



Instituição: Universidade Federal de Minas Gerais
Disciplina: Análise Numérica
Professora: Fabrício Murai
Aluna: Lorena Mendes Peixoto
Matrícula: 2017015002

Quinta Lista de Exercícios

Questão 1) Marque V ou F e justifique:

1	V	Se os pontos são colineares, então só poderá ser uma única reta.
2	F	Ela só vai superestimar o valor da integral no caso de a função ter sua concavidade para cima.
3	F	Deve-se usar uma quantidade múltipla de 3 de intervalos. Com 7 pontos, tem-se 6 intervalos, o que mostra que a afirmação é falsa.
4	F	O exemplo 5.11 da 1ª edição do livro adotado mostra que, para o mesmo número de subintervalos, E2 apresenta um menor erro.
5	F	O erro, no caso do $\frac{1}{3}$ de Simpson, seria 2.25 vezes maior que no caso do $\frac{3}{8}$ de Simpson (basta substituir os valores nas fórmulas).
6	F	Ele fica 4 vezes menor, já que o m, na equação, é elevado ao quadrado.
7	V	
8	V	
9	F	Elas são os pesos na equação, e não as raízes.

Questão 2)

Questão 2) a) $h = x_1 - x_0 = 6$ $I_1 = (h/2)(y_0 + y_1)$ Regra do Trapezió

$\int_1^7 x^2 dx$ $x_0 = 1$ $y_0 = 1$ $I_1 = (6/2)(1 + 49)$

$x_1 = 7$ $y_1 = 49$ $I_1 = 3(50) = 150$

b) Regra do $\frac{1}{3}$ de Simpson $x_0 = 1$ $I_2 = (h/3)(y_0 + 4y_1 + y_2)$ $\int_1^7 x^2 dx$

$x_1 = 4$ $I_2 = (3/3)(1 + 4 \cdot 16 + 49)$

$h = (x_2 - x_0)/2$ $x_2 = 7$ $I_2 = 64 + 50 = 114$

$h = 6/2 = 3$

c) Regra do Trapezió Composta a partir de $m=6$ subintervalos $I_1 = (h/2) \sum_{i=0}^m c_i y_i$ $h = (b-a)/m$

$h = (7-1)/6 = 1$

$I_1 = (1/2) \sum_{i=0}^6 c_i y_i$

i	x_i	y_i	c_i	$I_1 = (1/2)(1 + 2(4 + 9 + 16 + 25 + 36) + 49)$
0	1	1	1	$I_1 = (1/2)(1 + 180 + 49)$
1	2	4	2	$I_1 = (1/2)(230)$
2	3	9	2	$I_1 = 115$
3	4	16	2	
4	5	25	2	$\int_1^7 x^2 dx$
5	6	36	2	
6	7	49	1	

d) $1/3$ de Simpson

composta com

$m=6$.

$$I_2 = (h/3) \sum_{i=0}^m c_i y_i$$

$$h = (b-a)/m = 1$$

$$c_0 = c_m = 1$$

$c_i = 4$ se i for ímpar

$c_i = 2$ se i for par

i x_i y_i c_i

0 1 1 1

1 2 4 4

2 3 9 2

3 4 16 4

4 5 25 2

5 6 36 4

6 7 49 1

$$I_2 = (1/3) (1 + 4(4 + 16 + 36) + 2(9 + 25) + 49)$$

$$I_2 = (1/3) (1 + 224 + 68 + 49)$$

$$I_2 = (1/3) (342)$$

$$I_2 = 114$$

$$\int_1^7 x^2 dx$$

e) $3/8$ de Simpson

composta com

$m=6$.

$$I_3 = (3h/8) \sum_{i=0}^m c_i y_i$$

$$h = (b-a)/m = 1$$

i x_i y_i c_i

0 1 1 1

1 2 4 3

2 3 9 3

3 4 16 2

4 5 25 3

5 6 36 3

6 7 49 1

$$I_3 = (3/8) (1 + 3(4 + 9 + 25 + 36) + 2(16) + 49)$$

$$I_3 = (3/8) (1 + 222 + 32 + 49)$$

$$I_3 = (3/8) (304)$$

$$I_3 = 114$$

$$\int_1^7 x^2 dx$$

Questão 3)

Questão 3) a)

$$\int_1^7 (3x^2 + 4x^3 + e^x) dx \quad E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta), \quad a < \theta < b$$

$$f'(x) = 6x + 12x^2 + e^x \quad E_1 = -\frac{(6)^3}{12} \cdot [6 + 168 + e^7]$$

$$f''(x) = 6 + 24x + e^x \quad 12(6)^2$$

$$\theta = 7$$

$$E_1 = (-112)(1270,6) = -635,32$$

$$b) E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180} f^{(4)}(\theta), \quad a < \theta < b$$

$$180 m^4$$

$$E_2 = -\frac{(6)^5}{180} \cdot e^7 = (-1/30) e^7$$

$$f'''(x) = 24 + e^x$$

$$180(6)^4$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \rightarrow \theta = 7$$

$$E_2 = -36,55$$

$$c) E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80} f^{(4)}(\theta), \quad a < \theta < b \quad \theta = 7$$

$$80 m^4$$

$$E_3 = -\frac{(6)^5}{80} \cdot e^7 = (-3/40) e^7 = -82,25$$

$$80(6)^4$$

Questão 4)

Questão 4) a) $x_1 = b - a \frac{t_1}{2} + a + b \approx x_1 = 2t_1 + 3$

$$\int_1^5 (e^x + x^{-1}) dx$$

$A_0 = 0$ $t_0 = -\sqrt{3}/3$ $x_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} + 3$ $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 3$

$A_1 = 1$ $t_1 = \sqrt{3}/3$

$$I_2 = b - a \sum_{i=1}^2 A_i f(x_i) = 2 (e^{x_0} - 1/x_0 + e^{x_1} - 1/x_1) = 141,68$$

b) $E_n = (b-a)^{2n+1} (n!) f^{(2n)}(\theta)$, $a < \theta < b$

$((2n)!)^3 (2n+1)$ $f(x) = e^x + x^{-1}$ $\theta = 5$

$E_2 = \frac{(5-1)^5 (2!)^3}{(4!)^3 \cdot 5} f^{(4)}(\theta)$ $f'(x) = e^x - x^{-2}$

$E_2 = \frac{1024 \cdot 16 \cdot (e^5 + 24(5)^{-5})}{69120}$ $f''(x) = e^x + 2x^{-3}$

$E_2 = 35,18$ $f'''(x) = e^x - 6x^{-4}$

$f^{(4)}(x) = e^x + 24x^{-5}$

Questão 5)

Questão 5) a)

$\frac{ds}{dt} = -\beta s x$ Dado que $s + x + r = 1$, $x = 1 - s - r$

$\frac{ds}{dt} = -\beta s (1 - s - r) = -\beta s + \beta s^2 + \beta s r$

$\frac{dr}{dt} = r x \rightarrow \frac{dr}{dt} = r (1 - s - r) = r - r s - r^2$

b) $\frac{dr/dt}{ds/dt} = \frac{-\beta s x}{-\beta s x}$ $\frac{dr}{ds} = \frac{-\beta s}{r} \rightarrow \int dr = \beta \int \frac{1}{s} ds =$

$= r = -\beta \ln(s) \rightarrow \ln(s) = -\frac{r}{\beta} \rightarrow s(t) = s_0 \exp(-\frac{r(t)}{\beta})$

c) $\frac{dr}{dt} = r x \rightarrow \frac{dr}{dt} = r - r s - r^2 \rightarrow \frac{dr}{dt} = r - r s - r^2 (s_0 \exp(-\frac{r}{\beta}))$

$\frac{dr}{dt} = r (1 - r - s_0 \exp(-\frac{r}{\beta}))$

Questão 6)

```
import numpy as numpy

def function(Y,R,S0,B):
    return Y * (1 - R - S0 * numpy.exp(R * - B / Y))

#####IMPLEMENTAÇÃO DE HEUN
def Heun(h):
    Y, B, r0, x0 = 0.4, 0.8, 0, 0.1
    X = x0
    R = r0
    Fxy = function(Y, R + (h / 2) * function(Y, R, 0.8, B), 0.8 + (h / 2), B)
    i = 1;
    for j in range(0, 3):
        while X < 40 * (j + 1):
            X = x0 + h * i
            R += h * Fxy
            Fxy = function(Y, R + (h / 2) * function(Y, R, 0.8, B), 0.8 + (h / 2), B)
            i += 1
        print(40 * (j + 1))
        print(R)
        S = 0.8 * numpy.exp(R * - B / Y)
        print(S)
        X = 1 - R - S
        print(X)
    print("\n")

#####IMPLEMENTAÇÃO DE EULER
def Euler(h):
    Y, B, r0, x0 = 0.4, 0.8, 0, 0.1
    X = x0
    R = r0
    Fxy = function(Y, R, 0.8, B)
    i = 1;
    for j in range(0,3):
        while X < 40 * (j + 1):
            X = x0 + h * i
            R += h * Fxy
            Fxy = function(Y, R, 0.8, B)
            i += 1
        print(40 * (j + 1))
        print(R)
        S = 0.8 * numpy.exp(R * - B / Y)
        print(S)
        X = 1 - R - S
        print(X)
    print("\n")
```

a) Euler(0,1)	b) Heun(0,1)	c) Euler(0,05)	d) Heun(0,05)
<pre>40 0.8554134862104567 0.1445730267386013 1.348705094203484e-05 80 0.8554324589058794 0.14456754096267665 1.314439668220757e-10 120 0.8554324590907846 0.14456754090921406 1.3600232051658168e-15</pre>	<pre>40 0.8420869374814836 0.1484781564343317 0.009434906084184735 80 0.8421252326407163 0.14846678488052623 0.009407982478757515 120 0.8421252333141385 0.1484667846805646 0.009407982005296939</pre>	<pre>40 0.8554121275071418 0.14457341960283643 1.4452890021776632e-05 80 0.8554324588754445 0.14456754097147645 1.5307904943639983e-10 120 0.8554324590907827 0.14456754090921461 2.6922908347160046e-15</pre>	<pre>40 0.8489029291514812 0.14646783812384434 0.004629232724674415 80 0.8489315058345083 0.14645946723309147 0.004609026932400256 120 0.8489315062388381 0.14645946711465563 0.004609026646506309</pre>