathrm{x} \ge x^2] \to \forall x[x^2 \ge 0]$ άρα ερμηνεύεται:
«Αν υπάρχει φυσικός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το τετράγωνό του, τότε το τετράγωνο κάθε φυσικού είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν» και είναι αληθής (διότι είναι A→A=A)

(Για περαιτέρω εξάσκηση βλ. ασκ.κατανοήσης 4)

Β. Θεωρία

4. Ικανοποιήσιμο Σύνολο Τύπων

1. Ορισμός Ικανοποιήσιμου Συνόλου Τύπων

Ορισμός:
Ένα σύνολο τύπων θα λέμε ότι είναι ικανοποιήσιμο, αν υπάρχει δομή (ερμηνεία) και αποτίμηση που ικανοποιεί κάθε τύπο του συνόλου τύπων.

Μία δομή που ικανοποιεί όλους τους τύπους θα λέμε ότι είναι μοντέλο του συνόλου τύπων

Μεθοδολογία:
Μελετάμε αν ένα σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο δοκιμάζοντας τις γνωστές ερμηνείες που έχουμε μελετήσει.

Σημαντικό!! Η καλύτερη ερμηνεία για να εξετάσουμε αν όλοι οι τύποι είναι ικανοποιήσιμοι είναι η γλώσσα των κατευθυνόμενων γραφημάτων (βλ.επόμενο μάθημα):

- Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο:
  - Διατυπώνουμε την ερμηνεία και την αποτίμηση (αν απαιτείται), μεταφράζουμε τις προτάσεις και δείχνουμε ότι είναι αληθείς όλοι οι τύποι του συνόλου τύπων
- Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τύπων δεν είναι ικανοποιήσιμο:
  - Δείχνουμε ότι η άρνηση της σύζευξης όλων των τύπων είναι λογικά έγκυρος τύπος (βλέπε ορισμό λογικά έγκυρου τύπου)

Β. Θεωρία

4. Ικανοποίησιμο Σύνολο Τύπων

2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:
Έστω P/2 κατηγορηματικό σύμβολο, R/1 κατηγορηματικό σύμβολο, T/1 κατηγορηματικό σύμβολο.
Να εξετάσετε αν το σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο:

$$\{\exists x \forall y P(x,y), \forall x \exists y P(x,y), \forall x[R(x) \rightarrow \neg T(x)]\}$$

είναι ικανοποίησιμο
Λύση:
Είναι ικανοποιήσιμο. Στο σύμπαν των φυσικών αριθμών με την ερμηνεία των συμβόλων:

- P(x,y) είναι αληθές αν x≤y
- R(x) είναι αληθές αν το x είναι άρτιος αριθμός
- T(x) είναι αληθές αν το x είναι περιττός αριθμός

Με την αποτίμηση αυτοί οι 3 τύποι του συνόλου τύπων έχουν την ερμηνεία:

- 1ος τύπος: «Υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος ή ίσος από όλους του φυσικούς». Είναι αληθής (για x=0)
- 2ος τύπος: «Κάθε φυσικός είναι μικρότερος ή ίσος από τουλάχιστον έναν φυσικό». Είναι αληθής.
- 3ος τύπος: «Κάθε άρτιος αριθμός δεν είναι περιττός». Είναι αληθής.

΄

(Για περαιτέρω εξάσκηση βλ. ασκ.κατανόησης 5)

Β. Θεωρία

5. Λογικά Έγκυρος Τύπος

1. Ορισμός Λογικά Έγκυρου Τύπου

Ορισμός:

- Ένας τύπος θα λέμε ότι είναι λογικά έγκυρος τύπος (ή λογικά αληθής τύπος), αν αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία και οποιαδήποτε αποτίμηση.
- Θα συμβολίζουμε με $\models \varphi$ έναν λογικά έγκυρο τύπο.
- Ένας λογικά έγκυρος τύπος είναι και τυπικό θεώρημα του κατηγορηματικού λογισμού

Μεθοδολογία:

- Για να αποδείξουμε ότι ένας τύπος είναι λογικά έγκυρος:
  - Είτε δείχνουμε ότι είναι συντακτική αντικατάσταση σε νόμο προτασιακής ή κατηγορηματικής λογικής ή αξιωματικό σχήμα του ΠΛ.
  - Είτε κάνουμε εφαρμογή του Tarski και αφού καταλήξουμε στην μετάφραση αποδεικνύουμε ότι αληθεύει σε κάθε δομή και σε κάθε αποτίμηση χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα.
- Για να αποδείξουμε ότι ένας τύπος δεν είναι λογικά έγκυρος:
  - Δείχνουμε ότι υπάρχει δομή και αποτίμηση που κάνει τον τύπο ψευδή ως εξής
    - Διατυπώνουμε μια ερμηνεία (σύμπαν, κατηγορηματικά σύμβολα κ.λπ.)
    - Μεταφράζουμε την πρόταση.
    - Δείχνουμε ότι είναι ψευδής.

Β. Θεωρία

5. Λογικά Έγκυρος Τύπος

2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:
Έστω P/2 κατηγορηματικό σύμβολο. Εξετάσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι λογικά έγκυρος τύπος:

$$\exists x \forall y P(x,y) \vee \neg \exists x \forall y P(x,y)$$

είναι λογικά έγκυρος τύπος
Λύση:
Είναι λογικά έγκυρος τύπος ως συντακτική αντικατάσταση στον νόμο αποκλεισμού τρίτου της προτασιακής λογικής $\varphi \vee \neg\varphi$ θέτοντας όπου φ: $\exists x \forall y P(x,y)$

Παράδειγμα 2:
Έστω P/2 κατηγορηματικό σύμβολο. Εξετάσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι λογικά έγκυρος τύπος:

$$\exists x P(x,x) \rightarrow (P(y,x) \wedge P(z,t) \rightarrow \exists x P(x,x))$$

είναι λογικά έγκυρος τύπος
Λύση:
Είναι λογικά έγκυρος τύπος ως συντακτική αντικατάσταση στο ΑΣ1 του προτασιακού λογισμού θέτοντας όπου φ: $\exists x P(x,x)$ και όπου ψ: $P(y,x) \wedge P(z,t)$

Β. Θεωρία
5. Λογικά Έγκυρος Τύπος
2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 3:
Έστω P/1 κατηγορηματικό σύμβολο και c σταθερά. Να αποδείξετε ότι ο τύπος

$$\mathrm{P(c)} \rightarrow \exists x \mathrm{P(x)}$$

είναι λογικά έγκυρος τύπος

Λύση:

Έστω τυχούσα δομή και τυχούσα αποτίμηση v. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του Tarski:

$\mathrm{A} \vDash \mathrm{P(c)} \rightarrow \exists x \mathrm{P(x)}[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 6)
$\Leftrightarrow A\nu\ \mathrm{A} \vDash \mathrm{P(c)}[v]\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A} \vDash \exists x \mathrm{P(x)}[v]$ (εφαρμόζω κανόνα 2 και 9)
$\Leftrightarrow A\nu\ (c^A) \in P^A\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon$ υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|: \mathrm{A} \vDash \mathrm{P(x)}[v(x|\alpha)]$ (εφαρμόζω κανόνα 2)
$\Leftrightarrow A\nu\ P^A(c^A)\ \alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon$ υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|:\ (\alpha) \in P^A$
$\Leftrightarrow A\nu\ P^A(c^A)\ \alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon$ υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|:\ P^A\ (\alpha)\ \alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$

Απόδειξη:
Πράγματι έστω ότι $P^A(c^A)\ \alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$.
Τότε υπάρχει $\alpha \in |\mathrm{A}|:\ P^A\ (\alpha)\ \alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\varsigma$ (ισχύει για $\alpha = c^A$)

Β. Θεωρία
5. Λογικά Έγκυρος Τύπος
2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 4:
Έστω P/1 κατηγορηματικό σύμβολο και c σταθερά. Να εξετάσετε αν ο τύπος

$$\mathrm{P(c)} \rightarrow \forall x \mathrm{P(x)}$$

είναι λογικά έγκυρος τύπος

Λύση:

Δεν είναι λογικά έγκυρος τύπος. Θεωρώ την ερμηνεία:
- Ως σύμπαν έχει τους φυσικούς αριθμούς
- P(x) αληθεύει αν το x είναι πρώτος αριθμός
- Η σταθερά c ερμηνεύεται στον φυσικό 3.

Τότε η πρόταση ερμηνεύεται «Αν το 3 είναι πρώτος, τότε κάθε φυσικός είναι πρώτος»
Είναι ψευδής, έχουμε ότι το 3 είναι πρώτος αλλά δεν ισχύει ότι κάθε φυσικός είναι πρώτος (άρα είναι Α→Ψ=Ψ)

(Για περαιτέρω εξάσκηση βλ. εφαρμογές 2 και 3)

Β. Θεωρία
6. Λογική Συνεπαγωγή
1. Ορισμός Λογικής Συνεπαγωγής

Ορισμός:
- Θα λέμε ότι ένα σύνολο τύπων T συνεπάγεται λογικά τον τύπο φ
- Ή ότι ο φ είναι σημασιολογική συνέπεια του T
- Και θα συμβολίζουμε με $\mathrm{T} \vDash \varphi$ (Διαβάζεται T λογική συνεπαγωγή φ)

αν και μόνο αν
- Για όλες τις δομές και αποτιμήσεις που το σύνολο τύπων T είναι ικανοποιήσιμο, ικανοποιείται και ο τύπος φ.

- Η λογική συνεπαγωγή είναι το ισοδύναμο της ταυτολογικής συνεπαγωγής της προτασιακής λογικής.
- Για να ισχύει:
  - Πρέπει όταν οι υποθέσεις του συνόλου τύπων είναι ΑΛΗΘΕΙΣ, να αληθεύει και το συμπέρασμα της λογικής συνεπαγωγής.

Β. Θεωρία
6. Λογική Συνεπαγωγή
1. Ορισμός Λογικής Συνεπαγωγής

Μεθοδολογία:

- Για να αποδείξουμε ότι ισχύει μια λογική συνεπαγωγή
- Α'τρόπος:
  - Κάνουμε Tarski σε όλες τις υποθέσεις.
  - ΕΠΙΒΑΛΛΟΥΜΕ όλες οι υποθέσεις να είναι αληθείς και εξετάζουμε τις συμπεράσματα βγαίνουν.
  - ΕΠΑΛΗΘΕΥΟΥΜΕ ότι το συμπέρασμα της λογικής συνεπαγωγής είναι επίσης αληθές, λόγω των συμπερασμάτων του προηγούμενου βήματος
- Β'τρόπος:
  - Π.χ. Αν έχουμε να δείξουμε ότι $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vDash \varphi$ αρκεί να δείξουμε ότι ο τύπος: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \rightarrow \varphi$ είναι λογικά έγκυρος.
- Για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μία λογική συνεπαγωγή:
  - Επιλέγουμε μια δομή και μία αποτίμηση που κανει τις υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.
    - Διατυπώνουμε μια ερμηνεία (σύμπαν, κατηγορηματικά σύμβολα κ.λπ.)
    - Μεταφράζουμε υποθέσεις και συμπέρασμα.
    - Δείχνουμε ότι οι υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές.

(Για περαιτέρω εξάσκηση βλ. εφαρμογές 4 και 5)

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 1

Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $\mathrm{P}(x,y)$: $\mathrm{P}^A(x,y)$ να αληθεύει αν x $\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\iota\tau\alpha\iota$ από το y, την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A=0$, με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\forall x \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{c}) \rightarrow \exists x \mathrm{P}(\mathrm{c},\mathrm{x})$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 2

Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $\mathrm{P}(x,y)$: $\mathrm{P}^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x>\mathrm{y}$, την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A=0$, με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\forall x \exists \mathrm{y} \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{x}) \rightarrow \exists x(c \approx x)$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 3

Στο σύμπαν των φυσικών, με την ερμηνεία του κατηγορήματος $\mathrm{P}(x,y)$: $\mathrm{P}^A(x,y)$ να αληθεύει αν $x<\mathrm{y}$, την ερμηνεία της σταθεράς c: $c^A=0$ της σταθεράς d: $d^A=1$, και του συναρτησιακού $\mathrm{f}(x)$: $\mathrm{f}^A(x)=x+1$ με χρήση του ορισμού του Tarski να ερμηνεύσετε την πρόταση: $\neg\exists \mathrm{x}[\mathrm{P}(f(c),\mathrm{x}) \wedge P(x,f(f(d)))]$

Γ. Ασκήσεις
Άσκηση Κατανόησης 4

Εξετάστε αν οι παρακάτω τύποι είναι ικανοποιήσιμοι (P,Q είναι κατηγορηματικά σύμβολα, c είναι σταθερά)

$\varphi=\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

$\psi=\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

$\chi=\exists x(c \approx x) \wedge \neg\exists x(c \approx x)$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Δεδομένου του συνόλου τύπων: $T = \{\exists x Q(x,c), \forall y P(c,y), \neg P(c,w) \wedge P(c,w)\}$

1. *Είναι το σύνολο ικανοποιήσιμο;*
2. *Προτείνετε ερμηνεία και αποτίμηση στην οποία να αληθεύουν οι δύο πρώτοι τύποι και όχι ο τρίτος*
3. *Προτείνετε ερμηνεία και αποτίμηση που να μην αληθεύει κανένας από τους τύπους του συνόλου τύπων*

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Αποδείξτε ότι ο τύπος: $\forall x \forall y Q(x,y) \to \exists x \exists y Q(x,y)$ είναι λογικά έγκυρος θεωρώντας ότι το Q είναι ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Αποδείξτε ότι ο τύπος: $\neg\exists x Q(x) \to \neg\forall x Q(x)$ είναι λογικά έγκυρος θεωρώντας ότι το Q είναι ένα μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

Αποδείξτε ότι ισχύει η ακόλουθη λογική συνεπαγωγή: $\{R(c),\ \forall x Q(x)\} \vDash \exists x[R(x) \wedge Q(x)]$ όπου τα R/1 και Q/1 είναι μονοθέσια κατηγορηματικά σύμβολα.