ΠΛΗ30

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

Μάθημα 4.5: Γλώσσες Όχι Ανεξάρτητες Συμφραζομένων

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α. Σκοπός του Μαθήματος

Οι στόχοι του μαθήματος είναι:

Επίπεδο Α
- Το λήμμα της άντλησης για απόδειξη ότι μία γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων

Επίπεδο Β
- (-)

Επίπεδο Γ
- (-)

Β. Θεωρία

1. Το Λήμμα της Άντλησης

1. Ορισμός

Το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Ανεξάρτητες Συμφραζομένων
Έστω L μια άπειρη γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων. Τότε υπάρχει ένας αριθμός n (μήκος άντλησης) τέτοιος ώστε κάθε $s \in L$ με $|s| \geq n$ να μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ όπου για τις συμβολοσειρές u, v, w, x και y ισχύει:
- $|vwx| \leq n$
- $|vx| > 0$
- $uv^m wx^m y \in L$ για κάθε φυσικό $m \geq 0$

- Κάθε συμβολοσειρά μιας γλώσσας ανεξάρτητης συμφραζομένων επαληθεύει τις 3 ιδιότητες του λήμματος άντλησης.
- Άρα για να δείξουμε ότι μία γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων:
  - Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.
  - Επιλέγουμε μια κατάλληλη συμβολοσειρά $s \in L$
  - Εντοπίζουμε τι σύμβολα θα έχουν τα v,x λόγω των δύο πρώτων ιδιοτήτων.
  - Δείχνουμε ότι για κάποιο $m \geq 0$ το $uv^m wx^m y \notin L$
  - Άτοπο από το λήμμα της άντλησης. Άρα η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Β. Θεωρία

1. Το Λήμμα της Άντλησης

2. Παραδείγματα

(1) Επιλέγουμε μια **συμβολοσειρά s** που ανήκει στην γλώσσα που
- (α) **όλα** τα σύμβολα είναι υψωμένα τουλάχιστον στην p
- (β) ανήκει οριακά στην γλώσσα

(2) Υπολογίζουμε το μήκος της συμβολοσειράς που επιλέξαμε στο (1)

$L_1 = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 0\}$ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^p 2^p$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $3p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.

Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v,x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v,x:

1. Να περιέχουν μόνο 0. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά άρα π.χ. τα 0 δεν είναι ίσα με τα 1
2. Να περιέχουν 0 και 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι άρα π.χ. τα 0 δεν είναι ίσα με τα 2
3. Να περιέχουν μόνο 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι άρα π.χ. τα 1 δεν είναι ίσα με τα 2
4. Να περιέχουν 1 και 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι και δυάρια άρα π.χ. τα 2 δεν είναι ίσα με τα 0
5. Να περιέχουν μόνο 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται δυάρια άρα π.χ. τα 2 δεν είναι ίσα με τα 0.

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

(3) Εντοπίζουμε περιπτώσεις ανάλογα με το που περιέχεται το vwx δεδομένου ότι έχει μήκος το πολύ p. Χρήσιμο θα φανεί να κάνουμε ένα βοηθητικό σχήμα (βλέπε δεξιά)

$$s = \overbrace{00\ldots00}^{p}\overbrace{11\ldots11}^{p}\overbrace{22\ldots22}^{p}$$

Β. Θεωρία

1. Το Λήμμα της Άντλησης

2. Παραδείγματα

$L_2 = \{0^n 1^{2n} 2^{3n} | n \geq 0\}$ δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων - ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^{2p} 2^{3p}$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $6p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.

Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v,x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v,x:

1. Να περιέχουν μόνο 0. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία 1:2 των 0 με τα 1
2. Να περιέχουν 0 και 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία 1:3 των 0 με τα 2
3. Να περιέχουν μόνο 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία 2:3 των 1 με τα 2
4. Να περιέχουν 1 και 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι και δυάρια άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία 1:3 των 0 με τα 2
5. Να περιέχουν μόνο 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται δυάρια άρα π.χ δεν ισχύει η αναλογία 1:3 των 0 με τα 2

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Β. Θεωρία

1. Το Λήμμα της Άντλησης

2. Παραδείγματα

$L_3 = \{0^n 1^{2n+2} 2^{n+3} | n \geq 0\}$ δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων - ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^{2p+2} 2^{p+3}$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $4p + 5 \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.

Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v,x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v,x:

1. Να περιέχουν μόνο 0. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία n:2n+2 των 0 με τα 1
2. Να περιέχουν 0 και 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία n:n+3 των 0 με τα 2
3. Να περιέχουν μόνο 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία 2n+2:n+3 των 1 με τα 2
4. Να περιέχουν 1 και 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι και δυάρια άρα π.χ. δεν ισχύει η αναλογία n:n+3 των 0 με τα 2
5. Να περιέχουν μόνο 2. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται δυάρια άρα π.χ δεν ισχύει η αναλογία n:n+3 των 0 με τα 2

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Β. Θεωρία

1. Το Λήμμα της Άντλησης

2. Παραδείγματα

$L_4 = \{0^i 1^j 2^k | i < j < k\}$ δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων - ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p 1^{p+1} 2^{p+2}$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $3p + 3 \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.

Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v,x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v,x:

1. Να περιέχουν μόνο 0. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά άρα τα 0 δεν είναι πλέον λιγότερα από τους άσσους.
2. Να περιέχουν 0 και 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι άρα οι άσσοι δεν είναι πλέον λιγότεροι από τα δυάρια
3. Να περιέχουν μόνο 1. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι άρα οι άσσοι δεν είναι πλέον λιγότεροι από τα δυάρια.
4. Να περιέχουν 1 και 2. Τότε $uv^0wx^0y \notin L$, διότι αφαιρούνται άσσοι και δυάρια άρα οι άσσοι δεν είναι πλέον περισσότεροι από τα μηδέν.
5. Να περιέχουν μόνο 2. Τότε $uv^0wx^0y \notin L$, διότι αφαιρούνται δυάρια άρα τα δυάρια δεν είναι πλέον περισσότερα από τους άσσους.

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Β. Θεωρία
1. Το Λήμμα της Άντλησης
2. Παραδείγματα

$L_5 = \{ww|w \in \{0,1\}^*\}$ δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων - ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Η L είναι άπειρη. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων. Έστω p το μήκος άντλησής της.

Η συμβολοσειρά $s = 0^p1^p\ 0^p1^p$ ανήκει στην γλώσσα και έχει μήκος $4p \geq p$. Η συμβολοσειρά μπορεί να γραφεί στην μορφή $s = uvwxy$ με τις ιδιότητες του λήμματος άντλησης.

Επειδή $|vwx| \leq p$ και $|vx| > 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα v,x θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Διακρίνω τις περιπτώσεις για τα v,x:

1. Να περιέχουν μόνο 0 της αρχής. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά της αρχής άρα τα 0 της αρχής όχι ίσα με τα 0 της μέσης της συμβολοσειράς
2. Να περιέχουν 0 και 1 της αρχής. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι της αρχής άρα π.χ. τα 0 της αρχής δεν είναι ίσα με τα 0 της μέσης της συμβολοσειράς
3. Να περιέχουν μόνο 1 της μέσης. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι της μέσης, άρα οι άσσοι της μέσης δεν είναι ίσοι με τους άσσους του τέλους
4. Να περιέχουν 1 και 0 της μέσης. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι και μηδέν της μέσης άρα π.χ. τα 0 της αρχής δεν είναι ίσα με τα 0 της μέσης της συμβολοσειράς
5. Να περιέχουν μόνο 0 της μέσης. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδέν της μέσης, άρα τα μηδέν της μέσης δεν είναι ίσα με τα μηδέν του τέλους.
6. Να περιέχουν 0 και 1 του τέλους. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται μηδενικά και άσσοι του τέλους άρα π.χ. τα 0 της αρχής δεν είναι ίσα με τα 0 του τέλους της συμβολοσειράς
7. Να περιέχουν μόνο 1 του τέλους. Τότε $uv^2wx^2y \notin L$, διότι προστίθενται άσσοι του τέλους άρα οι άσσοι του τέλους όχι ίσοι του άσσους της μέσης της συμβολοσειράς

Άτοπο από το λήμμα άντλησης. Συνεπώς η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Δείξτε ότι η ακόλουθη γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων:

$$L = \{0^i1^j2^k | i \geq j \geq k\}$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

(2009Β) Δείξτε ότι η ακόλουθη γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων:

$$L = \{a^j0^{j+1}b^{2j+2} | j \geq 0\}$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

(2010Β) Δείξτε ότι η ακόλουθη γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων:

$$L = \{b^na^nb^n | n \geq 0\}$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 4

1. Δείξτε ότι η γλώσσα: $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* | w$ έχει ίσα 0 και 1$\}$ είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.
2. Δείξτε ότι η γλώσσα: $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* | w$ είναι παλινδρομική$\}$ είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.
3. Δείξτε ότι η γλώσσα: $L_1 \cap L_2$ ΔΕΝ είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.