

LORENZO NICOLÈ

FLUIDODINAMICA NUMERICA APPLICATA ALLE  
MACCHINE





**DE** Department of  
Engineering  
Ferrara

# FLUIDODINAMICA NUMERICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Appunti

LORENZO NICOLÈ

DE - Dipartimento di Ingegneria  
Ingegneria Meccanica [LM-33]  
Università degli Studi di Ferrara

2022 - 2023 – version 1.0

Lorenzo Nicolè: *Fluidodinamica numerica applicata alle macchine*, Appunti, © 2022 - 2023

PROFESSORS:  
Alessio Suman

LOCATION:  
Ferrara

TIME FRAME:  
2022 - 2023

---

## INDICE

---

I	INTRODUZIONE	1
1	EQUAZIONI CONSERVATIVE DEL MOTO	3
1.1	Particelle di un fluido . . . . .	4
1.1.1	Derivate totali . . . . .	4
1.2	Conservazione della massa . . . . .	5
1.2.1	Funzione di flusso . . . . .	6
1.3	Conservazione del momento . . . . .	8
1.3.1	Equazione di Cauchy . . . . .	8
1.3.2	Equazione di Navier-Sockes . . . . .	9
II	APPENDIX	11
A	APPENDIX TEST	13
A.1	Appendix Section Test . . . . .	13
A.2	Another Appendix Section Test . . . . .	13
	BIBLIOGRAFIA	15

---

## ELENCO DELLE FIGURE

---

Figura 1.1	Esempi dei modelli di Lagrange ed Eulero . . . .	4
Figura 1.2	Esempio dell'ugello della canna dell'acqua . . .	5
Figura 1.3	Rappresentazione delle <i>streamlines</i> . . . . .	6

---

## ELENCO DELLE TABELLE

---

Tabella A.1	Autem usu id . . . . .	13
-------------	------------------------	----

---

## LISTINGS

---

Listing A.1	A floating example ( <code>listings</code> manual) . . . . .	14
-------------	--	----

---

## ELENCO DELLE COSE DA FARE

---

---

## ACRONYMS

---

## Parte I

### INTRODUZIONE

Introduzione alla simulazione fluidodinamica





---

## EQUAZIONI CONSERVATIVE DEL MOTO

---

Esistono due approcci alla descrizione del moto di un fluido all'interno di un determinato volume:

- Approccio Lagrangiano
- Approccio Euleriano

**APPROCCIO LAGRANGIANO** La descrizione lagrangiana di un flusso di un fluido traccia la posizione delle singole particelle dello stesso. Il flusso può essere pensato come la composizione di un numero finito di particelle di fluido che hanno: massa, momento, energia inerziale e altre proprietà. Dunque si può descrivere lo stato delle singole particelle a partire da equazioni per ognuna. Ciò rende difficile sfruttare questo metodo per un'analisi pratica:

1. I fluidi sono composti da miliardi di molecole (particelle);
2. le interazioni tra le molecole sono difficili da descrivere analiticamente.

Questo approccio viene comunque usato in alcuni campi come: dinamica di spray, bolle e particelle; per l'accoppiamento dei metodi euleriani-lagrangiani.

**APPROCCIO EULERIANO** la descrizione euleriana di un fluido, viene definito un volume di controllo in cui il fluido scorre all'interno. Si considera come le proprietà del fluido cambiano nel volume di controllo, che viene fissato nello spazio e nel tempo. Invece che seguire le singole particelle nello spazio. Viene definito uno spazio di variabili che sono funzioni dello spazio e del tempo come:

CAMPO DI VELOCITÀ  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$

CAMPO DI PRESSIONE  $p = p(x, y, z, t)$

CAMPO DI DENSITÀ  $\rho = \rho(x, y, z, t)$

CAMPO DI TEMPERATURA  $T = T(x, y, z, t)$

...

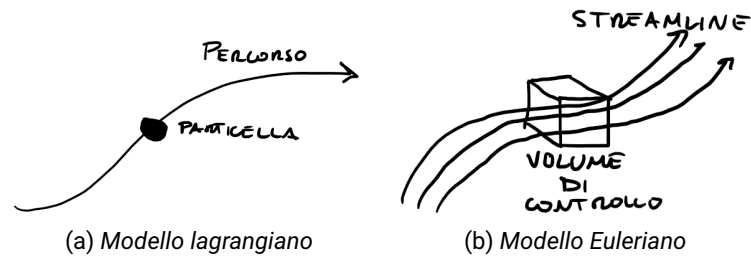


Figura 1.1: Esempi dei modelli di Lagrange ed Eulero

Resta necessario imporre una serie di condizioni di contorno affinché il sistema possa essere ben definito.

Alla figura 1.1 vengono rappresentati i due modelli.

### 1.1 PARTICELLE DI UN FLUIDO

Il comportamento di un fluido è definito in termini macroscopici da<sup>1</sup>:

- Velocità  $\mathbf{u}$
- Pressione  $p$
- Densità  $\rho$
- Temperatura  $T$
- Energia (cinetica)  $E$ , Entalpia  $H$

Le proprietà risultano medie nel caso si considerino un numero sufficiente di particelle. Un elemento fluido può essere pensato come il più piccolo volume per il quale la condizione di continuità è comunque valida.

#### 1.1.1 Derivate totali

Considerando un fluido arbitrario, per una particella in moto nel fluido, questa sperimenta:

1. un cambiamento del fluido in funzione del tempo;
2. cambiamenti in base al fatto che più particelle si muovono in diverse direzioni nel fluido con diverse condizioni.

La somma di queste due, per una caratteristica per unità di massa è chiamata come la derivata totale:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + V_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + V_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + V_z \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> Vengono ignorate le notazioni  $(x, y, z, t)$  per comodità, si ricorda che sono tutte funzioni di questi parametri.

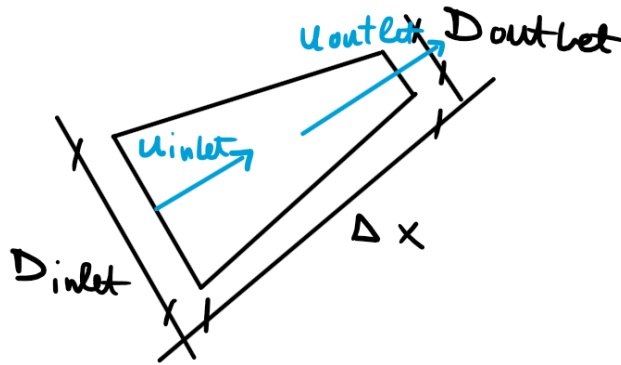


Figura 1.2: Esempio dell'ugello della canna dell'acqua

L'operatore **derivata totale**,  $D/Dt$ , fornisce la trasformazione tra il modello lagrangiano e quello euleriano.

Considerando l'accelerazione del fluido, può essere definita come:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1.2)$$

dove:

$\frac{\partial}{\partial t}$       Derivata locale

$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$       Derivata di convezione

La derivata locale è diversa da zero solamente nel caso di flussi stazionari. Mentre, la derivata di convezione è principalmente dovuta al fatto che le particelle sono in movimento.

Dunque, se la velocità del fluido è costante allora: l'accelerazione locale è nulla, allo stesso modo, l'accelerazione di convezione è sempre diversa da zero perché la particella si muove in altre posizioni caratterizzata dalla diversa velocità nel fluido.

Prendiamo come esempio il caso del flusso d'acqua dall'ugello, rappresentato in figura 1.2. Consideriamo per esempio l'approccio Euleriano sotto le seguenti ipotesi: il flusso è stazionario nel caso in cui tutte le proprietà del flusso non cambiano in funzione del tempo.

Vale che la velocità all'uscita dell'ugello è più grande rispetto a quella di ingresso. Perciò, il fluido deve accelerare all'interno del volume, anche se si è sotto l'ipotesi di stazionarietà. Qui entra in gioco la derivata di convezione, questo parametro sarà sicuramente non nullo da cui i fenomeni di accelerazione.

Si evince che: secondo il modello euleriano, il sistema risulta stazionario. se invece si trasporta il tutto nel modello lagrangiano, ne risulta un'accelerazione delle particelle che entrano ad una data velocità ma escono ad una superiore.

## 1.2 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.3)$$

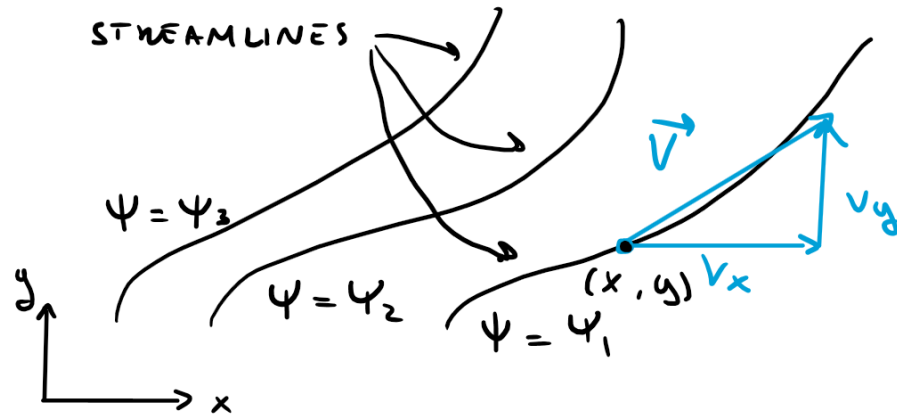


Figura 1.3: Rappresentazione delle streamlines

*Il flusso in entrata e in uscita da un determinato volume varia al variare della massa compresa all'interno dello stesso volume di controllo.*

### 1.2.1 Funzione di flusso

Le linee di corrente o **Streamlines** soddisfano l'equazione di continuità e rappresentano su un piano cartesiano la funzione di flusso.

Prendiamo il caso di un fluido bidimensionale incompressibile sul piano  $x$ - $y$ <sup>2</sup>. L'equazione di continuità viene ridotta a  $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$ . La trasformazione di una variabile ci permette di riscrivere l'equazione in termini dipendenti da una sola variabile: la **funzione di flusso**  $\Psi$ :

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.4)$$

Sostituendo nell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Un'ulteriore considerazione deriva dal fatto che seguendo le ipotesi di:

- si assume che un fluido possa essere rappresentato tramite *streamlines*;
- valga comunque la similitudine dei triangoli;

Allora si dimostra che:

*La streamline è una curva che è sempre istantaneamente tangente al vettore velocità locale.*

A partire dalla similitudine dei triangoli vale che (Vedi figura 1.3):

$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \quad (1.6)$$

<sup>2</sup>  $V_z = 0$  sia  $V_x$  che  $V_y$  non dipendono dalle componenti in  $z$

*Il significato fisico della funzione  $\Psi$  è che le curve della costante rappresentano le streamlines del flusso.*

Dalla (1.6) vale:  $V_x dy = V_y dx$ . Sostituendo con la definizione della (1.4), può essere scritta la:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = 0 \quad (1.7)$$

Allora la variazione totale di  $\Psi$  (in uno spazio infinitesimale  $x + dx, y + dy$ ) vale<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi \quad (1.8)$$

Da cui deve essere che

$$d\Psi = 0 \quad (1.9)$$

Questo significa che  $\Psi = \text{cost.}$  lungo le *streamlines*.

Siccome, per definizione, alcun flusso può attraversare una *streamline*, il fluido reste confinato tra le due stesse. Ne segue che, per un flusso stazionario e incompressibile bidimensionale, il flusso di volume  $\dot{V}$  per unità di tempo tra due *streamlines* deve essere costante (per garantire la validità dell'equazione di continuità). Se due *streamlines* si separano, la velocità media del flusso calerà uniformemente.

Analogamente a quanto visto fin ora, ovvero una descrizione delle *streamlines* in coordinate cartesiane; la trattazione è del tutto equivalente per un sistema di riferimento in coordinate cilindriche. A partire dalle stesse ipotesi, l'equazione di continuità può essere descritta come:

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1.10)$$

Ora, la funzione di continuità viene comunque soddisfatta da una qualsiasi legge continua  $\Psi = \Psi(r, \theta)$  dato che l'ordine di differenziazione è irrilevante. Allora, per un fluido incompressibile assisimmetrico (c'è simmetria nella rotazione dell'asse  $z$ ) in assenza di vortici<sup>4</sup>, la funzione di continuità può essere descritta come

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

**CONSIDERAZIONI** Al di là della definizione di *streamline* in qualsiasi sistema di riferimento, grazie all'osservazione di queste si può tracciare le linee di corrente soddisfacenti la conservazione della massa, permettendo di descrivere l'andamento del flusso all'interno del volume. Vale anche:

**STREAMLINES DIVERGENTI**  $\Rightarrow$  velocità di flusso maggiore  $\Rightarrow$  accelerazione delle particelle o flusso.

**STREAMLINES CONVERGENTI**  $\Rightarrow$  Velocità di flusso minore  $\Rightarrow$  decelerazione delle particelle o flusso.

<sup>3</sup> Si ricorda che la somma delle derivate parziali fatte rispetto alle variabili indipendenti è la derivata totale.

<sup>4</sup>  $V_\theta = 0$  né  $V_r$  né  $V_z$  dipendono da  $\theta$

*Il significato fisico di questa affermazione è che: la differenza del valore di  $\Psi$  tra due streamlines è uguale al flusso di volume per la distanza tra le due linee.*

## 1.3 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO

Per la trattazione della conservazione del momento da parte delle particelle di un fluido è necessario introdurre l'**equazione di Cauchy**.

## 1.3.1 Equazione di Cauchy

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.12)$$

Dove viene definito  $\boldsymbol{\sigma}$  come **Cauchy stress tensor**:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.13)$$

Che scritto in forma matriciale diventa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}_{\text{parte isotropica di } \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{parte anisotropa di } \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.14)$$

Per un fluido a riposo, l'unico sforzo in un elemento del fluido è la pressione idrostatica locale, la quale agisce uniformemente normale a qualsiasi superficie del fluido (componente isotropa di  $\boldsymbol{\sigma}$ ). Mentre, per un fluido in movimento, agisce comunque la componente isotropa. In più si aggiunge l'effetto dello sforzo viscoso  $\boldsymbol{\tau}$  (componente anisotropa di  $\boldsymbol{\sigma}$ ). Tra l'altro, resta valido il fatto che lo sforzo viscoso è un effetto interno del fluido e non sulla superficie di controllo come accade per la componente isotropa.

Ora è necessario andare a descrivere che comportamento i fluidi abbiano in termini di componente anisotropa. Si rende necessario dividere i fluidi in base alla legge caratteristica di questo comportamento ovvero:

- fluidi newtoniani
- fluidi non newtoniani

## 1.3.1.1 Fluidi newtoniani

I fluidi newtoniani sono tutti quei fluidi in cui lo sforzo viscoso è linearmente proporzionale alla deformazione del fluido. In parole povere:

$$\boldsymbol{\tau} \propto \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.15)$$

Possiamo definire che la proporzionalità, assumendo che valga l'ipotesi di Stokes<sup>5</sup>:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1.16)$$

<sup>5</sup> Ovvero che il comportamento del fluido sia comparabile lungo i tre assi principali

Nell'equazione (1.16) viene aggiunto il parametro  $\mu$  il quale indica la viscosità dinamica. Spesso si può trovare anche sotto forma di  $\nu$  definito come  $\nu = \mu/\rho$ . Si può legare la viscosità dinamica, in entrambe le sue forme, come:  $\mu = f(T, p)$  ovvero che la viscosità dinamica dipende sia dalla temperatura che dalla pressione. In particolare, si può dimostrare come dipenda fortemente dalle variazioni di temperatura e debolmente da quelle di pressione. Resta importante capire che la viscosità dinamica è un fenomeno interno al fluido, qualunque esso sia, infatti si tratta della frizione tra i vari substrati del fluido.

### 1.3.1.2 Fluidi non newtoniani

Per questi fluidi non si può considerare la viscosità come costante, ma potrebbe variare in funzione dello sforzo. Riprendendo i termini dell'equazione di Cauchy (1.13):

$$\sigma = \mu \dot{\gamma} \quad (1.17)$$

### 1.3.2 Equazione di Navier-Sokes

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (1.18)$$

La quale può essere semplificata nel caso sussistano determinate condizioni:

FLUIDO INCOMPRESSIBILE  $(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$  allora l'equazione diventa:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.19)$$

FLUIDO NON VISCIDO si semplifica fino a:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (1.20)$$

Si definisce un fluido non viscido nel momento in cui le forze viscosi sono trascurabili rispetto alle forze d'inerzia, gravitazionali e di pressione. Ad esempio lo sono le zone del fluido ad alto numero di Reynolds.





Parte II

APPENDIX





---

## APPENDIX TEST

---

Lorem ipsum at nusquam appellantur his, ut eos erant homero concludaturque. Albucius appellantur deterruisset id eam, vivendum partiendo dissentiet ei ius. Vis melius facilisis ea, sea id convenire referrentur, takimata adolescens ex duo. Ei harum argumentum per. Eam vidit exerci appetere ad, ut vel zzril intellegam interpretaris.

*More dummy text.*

### A.1 APPENDIX SECTION TEST

Test: [Tabella A.1](#) (This reference should have a lowercase, small caps A if the option `floatperchapter` is activated, just as in the table itself → however, this does not work at the moment.)

LABITUR BONORUM PRI NO	QUE VISTA	HUMAN
fastidii ea ius	germano	demonstratea
suscipit instructor	titulo	personas
quaestio philosophia	facto	demonstrated

Tabella A.1: Autem usu id.

### A.2 ANOTHER APPENDIX SECTION TEST

Equidem detraxit cu nam, vix eu delenit periculis. Eos ut vero constituto, no vidit propriae complectitur sea. Diceret nonummy in has, no qui eligendi recteque consetetur. Mel eu dictas suscipiantur, et sed placeat oporteat. At ipsum electram mei, ad aeque atomorum mea. There is also a useless Pascal listing below: [Listing A.1](#).

Listing A.1: A floating example (listings manual)

---

```
for i:=maxint downto 0 do
begin
{ do nothing }
end;
```

---

---

## DECLARATION

---

Put your declaration here.

*Ferrara, 2022 - 2023*

---

Lorenzo Nicolè



## COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both  $\text{\LaTeX}$  and  $\text{\LyX}$ :

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

<http://postcards.miede.de/>

*Final Version* as of 12 agosto 2023 (`classicthesis` version 1.0).