LORENZO NICOLÈ

FLUIDODINAMICA NUMERICA APPLICATA ALLE MACCHINE

FLUIDODINAMICA NUMERICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Appunti

LORENZO NICOLÈ

DE - Dipartimento di Ingegneria
Ingegneria Meccanica [LM-33]
Università degli Studi di Ferrara

2022 - 2023 – version 1.0

Lorenzo Nicolè: *Fluidodinamica numerica applicata alle macchine,* Appunti, © 2022 - 2023

PROFESSORS:
Alessio Suman

LOCATION:
Ferrara

TIME FRAME:
2022 - 2023

INDICE

ELENCO DELLE FIGURE

ELENCO DELLE TABELLE

LISTINGS

ELENCO DELLE COSE DA FARE

ACRONYMS

CFD *Computational Fluid Dynamics*

Parte I

INTRODUZIONE

1

EQUAZIONI CONSERVATIVE DEL MOTO

Esistono due approcci alla descrizione del moto di un fluido all'interno di un determinato volume:

- Approccio Lagrangiano
- Approccio Euleriano

APPROCCIO LAGRANGIANO La descrizione lagrangiana di un flusso di un fluido traccia la posizione delle singole particelle dello stesso. Il flusso può essere pensato come la composizione di un un numero finito di particelle di fluido che hanno: massa, momento, energia inerziale e altre proprietà. Dunque si può descrivere lo stato delle singole particelle a partire da equazioni per ognuna. Ciò rende difficile sfruttare questo metodo per un'analisi pratica:

1. I fluidi sono composti da miliardi di molecole (particelle);
2. le interazioni tra le molecole sono difficili da descrivere analiticamente.

Questo approccio viene comunque usato in alcuni campi come: dinamica di spray, bolle e particelle; per l'accoppiamento dei metodi euleriani-lagrangiani.

APPROCCIO EULERIANO la descrizione euleriana di un fluido, viene definito un volume di controllo in cui il fluido scorre all'interno. Si considera come le proprietà del fluido cambiano nel volume di controllo, che viene fissato nello spazio e nel tempo. Invece che seguire le singole particelle nello spazio. Viene definito uno spazio di variabili che sono funzioni dello spazio e del tempo come:

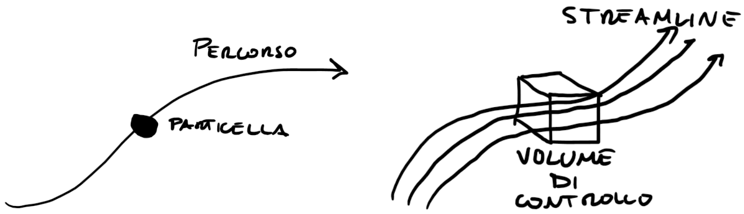
CAMPO DI VELOCITÀ $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$

CAMPO DI PRESSIONE $p = p(x, y, z, t)$

CAMPO DI DENSITÀ $\rho = \rho(x, y, z, t)$

CAMPO DI TEMPERATURA $T = T(x, y, z, t)$

...



(a) *Modello lagrangiano* (b) *Modello Euleriano*

Figura 1.1: Esempi dei modelli di Lagrange ed Eulero

Resta necessario imporre una serie di condizioni di contorno affinché il sistema possa essere ben definito.

Alla figura 1.1 vengono rappresentati i due modelli.

1.1 PARTICELLE DI UN FLUIDO

Il comportamento di un fluido è definito in termini macroscopici da[1] :

- Velocità **u**
- Pressione p
- Densità ρ
- Temperatura T
- Energia (cinetica) E, Entalpia H

Le proprietà risultano medie nel caso si considerino un numero sufficiente di particelle. Un elemento fluido può essere pensato come il più piccolo volume per il quale la condizione di continuità è comunque valida.

1.1.1 *Derivate totali*

Considerando un fluido arbitrario, per una particella in moto nel fluido, questa sperimenta:

1. un cambiamento del fluido in funzione del tempo;
2. cambiamenti in base al fatto che più particelle si muovono in diverse direzioni nel fluido con diverse condizioni.

La somma di queste due, per una caratteristica per unità di massa è chiamata come la derivata totale:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + V_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + V_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi \tag{1.1}$$

1 Vengono ignorate le notazioni (x, y, z, t) per comodità, si ricorda che sono tutte funzioni di questi parametri.

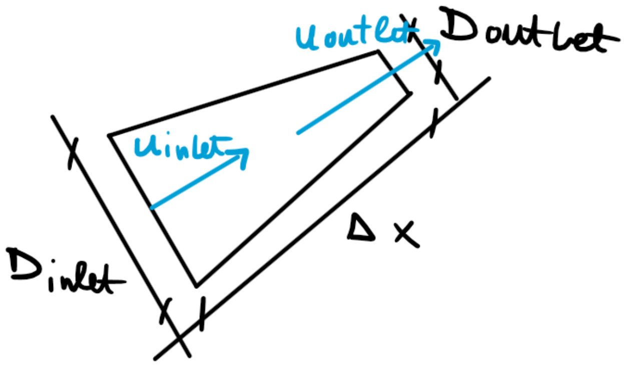


Figura 1.2: Esempio dell'ugello della canna dell'acqua

L'operatore **derivata totale**, D/Dt, fornisce la trasformazione tra il modello lagrangiano e quello euleriano.

Considerando l'accelerazione del fluido, può essere definita come:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \tag{1.2}$$

dove:

$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivata locale
$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$	Derivata di convezione

La derivata locale è diversa da zero solamente nel caso di flussi stazionari. Mentre, la derivate di convezione è principalmente dovuta al fatto che le particelle sono in movimento.

Dunque, se la velocità del fluido è costante allora: l'accelerazione locale è nulla, allo stesso modo, l'accelerazione di convezione è sempre diversa da zero perché la particella si muove in altre posizioni caratterizzata dalla diversa velocità nel fluido.

Prendiamo come esempio il caso del flusso d'acqua dall'ugello, rappresentato in figura 1.2. Consideriamo per esempio l'approccio Euleriano sotto le seguenti ipotesi: il flusso è stazionario nel caso in cui tutte le proprietà del flusso non cambiano in funzione del tempo.

Vale che la velocità all'uscita dell'ugello è più grande rispetto a quella di ingresso. Perciò, il fluido deve accelerare all'interno del volume, anche se si è sotto l'ipotesi di stazionarietà. Qui entra in gioco la derivata di convezione, questo parametro sarà sicuramente non nullo da cui i fenomeni di accelerazione.

Si evince che: secondo il modello euleriano, il sistema risulta stazionario. se invece si trasporta il tutto nel modello lagrangiano, ne risulta un'accelerazione delle particelle che entrano ad una data velocità ma escono ad una superiore.

1.2 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{1.3}$$

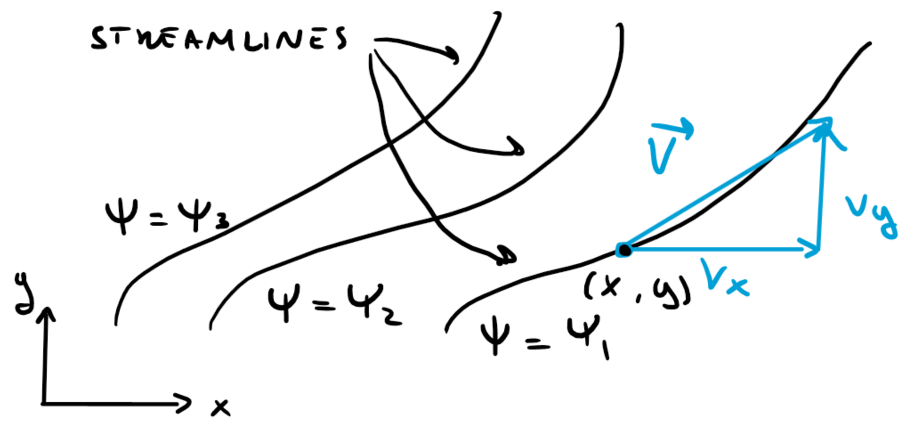


Figura 1.3: Rappresentazione delle *streamlines*

Il flusso in entrata e in uscita da un determinato volume varia al variare della massa compresa all'interno dello stesso volume di controllo.

1.2.1 *Funzione di flusso*

Le linee di corrente o ***Streamlines*** soddisfano l'equazione di continuità e rappresentano su un piano cartesiano la funzione di flusso.

prendiamo il caso di un fluido bidimensionale incomprimibile sul piano x-y[2]. L'equazione di continuità viene ridotta a $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$. La trasformazione di una variabile ci permette di riscrivere l'equazione in termini dipendenti da una sola variabile: la **funzione di flusso** Ψ:

Il significato fisico della funzione Ψ è che le curve della costante rappresentano le streamlines *del flusso.*

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1.4}$$

Sostituendo nell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.5}$$

Un'ulteriore considerazione deriva dal fatto che seguendo le ipotesi di:

- si assume che un fluido possa essere rapresentato tramite *streamlines*;
- valga comunque la similitudine dei triangoli;

Allora si dimostra che:
La streamline è *una curva che è sempre istantaneamente tangente al vettore velocità locale*.

A partire dalla similitudine dei triangoli vale che (Vedi figura 1.3):

$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \tag{1.6}$$

2 $V_z = 0$ sia V_x che V_y non dipendono dalle componenti in z

Dalla (1.6) vale: $V_x dy = V_y dx$. Sostituendo con la definizione della (1.4), può essere scritta la:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = 0 \tag{1.7}$$

Allora la variazione totale di Ψ (in uno spazio infinitesimale $x + dx, y + dy$) vale[3]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi \tag{1.8}$$

Da cui deve essere che

$$d\Psi = 0 \tag{1.9}$$

Questo significa che $\Psi = cost.$ lungo le *streamlines*.

Il significato fisico di questa affermazione è che: la differenza del valore di Ψ tra due streamlines è uguale al flusso di volume per la distanza tra le due linee.

Siccome, per definizione, alcun flusso può attraversare una *streamline*, il fluido reste confinato tra le due stesse. Ne segue che, per un flusso stazionario e incomprimibile bidimensionale, il flusso di volume $\dot{V}$ per unità di tempo tra due *streamlines* deve essere costante (per garantire la validità dell'equazione di continuità). Se due *streamlines* si separano, la velocità media del flusso calerà uniformemente.

Analogamente a quanto visto fin ora, ovvero una descrizione delle *streamlines* in coordinate cartesiane; la trattazione è del tutto equivalente per un sistema di riferimento in coordinate cilindriche. A partire dalle stesse ipotesi, l'equazione di continuità può essere descritta come:

$$\frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{1.10}$$

Ora, la funzione di continuità viene comunque soddisfatta da una qualsiasi legge continua $\Psi = \Psi(r, \theta)$ dato che l'ordine di differenziazione è irrilevante. Allora, per un fluido incomprimibile assisimmetrico (c'è simmetria nella rotazione dell'asse z) in assenza di vortici[4], la funzione di continuità può essere descritta come

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{1.11}$$

CONSIDERAZIONI Al di là della definizione di *streamline* in qualsiasi sistema di riferimento, grazie all'osservazione di queste si può tracciare le linee di corrente soddisfacenti la conservazione della massa, permettendo di descrivere l'andamento del flusso all'interno del volume. Vale anche:

STREAMLINES DIVERGENTI $\Rightarrow$ velocità di flusso minore $\Rightarrow$ decelerazione delle particelle o flusso.

STREAMLINES CONVERGENTI $\Rightarrow$ Velocità di flusso maggiore $\Rightarrow$ accelerazione delle particelle o flusso.

---

3 Si ricorda che la somma delle derivate parziali fatte rispetto alle variabili indipendenti è la derivata totale.

4 $V_\theta = 0$ né V_r né V_z dipendono da θ

1.3 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO

Per la trattazione della conservazione del momento da parte delle particelle di un fluido è necessario introdurre l'**equazione di Cauchy**.

1.3.1 *Equazione di Cauchy*

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{1.12}$$

Dove viene definito σ come **Cauchy stress tensor**:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \tag{1.13}$$

Che scritto in forma matriciale diventa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}_{=\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}_{\text{parte isotropa di } \sigma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{parte anisotropa di} \sigma} \tag{1.14}$$

Per un fluido a riposo, l'unico sforzo in un elemento del fluido è la pressione idrostatica locale, la quale agisce uniformemente normale a qualsiasi superficie del fluido (componente isotropa di σ). Mentre, per un fluido in movimento, agisce comunque la componente isotropa. In più si aggiunge l'effetto dello sforzo viscoso $\boldsymbol{\tau}$ (componente anisotropa di σ). Tra l'altro, resta valido il fatto che lo sforzo viscoso è un effetto interno del fluido e non sulla superficie di controllo come accade per la componente isotropa.

Ora è necessario andare a descrivere che comportamento i fluidi abbiano in termini di componente anisotropa. Si rende necessario dividere i fluidi in base alla legge caratteristica di questo comportamento ovvero:

- fluidi newtoniani
- fluidi non newtoniani

1.3.1.1 *Fluidi newtoniani*

I fluidi newtoniani sono tutti quei fluidi in cui lo sforzo viscoso è linearmente proporzionale alla deformazione del fluido. In parole povere:

$$\boldsymbol{\tau} \propto \boldsymbol{\epsilon} \tag{1.15}$$

Possiamo definire che la proporzionalità, assumendo che valga l'ipotesi di Stokes[5]:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{V} \tag{1.16}$$

5 Ovvero che il comportamento del fluido sia comparabile lungo i tre assi principali

Nell'equazione (1.16) viene aggiunto il parametro μ il quale indica la viscosità dinamica. Spesso si può trovare anche sotto forma di ν definito come $\nu = \mu/\rho$. Si può legare la viscosità dinamica, in entrambe le sue forme, come: $\mu = f(T, p)$ ovvero che la viscosità dinamica dipende sia dalla temperatura che dalla pressione. In particolare, si può dimostrare come dipenda fortemente dalle variazioni di temperatura e debolmente da quelle di pressione. Resta importante capire che la viscosità dinamica è un fenomeno interno al fluido, qualunque esso sia, infatti si tratta della frizione tra i vari substrati del fluido.

1.3.1.2 *Fluidi non newtoniani*

Per questi fluidi non si può considerare la viscosità come costante, ma potrebbe variare in funzione dello sforzo. Riprendendo i termini dell'equazione di Cauchy (1.13):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu\dot{\gamma} \tag{1.17}$$

1.3.2 *Equazione di Navier-Sockes*

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) \tag{1.18}$$

La quale può essere semplificata nel caso sussistano determinate condizioni:

FLUIDO INCOMPRIMIBILE $(\nabla\cdot\mathbf{V}) = 0$ allora l'equazione diventa:

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{1.19}$$

FLUIDO NON VISCIDO si semplifica fino a:

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p \tag{1.20}$$

Si definisce un fluido non viscido nel momento in cui le forze viscose sono trascurabili rispetto alle forze d'inerzia, gravitazionali e di pressione. Ad esempio lo sono le zone del fluido ad alto numero di *Reynolds*.

I termini viscosi non sono trascurabili rispetto a quelli di inerzia nello strato limite in prossimità di un corpo immerso nel fluido. Ciò è dovuto ai forti gradienti di velocità presenti nello strato.

FLUIDO INCOMPRIMIBILE

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{1.21}$$

Si nota che il termine di pressione appare solo in forma di gradiente:

> *Il campo di velocità in un fluido incomprimibile non è affetto dalla pressione assoluta, bensì solo dalle differenze di pressione.*

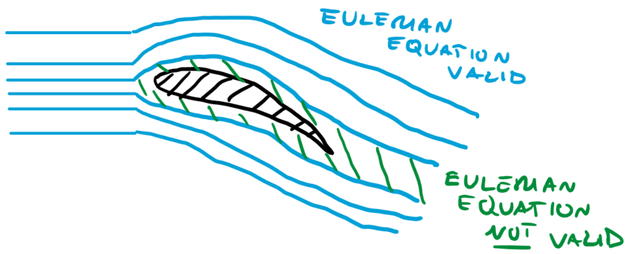


Figura 1.4: Osservazione dove l'equazione di Eulero è valida e non.

Eventuali modifiche alla pressione assoluta devono essere poste come condizioni al contorno del sistema.

Si può calcolare il campo di pressione con una costante arbitraria, ma per ottenere quella costante bisogna sapere il valore della pressione in qualche punto del fluido. In altre parole, bisogna conoscere la pressione assoluta o totale come condizione al contorno.

Tutto ciò resta valido fin tanto che il fluido è incomprimibile, per fluidi comprimibili la pressione p non è la pressione meccanica (forza/area) ma la pressione termodinamica P. In questo caso la pressione è funzione della temperatura e densità nell'equazione di stato del fluido.

FLUSSO EULERIANO

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{1.22}$$

In questo caso esistono delle regioni non viscide del fluido che possono essere trascurate per la maggior parte del fluido. Non devono essere ignorate sempre. Dato ciò si può assumere:

$$\underbrace{\tau}_{\text{sforzo viscoso}} \approx \underbrace{\mu}_{\text{viscosità}} \times \underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial x_i}}_{\text{gradiente di velocità}} \tag{1.23}$$

I termini viscosi non sono trascurabili in presenza di forti variazioni del gradiente di velocità (strato limite, scia del corpo, ...).

La figura 1.4 mostra un caso dove può essere applicata l'equazione di Eulero e dove no.

1.3.3 *Equazione di Bernoulli*

La somma della pressione, dell'energia cinetica e potenziale delle particelle di un fluido è costante lungo la *streamline* nel caso di un flusso stazionario quando i termini di comprimibilità e viscosità sono trascurabili:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{cost.} \tag{1.24}$$

Da notare che la costante di Bernoulli può cambiare tra diverse *streamlines* ma è costante nella singola. Nel flusso stazionario incomprimibile con effetti viscosi trascurabili, le varie forme di energia vengono trasformate ma la loro somma resta costante. Non c'è dissipazione di energia meccanica lungo il flusso. L'equazione di Bernoulli è una relazione approssimativa tra pressione, velocità ed elevazione; resta valida solamente nelle regioni non viscide del fluido.

PRESSIONE MODIFICATA Gli effetti della gravità sono rilevanti solamente su flussi a superficie libera: ad esempio onde, moto di una nave. e per flussi guidati dalle condizioni a contorno come il moto per convezione naturale.

Per flussi incomprimibili, senza superfici libere, la gravità non modifica la dinamica del flusso. Il suo effetto sarà di imporre una pressione idrostatica distribuita nella direzione verticale rispetto al campo di pressione del fluido. Si può definire una pressione modificata p' che assorbe l'effetto della pressione idrostatica apportata dalla gravità. In questo caso, con l'asse z diretto in opposizione rispetto a $\mathbf{g}$ e, definito un riferimento nullo sull'asse z allora:

$$p' = p + \rho g z \Rightarrow \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla p' + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{1.25}$$

Il vantaggio di calcolare secondo l'equazione di Navier-Stockes è che non include il termine gravitazionale. Dopo la risoluzione con quella equazione, in termini di p' è semplice tornare alla pressione senza contributo idrostatico $p = p' - \rho g z$

La pressione modificata è spesso usata nelle analisi *Computational Fluid Dynamics* (CFD) per separare gli effetti gravitazionali da quelli del fluido. La pressione modificata non deve essere usata in flussi con superfici libere.

1.4 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Per analizzare iun fluido in termini energetici conviene visualizzare l'equazione dell'entalpia totale.

1.4.1 *Equazione dell'entalpia totale*

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (k \nabla T) + q_g + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) \tag{1.26}$$

Dove:

q_g	rappresenta il calore generato internamente dal sistema
$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V})$	rappresenta il lavoro fatto dallo sforzo viscoso

Da cui ne derivano:

EQUAZIONE DELL'ENTALPIA da non confondere con quella totale

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla\cdot(k\nabla T) + q_g + \underbrace{\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\mathbf{V}}_{=\Phi} \tag{1.27}$$

EQUAZIONE ENTROPIA

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \nabla\cdot(k\nabla T) + q_g + \underbrace{\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\mathbf{V}}_{=\Phi} \tag{1.28}$$

La dissipazione dovuta agli attriti viscosi Ψ rappresenta l'ammontare del lavoro fatto dagli sforzi viscosi. Il quale viene convertito in calore il quale processo è irreversibile. Da cui una fonte di calore irreversibile. L'effetto della dissipazione viscosa nello scambio termico è particolarmente significativa per fluidi ad alta velocità e altamente viscosi.

Dalla (1.26) i parametri sono indicati come:

$\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{V}$	Lavoro fatto dalle forse del corpo
$\frac{\partial p}{\partial t}$	Influenza della pressione nell'entalpia totale
$\nabla\cdot(k\nabla T)$	Quantità di energia trasferita per conduzione dal corpo al volume di controllo
q_g	Calore generato da una fonte interna
$\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V})$	Lavoro degli effetti viscosi

Da cui si può ricavare l'equazione dell'entalpia statica.

1.4.2 *Equazione dell'entalpia statica*

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla\cdot(k\nabla T) + q_g + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\mathbf{V} \tag{1.29}$$

L'equazione data come entalpia totale descrive i cambiamenti, in termini termici e meccanici, dell'energia. Il termine dinamico dell'entalpia totale (1.26) può essere sottratto e l'equazione (1.29) è descritta per ottenere un'equazione per valutare il cambiamento dei parametri termodinamici dell'energia termica e entalpia. Sotto alcune ipotesi, può essere utilizzata per descrivere un fluido poco comprimibile, quando la comprimibilità del flusso è comunque bassa.

1.5 EQUAZIONI DI STATO

Il moto del fluido è descritto da cinque equazioni differenziali parziali per la descrizione della: massa, momento ed energia. I parametri termodinamici da ricercare in queste equazioni sono: ρ, p, h e T. Assumeremo l'equilibrio termodinamico: ovvero che il tempo necessario alle particelle per adeguarsi a nuove condizioni di contorno sia corto rispetto alle caratteristiche temporali del fluido. Dobbiamo aggiungere due equazioni di stato usando due variabili: $p = p(\rho, T)$, $h = h(p, T)$.

1.5.1 *Equazione di stato per un fluido incomprimibile*

$$\rho = \text{cost.} \tag{1.30}$$

Valida per liquidi e buona approssimazione per gas a bassa velocità.

Si può assumere che il flusso sia incomprimibile a patto che la massima compressione sia al di sotto del 5%. Ciò implica che la velocità del gas sia inferiore al numero di Mach $Ma \lesssim 0.3$ Non c'è collegamento tra l'equazione dell'energia e le equazioni di massa e momento. Si risolve l'equazione di energia solo in caso di trasferimento di calore. Il campo di velocità non è affetto dal valore assoluto della pressione ma solo dal gradiente. Per i flussi comprimibili, la pressione è legata con la densità e temperatura attraverso un'equazione di stato e allora il valore della pressione assoluta. Un flusso comprimibile richiede una soluzione non solo di massa e momento, anche di energia e un'equazione di stato.

1.5.2 *Equazione di stato del gas ideale*

$$p = \rho R T \tag{1.31}$$

Il fattore di comprimibilità $Z = \frac{p}{\rho RT}$ la cui variazione da una buona misura dell'applicabilità dell'equazione (1.31).

1.5.3 *Equazioni del gas reale*

Per descrivere l'andamento di un gas reale esistono diversi modelli, descritti nel tempo. Hanno una forma simile a quella del gas ideale (1.31) ma con degli aggiustamenti ai coefficienti per poter modellizzare correttamente il funzionamento di uno specifico gas. In letteratura si trovano articoli che descrivono quale modello rappresenta meglio un dato gas.

1.6 EQUAZIONI COSTITUTIVE

Alcuni parametri sono determinati da equazioni costitutive, in funzione di diversi parametri termodinamici. Ad esempio la viscosità, dipende fortemente dalla temperatura. Per diversi casi vengono definite le loro equazioni costitutive in modo che si possa determinare il valore del parametro per ogni caso.

1.7 CONDIZIONI AL CONTORNO

In qualsiasi punto su un limite formato da una superficie solida impermeabile, la continuità richiede che la componente normale della velocità alla superficie sia la stessa per il fluido che per la superficie. Se un limite solido è stazionario, quindi la posizione della superficie non cambia nel tempo e, definito $\mathbf{n}$ come normale alla superficie, allora:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1.32}$$

sulla superficie. Per una fluido reale e viscoso, c'è una condizione addizionale sulla velocità tangenziale alla superficie. La condizione alla superficie per un fluido viscoso è che non può esserci velocità tangenziale relativa tra la superficie e il fluido.

2

FLUSSI ROTAZIONALI E IRROTAZIONALI

Parte II

APPENDIX

A

APPENDIX TEST

Lorem ipsum at nusquam appellantur his, ut eos erant homero concludaturque. Albucius appellantur deterruisset id eam, vivendum partiendo dissentiet ei ius. Vis melius facilisis ea, sea id convenire referrentur, takimata adolescens ex duo. Ei harum argumentum per. Eam vidit exerci appetere ad, ut vel zzril intellegam interpretaris.

More dummy text.

A.1 APPENDIX SECTION TEST

Test: Tabella A.1 (This reference should have a lowercase, small caps A if the option `floatperchapter` is activated, just as in the table itself → however, this does not work at the moment.)

LABITUR BONORUM PRI NO	QUE VISTA	HUMAN
fastidii ea ius	germano	demonstratea
suscipit instructior	titulo	personas
quaestio philosophia	facto	demonstrated

Tabella A.1: Autem usu id.

A.2 ANOTHER APPENDIX SECTION TEST

Equidem detraxit cu nam, vix eu delenit periculis. Eos ut vero constituto, no vidit propriae complectitur sea. Diceret nonummy in has, no qui eligendi recteque consetetur. Mel eu dictas suscipiantur, et sed placerat oporteat. At ipsum electram mei, ad aeque atomorum mea. There is also a useless Pascal listing below: Listing A.1.

Listing A.1: A floating example (`listings` manual)

```
for i:=maxint downto 0 do
begin
{ do nothing }
end;
```

DECLARATION

Put your declaration here.

Ferrara, 2022 - 2023

Lorenzo Nicolè

COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both LaTeX and LyX:

https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

http://postcards.miede.de/

Final Version as of 13 agosto 2023 (`classicthesis` version 1.0).