



Instituição: Universidade Federal de Minas Gerais
 Disciplina: Análise Numérica
 Professora: Fabrício Murai
 Aluna: Lorena Mendes Peixoto
 Matrícula: 2017015002

Terceira Lista de Exercícios

Questão 1)

$x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3$
 Questão 1) $\{(0,0,0,0), (0,63,0,59), (1,26,0,95), (1,88,0,95)\}$

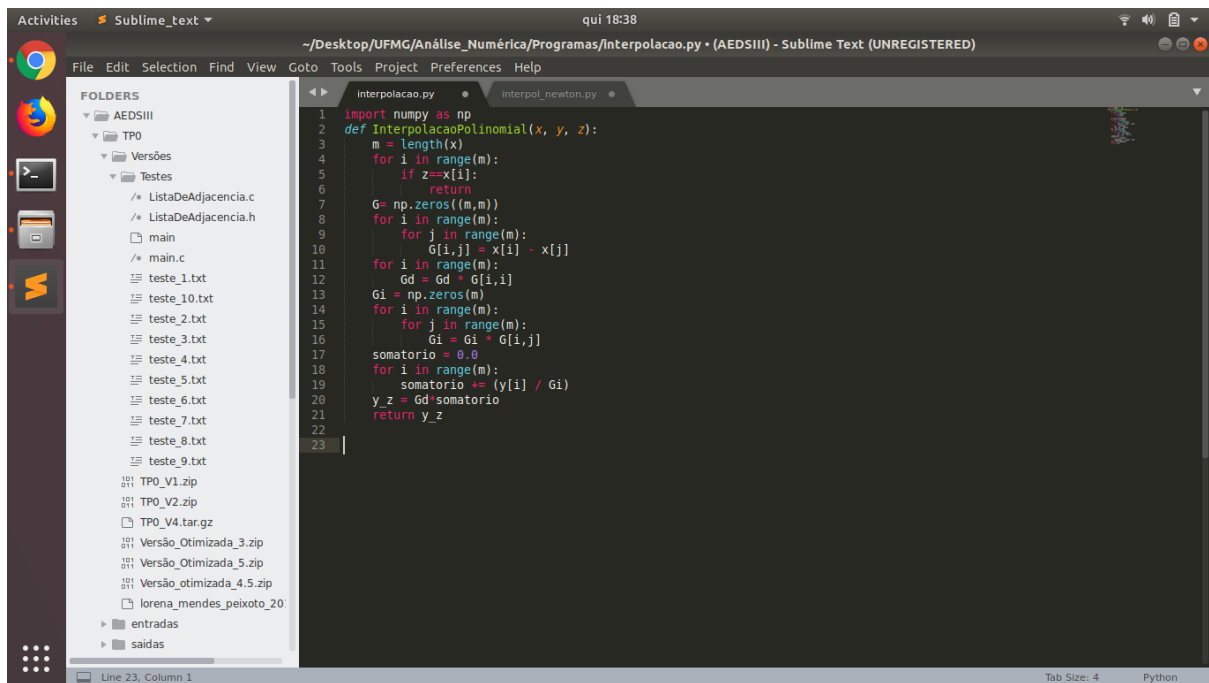
a) $P_0(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$
 $P_0(x) = (x-0,63)(x-1,26)(x-1,88) = (x^2 - 1,26x - 0,63x + 0,7938)$
 $(x-1,88) = x^3 - 3,77x^2 + 4,347x - 6,68$
 $P_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_n)$
 $P_2(x) = (x)(x-0,63)(x-1,88) = x(x^2 - 2,51x + 1,1844) = x^3 - 2,51x^2 + 1,1844x$

b) $L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$
 $L_n(\sqrt{2}/2) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = 0$
 $+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = 0,59 \cdot \frac{(0,707)(-0,553)(-1,173)}{(0,63)(-0,63)(-1,25)} = 0,545$
 $+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = 0,95 \cdot \frac{(0,707)(0,077)(-1,173)}{(1,26)(0,63)(-0,62)} = 0,123$
 $+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 0,95 \cdot \frac{(0,707)(0,077)(-0,553)}{(1,88)(1,25)(0,62)} = -0,0196$
 $L_n(\sqrt{2}/2) = 0,648$

c) A fórmula de Lagrange diz que $P_i(x_i) \neq 0$ e $P_i(x_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.
 Dessa forma, sendo 0,63 o ponto x_1 , $P_0(x_1) = 0 \therefore P_0(0,63) = 0$.

d) Sendo $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $L_n(0,0) = 0,0$.

Questão 2)



Questão 4)

Questão 4) a)

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0,0	0,0	0,936	-0,290	-0,089
1	0,63	0,59	0,591	-0,457	
2	1,26	0,95	0		
3	1,88	0,95			

b) $P_0(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$

$P_2(\sqrt{2}/2) = \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 y_0 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$P_2(\sqrt{2}/2) = 0,936(0,707) - 0,290(0,707)(0,077) - 0,089(0,707)(0,077)(-0,553)$

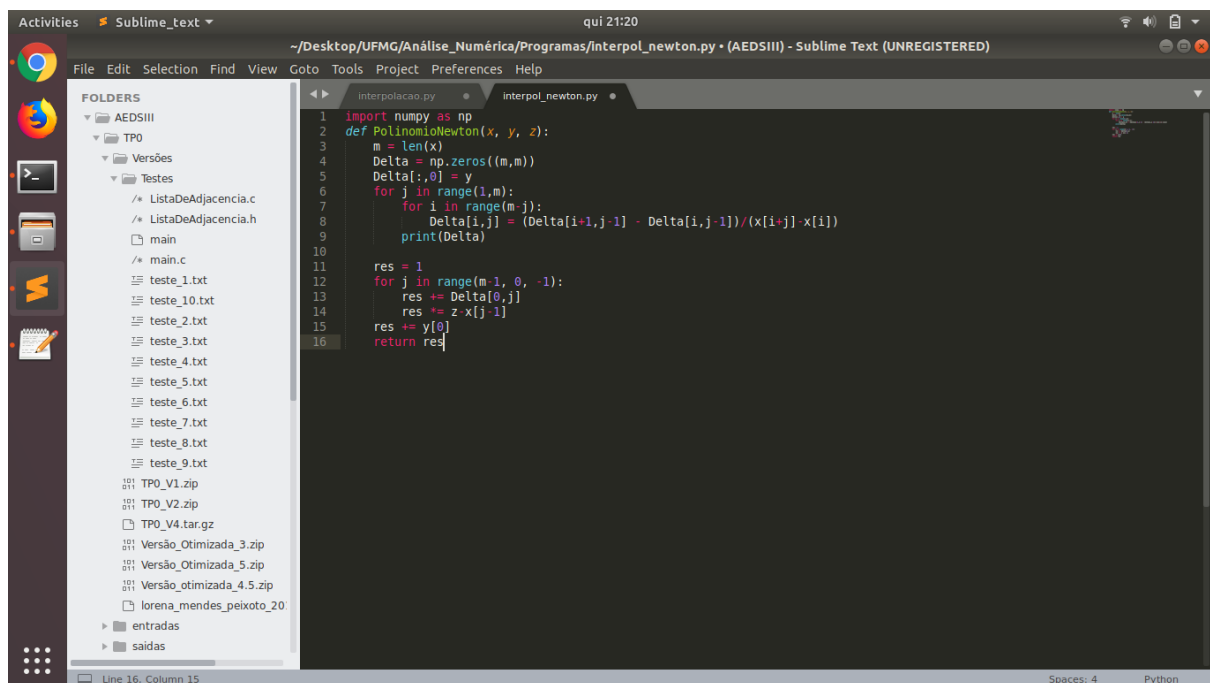
$P_2(\sqrt{2}/2) = 0,6426 - 0,0224 + 0,0035 = 0,6237$

c) $P_3(\sqrt{2}/2) = \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 y_0 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$P_3(\sqrt{2}/2) = 0,936(0,866) - 0,290(0,866)(0,236) - 0,089(0,866)(0,236)(-0,394)$

$P_3(\sqrt{2}/2) = 0,811 - 0,059 + 0,0083 = 0,760$

Questão 5)



Questão 6)

(F) Por n pontos, pode passar somente um polinômio interpolador, independentemente da metodologia utilizada.

(F) Com $n+1$ pontos distintos, interpola-se um polinômio de grau n .

(F*) Se um polinômio é de grau n , então suas diferenças divididas de grau $n+1$ são identicamente nulas. Da mesma forma, as diferenças divididas de grau $n+2$ são nulas. Por isso, não se pode afirmar que o polinômio é de grau 3, afinal, ele pode ter graus 1, 2 ou 3.

(F) Entre dois pontos interpolados, há infinitos pontos, não necessariamente coincidentes com a curva “original”.

Questão 7)

Para a interpolação cúbica em $z=2.2$, devo escolher os 4 pontos que tenham abscissa mais próxima do ponto z . Por isso, escolho 2.00, 1.75, 1.50 e 1.25.

Questão 8)

Questão 8) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x = (1, 1.5, 2.5)$; $y = (1, 0.667, 0.4)$

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad x_0 < \xi < x_n$$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^2 (x - x_i) \rightarrow T_2(1,2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$T_2(1,2) = \frac{-6}{x^4} \cdot \frac{1}{6} \prod_{i=0}^2 (x - x_i) \rightarrow T_2(1,2) = \frac{-1}{x^4} \cdot (x-1)(x-1.5)(x-2.5)$$

$$T_2(1,2) = \frac{-1}{\xi^4} \cdot (0,2)(-0,3)(-1,3) = \frac{-1}{\xi^4} \cdot 0,078$$

→ Achar o valor de ξ , $x_0 < \xi < x_n$, tal que $f'''(\xi)$ seja o maior possível em módulo.

$$\xi = 1 \rightarrow T_2(1,2) = \frac{-1}{1^4} \cdot 0,078 = -0,078$$

Como o erro não pode ser negativo, aqui é aplicado o módulo. Dessa forma, o erro de truncamento é 0,078.

Questão 9)

Questão 9) $f(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ $k=2$ $k+1=3$ (grau)

$f(1)=1$; $f(2)=1+2^2=5$; $f(3)=1+2^2+3^2=14$; ... Pontos $(1, 2, 3, \dots)$

Como o grau é 3:

i	n_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	1	4	2,5	1/3
1	2	5	9	3,5	
2	3	14	16		
3	4	30			

$P_n(n) = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (n-n_j)$

$P_n(n) = 1 + 4(n-1) + 2,5(n-1)(n-2) + 0,33(n-1)(n-2)(n-3)$

$P_n(n) = 1 + 4n - 4 + 2,5(n^2 - 3n + 2) + 0,33(n^3 - 6n^2 + 11n - 6)$

$P_n(n) = 4n - 3 + \frac{5}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 5 + \frac{n^3}{3} - \frac{4}{2}n^2 + \frac{11n}{3} - 2$

$P_n(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$

$P_n(n) = \frac{2n^3}{6} + \frac{3n^2}{6} - \frac{n}{6} = \frac{n}{6} (2n^2 + 3n - 1) \rightarrow \text{É o mesmo polinômio que o desejado}$

Correção: $f(2) = 5$ (escrevi que é igual a 3 na segunda linha da foto, mas corriji logo abaixo).

Questão 10)

(V)

(V) Para o polinômio de Newton, isso é possível. A complexidade de se adicionar um ponto é $O(n)$.

(F) De acordo com a fórmula da interpolação de Lagrange, a adição de um novo ponto acarretaria uma alteração em todo o processo. Por isso, adicionar um novo termo em Lagrange é mais caro que em Newton.