

LORENZO NICOLÈ

FLUIDODINAMICA NUMERICA APPLICATA ALLE  
MACCHINE





**DE** Department of  
Engineering  
Ferrara

# FLUIDODINAMICA NUMERICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Appunti

LORENZO NICOLÈ

DE - Dipartimento di Ingegneria  
Ingegneria Meccanica [LM-33]  
Università degli Studi di Ferrara

2022 - 2023 – version 1.0

Lorenzo Nicolè: *Fluidodinamica numerica applicata alle macchine*, Appunti, © 2022 - 2023

PROFESSORS:  
Alessio Suman

LOCATION:  
Ferrara

TIME FRAME:  
2022 - 2023

---

## INDICE

---

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>I</b>  | <b>INTRODUZIONE</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1</b>  | <b>EQUAZIONI CONSERVATIVE DEL MOTO</b>                           | <b>3</b>  |
| 1.1       | Particelle di un fluido . . . . .                                | 4         |
| 1.1.1     | Derivate totali . . . . .  | 4         |
| 1.2       | Conservazione della massa . . . . .                              | 5         |
| 1.2.1     | Funzione di flusso . . . . .                                     | 6         |
| 1.3       | Conservazione del momento . . . . .                              | 8         |
| 1.3.1     | Equazione di Cauchy . . . . .                                    | 8         |
| 1.3.2     | Equazione di Navier-Sockes . . . . .                             | 9         |
| 1.3.3     | Equazione di Bernoulli . . . . .                                 | 10        |
| 1.4       | Conservazione dell'energia . . . . .                             | 11        |
| 1.4.1     | Equazione dell'entalpia totale . . . . .                         | 11        |
| 1.4.2     | Equazione dell'entalpia statica . . . . .                        | 12        |
| 1.5       | Equazioni di stato . . . . .                                     | 12        |
| 1.5.1     | Equazione di stato per un fluido incompressibile . . . . .       | 13        |
| 1.5.2     | Equazione di stato del gas ideale . . . . .                      | 13        |
| 1.5.3     | Equazioni del gas reale . . . . .                                | 13        |
| 1.6       | Equazioni costitutive . . . . .                                  | 13        |
| 1.7       | Condizioni al contorno . . . . .                                 | 13        |
| <b>2</b>  | <b>FLUSSI ROTAZIONALI E IRROTAZIONALI</b>                        | <b>15</b> |
| 2.1       | Tipologie, movimenti e deformazioni di elementi fluidi . . . . . | 15        |
| 2.2       | Vorticità e rotazionalità . . . . .                              | 16        |
| 2.3       | Approssimazione a fluido irrotazionale . . . . .                 | 17        |
| 2.3.1     | Equazione di Laplace . . . . .                                   | 17        |
| 2.3.2     | Equazione di Eulero . . . . .                                    | 18        |
| 2.4       | Flusso rotazionale planare . . . . .                             | 18        |
| 2.5       | Flussi vorticosi . . . . .                                       | 19        |
| 2.5.1     | Influenza di elementi successivi . . . . .                       | 20        |
| <b>3</b>  | <b>STRATO LIMITE E FLUSSO SU CORPI</b>                           | <b>23</b> |
| 3.1       | Spessore dello strato limite . . . . .                           | 23        |
| 3.2       | Equazioni dello strato limite . . . . .                          | 24        |
| 3.2.1     | Limiti dell'equazione dello strato limite . . . . .              | 25        |
| 3.2.2     | Spessore dello strato limite . . . . .                           | 26        |
| 3.2.3     | Strato limite laminare su lastra piana . . . . .                 | 27        |
| 3.2.4     | Strato limite turbolento su lastra piana . . . . .               | 27        |
| 3.2.5     | Strato limite e gradienti di pressione . . . . .                 | 30        |
| 3.3       | Separazione del flusso . . . . .                                 | 30        |
| <b>II</b> | <b>AERODINAMICA</b>  | <b>31</b> |
| <b>4</b>  | <b>FLUSSO SU CORPI</b>   | <b>33</b> |
| 4.1       | Coefficienti di drag e lift . . . . .                            | 34        |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.1.1 | Composizione drag . . . . .                    | 34 |
| 4.2   | Flusso parallelo ad una lastra piana . . . . . | 35 |
| 4.3   | Flusso su una sfera o un cilindro . . . . .    | 35 |
| 5     | AERODINAMICA DI UN PROFILO ALARE               | 37 |
| III   | APPENDIX                                       | 39 |
| A     | APPENDIX TEST                                  | 41 |
| A.1   | Appendix Section Test . . . . .                | 41 |
| A.2   | Another Appendix Section Test . . . . .        | 41 |
|       | BIBLIOGRAFIA                                   | 43 |

---

## ELENCO DELLE FIGURE

---

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Figura 1.1 | Esempi dei modelli di Lagrange ed Eulero . . . . .  | 4  |
| Figura 1.2 | Esempio dell'ugello della canna dell'acqua . . . . .  | 5  |
| Figura 1.3 | Rappresentazione delle <i>streamlines</i> . . . . .   | 6  |
| Figura 1.4 | Osservazione dove l'equazione di Eulero è valida e non. . . . .                                     | 10 |
| Figura 2.1 | Procedimento per la risoluzione di un flusso irrotazionale . . . . .                                | 19 |
| Figura 2.2 | Effetti di variazioni successive della geometria per un flusso vorticoso in un bruciatore . . . . . | 21 |
| Figura 2.3 | Esempio di misure dei vortici per un bruciatore . . . . .   | 21 |
| Figura 3.1 | Sviluppo dello strato limite in funzione della distanza e del numero di Reynolds . . . . .          | 24 |
| Figura 3.2 | Riferimento per descrivere le equazioni dello strato limite . . . . .                               | 25 |
| Figura 3.3 | Strato limite turbolento su lastra piana . . . . .  | 29 |
| Figura 3.4 | Esempi di gradienti di pressione favorevoli e sfavorevoli . . . . .                                 | 30 |
| Figura 3.5 | Separazione del flusso dal corpo . . . . .  | 30 |
| Figura 4.1 | Scomposizione delle forze su un profilo alare in <i>drag</i> e <i>lift</i> . . . . .                | 33 |
| Figura 4.2 | Processo di affusolamento di un corpo immerso in un fluido . . . . .                                | 35 |

---

## ELENCO DELLE TABELLE

---

|             |                        |    |
|-------------|------------------------|----|
| Tabella A.1 | Autem usu id . . . . . | 41 |
|-------------|------------------------|----|

---

## LISTINGS

---

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Listing A.1 | A floating example ( <code>listings</code> manual) . . . . . | 42 |
|-------------|--|----|

---

## ELENCO DELLE COSE DA FARE

---

---

## ACRONYMS

---

CFD *Computational Fluid Dynamics*



## Parte I

### INTRODUZIONE

Introduzione alla simulazione fluidodinamica



---

## EQUAZIONI CONSERVATIVE DEL MOTO

---

Esistono due approcci alla descrizione del moto di un fluido all'interno di un determinato volume:

- Approccio Lagrangiano
- Approccio Euleriano

**APPROCCIO LAGRANGIANO** La descrizione lagrangiana di un flusso di un fluido traccia la posizione delle singole particelle dello stesso. Il flusso può essere pensato come la composizione di un numero finito di particelle di fluido che hanno: massa, momento, energia inerziale e altre proprietà. Dunque si può descrivere lo stato delle singole particelle a partire da equazioni per ognuna. Ciò rende difficile sfruttare questo metodo per un'analisi pratica:

1. I fluidi sono composti da miliardi di molecole (particelle);
2. le interazioni tra le molecole sono difficili da descrivere analiticamente.

Questo approccio viene comunque usato in alcuni campi come: dinamica di spray, bolle e particelle; per l'accoppiamento dei metodi euleriani-lagrangiani.

**APPROCCIO EULERIANO** la descrizione euleriana di un fluido, viene definito un volume di controllo in cui il fluido scorre all'interno. Si considera come le proprietà del fluido cambiano nel volume di controllo, che viene fissato nello spazio e nel tempo. Invece che seguire le singole particelle nello spazio. Viene definito uno spazio di variabili che sono funzioni dello spazio e del tempo come:

CAMPO DI VELOCITÀ  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$

CAMPO DI PRESSIONE  $p = p(x, y, z, t)$

CAMPO DI DENSITÀ  $\rho = \rho(x, y, z, t)$

CAMPO DI TEMPERATURA  $T = T(x, y, z, t)$

...

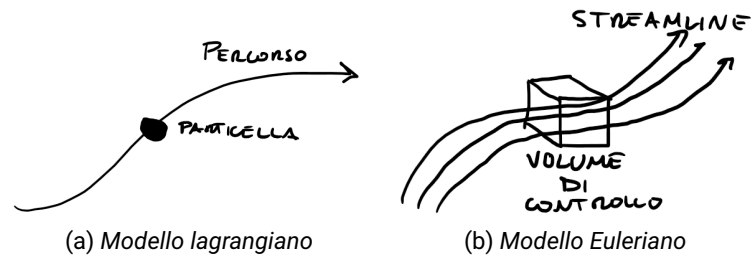


Figura 1.1: Esempi dei modelli di Lagrange ed Eulero

Resta necessario imporre una serie di condizioni di contorno affinché il sistema possa essere ben definito.

Alla figura 1.1 vengono rappresentati i due modelli.

### 1.1 PARTICELLE DI UN FLUIDO

Il comportamento di un fluido è definito in termini macroscopici da<sup>1</sup>:

- Velocità  $\mathbf{u}$
- Pressione  $p$
- Densità  $\rho$
- Temperatura  $T$
- Energia (cinetica)  $E$ , Entalpia  $H$

Le proprietà risultano medie nel caso si considerino un numero sufficiente di particelle. Un elemento fluido può essere pensato come il più piccolo volume per il quale la condizione di continuità è comunque valida.

#### 1.1.1 Derivate totali

Considerando un fluido arbitrario, per una particella in moto nel fluido, questa sperimenta:

1. un cambiamento del fluido in funzione del tempo;
2. cambiamenti in base al fatto che più particelle si muovono in diverse direzioni nel fluido con diverse condizioni.

La somma di queste due, per una caratteristica per unità di massa è chiamata come la derivata totale:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + V_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + V_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + V_z \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> Vengono ignorate le notazioni  $(x, y, z, t)$  per comodità, si ricorda che sono tutte funzioni di questi parametri.

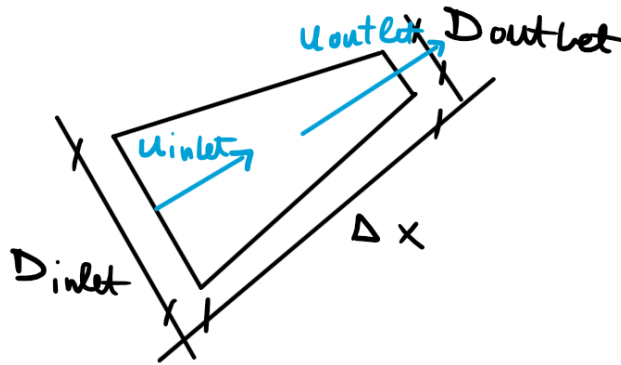


Figura 1.2: Esempio dell'ugello della canna dell'acqua

L'operatore **derivata totale**,  $D/Dt$ , fornisce la trasformazione tra il modello lagrangiano e quello euleriano.

Considerando l'accelerazione del fluido, può essere definita come:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1.2)$$

dove:

$\frac{\partial}{\partial t}$  Derivata locale

$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  Derivata di convezione

La derivata locale è diversa da zero solamente nel caso di flussi stazionari. Mentre, la derivata di convezione è principalmente dovuta al fatto che le particelle sono in movimento.

Dunque, se la velocità del fluido è costante allora: l'accelerazione locale è nulla, allo stesso modo, l'accelerazione di convezione è sempre diversa da zero perché la particella si muove in altre posizioni caratterizzata dalla diversa velocità nel fluido.

Prendiamo come esempio il caso del flusso d'acqua dall'ugello, rappresentato in figura 1.2. Consideriamo per esempio l'approccio Euleriano sotto le seguenti ipotesi: il flusso è stazionario nel caso in cui tutte le proprietà del flusso non cambiano in funzione del tempo.

Vale che la velocità all'uscita dell'ugello è più grande rispetto a quella di ingresso. Perciò, il fluido deve accelerare all'interno del volume, anche se si è sotto l'ipotesi di stazionarietà. Qui entra in gioco la derivata di convezione, questo parametro sarà sicuramente non nullo da cui i fenomeni di accelerazione.

Si evince che: secondo il modello euleriano, il sistema risulta stazionario. se invece si trasporta il tutto nel modello lagrangiano, ne risulta un'accelerazione delle particelle che entrano ad una data velocità ma escono ad una superiore.

## 1.2 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.3)$$

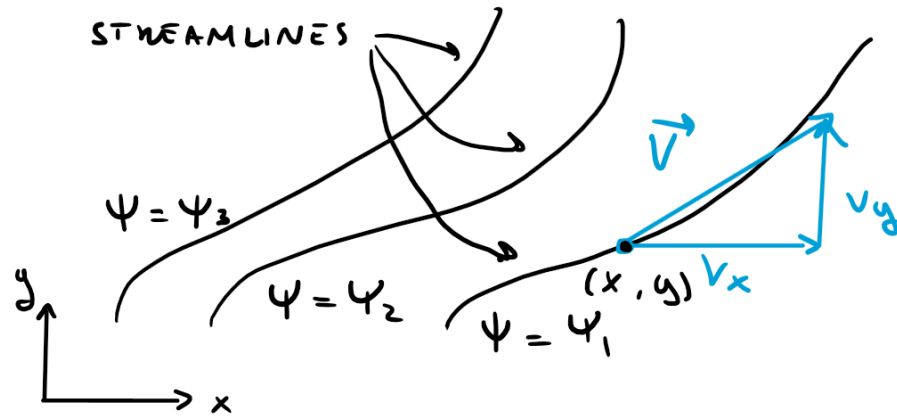


Figura 1.3: Rappresentazione delle streamlines

*Il flusso in entrata e in uscita da un determinato volume varia al variare della massa compresa all'interno dello stesso volume di controllo.*

### 1.2.1 Funzione di flusso

Le linee di corrente o **Streamlines** soddisfano l'equazione di continuità e rappresentano su un piano cartesiano la funzione di flusso.

Prendiamo il caso di un fluido bidimensionale incompressibile sul piano  $x$ - $y$ <sup>2</sup>. L'equazione di continuità viene ridotta a  $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$ . La trasformazione di una variabile ci permette di riscrivere l'equazione in termini dipendenti da una sola variabile: la **funzione di flusso**  $\Psi$ :

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.4)$$

Sostituendo nell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Un'ulteriore considerazione deriva dal fatto che seguendo le ipotesi di:

- si assume che un fluido possa essere rappresentato tramite *streamlines*;
- valga comunque la similitudine dei triangoli;

Allora si dimostra che:

*La streamline è una curva che è sempre istantaneamente tangente al vettore velocità locale.*

A partire dalla similitudine dei triangoli vale che (Vedi figura 1.3):

$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \quad (1.6)$$

<sup>2</sup>  $V_z = 0$  sia  $V_x$  che  $V_y$  non dipendono dalle componenti in  $z$

*Il significato fisico della funzione  $\Psi$  è che le curve della costante rappresentano le streamlines del flusso.*

Dalla (1.6) vale:  $V_x dy = V_y dx$ . Sostituendo con la definizione della (1.4), può essere scritta la:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = 0 \quad (1.7)$$

Allora la variazione totale di  $\Psi$  (in uno spazio infinitesimale  $x + dx, y + dy$ ) vale<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi \quad (1.8)$$

Da cui deve essere che

$$d\Psi = 0 \quad (1.9)$$

Questo significa che  $\Psi = \text{cost.}$  lungo le *streamlines*.

Siccome, per definizione, alcun flusso può attraversare una *streamline*, il fluido reste confinato tra le due stesse. Ne segue che, per un flusso stazionario e incompressibile bidimensionale, il flusso di volume  $\dot{V}$  per unità di tempo tra due *streamlines* deve essere costante (per garantire la validità dell'equazione di continuità). Se due *streamlines* si separano, la velocità media del flusso calerà uniformemente.

Analogamente a quanto visto fin ora, ovvero una descrizione delle *streamlines* in coordinate cartesiane; la trattazione è del tutto equivalente per un sistema di riferimento in coordinate cilindriche. A partire dalle stesse ipotesi, l'equazione di continuità può essere descritta come:

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1.10)$$

Ora, la funzione di continuità viene comunque soddisfatta da una qualsiasi legge continua  $\Psi = \Psi(r, \theta)$  dato che l'ordine di differenziazione è irrilevante. Allora, per un fluido incompressibile assisimmetrico (c'è simmetria nella rotazione dell'asse  $z$ ) in assenza di vortici<sup>4</sup>, la funzione di continuità può essere descritta come

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

**CONSIDERAZIONI** Al di là della definizione di *streamline* in qualsiasi sistema di riferimento, grazie all'osservazione di queste si può tracciare le linee di corrente soddisfacenti la conservazione della massa, permettendo di descrivere l'andamento del flusso all'interno del volume. Vale anche:

**STREAMLINES DIVERGENTI**  $\Rightarrow$  velocità di flusso minore  $\Rightarrow$  decelerazione delle particelle o flusso.

**STREAMLINES CONVERGENTI**  $\Rightarrow$  Velocità di flusso maggiore  $\Rightarrow$  accelerazione delle particelle o flusso.

<sup>3</sup> Si ricorda che la somma delle derivate parziali fatte rispetto alle variabili indipendenti è la derivata totale.

<sup>4</sup>  $V_\theta = 0$  né  $V_r$  né  $V_z$  dipendono da  $\theta$

*Il significato fisico di questa affermazione è che: la differenza del valore di  $\Psi$  tra due streamlines è uguale al flusso di volume per la distanza tra le due linee.*

## 1.3 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO

Per la trattazione della conservazione del momento da parte delle particelle di un fluido è necessario introdurre l'**equazione di Cauchy**.

## 1.3.1 Equazione di Cauchy

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.12)$$

Dove viene definito  $\boldsymbol{\sigma}$  come **Cauchy stress tensor**:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.13)$$

Che scritto in forma matriciale diventa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}_{\text{parte isotropa di } \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{parte anisotropa di } \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.14)$$

Per un fluido a riposo, l'unico sforzo in un elemento del fluido è la pressione idrostatica locale, la quale agisce uniformemente normale a qualsiasi superficie del fluido (componente isotropa di  $\boldsymbol{\sigma}$ ). Mentre, per un fluido in movimento, agisce comunque la componente isotropa. In più si aggiunge l'effetto dello sforzo viscoso  $\boldsymbol{\tau}$  (componente anisotropa di  $\boldsymbol{\sigma}$ ). Tra l'altro, resta valido il fatto che lo sforzo viscoso è un effetto interno del fluido e non sulla superficie di controllo come accade per la componente isotropa.

Ora è necessario andare a descrivere che comportamento i fluidi abbiano in termini di componente anisotropa. Si rende necessario dividere i fluidi in base alla legge caratteristica di questo comportamento ovvero:

- fluidi newtoniani
- fluidi non newtoniani

## 1.3.1.1 Fluidi newtoniani

I fluidi newtoniani sono tutti quei fluidi in cui lo sforzo viscoso è linearmente proporzionale alla deformazione del fluido. In parole povere:

$$\boldsymbol{\tau} \propto \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.15)$$

Possiamo definire che la proporzionalità, assumendo che valga l'ipotesi di Stokes<sup>5</sup>:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1.16)$$

<sup>5</sup> Ovvero che il comportamento del fluido sia comparabile lungo i tre assi principali



Nell'equazione (1.16) viene aggiunto il parametro  $\mu$  il quale indica la viscosità dinamica. Spesso si può trovare anche sotto forma di  $\nu$  definito come  $\nu = \mu/\rho$ . Si può legare la viscosità dinamica, in entrambe le sue forme, come:  $\mu = f(T, p)$  ovvero che la viscosità dinamica dipende sia dalla temperatura che dalla pressione. In particolare, si può dimostrare come dipenda fortemente dalle variazioni di temperatura e debolmente da quelle di pressione. Resta importante capire che la viscosità dinamica è un fenomeno interno al fluido, qualunque esso sia, infatti si tratta della frizione tra i vari substrati del fluido.

### 1.3.1.2 Fluidi non newtoniani

Per questi fluidi non si può considerare la viscosità come costante, ma potrebbe variare in funzione dello sforzo. Riprendendo i termini dell'equazione di Cauchy (1.13):

$$\sigma = \mu \dot{\gamma} \quad (1.17)$$

### 1.3.2 Equazione di Navier-Sokes

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (1.18)$$

La quale può essere semplificata nel caso sussistano determinate condizioni:

FLUIDO INCOMPRESSIBILE  $(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$  allora l'equazione diventa:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.19)$$

FLUIDO NON VISCIDO si semplifica fino a (Equazione di Eulero):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (1.20)$$

Si definisce un fluido non viscido nel momento in cui le forze viscosi sono trascurabili rispetto alle forze d'inerzia, gravitazionali e di pressione. Ad esempio lo sono le zone del fluido ad alto numero di *Reynolds*.

I termini viscosi non sono trascurabili rispetto a quelli di inerzia nello strato limite in prossimità di un corpo immerso nel fluido. Ciò è dovuto ai forti gradienti di velocità presenti nello strato.

FLUIDO INCOMPRESSIBILE

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.21)$$

Si nota che il termine di pressione appare solo in forma di gradiente:

*Il campo di velocità in un fluido incompressibile non è affetto dalla pressione assoluta, bensì solo dalle differenze di pressione.*

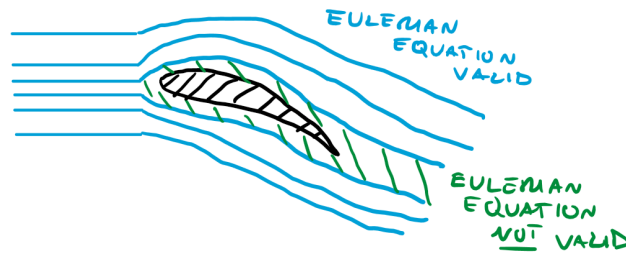


Figura 1.4: Osservazione dove l'equazione di Eulero è valida e non.

Eventuali modifiche alla pressione assoluta devono essere poste come condizioni al contorno del sistema.

Si può calcolare il campo di pressione con una costante arbitraria, ma per ottenere quella costante bisogna sapere il valore della pressione in qualche punto del fluido. In altre parole, bisogna conoscere la pressione assoluta o totale come condizione al contorno.

Tutto ciò resta valido fin tanto che il fluido è incomprimibile, per fluidi comprimibili la pressione  $p$  non è la pressione meccanica (forza/area) ma la pressione termodinamica  $P$ . In questo caso la pressione è funzione della temperatura e densità nell'equazione di stato del fluido.

#### FLUSSO EULERIANO

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.22)$$

In questo caso esistono delle regioni non viscide del fluido che possono essere trascurate per la maggior parte del fluido. Non devono essere ignorate sempre. Dato ciò si può assumere:

$$\underbrace{\tau}_{\text{sforzo viscoso}} \approx \underbrace{\mu}_{\text{viscosità}} \times \underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial x_i}}_{\text{gradiente di velocità}} \quad (1.23)$$

*I termini viscosi non sono trascurabili in presenza di forti variazioni del gradiente di velocità (strato limite, scia del corpo, ...).*

La figura 1.4 mostra un caso dove può essere applicata l'equazione di Eulero e dove no.

#### 1.3.3 Equazione di Bernoulli

La somma della pressione, dell'energia cinetica e potenziale delle particelle di un fluido è costante lungo la *streamline* nel caso di un flusso stazionario quando i termini di comprimibilità e viscosità sono trascurabili:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{cost.} \quad (1.24)$$

Da notare che la costante di Bernoulli può cambiare tra diverse *stream-lines* ma è costante nella singola. Nel flusso stazionario incomprimibile con effetti viscosi trascurabili, le varie forme di energia vengono trasformate ma la loro somma resta costante. Non c'è dissipazione di energia meccanica lungo il flusso. L'equazione di Bernoulli è una relazione approssimativa tra pressione, velocità ed elevazione; resta valida solamente nelle regioni non viscidie del fluido.

**PRESSIONE MODIFICATA** Gli effetti della gravità sono rilevanti solamente su flussi a superficie libera: ad esempio onde, moto di una nave. e per flussi guidati dalle condizioni al contorno come il moto per convezione naturale.

Per flussi incomprimibili, senza superfici libere, la gravità non modifica la dinamica del flusso. Il suo effetto sarà di imporre una pressione idrostatica distribuita nella direzione verticale rispetto al campo di pressione del fluido. Si può definire una pressione modificata  $p'$  che assorbe l'effetto della pressione idrostatica apportata dalla gravità. In questo caso, con l'asse  $z$  diretto in opposizione rispetto a  $g$  e, definito un riferimento nullo sull'asse  $z$  allora:

$$p' = p + \rho g z \Rightarrow \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla p' + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.25)$$

Il vantaggio di calcolare secondo l'equazione di Navier-Stokes è che non include il termine gravitazionale. Dopo la risoluzione con quella equazione, in termini di  $p'$  è semplice tornare alla pressione senza contributo idrostatico  $p = p' - \rho g z$

La pressione modificata è spesso usata nelle analisi *Computational Fluid Dynamics* (CFD) per separare gli effetti gravitazionali da quelli del fluido. La pressione modificata non deve essere usata in flussi con superfici libere.

## 1.4 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Per analizzare un fluido in termini energetici conviene visualizzare l'equazione dell'entalpia totale.

### 1.4.1 Equazione dell'entalpia totale

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (k \nabla T) + q_g + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) \quad (1.26)$$

Dove:

$q_g$  rappresenta il calore generato internamente dal sistema

$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V})$  rappresenta il lavoro fatto dallo sforzo viscoso

Da cui ne derivano:

EQUAZIONE DELL'ENTALPIA da non confondere con quella totale

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + q_g + \underbrace{\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V}}_{=\Phi} \quad (1.27)$$

EQUAZIONE ENTROPIA

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_g + \underbrace{\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V}}_{=\Phi} \quad (1.28)$$

La dissipazione dovuta agli attriti viscosi  $\Psi$  rappresenta l'ammontare del lavoro fatto dagli sforzi viscosi. Il quale viene convertito in calore il quale processo è irreversibile. Da cui una fonte di calore irreversibile. L'effetto della dissipazione viscosa nello scambio termico è particolarmente significativa per fluidi ad alta velocità e altamente viscosi.

Dalla (1.26) i parametri sono indicati come:

- $\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}$  Lavoro fatto dalle forze del corpo
  - $\frac{\partial p}{\partial t}$  Influenza della pressione nell'entalpia totale
  - $\nabla \cdot (k \nabla T)$  Quantità di energia trasferita per conduzione dal corpo al volume di controllo
  - $q_g$  Calore generato da una fonte interna
  - $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V})$  Lavoro degli effetti viscosi
- Da cui si può ricavare l'equazione dell'entalpia statica.

#### 1.4.2 Equazione dell'entalpia statica

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + q_g + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V} \quad (1.29)$$

L'equazione data come entalpia totale descrive i cambiamenti, in termini termici e meccanici, dell'energia. Il termine dinamico dell'entalpia totale (1.26) può essere sottratto e l'equazione (1.29) è descritta per ottenere un'equazione per valutare il cambiamento dei parametri termodinamici dell'energia termica e entalpia. Sotto alcune ipotesi, può essere utilizzata per descrivere un fluido poco comprimibile, quando la comprimibilità del flusso è comunque bassa.

#### 1.5 EQUAZIONI DI STATO

Il moto del fluido è descritto da cinque equazioni differenziali parziali per la descrizione della: massa, momento ed energia. I parametri termodinamici da ricercare in queste equazioni sono:  $\rho$ ,  $p$ ,  $h$  e  $T$ . Assumeremo l'equilibrio termodinamico: ovvero che il tempo necessario alle particelle per adeguarsi a nuove condizioni di contorno sia corto rispetto alle caratteristiche temporali del fluido. Dobbiamo aggiungere due equazioni di stato usando due variabili:  $p = p(\rho, T)$ ,  $h = h(p, T)$ .

### 1.5.1 Equazione di stato per un fluido incompressibile

$$\rho = \text{cost.} \quad (1.30)$$

Valida per liquidi e buona approssimazione per gas a bassa velocità.

Si può assumere che il flusso sia incompressibile a patto che la massima compressione sia al di sotto del 5%. Ciò implica che la velocità del gas sia inferiore al numero di Mach  $Ma \lesssim 0.3$ . Non c'è collegamento tra l'equazione dell'energia e le equazioni di massa e momento. Si risolve l'equazione di energia solo in caso di trasferimento di calore. Il campo di velocità non è affetto dal valore assoluto della pressione ma solo dal gradiente. Per i flussi comprimibili, la pressione è legata con la densità e temperatura attraverso un'equazione di stato e allora il valore della pressione assoluta. Un flusso comprimibile richiede una soluzione non solo di massa e momento, anche di energia e un'equazione di stato.

### 1.5.2 Equazione di stato del gas ideale

$$p = \rho RT \quad (1.31)$$

Il fattore di comprimibilità  $Z = \frac{p}{\rho RT}$  la cui variazione da una buona misura dell'applicabilità dell'equazione (1.31).

### 1.5.3 Equazioni del gas reale

Per descrivere l'andamento di un gas reale esistono diversi modelli, descritti nel tempo. Hanno una forma simile a quella del gas ideale (1.31) ma con degli aggiustamenti ai coefficienti per poter modellizzare correttamente il funzionamento di uno specifico gas. In letteratura si trovano articoli che descrivono quale modello rappresenta meglio un dato gas.

## 1.6 EQUAZIONI COSTITUTIVE

Alcuni parametri sono determinati da equazioni costitutive, in funzione di diversi parametri termodinamici. Ad esempio la viscosità, dipende fortemente dalla temperatura. Per diversi casi vengono definite le loro equazioni costitutive in modo che si possa determinare il valore del parametro per ogni caso.

## 1.7 CONDIZIONI AL CONTORNO

In qualsiasi punto su un limite formato da una superficie solida impermeabile, la continuità richiede che la componente normale della velocità alla superficie sia la stessa per il fluido che per la superficie. Se

un limite solido è stazionario, quindi la posizione della superficie non cambia nel tempo e, definito  $\mathbf{n}$  come normale alla superficie, allora:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.32)$$

sulla superficie. Per un fluido reale e viscoso, c'è una condizione addizionale sulla velocità tangenziale alla superficie. La condizione alla superficie per un fluido viscoso è che non può esserci velocità tangenziale relativa tra la superficie e il fluido.

---

## FLUSSI ROTAZIONALI E IRROTAZIONALI

---

### 2.1 TIPOLOGIE, MOVIMENTI E DEFORMAZIONI DI ELEMENTI FLUIDI

Un elemento di un fluido può essere sottoposto a quattro tipologie di movimento e deformazione:

1. traslazione
2. rotazione
3. sforzo lineare
4. sforzo di taglio

Siccome abbiamo necessità di descrivere gli elementi in movimento allora le misure che più ci interessano sono (rispettivamente):

1. Velocità
2. velocità angolare
3. sforzo lineare
4. sforzo di taglio

Con l'obiettivo di calcolare le caratteristiche del fluido è necessario che questi parametri siano in funzione della velocità o delle sue derivate. Per esempio:

#### VETTORE VELOCITÀ

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} \quad (2.1)$$

#### VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (2.2)$$

#### STRESS LINEARE

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

## SFORZO DI TAGLIO

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

Da cui è possibile ottenere la matrice dello sforzo totale, in coordinate cartesiane:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

**DEFORMAZIONE VOLUMETRICA** Gli sforzi appena evidenziati non sono gli unici possibili per un fluido. Ad esempio per diverse applicazioni è molto più importante la deformazione volumetrica. Può essere espressa come:

$$\frac{1}{dN} \frac{D}{Dt} (dN) = \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}_{=\nabla \cdot \mathbf{V}} \quad (2.6)$$

Da cui si ricavano diverse casistiche:

**FLUSSO INCOMPRESSIBILE** resta costante l'ammontare di volume netto: ciò indica che tanto si modifica il fluido in una direzione, tanto si deve stringere in altre direzioni per compensare.

**FLUSSO COMPRESSIBILE** si modifica il parametro  $dN$  in funzione dell'aumento o diminuzione della densità.

## 2.2 VORTICITÀ E ROTAZIONALITÀ

Si dice che un vettore è vorticoso nel caso:  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ . Il rotore di una particella di dimostra essere doppia rispetto alla velocità di rotazione della stessa. Il **rotore** è una misura dell'ammontare locale della rotazione del fluido. Se  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$  in una regione del fluido, allora le particelle stanno ruotando e il fluido in quella regione è detto rotazionale. Se  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  o  $\boldsymbol{\Omega} \approx 0$  allora la regione del fluido è detta irrotazionale.

La rotazione del fluido è spesso associata allo strato limite, scie, flusso attraverso turbomacchine e flusso con trasferimento di calore.

Il rotore di un fluido non può cambiare ameno di effetti della viscosità, gradienti di temperatura e altri fenomeni non-lineari. Se un fluido origina in una regione irrotazionale, questo rimarrà irrotazionale fin tanto che qualche fenomeno non-uniforme ne altererà il comportamento.

Se una regione del fluido può essere considerata come irrotazionale (o è molto vicina ad esserlo) le equazioni di moto si semplificano



notevolmente. Una regione irrotazionale la pressione e forze di inerzia sono più importanti di quelle per effetti viscosi (ordini di grandezze più alte).

### 2.3 APPROSSIMAZIONE A FLUIDO IRROTAZIONALE

L'approssimazione che una regione di fluido sia irrotazionale può andare bene per alcune regioni e non per altre. In generale, regioni non viscosi del flusso distanti da pareti solide e scie di altri corpi, sono considerabili irrotazionali; anche se ci sono delle situazioni per cui una regione non viscosa potrebbe essere rotazionale. Riprendendo l'esempio della figura 1.4 a pagina 10, le regioni lontane dal profilo alare possono essere considerate come irrotazionali. Strato limite e scia sono, invece, rotazionali. Nelle regioni di flusso irrotazionali il vettore velocità può essere descritto come gradiente di una funzione scalare detta **velocità potenziale**.

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \quad (2.7)$$

resta valido:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} \Rightarrow \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (2.8)$$

Le regioni irrotazionali sono anche dette regioni a flusso potenziale.

#### 2.3.1 Equazione di Laplace

In coordinate cartesiane:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.9)$$

In coordinate cilindriche:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad V_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

Che per un flusso incomprimibile e irrotazionale la velocità potenziale soddisfa l'equazione di Laplace ( $\phi$  è una funzione armonica):

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.11)$$

Portata nelle coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.12)$$

Le soluzioni dell'equazione di Laplace sono dominate dalla geometria (ad esempio condizioni al contorno)  $\phi$ . Le tre componenti del vettore velocità sono combinati in una singola variabile  $\phi$ . Il problema è caratterizzato solamente da due variabili:  $\phi$  e  $p$ .

RIASSUMENDO: L'equazione di Laplace è fortemente caratterizzata dalla geometria e:

- La conservazione della massa è sempre soddisfatta
- Non c'è dipendenza dal tempo

Perciò: l'equazione è rappresentativa dei fenomeni transitori e la soluzione ottenuta tramite l'equazione è legata solamente alla condizione al contorno.

Dunque: per flussi incomprimibili e irrotazionali, la soluzione deve soddisfare solamente la condizione al contorno.

### 2.3.2 Equazione di Eulero

Riprendendo l'equazione di Navier-Stokes (1.18) ridotta alle condizioni di incomprimibilità e irrotazionalità, ottenendo l'equazione di Eulero:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho g - \nabla p \quad (2.13)$$

Nonostante sia la stessa equazione (1.20) a pagina 9, descritta a partire da Navier-Stokes per le regioni di fluido non viscido. In questo caso i termini viscosi spariscono perché il flusso è assunto come irrotazionale invece di non viscido. Tutte le regioni irrotazionali di un flusso sono anche non viscido, ma non tutte le regioni non viscido sono irrotazionali.

Per una regione non viscida di flusso, l'equazione di Bernoulli vale lungo le *streamlines* e la costante di Bernoulli può cambiare da una *streamline* all'altra. Nel caso di un flusso irrotazionale la costante di Bernoulli è sempre la stessa ovunque. Perciò sempre valida come equazione. L'approssimazione di flusso rotazionale è più restrittiva dall'ipotesi di flusso non viscido.

### WORKFLOW

un flusso irrotazionale può essere risolto tramite il seguente flusso di lavoro come quello in figura 2.1.

Introducendo diverse semplificazioni è possibile semplificare l'equazione di Navier-Stokes. Tali semplificazioni non sono rappresentative delle effettive condizioni del flusso ma basate su osservazioni sperimentali.

## 2.4 FLUSSO ROTAZIONALE PLANARE

Nel caso di un flusso incomprimibile irrotazionale e planare, l'equazione di Laplace non solo è soddisfatta dall'equazione della velocità potenziale ma anche dalla funzione di flusso. In quel flusso le *streamline*

La funzione di flusso è definita dalla continuità della massa e soddisfa l'equazione di Laplace sulla condizione di irrotazionalità.

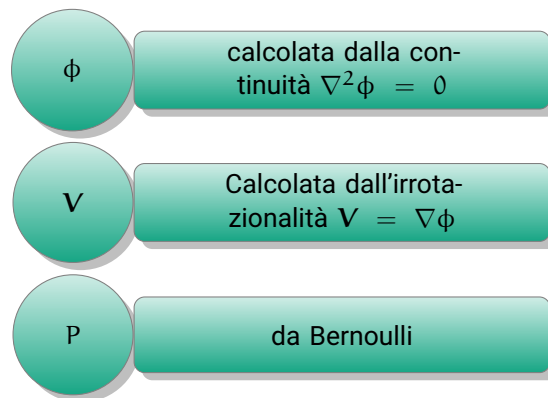


Figura 2.1: Procedimento per la risoluzione di un flusso irrotazionale

e le curve equipotenziale di velocità, *equipotential lines*, sono mutualmente ortogonali ovvero mutuamente intersecanti a  $90^\circ$ .

Lo stesso flusso può essere descritto in coordinate polari. Allora la funzione di flusso soddisfa comunque l'equazione di Laplace per regioni di flusso incomprimibile irrotazionale planare.

Nel caso di un flusso incomprimibile, irrotazionale assisimmetrico senza vortici la funzione di flusso non soddisfa più l'equazione di Laplace. In questo caso, l'equazione di Laplace è soddisfatta solamente solo dalla funzione di velocità potenziale ma non da quella di flusso. In questo flusso le *streamlines* e le *equipotential lines* non sono mutuamente ortogonali.

La funzione velocità potenziale definita a partire dall'ipotesi di irrotazionalità, soddisfa anch'essa l'equazione di Laplace

## 2.5 FLUSSI VORTICOSI

In molte applicazioni, i flussi sono vorticosi. Ad esempio i bruciatori necessitano di un flusso vorticoso per poter lavorare correttamente.

La categoria più semplice di vortice sono i vortici ad **equilibrio radiale semplice**. Definiti come:

- stazionari,
- assisimmetrici,
- Velocità radiale nulla ovunque.

Per un fluido incomprimibile, non viscido di questo tipo; le componenti di rotazione e assiale e pressione sono solo funzione del raggio e una componente significativa del momento angolare.

$$\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{dp}{dr}}_{\text{grad. pressione}} = \underbrace{\frac{V_\theta}{r}}_{\text{Velocità tangenziale}} \quad (2.14)$$

L'equazione (2.14) può essere integrata per trovare la distribuzione radiale della pressione.

$$\frac{p - p_{\text{ref}}}{\rho} = \int_{r_{\text{ref}}}^r \frac{V_\theta^2}{r} dr \quad (2.15)$$

Da cui si ottiene il rotore. Un'importante caratteristica del flusso vorticoso è che contiene velocità assiale  $\Omega_z$ . Questo tipo di vortice rappresenta la maggior parte dei fluidi vorticosi di nostro interesse.

Alcuni esempi di vortici ad equilibrio radiale sono:

#### VORTICE LIBERO

$$V_\theta = \frac{K}{r} \quad (2.16)$$

Siccome risulta che attorno al raggio nullo la velocità dovrebbe essere infinita, allora si esclude la regione corrispondente. La vorticosità di questo vortice è identica a zero ovunque ad eccezione dell'origine che rappresenta una singolarità matematica. Dunque il flusso risulta irrotazionale ad eccezione dell'origine.

#### VORTICE FORZATO

$$V_\theta = \omega r \quad (2.17)$$

In questo caso si ha un vortice rotazionale ovunque.

*In pratica si ha il vortice forzato circondato dal vortice libero.*

**VORTICE DI RANKINE** Deriva dal vortice libero con l'eccezione della regione attorno al raggio nullo. Dunque il vortice *Rankine* assembla la rotazione di un corpo solido al *free-vortex*. Ciò perché si può osservare che gli effetti viscosi limitano i gradienti di velocità attorno al raggio nullo, impedendogli di raggiungere velocità eccessive.

$$V_\theta = \begin{cases} \omega r & r \leq a \\ \frac{\omega a^2}{r} & r > a \end{cases} \quad V_z = \begin{cases} V_z(r) & r \leq a \\ V_{z0} & r > a \end{cases} \quad (2.18)$$

**ALTRI MODELLI** Esistono altri modelli di vortice che permettono di descrivere diversamente la zona centrale piuttosto di quella esterna e viceversa. Dipende ovviamente dal tipo di analisi da condurre con cui selezionare il modello di vortice più adatto per il caso.

#### 2.5.1 Influenza di elementi successivi

I flussi vorticosi presentano una marcata influenza in caso siano presenti delle variazioni di geometria dopo l'applicazione del vortice. Come si vede dalla figura 2.2.

La presenza di vortici in un passaggio divergente promuove l'esistenza di zone di ristagno e flusso inverso vicino all'asse di simmetria. Per esempio nelle turbine a gas, questo tipo di ricircolo è incoraggiato per mantenere la stabilità della fiamma, garantendo la permanenza del fluido in una data regione per migliorare la combustione della miscela.

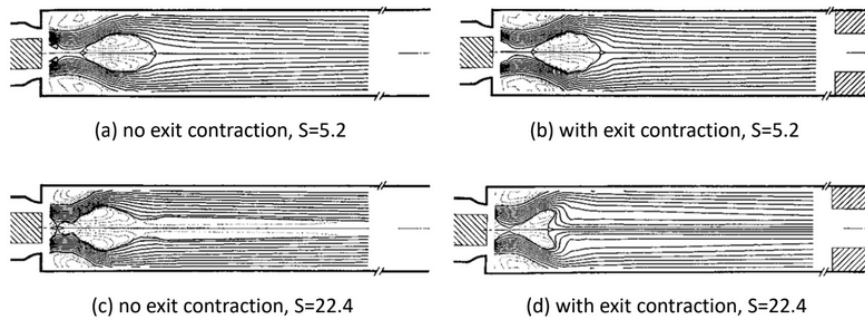


Figura 2.2: Effetti di variazioni successive della geometria per un flusso vorticoso in un bruciatore

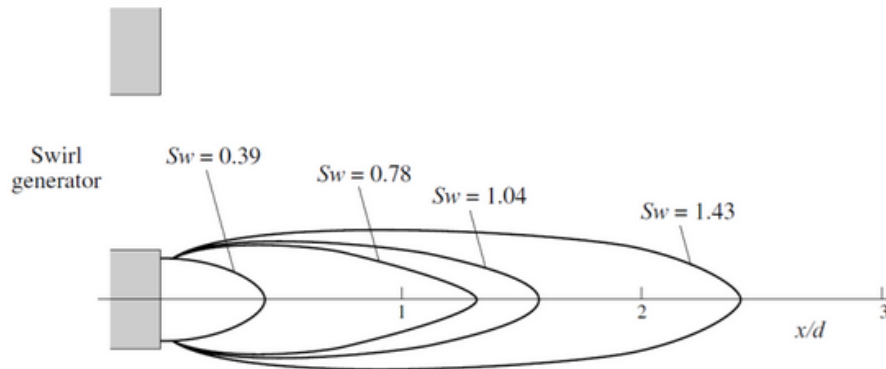


Figura 2.3: Esempio di misure dei vortici per un bruciatore

Per caratterizzare il livello di vortice viene definito un numero  $S_w$  che altro non è che il rapporto tra il momento angolare sul raggio per il flusso assiale del momento assiale.

$$S_w = \frac{\int_0^{r_0} r^2 V_\theta V_z dr}{r_0 \int_0^{r_0} r \left[ V_z^2 + \left( \frac{p - p_{\max}}{\rho} \right) \right] dr} \quad (2.19)$$

In generale si assume che

$S_w < 0.5$  vortice debole o moderato

$S_w > 0.5$  flusso vorticoso



---

STRATO LIMITE E FLUSSO SU CORPI

---

Il concetto di strato limite nell'equazione di Navier-Stokes (1.18) a pagina 9 si può trascurare:

- In regioni di flusso ad alto numero di Reynolds, dove le forze viscosse possono essere trascurate rispetto a quelle d'inerzia e gravitazionali (regioni non viscosse)
- Quando la vorticosità è trascurabilmente piccola da cui si ottiene l'equazione di Eulero (1.20).

Ci sono delle mancanze associate all'applicazione dell'equazione di Eulero in problemi pratici, in particolare l'impossibilità di descrivere condizioni di non scorrimento sulle pareti. Ne risulterebbe una descrizione irrealistica.

*Prandtl* introdusse il concetto di:

1. una regione esterna considerabile come non viscosa e irrotazionale.
2. uno strato limite dove il flusso deve essere considerato viscoso e rotazionale.

Questo approccio permette di risolvere il flusso esterno considerandolo non viscoso e irrotazionale, applicando l'equazione di Eulero. Dopodiché, si usano le **condizioni dello strato limite** per legare le due regioni. L'approssimazione dello strato limite corregge le differenze più evidenti delle equazioni di Eulero proponendo un metodo per marcare la condizione di non strisciamento sulla parete solida.

Ad oggi, nella simulazione CFD si può anche non usare tale condizione, visto che viene già considerata in altri modelli di risoluzione del fluido.

### 3.1 SPESSORE DELLO STRATO LIMITE

Considerando un flusso libero ad una velocità  $V$ , che scorre parallelamente ad una piastra fina, semi-infinita allineata all'asse  $x$ . Allora lo spessore dello strato limite  $\delta = \delta(x)$ , per convezione è definita come la distanza dalla parete fino alla componente di velocità parallela alla parete al 99% della velocità del flusso fuori dallo strato limite.

*In una data posizione in  $x$ , il più alto numero di Reynolds  $Re_x = \frac{\rho V x}{\mu}$  il più vicino è lo strato limite e più affidabile l'approssimazione dello strato limite.*

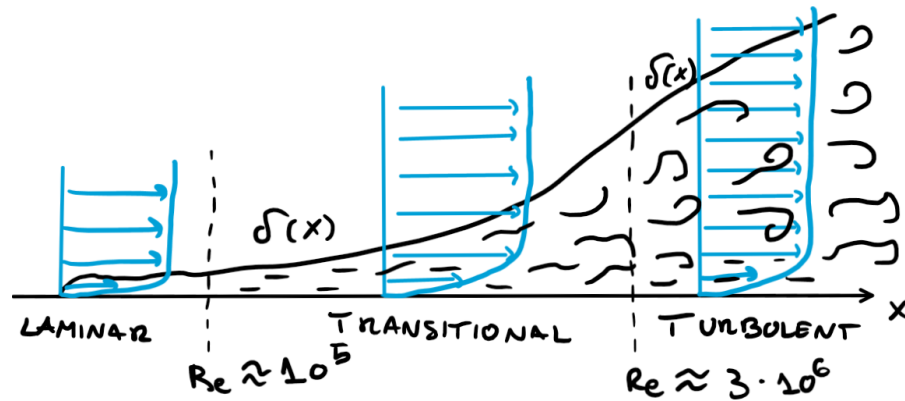


Figura 3.1: Sviluppo dello strato limite in funzione della distanza e del numero di Reynolds

Si può dimostrare che, per una lastra fina, infinitamente lunga:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow \delta \approx \sqrt{x} \quad (3.1)$$

Nelle turbomacchine, il numero di Reynolds si attesta attorno a  $10^5$ , lo strato limite è molto più piccolo rispetto alla dimensione del canale.

Lo sviluppo dello strato limite è, come accennato in precedenza, funzione della posizione  $x$  e del numero di Reynolds  $Re_x$  lungo  $x$ . In figura 3.1 si mostra la relazione tra i due parametri. Ingengeristicamente parlando si assume che il punto critico per il passaggio tra flusso laminare e turbolento viene ipotizzato per  $Re_{x_{cr}} = 5 \cdot 10^5$ .

Nella pratica la transizione a flusso turbolento può avvenire anche a valori minori di  $Re_{x_{cr}}$ . Ciò è influenzato dalla rugosità delle pareti solide, dalla geometria e particolari gradienti di pressione lungo la superficie. Anche nelle simulazioni CFD non è facile predire il valore di transizione. Eventualmente, vengono inseriti dei dispositivi appositi per sviluppare totalmente il flusso turbolento.

**FLUSSI LIBERI DA OSTACOLI** L'approssimazione dello strato limite può essere applicata a flussi senza ostacoli come getti, scie e flussi misti. Infatti garantiscono comunque un numero di Reynolds abbastanza alto da considerare la regione molto fina. Le regioni di questi flussi, con viscosità non trascurabile e velocità finite, possono essere considerati come strati limite anche se non è presente una parete solida.

### 3.2 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

Consideriamo un flusso stazionario, incomprimibile planare sopra un corpo. Si trascureranno gli effetti della gravità dato che non si sta considerando il caso di flussi liberi da superfici o convezione libera dove la gravità ha effetti considerevoli. Considereremo solo strato limite laminare. Considerando dei riferimenti locali nello strato limite:

- $x$  è parallela ovunque alla superficie e tipicamente posta a zero nel punto di stagnazione frontale del corpo.



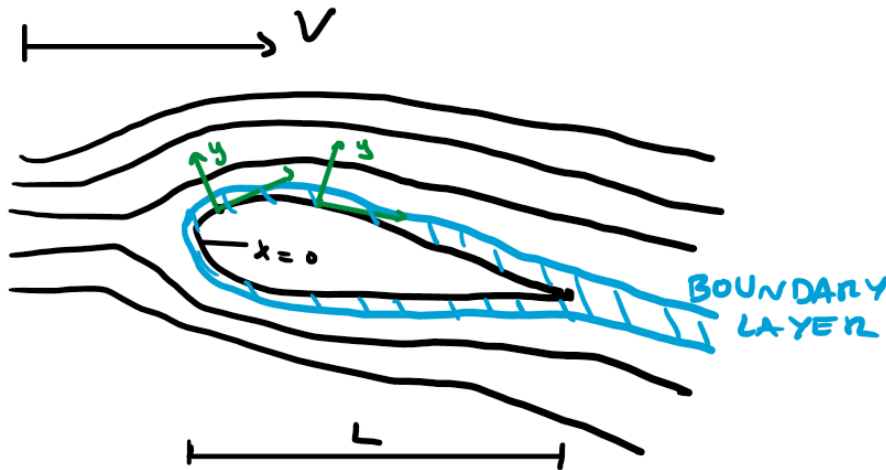


Figura 3.2: Riferimento per descrivere le equazioni dello strato limite

- $y$  è ovunque normale al corpo.

Nello strato limite, evidenziato nella figura 3.1, la componente velocità  $V_y$  è molto più piccola di quella  $V_x$ .  $V_x \approx U$  e  $V_y \approx U \frac{\delta}{L}$ .

La pressione può variare lungo lo strato limite in  $x$ , ma il cambiamento di pressione lungo  $y$  è trascurabile. La pressione della regione esterna può essere misurata sperimentalmente da un sensore di pressione statica anche direttamente dentro lo strato limite<sup>1</sup>.

Allora le equazioni per un flusso statico, incomprimibile, laminare nello strato limite sono:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

Da cui:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad (3.3)$$

Infine:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} \quad (3.4)$$

### 3.2.1 Limiti dell'equazione dello strato limite

- Nel caso il numero di Reynolds non sia troppo alto, l'approssimazione dello strato limite fallisce.
- L'assunzione che il gradiente di pressione lungo  $y$  sia nullo (o quasi) non è vero nel caso in cui lo spessore dello strato limite  $\delta$  è confrontabile col raggio di curvatura locale  $R$ . In questo caso l'accelerazione centripeta sulle *streamlines* non può essere ignorata.

<sup>1</sup> Vedi Sonda di Pitot

- Quando il numero di Reynolds è troppo alto, allora il flusso sullo strato limite non può essere più considerato laminare. L'equazione funziona bene solamente per un flusso limite laminare.
- In caso di separazione del flusso, l'approssimazione non è appropriata per descrivere il fenomeno nella regione di flusso separata considerato il fatto che in quel caso sono presenti dei flussi di ritorno.

Le *streamlines* che stanno all'interno e all'esterno dello strato limite vengono leggermente piegate lontano dalla parete col fine di garantire la conservazione della massa. Allora lo strato limite si inspessisce (esiste una componente  $V_y$  piccola e finita). Anche il flusso esterno viene modificato da tali deformazioni. Tre definizioni dello spessore dello strato limite sono state trovate e attualmente utilizzate per la sua descrizione:

1. Lo sviluppo dello spessore
2. Il momento dello spessore
3. L'energia cinetica dello spessore.

### 3.2.2 Spessore dello strato limite

**SVILUPPO DELLO SPESSORE** Possiamo descrivere lo sviluppo dello spessore attraverso la definizione:

$$\delta^* = \int_0^{y'} \left( 1 - \frac{V_x}{U} \right) dy \quad (3.5)$$

Allora  $\delta^*$  rappresenta la distanza alla quale la parete potrebbe essere spostata in direzione normale, nel caso in cui in un ipotetico flusso uniforme non viscoso a velocità  $U$  mantenga la portata nell'attuale flusso viscoso. Può essere vista anche come un ostacolo al flusso sulla parete.

**MOMENTO DELLO SPESSORE** Definito come:

$$\theta = \int_0^{y'} \frac{V_x}{U} \left( 1 - \frac{V_x}{U} \right) dy \quad (3.6)$$

$\theta$  misura la differenza tra il momento lungo tutto il flusso del flusso attuale e un flusso uniforme avente la velocità  $U$  all'infuori dello strato limite. Il momento dello spessore è fortemente legato al *drag*.

**ENERGIA CINETICA DELLO SPESSORE**

$$\theta^* = \int_0^{y'} \frac{V_x}{U} \left( 1 - \frac{V_x^2}{U^2} \right) dy \quad (3.7)$$

*L'integrazione viene presa più grande rispetto a quanto richiederebbe  $\delta^*$ , siccome non si può conoscere lo spessore a prescindere. Comunque il contributo all'integrale nella regione esterna sarebbe nulla o quasi.*

$\theta^*$  rappresenta la differenza tra l'energia cinetica lungo tutto il flusso attuale e quella di un flusso uniforme alla velocità  $U$  all'infuori dello strato limite. Questa rappresenta le perdine di energia cinetica per le macchine a flusso interno.

Tutti e tre i parametri  $\delta^*$ ,  $\theta$  e  $\theta^*$  forniscono una misura delle defezioni di massa, momento e energia cinetica attribuite allo strato limite.

### 3.2.3 Strato limite laminare su lastra piana

Allora, lo strato limite su una lastra piana è spesso chiamato come a *gradiente di pressione nullo*. **Soluzione di Blasius:**

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re_x}} \quad (3.8)$$

L'approssimazione dello strato limite non è appropriata per gli spigoli della lastra perché  $\delta$  non è piccolo a confronto con  $x$ . Inoltre, qualsiasi lastra reale ha uno spessore finito ed è presente un punto di stagnazione sul fronte della lastra. Si può ignorare la regione molto prossima a  $x = 0$  senza perdita di accuratezza per il resto del flusso. Inoltre:

SVILUPPO DELLO SPESSORE

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}} \quad (3.9)$$

MOMENTO DELLO SPESSORE

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (3.10)$$

Per il flusso in questione è sempre dimostrato che  $\delta^*$  e  $\theta$  è approssimativamente si dividono, rispettivamente,  $\delta$  come 35.0% e 13.5% in ogni posizione di  $x$ .

### 3.2.4 Strato limite turbolento su lastra piana

Un'importante caratteristica per uno strato limite turbolento è dato dalla differenza tra i diversi strati interni dello strato limite: *Inner layer* e *Outer layer*.

Il profilo di velocità nell'*Inner layer* dipende dalla viscosità, mentre nell'*Outer layer* dipende dagli sforzi di Reynolds. Da un'analisi dimensionale, un legame adimensionale per la velocità nell'*Inner layer* è

$$\frac{V_x}{u_\tau} = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) \quad (3.11)$$

Dove il parametro  $u_\tau$  detto come velocità di frizione viene usato per normalizzare sia  $y$  che  $V_x$ :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \tau_w = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.12)$$

Variabili *Inner layer*:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad u^+ = \frac{V_x}{u_\tau} \quad (3.13)$$

Nell'*Inner layer*:  $u^+ = f(y^+)$ . La distanza non dimensionale  $y^+$  è un tipo di numero di Reynolds.

Come si vede dalla figura 3.3b, è possibile descrivere il comportamento dello strato limite turbolento attraverso un'unica curva in funzione di  $y^+$ . Allora la suddivisione delle leggi è:

**SOTTOSTRATO VISCOSO** dove le forze viscosi hanno luogo. Le fluttuazioni turbolente sono sopresse per via della vicinanza alla parete. Arriva fino a circa  $y^+ \approx 5$  Si assume

$$u^+ = y^+ \quad (3.14)$$

**BUFFER SUBLAYER** Spostandosi ulteriormente dalla parete, fino a circa  $y^+ \approx 50$ , si hanno degli sforzi simili a  $\tau_w$  ma non più governati dalla viscosità: ovvero tutti gli sforzi e deformazioni di inerzia. Allora, questi sforzi possono essere definiti come sforzi di Reynolds definiti come:

$$\rho \bar{V}_x' \bar{V}_y' \quad (3.15)$$

**LOG-LAW REGION** spostandosi ulteriormente all'interno dello strato limite, sempre più lontano da parete, l'andamento del flusso è stato descritto tramite osservazioni empiriche da una legge del tipo:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (3.16)$$

Dove:

$\kappa$  rappresenta la costante di Von Karman

$C$  è una costante in genere  $C \approx 0.5$

La legge a parete, si può dimostrare che sia applicabile per quasi tutte le applicazioni a parete, non solo per la lastra piana. L'approssimazione *Log-law* è utilizzata vicino alle pareti nelle analisi CFD.

Lo strato limite turbolento ha dei gradienti di velocità molto più marcati di quello laminare. Il gradiente di velocità più marcato vicino a parete può essere visto come associato al comportamento della viscosità man mano che ci si sposta dalla parte. Nella regione esterna gli effetti della viscosità possono essere di due o più ordini di grandezza più piccoli. Risulta, appunto, che nello strato limite ci siano dei gradienti di velocità più marcati.

*Vicino alla parete il flusso ha una maggior capacità (in confronto ad uno strato limite laminare) di resistere alla separazione in gradienti di pressione avversi perché il momento del fluido sta accelerando per arrivare a quello del fluido indisturbato.*

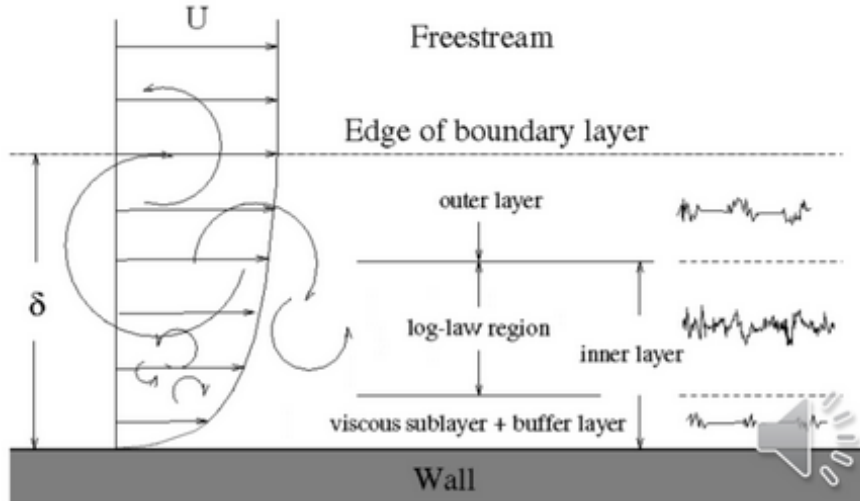
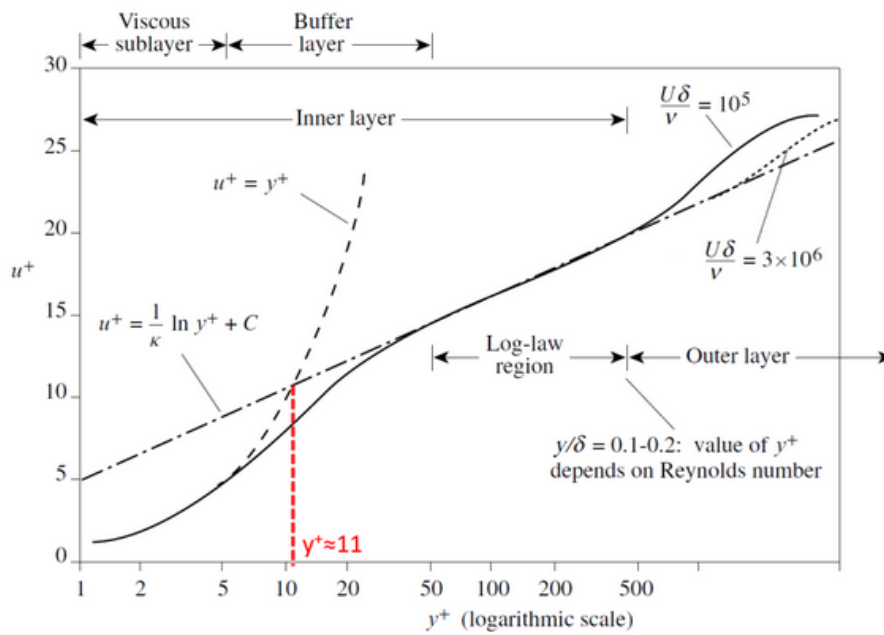
(a) *Suddivisione dello strato limite*(b) *Leggi nello strato limite*

Figura 3.3: Strato limite turbolento su lastra piana

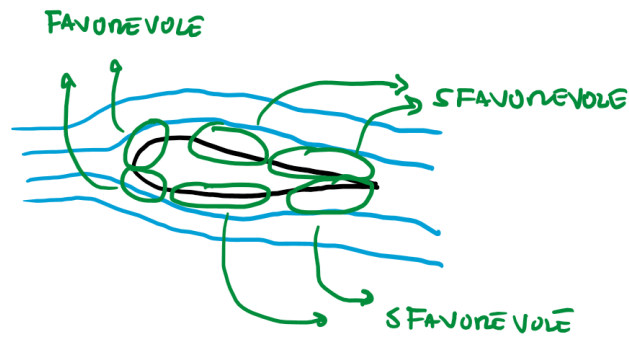


Figura 3.4: Esempi di gradienti di pressione favorevoli e sfavorevoli

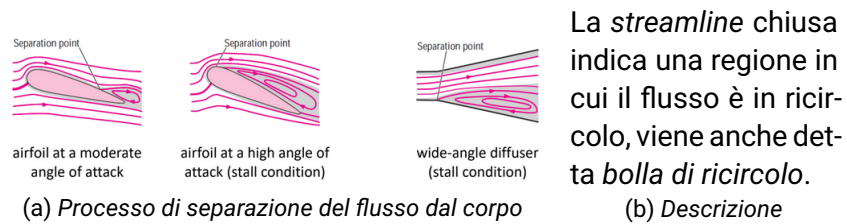


Figura 3.5: Separazione del flusso dal corpo

### 3.2.5 Strato limite e gradienti di pressione

Bisogna considerare due tipologie di gradiente di pressione:

**GRADIENTE DI PRESSIONE FAVOREVOLE** nel flusso non viscido e/o irrotazionale nel *Outer region* accelera: allora aumenta la velocità ma cala la pressione. Si preferisce tale situazione perché lo strato limite è fino, aderente a parete e difficilmente separabile da parete.

**GRADIENTE DI PRESSIONE SFAVOREVOLE** quando il flusso esterno decelera: cala la velocità e aumenta il gradiente di pressione. Non si preferisce questa situazione in quanto lo strato limite è solitamente più spesso, meno aderente a parete e facilmente si separa.

lo strato limite lungo un corpo immerso in un flusso libero è tipicamente soggetto a gradiente favorevole in testa al corpo e a gradiente avverso sul retro del corpo.

## 3.3 SEPARAZIONE DEL FLUSSO

Se il gradiente di pressione sfavorevole è sufficientemente forte, lo strato limite è predisposto per separare il flusso dal corpo. La figura 3.5a riporta il processo di separazione del flusso dal corpo.

Parte II

AERODINAMICA





---

## FLUSSO SU CORPI

---

Un fluido in movimento apporta forze di pressione normali ad un corpo immerso e forse tangenziali alla superficie. Per un flusso bidimensionale, la risultante della pressione e forze di taglio possono essere considerate in due componenti:

- *Drag force* in direzione del flusso;
- *Lift force* in direzione normale al flusso.

Nel caso di un flusso tridimensionale c'è una componente mista normale al piano *drag-lift*. Allora, le forze possono generare anche dei momenti come:

- momento di rollio,
- momento di beccheggio,
- momento di bardata.

$$\begin{aligned} F_D &= \int_A (-p \cos \theta + \tau_w \sin \theta) dA \\ F_L &= - \int_A (p \sin \theta + \tau_w \cos \theta) dA \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sia la frizione superficiale sia la pressione, in generale, contribuiscono a  $F_D$  e  $F_L$ . In caso di una lastra piana fina allineata parallela alla

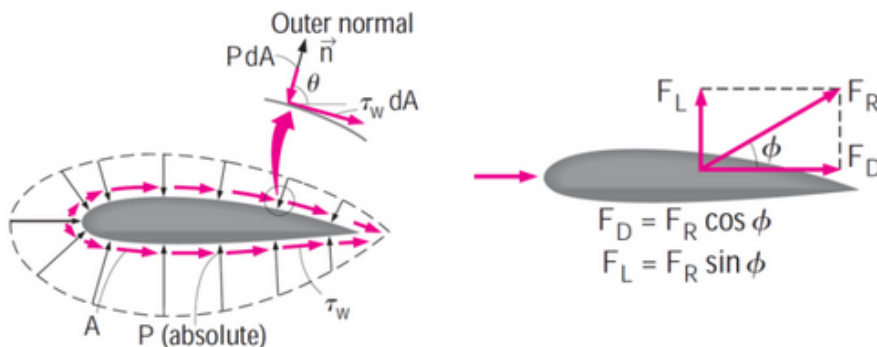


Figura 4.1: Scomposizione delle forze su un profilo alare in *drag* e *lift*

direzione del flusso,  $F_D$  dipende solamente dalle forze di taglio. Quando la lastra è normale alla direzione del flusso  $F_D$  dipende solo dalla pressione.

#### 4.1 COEFFICIENTI DI DRAG E LIFT

i coefficienti di *drag* e *lift* sono definiti come:

$$C_D = \frac{F_D}{\rho \frac{V^2}{2} A} \quad C_L = \frac{F_L}{\rho \frac{V^2}{2} A} \quad (4.2)$$

I due coefficienti rappresentano il comportamento di *drag* e *lift* del corpo. In generale dipendono dalle caratteristiche geometriche del corpo. Dipendono anche dal numero di Reynolds e dalla rugosità della superficie. I coefficienti locali, variano lungo la superficie in funzione dei cambiamenti della velocità dello strato limite nella direzione di flusso. Si può definire i coefficienti medi del corpo nel momento in cui sono disponibili i coefficienti locali lungo tutta la lunghezza della superficie. Possono dipendere anche dal numero di Mach, a patto che sia rilevante per la geometria:  $Ma \geq 0.3$ .

##### 4.1.1 Composizione drag

La forza di *drag* è composizione di diversi fenomeni:

**FRIZIONE** dovuta prevalentemente dagli sforzi di taglio sulla parete  $\tau_w$ . Causata da effetti d'attrito.

**PRESSIONE** dovuta al contributo della pressione sul profilo. Definita anche dalla forte dipendenza dalla geometria del corpo.

Si può definire:

$$F_D = F_{D,Friction} + F_{D,Pressure} \quad C_D = C_{D,Friction} + C_{D,Pressure} \quad (4.3)$$

La  $F_{D,friction}$  è una funzione importante legata alla viscosità: aumenta con l'aumentare della viscosità. In particolare, per flussi a basso numero di Reynolds la maggior parte del *drag* è dovuto alla frizione. Con l'aumentare del numero di Reynolds il *drag* per effetto della frizione cala.  $F_{D,friction}$  è proporzionale all'area della superficie.  $C_{D,friction}$  è indipendente dalla rugosità superficiale nel flusso laminare, è fortemente dipendente dalla rugosità superficiale nel caso di flussi turbolenti.  $F_{D,pressure}$  è proporzionale all'area frontale e alle differenze di pressione tra il fronte e il retro del corpo immerso. È dominante per i corpi spuntati risulta piccolo per corpi affusolati come ad esempio i profili alari e nullo nel caso di lastre piane parallele al flusso.  $F_{D,pressure}$  Risulta molto significativo quando la velocità del fluido è molto alta e quest'ultimo è capace di seguire la curvatura del corpo. Perciò il fluido quando si separa dal corpo crea un gradiente di pressione molto basso nel retro del corpo stesso.

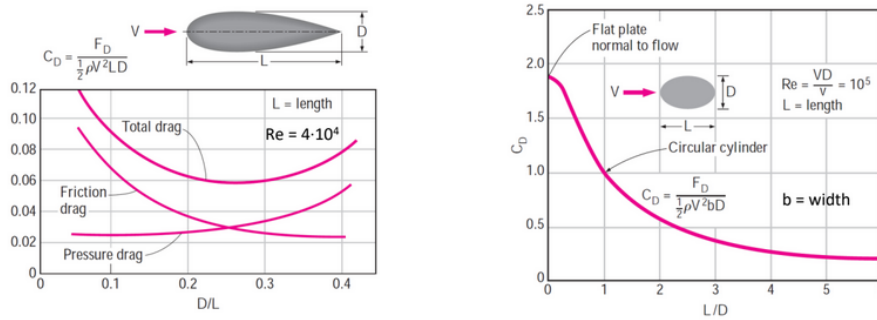


Figura 4.2: Processo di affusolamento di un corpo immerso in un fluido

**RIDURRE IL DRAG: AFFUSOLANDO** Affusolare un corpo ha degli effetti contrari nel *drag* di pressione e frizione: Riduce il *pressure drag* eliminando la separazione dello strato limite. Mentre aumenta il *friction drag* aumentando l'area della superficie del corpo. Infatti, spesso vengono condotti degli studi di ottimizzazione del *drag* per far sì che un corpo immerso in un flusso abbia il minimo della somma dei due componenti. Affusolare dovrebbe essere preso in considerazione per corpi spuntati che sono sottoposti a un flusso ad alto numero di Reynolds, per cui la separazione del flusso è una possibilità reale

In letteratura esistono alcune tabelle che mostrano i coefficienti di *drag* per delle geometrie piuttosto semplici. Bisogna sempre considerare che oltre alla geometria è molto importante il flusso nella sua composizione, nella velocità e nella sua direzione.

#### 4.2 FLUSSO PARALLELO AD UNA LASTRA PIANA

Per una lastra piana parallela al flusso il coefficiente di *drag* è uguale al coefficiente di *drag* per frizione. Il coefficiente di frizione varia lungo tutta la superficie come risultato dei cambiamenti della velocità all'interno dello strato limite nella direzione del flusso. I valori del coefficiente di frizione sono molto più alti in un flusso turbolento rispetto a quelli di un flusso laminare; questo è dovuto al fatto che: nel flusso turbolento c'è un maggiore mescolamento rispetto che a quello laminare.

$$F_D = F_{D, \text{friction}} = F_f = C_f \rho \frac{V^2}{2} A \quad (4.4)$$

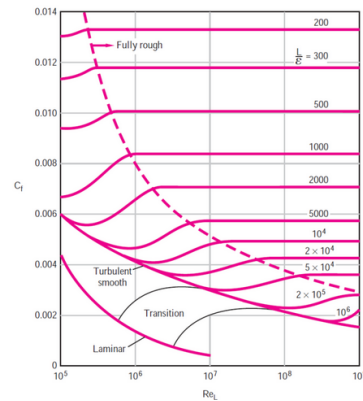
#### 4.3 FLUSSO SU UNA SFERA O UN CILINDRO

Ipotizzando di considerare una sfera o un cilindro una misura caratteristica di entrambi può essere il diametro  $D$ . Da cui si può considerare il numero di Reynolds

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (4.5)$$

**Per un flusso laminare**, il  $C_f$  dipende solamente dal numero di Reynolds e la rugosità della superficie non ha effetto. **Per un flusso turbolento**, la rugosità della superficie causa l'incremento considerevole del  $C_f$  a tal punto che un regime completamente turbolento è funzione della sola rugosità e non del numero di Reynolds

(a)

(b)  $C_f$  in funzione del numero di Reynolds e della rugosità  $\epsilon$ 

Possiamo considerare il fatto che il numero di Reynolds critico sia  $Re_{cr} \approx 2 \cdot 10^5$ . Allora la forza di *drag* sarà inizialmente dovuta alla frizione per numeri di Reynolds bassi. Dopodiché, all'aumentare del numero di Reynolds, inizierà il contributo di entrambe le componenti fino ad arrivare interamente al contributo della sola componente pressoria. Il fenomeno può essere descritto in funzione del numero di Reynolds:

$Re < 10^3$  Per numeri di Reynolds estremamente bassi gli effetti dell'inerzia sono trascurabili e il fluido copre totalmente il corpo. Non c'è separazione del flusso e il coefficiente di *drag* è inversamente proporzionale al numero di Reynolds. Salendo col numero di Reynolds inizia la separazione del flusso nella parte posteriore del corpo. Mentre, il coefficiente di *drag* continua a decrescere con l'aumento del numero di Reynolds.

$10^3 < Re < 10^5$  Per questa velocità il coefficiente di *drag* rimane più o meno costante. Questo comportamento è caratteristico dei corpi spuntati. Il flusso nello strato limite è laminare in questo range, ma il flusso della regione separata, dopo il corpo, è fortemente turbolento con una larga scia vorticoso.

$Re > 10^5$  Dopo questo pallone limite il coefficiente di *drag* subisce un'improvvisa caduta. Questo è dovuto al fatto che lo strato limite diventa turbolento. Allora il punto di distacco tra lo strato limite e il corpo si sposta sul retro del corpo, riducendo la dimensione della scia e la magnitudo della *drag* di pressione.

Un incremento della rugosità superficiale può diminuire il  $C_f$ . Ciò è dovuto alla transizione dello strato limite da valori laminari a quelli turbolenti causando nel flusso posteriore al corpo una riduzione della scia e del *drag* di pressione.

# 5

---

## AERODINAMICA DI UN PROFILO ALARE

---



### Parte III

### APPENDIX







---

## APPENDIX TEST

---

Lorem ipsum at nusquam appellantur his, ut eos erant homero concludaturque. Albucius appellantur deterruisset id eam, vivendum partiendo dissentiet ei ius. Vis melius facilisis ea, sea id convenire referrentur, takimata adolescens ex duo. Ei harum argumentum per. Eam vidit exerci appetere ad, ut vel zzril intellegam interpretaris.

*More dummy text.*

### A.1 APPENDIX SECTION TEST

Test: [Tabella A.1](#) (This reference should have a lowercase, small caps A if the option `floatperchapter` is activated, just as in the table itself → however, this does not work at the moment.)

| LABITUR BONORUM PRI NO | QUE VISTA | HUMAN        |
|------------------------|-----------|--------------|
| fastidii ea ius        | germano   | demonstratea |
| suscipit instructor    | titulo    | personas     |
| quaestio philosophia   | facto     | demonstrated |

Tabella A.1: Autem usu id.

### A.2 ANOTHER APPENDIX SECTION TEST

Equidem detraxit cu nam, vix eu delenit periculis. Eos ut vero constituto, no vidit propriae complectitur sea. Diceret nonummy in has, no qui eligendi recteque consetetur. Mel eu dictas suscipiantur, et sed placeat oporteat. At ipsum electram mei, ad aequae atomorum mea. There is also a useless Pascal listing below: [Listing A.1](#).

Listing A.1: A floating example (listings manual)

---

```
for i:=maxint downto 0 do
begin
{ do nothing }
end;
```

---

---

## DECLARATION

---

Put your declaration here.

*Ferrara, 2022 - 2023*

---

Lorenzo Nicolè



## COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both  $\text{\LaTeX}$  and  $\text{\LyX}$ :

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

<http://postcards.miede.de/>

*Final Version* as of 19 agosto 2023 (`classicthesis` version 1.0).