ΠΛΗ20

ΕΝΟΤΗΤΑ 0: ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Μάθημα 0.2:
Μαθηματική Επαγωγή

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Επίπεδο Α
- Η μαθηματική επαγωγή είναι σταντάρ θέμα εξετάσεων. Απαιτείται η άριστη γνώση της.

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

Β. Θεωρία
1. Μαθηματική Επαγωγή

- Η μαθηματική επαγωγή είναι μία μέθοδος για να αποδεικνύουμε μαθηματικές προτάσεις.
- Υπάρχουν και άλλες τεχνικές απόδειξης μαθηματικών προτάσεων που θα μάθουμε στην συνέχεια
- Ειδικά για την επαγωγή ισχύει ότι θα την χρησιμοποιούμε μόνο όταν μας ζητείται ρητά από την εκφώνηση της άσκησης

Β. Θεωρία
1. Μαθηματική Επαγωγή

- Μας δίνεται μία μαθηματική πρόταση και μας ζητείται να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό από μια τιμή και πάνω. Ο φυσικός βρίσκεται στην εκφώνηση της άσκησης και συνήθως συμβολίζεται με n.
- Για να αποδείξουμε την πρόταση εφαρμόζουμε τα τρία βήματα της επαγωγής:
  - Την βάση της επαγωγής, όπου αποδεικνύουμε ότι ισχύει για τον μικρότερο φυσικό που μας δίνει η εκφώνηση
  - Την επαγωγική υπόθεση, όπου υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιον φυσικό k
  - Το επαγωγικό βήμα, όπου αποδεικνύουμε ότι ισχύει για την τιμή k+1 (την επόμενη τιμή από αυτήν που υποθέσαμε ήδη ότι ισχύει.

Β. Θεωρία
1. Μαθηματική Επαγωγή

- Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή ότι

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Για κάθε n>0

- Απόδειξη:
  - Βάση Επαγωγής: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=1, δηλαδή ότι $1=\frac{1(1+1)}{2}$
    Απόδειξη: Πράγματι ισχύει ότι $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$
  - Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=k, δηλαδή ότι
    $$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$
  - Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι
    $$1+2+...+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
    Απόδειξη: Πράγματι ισχύει ότι
    $$1+2+...+(k+1)=[1+2+...+k]+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Β. Θεωρία
1. Μαθηματική Επαγωγή

- Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη με μαθηματική επαγωγή πρέπει να καθαρογράψουμε την πρόταση που αποδεικνύουμε όπου θα εμφανίζεται το n. Αφού το κάνουμε, τότε ακολουθούμε το εξής σχήμα για την απόδειξη μας
  - Στην βάση της επαγωγής, αντικαθιστούμε το n με τον μικρότερο φυσικό που μας ζητείται και αποδεικνύουμε την πρόταση που προκύπτει.
  - Στην επαγωγική υπόθεση, αντικαθιστούμε το n με το k και καταγράφουμε την πρόταση που προκύπτει
  - Στο επαγωγικό βήμα, αντικαθιστούμε το n με το k+1 και αποδεικνύουμε την πρόταση που προκύπτει χρησιμοποιώντας ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ την πρόταση που έχουμε καταγράψει στην επαγωγική υπόθεση.

Β. Θεωρία
1. Μαθηματική Επαγωγή

- Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή ότι

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Για κάθε n>0

- Απόδειξη:
  - Βάση Επαγωγής: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=1, δηλαδή ότι $1=\frac{1(1+1)}{2}$
    Απόδειξη: Πράγματι ισχύει ότι $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$
  - Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=k, δηλαδή ότι
    $$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$
  - Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι
    $$1+2+...+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
    Απόδειξη: Πράγματι ισχύει ότι
    $$1+2+...+(k+1)=[1+2+...+k]+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Β. Θεωρία
2. Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

- Έχουμε το δικαίωμα να ισχυροποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση, υποθέτωντας ότι η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς από τον μικρότερο εώς και τον k (Σε αντίθεση με την συνήθη επαγωγή που υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση μόνο για τον αριθμό k)
  - Στην βάση της επαγωγής, αντικαθιστούμε το n με τον μικρότερο φυσικό που μας ζητείται και αποδεικνύουμε την πρόταση που προκύπτει.
  - Στην επαγωγική υπόθεση, καταγράφουμε ότι υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση για όλους τους φυσικούς από τον μικρότερο δυνατό εώς το k.
  - Στο επαγωγικό βήμα, αντικαθιστούμε το n με το k+1 και αποδεικνύουμε την πρόταση που προκύπτει χρησιμοποιώντας ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ κάποιον (ή κάποιους) από τους φυσικούς που χρησιμοποιήσαμε στην επαγωγική υπόθεση.
- Καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να κάνουμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή, όταν στο επαγωγικό βήμα, βλέπουμε ότι δεν χρειαζόμαστε τον ακριβώς προηγούμενο φυσικό, αλλά κάποια ακόμη μικρότερη τιμή.

Β. Θεωρία
2. Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

- Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή ότι κάθε φυσικός μεγαλύτερος ή ίσος του 8 μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από 3άρια και 5άρια

- Απόδειξη:
  - Βάση Επαγωγής: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=8, δηλαδή ότι το 8 γράφεται σαν άθροισμα από 3άρια και 5άρια

    Απόδειξη: Πράγματι ισχύει ότι $8=3+5$
  - Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για τους φυσικούς n=8,9,...k, δηλαδή ότι αυτοί οι φυσικοί γράφονται σαν άθροισμα από 3άρια και 5άρια.
  - Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι ο αριθμός n=k+1 γράφεται σαν άθροισμα από 3άρια και 5άρια.

    Απόδειξη: Αν το (k+1)-3 εμπίπτει στην επαγωγική υπόθεση (δηλ. είναι >=8) τότε ο k+1 γράφεται (k-2)+3

    Αλλιώς αν δεν εμπίπτει, θα είναι (k+1)=9 που γράφεται 3+3+3

    ή θα είναι (k+1)=10 που γράφεται 5+5

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

- Να δείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους n ισχύει η σχέση:

$$1+6+11+...+(5n-4)=n(5n-3)/2$$

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

- Να δείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε μη αρνητικό φυσικό n και κάθε πραγματικό x (εκτός του 1) ισχύει η σχέση:

$$1+x+x^2...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Δ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

- Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός που έχει την μορφή: n^3+2n με $n \geq 1$ διαιρείται (ακριβώς) με το 3.