UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ ŞI INFORMTICĂ

LUCRAREA DE LICENŢĂ

Ecuaţii cu diferenţe de ordinul întâi

Conducător ştiinţific
Conf. Dr. Habil. Adriana Buică

Absolvent
Bercheşan Lorena-Ariana

2023

Abstract

First-order linear difference equations are an important aspect of the theory of discrete dynamical systems. In the first part of this thesis we present methods to find formulas for the solutions of this type of equations.

In the second part of this thesis we present the main aspects of the dynamic of first-order autonomous difference equations. More precisely, we analyze the asymptotic behavior of solutions, identifying equilibrium points, periodic points and their stability.

The tent map represents a simple yet important example of a non-linear difference equation. Here we present the main properties of the dynamic generated by the tent map.

Cuprins

1 Introducere

Ecuațiile diferențiale liniare de ordinul întâi reprezintă un aspect important al teoriei sistemelor dinamice discrete. Aceste ecuații descriu evoluția unei variabile în funcție de starea sa anterioară și sunt exprimate într-o formă recursivă. O ecuație diferențială liniară de ordinul întâi poate fi scrisă astfel:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n,$$

unde x_n reprezintă valoarea variabilei la momentul n, iar $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale date. Această ecuație poate fi folosită pentru a modela diverse fenomene în știință și inginerie, cum ar fi creșterea populației, degradarea materialelor sau propagarea unui semnal într-un sistem discret.
Dinamica ecuațiilor autonome de ordinul întâi reprezintă o ramură a teoriei sistemelor dinamice care se ocupă de studiul comportamentului ecuațiilor diferențiale care nu depind explicit de variabila independentă (timpul). Aceste ecuații autonome pot fi scrise în forma generală:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

care prezintă relaţia dintre starea curentă x_n şi starea ulterioară x_{n+1}. Starea sistemului depinde numai de starea sa curentă.
Analiza dinamicii ecuațiilor autonome de ordinul întâi implică înțelegerea comportamentului pe termen lung al sistemului. Acest lucru include în mod obișnuit studierea stabilității punctelor fixe, care sunt valorile x care satisfac $f(x) = x$. Punctele fixe pot fi stabile, atrăgând soluțiile apropiate, sau instabile, respingând soluțiile apropiate. Analiza stabilității implică adesea examinarea derivatei sau a iteratelor funcției f în punctele fixe.

Funcţia Cort $T : [0, 1] \to R$, definită de

$$T(x) = 1- \mid 2x - 1 \mid,$$

este un exemplu de ecuaţie neliniară cu diferenţe. Aceasta este caracterizată de structura sa liniară pe porţiuni. Ea constă în două segmente liniare, cu punctele 2 şi -2, care se intersectează la $x = \frac{1}{2}$. Pentru valorile de intrare x între 0 şi $\frac{1}{2}$, funcţia creşte linear de la 0 la 1. Pentru valorile $\frac{1}{2}$ şi 1, scade linear de la 1 la 0.
Studiul dinamicii funcţiei cort implică determinarea punctelor fixe, a orbitelor periodice şi a stabilitaţii acestor soluţii. Punctele fixe sunt valorile x pentru care $T(x) = x$, iar orbitele periodice sunt secvenţe de puncte care se repetă după un anumit număr de iteraţii. Analiza stabilitaţii ajută la înțelegerea faptului dacă aceste puncte fixe sau orbite periodice atrag sau resping soluțiile apropiate.

2 Ecuaţii cu diferenţe liniare de ordinul întâi

În acest capitol prezentăm metode de rezolvare care duc la formule pentru soluţia generală a ecuaţiei cu diferenţe liniare de ordinul întâi. Am preluat rezultate, exemple şi exerciţii din [3], [4] şi [5].

Forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe liniară de ordinul întâi este

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n \geq 0$$

unde $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale date. Necunoscuta este şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$.

2.1 Ecuaţia $x_{n+1} = ax_n + b$

2.1.1 Progresia geometrică

Progresia geometrica este un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din cel precedent prin înmulţirea acestuia cu un acelaş număr $a \in R^*$ numit raţie. Prin urmare, avem

$$x_{n+1} = ax_n, \quad n \geq 0.$$

Cu ajutorul inducţiei matematice se determină x_n:
$x_1 = ax_0$
$x_2 = ax_1 = a(ax_0) = a^2 x_0$
$x_3 = ax_2 = a(a^2 x_0) = a^3 x_0$
$\dots$
$x_n = ax_{n-1} = a(a^{n-1} x_0) = a^n x_0$
$x_{n+1} = ax_n = a^{n+1} x_0.$
Atunci

$$x_n = a^n x_0, \quad n \geq 0.$$

Exemplul 1

Se considera progresia geometrica $(x_n)_{n\geq 0}$ în care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 6$. Aflaţi x_6 şi x_0.
Raţia acestei progresii geometrice este: $a = \frac{x_2}{x_1} = 3$.
Astfel, $x_6 = x_1 a^5 = 3^5 2 = 486$ iar $x_0 = \frac{x_1}{a} = \frac{2}{3}$.

2.1.2 Progresia aritmetică

Progresia aritmetica este un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care fiecare termen, începand cu al doilea, se obţine din termenul precedent prin adunarea unui număr $b \in R^*$, numit raţie.
Prin urmare avem,

$$x_{n+1} = x_n + b, \quad n \geq 0.$$

Se arată uşor prin inducţie că

$$x_n = x_0 + nb, \quad n \geq 0.$$

Exemplul 2

Se consideră progresia aritmetica $(x_n)_{n\geq 0}$ în care $x_1 = 1$ şi $x_5 = 13$.
Să se calculeze x_{2012} şi x_0.
Avem: $x_5 = x_1 + 4b$. Atunci $13 = 1 + 4b$ deci $b = 3$.
În conluzie, $x_{2012} = x_1 + 2011b = 1 + 2011 \cdot 3 = 6034$ şi
$x_0 = b - x_1 = 3 - 1 = 2$.

2.1.3 Ecuaţia $x_{n+1} = ax_n + b$

Ecuaţia cu diferenţe

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n \geq 0,$$

unde $a, b \in R^*$, $a \neq 1$ va fi rezolvată prin două metode.
În prima metodă se caută soluţia constantă $x_n = x$ pentru $\forall n \geq 0$.

Înlocuind in ecuaţie se obţine $x = ax + b$. Atunci $x = \frac{b}{1-a}$. Prin schimbarea de variabilă

$$y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$$

obţinem:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \frac{b}{1-a} \iff y_{n+1} = ax_n + b - \frac{b}{1-a} \iff$$

$$y_{n+1} = a\Big(y_n + \frac{b}{1-a}\Big) + b - \frac{b}{1-a} \iff y_{n+1} = ay_n, n \geq 0$$

Ecuaţia aceasta este de tipul 2.1.1 iar soluţia ei este:

$$y_n = y_0 a^n, \quad n \geq 0.$$

Se revine la schimbarea de variabilă,

$$x_n = \Big(x_0 - \frac{b}{1-a}\Big)a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n \geq 0.$$

A doua metodă de rezolvare a ecuaţiei cu diferenţe este prin inducţie matematică. Mai întâi încercăm să intuim formula soluţiei.
Fie $x_0 \in R$ dat. Atunci
$x_1 = ax_0 + b$
$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + b(a + 1)$
$x_3 = ax_2 + b = a^3x_0 + ab(a + 1) + b = a^3x_0 + b(a^2 + a + 1)$
Propunem formula

$$x_n = ax_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$$

Demonstrăm că

$$x_{n+1} = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$$

Avem
$x_{n+1} = ax_n + b = a[a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)] + b$
$x_{n+1} = a^{n+1} x_0 + ab(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) + b$
$x_{n+1} = a^{n+1} x_0 + b(a^n + a^{n-1} + \cdots + a) + b$
$x_{n+1} = a^{n+1} x_0 + b(a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1)$.
Astfel am demonstrat prin inducţie matematică, formula propusă. Acum arătăm că aceasta este aceeaşi cu cea găsită în prima metodă.

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1) = a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1} =$$
$$= a^n\Big(x_0 + \frac{b}{a-1}\Big) - \frac{b}{a-1} = a^n(x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}.$$

Exemplul 3

Aflaţi soluţia ecuaţiei cu diferenţe

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 2, \quad x_0 = 0.$$

$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 2 \iff x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$
Coeficienţii ecuaţiei sunt: $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.
Metoda 1
Căutăm soluţiile constante ale ecuaţiei, rezolvând în R ecuaţia
$x = \frac{1}{2}x + 2$.
Obţinem $x = 4$.
Efectuăm schimbarea de variabilă

$$y_n = x_n - 4.$$

Avem
$y_0 = x_0 - 4$ şi $y_{n+1} = x_{n+1} - 4$

$\iff y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2 - 4 \iff$
$\iff y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + 4) - 2 \iff y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$
Atunci

$$y_n = y_0\frac{1}{2^n} \implies x_n = y_0\frac{1}{2^n} + 4$$

Astfel, $x_n = -\frac{4}{2^n} + 4, \quad n \geq 0.$
Metoda 2
Această metodă se rezolvă cu ajutorul inducţiei matematice.
Primul pas constă în intuirea formulei.
Astfel, $x_0 = 0$
$x_1 = \frac{1}{2}x_0 + 2 = 2$
$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2 = \frac{1}{2}2 + 2 = 2(\frac{1}{2} + 1)$
$x_3 = \frac{1}{2}x_2 + 2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}2 + 2 = 2(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1)$
$x_4 = \frac{1}{2}x_3 + 2 = 2(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1)$
Presupunem formula $x_n = 2(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2} + 1), \quad n \geq 1.$
Vrem să îl aflăm pe x_{n+1}.
Astfel, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$
$x_{n+1} = \frac{1}{2}2(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots \frac{1}{2} + 1) + 2$
$x_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots \frac{1}{2} + 1 + 2$
$x_{n+1} = 2(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \frac{1}{2} + 1).$

Deci $x_n = 2\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 4(1 - \frac{1}{2^n}), \quad n \geq 0.$

2.2 Ecuaţia $x_{n+1} = a_nx_n + b_n$

Acest caz reprezintă forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe liniare de ordinal întâi unde $(a_n)_{n\geq0}, (b_n)_{n\geq0}$ sunt şiruri de numere date. Soluţia se obţine pornind de la o valoare iniţială $x_0 \in R$ astfel:
$x_1 = a_0x_0 + b_0,$
$x_2 = a_1x_1 + b_1 = a_1(a_0x_0 + b_0) + b_1 = a_1a_0x_0 + a_1b_0 + b_1$
$x_3 = a_2x_2 + b_2 = a_2(a_1a_0x_0 + a_1b_0 + b_1) + b_2 = a_2a_1a_0x_0 + a_1a_2b_0 + a_2b_1 + b_2$
$\ldots$
$x_n = a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0x_0 + a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1b_0 +$

$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2b_1 + \dots + a_{n-1}b_{n-2} + b_{n-1}$

Prin intermediul inducţiei matematice se arata că soluţia ecuaţiei este:

$$x_n = \Big(\prod_{j=0}^{n-1} a_j\Big)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{k=j+1}^{n-1} a_k\Big)b_j$$

Exemplul 4

Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei

$$x_{n+1} - \frac{2n+1}{2n+3}x_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Coeficienţii ecuaţiei sunt: $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$, $b_n = 2^n, \quad n \geq 0$.
Aplicând formula $x_n = \Big(\prod_{j=0}^{n-1} a_j\Big)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{k=j+1}^{n-1} a_k\Big)b_j$ obţinem:

$$x_n = \Big(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2j+1}{2j+3}\Big)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{k=j+1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+3}\Big)2^j = \frac{x_0}{2n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{2j+3}{2n+1}2^j =$$

$$= \frac{x_0}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{n-1}(2j+3)2^j = \frac{x_0}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}(2\sum_{j=0}^{n-1}2^j j + 3\sum_{j=0}^{n-1}2^j) =$$

$$= \frac{x_0}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\Big[2(n2^n + 2^n - 2^{n+1} + 2) + 3(2^{n-1} - 1)\Big]$$

Exemplul 5

Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$x_{n+1} = 2x_n + 3^n, \quad x_1 = 0.5.$$

Pentru a determina soluţia acestei ecuaţii folosim formula determinată anterior.

$$x_n = \frac{1}{2}2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}2^{n-j-1}3^j = 2^{n-2} + 2^{n-1}\frac{3}{2}\Big[\frac{(\frac{3}{2})^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big]$$

În concluzie, soluţia ecuaţiei este $x_n = 3^n - 2^{n-2}5$.

2.3 Ecuaţii de tip Ricatti

Forma generală a ecuaţiilor de tip Ricatti este:

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n}{x_n + b_n}, \quad n \geq 0.$$

unde $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale date, $a_n \neq 0$, $\forall n \geq 0$. Aceasta este o ecuaţie cu diferenţe neliniară care printr-o schimbare de variabilă, convenabil aleasă, poate fi redusă la ecuaţie liniară.
Observăm că ecuaţia are soluţia constantă $x_0, \quad n \geq 0$ şi că orice altă soluţie $(x_n)_{n\geq 0}$ satisface $x_n \neq 0, \quad \forall n \geq 0$.
Substituţia convenabilă este:

$$x_n = \frac{1}{y_n}.$$

În urma înlocuirilor $x_n = \frac{1}{y_n}$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n+1}}$ se obţine:

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{a_n}{y_n} \frac{1}{\frac{1}{y_n} + b_n} \iff \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{a_n}{1 + y_n b_n}$$

Deci y_n satisface ecuaţia liniară de ordinul intâi:

$$y_{n+1} = \frac{b_n}{a_n} y_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 0.$$

Aplicând formula de reprezentare a soluţiei ecuaţiei liniare de ordinul întâi, scrisă în paragraful 2.2 se obţine:

$$y_n = \Big(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{a_j}\Big) y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{b_k}{a_k} \frac{1}{a_j}\Big)$$

Revenind la relaţia de substituţie folosită iniţial se deduce formula de reprezentare a soluţiei ecuaţiei $x_{n+1} = \frac{a_n x_n}{x_n + b_n}$, cu $x_0 \in R^*$ aceasta fiind:

$$x_n = \frac{1}{\left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{a_j}\right)\frac{1}{x_0} + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{b_k}{a_k}\right)\frac{1}{a_j}}$$

Exemplul 6

Determinaţi soluţia generală a următoarei ecuaţi

$$x_n = \frac{3x_n}{x_n + 6}, \quad n \geq 0.$$

Se ştie că $x_0 = 0$.

$$x_n = \frac{1}{y_n}, x_{n+1} = \frac{1}{y_{n+1}} \implies \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{3\frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_n} + 6} \iff \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{3}{y_n}\frac{1}{\frac{1}{y_n} + 6} \iff$$

$$\iff \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{3}{1 + 6y_n} \iff$$

$$y_{n+1} = \frac{6}{3}y_n + \frac{1}{3} \iff y_{n+1} = 2y_n + \frac{1}{3}$$

Coeficienţii constanţi sunt $a = 2$ şi $b = \frac{1}{3}$.
Se caută soluţiile constante ale ecuaţiei

$$y_0 = 2x_0 + \frac{1}{3}.$$

Fiind $x_0 = 0$ atunci $y_0 = \frac{1}{3}$.
Efectuăm schimbarea de variabilă

$$x_n = y_n + \frac{1}{3}.$$

$x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{1}{3} \iff$
$x_{n+1} = 2y_n + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \iff$
$x_{n+1} = 2(x_n - \frac{1}{3}) + \frac{2}{3} \iff$
$x_{n+1} = 2x_n \implies$
$x_n = 2^n x_0 \implies y_n = 2^n y_0 - \frac{1}{3}$
Astfel soluţia generala a ecuaţiei este : $y_n = \frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}, \quad n \geq 0.$

Exemplul 7

Să se rezolve ecuaţia

$$x_{n+1} = (n+1)x_n + 2^n(n+1)!, \quad x_0 = 1, \text{ unde } n > 0.$$

Folosim formula determinată anterior la subcapitolul 2.2

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}(j+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\Big[\prod_{k=j+1}^{n-1}(k+1)\Big]2^j(j+1)! = n! + \sum_{j=0}^{n-1} n!2^j =$$

$$= n! + n!\sum_{j=0}^{n-1} 2^j = n!(1 + 2^n - 1) = 2^n n!.$$

În concluzie, $x_n = 2^n n!, \quad \forall n > 0.$

3 Dinamica ecuaţiilor cu diferenţe autonome de ordinul întâi

Considerăm ecuaţia cu diferenţe de ordinul întâi

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, (1)$$

unde $f : J \to R$ este o funcţie definită pe intervalul deschis, nevid $J \subset R$.
În acest capitol, vom defini noţiunile de punct fix, punct periodic pentru funcţia f, precum şi cele de stabilitate a acestora. Vom da şi noţiunea de orbită care în esenţă este o soluţie a ecuaţiei cu diferenţe (1). De asemenea, vom prezenta teoreme de stabilitate precum şi o metodă grafică pentru vizualizarea stabilitaţii. În strânsă legătură cu acestea vom prezenta metoda Newton-Raphson de aproximare a unui zerou, al unei funcţii date, precum şi metoda numerică a lui Euler pentru o ecuaţie diferenţială scalară autonomă de ordinul întâi.
Am folosit sursele bibliografice [1], [2], [3] şi [5].
Dacă fixăm un punct $x_0 = \eta \in J$, avem $x_1 = f(\eta)$.
Dacă $x_1 \in J$ atunci $x_2 = f(f(\eta)) = f^2(\eta)$.
În cazul în care şi $x_2 \in J$ atunci $x_3 = f^3(\eta)$ şi aşa mai departe pentru restul termenilor până la x_n.

Dacă $f(J) \subset J$, spunem că J este un interval invariant pentru f. Atunci pentru orice $\eta \in J$, avem $\quad x_n = f^n(\eta) \in J \quad \forall n \in N$. Cu f^n vom nota compunerea funcţiei f cu ea însăşi de n ori.

3.1 Orbită, punct fix, punct periodic

În acest paragraf vom defini câteva noţiuni importante din studiul dinamicii.

Fie $J \subset R$ un interval nevid, deschis iar $f : J \to R$ este o funcţie continuă.

Orbita

Definiţia 1 .
Orbita pozitivă a stării inițiale $\eta \in J$ *prin f este*

$$\gamma_\eta^+ = \left\{\eta, f(\eta), f^2(\eta), \ldots, f^k(\eta), \ldots\right\}.$$

Orbita poate fi calculată numai dacă f este inversabilă:

$$\gamma_\eta = \left\{\ldots f^{-k}(\eta), \ldots, f^{-2}(\eta), f^{-1}(\eta), \eta, f(\eta), f^2(\eta) \ldots\right\}.$$

Punct fix

Definiţia 2 *F*$\eta^* \in J$ *este un punct fix pentru f dacă* $f(\eta^*) = \eta^*$.

Propoziţie 1 *Dacă* η^* *este un punct fix pentru f atunci* $f^n(\eta^*) = \eta^*, \quad \forall n \geq 0$.

Demonstraţie:
Fie $n \in N^*$ fixat.
Din ipoteză avem că: $f(\eta^*) = \eta^*$.
Atunci $f^2(\eta^*) = f(f(\eta^*)) = f(\eta^*) = \eta^*$.
$f^3(\eta^*) = f(f(f(\eta^*))) = f(f(\eta^*)) = f(\eta^*) = \eta^*$
Presupunem că $f^n(\eta^*) = \eta^*$.
Demonstrăm că $f^{n+1}(\eta^*) = \eta^*$.
Avem

$$f^{n+1}(\eta^*) = f^n(f(\eta^*)) = f^n(\eta^*) = \eta^*.$$

Astfel am demonstrat prin inducţie matematică că

$$f^n(\eta^*) = \eta^*.$$

Definiţia 3 *Fie x un punct care aparţine domeniului de definiţie al lui f. Dacă există un număr pozitiv* $r \in Z$ *şi un punct fix* x^* *astfel încât*

$$f^r(x) = x^*, \quad f^{r-1}(x) \neq x^*,$$

atunci x este un eventual punct fix.

Punct fix stabil

Definiţia 4 *Fie η^* un punct fix al lui f. Spunem că η^* este un punct fix stabil pentru f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru $\mid \eta - \eta^* \mid < \delta$ să avem:*
(i) $f^n(\eta)$ e definit pentru orice $n \in N$,
(ii) $\mid f^n(\eta) - \eta^* \mid < \varepsilon$ pentru orice $n \in N$.
Punctul fix η^* este instabil dacă nu este stabil.
Punctul fix η^* este atractor, dacă există $\rho > 0$ astfel încât pentru $\mid \eta - \eta^* \mid < \rho$ să avem că $f^n(\eta)$ e definit pentru orice $n \in N$ şi că $\lim_{n\to\infty} f^n(\eta) = \eta^*$.

Definim bazinul de atracţie al punctului fix atractor ca fiind

$$A_{\eta^*} = \left\{ \eta \in R : \lim_{n\to\infty} f^n(\eta) = \eta^* \right\}.$$

Punctul fix η^* este asimptotic stabil dacă este stabil şi atractor.

Propoziţie 2 *Dacă există* $\quad \lim_{n\to\infty} f^n(\eta) = \beta, \quad \beta \in J \quad$ *, atunci $f(\beta) = \beta$.*

Demonstraţie:
Fie $x_n = f^n(\eta)$. Atunci $x_{n+1} = f(x_n)$.
Din ipoteză avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$ de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \beta$.
Trecem la limiă în relaţia $x_{n+1} = f(x_n)$ şi folosind continuitatea lui f deducem că $\beta = f(\beta)$.

Teorema 1 *Fie $\eta^* \in J$ un punct fix al lui $f : J \to R$. Presupunem că $f \in C^1(J)$.*
Dacă $\mid f^{'}(\eta^*) \mid < 1$ atunci η^* este asimptotic stabil.
Dacă $\mid f^{'}(\eta^*) \mid > 1$ atunci η^* este instabil.

Demonstraţie:
Analizăm mai întâi cazul întâi $\mid f^{'}(\eta^*) \mid < 1$.
Există $\rho > 0$ astfel încât $\mid f'(\eta) \mid < 1$ pentru $\mid \eta - \eta^* \mid \leq \rho$.

Fie $M = \sup\{| f'(\eta) | : | \eta - \eta^* | \leq \rho\} < 1$.
Folosind Teorem de medie pentru $| \eta - \eta^* | \leq \rho$ avem că

$$| f(\eta) - \eta^* | \leq M | \eta - \eta^* | < \rho.$$

Din datele menţionate anterior deducem că intervalul $(\eta^* - \rho, \eta^* + \rho)$ este invariant pentru funcţia f. Prin urmare $f^n(\eta)$ este definit pentru orice $n \in N$ şi $| \eta - \eta^* | < \rho$.
De asemenea, deducem că relaţia de mai sus asigură că în definiţia stabilitaţii lui η^* putem lua $\delta = \min(\varepsilon, \rho)$. Astfel η^* este un punct fix stabil.
Ştiind că $| f^n(\eta) - \eta^* | \leq M^n | \eta - \eta^* |$, unde $n \in N$, atunci avem $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$, cu $0 \leq M < 1$. Astfel $\lim_{n\to\infty} | f^n(\eta) - \eta^* | = 0$ de unde rezulă că η^* este atractor.
În cazul al doilea $| f^{'}(\eta^*) | > 1$ există $\rho > 0$ astfel încât $| f'(\eta) | > 1$ pentru $\eta - \eta^* | \leq \rho$.
Fie mulţimea $m = \inf | f'(\eta) |:| \eta - \eta^* | \leq \rho > 1$.
Folosind Teorem de medie pentru $| \eta - \eta^* | \leq \rho$ avem că

$$| f(\eta) - \eta^* | \geq m | \eta - \eta^* | .$$

Presupunem, prin absurd, că η^* este stabil. Atunci pentru $\varepsilon = \rho$ există $\delta \leq \rho$ astfel încât, pentru $| \eta - \eta^* | < \rho$ să avem $| f^n(\eta) - \eta^* | < \rho$ pentru orice $n \in N$.
Ştiind că $\rho > | f^n(\eta) - \eta^* | \geq m^n | \eta - \eta^* |$ avem $\lim_{n\to\infty} m^n = \infty$, unde $m > 1$. Astfel se contrazice relaţia de mai sus. Prin urmare, η^* este instabil.

Exemplul 8

Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 3x$. Să se determine punctele fixe si stabilitatea acestora.

Punctele fixe sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = x$, adică $x^2 + 2x = 0$. Atunci avem $\eta_1^* = 0$ şi $\eta_2^* = -2$.
Derivata funcţiei f este $f'(x) = 2x + 3$.
Aplicăm teorema de stabilitate

$$| f'(\eta_1^*) |=| f'(0) |= 3 > 1$$

$$| f'(\eta_2^*) |=| f'(-2) |=| -1 |= 1.$$

În concluzie, punctul fix $\eta_1^* = 0$ este instabil iar pentru η_2^* nu putem aplica Teorema 1.

Exemplul 9

Să se determine punctele fixe si stabilitatea acestora pentru funcţia

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{8}.$$

Primul pas constă în aflarea punctelor fixe. Se rezolvă ecuaţia $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff x^2 + \frac{1}{8} = x$$

Punctele fixe sunt $\eta_1^* = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ şi $\eta_2^* = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Derivata funcţiei f este: $f'(x) = 2x$.
Al doilea pas reprezintă determinarea stabilitaţiilor punctelor fixe. Pentru acest pas aplicăm teorema de stabilitate.

$$| f'(\eta_1^*) |=| f'(\frac{2-\sqrt{2}}{4}) |= \frac{2-\sqrt{2}}{2} < 1$$

Punctul η_1^* este asimptotic stabil.

$$| f'(\eta_2^*) |=| f'(\frac{2+\sqrt{2}}{4}) |= \frac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$$

Punctul η_2^* este instabil.

Punct periodic

Definiţia 5 *Fie* $\eta^* \in R$ *şi* $p \in N, \quad p \geq 2. \quad \eta^*$ *este un punct p-periodic pentru f dacă* $f^p(\eta^*) = \eta^*$ *şi* η^* *nu este un punct fix pentru* $f, f^2, \dots, f^{p-1}$.

Observaţie 1 *Fie* η^* *un punct p-periodic pentru f. Unica soluţie a problemei cu valoare iniţială*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = \eta^*$$

este $\eta^*, f(\eta^*), f^2(\eta^*), \dots, f^{p-1}(\eta^*), \eta^*, f(\eta^*), f^2(\eta^*), \dots, f^{p-1}(\eta^*), \eta^*, \dots$. *Oribita pozitivă este* $\gamma_{\eta^*}^+ = \left\{\eta^*, f(\eta^*), \dots, f^{p-1}(\eta^*)\right\}$. *Aceasta se numeşte ciclu p-periodic.*
Mai observăm că pentru orice $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ *avem că* $\xi^* = f^n(\eta^*)$ *este un punct p-periodic. Într-adevăr avem:*

$$\xi^* = f^n(\eta^*) = f^n(f^p(\eta^*)) = f^n(\eta^*) = \xi^*.$$

Definiţia 6 *Fie* η^* *un punct p-periodic pentru f. Se spune că* $\gamma_{\eta^*}^+$ *este un punct ciclu p-periodic stabil/ instabil/ atractor pentru f daca* η^* *este stabil/ instabil/ atractor punct fix pentru* f^p.

Exemplul 10

Să se afle punctele fixe si punctele 2-periodice ale funcţiei

$$f : R \to R, \quad f(x) = 1 - 2x^2.$$

De asemenea, să se studieze stabilitatea lor.
Pentru a afla punctele fixe rezolvăm ecuaţia $f(x) = x$.
Astfel înlocuind datele primite in enunţ obţinem:

$$1 - 2x^2 = x \iff 2x^2 + x - 1 = 0$$

Punctele fixe sunt:

$$\eta_1^* = \frac{1}{2} \text{ şi } \eta_2^* = -1.$$

Pentru a afla punctele 2-periodice rezolvăm ecuaţia $f^2(x) = x$. Avem

$$f^2(x) = (fof)(x) = f(f(x)) = 1-2(f(x))^2 = 1-2(1-2x^2)^2 = 1-2(1-4x^2+4x^4) \Longrightarrow$$

$$f^2(x) = -8x^4 + 8x^2 - 1, \forall x \in R$$

$$f^2(x) = x \iff -8x^4 + 8x^2 - 1 = x \iff 8x^4 - 8x^2 + 1 + x = 0$$

Folosim faptul că punctele fixe pentru f sunt puncte fixe pentru f^2. Deci -1 şi $\frac{1}{2}$ sunt rădăciniile ecuaţiei $f^2(x) = x$.
În continuare factorizăm polinomul de grad patru din ecuaţia de mai sus

$$8x^4 - 8x^2 + 1 + x = (2x^2 + x - 1)q$$

$$8x^4-8x^2+1+x = 4x^2(2x^2+x-1)-2x(2x^2+x-1)+2x^2-2x-4x^2+x+1 =$$

$$(2x^2 + x - 1)(4x^2 - 2x - 1).$$

Atunci punctele fixe ale lui f^2 sunt rădăcinile polinomului $q = 4x^2 - 2x - 1$. Găsim că aceastea sunt: $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ şi $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
Verificare:

$$f(\frac{1-\sqrt{5}}{4}) = 1 - 2(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^2 = 1 - 2\frac{1-2\sqrt{4}+5}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$f(\frac{1+\sqrt{5}}{4}) = 1 - 2(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2 = 1 - 2\frac{1+\sqrt{5}+5}{16} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

În concluzie, punctele 2-periodice sunt $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ iar ciclul 2-periodic este $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Ne propunem să studiem stabilitatea punctelor fixe şi a ciclului 2-

periodic.
Derivata funcţiei f este: $f'(x) = -4x$.
Se înlocuiesc punctele fixe şi se obţine:
$f'(\eta_1^*) = f'(\frac{1}{2}) = -2$
$f'(\eta_2^*) = f(-1) = 4$
Se aplică Teorema 1.
$\mid f'(\frac{1}{2}) \mid = 2 > 1 \implies$ punctul fix $\eta_1^* = \frac{1}{2}$ este instabil.
$\mid f'(-1) \mid = 4 > 1 \implies$ punctul fix $\eta_2^* = -1$ este instabil.
Folosim calculele folosite mai sus.
Avem: $f^2(x) = -8x^4 + 8x^2 - 1$
Astfel derivata acestei funcţii este $(f^2)'(x) = -32x^3 + 16x$.
Se înlocuieşte punctul 2-periodic:
$(f^2)'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = -32\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^3 + 16\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = -16\frac{1-\sqrt{5}}{4}\left[2\frac{1-2\sqrt{5}+5}{16} - 1\right] = -4(1-\sqrt{5}\frac{3-\sqrt{5}-4}{4}) = (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = -4.$
Atunci $\mid (f^2)'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \mid = 4 > 1$.
În concluzie, ciclul 2-periodic $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$ este instabil.

3.2 Iteraţii grafice şi stabilitatea punctelor fixe

Diagrama scară reprezintă o vizualizare grafică a dinamicii generate de o ecuaţie cu diferenţe de forma $x_{n+1} = f(x_n)$.
Mai precis, avem nevoie de reprezentarea grafică a funcţiei f şi a primei bisectoare, adică a dreptei de ecuaţie $y = x$. Reprezentăm $x_0 = \eta$ pe axa de coordonate O_x. Intersectăm dreapta verticală $x = \eta$ cu graficul lui f, G_f, şi obţinem punctul de coordonate $(\eta, f(\eta))$. Intersectăm dreapta orizontală $y = f(\eta)$ cu prima bisectoare şi obţinem punctul de coordonate $f(\eta), f(\eta))$. Proiectăm acest punct pe axa de coordonate O_x şi obţinem $x_1 = f(\eta)$.
Se reia acest procedeu de câte ori este posibil, de preferat de cât mai multe ori, obţinând astfel pe axa O_x elementele $x_0,\ x_1,\ x_2 \ldots$ ale şirului $x_n = f^n(\eta)$, care este soluţia problemei $x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = \eta$.

Vom studia comportarea orbitelor definite de funcţia $f : R \to R$,

$f(x) = x^2$. Mai precis pentru fiecare $\eta \in R$, fixat, vom studia comportarea şirului (x_n) definit de

$$x_{n+1} = x_n^2,\ n \geq 0,\ x_0 = \eta.$$

Mai întâi căutăm punctele fixe ale lui f, adică rezolvăm ecuaţia $f(x) = x$ care este echivalentă cu $x^2 = x$. Deducem că punctele fixe ale lui f sunt

$$\eta_1^* = 0 \text{ şi } \eta_2^* = 1.$$

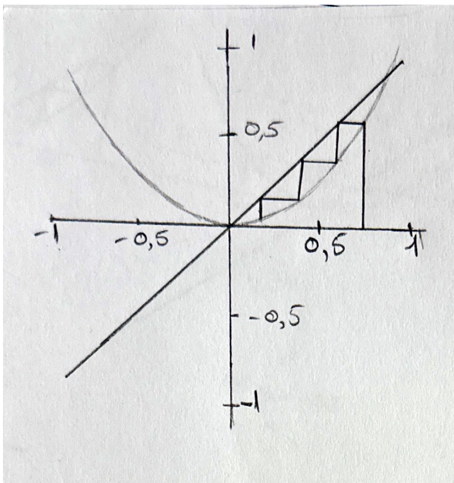
Derivata funcţiei f este: $f'(x) = 2x$.
Aplicăm Teorema 1 şi obţinem:

$$\mid f'(\eta_1^*) \mid = \mid f'(0) \mid = 0 < 1 \text{ şi}$$

$$\mid f'(\eta_2^*) \mid = \mid f'(1) \mid = 2 > 1.$$

Astfel, punctul fix η_1^* este asimptotic stabil, iar η_2^* este un punct instabil.
Dacă pornim de la $\eta = -1$ obţinem $x_1 = 1$, prin urmare şirul, până la urmă, este constant deoarece 1 este punct fix.
Interesul nostru este să estimăm bazinul de atracţie al punctului fix atractor $\eta_1^* = 0$. Vom vedea că diagrama scară ne va fi utilă. Reprezentăm graficul f şi prima bisectoare.
În figura de mai jos am pornit cu $\eta = 0.8$ şi am reprezentat diagrama scară. Se pare că şirul care porneşte de la $\eta = 0.8$ este strict descrescător şi are limita 0.
De asemenea putem intui că diagrama scară ar avea aceeaşi comportare dacă am porni de la un $\eta \in (0, 1)$, şi până la urmă chiar dacă am porni cu $\eta \in (-1, 0)$. De asemenea, folosind diagrama scară, pornind de la un $\eta \in R \setminus (-1, 1)$, obţinem un şir nemărginit.

Putem conluziona că $A_0 = (-1, 1)$.



Exemplul 11

Fie funcţia $f(x) = x^3$. Să se determine punctele fixe şi stabilitatea lor. Să se afle bazinul de atracţie al punctului fix atractor.
În primul rând, vom căuta punctele fixe ale lui f, adică vom rezolva ecuaţia $f(x) = x$ care este echivalentă cu $x^3 = x$.
Astfel, punctele fixe ale lui f sunt:

$$\eta_1^* = -1, \eta_2^* = 0 \text{ şi } \eta_3^* = 1.$$

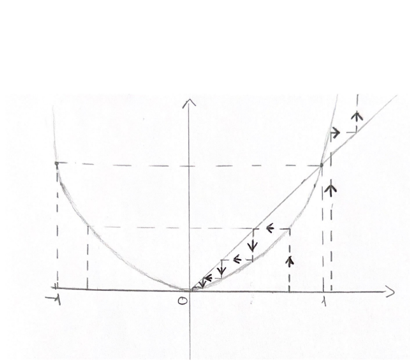
Derivata funcţiei f este: $f'(x) = 3x^2$.
Aplicăm Teorema de stabilitate:

$$| f'(\eta_1^*) | = 3 > 1$$

$$| f'(\eta_2^*) | = 0 < 1$$

$$| f'(\eta_3^*) | = 3 > 1.$$

Punctele fixe η_1^*, η_3^* sunt instabile iar punctul η_2^* este atractor.



Nu în ultimul rând, interesul nostru este să estimăm bazinul de atracţie al punctului fix atractor η_2^*. Pentru a determina bazinul de atracţie reprezentăm graficul lui f şi prima bisectoare, mai exact diagrama scară.

Din figura anterioară observăm că şirul care porneşte din orice punct $\eta \in (-1, 1)$ este strict descrescător iar dacă $\eta > 1$ atunci şirul este crescător. Putem intui că diagrama scară ar avea aceeaşi comportare dacă am porni de la $\eta \in (0, 1)$ sau de la $\eta \in (-1, 0)$.
Astfel, putem concluziona că $A_0 = (-1, 1)$.

Exemplul 12

Fie funcţia
$$f(x) = 5 - \frac{6}{x}.$$
Să se determine punctele fixe, ciclurile 2-periodice şi stabilitatea lor.
Pentru a afla punctele fixe rezolvăm ecuaţia $f(x) = x$, care este echivalentă cu $5 - \frac{6}{x} = x \iff x^2 - 5x + 6 = 0$.
Punctele fixe sunt:
$$\eta_1^* = 2 \text{ şi } \eta_2^* = 3.$$

Pentru a afla punctele 2-periodice trebuie să rezolvăm ecuaţia $f^2(x) = x$.
$f^2(x) = \frac{36}{x^2} - \frac{60}{x} + 25, \forall x \in R$
Avem $\frac{36}{x^2} - \frac{60}{x} + 25 = x \iff x^3 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$.
Punctele 2-periodice sunt:
$$\eta_1^{**} = 1, \eta_2^{**} = 12 - 6\sqrt{3} \text{ şi } \eta_3^{**} = 12 = 6\sqrt{3}.$$

Derivata funcţiei f este: $f'(x) = -\frac{6}{x^2}$.
Aplicăm teorema 1 şi obţinem:
$\mid f'(\eta_1^*) \mid = \mid -\frac{6}{4} \mid = \frac{3}{2} > 1$, unde η_1^* este un punct instabil
$\mid f'(\eta_2^*) \mid = \mid -\frac{2}{3} \mid = \frac{2}{3} < 1$, unde η_2^* este un punct atractor.
Derivata funcţiei f^2 este : $(f^2)'(x) = \frac{60x-72}{x^3}$.

Înlocuim puntele 2-periodice şi aplicăm teorema 1:
$\mid (f^2)'(1) \mid = \mid -12 \mid = 12 > 1$
$\mid (f^2)'(12-6\sqrt{3}) \mid = \frac{9+5\sqrt{3}}{3} > 1$
$\mid (f^2)'(12+6\sqrt{3}) \mid = \frac{9-5\sqrt{3}}{3} < 1$
În conclzie, ciclul $\{1, 12-6\sqrt{3}\}$ este instabil.

Exemplul 13

Fie $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$. Se cere:
a)Să se găsească punctele fixe ale funcţiei f şi să se studieze stablitatea acestora.
b)Să se determine punctele 2-peridice şi să se studieze stablitatea acestora.
Soluţie:
a)Pentru a determina punctele fixe se rezolvă ecuaţia: $f(x) = x$.
Înlocuind datele primite in enunţ obţinem $x^2 - 1 = x$. Astfel punctele fixe sunt $\eta_1^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\eta_2^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Pentru a studia stabilitatea punctelor se derivează funcţia f: $f'(x) = 2x$.
Se aplică teorema de stabilitate:

$$\mid f'\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) \mid = \mid 1+\sqrt{5} \mid = \sqrt{5}+1 > 1 \text{ punctul } \eta_1^* \text{ este instabil}$$

$$\mid f'\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) \mid = \mid 1-\sqrt{5} \mid = \sqrt{5}-1 > 1 \text{ punctul } \eta_2^* \text{ este instabil.}$$

Astfel, ambele puncte sunt instabile.
b)$f^2(x) = f(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$
Derivata funcţiei f^2 este:

$$(f^2)'(x) = 4x^3 - 4x.$$

Cele două puncte fixe ale funcţiei f trebuie sa fie puncte fixe şi ale funcţiei f^2. Pentru a determina aceste puncte trebuie să se rezolve ecuaţia:

$$f^2(x) = x.$$

Înlocuind datele primite obţinem:

$$x^4 - 2x^2 - x = 0 \iff (x^2 - x - 1)(x^2 + x) = 0 \implies$$

$$\eta_1^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \eta_2^{**} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \eta_3^{**} = 0, \eta_4^{**} = -1$$

Funcţia f^2 are patru puncte fixe, dintre care două sunt puncte fixe şi pentru f iar celelalte două sunt puncte 2-periodice. Deci $\{0, -1\}$ este singurul ciclu 2-periodic al lui f.
Se înlocuiesc punctele periodice:

$$(f^2)'(0) = 0, \quad (f^2)'(-1) = 0.$$

În concluzie, cele două puncte 2-periodice sunt atractoare. Deci ciclul 2-periodic $\{0, -1\}$ este atractor.

3.3 Metoda Newton-Raphson

Fie $g : I \to R$, $I \subset R$ un interval nevid, deschis. Presupunem că $\exists \quad \eta^* \in I$ astfel încât $g(\eta^*) = 0$ şi $g'(\eta^*) \neq 0$. În cazul în care nu putem găsi valoarea exactă a lui η^*, ne propunem să aproximăm valoarea acestui punct. Mai precis, avem nevoie de cel puţin un şir (x_n) astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = \eta^*$.
În continuare dăm o intuiţie geometrică a acestui şir prin medota Newton-Raphson. Reprezentăm graficul lui g şi luăm x_0 pe axa de coordonate O_x. Intersectăm dreapta verticală cu axa lui g şi obţinem punctul de coordonate $(x_0, g(x_0))$. Ducem tangenta la graficul lui g în

acest punct. Obţinem dreapta de ecuaţie

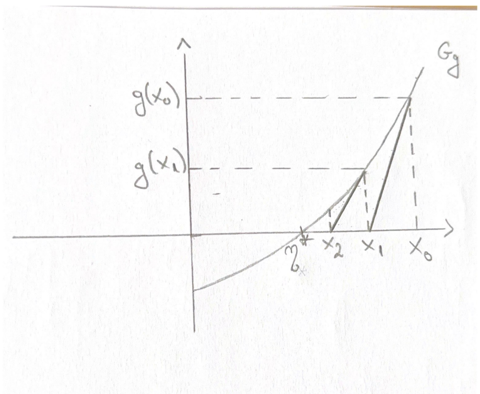
$$l_0 \,:\, y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Fie x_1 abscisa punctului de intersecţie dintre l_0 şi axa O_x. Înlocuind $x = x_1$ şi $y = 0$ în ecuaţia lui l_0 obţinem $-g(x_0) = g'(x_0)(x_1 - x_0)$, adică

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Repetând această procedură obţinem un şir x_n dat de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n \geq 0, \text{ cu } x_0 \text{ dat.}$$



Teorema 2 *Fie $g : V \to R$, $g \in C^2(V)$, $V \subset R$ un interval deschis şi $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V$. Presupunem că $\exists \quad \eta^* \in V$ astfel încât $g(\eta^*) = 0$. Atunci există $\rho > 0$ astfel încât oricare ar fi x_0 cu proprieteatea $\mid x_0 - \eta^* \mid < \rho$ avem $\lim_{n\to\infty} x_n = \eta^*$, unde $(x_n)_{n\geq 1}$, este dat de ecuaţia*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Demonstraţie:
Fie $f : V \to R$, $f \in C^1(V)$, $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.
Ecuaţia menţionată anterior se scrie $x_{n+1} = f(x_n)$. Se ştie că x_0 este dat. Pentru a demonstra acestă teoremă este suficient să arătăm că η^* este un punct fix atractor pentru f.
Avem

$$f(\eta^*) = \eta^* - \frac{g(\eta^*)}{g'(\eta^*)} = \eta^*,$$

adică η^* este un punct fix pentru funcţia f.
Apicăm metoda liniarizării

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2}$$

$$f(\eta^*) = 1 - (1 - 0) = 0.$$

Cum $\mid f'(\eta^*) \mid < 1$ avem că η^* este un punct fix atractor pentru f.

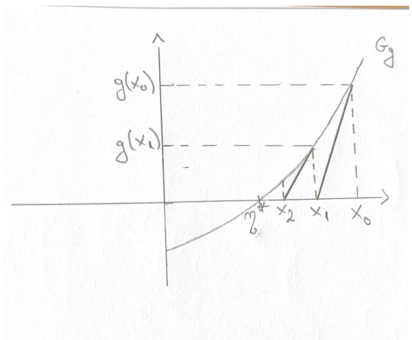
Exemplul 14

Fie $g : (0, \infty) \to R$ dată de $g(x) = x^2 - 3, \quad x \in (0, \infty)$. Ne propunem să determinăm bazinul de atracţie al metodei Newton-Raphson pentru a aproxima pe $\sqrt{x}$, unicul zerou al funcţiei g.
$g(x) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$ este singurul zerou al funcţiei g deoarece $x \in (0, \infty)$.
Derivăm funcţia g în funcţie de x: $g'(x) = 2x \neq 0, \quad \forall x > 0$.

$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x^2-3}{2x} = x - \frac{x}{2} + \frac{3x^{-1}}{2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$
Folosind teorema Newton-Raphson avem că: $\exists \quad \rho > 0$ astfel încât oricare ar fi x_0 cu proprietatea $\mid x_0 - \sqrt{3} \mid < \rho$ avem $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$, unde $(x_n)_{n\geq 1}$ e dat de:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}\frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0.$$

Mai întâi aflăm bazinul de atracţie pentru punctul $\sqrt{3}$ prin intermediul interpretării geometrice a metodei Newton-Raphson.



O altă metodă de a găsi bazinul de atracţie pentru punctul $\sqrt{3}$ foloseşte diagrama scară pentru fiecare funcţie f al cărei unic punct este $\sqrt{3}$.
$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2x}$, $f : (0, \infty) \to R$.
Se reprezintă graficul funcţiei f.
$f(x) = x \iff \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^{-1} = x \iff \frac{3}{2x} = \frac{x}{2} \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$ este singurul punct fix al funcţiei f deoarece $x \in (0, \infty)$.
$f(x) = \frac{x^2+3}{2x} > 0, \quad \forall x > 0.$
Derivăm f in funcţie de x: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{x^2-3}{2x^2}, \quad x \in R.$

Astfel $A_{\sqrt{3}} = (0, \infty)$, după cum rezulă folosind diagrama scară.

3.4 Criterii de stabilitate a punctelor fixe

Teorema 3 *Se consideră ecuaţia* $x_{n+1} = f(x_n)$ *pentru care* $f : I \to I$, $I \subseteq R$ *interval închis. Dacă f este* $\alpha-$*contracţie, adică există* $\alpha \in [0,1)$ *astfel încât*

$$| f(x) - f(y) | \leq \alpha | x - y |, \forall x, y \in I,$$

atunci:
i) ecuaţia $x_{n+1} = f(x_n)$ *are un unic punct fix* $x^* \in I$.
ii) punctul de echilibru x^* *este asimptotic stabil:*

$$| f^n(x_0) - x^* | \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} | f(x_0) - x_0 |, \forall x_0 \in I.$$

Teorema 4 *Se consideră ecuaţia* $x_{n+1} = f(x_n)$ *pentru care* $f : I \to I$, $I \subseteq R$ *interval. Presupunem că:*
i) ecuaţia $x_{n+1} = f(x_n)$ *are un unic punct fix* $x^* \in I$
ii) f este $\alpha-$*cvasicontracţie, adică există* $\alpha \in [0,1)$ *astfel încât*

$$| f(x) - x^* | \leq \alpha | x - x^* |, \forall x \in I.$$

Atunci punctul de echilibru x^* *este asimptotic stabil*

$$| f^n(x_0) - x^* | \leq \alpha^n | x_0 - x^* |, \forall x_0 \in I.$$

Exemplul 15

Se consideră funcţie $f_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$ definită pe intervalul $[0,1]$, unde $\lambda \in (0, \frac{3}{4})$. Aflaţi punctele fixe ale lui $f_\lambda(x)$ şi determinaţi stabilitatea acestora.
Pentru a găsi punctul fix $f_\lambda(x)$, se rezolvă ecuaţia $1 - \lambda x^2 = x \iff \lambda x^2 + x - 1 = 0$.
Există două puncte fixe: $\eta_1^* = \frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ şi $\eta_2^* = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$.
Se observă că: $f'_\lambda = -\lambda 2x$.
Prin urmare, $|f'_\lambda(\eta_1^*)| = 1 + \sqrt{1+\lambda 4} > 1$, η_1^* este instabil.
$|f'_\lambda(\eta_2^*)| = \sqrt{1+\lambda 4} - 1 < 1$ în cazul în care $\sqrt{1+\lambda 4} < 2$. Astfel $\lambda < \frac{3}{4}$.

Prin urmare, η_2^* este asimptotic stabil.

3.5 Stabilitatea punctelor periodice

Teorema 5 *Criteriul de stabilitate a ciclului p-periodic:*
Fie $\eta^* \in R$ este un punct p-periodic pentru ecuaţia $x_{n+1} = f(x_n)$
(a) Dacă $|f'(\eta^*)f'(f(\eta^*))f'(f^2(\eta^*))\dots f'(f^{p-1}(\eta^*))| < 1$ atunci ciclul p-periodic $\gamma_{\eta^*}^+ = \left\{\eta^*, f(\eta^*), \dots, f^{p-1}(\eta^*)\right\}$ este local asimptotic stabil;
(b) Dacă $|f'(\eta^*)f'(f(\eta^*))f'(f^2\eta^*))\dots f'(f^{p-1}(\eta^*))| > 1$ atunci ciclul p-periodic $\gamma_{\eta^*}^+ = \left\{\eta^*, f(\eta^*), \dots, f^{p-1}(\eta^*)\right\}$ este instabil.

Proprietate 1 *Se presupune că $f \in C^1(R)$ şi $\{\eta_1^*, \eta_2^*\}$ sunt puncte 2-periodice pentru f.*
i) Dacă $\mid f'(\eta_1^*) \cdot f'(\eta_2^*) \mid < 1$ atunci ciclul 2-periodic $\{\eta_1^*, \eta_2^*\}$ este atractoar.
ii) Dacă $\mid f'(\eta_1^*) \cdot f'(\eta_2^*) \mid > 1$ atunci ciclul 2-periodic $\{\eta_1^*, \eta_2^*\}$ este instabil.

Exemplul 16

Pentru ecuaţia $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ avem $f(x) = x^2 - 1$ unde punctele fixe sunt soluţiile ecuaţiei:

$$x = f(x) \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff \eta_1^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \eta_2^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Astfel, punctele fixe sunt $\eta_1^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $\eta_2^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Pentru a determina punctele 2-periodice se rezolvă ecuaţia $f^2(x) = x$.
Cum $f^2(x) = f(f(x)) = (x^2-1)^2 - 1$ atunci

$$x = f^2(x) \iff x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \iff \eta_1^{**} = 0, \eta_2^{**} = -1,$$

$$\eta_3^{**} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \eta_1^*, \quad \eta_4^{**} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \eta_2^*.$$

Ecuaţia admite două puncte 2-periodice $\eta_1^{**} = 0, \eta_2^{**} = -1$ deoarece celelalte două puncte sunt eliminate fiind regăsite şi printre punctele fixe ale lui f. Ciclul 2-periodic corespunzător este $\{0, -1\}$. Cum

$$|f'(0)f'(-1)| = 0 < 1,$$

rezultă că ciclul 2-periodic este asimptotic stabil. Astfel, dacă valoarea de start x_0 este suficient de aproape de 0 sau -1 iar şirul $(f^n(x_0))_{n>0}$ generat de ecuaţia cu diferenţe $x_{n+1} = x_n^2 - 1$, atunci tinde către soluţia periodică (0,-1,0,-1,...).

3.6 Metoda numerica a lui Euler pentru ecuaţii diferenţiale scalare

Se consideră ecuaţia diferenţială scalară

$$x' = f(x), x(0) = x_0$$

unde $f \in C^1(R)$ şi $x_0 \in R$ fixat.
Pentru a aproxima soluţia acestei ecuaţii se recurge la metode numerice. Fie numerele reale $t_0, t_1, \cdots, t_n, \cdots$, cu dimensiunea pasului $h = t_{n+1} - t_n$. Pentru $t_n \leq t < t_{n+1}$ se aproximează $x(t)$ cu $x(t_n)$ şi $x'(t)$ cu $\frac{x(t_{n+1})-x(t_n)}{h}$. Ecuaţia $x'(t) = f(x(t))$ devine:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(x(t_n)), \quad n \geq 0.$$

Aceasta poate fi scrisă într-o formă mai simplă:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad n \geq 0.$$

Ecuaţia găsită anterior este de forma $x_{n+1} = g(x_n)$ cu

$$g(x) = x + hf(x)$$

Cu ajutorul valorii iniţiale x_0 se pot genera valorile $x_1, x_2, \cdots$. Aceste valori aproximează soluţia ecuaţiei diferenţiale pentru punctele $t_1, t_2, \cdots$ în cazul în care h este suficient de mic.

Exemplul 17

Fie Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = 0.7x^2(t) + 0.7, \quad x(0) = 1$$

unde $t \in [0, 1]$. Utilizând metoda separării variabilelor, se obține:

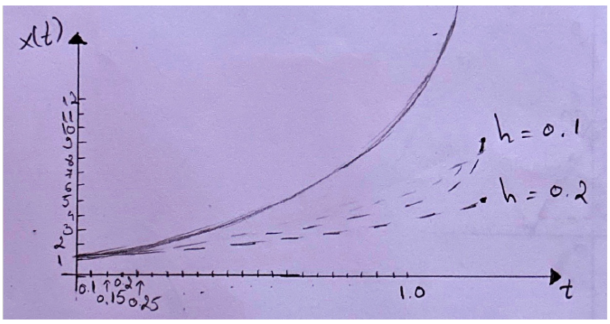
$$\arctan(x(t)) = 0.7t + c.$$

Folosind condiţia iniţială $x(0) = 1$ rezultă $c = \frac{\pi}{4}$. Soluţia exactă a Problemei Cauchy este dată de $x(t) = \tan(0.7t + \frac{\pi}{4})$.

Ecuaţia cu diferenţe care corespunde metodei Euler este:

$$x_{n+1} = x_n + 0.7(x_n^2 + 1)h, \quad x_0 = 1.$$

$x_1 = 1 + 0.7 \cdot 2h = 1 + 1.4h$
$x_2 = 1 + 0.7[(1 + 1.4h)^2 + 1]h = 1 + 1.4h + 2.8h^2 + 1.96h^3$
$\dots$



Fie pasul $h = 0.1$, înlocuind în şirul x_n obţinem:
$x_1 = 1.14$
$x_2 = 1.301$

$x_3 = 1.489$

$\ldots$

În concluzie, se observă din diagrama anterioară cu cât pasul este mai mic, cu atât aproximarea este mai bună.

Exemplul 18

Se consideră ecuaţia

$$x' = x \text{ şi } x(0) = 1.$$

Să se determine formula numerică Euler pentru pasul $h > 0$.
Fie $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $h > 0$. Avem $t_{k+1} = t_k + h$ şi $x_{k+1} = x_k + hx_k$.
Astfel, $t_k = kh$ şi $x_{k+1} = (1 + h)x_k, \quad x_0 = 1$.
În concluzie, avem

$$t_k = kh \text{ şi } x_k = (1 + h)^k, \quad k \geq 0.$$

4 Studiul funcţiei Cort

Referinţele bibliografice folosite pentru studiul funcţiei Cort sunt: [1], [2], [4] şi [5].

Funcţia Cort este funcţia $T : [0,1] \to R$,

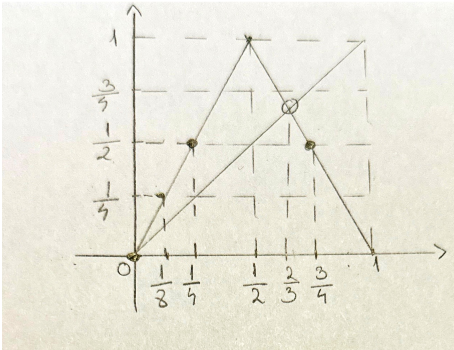
$$T(x) = 1- \mid 2x - 1 \mid, \quad \forall x \in [0,1].$$

Obervăm că:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{pentru } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \text{pentru } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Pentru a demonstra proprietăţile funcţiei cort vom formula următoarea problemă.

a) Să se realizeze graficul funcţiei T. Este $\eta_1^* = 0$ un punct fix? Să se găsească toate punctele fixe ale funcţiei T şi să se arate că sunt instabile.
b) Să se calculeze orbitele care corespund stărilor iniţiale: $\eta = \frac{3}{4}$, $\eta = \frac{3}{8}$, $\eta = \frac{3}{2^n}, \quad n \geq 2$.
c) Câte soluţii au ecuaţiile: $T(x) = 0, \quad T(x) = 1, \quad T(x) = \frac{1}{2}, T^2(x) = 0, \quad T^2(x) = 1, \quad T^2(x) = \frac{1}{2}$?
d) Să se calculeze $T^2(x)$.
e) Să se reprezinte grafic funcţiile T^2 şi T^3.
f) Să se arate că T are o orbită 2-periodică şi două orbite 3-periodice. Să se justifice că toate sunt instabile.
Soluţie:
a) Deoarece $T(0) = 0$ deducem că $\eta_1^* = 0$ este un punct fix al funcţiei T.
Pentru a determina restul punctelor fixe se rezolvă ecuaţia: $2(1-x) = x$, cu $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.
În concluzie, $\eta_2^* = \frac{2}{3}$ este un alt punct fix pentru funcţia T.



Pentru a determina că punctele fixe sunt instabile folosim Teorema 1.

Derivata funcţiei T este: $T'(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -2 & , \quad x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Prin urmare, $\mid T'(x) \mid = 2 > 1, \forall x \in [0, 1]$.

Astfel, punctele fixe η_1^*, η_2^* sunt instabile.

b) Fie $\eta = \frac{3}{4}$. Avem $T(\eta) = T(\frac{3}{4}) = 1 - \mid \frac{6}{4} - 1 \mid = \frac{1}{2}$. Înlocuind datele obţinute rezultă $T(\frac{1}{2}) = 1 \implies T(1) = 0$

Astfel, orbita este $\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \cdots\right\}$.

Fie $\eta = \frac{3}{8}$. Înlocuind avem $T(\frac{3}{8}) = 1 - \mid \frac{6}{8} - 1 \mid = \frac{3}{4}$.

Orbita este $\left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \cdots\right\}$.

Fie $\eta = \frac{3}{2^n}$ şi $n \geq 3$.

Dacă înlocuim in funcţia T obţinem: $T(\frac{3}{2^n}) = 2\frac{3}{2^n} = \frac{3}{2^{n-1}}$. Deoarece $\frac{3}{2^n} < \frac{1}{2}$ atunci orbita este $\left\{\frac{3}{2^n}, \frac{3}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \cdots\right\}$.

c) $T(x) = 0$ are două soluţii 0 şi 1.

$T(x) = 1$ are o singură soluţie $\frac{1}{2}$.

$T(x) = \frac{1}{2}$ are două soluţii $\frac{1}{4}$ şi $\frac{3}{4}$.

$T(T(x)) = 0$ se poate scrie ca fiind $T(x) = 0$ sau $T(x) = 1$. Astfel obţinem $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

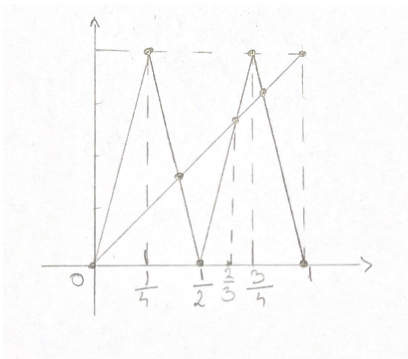
$T(T(x)) = 1$ reprezintă $T(x) = 1$ şi $x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$.

$T(T(x)) = \frac{1}{2}$ această funcţie se poate scrie sub formă de două funcţii $T(x) = \frac{1}{4}$ sau $T(x) = \frac{3}{4}$. În final, $x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right\}$

d) $T^2(x) = T(T(x)) = \begin{cases} 2T(x) & T(x) \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2T(x) & T(x) \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

$$= \begin{cases} 4x & \text{pentru } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2(1-2x) & \text{pentru } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4(x-\frac{1}{2} & \text{pentru } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & \text{pentru } \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

e) Datorită punctului c) rezolvat anterior se cunoaşte: $T^2(0) = T^2(\frac{1}{2}) = T^2(1) = 0$ şi $T^2(\frac{1}{4}) = T^2(\frac{3}{4}) = 1$.
Din rezultatele obţinute la punctul d) se ştie că T este linear pe intervalele $(0, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, 1)$.
Prin urmare T^2 are patru puncte fixe, două fiind puncte fixe şi pentru T, acestea fiind 0 şi $\frac{2}{3}$.



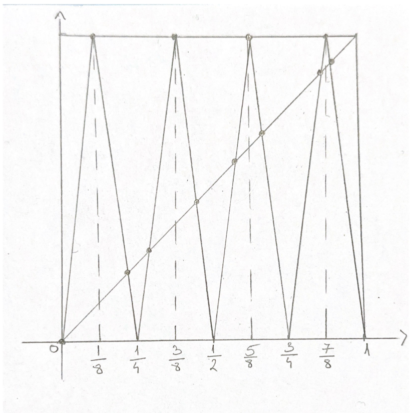
Pentru a realiza graficul funcţiei T^3, ecuaţile $T^3(x) = 0, \quad T^3(x) = 1$ trebuie rezolvate.

$$T^3(x) = 0 \iff T^2(T(x)) = 0 \iff T(x) \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Astfel, $x \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$.

$$T^3(x) = 1 \iff T^2(T(x)) = 1 \iff T^2(x) = \frac{1}{2}$$

Prin urmare, $x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\}$.
Astfel T^3 este linear pe toate intervalele:
$(0, \frac{1}{8}), (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}), (\frac{3}{8}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}), (\frac{5}{8}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{7}{8}), (\frac{7}{8}, 1)$.



T^3 are opt puncte fixe.
f) T^2 are două puncte fixe care nu sunt puncte fixe si pentru funcţia T. Acestea formeză o orbită 2-periodică pe T. Astfel, T are o orbită unică 2-periodică: $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$.
Deoarece $\mid T'(\frac{2}{5})T'(\frac{4}{5}) \mid = 4 > 1$, acest ciclu este instabil.
Funcţia T^3 are opt puncte fixe şi două cicluri 3-periodice. Două dintre aceste puncte sunt fixe pe T. Ambele cicluri sunt instabile $C_1 = \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$, $C_2 = \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$.
$T(\frac{2}{7}) = 1 - \mid -\frac{3}{7} \mid = \frac{4}{7}$
$T(\frac{4}{7}) = 1 - \mid \frac{1}{7} \mid = \frac{6}{7}$
$T(\frac{6}{7}) = 1 - \mid \frac{5}{7} \mid = \frac{2}{7}$
Astfel am determinat că ciclul $C_1 = \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ este 3-periodic.
$T(\frac{2}{9}) = 1 - \mid -\frac{5}{9} \mid = \frac{4}{9}$
$T(\frac{4}{9}) = 1 - \mid -\frac{1}{9} \mid = \frac{8}{9}$

$T(\frac{8}{9}) = 1- \mid \frac{7}{9} \mid = \frac{2}{9}$
Astfel ciclul $C_2 = \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ este 3-periodic.
De asemena, cum $T'(x) = 2$ este un numar natural şi $\mid T'(x) \mid = 2 > 1$ atunci toate ciclurile sunt instabile.

Următorul rezultat concentrează proprietăţile funcţiei cort. Mare parte din ele au fost demonstrate înainte, dar vom adăuga şi alte câteva fără demonstraţie.

Teorema 6 *(i) T are două puncte fixe anume 0 şi* $\frac{2}{3}$*.*
(ii) Fie $r, k \in N^*$ *astfel încât* $\frac{r}{2^k} < 1$*. Avem că* $\frac{r}{2^k}$ *este eventual punctul fix 0.*
(iii) T are un singur ciclu 2-periodic $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$*.*
(iv) T are două cicluri 3-periodice $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ *şi* $\left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$*.*
(v) Fie $r \in N^*$ *un număr par şi* $s \in N^*$ *un număr impar. Avem că* $\frac{r}{s}$ *este un punct periodic pentru T.*
(vi) Un punct $\eta \in (0, 1)$ *este eventual periodic pentru T dacă şi numai dacă* η *este un număr raţional.*

5 Bibliografie

[1] Adriana Buică, Capitole speciale de ecuaţii dieferenţiale, notiţe de curs 2021.

[2] Adriana Buică, Dynamical systems, notiţe de curs 2021

[3] Marcel-Adrian Şerban, Octavian Agratini, Veronica-Ana Ilea, Matematică aplicată, editura Casa Cartii de Stiinta, Cluj-Napoca, 2017

[4] Saber N. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, editura Springer, 2005

[5] Saber N. Elaydi, Discrete chaos with applications in science and engineering, editura Chapman Hall/CRC, 2007