



$P = \{\text{Συνολο προβλημάτων που λύνονται σε πολυωνυμικο ντετερμινιστικο χρονο}\}$

$$P = \bigcup_k DTIME(n^k)$$

$EXP = \{\text{Συνολο προβλημάτων που λύνονται σε εκθετικο ντετερμινιστικο χρονο}\}$

$$EXP = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$$

$NP = \{\text{Συνολο προβλημάτων που λύνονται σε μη ντετερμινιστικο πολυωνυμικο χρονο}\}$

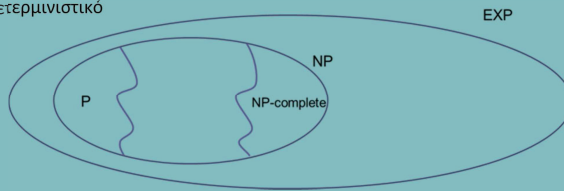
$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

$DTIME(f(n))$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε ντετερμινιστικό χρόνο $O(f(n))$ τότε:

$NTIME(f(n))$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε μη ντετερμινιστικό χρόνο $O(f(n))$

Θεώρημα: Ισχύει ότι: $P \subseteq NP \subseteq EXP$

- $P \subseteq NP$ είναι προφανές, αφού κάθε ντετερμινιστική Μ.Τ. είναι εξ'ορισμού και μη ντετερμινιστική.
- $NP \subseteq EXP$. Η απόδειξη στηρίζεται στην προσομοίωση μια μη ντετερμινιστικής Μ.Τ. Ν από μία ντετερμινιστική Μ ως εξής:
 - Η Ν είναι πολυωνυμικού χρόνου, άρα κάθε υπολογισμός της έχει πολυωνυμικό μήκος έστω $p=n^k$, όπου n το μέγεθος της εισόδου.
 - Κάθε υπολογισμός της Ν είναι μια ακολουθία από μη ντετερμινιστικές επιλογές. Αν είναι d ο βαθμός του μη ντετερμινισμού, τότε υπάρχουν d^p δυνατοί μη ντετερμινιστικοί υπολογισμοί.
 - Η Μ προσομοιώνει εξαντλητικά κάθε μη ντετερμινιστικό υπολογισμό διαπερνώντας όλο του δένδρο του μη ντετερμινιστικού υπολογισμού.
 - Συνεπώς ο χρόνος λειτουργίας της είναι $p \cdot d^p$, άρα εκθετικός
 - Συνεπώς $NP \subseteq EXP$



Διαισθητικά σε μια κλάση προβλημάτων C ορίζουμε:

- C-πλήρης** (C-Complete) τα προβλήματα της κλάσης που:
 - Είναι τα δυσκολότερα προβλήματα της κλάσης (υπό την έννοια ότι κάθε πρόβλημα της κλάσης είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο αυτά)
 - Είναι ισοδύναμα μεταξύ τους (δηλαδή αντίστοιχης υπολογιστικής δυσκολίας)
- Έτσι για την κλάση NP, ορίζουμε ότι ένα πρόβλημα είναι **NP-πλήρες** (ή NP-Complete):
 - Αν κάθε πρόβλημα στην κλάση NP, είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο αυτό.
 - έχει αποδειχθεί από τον (Cook, 1970) ότι: Το **SAT** είναι **NP-πλήρες**
 - Συνεπώς οποιοδήποτε πρόβλημα του NP είναι το πολύ τόσο δύσκολο όσο το SAT!

Τα προβλήματα της κλάσης NP-COMPLETE έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Λύνονται σε εκθετικό ντετερμινιστικό χρόνο (**ανήκουν στο EXP**)
- Λύνονται σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο (**ανήκουν στο NP**)
- Δεν έχει αποδειχθεί ότι δεν λύνονται από ντετερμινιστικό πολυωνυμικό αλγόριθμο.
 - Αν αποδειχθεί ότι ένα από αυτά δεν λύνεται σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο, τότε κανένα δεν λύνεται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο
 - Άρα $P \neq NP$
- Δεν έχει αποδειχθεί ότι λύνονται από ντετερμινιστικό πολυωνυμικό αλγόριθμο.
 - Αν αποδειχθεί ότι ένα από αυτά λύνεται σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο, τότε όλα λύνονται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο
 - Άρα $P = NP$
- Όλα τα προβλήματα της κλάσης NP ανάγονται σε αυτά.

Για να αποδειχθεί ότι ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες:

- (A) Δείχνουμε ότι ανήκει στο NP
- (B) Δείχνουμε ότι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό

Για να αποδειχθεί ότι ένα πρόβλημα είναι NP-σκληρό (NP-Hard):

- (A) Δείχνουμε ότι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό



Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Αποδεικνύουμε ότι $\Pi \in NP$**
 - Είτε δίνοντας μη ντετερμινιστική μηχανή Turing-μάντη που «μαντεύει» την λύση και έπειτα επαληθεύει ότι είναι όντως λύση του προβλήματος.
 - Είτε δίνοντας ντετερμινιστική μηχανή Turing-επαληθευτή που δεδομένης μιας λύσης (πιστοποιητικό) επαληθεύει σε πολυωνυμικό ντετερμινιστικό χρόνο ότι είναι λύση του προβλήματος.
- Δίνουμε μια πολυωνυμική αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα Π' στο πρόβλημα Π (Η αναγωγή συμβολίζεται με $\Pi' \leq \Pi$)**
 - Όπου δίνουμε έναν κανόνα μετασχηματισμού της εισόδου Ε' του γνωστού προβλήματος Π' σε είσοδο Ε του αγνώστου προβλήματος Π έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο:

Αποτέλεσμα του Π(Ε) **ισοδύναμο** με αποτέλεσμα του Π'(Ε')

Και δείχνουμε ότι η κατασκευή θέλει πολυωνυμικό χρόνο

