

---

# TÓPICOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Reginaldo J. Santos  
Departamento de Matemática-ICEx  
Universidade Federal de Minas Gerais  
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Julho 2011

---

Tópicos de Equações Diferenciais  
Copyright © 2011 by Reginaldo de Jesus Santos (110804)

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida por qualquer meio sem a prévia autorização, por escrito, do autor.

Ilustrações:  
Reginaldo J. Santos

### **Ficha Catalográfica**

S237i Santos, Reginaldo J.  
Tópicos de Equações Diferenciais / Reginaldo J. Santos  
- Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.

1. Equações Diferenciais I. Título

CDD: 515.3

---

# Sumário

---

<b>Prefácio</b>	viii
<b>1 Equações Diferenciais de 1ª Ordem</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução às Equações Diferenciais	1
1.1.1 Classificação	7
1.1.2 Soluções de Equações Ordinárias	8
1.1.3 Equações Ordinárias de 1ª Ordem	11
Exercícios	13
1.2 Equações Lineares de 1ª Ordem	14
1.2.1 Equações em que $p(t) = 0$	14
1.2.2 Equações Lineares - Caso Geral	16
1.2.3 Como chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ ?	21
Exercícios	23
1.3 Equações Separáveis	25
Exercícios	34
1.4 Aplicações	36

1.4.1	Dinâmica Populacional	36
1.4.2	Datação por Carbono 14	44
1.4.3	Misturas	47
1.4.4	Lei de Resfriamento de Newton	52
1.4.5	Lei de Torricelli	55
1.4.6	Resistência em Fluidos	59
1.4.7	Circuitos Elétricos	64
1.4.8	Reações Químicas	67
	Exercícios	81
1.5	Existência e Unicidade de Soluções (opcional)	89
1.5.1	Demonstração do Teorema de Existência e Unicidade	98
	Exercícios	103
1.6	Respostas dos Exercícios	105
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem</b>	<b>152</b>
2.1	Equações Homogêneas - Parte I	153
2.1.1	Soluções Fundamentais	156
2.1.2	Fórmula de Euler	165
	Exercícios	167
2.2	Equações Homogêneas - Parte II	171
2.2.1	Obtendo-se uma Segunda Solução	171
2.2.2	Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes	174
	Exercícios	184
2.3	Equações Não Homogêneas	186
2.3.1	Equações Não Homogêneas com Coeficientes Constantes	190
	Exercícios	201
2.4	Oscilações	202
2.4.1	Oscilações Livres	204
2.4.2	Oscilações Forçadas	218
2.4.3	Circuitos Elétricos	227
	Exercícios	231

2.5	Respostas dos Exercícios	235
<b>3</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>279</b>
3.1	Introdução	279
3.1.1	Demonstração da Injetividade da Transformada de Laplace	294
	Exercícios	300
3.2	Problemas de Valor Inicial	302
	Exercícios	308
3.3	Equações com Termo Não Homogêneo Descontínuo	310
	Exercícios	325
3.4	Transformada de Laplace do Delta de Dirac	328
	Exercícios	335
3.5	Convolução	336
	Exercícios	344
3.6	Tabela de Transformadas de Laplace	345
3.7	Respostas dos Exercícios	346
<b>4</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais Lineares</b>	<b>396</b>
4.1	A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{R}$	404
4.1.1	Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas	404
4.1.2	Sistema com $n$ Equações e $n$ Incógnitas	406
4.1.3	Como Encontrar as Matrizes $P$ e $D$	409
	Exercícios	424
4.2	A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{C}$	426
4.2.1	Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas	426
4.2.2	Sistema com $n$ Equações e $n$ Incógnitas	429
4.2.3	Como Encontrar as Matrizes $P$ e $D$	431
	Exercícios	442
4.3	A Matriz $A$ não é Diagonalizável	444
4.3.1	Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas	444
4.3.2	Sistema com $n$ Equações e $n$ Incógnitas	446

4.3.3	Como Encontrar as Matrizes $P$ e $J$	448
	Exercícios	457
4.4	Sistemas Não-Homogêneos (opcional)	458
4.4.1	A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{R}$	459
4.4.2	A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{C}$	463
4.4.3	A Matriz $A$ não é Diagonalizável	467
4.4.4	Usando a Transformada de Laplace	471
4.4.5	Demonstração do Teorema de Existência e Unicidade	475
	Exercícios	479
4.5	Respostas dos Exercícios	481
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>525</b>
5.1	Séries de Fourier	526
5.1.1	Funções Pares e Ímpares	539
5.1.2	Demonstração do Teorema sobre a Convergência da Série de Fourier	553
5.1.3	Limites e Derivação de Séries de Funções	556
5.1.4	Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier	561
	Exercícios	562
5.2	Equação do Calor em uma Barra	574
5.2.1	Extremidades a Temperaturas Fixas	574
5.2.2	Barra Isolada nas Extremidades	588
	Exercícios	597
5.3	Corda Elástica Presa nas Extremidades	600
5.3.1	Com Velocidade Inicial Nula	601
5.3.2	Com Deslocamento Inicial Nulo	614
5.3.3	Caso Geral	621
	Exercícios	625
5.4	Equação de Laplace num Retângulo	628
5.4.1	Apenas $k(y)$ Não Nula	630
5.4.2	Apenas $h(y)$ Não Nula	635
5.4.3	Caso Geral	641

---

Exercícios . . . . .	645
5.5 Respostas dos Exercícios . . . . .	648
<b>Bibliografia</b>	<b>695</b>
<b>Índice Alfabético</b>	<b>697</b>

---

# Prefácio

---

Este é um texto alternativo ao excelente livro Boyce-DiPrima [1] para uma disciplina introdutória sobre Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais para alunos da área de Ciências Exatas, sendo mais objetivo e mais elementar. Entretanto aqui estão apresentadas provas elementares de resultados como os teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais e para sistemas de equações diferenciais, o teorema sobre a existência de soluções em série de potências para equações lineares de 2ª ordem, a injetividade da transformada de Laplace, o teorema sobre convergência pontual da série de Fourier e outros. O conteúdo corresponde ao programa da disciplina 'Equações Diferenciais C' que é ministrado para os alunos da área de ciências exatas na Universidade Federal de Minas Gerais.

O texto é dividido em cinco capítulos. No início do Capítulo 1 é feita uma introdução às equações diferenciais em geral. Depois entre as equações de 1ª ordem são estudadas as equações lineares e as separáveis. Terminamos o capítulo com algumas aplicações.

As equações lineares de 2ª ordem é o assunto do Capítulo 2. Nele o estudo tanto das equações homogêneas como das equações não homogêneas é feito inicialmente no caso geral e depois no caso particular em que os coeficientes são constantes. Como aplicações este capítulo traz também oscilações.

No Capítulo 3 é estudada a Transformada de Laplace suas propriedades e aplicação na solução de problemas de valor inicial.

No Capítulo 4 são estudados séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais pelo método de separação



de variáveis. Entre as equações parciais são apresentadas a equação do calor, a equação da corda elástica e a equação de Laplace.

Todos os exercícios estão resolvidos no final do capítulo correspondente. Uma coisa que acho importante é somente ler a solução de um exercício depois de ter tentado verdadeiramente resolvê-lo. É como quando lhe dão um enigma para decifrar. Se lhe contarem logo a solução você não vai lembrar depois. Quanto mais tempo você ficar tentando decifrar antes de lhe contarem a solução mais tempo você vai lembrar.

Os desenhos e gráficos foram feitos usando o MATLAB®\* com o pacote GAAL e o Maxima também com o pacote GAAL disponíveis no site do autor (<http://www.mat.ufmg.br/~regi>). Neste site também estão disponíveis páginas interativas para o estudo de oscilações, equações parciais, séries de Fourier e outros.

Gostaria de agradecer aos professores Joana Darc A. S. da Cruz, Grey Hercole, Sônia P. de Carvalho, Marcia Fusaro e Helder C. Rodrigues pelas críticas e sugestões apresentadas.

## Sugestão de Cronograma para 60 Horas

Capítulo 1	09 aulas
Capítulo 2	11 aulas
Capítulo 3	10 aulas
Capítulo 4	10 aulas
Capítulo 5	20 aulas
Total	60 aulas

---

\*MATLAB é marca registrada de The Mathworks, Inc.



---

# Equações Diferenciais de 1ª Ordem

---

## 1.1 Introdução às Equações Diferenciais

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função  $y(t)$ ,  $t$  é a variável independente e  $y$  é a variável dependente. Vejamos alguns exemplos.

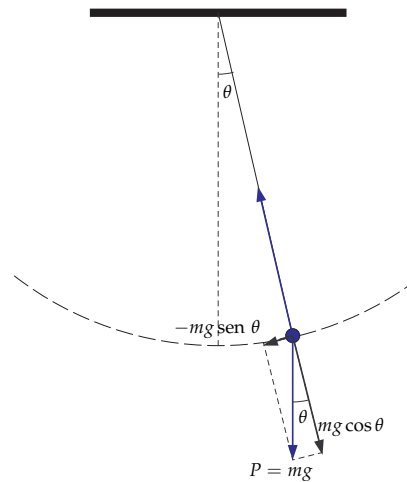


Figura 1.1 – Pêndulo Simples

**Exemplo 1.1.** O movimento de um pêndulo simples de massa  $m$  e comprimento  $l$  é descrito pela função  $\theta(t)$  que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função  $\theta(t)$ . Assim  $\theta$  é a variável dependente e  $t$  é a variável independente.

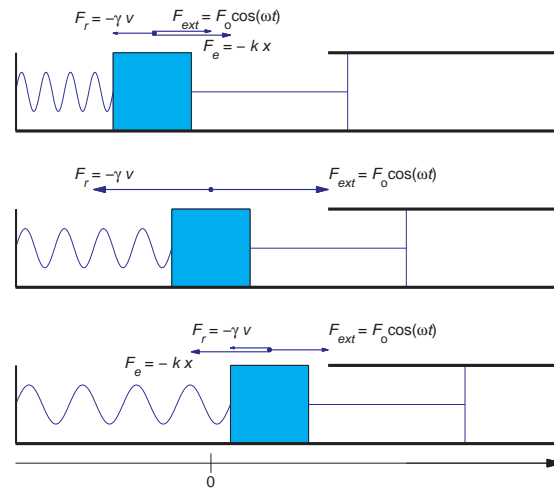


Figura 1.2 – Sistema massa-mola

**Exemplo 1.2.** Em um sistema massa-mola composto de um corpo de massa  $m$  preso a uma mola com constante elástica  $k$ , sujeita a uma força de resistência  $F_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$  e uma força externa  $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$  o deslocamento da massa  $x(t)$  satisfaz a equação diferencial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

Nesta equação a incógnita é a função  $x(t)$ . Assim  $x$  é a variável dependente e  $t$  é a variável independente.

**Exemplo 1.3.** Numa região do plano em que não há cargas elétricas o potencial elétrico  $u(x, y)$  em cada ponto  $(x, y)$  da região satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função  $u(x, y)$ . Assim  $u$  é a variável dependente e  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes.

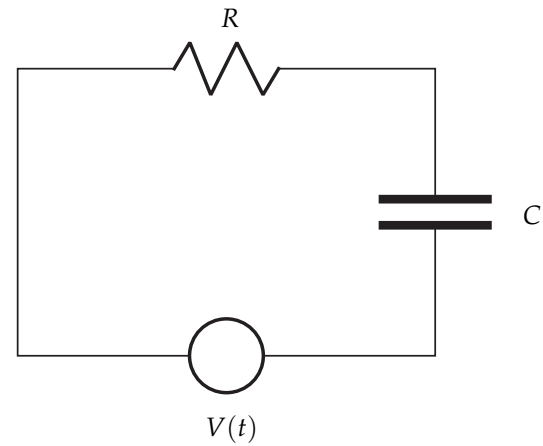


Figura 1.3 – Circuito RC



**Exemplo 1.4.** Um circuito  $RC$  é um circuito que tem um resistor de resistência  $R$ , um capacitor de capacitância  $C$  e um gerador que gera uma diferença de potencial  $V(t)$  ligados em série. A carga  $Q(t)$  no capacitor satisfaz a equação diferencial

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t).$$

Nesta equação a incógnita é a função  $Q(t)$ . Assim  $Q$  é a variável dependente e  $t$  é a variável independente.

### 1.1.1 Classificação

As equações são classificadas quanto ao **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

- (a) Quanto ao tipo uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto uma equação diferencial é ordinária se as derivadas que aparecem na equação são derivadas ordinárias. Por exemplo, as equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'', \dots) = 0,$$

em que  $y$  é função apenas de  $t$ , são equações diferenciais ordinárias, como as equações dos [Exemplos 1.1](#), [1.2](#) e [1.4](#). A equação do [Exemplo 1.3](#) é parcial.

- (b) Quanto à ordem uma equação diferencial pode ser de **1ª**, de **2ª**, ..., de  **$n$ -ésima ordem** dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

As equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 são de 2ª ordem e a equação do Exemplo 1.4 é de 1ª ordem.

- (c) Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser **linear** ou **não linear**. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo uma equação diferencial ordinária linear de ordem  $n$  é uma equação que pode ser escrita como

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não lineares. As equações dos Exemplos 1.2, 1.3 e 1.4 são lineares e a equação do Exemplo 1.1 é não linear.

### 1.1.2 Soluções de Equações Ordinárias

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  em um intervalo  $I$**  é uma função  $y(t)$  definida no intervalo  $I$  tal que as suas derivadas de ordem até  $n$  estão definidas no intervalo  $I$  e satisfazem a equação neste intervalo. A solução de uma equação diferencial é também chamada **curva integral** da equação.

**Exemplo 1.5.** Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ tais que } b^2 - 4ac = 0.$$

Vamos mostrar que  $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$  é solução desta equação para  $t \in \mathbb{R}$ .

$$y'(t) = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}, \quad y''(t) = \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}$$

Substituindo-se  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$  no primeiro membro da equação obtemos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t} + b \left( -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t} \right) + ce^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \left( \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) e^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} e^{-\frac{b}{2a}t} = 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese  $b^2 - 4ac = 0$ . Assim  $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$  é solução da equação.

**A solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  em um intervalo  $I$**  é uma família de soluções  $y(t)$  no intervalo  $I$ , dependendo de  $n$  constantes arbitrárias, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral atribuindo-se valores às constantes.

**Exemplo 1.6.** A solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

é o conjunto de todas as primitivas da função  $f(t) = e^{3t}$ , ou seja,

$$y(t) = \int e^{3t} dt + c = \frac{e^{3t}}{3} + c,$$

que é válida para  $-\infty < t < \infty$ , pois este é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.

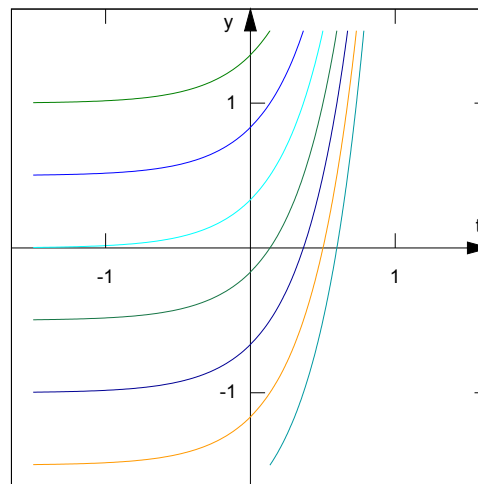


Figura 1.4 – Soluções da equação do Exemplo 1.6

### 1.1.3 Equações Ordinárias de 1ª Ordem

As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0.$$

Vamos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1.1)$$

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial (1.1) em um intervalo  $I$**  é uma função  $y(t)$  definida no intervalo  $I$  tal que a sua derivada  $y'(t)$  está definida no intervalo  $I$  e satisfaz a equação (1.1) neste intervalo.

O problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

é chamado **problema de valor inicial (PVI)**. Uma **solução do problema de valor inicial (1.2) em um intervalo  $I$**  contendo  $t_0$  é uma função  $y(t)$  que está definida neste intervalo, tal que a sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz (1.2).

**Exemplo 1.7.** Vamos encontrar a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = e^{3t} \\ y(1/3) = e/3 \end{cases}$$

A solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

é o conjunto de todas as primitivas da função  $f(t) = e^{3t}$ , ou seja,

$$y(t) = \int e^{3t} dt + c = \frac{e^{3t}}{3} + c,$$

que é válida para  $-\infty < t < \infty$ .

Substituindo-se  $t = 1/3$  e  $y = e/3$  na solução geral encontrada obtemos  $c = 0$ .

Assim a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3}$$

válida para  $-\infty < t < \infty$ , que é o maior intervalo contendo  $t_0 = 1/3$  em que a solução e sua derivada estão definidas.

## Exercícios (respostas na página 105)

1.1. Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

(a)  $yy' + t = 0$

(b)  $x^2y'' + bxy' + cy = 0$

1.2. Determine qual ou quais das funções  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^3$  e  $y_3(x) = e^{-x}$  são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

1.3. Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Mostre que

(a)  $y(t) = e^{rt}$ , com  $r$  raiz de  $ar + b = 0$ , é solução da equação  $ay' + by = 0$ .

(b)  $y(t) = e^{rt}$ , com  $r$  raiz de  $ar^2 + br + c = 0$ , é solução da equação  $ay'' + by' + cy = 0$ .

(c)  $y(x) = x^r$ , com  $r$  raiz de  $r^2 + (b-1)r + c = 0$ , é solução da equação  $x^2y'' + bxy' + cy = 0$ .

1.4. Determine os valores de  $r$  para os quais a função  $y(t)$  é solução da equação.

(a)  $y(t) = \frac{r}{t^2 - 3}$  e  $y' + ty^2 = 0$ .

(c)  $y(t) = \frac{r}{t^2 + 1}$  e  $y' - 6ty^2 = 0$ .

(b)  $y(t) = \frac{r}{t^2 + 1}$  e  $y' - 2ty^2 = 0$ .

(d)  $y(t) = \frac{r}{t^2 + 2}$  e  $y' - ty^2 = 0$ .

1.5. Determine todas as soluções da equação diferencial

$$ty'' + (t-1)y' - y = 0$$

que são funções de 1º grau, ou seja, da forma  $y(t) = at + b$ , para  $a$  e  $b$  constantes.

## 1.2 Equações Lineares de 1ª Ordem

As **equações (diferenciais ordinárias) lineares de 1ª ordem** são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \quad (1.3)$$

### 1.2.1 Equações em que $p(t) = 0$

Se a função  $p(t) = 0$  a equação (1.3) torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t), \quad (1.4)$$

que é facilmente resolvida integrando-se os dois lados. Assim a solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = \int q(t)dt + c.$$

**Exemplo 1.8.** A solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen}(2t)$$

é o conjunto de todas as primitivas de  $f(t) = \text{sen}(2t)$ , ou seja,

$$y(t) = \int \text{sen}(2t) dt + c = -\frac{\cos(2t)}{2} + c.$$



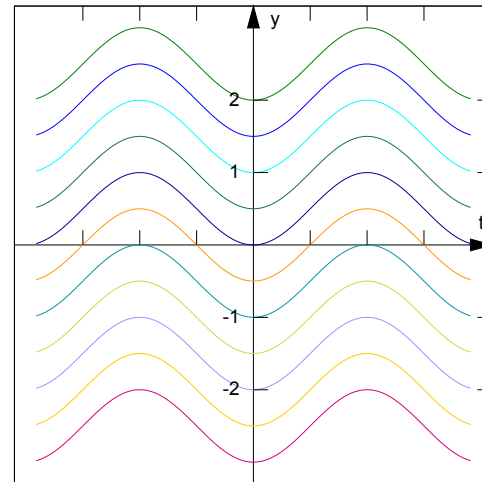


Figura 1.5 – Soluções da equação do Exemplo 1.8

Na subseção 1.2.2 e na seção 1.3 veremos técnicas de se encontrar soluções de equações de 1ª ordem que se baseiam em transformar a equação inicial em uma equação do tipo (1.4).

### 1.2.2 Equações Lineares - Caso Geral

Vamos considerar equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \quad (1.5)$$

Vamos definir uma função auxiliar,  $\mu(t)$ , de forma que ao multiplicarmos a equação (1.5) por esta função a equação obtida é uma equação linear com  $p(t) = 0$ , ou seja, do tipo (1.4), que já resolvemos anteriormente. Uma função com esta propriedade é chamada **fator integrante da equação linear**.

Seja

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Vamos mostrar agora que  $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$  é um fator integrante da equação (1.5).

Observe em primeiro lugar que

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt} \frac{d}{dt} \left( \int p(t)dt \right) = e^{\int p(t)dt} p(t) = \mu(t)p(t). \quad (1.6)$$

Assim multiplicando-se (1.5) por  $\mu(t)$ , obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \quad (1.7)$$

mas como por (1.6),  $\mu(t)p(t) = \frac{d\mu}{dt}$ , então (1.7) pode ser reescrita como

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t). \quad (1.8)$$

Mas o lado esquerdo dessa equação é a derivada de um produto o que faz com que ela possa ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)q(t) \quad (1.9)$$

A equação (1.9) é uma equação do tipo (1.4), ou seja,

$$\frac{dY}{dt} = f(t)$$

em que  $Y(t) = \mu(t)y(t)$  e  $f(t) = \mu(t)q(t)$ . Assim, a solução geral de (1.9) é dada por

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

Como  $\mu(t) \neq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dividindo-se a equação anterior por  $\mu(t)$  obtemos que a solução geral de (1.5) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left( \int \mu(t)q(t)dt + c \right)$$

Mostraremos na Subseção 1.2.3 como podemos chegar a  $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$  como fator integrante da equação (1.5).

**Atenção:** Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação linear de 1ª ordem.

---

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

**Exemplo 1.9.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = e^{\ln t^2} = t^2.$$

Multiplicando-se a equação acima por  $\mu(t)$  obtemos:

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty = t^3.$$

O lado esquerdo é igual a derivada do produto  $t^2 y(t)$ . Logo a equação acima é equivalente a

$$\frac{d}{dt} (t^2 y(t)) = t^3.$$

Integrando-se obtemos

$$t^2 y(t) = \frac{t^4}{4} + c$$

Explicitando  $y(t)$  temos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{c}{t^2}. \quad (1.10)$$

Podemos esboçar as soluções desta equação diferencial. Para  $c = 0$  a solução é a parábola

$$y(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Para  $c \neq 0$ , temos que o domínio de  $y(t)$  é o conjunto dos números reais tais que  $t \neq 0$ .  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = +\infty$ , se  $c \neq 0$ . Além disso

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = +\infty, \quad \text{se } c > 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = -\infty, \quad \text{se } c < 0.$$

Vamos analisar o crescimento e decrescimento das soluções

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{2} - \frac{2c}{t^3} = 0$$

se, e somente se,

$$t^4 = 4c.$$

Assim se  $c > 0$  as soluções têm somente pontos críticos em  $t = \pm \sqrt[4]{4c}$  e se  $c < 0$  elas não têm ponto crítico.

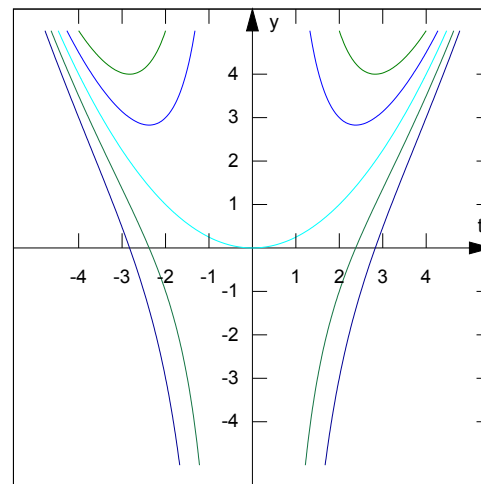


Figura 1.6 – Soluções da equação do Exemplo 1.9

**Exemplo 1.10.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t. \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

A equação é a mesma do **Exemplo 1.9**. Substituindo-se  $t = 2$  e  $y = 3$  em (1.10) obtemos

$$3 = \frac{4}{4} + \frac{c}{4}$$

De onde obtemos que  $c = 8$ . Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2}.$$

Observe que a solução deste problema de valor inicial é válida no intervalo  $(0, +\infty)$ , que é o maior intervalo contendo  $t = 2$  (pois a condição inicial é  $y(2) = 3$ ) em que a solução e sua derivada estão definidas. Se a condição inicial ao invés de  $y(2) = 3$  fosse  $y(-2) = 3$  a solução teria a mesma expressão, mas o intervalo de validade da solução seria  $(-\infty, 0)$ .

### 1.2.3 Como chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ ?

Vamos mostrar como podemos chegar ao fator integrante  $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ . Comparando-se as equações (1.7) e (1.8) na página 16 vemos que o fator integrante  $\mu(t)$  deve ser uma função que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Esta é também uma equação linear, mas com  $q(t) = 0$ . Supondo-se  $\mu(t) \neq 0$ , vamos multiplicar esta equação por  $1/\mu(t)$  obtendo a equação

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Como  $\frac{1}{\mu(t)} = \frac{d}{d\mu} (\ln |\mu(t)|)$  a equação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\mu} (\ln |\mu(t)|) \frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Mas pela regra da cadeia esta equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt} (\ln |\mu(t)|) = p(t)$$

que é uma equação do tipo (1.4) que pode ser resolvida simplesmente integrando-se ambos os membros obtendo

$$\ln |\mu(t)| = \int p(t)dt + c_1$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\mu(t) = \pm e^{c_1} e^{\int p(t)dt} = c e^{\int p(t)dt}.$$

Como estamos interessados em apenas um fator integrante podemos tomar  $c = 1$  e obtermos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$



## Exercícios (respostas na página 107)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) 
$$\begin{cases} y' + (1 - 2x)y = xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} y' + 3t^2y = e^{-t^3+t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} y' - \cos t y = te^{t^2+\sin t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(d) 
$$\begin{cases} y' + x^4y = x^4e^{\frac{4x^5}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2.2. Resolva as equações:

(a) 
$$y' - \frac{4}{x}y = -\frac{2}{x^3}.$$

(b) 
$$y' - \frac{1}{x}y = -x.$$

(c) 
$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x.$$

2.3. (a) Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + 5x^4y = x^4 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(b) Para quais valores de  $y_0$  a solução é crescente e para quais valores de  $y_0$  a solução é decrescente.(c) Qual o limite de  $y(x)$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ . O limite depende de  $y_0$ ?

2.4. (a) Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (x^2 - 9)y' + xy = 0 \\ y(5) = y_0 \end{cases}$$

(b) Qual o intervalo de validade da solução?

(c) Qual o limite de  $y(x)$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ . O limite depende de  $y_0$ ?

2.5. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

(a) Mostre que se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da equação, então  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$  também o é.

- (b) Mostre que se  $y_1(t)$  é solução da equação, então  $y(t) = cy_1(t)$  também o é, para qualquer constante  $c$ .

2.6. Considere as equações

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad (1.12)$$

Mostre que se  $y_1(t)$  é solução da equação (1.11) e  $y_2(t)$  é solução da equação (1.12), então  $y(t) = cy_1(t) + y_2(t)$  é solução de (1.12), para qualquer constante  $c$ .

2.7. Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \frac{y}{100} \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

e faça um esboço do gráfico da solução.

### 1.3 Equações Separáveis

As **equações (diferenciais ordinárias) separáveis** são equações que podem ser escritas na forma

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1.13)$$

Seja

$$h(y) = \int g(y) dy.$$

Então

$$\frac{dh}{dy} = g(y).$$

Substituindo-se  $g(y)$  por  $\frac{dh}{dy}$  na equação (1.13) obtemos

$$\frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1.14)$$

Mas, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} h(y(x)) = \frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx},$$

o que implica que (1.14) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} h(y(x)) = f(x) \quad (1.15)$$

A equação (1.15) é do tipo (1.4) na página 14, ou seja, é da forma

$$\frac{dY}{dx} = f(x)$$

em que  $Y(x) = h(y(x))$ . Assim, integrando-se (1.15) dos dois lados obtemos que a solução geral de (1.13) é dada **implicitamente** por

$$h(y(x)) = \int f(x)dx + c.$$

Também podemos obter a solução da maneira mostrada a seguir. Integrando-se em relação a  $x$  ambos os membros de (1.13) obtemos

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x)dx + c,$$

que pode ser reescrita como

$$\int g(y)y' dx = \int f(x)dx + c.$$

Fazendo a substituição  $y'dx = dy$  obtemos

$$\int g(y) dy = \int f(x)dx + c.$$

---

**Atenção:** Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação separável.

---

As curvas que são soluções de uma equação separável podem ser vistas como curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = h(y(x)) - \int f(x)dx.$$

**Exemplo 1.11.** Vamos, agora, encontrar a solução geral da equação diferencial

$$2y \frac{dy}{dx} = -4x \quad \text{ou} \quad 2yy' = -4x$$

Integrando-se em relação a  $x$  ambos os membros obtemos

$$\int 2yy' dx = - \int 4x dx + c.$$

Fazendo a substituição  $y' dx = dy$  obtemos

$$\int 2y dy = - \int 4x dx + c.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^2 = -2x^2 + c$$

As soluções são elipses ([Figura 1.7](#)) que são as curvas de nível da função

$$z = f(x, y) = y^2 + 2x^2.$$

O gráfico da função  $f(x, y) = y^2 + 2x^2$  é um parabolóide elíptico ([Figura 1.8](#)).

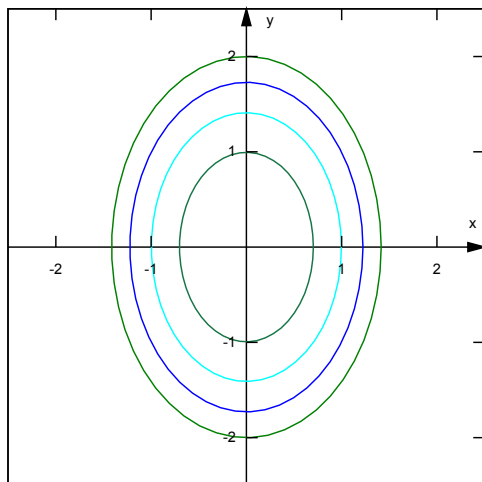


Figura 1.7 – Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.11

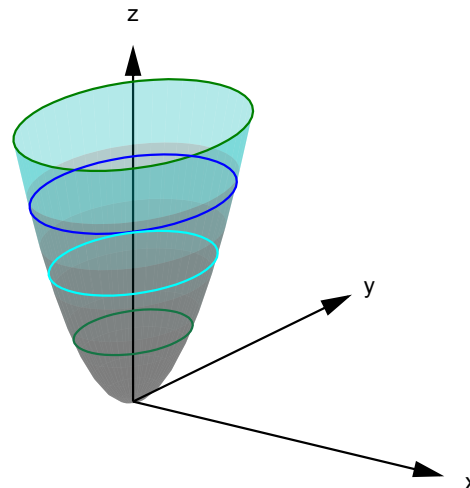


Figura 1.8 – Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.11 como curvas de nível do parabolóide elíptico  $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2$

**Exemplo 1.12.** (a) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- (b) Determine o **intervalo de validade da solução**, ou seja, o maior intervalo contendo  $x_0 = 1$  para o qual a solução  $y(x)$  e sua derivada  $\frac{dy}{dx}$  estão definidas.
- (c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.
- (d) Faça um esboço do gráfico da solução.

**Solução:**

- (a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2 - 3)y' = 2x - 1$$

Integrando-se em relação a  $x$  ambos os membros obtemos

$$\int (3y^2 - 3)y' dx = \int (2x - 1)dx + c.$$

Fazendo a substituição  $y'dx = dy$  obtemos

$$\int (3y^2 - 3) dy = \int (2x - 1)dx + c.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y = x^2 - x + c$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial  $y(1) = 0$  substituímos  $x = 1$  e  $y = 0$  na solução geral obtendo  $c = 0$ . Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 + x = 0$$

- (b) Para determinar o intervalo de validade da solução do PVI vamos determinar o maior intervalo que contém  $x = 1$  em que a solução e sua derivada estão definidas. Pela equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3}$ , temos que os pontos onde a derivada não está definida são aqueles tais que  $3y^2 - 3 = 0$ , ou seja,  $y = \pm 1$ . Como o ponto inicial é  $(1, 0)$ , então a solução do PVI está contida na região do plano  $-1 < y < 1$ . Substituindo-se  $y = -1$  na equação que define a solução obtemos a equação  $x^2 - x - 2 = 0$ , que tem solução  $x = -1$  e  $x = 2$ . Substituindo-se  $y = 1$  na equação que define a solução  $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$  obtemos a equação  $x^2 - x + 2 = 0$ , que não tem solução real.

Como a solução está definida para todo  $x$ , mas a derivada não está definida para  $x = -1$  e  $x = 2$  e o ponto inicial  $x_0 = 1$  está entre os valores  $x = -1$  e  $x = 2$  concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo  $(-1, 2)$ , que é o maior intervalo em que a solução  $y(x)$  e a sua derivada estão definidas.

- (c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para  $x$  tal que  $2x - 1 = 0$ , ou seja, somente para  $x = 1/2$  que é ponto de máximo local, pois como a solução está limitada à região  $-1 < y < 1$ , então da equação diferencial vemos que  $\frac{dy}{dx} > 0$ , para  $x < 1/2$  e  $\frac{dy}{dx} < 0$ , para  $x > 1/2$ .

- (d) Nos pontos  $x = -1$  e  $x = 2$  a reta tangente à curva solução  $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$



é vertical, ou seja,  $\frac{dx}{dy} = 0$ , pois pela equação diferencial,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2 - 3}{2x - 1},$$

para  $x \neq 1/2$ . Assim já sabemos pelo item (b) que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos  $(-1, -1)$  e  $(2, -1)$  onde a tangente é vertical, e que passa pelo ponto inicial  $(1, 0)$ . Neste ponto a inclinação da tangente é  $-1/3$ , pois substituindo-se  $x = 1$  e  $y = 0$  na equação diferencial obtemos  $\frac{dy}{dx} = -1/3$ . Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para  $x = 1/2$  e como a solução está limitada à região  $-1 < y < 1$ , então da equação diferencial vemos que  $\frac{dy}{dx} > 0$ , para  $x < 1/2$  e  $\frac{dy}{dx} < 0$ , para  $x > 1/2$ . Deduzimos daí que a solução é crescente até  $x = 1/2$  depois começa a decrescer.

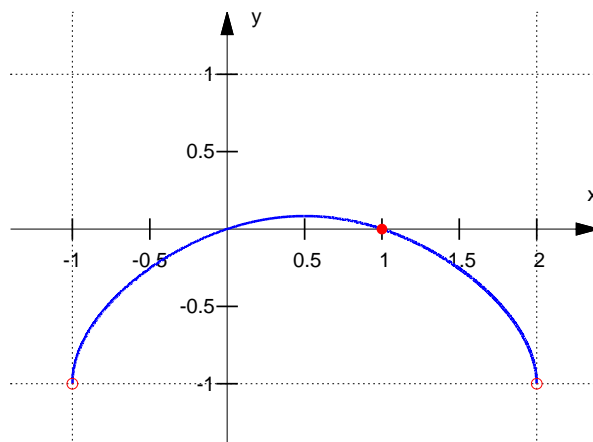


Figura 1.9 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.12

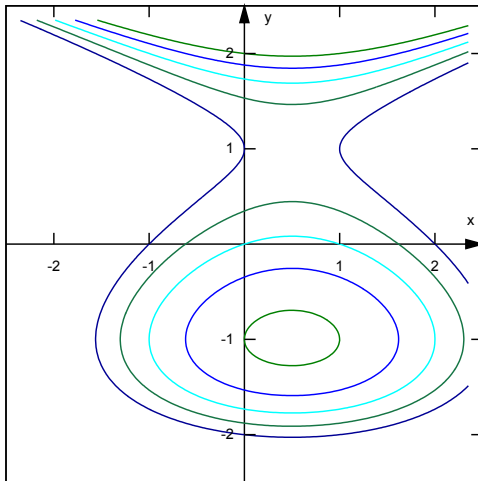


Figura 1.10 – Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.12

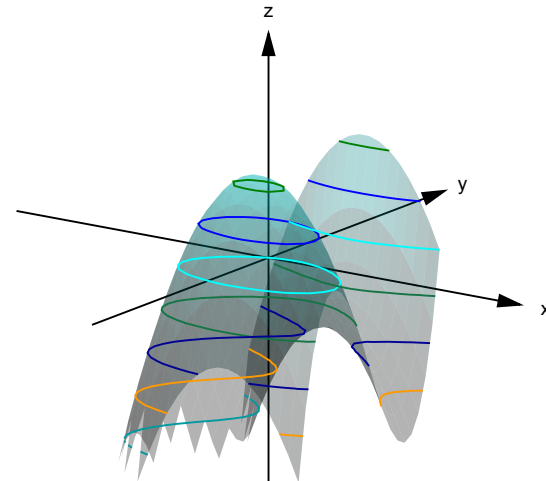


Figura 1.11 – Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.12 como curvas de nível de uma função de duas variáveis  $z = f(x, y) = y^3 - 3y - x^2 + x$

## Exercícios (respostas na página 116)

3.1. Resolva as equações:

- (a)  $(1 + x^2)y' - xy = 0$ .
- (b)  $y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$ .
- (c)  $(ayx^2 + by)y' - x = 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- (d)  $(ax^2 + b)^{1/2}y' - xy^3 = 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- (e)  $(ay^2 + b)^{1/2} - xy y' = 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- (f)  $ay^2 + b - x^2y y' = 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

3.2. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- (b) Determine o intervalo de validade da solução.
- (c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.
- (d) Faça um esboço do gráfico da solução.

3.3. Mostre que a equação linear  $y' + p(t)y = q(t)$  é equivalente a uma equação separável se

- (a)  $p(t) = a$  e  $q(t) = b$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $p(t) = q(t)$ ;
- (c)  $q(t) = 0$ .

3.4. Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y(100 - y), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e faça um esboço do gráfico da solução.

## 1.4 Aplicações

### 1.4.1 Dinâmica Populacional

#### Crescimento Exponencial

O modelo mais simples de **crescimento populacional** é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população  $\frac{dy}{dt}$  é proporcional a população presente naquele instante  $y(t)$ . Podemos descrever o problema de encontrar  $y(t)$  como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0. \quad (1.16)$$

Para resolvê-la vamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -k dt} = e^{-kt}.$$

Multiplicando-se a equação (1.16) por  $\mu(t) = e^{-kt}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = 0.$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{-kt}y(t) = c \quad \text{ou} \quad y(t) = ce^{kt}.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = y_0$ , obtemos

$$y_0 = ce^{k0} = c.$$

Ou seja a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

**Exemplo 1.13.** Consideremos uma situação formada por uma população de organismos zooplantônicos. São colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à população atual (crescimento exponencial). A população,  $y(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

que como vimos acima tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 3e^{kt}.$$

Como em 10 dias a população é de 240 indivíduos, então substituindo-se  $t = 10$  e  $y = 240$  obtemos

$$240 = 3e^{10k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 80}{10}.$$

Assim, a função que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = 3e^{\frac{\ln 80}{10}t} = 3 \cdot 80^{t/10}.$$

Figura 1.12 – Solução do problema do Exemplo 1.13 e dados obtidos experimentalmente

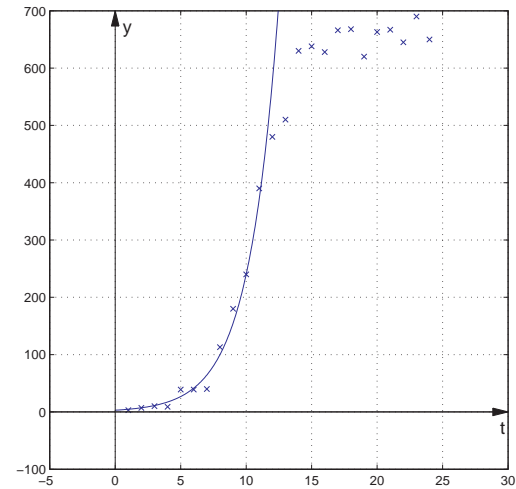


Figura 1.13 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.14 e dados obtidos experimentalmente

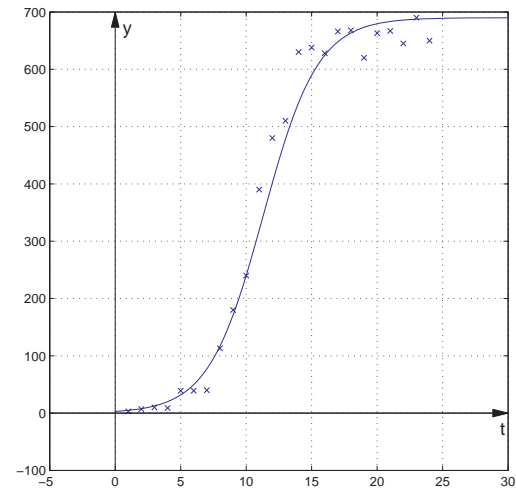




Tabela 1.1 – Número de indivíduos por litro de uma população de cladóceros (*Daphnia laevis*) em experimento de laboratório (dados obtidos de [3])

Dias	População	Dias	População
1	3	13	510
2	7	14	630
3	10	15	638
4	9	16	628
5	39	17	666
6	39	18	668
7	40	19	620
8	113	20	663
9	180	21	667
10	240	22	645
11	390	23	690
12	480	24	650

### Crescimento Logístico

Para levar em conta que a população  $y(t)$  tem um valor máximo sustentável  $y_M$  podemos supor que a taxa de crescimento além de ser proporcional a população atual, é proporcional também à diferença entre  $y_M$  e a população presente. Neste caso a população como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(y_M - y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{y(y_M - y)}$  obtemos

$$\frac{1}{y(y_M - y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} y' dt = \int k dt + c_1$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \int k dt + c_1.$$

Para calcular a integral do lado esquerdo vamos decompor  $\frac{1}{y(y_M - y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{y(y_M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y_M - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $y(y_M - y)$  obtemos

$$1 = A(y_M - y) + By$$

Substituindo-se  $y = 0$  e  $y = y_M$  obtemos  $A = 1/y_M$  e  $B = 1/y_M$ . Assim,

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \frac{1}{y_M} \left( \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{y_M - y} dy \right) = \frac{1}{y_M} (\ln |y| - \ln |y_M - y|)$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln |y| - \ln |y_M - y| = ky_M t + c_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{y_M - y} \right| = c_1 + ky_M t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{y}{y_M - y} = \pm e^{c_1} e^{y_M k t} = c e^{y_M k t}$$

Observe que como  $c_1$  é uma constante, então  $\pm e^{c_1}$  também é uma constante que chamamos de  $c$ . Substituindo-se  $t = t_0$  e  $y = y_0$  na equação acima obtemos

$$c = \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{-y_M k t_0}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$y = (y_M - y) c e^{y_M k t} \Rightarrow y + c e^{y_M k t} y = y_M c e^{y_M k t}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{c y_M e^{y_M k t}}{1 + c e^{y_M k t}} = \frac{\frac{y_0 y_M}{y_M - y_0} e^{y_M k (t - t_0)}}{1 + \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{y_M k (t - t_0)}} = \frac{y_0 y_M e^{y_M k (t - t_0)}}{y_M - y_0 + y_0 e^{y_M k (t - t_0)}}$$

Dividindo-se numerador e denominador por  $e^{y_M k t}$  obtemos

$$y(t) = \frac{y_0 y_M}{y_0 + (y_M - y_0) e^{-y_M k (t - t_0)}}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_M.$$

**Exemplo 1.14.** Consideremos a mesma situação do [Exemplo 1.13](#), ou seja, são colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladóceros em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores.

Sabendo-se que essa população atinge o máximo de 690 indivíduos e que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional tanto a população atual quanto à diferença entre a população máxima e a população atual (crescimento logístico). A população como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(690 - y) \\ y(0) = 3, y(10) = 240 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{y(690-y)}$  obtemos

$$\frac{1}{y(690 - y)} y' = k \quad (1.17)$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{y(690 - y)} y' dt = \int k dt + c$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{y(690 - y)} dy = \int k dt + c.$$

Para calcular a integral do lado esquerdo vamos decompor  $\frac{1}{y(690-y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{y(690 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{690 - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $y(690 - y)$  obtemos

$$1 = A(690 - y) + By$$

Substituindo-se  $y = 0$  e  $y = 690$  obtemos  $A = 1/690$  e  $B = 1/690$ . Assim,

$$\int \frac{1}{y(690-y)} dy = \frac{1}{690} \left( \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{690-y} dy \right) = \frac{1}{690} (\ln |y| - \ln |690-y|)$$

Logo a equação (1.17) tem solução dada implicitamente por

$$\ln |y| - \ln |690-y| = k690t + c_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{690-y} \right| = c_1 + k690t.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{690-y} = \pm e^{c_1} e^{690kt} = ce^{690kt}. \quad (1.18)$$

Observe que como  $c_1$  é uma constante, então  $\pm e^{c_1}$  também é uma constante que chamamos de  $c$ . Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 3$  na equação acima obtemos

$$c = \frac{3}{690-3} = \frac{3}{687} = \frac{1}{229}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$y = (690-y)ce^{690kt} \Rightarrow y + ce^{690kt}y = 690ce^{690kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{690ce^{690kt}}{1 + ce^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{1/c + e^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{229 + e^{690kt}} = \frac{690}{229e^{-690kt} + 1} \quad (1.19)$$

Para determinar o valor de  $k$ , vamos usar o fato de que em 10 dias havia 240 indivíduos. Substituindo-se  $t = 10$  e  $y = 240$  obtemos

$$240 = \frac{690}{229e^{-6900k} + 1} \Rightarrow 229e^{-6900k} = \frac{690}{240} - 1 = \frac{23}{8} - 1 = \frac{15}{8} \Rightarrow -690k = \frac{\ln \frac{15}{1832}}{10}$$

Logo substituindo-se o valor de  $-690k$  obtido acima na solução do PVI (1.19) obtemos que a população de cladóceros em função do tempo é dada por

$$y(t) = \frac{690}{229e^{\frac{\ln \frac{15}{1832}}{10} t} + 1} = \frac{690}{229 \left( \frac{15}{1832} \right)^{\frac{t}{10}} + 1}$$

### 1.4.2 Datação por Carbono 14

A proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. Podemos descrever o problema de encontrar a quantidade de carbono 14 em função do tempo,  $y(t)$ , como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é a mesma do crescimento exponencial, mas vamos resolver, agora, como uma equação separável, ou seja, a equação é equivalente a

$$\frac{1}{y} y' = k.$$

Integrando-se em relação a  $t$ , lembrando-se que  $y' dt = dy$ , obtemos

$$\ln |y| = kt + c_1.$$

Aplicando-se a exponencial, obtemos

$$y(t) = \pm e^{c_1} e^{kt} = ce^{kt}.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = y_0$ , obtemos  $c = y_0$ . Logo a solução do PVI é

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

**Exemplo 1.15.** Em um pedaço de madeira é encontrado  $1/500$  da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, ou seja, que em 5600 anos metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Vamos determinar a idade deste pedaço de madeira.

O problema de valor inicial que descreve esta situação é

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Substituindo-se  $t = 5600$  e  $y = y_0/2$  (meia-vida) obtemos

$$y_0/2 = y_0 e^{k \cdot 5600} \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{5600}$$

Agora substituindo-se  $y = y_0/500$  obtemos

$$\frac{y_0}{500} = y_0 e^{kt} \Rightarrow t = -\frac{\ln 500}{k} = \frac{5600 \ln 500}{\ln 2} \approx 50200 \text{ anos}$$

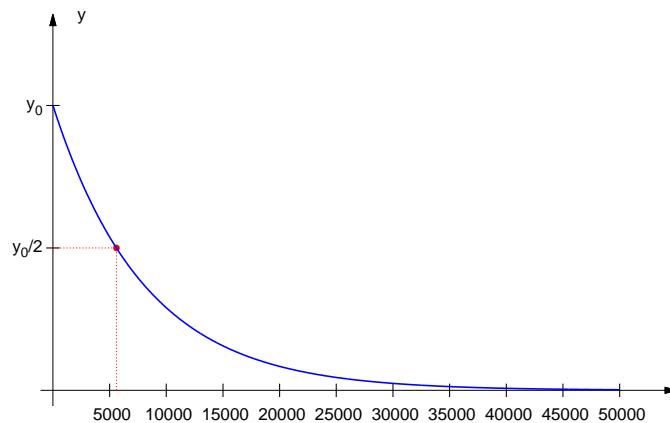


Figura 1.14 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.15



## 1.4.3 Misturas

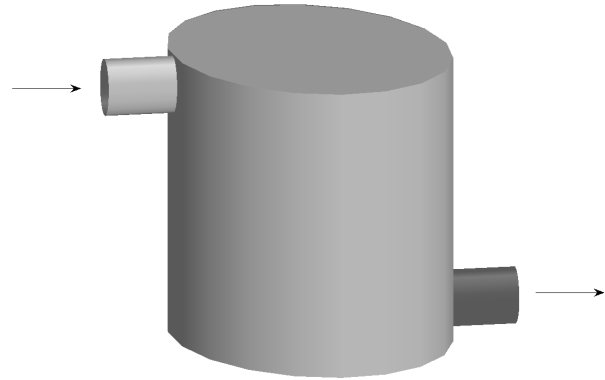


Figura 1.15 – Tanque

Vamos supor que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial de  $V_0$  litros e  $Q_0$  gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de  $T_e$  litros por minuto possuindo uma concentração de  $C_e$  gramas de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de  $T_s$  litros por minuto.

A taxa de variação da quantidade de sal no tanque é igual a taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.

A taxa com que entra sal no tanque é igual a taxa com que entra a mistura,  $T_e$ , vezes a concentração de entrada,  $C_e$ . E a taxa com que sai sal do tanque é igual a taxa com que sai a mistura do tanque,  $T_s$ , vezes a concentração de sal que sai do tanque,  $C_s$ . Como a solução é bem misturada esta concentração é igual a concentração de sal no tanque, ou seja,

$$C_s(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

Como o volume no tanque,  $V(t)$ , é igual ao volume inicial,  $V_0$ , somado ao volume que entra no tanque menos o volume que sai do tanque, então

$$V(t) = V_0 + T_e t - T_s t = V_0 + (T_e - T_s)t.$$

Assim, a quantidade de sal no tanque,  $Q(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = T_e C_e - T_s \frac{Q}{V_0 + (T_e - T_s)t} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

**Exemplo 1.16.** Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoar à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Vamos determinar qual a concentração de sal no tanque ao fim de 50 minutos.

O problema pode ser modelado pelo seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -4 \frac{Q}{100+2t} \\ Q(0) = 30 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser escrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 4 \frac{Q}{100+2t} = 0$$

Um fator integrante é neste caso

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t} dt} = e^{2 \ln(100+2t)} = e^{\ln((100+2t)^2)} = (100+2t)^2.$$

Multiplicando-se a equação por  $\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t} dt} = (100+2t)^2$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( (100+2t)^2 Q \right) = 0.$$

Integrando-se obtemos

$$(100+2t)^2 Q(t) = c$$

ou seja,

$$Q(t) = \frac{c}{(100+2t)^2}.$$

Substituindo  $t = 0$  e  $Q = 30$ :

$$c = 30 \cdot 100^2 = 3 \cdot 10^5$$

Substituindo o valor de  $c$  encontrado:

$$Q(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}$$

A concentração é o quociente da quantidade de sal pelo volume que é igual a  $V(t) = 100 + 2t$ . Assim

$$c(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2t)^3}$$

e após 50 minutos

$$c(50) = \frac{3 \cdot 10^5}{(200)^3} = \frac{3}{80} = 0,0375 \text{ gramas/litro}$$

Figura 1.16 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.16

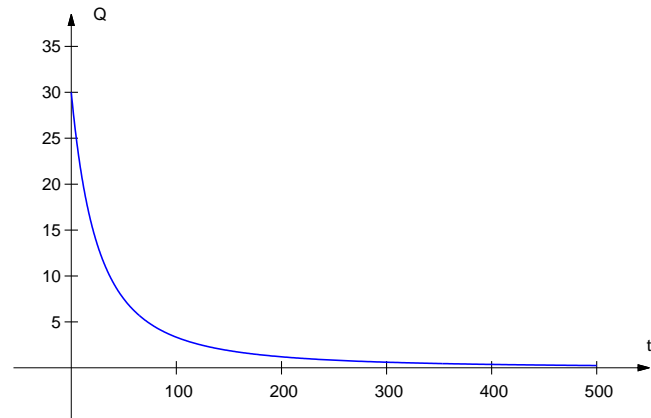
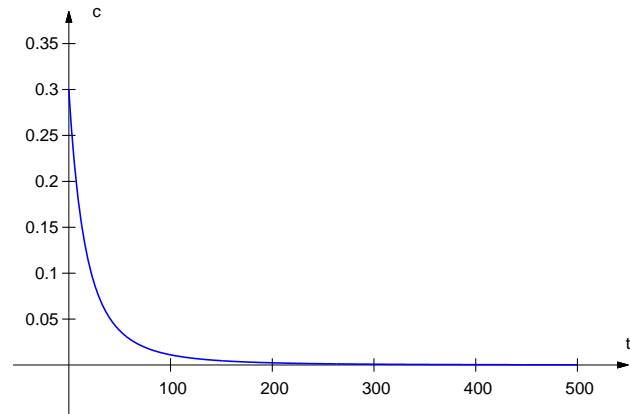


Figura 1.17 – Concentração como função do tempo para o problema do Exemplo 1.16



### 1.4.4 Lei de Resfriamento de Newton

A **lei de resfriamento de Newton** diz que a taxa de variação da temperatura  $T(t)$  de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo  $T(t)$  e a temperatura constante do meio ambiente  $T_m$ , ou seja, a temperatura do corpo,  $T(t)$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

**Exemplo 1.17.** O café está a  $90^\circ \text{C}$  logo depois de coado e, um minuto depois, passa para  $85^\circ \text{C}$ , em uma cozinha a  $25^\circ \text{C}$ . Vamos determinar a temperatura do café em função do tempo e o tempo que levará para o café chegar a  $60^\circ \text{C}$ .

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 25) \\ T(0) = 90, T(1) = 85 \end{cases}$$

Dividindo-se a equação por  $T - 25$ :

$$\frac{1}{T - 25} T' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$

$$\int \frac{1}{T - 25} T' dt = \int k dt$$

$$\int \frac{1}{T - 25} dT = \int k dt$$

$$\ln |T - 25| = kt + c_1$$

$$T(t) = 25 \pm e^{c_1} e^{kt} = 25 + ce^{kt}$$

Substituindo  $t = 0$  e  $T = 90$ :

$$90 = 25 + c \Rightarrow c = 65$$

$$T(t) = 25 + 65e^{kt}$$

Substituindo-se  $t = 1$  e  $T = 85$ :

$$85 = 25 + 65e^k \Rightarrow k = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$$

Assim a temperatura do café em função do tempo é dada por

$$T(t) = 25 + 65e^{\ln\left(\frac{60}{65}\right)t} = 25 + 65\left(\frac{60}{65}\right)^t$$

Substituindo  $T = 60$ :

$$60 = 25 + 65e^{\ln\left(\frac{60}{65}\right)t}$$

Logo o tempo necessário para que o café atinja  $60^\circ$  é de

$$t = \frac{\ln(35/65)}{\ln(60/65)} \approx 8 \text{ min}$$

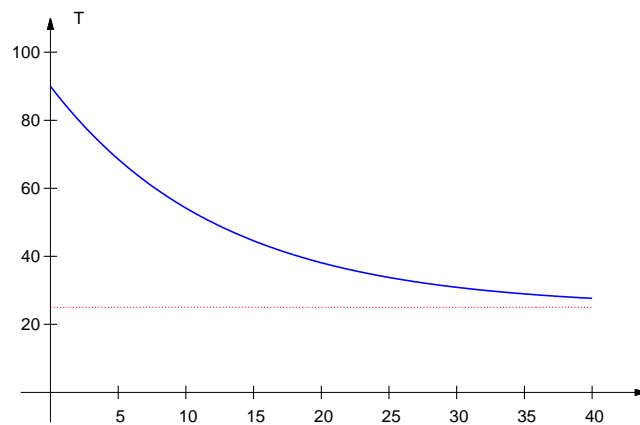


Figura 1.18 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.17



## 1.4.5 Lei de Torricelli

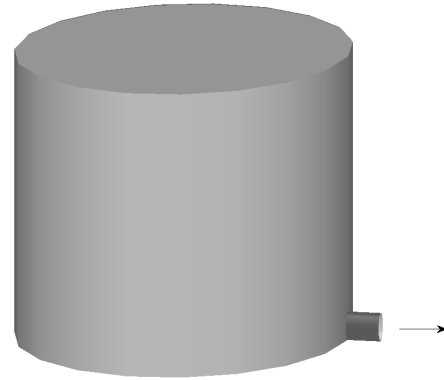


Figura 1.19 – Tanque com um orifício

A **lei de Torricelli** diz que a taxa com que um líquido escoar por um orifício situado a uma profundidade  $h$  é proporcional a  $\sqrt{h}$ . Ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Existe uma relação entre  $V$  e  $h$ ,  $V = V(h)$ , que depende da forma do tanque. Como

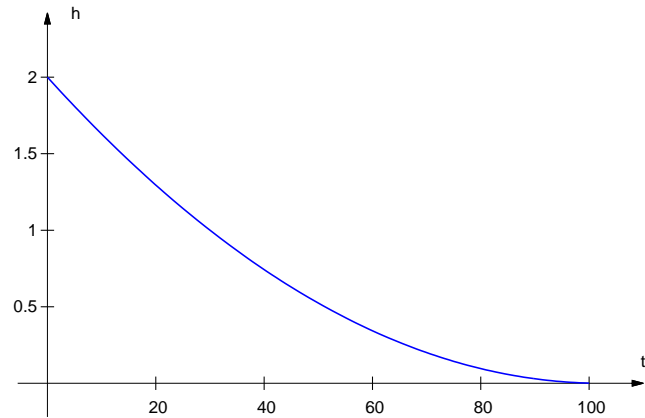
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt},$$

então a altura,  $h(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = k \frac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

**Exemplo 1.18.** Um tambor cilíndrico, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a água cair pela metade vamos determinar a altura  $h$  da água dentro do tambor em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia.

Figura 1.20 – Solução do problema do Exemplo 1.18



Como para o cilindro

$$V(h) = \pi R^2 h = \pi h$$

então

$$\frac{dV}{dh} = \pi.$$

Como uma constante sobre  $\pi$  é também uma constante, então o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \\ h(0) = 2, h(30) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{h}} h' = k.$$

Integrando-se ambos os membros em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} h' dt = \int k dt.$$

Fazendo-se a substituição  $h' dt = dh$  obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int k dt.$$

Calculando-se as integrais obtemos a solução geral na forma implícita

$$2\sqrt{h} = kt + c \tag{1.20}$$

ou explicitando-se a solução:

$$h(t) = \left(\frac{c + kt}{2}\right)^2.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $h = 2$  em (1.20):

$$2\sqrt{2} = c$$

Substituindo-se  $t = 30$  e  $h = 1$  em (1.20):

$$c + 30k = 2 \Rightarrow k = \frac{2 - c}{30} = \frac{1 - \sqrt{2}}{15}$$

Assim a função que descreve como a altura da coluna de água varia com o tempo é dada por

$$h(t) = \left(\frac{c + kt}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} + \frac{1 - \sqrt{2}}{30}t\right)^2$$

Substituindo-se  $h = 0$ :

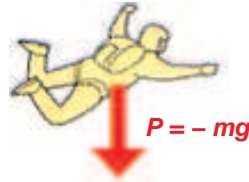
$$t = -\frac{c}{k} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 102 \text{ min}$$

### 1.4.6 Resistência em Fluidos

Um corpo que se desloca em um meio fluido sofre uma força de resistência que é proporcional a velocidade do corpo. A velocidade,  $v(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F - kv \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Para um corpo que cai a força  $F$  é igual ao peso do corpo. Para um barco que se desloca na água ou um carro em movimento a força  $F$  é igual a força do motor.



**Exemplo 1.19.** Um pára-quedista com o seu pára-quedas pesa 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O pára-quedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Sabe-se que a velocidade limite é de 5 metros por segundo. Vamos determinar a velocidade que o pára-quedista atinge no momento que o pára-quedas abre, quanto tempo demora para a velocidade chegar a 5,1 metros por segundo e como varia a altura em função do tempo.

Vamos convencionar que o sentido positivo é para cima e que a origem está na superfície da terra. Até o momento em que o pára-quedas abre a velocidade é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = P = -mg \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -10 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

o que leva a solução

$$v(t) = -10t.$$

Quando o pára-quedas abre a velocidade é então de

$$v(5) = -50 \text{ m/s}$$

Até este momento a altura do pára-quedista em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v(t) = -10t \\ h(0) = 1400 \end{cases}$$

cuja solução é

$$h(t) = 1400 - 5t^2$$

Assim até o momento que o pára-quedas abre o pára-quedista caiu

$$1400 - h(5) = 125 \text{ m}$$

Daí em diante a velocidade do pára-quedista é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg - kv \\ v(5) = -50 \end{cases}$$

Figura 1.21 – Módulo da velocidade do Exemplo 1.19

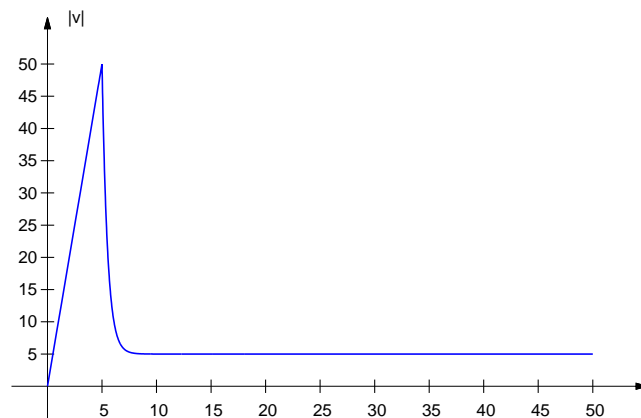
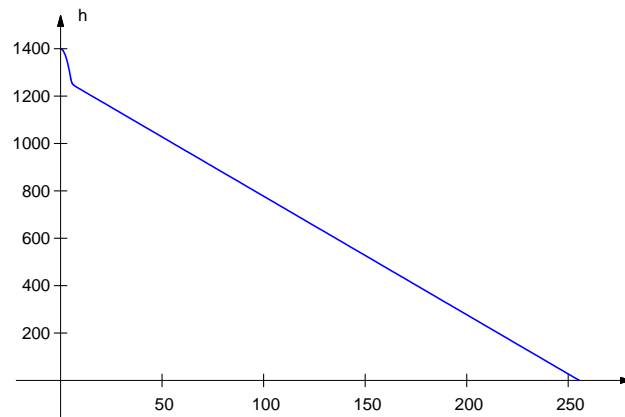


Figura 1.22 – Altura do Exemplo 1.19





A força de resistência é igual a  $-kv$ , o sinal menos com uma constante positiva indica que a força de resistência é no sentido contrário ao da velocidade. Observe que a velocidade é negativa o que faz com que a força de resistência seja positiva, ou seja, para cima como convencionamos no início.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -10 - \frac{k}{70}v = -10 - Kv, & K = k/70 \\ v(5) = -50 \end{cases}$$

A equação

$$\frac{dv}{dt} = -10 - Kv$$

pode ser reescrita como

$$\frac{1}{10 + Kv} v' = -1$$

Integrando-se

$$\ln |10 + Kv| = -Kt + c_1$$

$$10 + Kv = \pm e^{c_1} e^{-Kt}$$

$$v(t) = -\frac{10}{K} + ce^{-Kt}$$

A velocidade limite é de  $-5$  m/s, logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{10}{K} = -5 \Rightarrow K = 2$$

Substituindo-se  $t = 5$  e  $v = -50$  em  $v(t) = -\frac{10}{K} + ce^{-Kt}$ :

$$-50 = -5 + ce^{-5K} \Rightarrow c = -45e^{5K}$$

ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$v(t) = -5 - 45e^{-2(t-5)}$$

Substituindo-se  $v = -5,1$  (lembre-se que é negativo por que é para baixo!) obtemos

$$-5,1 = -5 - 45e^{-2(t-5)} \Rightarrow t - 5 = \frac{\ln 450}{2} \approx 3 \text{ segundos},$$

ou seja, 3 segundos depois do pára-quedas aberto a velocidade já é de 5,1 m/s. Depois que o pára-quedas abre a altura em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v(t) = -5 - 45e^{-2(t-5)} \\ h(5) = 1400 - 125 = 1275 \end{cases}$$

a solução geral da equação é

$$h(t) = -5(t - 5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)} + c$$

Substituindo-se  $t = 5$  e  $h = 1275$  obtemos  $c = 2505/2$ . Assim a solução deste problema de valor inicial é

$$h(t) = \frac{2505}{2} - 5(t - 5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)}, \quad \text{para } t > 5$$

### 1.4.7 Circuitos Elétricos

Um circuito  $RC$  é um circuito que tem um resistor de resistência  $R$ , um capacitor de capacitância  $C$  e um gerador que gera uma diferença de potencial ou força eletromotriz  $V(t)$  ligados em série. A queda de potencial num resistor de resistência  $R$  é igual a  $RI$  e num capacitor de capacitância  $C$  é igual a  $\frac{Q}{C}$ .

Pela segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas) a soma das forças eletromotrizes (neste caso apenas  $V(t)$ ) é igual a soma das quedas de potencial (neste caso  $RI$  na resistência e  $Q/C$  no capacitor), ou seja,

$$RI + \frac{Q}{C} = V(t).$$

Como  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ , então a carga  $Q(t)$  no capacitor satisfaz a equação diferencial

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t).$$

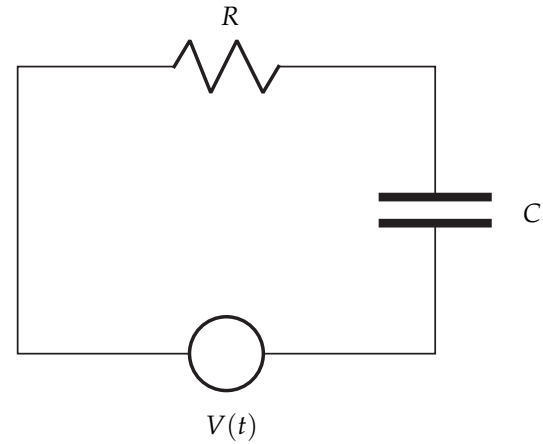


Figura 1.23 – Circuito RC

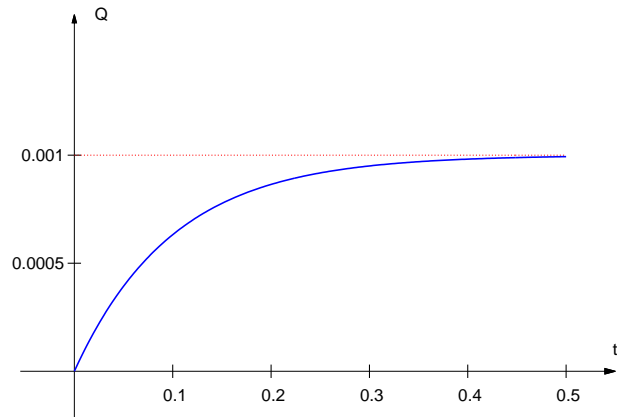


Figura 1.24 – Solução do problema do Exemplo 1.20

**Exemplo 1.20.** Em um circuito  $RC$  uma bateria gera uma diferença de potencial de 10 volts enquanto a resistência é de  $10^3$  ohms e a capacitância é de  $10^{-4}$  farads. Vamos encontrar a carga  $Q(t)$  no capacitor em cada instante  $t$ , se  $Q(0) = 0$  e o limite de  $Q(t)$  quando  $t$  tende a mais infinito.

$$10^3 \frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + 10Q = 10^{-2}.$$

A equação é linear. Multiplicando-se a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{10t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt} (e^{10t} Q) = 10^{-2} e^{10t}$$

integrando-se obtemos

$$e^{10t} Q(t) = 10^{-3} e^{10t} + k$$

ou

$$Q(t) = 10^{-3} + k e^{-10t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 0$  obtemos  $k = -10^{-3}$  e assim a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3} (1 - e^{-10t}) \text{ coulombs.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 10^{-3} \text{ coulombs.}$$

### 1.4.8 Reações Químicas

Um composto  $C$  é formado da reação de duas substâncias  $A$  e  $B$ . A reação ocorre de forma que para cada  $m$  gramas de  $A$ ,  $n$  gramas de  $B$  são usadas. A taxa com que se obtém a substância  $C$  é proporcional tanto a quantidade de  $A$  quanto a quantidade de  $B$  **não** transformadas. Inicialmente havia  $\alpha_0$  gramas de  $A$  e  $\beta_0$  gramas de  $B$ .

Sejam  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  as quantidades de  $A$  e  $B$  não transformadas, respectivamente e  $y(t)$  a quantidade de  $C$  obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \quad (1.21)$$

Sejam  $a(t)$  e  $b(t)$  a quantidade de  $A$  e  $B$  transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{m}{n}.$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{m}{m+n}y(t), \quad b(t) = \frac{n}{m+n}y(t). \quad (1.22)$$

Mas as quantidades de  $A$  e  $B$  não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = \alpha_0 - a(t), \quad \beta(t) = \beta_0 - b(t). \quad (1.23)$$

Substituindo-se (1.22) em (1.23) e (1.23) em (1.21) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left( \alpha_0 - \frac{m}{m+n}y \right) \left( \beta_0 - \frac{n}{m+n}y \right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto \left( \alpha_0 \frac{m+n}{m} - y \right) \left( \beta_0 \frac{m+n}{n} - y \right).$$

Neste caso a quantidade da substância  $C$  como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k(\alpha' - y)(\beta' - y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{em que } k > 0, \alpha' = \alpha_0 \frac{m+n}{m} \text{ e } \beta' = \beta_0 \frac{m+n}{n}.$$

- (a) Se  $\alpha' = \beta'$ . Neste caso os reagentes foram colocados em quantidades estequiométricas, ou seja, de forma que não haverá sobra de reagentes.

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{(\alpha' - y)^2}$  obtemos

$$\frac{1}{(\alpha' - y)^2} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)^2} y' dt = \int k dt + c$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)^2} dy = \int k dt + c.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{\alpha' - y} = kt + c.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 0$  na equação acima obtemos

$$c = \frac{1}{\alpha'}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$\alpha' - y = \frac{1}{kt + c}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \alpha' - \frac{1}{kt + c}$$

Substituindo-se o valor de  $c$  obtido:

$$y(t) = \alpha' - \frac{\alpha'}{\alpha'kt + 1}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \alpha' = \beta',$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \alpha_0 - \frac{m}{m+n} y(t) \right) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \beta_0 - \frac{n}{m+n} y(t) \right) = 0.$$

- (b) Se  $\alpha' \neq \beta'$ . Neste caso os reagentes foram colocados em quantidades não estequiométricas e haverá sobra de um dos reagentes.

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)}$  obtemos

$$\frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)} y' dt = \int k dt + c_1$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)} dy = \int k dt + c_1.$$

Vamos decompor  $\frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)} = \frac{A}{\alpha' - y} + \frac{B}{\beta' - y}$$



Multiplicando-se a equação acima por  $(\alpha' - y)(\beta' - y)$  obtemos

$$1 = A(\beta' - y) + B(\alpha' - y)$$

Substituindo-se  $y = \alpha'$  e  $y = \beta'$  obtemos  $A = 1/(\beta' - \alpha')$  e  $B = 1/(\alpha' - \beta')$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\alpha' - y)(\beta' - y)} dy &= \frac{1}{\beta' - \alpha'} \left( \int \frac{1}{\alpha' - y} dy - \int \frac{1}{\beta' - y} dy \right) \\ &= -\frac{1}{\beta' - \alpha'} (\ln |\alpha' - y| - \ln |\beta' - y|) \end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln |\alpha' - y| - \ln |\beta' - y| = -k(\beta' - \alpha')t + c_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{\alpha' - y}{\beta' - y} \right| = c_1 - k(\beta' - \alpha')t.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{\alpha' - y}{\beta' - y} = \pm e^{c_1} e^{-(\beta' - \alpha')kt} = c e^{-(\beta' - \alpha')kt}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 0$  na equação acima obtemos

$$c = \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$\alpha' - y = (\beta' - y)ce^{-(\beta' - \alpha')kt} \Rightarrow y - ce^{-(\beta' - \alpha')kt}y = \alpha' - \beta'ce^{-(\beta' - \alpha')kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{\alpha' - \beta' c e^{-(\beta' - \alpha')kt}}{1 - c e^{-(\beta' - \alpha')kt}}$$

Substituindo-se o valor de  $c$  obtido:

$$y(t) = \beta' \alpha' \frac{1 - e^{-(\beta' - \alpha')kt}}{\beta' - \alpha' e^{-(\beta' - \alpha')kt}}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \begin{cases} \alpha' = \alpha_0 \frac{m+n}{m}, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ \beta' = \beta_0 \frac{m+n}{n}, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \alpha_0 - \frac{m}{m+n} y(t) \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ \alpha_0 - \frac{m}{n} \beta_0, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \beta_0 - \frac{n}{m+n} y(t) \right) = \begin{cases} \beta_0 - \frac{n}{m} \alpha_0, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ 0, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases}.$$

**Exemplo 1.21.** Um composto  $C$  é formado da reação de duas substâncias  $A$  e  $B$ . A reação ocorre de forma que para cada grama de  $B$ , 2 gramas de  $A$  são usadas. A taxa com que se obtém a substância  $C$  é proporcional tanto a quantidade de  $A$  quanto a quantidade de  $B$  **não** transformadas. Inicialmente havia 40 gramas de  $A$  e 50 gramas de  $B$ . Vamos determinar a quantidade de  $C$  em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 10 gramas de  $C$ .

Sejam  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  as quantidades de  $A$  e  $B$  não transformadas, respectivamente e  $y(t)$  a quantidade de  $C$  obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \quad (1.24)$$

Sejam  $a(t)$  e  $b(t)$  a quantidade de  $A$  e  $B$  transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad a(t) = 2b(t).$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{2}{3}y(t), \quad b(t) = \frac{1}{3}y(t). \quad (1.25)$$

Mas as quantidades de  $A$  e  $B$  não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = 40 - a(t), \quad \beta(t) = 50 - b(t). \quad (1.26)$$

Substituindo-se (1.25) em (1.26) e (1.26) em (1.24) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(40 - \frac{2}{3}y\right) \left(50 - \frac{1}{3}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (60 - y)(150 - y).$$

Neste caso a quantidade da substância  $C$  como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k(60 - y)(150 - y) \\ y(0) = 0, \quad y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{(60-y)(150-y)}$  obtemos

$$\frac{1}{(60 - y)(150 - y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{(60 - y)(150 - y)} y' dt = \int k dt + c_1$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{(60-y)(150-y)} dy = \int k dt + c_1.$$

Vamos decompor  $\frac{1}{(60-y)(150-y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{(60-y)(150-y)} = \frac{A}{60-y} + \frac{B}{150-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $(60-y)(150-y)$  obtemos

$$1 = A(150-y) + B(60-y)$$

Substituindo-se  $y = 60$  e  $y = 150$  obtemos  $A = 1/90$  e  $B = -1/90$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(60-y)(150-y)} dy &= \frac{1}{90} \left( \int \frac{1}{60-y} dy - \int \frac{1}{150-y} dy \right) \\ &= -\frac{1}{90} (\ln |60-y| - \ln |150-y|) \end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln |60-y| - \ln |150-y| = -90kt + c_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{60-y}{150-y} \right| = c_1 - 90kt.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{60-y}{150-y} = \pm e^{c_1} e^{-90kt} = ce^{-90kt}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 0$  na equação acima obtemos

$$c = \frac{2}{5}.$$

Substituindo-se  $c = \frac{2}{5}$ ,  $t = 10$  e  $y = 10$  na equação acima obtemos

$$\frac{25}{28} = e^{-900k}$$

ou

$$90k = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{28}{25} \right).$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$60 - y = (150 - y)ce^{-90kt} \Rightarrow y - ce^{-90kt}y = 60 - 150ce^{-90kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{60 - 150ce^{-90kt}}{1 - ce^{-90kt}}$$

Substituindo-se os valores de  $c$  e  $k$  obtidos:

$$y(t) = \frac{300(1 - e^{-\frac{1}{10} \ln(\frac{28}{25})t})}{5 - 2e^{-\frac{1}{10} \ln(\frac{28}{25})t}} = \frac{300(1 - (\frac{28}{25})^{-t/10})}{5 - 2(\frac{28}{25})^{-t/10}}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 60 \text{ gramas}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (40 - \frac{2}{3}y(t)) = 0$$

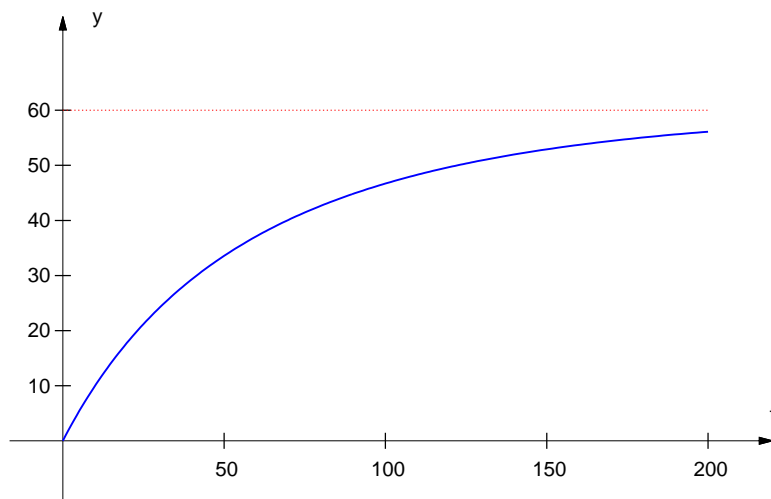


Figura 1.25 – Função do Exemplo 1.21

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (50 - \frac{1}{3}y(t)) = 30 \text{ gramas}$$

Portanto a quantidade inicial de  $A$  será toda consumida na reação, entretanto sobrá ainda 30 gramas de  $B$ .

**Exemplo 1.22.** Nas mesmas condições de exemplo anterior, um composto  $C$  é formado da reação de duas substâncias  $A$  e  $B$ . A reação ocorre de forma que para cada grama de  $B$ , 2 gramas de  $A$  são usadas. A taxa com que se obtém a substância  $C$  é proporcional tanto a quantidade de  $A$  quanto a quantidade de  $B$  **não** transformadas. Mas agora vamos supor que havia inicialmente 40 gramas de  $A$  e 20 gramas de  $B$ . Vamos determinar a quantidade de  $C$  em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 10 gramas de  $C$ .

Temos então

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(40 - \frac{2}{3}y\right) \left(20 - \frac{1}{3}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (60 - y)^2.$$

Neste caso a quantidade da substância  $C$  como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k(60 - y)^2 \\ y(0) = 0, y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{(60-y)^2}$  obtemos

$$\frac{1}{(60 - y)^2} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{(60 - y)^2} y' dt = \int k dt + c$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{(60 - y)^2} dy = \int k dt + c.$$



Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{60 - y} = kt + c.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 0$  na equação acima obtemos

$$c = \frac{1}{60}.$$

Substituindo-se  $c = \frac{1}{60}$ ,  $t = 10$  e  $y = 10$  na equação acima obtemos

$$k = \frac{1}{500} - \frac{1}{600} = \frac{1}{3000}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$60 - y = \frac{1}{kt + c}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 60 - \frac{1}{kt + c}$$

Substituindo-se os valores de  $c$  e  $k$  obtidos:

$$y(t) = 60 - \frac{3000}{t + 50}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 60,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (40 - \frac{2}{3}y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (20 - \frac{1}{3}y(t)) = 0.$$

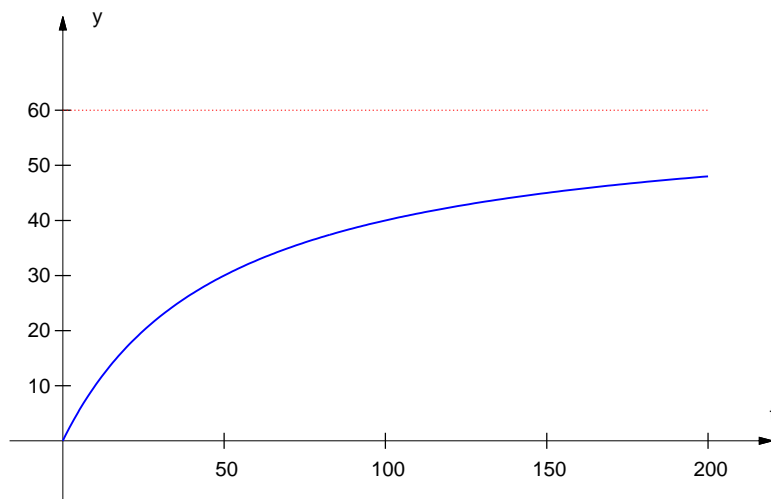


Figura 1.26 – Função do Exemplo 1.22

## Exercícios (respostas na página 122)

- 4.1. Um tanque contém 100 litros de uma solução a uma concentração de 1 grama por litro. Uma solução com uma concentração de  $2te^{-\frac{1}{100}t}$  gramas por litro entra no tanque a uma taxa constante de 1 litro por minuto, enquanto que a solução bem misturada sai à mesma taxa.
- (a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante  $t$ , onde  $t$  é contado a partir do início do processo.
  - (b) Calcule a concentração de sal no tanque  $t = 10$  minutos após o início do processo.
- 4.2. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água pura. Então, água salgada, contendo  $30e^{-\frac{2}{10}t}$  gramas de sal por litro, passa a ser bombeada para o tanque a uma taxa de 10 litros por minuto. Simultaneamente a solução passa a ser agitada e retirada do tanque na mesma taxa.
- (a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante  $t$ , onde  $t$  é contado a partir do início do processo.
  - (b) Calcule em que instante a concentração de sal no tanque será de 7,5 gramas por litro.
- 4.3. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água e 100 gramas de sal. Então uma mistura de água e sal na concentração de 5 gramas de sal por litro é bombeada para o tanque a uma taxa de 4 litros por minuto. Simultaneamente a solução (bem misturada) é retirada do tanque na mesma taxa.
- (a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante  $t$ , onde  $t$  é contado a partir do início do processo.
  - (b) Calcule a concentração limite de sal no tanque quando  $t \rightarrow \infty$  e o tempo necessário para que a concentração atinja metade deste valor.
- 4.4. Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial 100 litros e 10 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto possuindo uma concentração de 1 grama de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de 2 litros por minuto.

- (a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante  $t$ , onde  $t$  é contado a partir do início do processo.
- (b) De qual valor se aproxima a concentração quando o tanque está enchendo, se a sua capacidade é de 200 litros?

4.5. Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial 100 litros e 10 gramas de sal e que água pura seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 1 litro por minuto. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de 2 litros por minuto.

- (a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante  $t$ , onde  $t$  é contado a partir do início do processo.
- (b) De qual valor se aproxima a concentração quando o tanque se aproxima de ficar vazio?

4.6. Dentro da Terra a força da gravidade é proporcional à distância ao centro. Um buraco é cavado de polo a polo e uma pedra é largada na borda do buraco.

- (a) Determine a velocidade da pedra em função da distância.
- (b) Com que velocidade a pedra atinge o centro da Terra? Com que velocidade atinge o outro polo?

(Sugestão:  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$  e  $v = \frac{dx}{dt}$ )

- 4.7. A taxa com que uma gota esférica se evapora ( $\frac{dV}{dt}$ ) é proporcional a sua área. Determine o raio da gota em função do tempo, supondo que no instante  $t = 0$  o seu raio é  $r_0$  e que em uma hora o seu raio seja a metade.
- 4.8. Num processo químico, uma substância se transforma em outra, a uma taxa proporcional à quantidade de substância não transformada. Se esta quantidade é 48 ao fim de 1 hora, e 27, ao fim de 3 horas, qual a quantidade inicial da substância?
- 4.9. A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias no instante  $t$ . Após três horas, observou-se a existência de 400 bactérias. Após 9 horas, 2500 bactérias. Qual era o número inicial de bactérias?

- 4.10. Uma população de bactérias cresce a uma taxa proporcional a população presente. Sabendo-se que após uma hora a população é 2 vezes a população inicial, determine a população como função do tempo e o tempo necessário para que a população triplique. Faça um esboço do gráfico da população em função do tempo.
- 4.11. Suponha que em uma comunidade de 100 pessoas inicialmente apenas uma pessoa seja portador de um vírus e que a taxa com que o vírus se espalha na comunidade seja proporcional tanto ao número de pessoas infectadas como também ao número de pessoas não infectadas. Se for observado que após 4 semanas 5 pessoas estão infectadas. Determine o número de pessoas infectadas em função do tempo. Faça um esboço do gráfico da solução.
- 4.12. Na tabela abaixo estão os dados dos 6 penúltimos recenseamentos realizados no Brasil.

Ano	População
1950	52 milhões
1960	70 milhões
1970	93 milhões
1980	119 milhões
1991	147 milhões
2000	170 milhões

Podemos escrever o modelo logístico na forma

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = ay + b$$

em que  $a = -k$  e  $b = ky_M$ . Usando a tabela anterior, podemos aproximar a derivada  $y'(t_i)$ , para  $t_i = 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000$ , pela diferença finita para frente

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

ou pela diferença finita para trás

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

Complete a tabela seguinte

$t_i$	$y_i$	$g_i = \frac{1}{y_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$	$h_i = \frac{1}{y_i} \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$	$\frac{g_i + h_i}{2}$
1950	52 milhões	0,0346	-	
1960	70 milhões	0,0329	0,0257	
1970	93 milhões	0,0280	0,0247	
1980	119 milhões	0,0214	0,0218	
1991	149 milhões	0,0174	0,0173	
2000	170 milhões	-	0,0150	

Assim

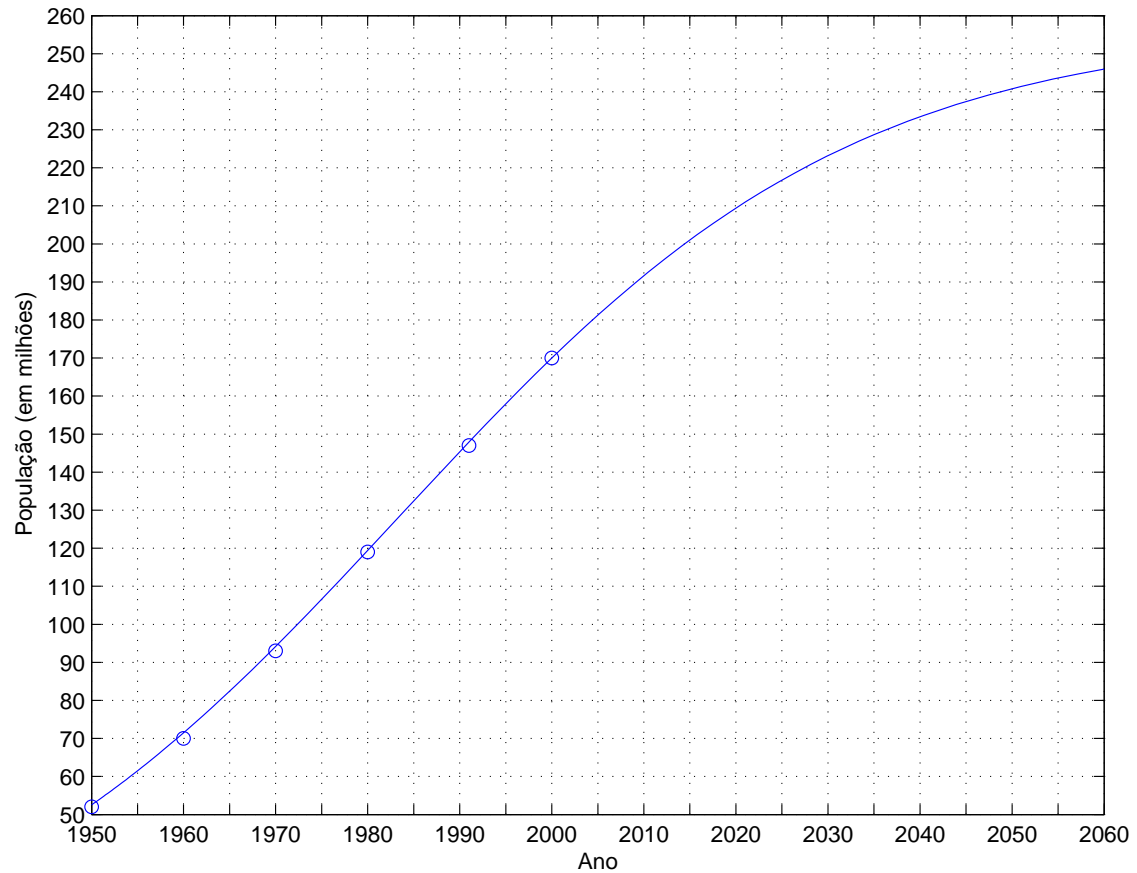
$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2},$$

para  $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$ . Usando quadrados mínimos encontre a melhor reta,  $z = ay + b$ , que se ajusta ao conjunto de pontos  $(y_i, \frac{g_i + h_i}{2})$ , para  $y_i = 1960, 1970, 1980, 1991$ . Determine  $k$  e  $y_M$  a partir dos valores de  $a$  e  $b$  encontrados.

Usando  $t_0 = 2000$ ,  $y_0 = 170$  milhões obtenha

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04(t-2000)}}$$

Determine a estimativa para a população do ano 2010,  $y(2010)$ . Compare com o recenseamento realizado em 2010, em que a população foi de 190,7 milhões.



- 4.13. Um tambor cônico com vértice para baixo, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a altura da coluna de água cair pela metade determinar a altura  $h$  em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia. A **lei de Torricelli** diz que a taxa com que um líquido escoar por um orifício situado a uma profundidade  $h$  é proporcional a  $\sqrt{h}$ .
- 4.14. Um termômetro é levado de uma sala onde a temperatura é de  $20^\circ\text{C}$  para fora onde a temperatura é de  $5^\circ\text{C}$ . Após  $1/2$  minuto o termômetro marca  $15^\circ\text{C}$ .
- (a) Determine a temperatura marcada no termômetro como função do tempo.
  - (b) Qual será a leitura do termômetro após 1 minuto?
  - (c) Em quanto tempo o termômetro irá marcar  $10^\circ\text{C}$ ?
- 4.15. Um bote motorizado e seu tripulante têm uma massa de 120 kg e estava inicialmente no repouso. O motor exerce uma força constante de 10 N, na direção do movimento. A resistência exercida pela água, ao movimento, é, em módulo, igual ao dobro da velocidade.
- (a) Determine a velocidade do bote em função do tempo.
  - (b) Determine a velocidade limite do bote.
  - (c) Faça um esboço do gráfico da velocidade em função do tempo.
- 4.16. Em um circuito RC uma bateria gera uma diferença de potencial de 10 volts enquanto a resistência é de 200 ohms e a capacitância é de  $10^{-4}$  farads. Encontre a carga  $Q(t)$  no capacitor em cada instante  $t$ , se  $Q(0) = 0$ . Encontre também a corrente  $I(t)$  em cada instante  $t$ .
- 4.17. Considere o circuito elétrico abaixo formado por um resistor, um indutor e uma fonte de tensão externa. A bateria gera uma diferença de potencial de  $V(t) = 10$  volts, enquanto a resistência  $R$  é de 100 ohms e a indutância  $L$  é de 0,5 henrys. Sabendo-se que a queda de potencial em um indutor é igual a  $L \frac{dI}{dt}$ , encontre a corrente  $I(t)$  em cada instante  $t$ , se  $I(0) = 0$ .



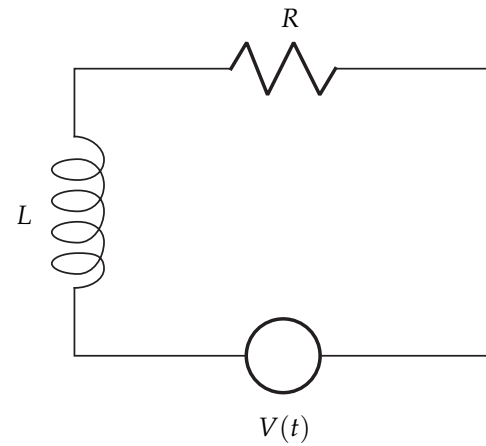


Figura 1.27 – Circuito RL

- 4.18. Um composto  $C$  é formado da reação de duas substâncias  $A$  e  $B$ . A reação ocorre de forma que para cada grama de  $B$ , 4 gramas de  $A$  são usadas. A taxa com que se obtém a substância  $C$  é proporcional tanto a quantidade de  $A$  quanto a quantidade de  $B$  **não** transformadas. Inicialmente havia 32 gramas de  $A$  e 50 gramas de  $B$ .
- (a) Determine a quantidade de  $C$  em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 30 gramas de  $C$ . Qual a quantidade limite de  $C$  após um longo período. Quanto restará de  $A$  e  $B$  após um longo período.
  - (b) Repita o item anterior se estão presentes inicialmente 32 gramas de  $A$  e 8 gramas de  $B$ .

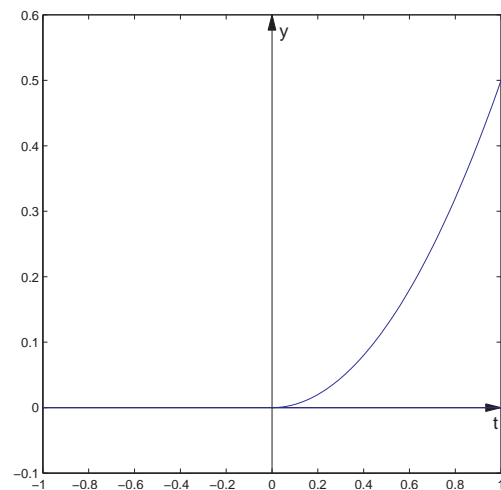
## 1.5 Existência e Unicidade de Soluções (opcional)

Considere novamente o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Nem sempre este problema tem uma única solução como mostra o próximo exemplo.

Figura 1.28 – Duas soluções do problema de valor inicial do Exemplo 1.23



Exemplo 1.23. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Este problema tem duas soluções (verifique!)

$$y_1(t) = \frac{t^2}{4}, \quad \text{para } t \geq 0$$

e

$$y_2(t) = 0.$$

Se a função  $f(t, y)$  e a sua derivada  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas em um retângulo em torno de  $(t_0, y_0)$  o que ocorreu no exemplo anterior não acontece como estabelecemos no próximo teorema que será demonstrado apenas ao final da seção.

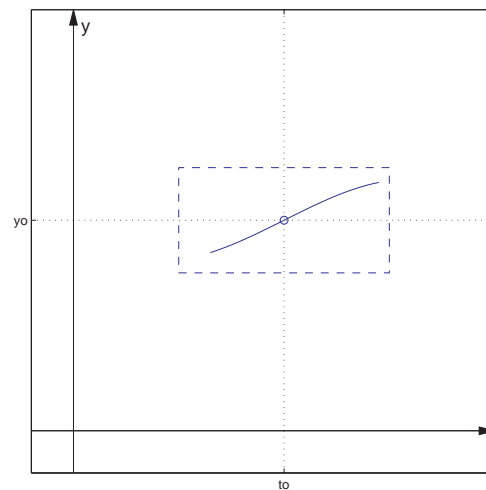


Figura 1.29 – Retângulo em torno de  $(t_0, y_0)$  onde o problema de valor inicial tem uma única solução

---

**Teorema 1.1 (Existência e Unicidade).** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Se  $f(t, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas no retângulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta, \delta < y < \gamma\}$$

contendo  $(t_0, y_0)$ , então o problema (1.28) tem uma única solução em um intervalo contendo  $t_0$ .

---

**Exemplo 1.24.** Para o problema de valor inicial do [Exemplo 1.23](#) mas com o ponto inicial  $(t_0, y_0)$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
$$f(t, y) = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Vemos que se  $(t_0, y_0)$  é tal que  $y_0 > 0$ , então o problema de valor inicial acima tem solução única.

**Exemplo 1.25.** Considere o problema de valor inicial

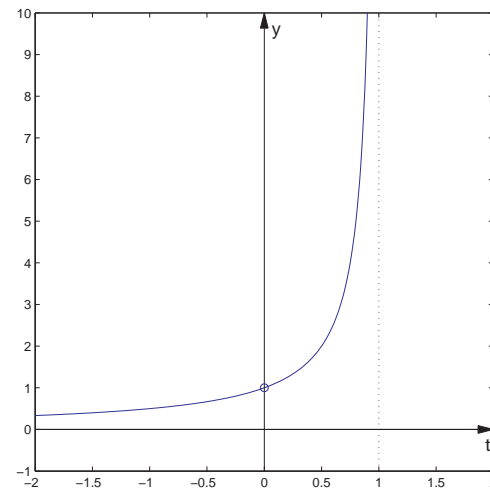
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Pelo [Teorema 1.1](#) o problema de valor inicial acima tem uma única solução para todo  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Mas, por exemplo, para  $t_0 = 0$  e  $y_0 = 1$  o problema tem solução  $y(t) = \frac{-1}{t-1}$  (verifique!) e é válida somente no intervalo  $t < 1$ .

No exemplo anterior apesar do [Teorema 1.1](#) garantir que em todo ponto  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  existe uma solução localmente (num intervalo em torno de  $t_0$ ) estas soluções não se juntam de modo a formar soluções globais (que existam para todo  $t \in \mathbb{R}$ ). Isto não ocorre para equações lineares como provamos a seguir.



Figura 1.30 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.25 para  $t_0 = 0$  e  $y_0 = 1$ .



---

**Teorema 1.2 (Existência e Unicidade para Equações Lineares).** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*Se  $p(t)$  e  $q(t)$  são funções contínuas em um intervalo aberto  $I$  contendo  $t_0$ , então o problema de valor inicial tem uma única solução neste intervalo.*

---

**Demonstração.** A unicidade segue-se do [Teorema 1.1 na página 93](#). Vamos provar a existência exibindo a solução do problema de valor inicial. Seja

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left( \int_{t_0}^t \mu(s)q(s)ds + y_0 \right), \quad \text{em que} \quad \mu(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

Por hipótese a função  $y(t)$  está bem definida. Vamos mostrar que  $y(t)$  é solução do problema de valor inicial.

$$\mu(t)y(t) = \int_{t_0}^t \mu(s)q(s)ds + y_0$$

Como  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas, então

$$\frac{d}{dt} (\mu(t)y(t)) = \mu(t)q(t)$$

Derivando o produto obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt} y = \mu(t)q(t).$$

Mas  $\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t)$ , então a equação acima pode ser escrita como

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t).$$

Dividindo-se por  $\mu(t)$  obtemos a equação dada.

Agora, como  $y(t_0) = y_0$  segue-se que  $y(t)$  dado é a solução do problema de valor inicial. ■

**Exemplo 1.26.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$p(t) = \frac{2}{t}$  e  $q(t) = t$ .  $p(t)$  é contínua para  $t \neq 0$ . Para  $t_0 = 2$ , por exemplo, o problema de valor inicial tem uma única solução para  $t > 0$  e para  $t_0 = -3$ , o problema de valor inicial tem uma única solução para  $t < 0$ . Para tirarmos esta conclusão não é necessário resolver o problema de valor inicial, apesar dele estar resolvido no [Exemplo 1.9 na página 18](#).

### 1.5.1 Demonstração do Teorema de Existência e Unicidade

#### Demonstração do Teorema 1.1 na página 93.

**(a) Existência:**

Defina a sequência de funções  $y_n(t)$  por

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Como  $f(t, y)$  é contínua no retângulo  $R$ , existe uma constante positiva  $b$  tal que

$$|f(t, y)| \leq b, \quad \text{para } (t, y) \in R.$$

Assim

$$|y_1(t) - y_0| \leq b|t - t_0|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua no retângulo  $R$ , existe uma constante positiva  $a$  (por que?) tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Assim

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0(s)| ds \leq ab \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1(s)| ds \\ &\leq a^2 b \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}. \end{aligned}$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Então

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad (1.29) \end{aligned}$$

Estas desigualdades são válidas para  $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$  em que  $\alpha'$  e  $\beta'$  são tais que  $\delta < y_n(t) < \gamma$  sempre que  $\alpha' < t < \beta'$  (por que existem  $\alpha'$  e  $\beta'$ ?).

Segue-se de (1.29) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então  $y_n(t)$  é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^m |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^m \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!},$$

então passando ao limite quando  $m$  tende a infinito obtemos que

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \quad (1.30)$$

Logo dado um  $\epsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande,  $|y(t) - y_n(t)| < \epsilon/3$ , para  $\alpha' < t < \beta'$ . Daí segue-se que  $y(t)$  é contínua, pois dado um  $\epsilon > 0$ , para  $s$  suficientemente próximo de  $t$ , temos que  $|y_n(t) - y_n(s)| < \epsilon/3$  e para  $n$  suficientemente grande  $|y(t) - y_n(t)| < \epsilon/3$  e  $|y(s) - y_n(s)| < \epsilon/3$ , o que implica que

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \epsilon.$$

Além disso para  $\alpha' < t < \beta'$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

pois, por (1.30), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_n(s) - y(s)| ds \\ &\leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \end{aligned}$$

que tende a zero quando  $n$  tende a infinito. Portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds = \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

Derivando em relação a  $t$  esta equação vemos que  $y(t)$  é solução do problema de valor inicial.

**(b) Unicidade:**

Vamos supor que  $y(t)$  e  $z(t)$  sejam soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds.$$

Assim, como

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds, \quad z(t) = \int_{t_0}^t z'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, z(s))ds,$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) &= |y(t) - z(t)| \\ &\leq \int_{t_0}^t |y'(s) - z'(s)|ds = \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)|ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo-se  $au(t)$  e multiplicando-se por  $e^{-at}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que  $e^{-at}u(t) = 0$  (lembre-se que  $u(t) \geq 0$ ) e portanto que  $u(t) = 0$ , para todo  $t$ . Assim  $y(t) = z(t)$ , para todo  $t$ .

■



## Exercícios (respostas na página 148)

5.1. Determine os pontos  $(t_0, y_0)$  para os quais podemos garantir que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução.

(a) Se  $f(t, y) = \sqrt{y^2 - 4}$

(b) Se  $f(t, y) = \sqrt{ty}$

(c) Se  $f(t, y) = \frac{y^2}{t^2 + y^2}$

(d) Se  $f(t, y) = t\sqrt{y^2 - 1}$

5.2. Determine o maior intervalo em que os problemas de valor inicial abaixo têm solução, sem resolvê-los:

(a)  $\begin{cases} (t^2 - 1)\frac{dy}{dt} + (t - 2)y = t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} (t^2 - 1)\frac{dy}{dt} + ty = t^2 \\ y(2) = y_0 \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} (t^2 - t)\frac{dy}{dt} + (t + 1)y = e^t \\ y(-1) = y_0 \end{cases}$

(d)  $\begin{cases} (t^2 - t)\frac{dy}{dt} + (t + 3)y = \cos t \\ y(2) = y_0 \end{cases}$

5.3. Mostre que se  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua no retângulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta, \delta < y < \gamma\},$$

então existe uma constante positiva  $a$  tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Sugestão: Para  $t$  fixo, use o Teorema do Valor Médio para  $f$  como função somente de  $y$ . Escolha  $a$  como sendo o máximo de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  no retângulo.

5.4. Mostre que se  $f(t, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas no retângulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta\}$$

e  $a$  e  $b$  são constantes positivas tais que

$$|f(t, y)| \leq b, \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma,$$

então existem  $\alpha'$  e  $\beta'$  com  $\alpha \leq \alpha' < t_0 < \beta' \leq \beta$  tais que a sequência

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

satisfaz  $\delta < y_n(t) < \gamma$  sempre que  $\alpha' < t < \beta'$ . Sugestão: mostre que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left(\frac{b}{a} - 1\right) e^{a|t-t_0|}.$$

## 1.6 Respostas dos Exercícios

### 1. Introdução às Equações Diferenciais (página 13)

1.1. (a) Equação diferencial ordinária de 1ª ordem não linear.

(b) Equação diferencial ordinária de 2ª ordem linear.

1.2.  $(x+3)y_1'' + (x+2)y_1' - y_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = x^2 + 6x + 6 \neq 0$

$$(x+3)y_2'' + (x+2)y_2' - y_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$$

$$(x+3)y_3'' + (x+2)y_3' - y_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$$

Logo,  $y_1(x) = x^2$  e  $y_2(x) = x^3$  não são soluções da equação e  $y_3(x) = e^{-x}$  é solução da equação.

1.3. (a) Substituindo-se  $y = e^{rt}$  e  $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$  na equação diferencial obtemos

$$are^{rt} + be^{rt} = (ar + b)e^{rt} = 0.$$

Como  $e^{rt} \neq 0$ , então  $y(t) = e^{rt}$  é solução da equação diferencial se, e somente se,  $r$  é solução da equação

$$ar + b = 0$$

(b) Substituindo-se  $y = e^{rt}$ ,  $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$  e  $\frac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$  na equação diferencial obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como  $e^{rt} \neq 0$ , então  $y(t) = e^{rt}$  é solução da equação diferencial se, e somente se,  $r$  é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

(c) Substituindo-se  $y = x^r$ ,  $\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$  na equação diferencial obtemos

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$r(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0.$$

$$(r^2 + (b-1)r + c)x^r = 0.$$

Como  $x^r \neq 0$ , então  $y = x^r$  é solução da equação diferencial se, e somente se,  $r$  é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.4. (a)

$$0 = y' + ty^2 = \frac{-2tr}{(t^2-3)^2} + \frac{tr^2}{(t^2-3)^2} = \frac{(-2r+r^2)t}{(t-3)^2} \quad \forall t$$

$$\Rightarrow r^2 - 2r = 0$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2$$

(b)

$$0 = y' - 2ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{2tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-2r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall t$$

$$\Rightarrow r^2 + r = 0$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1$$

(c)

$$0 = y' - 6ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{6tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-6r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall t$$

$$\Rightarrow 3r^2 + r = 0$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1/3$$

(d)

$$\begin{aligned}
 0 = y' - ty^2 &= \frac{-2rt}{(t^2 + 2)^2} - \frac{tr^2}{(t^2 + 2)^2} = \frac{(-2r - r^2)t}{(t^2 + 2)^2}, \quad \forall t \\
 &\Rightarrow r^2 + 2r = 0 \\
 &\Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -2
 \end{aligned}$$

1.5.  $y(t) = at + b \Rightarrow y'(t) = a$  e  $y''(t) = 0$ .

Substituindo-se  $y(t) = at + b$ ,  $y'(t) = a$  e  $y''(t) = 0$  na equação diferencial  $ty'' + (t - 1)y' - y = 0$  obtemos

$$t \cdot 0 + (t - 1)a - (at + b) = 0.$$

Simplificando-se obtemos:

$$-a - b = 0 \quad \text{ou} \quad a = -b.$$

Logo para que  $y(t) = at + b$  seja solução da equação diferencial temos que ter  $a = -b$ , ou seja,

$$y(t) = at - a = a(t - 1).$$

Portanto todas as soluções da equação diferencial que são funções de 1º grau são múltiplos escalares de

$$y_0(t) = t - 1.$$

## 2. Equações Lineares de 1ª Ordem (página 23)

2.1. (a)

$$\mu(x) = e^{\int (1-2x)dx} = e^{x-x^2}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = e^{x-x^2}$ :

$$\frac{d}{dx} (e^{x-x^2} y) = e^{x-x^2} x e^{-x} = x e^{-x^2}$$

$$e^{x-x^2}y(x) = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + Ce^{x^2-x}$$

$$2 = y(0) = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 5/2$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x^2-x}$$

(b)

$$\mu(t) = e^{\int 3t^2 dt} = e^{t^3}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(t) = e^{t^3}$ :

$$\frac{d}{dt} (e^{t^3} y) = e^{t^3} e^{-t^3+t} = e^t$$

$$e^{t^3} y(t) = \int e^t dt = e^t + C$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + Ce^{-t^3}$$

$$2 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + e^{-t^3}$$

(c)

$$\mu(t) = e^{\int -\cos t \, dt} = e^{-\sin t}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{-\sin t} y) = e^{-\sin t} t e^{t^2 + \sin t} = t e^{t^2}$$

$$e^{-\sin t} y(t) = \int t e^{t^2} \, dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{t^2 + \sin t} + C e^{\sin t}$$

$$2 = y(0) = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 3/2$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{t^2 + \sin t} + \frac{3}{2} e^{\sin t}$$

(d)

$$\mu(x) = e^{\int x^4 \, dx} = e^{\frac{x^5}{5}}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = e^{\frac{x^5}{5}}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( e^{\frac{x^5}{5}} y \right) = e^{\frac{x^5}{5}} x^4 e^{\frac{4x^5}{5}} = x^4 e^{x^5}$$

$$e^{\frac{x^5}{5}} y(x) = \int x^4 e^{x^5} \, dx = \frac{1}{5} e^{x^5}$$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{4x^5}{5}} + C e^{-\frac{x^5}{5}}$$

$$1 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = 4/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{\frac{4x^5}{5}} + \frac{4}{5}e^{-\frac{x^5}{5}}$$

2.2. (a)

$$y' - \frac{4}{x}y = -\frac{2}{x^3}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = x^{-4}$ :

$$\frac{d}{dx} (x^{-4}y) = -\frac{2}{x^7}$$

Integrando-se

$$x^{-4}y(x) = \int -\frac{2}{x^7}dx = \frac{1}{3x^6} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

(b)

$$y' - \frac{1}{x}y = -x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = x^{-1}$ :

$$\frac{d}{dx} (x^{-1}y) = -1$$



Integrando-se

$$x^{-1}y(x) = - \int dx = -x + C$$

$$y(x) = -x^2 + Cx$$

(c)

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = x^{-4}$ :

$$\frac{d}{dx} (x^{-4}y) = x e^x$$

Integrando-se

$$x^{-4}y(x) = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$y(x) = x^5 e^x - x^4 e^x + Cx^4$$

2.3. (a)

$$\mu(x) = e^{\int 5x^4 dx} = e^{x^5}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = e^{x^5}$ :

$$\frac{d}{dx} (e^{x^5} y) = e^{x^5} x^4 = x^4 e^{x^5}$$

$$e^{x^5} y(x) = \int x^4 e^{x^5} dx = \frac{1}{5} e^{x^5} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + Ce^{-x^5}$$

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = y_0 - 1/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right) e^{-x^5}$$

(b)  $y'(x) = -5x^4 \left(y_0 - \frac{1}{5}\right) e^{-x^5}$ . Para  $y_0 > 1/5$  a solução é decrescente e para  $y_0 < 1/5$  a solução é crescente.

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1/5$  e claramente independe do valor de  $y_0$ .

2.4. (a)

$$y' + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2-9} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln |x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}$$

Multiplicando a equação por  $\mu(x) = \sqrt{x^2-9}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \sqrt{x^2-9} y \right) = 0$$

$$\sqrt{x^2-9} y(x) = C$$

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$y_0 = y(5) = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4y_0$$

$$y(x) = \frac{4y_0}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

(b)  $x > 3$ , para  $y_0 \neq 0$  e  $-\infty < x < \infty$ , para  $y_0 = 0$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$  e claramente independe do valor de  $y_0$ .

2.5. (a)  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(y_1(t) + y_2(t)) + p(t)(y_1(t) + y_2(t)) = \left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = 0 + 0 = 0$

(b)  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(cy_1(t)) + p(t)(cy_1(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) = c0 = 0$

2.6.  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(cy_1(t) + y_2(t)) + p(t)(cy_1(t) + y_2(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = c0 + q(t) = q(t)$

2.7. Para resolver a equação precisamos determinar o fator integrante:  $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{1}{100}t}$ .

Multiplicando-se a equação diferencial por  $\mu(t) = e^{\frac{1}{100}t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{100}t}y) = 2t$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{100}t}y(t) = t^2 + C$$

ou

$$y(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100}t} + C e^{-\frac{1}{100}t}.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 100$ , obtemos  $100 = C$ . Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100}t} + 100 e^{-\frac{1}{100}t} = (t^2 + 100) e^{-\frac{1}{100}t}.$$

Para fazer um esboço do gráfico:

$$y'(t) = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \frac{t^2 + 100}{100}e^{-\frac{1}{100}t} = \frac{-t^2 - 100 + 200t}{100}e^{-\frac{1}{100}t}.$$

Como a função exponencial é sempre positiva o sinal de  $y'(t)$  depende apenas de  $-t^2 - 100 + 200t$  que é zero se, e somente se,  $t = 100 \pm 30\sqrt{11}$ .

Além disso  $-t^2 - 100 + 200t$  (e portanto  $y'(t)$ ) é negativa para  $t < 100 - 30\sqrt{11} \approx 0,5$  e para  $t > 100 + 30\sqrt{11} \approx 199,5$  e positiva para  $100 - 30\sqrt{11} \approx 0,5 < t < 100 + 30\sqrt{11} \approx 199,5$ .

Logo a solução do PVI,  $y(t)$ , é decrescente para  $t < 100 - 30\sqrt{11} \approx 0,5$  e para  $t > 100 + 30\sqrt{11} \approx 199,5$  e crescente para  $100 - 30\sqrt{11} \approx 0,5 < t < 100 + 30\sqrt{11} \approx 199,5$ .

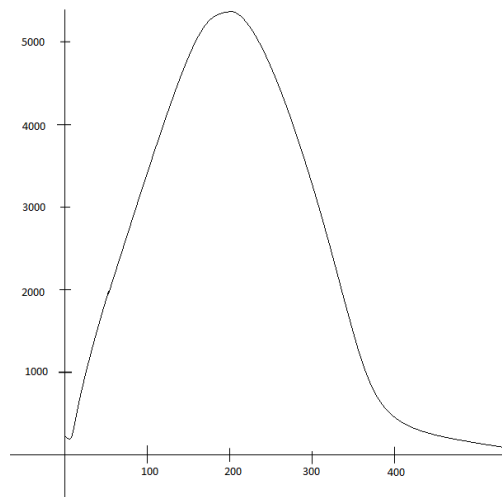
$$y''(t) = \frac{(t^2 - 200t + 100)e^{-\frac{t}{100}}}{10000} - \frac{(2t - 200)e^{-\frac{t}{100}}}{100} = \frac{(t^2 - 400t + 20100)e^{-\frac{t}{100}}}{10000}.$$

Como a função exponencial é sempre positiva o sinal de  $y''(t)$  é o mesmo de  $t^2 - 400t + 20100$  que é zero se, e somente se,  $t = 200 \pm 10\sqrt{99}$ . Além disso,  $t^2 - 400t + 20100$  (e portanto  $y''(t)$ ) é positiva para  $t < 200 - 10\sqrt{99} \approx 59$  e para  $t > 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$  e negativa para  $200 - 10\sqrt{99} \approx 59 < t < 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$ .

Logo a solução do PVI,  $y(t)$ , tem concavidade para cima para  $t < 200 - 10\sqrt{99} \approx 59$  e para  $t > 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$  e concavidade para baixo para  $200 - 10\sqrt{99} \approx 59 < t < 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$ .

Além disso,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Abaixo o esboço do gráfico feito usando o programa Paint que é um acessório do MSWindows<sup>©</sup>.



### 3. Equações Separáveis (página 34)

3.1. (a)

$$(1 + x^2)y' - xy = 0$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{x}{1 + x^2}$$

Integrando-se em relação a  $x$ :

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1$$

$$\ln \left( \frac{|y|}{(1 + x^2)^{1/2}} \right) = C_1$$

$$\frac{y}{(1 + x^2)^{1/2}} = \pm e^{C_1} = \pm C_2 = C$$

$$y(x) = C(1 + x^2)^{1/2}$$

(b)

$$y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$$

$$\frac{y}{y^2 - 1}y' = \frac{1}{2 + x}$$

Integrando-se em relação a  $x$ :

$$\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \ln |2 + x| + C_1$$

$$\ln \left( \frac{|y^2 - 1|^{1/2}}{|2 + x|} \right) = C_1$$

$$\frac{|y^2 - 1|^{1/2}}{2 + x} = \pm e^{C_1} = \pm C_2 = C$$

A solução é dada implicitamente por

$$\sqrt{y^2 - 1} = C(2 + x)$$

(c)

$$yy' = \frac{x}{ax^2 + b}$$

Integrando-se em relação a  $x$  obtemos que a solução é dada implicitamente por

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + b| + C$$

(d)

$$y^{-3}y' = \frac{x}{(ax^2 + b)^{1/2}}$$

Integrando-se em relação a  $x$  obtemos que a solução é dada implicitamente por

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{a}(ax^2 + b)^{1/2} + C$$

(e)

$$\frac{y}{\sqrt{ay^2 + b}}y' - \frac{1}{x} = 0$$

Integrando-se em relação a  $x$  obtemos que a solução é dada implicitamente por

$$\frac{1}{a}\sqrt{ay^2 + b} = \ln |x| + C$$

(f)

$$\frac{y}{ay^2 + b}y' - \frac{1}{x^2} = 0$$

Integrando-se em relação a  $x$  obtemos que a solução é dada implicitamente por

$$\frac{1}{2a} \ln |ay^2 + b| = -x^{-1} + C$$

3.2. (a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2 - 3)y' = 2x + 1$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 - x = C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial  $y(0) = 0$  substituímos  $x = 0$  e  $y = 0$  na solução geral obtendo  $C = 0$ . Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 - x = 0$$

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução vamos determinar os pontos onde a derivada não está definida, ou seja,  $3y^2 - 3 = 0$ , ou seja,  $y = \pm 1$ . Substituindo-se  $y = -1$  na equação que define a solução obtemos a equação  $x^2 + x - 2 = 0$ , que tem solução  $x = -2$  e  $x = 1$ . Substituindo-se  $y = 1$  na equação que define a solução obtemos a equação  $x^2 + x + 2 = 0$ , que não tem solução real.

Como o ponto inicial tem  $x = 0$  que está entre os valores  $x = -2$  e  $x = 1$  concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo  $(-2, 1)$ , que é o maior intervalo em que a solução  $y(x)$  e a sua derivada estão definidas.

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{3y^2 - 3}$$

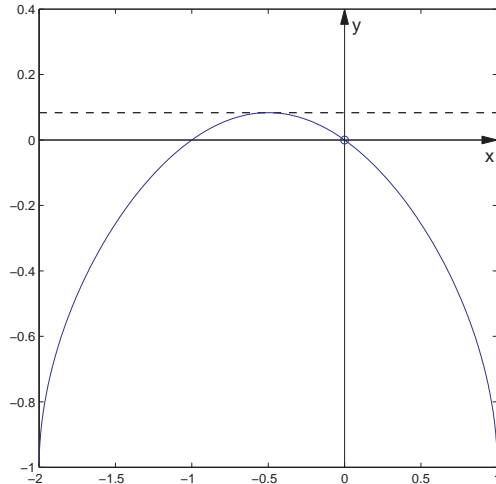
Assim, a reta tangente é horizontal para  $x$  tal que  $2x + 1 = 0$ , ou seja, somente para  $x = -1/2$ .



- (d) A reta tangente à curva integral é vertical ( $\frac{dx}{dy} = 0$ ) para  $x = -2$  e  $x = 1$ , pois pela equação diferencial,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3}$ , então

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2 - 3}{2x + 1},$$

para  $x \neq -1/2$ . Assim já sabemos que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos  $(-2, -1)$  e  $(1, -1)$  onde a tangente é vertical, pelo ponto inicial  $(0, 0)$ . Neste ponto a inclinação da tangente é  $-1/3$ , pois substituindo-se  $x = 0$  e  $y = 0$  na equação diferencial obtemos  $\frac{dy}{dx} = -1/3$ . Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para  $x = -1/2$ . Deduzimos daí que a solução é crescente até  $x = -1/2$  depois começa a decrescer.



- 3.3. (a) A equação é equivalente a  $\frac{1}{b-ay}y' = 1$   
 (b) A equação é equivalente a  $\frac{1}{1-y}y' = q(t)$   
 (c) A equação é equivalente a  $\frac{1}{y}y' = -p(t)$

3.4. Multiplicando-se a equação diferencial por  $\frac{1}{y(100-y)}$  obtemos

$$\frac{1}{y(100-y)}y' = 1 \quad (1.31)$$

Vamos decompor  $\frac{1}{y(100-y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{y(100-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{100-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $y(100-y)$  obtemos

$$1 = A(100-y) + By$$

Substituindo-se  $y = 0$  e  $y = 100$  obtemos  $A = 1/100$  e  $B = 1/100$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(100-y)} dy &= \frac{1}{100} \left( \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{100-y} dy \right) \\ &= \frac{1}{100} (\ln |y| - \ln |100-y|) \end{aligned}$$

Logo a equação (1.31) tem solução

$$\ln |y| - \ln |100-y| = 100t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{100-y} \right| = C_1 + 100t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{100 - y} = \pm e^{C_1 e^{100t}} = C e^{100t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 1$  na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{100 - 1} = \frac{1}{99}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

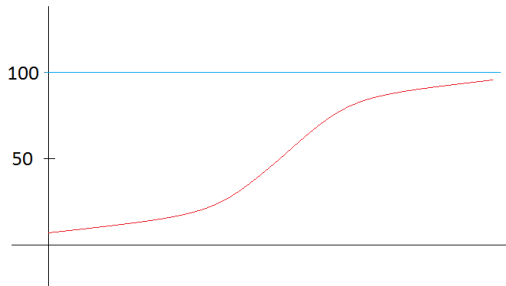
$$y = (100 - y)C e^{100kt} \Rightarrow y + C e^{100t} y = 100C e^{100t}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{C 100 e^{100t}}{1 + C e^{100t}} = \frac{\frac{100}{99} e^{100t}}{1 + \frac{1}{99} e^{100t}} = \frac{100 e^{100t}}{99 + e^{100t}} = \frac{100}{99 e^{-100t} + 1}$$

Usando a equação diferencial vemos que  $y'$  é positiva e crescente para  $0 < y < 50$  e positiva e decrescente para  $50 < y < 100$ .

Além disso,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 100$ .



#### 4. Aplicações (página 81)

##### 4.1. (a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \frac{Q}{100} \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{100} = 2te^{-\frac{1}{100}t}.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{1}{100}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por  $\mu(t) = e^{\frac{1}{100}t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{100}t}Q) = 2t$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{100}t}Q(t) = t^2 + C$$

ou

$$Q(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100}t} + C e^{-\frac{1}{100}t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 100$ , obtemos

$$100 = C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100}t} + 100 e^{-\frac{1}{100}t}.$$

(b) A concentração em  $t = 10$  min é dada por

$$c(10) = \frac{Q(10)}{100} = \left(\frac{10^2}{100} + 1\right)e^{-\frac{1}{100}10} = 2e^{-\frac{1}{10}} \text{ gramas/litro}$$

4.2. (a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 300e^{-\frac{2}{10}t} - 10\frac{Q}{100}. \\ Q(0) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10} = 300e^{-\frac{2}{10}t}.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{10} dt} = e^{\frac{1}{10}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por  $\mu(t) = e^{\frac{1}{10}t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{10}t}Q) = 300e^{\frac{1}{10}t}e^{-\frac{2}{10}t} = 300e^{-\frac{1}{10}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{10}t}Q(t) = -3000e^{-\frac{1}{10}t} + C$$

ou

$$Q(t) = -3000e^{-\frac{2}{10}t} + Ce^{-\frac{1}{10}t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 0$ , obtemos

$$0 = -3000 + C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 3000(e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t}).$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100} = 30(e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t})$$

Se  $x = e^{-\frac{1}{10}t}$ . Então  $c(t) = 7,5$  se, e somente se,  $x - x^2 = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$  ou  $x = 1/2$  ou  $\frac{1}{10}t = \ln 2$  ou  $t = 10 \ln 2$  min.

4.3. (a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 20 - \frac{Q}{25} \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{25} = 20.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{25} dt} = e^{\frac{1}{25}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por  $\mu(t) = e^{\frac{1}{25}t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{25}t}Q) = 20e^{\frac{1}{25}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{25}t}Q(t) = 500e^{\frac{1}{25}t} + C$$

ou

$$Q(t) = 500 + Ce^{-\frac{1}{25}t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 100$ , obtemos

$$100 = 500 + C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}t}.$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{Q(t)}{100} = 5 - 4e^{-\frac{1}{25}t} \text{ gramas por litro}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 5 \text{ gramas por litro}$$

$$c(t) = \frac{5}{2} \text{ se, e somente se, } Q(t) = 250 = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}t} \text{ ou}$$

$$e^{-\frac{1}{25}t} = \frac{250}{400} = \frac{5}{8}$$

ou

$$-\frac{1}{25}t = \ln \frac{5}{8}$$

ou

$$t = 25 \ln \frac{8}{5} \text{ min.}$$

4.4. (a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 3 - 2\frac{Q}{100+t} \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 2\frac{Q}{100+t} = 3.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{100+t} dt} = e^{2 \ln |100+t|} = (100+t)^2$$

Multiplicando-se a equação diferencial por  $\mu(t) = (100+t)^2$  obtemos

$$\frac{d}{dt}((100+t)^2 Q) = 3(100+t)^2$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$(100+t)^2 Q(t) = (100+t)^3 + C$$

ou

$$Q(t) = 100 + t + C(100+t)^{-2}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 10$ , obtemos

$$10 = 100 + C10^{-4} \Rightarrow C = -9 \cdot 10^5$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 100 + t - 9 \cdot 10^5 (100+t)^{-2} \text{ gramas.}$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100+t} = 1 - 9 \cdot 10^5 (100+t)^{-3}$$

O tanque estará cheio para  $t = 100$ .

$$\lim_{t \rightarrow 100} c(t) = 1 - \frac{9}{80} = \frac{71}{80} \text{ gramas/litro}$$



4.5. (a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -2\frac{Q}{100-t} \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável e pode ser reescrita como

$$\frac{1}{Q}Q' = -\frac{2}{100-t}.$$

Integrando-se obtemos

$$\ln |Q(t)| = 2 \ln |100 - t| + C_1$$

ou

$$Q(t) = C(100 - t)^2$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 10$ , obtemos

$$10 = C10^4 \Rightarrow C = 10^{-3}$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3}(100 - t)^2 \text{ gramas.}$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100 - t} = 10^{-3}(100 - t)$$

O tanque estará vazio para  $t = 100$ .

$$\lim_{t \rightarrow 100} c(t) = 0 \text{ grama/litro.}$$

4.6. (a)

$$m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = -kx$$

$$mv^2/2 = -kx^2/2 + C$$

$$mv^2/2 + kx^2/2 = C$$

Substituindo-se  $x = R, v = 0$ :

$$kR^2/2 = C$$

$$mv^2/2 = kR^2/2 - kx^2/2$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{k(R^2 - x^2)}{m}}$$

(b) Substituindo-se  $x = 0$ :

$$v(0) = \sqrt{\frac{kR^2}{m}}$$

Substituindo-se  $x = -R$ :

$$v(-R) = 0.$$

4.7.

$$\frac{dV}{dt} = kA = k4\pi r^2$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{dr}{dt} = k$$

$$r(t) = kt + C$$

Substituindo  $t = 0$  e  $r = r_0$ :

$$r_0 = C$$

Substituindo  $t = 1$  e  $r = r_0/2$ :

$$r_0/2 = k + r_0$$

$$k = -r_0/2$$

$$r(t) = r_0(1 - t/2)$$

4.8.

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$48 = y(1) = y_0 e^k$$

$$27 = y(3) = y_0 e^{3k}$$

$$\frac{48}{27} = e^{-2k}$$

$$k = -\frac{1}{2} \ln \frac{48}{27} = -\frac{1}{2} \ln \frac{16}{9} = \ln \frac{3}{4}$$

$$y_0 = 48e^{-k} = 48e^{-\ln \frac{3}{4}} = 48 \frac{4}{3} = 64$$

4.9.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$400 = y_0 e^{3k} \Rightarrow k = \frac{\ln(400/y_0)}{3}$$

$$2500 = y_0 e^{9k} \Rightarrow 2500 = y_0 \left( \frac{400}{y_0} \right)^3$$

$$y_0^{-2} = \frac{2500}{400^3}$$

$$y_0 = \left( \frac{400^3}{2500} \right)^{1/2} = \frac{20^3}{50} = 160$$

**4.10.** A população cresce a uma taxa proporcional a população presente o que significa que a população,  $y(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que como vimos acima tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Como em uma hora a população é o dobro da população original, então substituindo-se  $t = 1$  e  $y = 2y_0$  obtemos

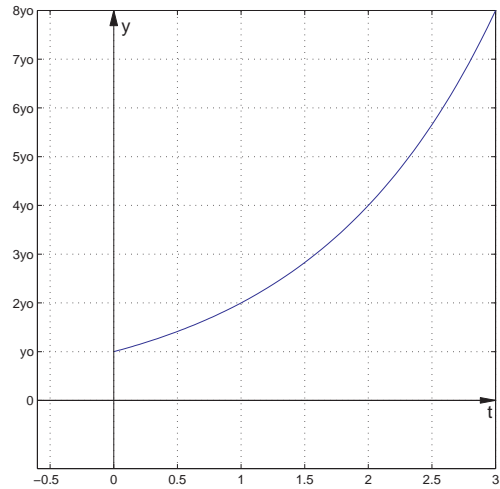
$$2y_0 = y_0 e^k \Rightarrow k = \ln 2$$

Assim, a equação que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = y_0 e^{(\ln 2)t} = y_0 \cdot 2^t$$

Agora para sabermos em quanto tempo a população triplica substituímos  $y = 3y_0$  e determinamos  $t$  que é

$$t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585 \text{ horas} \approx 1 \text{ hora e } 35 \text{ minutos.}$$



**4.11.** O número de pessoas infectadas como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(100 - y). \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{y(100-y)}$  obtemos

$$\frac{1}{y(100 - y)} y' = k \quad (1.32)$$

Vamos decompor  $\frac{1}{y(100-y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{y(100 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{100 - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $y(100 - y)$  obtemos

$$1 = A(100 - y) + By$$

Substituindo-se  $y = 0$  e  $y = 100$  obtemos  $A = 1/100$  e  $B = 1/100$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(100 - y)} dy &= \frac{1}{100} \left( \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{100 - y} dy \right) \\ &= \frac{1}{100} (\ln |y| - \ln |100 - y|) \end{aligned}$$

Logo a equação (1.32) tem solução

$$\ln |y| - \ln |100 - y| = k100t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{100 - y} \right| = C_1 + k100t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{100 - y} = \pm e^{C_1} e^{100kt} = C e^{100kt}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 1$  na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{100 - 1} = \frac{1}{99}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$y = (100 - y)C e^{100kt} \Rightarrow y + C e^{100kt} y = 100C e^{100kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

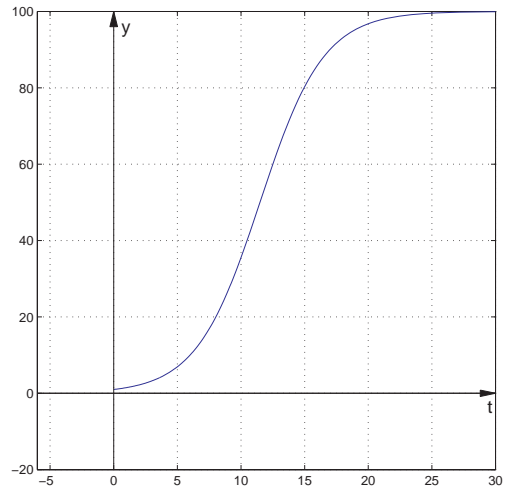
$$y(t) = \frac{C 100 e^{100kt}}{1 + C e^{100kt}} = \frac{\frac{100}{99} e^{100kt}}{1 + \frac{1}{99} e^{100kt}} = \frac{100 e^{100kt}}{99 + e^{100kt}} = \frac{100}{99 e^{-100kt} + 1}$$

Substituindo-se  $t = 4$  e  $y = 5$  obtemos

$$5 = \frac{100}{99 e^{-400k} + 1} \Rightarrow e^{-400k} = \frac{19}{99} \Rightarrow -100k = \frac{\ln \frac{19}{99}}{4}$$

Logo

$$y(t) = \frac{100}{99 e^{\frac{\ln \frac{19}{99}}{4} t} + 1} = \frac{100}{99 \cdot \left(\frac{19}{99}\right)^{t/4} + 1}$$





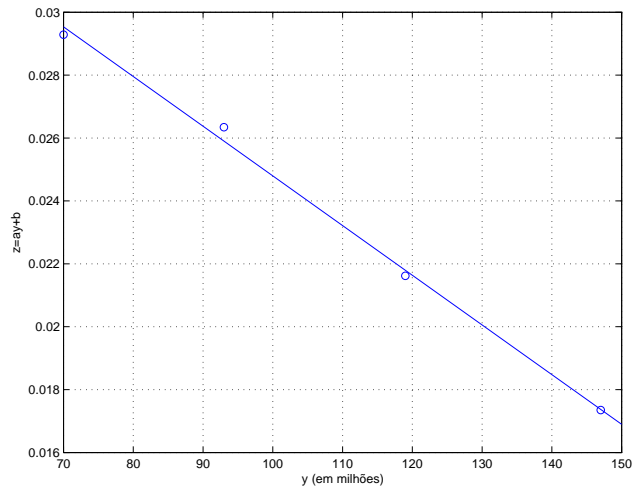
4.12.

$t_i$	$y_i$	$g_i$	$h_i$	$\frac{g_i+h_i}{2}$
1950	52 milhões	0,0346	-	
1960	70 milhões	0,0329	0,0257	0,0293
1970	93 milhões	0,0280	0,0247	0,0263
1980	119 milhões	0,0214	0,0218	0,0216
1991	147 milhões	0,0174	0,0173	0,0174
2000	170 milhões	-	0,0150	

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2},$$

para  $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$ . Usando quadrados mínimos vamos encontrar a melhor reta que se ajusta ao conjunto de pontos

$y_i$	$\frac{g_i+h_i}{2}$
70 milhões	0.0293
93 milhões	0.0263
119 milhões	0.0216
147 milhões	0.0174



encontrando  $a = -1,58 \cdot 10^{-10}$ ,  $b = 0,04$ . Assim obtemos  $k = 1,58 \cdot 10^{-10}$  e  $y_M = 257$  milhões.

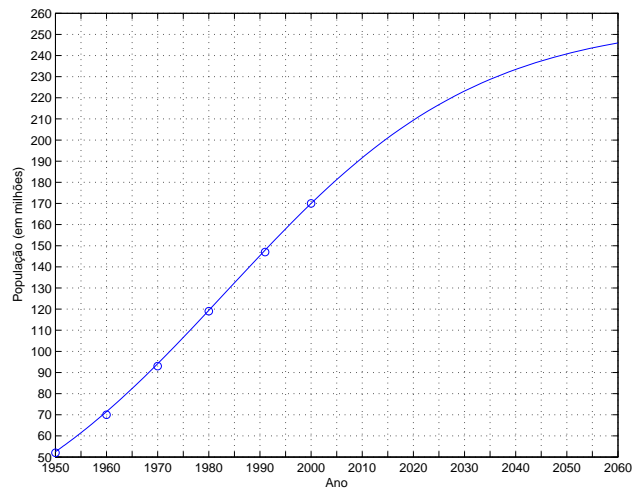
Usando  $t_0 = 2000$ ,  $y_0 = 170$  milhões obtemos

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04(t-2000)}}$$

Para  $t = 2010$  temos

$$y(2010) = 191,6 \text{ milhões de habitantes.}$$

Um erro de 0,5 %.



4.13.

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = k \frac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

Como para o cone

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{hR}{H}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 h^2$$

então o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = kh^{-3/2} \\ h(0) = 2, h(30) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a equação por  $h^{3/2}$

$$h^{3/2}h' = k$$

Integrando-se ambos os lados

$$\frac{2}{5}h^{5/2} = kt + C$$

ou

$$h(t) = (C' + k't)^{2/5}$$

Substituindo  $t = 0$  e  $h = 2$ :

$$2^{5/2} = C'$$

Substituindo  $t = 30$  e  $h = 1$ :

$$C' + 30k' = 1 \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{1 - C'}{30} = \frac{1 - 2^{5/2}}{30}$$

Assim a função que descreve como a altura varia com o tempo é dada por

$$h(t) = (C' + k't)^{2/5} = (2^{5/2} + \frac{1 - 2^{5/2}}{30}t)^{2/5}$$

Substituindo  $h = 0$ :

$$t = -\frac{C'}{k'} = -\frac{30 \cdot 2^{5/2}}{1 - 2^{5/2}} \approx 36 \text{ min}$$

4.14. (a) A temperatura registrada no termômetro,  $T(t)$ , é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 5). \\ T(0) = 20 \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5)$$

$$\frac{1}{T - 5} T' = k$$

$$\ln |T - 5| = kt$$

$$\ln |T - 5| = C_1 + kt$$

$$T(t) = 5 + Ce^{kt}$$

Substituindo  $t = 0$  e  $T = 20$ :

$$20 = 5 + C \Rightarrow C = 15$$

$$T(t) = 5 + 15e^{kt}$$

Substituindo  $t = 1/2$  e  $T = 15$ :

$$15 = 5 + 15e^{k/2} \Rightarrow k = 2 \ln(2/3)$$

Assim a temperatura do café em função do tempo é dada por

$$T(t) = 5 + 15e^{2 \ln(2/3)t} = 5 + 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}$$

(b) Após 1 minuto o termômetro deve marcar

$$T(1) = 5 + 15 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{105}{9} \approx 11,7^\circ \text{C}$$

(c) Substituindo  $T = 10$  em  $T(t) = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$ :

$$10 = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$$

Logo o tempo necessário para que o termômetro marque  $10^\circ$  é de

$$t = \frac{\ln(1/3)}{2\ln(2/3)} \approx 1 \text{ min e } 20 \text{ segundos}$$

4.15. (a)

$$120 \frac{dv}{dt} = 10 - 2v$$

$$\frac{120}{10 - 2v} v' = 1$$

$$60 \ln |10 - 2v| = -t + C_1$$

$$\ln |10 - 2v| = \frac{C_1 - t}{60}$$

$$v(t) = 5 - Ce^{-\frac{t}{60}}$$

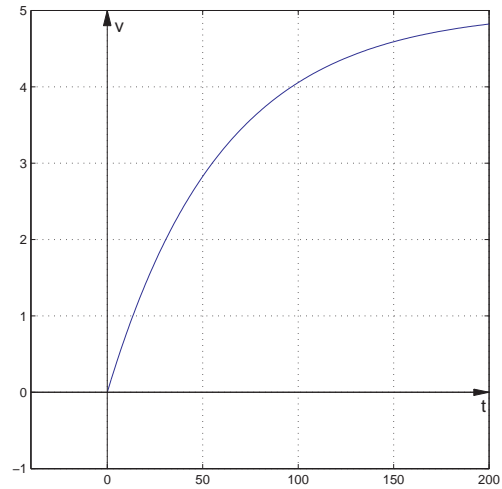
Substituindo-se  $t = 0$  e  $v = 0$ :

$$0 = 5 - C \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$v(t) = 5 - 5e^{-\frac{t}{60}}$$

(b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (5 - 5e^{-\frac{t}{60}}) = 5 \text{ m/s}$$



4.16.

$$200 \frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 10.$$

$$\frac{dQ}{dt} + 50Q = 5 \cdot 10^{-2}.$$

A equação é linear. Multiplicando-se a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{50t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( e^{50t} Q \right) = 5 \cdot 10^{-2} e^{50t}$$

integrando-se obtemos

$$e^{50t} Q(t) = 10^{-3} e^{50t} + k$$

ou

$$Q(t) = 10^{-3} + k e^{-50t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $Q = 0$  obtemos  $k = -10^{-3}$  e assim a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3} \left( 1 - e^{-50t} \right) \text{ coulombs.}$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-50t} \text{ amperes}$$

4.17. Para este circuito a segunda lei de Kirchhoff nos dá

$$R I + L \frac{dI}{dt} = V(t).$$

Ou seja,

$$5 \cdot 10^{-1} \frac{dI}{dt} + 10^2 I = 10.$$

$$\frac{dI}{dt} + 200I = 20.$$



A equação é linear. Multiplicando-se a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{200t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( e^{200t} I \right) = 20e^{200t}$$

integrando-se obtemos

$$e^{200t} I(t) = 10^{-1} e^{200t} + k$$

ou

$$I(t) = 10^{-1} + k e^{-200t}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $I = 0$  obtemos  $k = -10^{-1}$  e assim a solução do problema de valor inicial é

$$I(t) = 10^{-1} \left( 1 - e^{-200t} \right) \text{ amperes.}$$

- 4.18.** (a) Sejam  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  as quantidades de  $A$  e  $B$  não transformadas, respectivamente e  $y(t)$  a quantidade de  $C$  obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \quad (1.33)$$

Sejam  $a(t)$  e  $b(t)$  a quantidade de  $A$  e  $B$  transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad a(t) = 4b(t).$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{4}{5}y(t), \quad b(t) = \frac{1}{5}y(t). \quad (1.34)$$

Mas as quantidades de  $A$  e  $B$  não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = 32 - a(t), \quad \beta(t) = 50 - b(t). \quad (1.35)$$

Substituindo-se (1.34) em (1.35) e (1.35) em (1.33) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left( 32 - \frac{4}{5}y \right) \left( 50 - \frac{1}{5}y \right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (40 - y)(250 - y).$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k(40 - y)(250 - y) \\ y(0) = 0, \quad y(10) = 30 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{(40-y)(250-y)}$  obtemos

$$\frac{1}{(40 - y)(250 - y)} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{(40 - y)(250 - y)} y' dt = \int k dt + C_1$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{(40 - y)(250 - y)} dy = \int k dt + C_1.$$

Vamos decompor  $\frac{1}{(40-y)(250-y)}$  em frações parciais:

$$\frac{1}{(40 - y)(250 - y)} = \frac{A}{40 - y} + \frac{B}{250 - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $(40 - y)(250 - y)$  obtemos

$$1 = A(250 - y) + B(40 - y)$$

Substituindo-se  $y = 40$  e  $y = 250$  obtemos  $A = 1/210$  e  $B = -1/210$ . Assim,

$$\int \frac{1}{(40-y)(250-y)} dy = \frac{1}{210} \left( \int \frac{1}{40-y} dy - \int \frac{1}{250-y} dy \right) = -\frac{1}{210} (\ln |40-y| - \ln |250-y|)$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln |40-y| - \ln |250-y| = -210kt + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{40-y}{250-y} \right| = C_1 - 210kt.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{40-y}{250-y} = \pm e^{C_1} e^{-210kt} = C e^{-210kt}$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 0$  na equação acima obtemos

$$C = \frac{4}{25}.$$

Substituindo-se  $t = 10$  e  $y = 30$  na equação acima obtemos

$$\frac{25}{88} = e^{-2100k}$$

ou

$$210k = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{88}{25} \right).$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$40 - y = (250 - y) C e^{-210kt} \Rightarrow y - C e^{-210kt} y = 40 - 250 C e^{-210kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{40 - 250Ce^{-210kt}}{1 - Ce^{-210kt}}$$

Substituindo-se os valores de  $C$  e  $k$  obtidos:

$$y(t) = \frac{1000(1 - e^{-\frac{1}{10} \ln(\frac{88}{25})t})}{25 - 4e^{-\frac{1}{10} \ln(\frac{88}{25})t}} = \frac{1000(1 - (\frac{88}{25})^{-t/10})}{25 - 4(\frac{88}{25})^{-t/10}}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 40 \text{ gramas}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (32 - \frac{4}{5}y(t)) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (50 - \frac{1}{5}y(t)) = 42 \text{ gramas}$$

Portanto a quantidade inicial de  $A$  será toda consumida na reação, entretanto sobrarão ainda 42 gramas de  $B$ .

(b) Temos então

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(32 - \frac{4}{5}y\right) \left(8 - \frac{1}{5}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (40 - y)^2.$$

Neste caso a quantidade da substância  $C$  como função do tempo,  $y(t)$ , é a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k(40 - y)^2 \\ y(0) = 0, y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por  $\frac{1}{(40-y)^2}$  obtemos

$$\frac{1}{(40-y)^2} y' = k$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)^2} y' dt = \int k dt + C$$

fazendo-se a substituição  $y' dt = dy$  obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)^2} dy = \int k dt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{40-y} = kt + C.$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 0$  na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{40}.$$

Substituindo-se  $C = \frac{1}{40}$ ,  $t = 10$  e  $y = 10$  na equação acima obtemos

$$k = \frac{1}{300} - \frac{1}{400} = \frac{1}{1200}.$$

Vamos explicitar  $y(t)$ .

$$40 - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 40 - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se os valores de  $C$  e  $k$  obtidos:

$$y(t) = 40 - \frac{1200}{t + 30}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 40,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(32 - \frac{4}{5}y(t)\right) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(8 - \frac{1}{5}y(t)\right) = 0.$$

## 5. Existência e Unicidade (página 103)

5.1. (a)

$$f(t, y) = \sqrt{y^2 - 4} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4}}.$$

Para os pontos  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $y_0 < -2$  ou  $y_0 > 2$  o problema de valor inicial tem solução única.

(b)

$$f(t, y) = \sqrt{ty} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{2\sqrt{ty}}.$$

Para os pontos  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $y_0 t_0 > 0$  o problema de valor inicial tem solução única.

(c)

$$f(t, y) = \frac{y^2}{t^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2t^2 y}{(t^2 + y^2)^2}.$$

Para os pontos  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $(t_0, y_0) \neq (0, 0)$  o problema de valor inicial tem solução única.

(d)

$$f(t, y) = t\sqrt{1 - y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{ty}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Para os pontos  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $-1 < y_0 < 1$  o problema de valor inicial tem solução única.

5.2. (a)

$$p(t) = \frac{t-2}{t^2-1} = \frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$

$$q(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}.$$

Como  $t_0 = 0$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $-1 < t < 1$ .

(b)

$$p(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}$$

$$q(t) = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)}.$$

Como  $t_0 = 2$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $t > 1$ .

(c)

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{e^t}{t^2-t} = \frac{e^t}{t(t-1)}.$$

Como  $t_0 = -1$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $t < 0$ .

(d)

$$p(t) = \frac{t+3}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{\cos t}{t^2 - t} = \frac{\cos t}{t(t-1)}.$$

Como  $t_0 = 2$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $t > 1$ .

**5.3.** Seja  $t$  fixo, tal que  $\alpha < t < \beta$ . Pelo Teorema do Valor Médio, dados  $y$  e  $z$  com  $\delta < y, z < \gamma$  existe  $\xi$  entre  $y$  e  $z$  tal que

$$f(t, y) - f(t, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) (y - z).$$

Seja  $a = \max_{\delta < w < \gamma} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, w) \right|$ . Tomando-se o módulo da equação acima obtemos

$$|f(t, y) - f(t, z)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) \right| |y - z| \leq a |y - z|.$$

**5.4.** Seja  $\alpha'$  o máximo entre  $\alpha$ , o valor de  $t < t_0$  tal que  $\frac{b}{a} (e^{a|t-t_0|} - 1) = \gamma$  e o valor de  $t < t_0$  tal que  $-\frac{b}{a} (e^{a|t-t_0|} - 1) = \delta$ . Seja  $\beta'$  o mínimo entre  $\beta$ , o valor de  $t > t_0$  tal que  $\frac{b}{a} (e^{a|t-t_0|} - 1) = \gamma$  e o valor de  $t > t_0$  tal que  $-\frac{b}{a} (e^{a|t-t_0|} - 1) = \delta$ . Vamos mostrar, por indução, que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \frac{b}{a} (e^{a|t-t_0|} - 1), \quad \text{para } \alpha' < t < \beta'$$

e assim que  $\delta < y_n(t) < \gamma$ , para  $\alpha' < t < \beta'$ .

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0| &\leq b|t - t_0| \\ &= b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1} |t - t_0|^n}{n!} = \frac{b}{a} (e^{a|t-t_0|} - 1) \end{aligned}$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$



e

$$|y_k(t) - y_0| \leq \frac{b}{a} \left( e^{a|t-t_0|} - 1 \right),$$

para  $k = 1, \dots, n-1$  e  $\alpha' < t < \beta'$  e assim que  $\delta < y_k(t) < \gamma$ , para  $k = 1, \dots, n-1$  e  $\alpha' < t < \beta'$ . Então por (1.29) na página 99,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

e assim

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_0| &\leq \sum_{k=1}^n |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \\ &= b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1} |t - t_0|^n}{n!} = \frac{b}{a} \left( e^{a|t-t_0|} - 1 \right) \end{aligned}$$

---

---

## 2

# Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

---

---

Para as equações diferenciais lineares de 2ª ordem é válido um resultado semelhante ao que é válido para equações lineares de 1ª ordem ([Teorema 1.2 na página 96](#)) com relação a existência e unicidade de soluções, mas a demonstração, infelizmente, não é tão simples quanto naquele caso e será apresentada somente ao final do Capítulo 4.

---

**Teorema 2.1 (Existência e Unicidade).** *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

*para  $p(t), q(t)$  e  $f(t)$  funções contínuas em um intervalo aberto  $I$  contendo  $t_0$  tem uma única solução neste intervalo.*

**Exemplo 2.1.** Vamos determinar o intervalo máximo em que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (t^2 - 4)y'' + y' + (\sin t)y = \frac{e^t}{t} \\ y(1) = y_0, \quad y'(1) = y'_0 \end{cases}$$

tem solução. Para esta equação

$$p(t) = \frac{1}{t^2 - 4}, \quad q(t) = \frac{\sin t}{t^2 - 4}, \quad f(t) = \frac{e^t}{t(t^2 - 4)}.$$

Assim  $p(t)$ ,  $q(t)$  e  $f(t)$  são contínuas para  $t \neq \pm 2, 0$ . Como  $t_0 = 1$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $0 < t < 2$ , que é o maior intervalo contendo  $t_0 = 1$  onde  $p(t)$ ,  $q(t)$  e  $f(t)$  são contínuas.

## 2.1 Equações Homogêneas - Parte I

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é **homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.1)$$

Para as equações lineares homogêneas é válido o **princípio da superposição**.

**Teorema 2.2 (Princípio da Superposição).** Se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da equação homogênea (2.1), então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (2.2)$$

para  $c_1$  e  $c_2$  constantes, também o é.

---

**Demonstração.** Vamos verificar que realmente  $y(t)$  dado por (2.2) é solução de (2.1).

$$\begin{aligned} y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) &= \\ &= (c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t))'' + p(t)(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t))' + q(t)(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 p(t)y_1'(t) + c_2 p(t)y_2'(t) + c_1 q(t)y_1(t) + c_2 q(t)y_2(t) \\ &= c_1 \underbrace{(y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t))}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t))}_{=0} \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

pois  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções de (2.1). ■

Observe também que a função nula, que é igual a zero para todo  $t$  é solução da equação homogênea (2.1). Usando a linguagem da Álgebra Linear podemos dizer que o conjunto das soluções de uma equação diferencial linear homogênea é um subespaço vetorial.

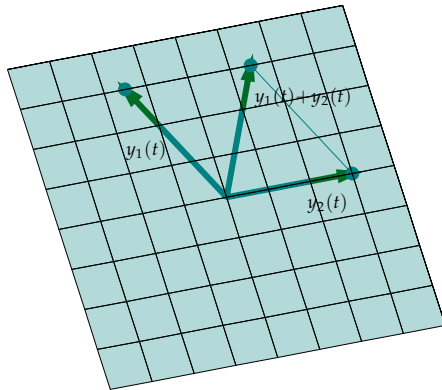


Figura 2.1 – Soma de soluções de uma equação diferencial homogênea

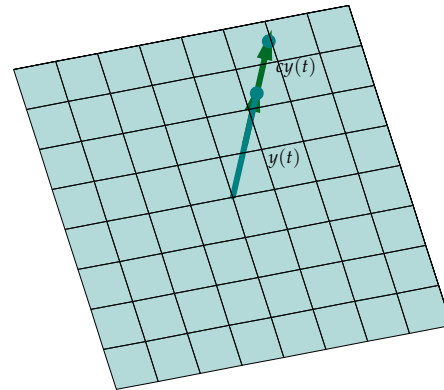


Figura 2.2 – Multiplicação de solução de uma equação diferencial homogênea por escalar

### 2.1.1 Soluções Fundamentais

Considere, agora, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

em que  $y_0$  e  $y'_0$  são condições iniciais dadas no problema.

Vamos determinar condições sobre duas soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  de (2.1) para que existam constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$  seja solução do problema de valor inicial (2.3).

Substituindo-se  $t = t_0$  na solução  $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$  e na derivada de  $y(t)$ ,  $y'(t) = c_1y'_1(t) + c_2y'_2(t)$  obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \\ c_1y'_1(t_0) + c_2y'_2(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema  $A$  é invertível, então para todo par de condições iniciais  $(y_0, y'_0)$  o sistema tem uma única solução  $(c_1, c_2)$  (A solução é  $X = A^{-1}B$ ). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Ou seja, se

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condições iniciais  $(y_0, y'_0)$  existe um único par de constantes  $(c_1, c_2)$  tal que  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  é solução do problema de valor inicial (2.3).

Se além disso as soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  estão definidas num intervalo  $I$ , onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas, então pelo Teorema 2.1 de Existência e Unicidade,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

é a única solução do PVI no intervalo  $I$  e assim temos o resultado a seguir.

**Teorema 2.3.** *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  duas soluções da equação (2.1) em um intervalo aberto  $I$ , onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas, tais que, em um ponto  $t_0 \in I$ ,*

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

*Então para todo par de condições iniciais  $(y_0, y'_0)$ , existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

*tem como única solução no intervalo  $I$ ,*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

**Definição 2.1.** (a) O determinante

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **wronskiano** das funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  em  $t_0$ .

- (b) Se duas *soluções*  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  de (2.1), em um intervalo aberto  $I$  onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas, são tais que o seu wronskiano é diferente de zero em um ponto  $t_0 \in I$  dizemos que elas são **soluções fundamentais no intervalo**  $I$  da equação diferencial (2.1).

**Teorema 2.4.** Se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais de (2.1) em um intervalo aberto  $I$ , então a família de soluções

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad (2.4)$$

para constantes  $c_1$  e  $c_2$  arbitrárias é a solução geral de (2.1) em  $I$ .

**Demonstração.** Seja  $z(t)$  uma solução qualquer de (2.1) no intervalo  $I$ . Como  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais em  $I$ , existe um ponto  $t_0 \in I$  tal que  $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ . Considere o PVI formado por (2.1) e as condições iniciais  $y(t_0) = z(t_0)$  e  $y'(t_0) = z'(t_0)$ , então pelo Teorema 2.3 existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ . ■

Assim para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem (2.1) em um intervalo  $I$ , precisamos encontrar duas soluções fundamentais da equação (2.1), ou seja, duas soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  tais que em um ponto  $t_0 \in I$

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$



**Exemplo 2.2.** Seja  $b$  um número real não nulo. Vamos mostrar que  $y_1(t) = \cos bt$  e  $y_2(t) = \sin bt$  são soluções fundamentais da equação diferencial

$$y'' + b^2y = 0.$$

Como  $y_1'(t) = -b \sin bt$ ,  $y_1''(t) = -b^2 \cos bt$ ,  $y_2'(t) = b \cos bt$  e  $y_2''(t) = -b^2 \sin bt$ , então

$$y_1'' + b^2y_1 = -b^2 \cos bt + b^2 \cos bt = 0$$

e

$$y_2'' + b^2y_2 = -b^2 \sin bt + b^2 \sin bt = 0.$$

Assim,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da equação  $y'' + b^2y = 0$ . Além disso,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -b \sin bt & b \cos bt \end{bmatrix} = b(\cos^2 bt + \sin^2 bt) = b \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $y_1(t) = \cos bt$  e  $y_2(t) = \sin bt$  são soluções fundamentais de  $y'' + b^2y = 0$  e a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 \cos bt + c_2 \sin bt.$$

### Dependência Linear

Dizemos que duas funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são **linearmente dependentes (L.D.)** em um intervalo  $I$ , se uma das funções é um múltiplo escalar da outra, ou seja, se

$$y_1(t) = \alpha y_2(t) \quad \text{ou} \quad y_2(t) = \alpha y_1(t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Caso contrário, dizemos que elas são **linearmente independentes (LI)**.

Se duas funções são L.D. em um intervalo  $I$ , então

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } t \in I$$

pois uma coluna da matriz acima é um múltiplo escalar da outra. Assim, vale o seguinte resultado.

---

**Teorema 2.5.** *Se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são funções tais que*

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{para algum } t_0 \in I,$$

*então  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são linearmente independentes (LI) em  $I$ .*

---

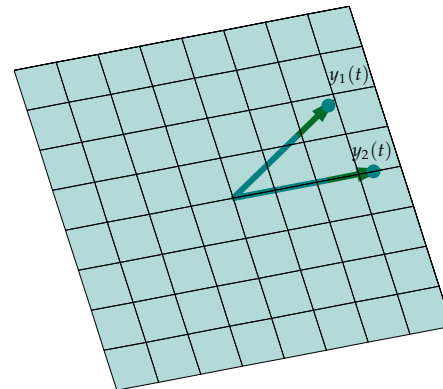


Figura 2.3 –  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções fundamentais de uma equação diferencial linear homogênea

Usando a linguagem de Álgebra Linear podemos dizer que duas soluções fundamentais formam uma base para o subespaço das soluções de uma equação homogênea (2.1), pois elas são LI e geram o subespaço (toda solução é uma combinação linear delas).

Observe que o wronskiano pode ser calculado para quaisquer par de funções mesmo que elas não sejam soluções de uma equação diferencial. Também os conceitos de dependência e independência linear são definidos para duas funções que podem ou não ser soluções de uma equação diferencial.

**Exemplo 2.3.** Seja  $b$  um número real não nulo. Mostramos no exemplo anterior que  $y_1(t) = \cos bt$  e  $y_2(t) = \sin bt$  são soluções fundamentais da equação

$$y'' + b^2y = 0.$$

Portanto elas são soluções LI da equação diferencial.

A recíproca do Teorema 2.5 não é verdadeira, ou seja, duas funções podem ser LI com

$$W[y_1, y_2](t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vejam o próximo exemplo.

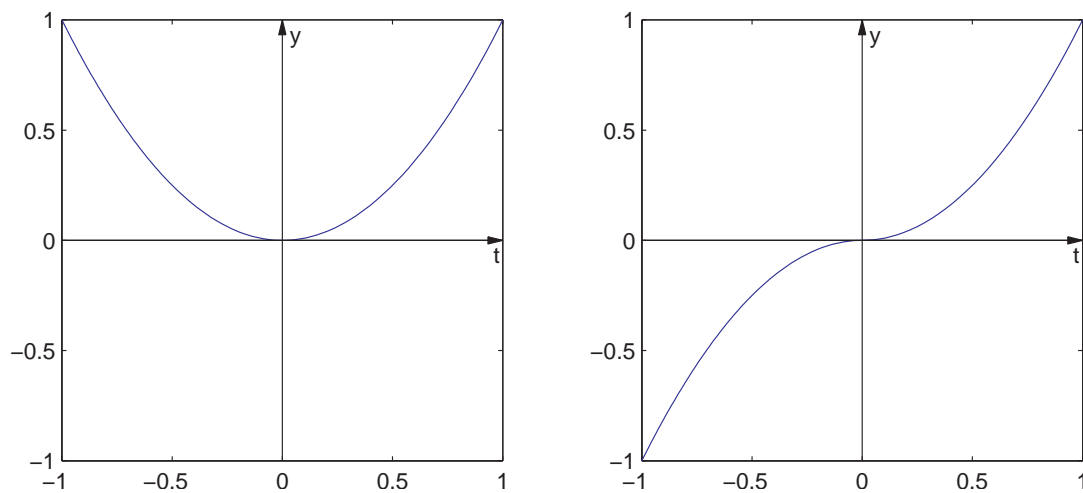


Figura 2.4 –  $y_1(t) = t^2$  e  $y_2(t) = t|t|$  são LI mas o wronskiano é igual a zero para todo  $t$

**Exemplo 2.4.** Sejam  $y_1(t) = t^2$  e  $y_2(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$ .

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix} = 0.$$

Apesar do wronskiano ser zero para todo  $t \in \mathbb{R}$  as funções  $y_1$  e  $y_2$  são LI, pois uma função não é múltiplo escalar da outra. Para  $t \geq 0$ ,  $y_2(t) = y_1(t)$  e para  $t < 0$ ,  $y_2(t) = -y_1(t)$ .

### 2.1.2 Fórmula de Euler

Queremos definir a função exponencial  $e^{rt}$  para números complexos  $r = a + ib$ , de forma que satisfaça as propriedades

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt} \quad (2.6)$$

Observamos que a função  $z(t) = e^{ibt}$  é solução da equação  $y'' + b^2y = 0$ . Pois pela propriedade (2.6)

$$z'(t) = ibe^{ibt}, \quad z''(t) = -b^2e^{ibt} = -b^2z(t)$$

e assim

$$z''(t) + b^2z(t) = 0.$$

Assim  $z(t) = e^{ibt}$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + b^2y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = ib \end{cases}$$

Agora, como mostramos no [Exemplo 2.2](#) que  $y_1(t) = \cos bt$  e  $y_2(t) = \sin bt$  são soluções fundamentais de  $y'' + b^2y = 0$ , então pelo [Teorema 2.3](#) existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$z(t) = e^{ibt} = c_1 \cos bt + c_2 \sin bt. \quad (2.7)$$

Vamos determinar estas constantes  $c_1$  e  $c_2$ . Substituindo-se  $t = 0$  na equação (2.7) obtemos que  $c_1 = 1$ . Derivando a equação (2.7) em relação a  $t$  obtemos

$$ibe^{ibt} = -c_1 b \sin bt + c_2 b \cos bt. \quad (2.8)$$

Substituindo-se  $t = 0$  na equação (2.8) obtemos que  $c_2 = i$ . Assim substituindo-se  $c_1 = 1$  e  $c_2 = i$  já obtidos na equação (2.7) obtemos

$$e^{ibt} = \cos bt + i \sin bt.$$

Portanto, pela propriedade (2.5),

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt). \quad (2.9)$$

Tomando  $t = 1$  temos

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b). \quad (2.10)$$

Esta equação é conhecida como **fórmula de Euler**.

**Exemplo 2.5.** Usando a fórmula de Euler temos que

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{\ln 2 + \frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

que foram obtidas fazendo em (2.10)

$$a = 0, b = \pi; \quad a = 0, b = \frac{\pi}{2}; \quad a = \ln 2, b = \frac{\pi}{4},$$

respectivamente.



## Exercícios (respostas na página 235)

1.1. Considere a equação diferencial  $y'' - \omega^2 y = 0$ , para  $\omega > 0$ .

- (a) Mostre que  $y(t) = c_1 e^{-\omega(x-a)} + c_2 e^{\omega(x-a)}$ , para  $a \in \mathbb{R}$  fixo, é solução geral de equação diferencial.
- (b) Mostre que  $y(t) = c_1 \cosh(\omega(x-a)) + c_2 \sinh(\omega(x-a))$ , para  $a \in \mathbb{R}$  fixo, é solução geral de equação diferencial.

1.2. (a) Mostre que  $y_1(x) = x^2$  e  $y_2(x) = x^5$  são soluções da equação

$$x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0.$$

(b) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

1.3. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0, \quad \text{em que } b, c \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Mostre que existem valores constantes de  $r$  tais que  $y(x) = x^r$  é uma solução de (2.11). Além disso mostre que  $y(x) = x^r$  é solução da equação (2.11) se, e somente se,

$$r^2 + (b-1)r + c = 0, \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é chamada **equação indicial de (2.11)**.

1.4. Mostre que se a equação indicial (2.12) tem duas raízes reais (distintas),  $r_1$  e  $r_2$ , então

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{r_2}$$

são soluções fundamentais de (2.11) e portanto

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

é a solução geral de (2.11), para  $x > 0$ .

- 1.5. Se a equação indicial (2.12) tem duas raízes complexas,  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$ , use a fórmula de Euler para escrever a solução geral complexa em termos das soluções reais, para  $x > 0$ ,

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad v(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

Mostre que estas soluções são soluções fundamentais de (2.11) e portanto

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

é a solução geral de (2.11), para  $x > 0$ .

- 1.6. Se a equação indicial (2.12) tem somente uma raiz real, mostre que  $y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}}$  e  $y_2(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$  são soluções fundamentais de (2.11) e portanto a solução geral de (2.11), para  $x > 0$ , é

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1-b}{2}} + c_2 x^{\frac{1-b}{2}} \ln x.$$

- 1.7. Use os exercícios anteriores para encontrar a solução geral das seguintes equações:

(a)  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

(b)  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c)  $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

- 1.8. Baseado no Teorema 2.1 na página 152, determine um intervalo em que os problemas de valor inicial abaixo têm uma única solução, sem resolvê-los:

(a)  $\begin{cases} (t^2 - 1)y'' + (t - 2)y = t \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} (t^2 - t)y'' + (t + 1)y' + y = e^t \\ y(-1) = y_0, \quad y'(-1) = y'_0 \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} (t^2 - 1)y'' + y' + ty = t^2 \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y'_0 \end{cases}$

(d)  $\begin{cases} (t^2 - t)y' + (t + 3)y' + 2y = \cos t \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y'_0 \end{cases}$

- 1.9.** Considere a equação homogênea  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , com  $p(t)$  e  $q(t)$  funções contínuas num intervalo  $I$ . Usando o Teorema 2.1 na página 152 mostre que esta equação tem soluções fundamentais em  $I$ .
- 1.10.** Mostre que  $y(t) = \sin(t^2)$  não pode ser solução de uma equação diferencial  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , com  $p(t)$  e  $q(t)$  contínuas num intervalo contendo  $t = 0$ .

- 1.11.** Considere a equação

$$ty'' - (2 + t^2)y' + 3ty = 0.$$

Mostre que  $y_1(t) = t^3$  e  $y_2(t) = t^2|t|$  são soluções LI desta equação válidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , embora  $W[y_1, y_2](t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

- 1.12.** Considere a equação homogênea  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , com  $p(t)$  e  $q(t)$  funções contínuas num intervalo aberto  $I$ . Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  duas soluções desta equação no intervalo  $I$ . Mostre que se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são LI, então elas são soluções fundamentais da equação diferencial em  $I$ . Sugestão: mostre que se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não são soluções fundamentais da equação diferencial, então  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são LD.
- 1.13.** (Teorema de Abel) Considere a equação homogênea  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , com  $p(t)$  e  $q(t)$  funções contínuas num intervalo  $I$ . Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  duas soluções desta equação no intervalo  $I$ . Seja  $W[y_1, y_2](t)$  o wronskiano de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  no intervalo  $I$ . Mostre que:
- (a)  $W[y_1, y_2]'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t)$
  - (b)  $W[y_1, y_2](t)$  satisfaz a equação diferencial  $y' + p(t)y = 0$  no intervalo  $I$ .
  - (c)  $W[y_1, y_2](t) = ce^{-\int p(t)dt}$ .
  - (d)  $W[y_1, y_2](t) = 0$ , para todo  $t \in I$  ou  $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .
- 1.14.** Mostre que se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais da equação  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  num intervalo  $I$ , então

$$p(t) = \frac{y_2(t)y_1''(t) - y_1(t)y_2''(t)}{W[y_1, y_2](t)} \quad \text{e} \quad q(t) = -\frac{y_2'(t)y_1''(t) - y_1'(t)y_2''(t)}{W[y_1, y_2](t)}, \quad \text{para } t \in I.$$

Sugestão: substitua  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  na equação diferencial e resolva o sistema correspondente para  $p(t)$  e  $q(t)$ .

## 2.2 Equações Homogêneas - Parte II

### 2.2.1 Obtendo-se uma Segunda Solução

Considere uma equação linear de 2a. ordem homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.13)$$

Seja  $y_1(t)$  uma solução conhecida da equação acima num intervalo  $I$  onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas e tal que  $y_1(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Vamos procurar uma segunda solução da equação (2.13) da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t).$$

Derivando-se esta expressão obtemos

$$y'(t) = vy_1' + y_1v' \quad \text{e} \quad y''(t) = vy_1'' + 2y_1'v' + y_1v''.$$

Substituindo-se  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$  na equação (2.13) obtemos

$$(vy_1'' + 2y_1'v' + y_1v'') + p(t)(vy_1' + y_1v') + q(t)vy_1 = 0.$$

Colocando-se em evidência  $v''$ ,  $v'$  e  $v$  obtemos

$$y_1v'' + (2y_1' + p(t)y_1)v' + (y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)v = 0.$$

Como  $y_1(t)$  é solução da equação (2.13), então  $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$  e assim a equação anterior se torna

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p(t)y_1) = 0. \quad (2.14)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $w(t) = v'(t)$ , a equação (2.14) se transforma em

$$y_1w' + (2y_1' + p(t)y_1)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem linear e separável. Resolvendo-se esta equação, como  $w(t) = v'(t)$ , então

$$v(t) = \int w(t) dt. \quad (2.15)$$

Substituindo-se  $v(t)$  em  $y(t) = v(t)y_1(t)$  obtemos uma segunda solução da equação (2.13).

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

**Exemplo 2.6.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ . Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{com } b^2 - 4ac = 0. \quad (2.16)$$

Deixamos como exercício verificar que  $y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$  é uma solução da equação diferencial (2.16). Vamos procurar uma segunda solução da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{rt}, \text{ em que } r = -\frac{b}{2a}.$$

Como

$$y'(t) = v'(t)e^{rt} + rv(t)e^{rt} \quad \text{e} \quad y''(t) = v''(t)e^{rt} + 2rv'(t)e^{rt} + r^2v(t)e^{rt},$$

então substituindo-se  $y(t), y'(t)$  e  $y''(t)$  na equação diferencial (2.16) obtemos

$$\left[ a(v'' + 2rv' + r^2v) + b(v' + rv) + cv \right] e^{rt} = 0.$$

Dividindo-se por  $e^{rt}$  obtemos

$$a(v'' + 2rv' + r^2v) + b(v' + rv) + cv = 0.$$

Colocando-se em evidência  $v'', v'$  e  $v$  obtemos

$$av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c)v = 0.$$

Como  $r = -\frac{b}{2a}$  é (a única) solução da equação  $ar^2 + br + c = 0$  e  $2ar + b = 0$ , então a equação diferencial anterior fica sendo

$$av'' = 0 \quad \text{ou} \quad v'' = 0.$$

Seja  $w(t) = v'(t)$ . Então a equação  $v'' = 0$  torna-se  $w' = 0$  que tem solução  $w(t) = \tilde{c}_1$ . Resolvendo-se a equação  $v'(t) = w(t) = \tilde{c}_1$  obtemos

$$v(t) = \tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2$$

e

$$y(t) = v(t)y_1(t) = (\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2)e^{rt}. \quad (2.17)$$

Tomando-se  $\tilde{c}_2 = 0$  e  $\tilde{c}_1 = 1$  obtemos uma segunda solução, que chamamos de  $y_2(t)$ , da equação diferencial (2.16)

$$y_2(t) = te^{rt}.$$

Vamos ver que  $y_1(t) = e^{rt}$  e  $y_2(t) = te^{rt}$ , em que  $r = -\frac{b}{2a}$ , são soluções fundamentais da equação diferencial (2.16)

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix} \\ &= e^{2rt} \det \begin{bmatrix} 1 & t \\ r & (1+rt) \end{bmatrix} \\ &= e^{2rt} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}, \quad \text{em que } r = -\frac{b}{2a}$$

é a solução geral da equação  $ay'' + by' + cy = 0$ , tal que  $b^2 - 4ac = 0$  e  $a \neq 0$ .

**Atenção:** Atribuindo-se diferentes valores a  $\tilde{c}_1$  e a  $\tilde{c}_2$  em (2.17) obtemos uma infinidade de funções  $v(t)$ , mas precisamos de apenas uma tal que  $W[y_1, vy_1](t_0) \neq 0$  para algum ponto  $t_0$ . Você pode escolher  $\tilde{c}_1$  e  $\tilde{c}_2$  da maneira que você quiser, com exceção de  $\tilde{c}_1 = 0$ , pois neste caso teríamos  $y_2(t) = y_1(t)v(t) = \tilde{c}_2 y_1(t)$  e assim teríamos  $W[y_1, y_2](t) = 0$ , para todo  $t \in I$ .

Não se deve memorizar a fórmula obtida para  $y_2(t)$ . O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para encontrar uma segunda solução da equação linear homogênea de 2ª ordem que com a primeira forma um conjunto de soluções fundamentais.

### 2.2.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.18)$$

Vamos mostrar que para esta equação existem valores constantes de  $r$  tais que  $y(t) = e^{rt}$  é uma solução.

Substituindo-se  $y(t) = e^{rt}$ ,  $y'(t) = re^{rt}$  e  $y''(t) = r^2e^{rt}$  em (2.18) obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como  $e^{rt} \neq 0$ , então  $y(t) = e^{rt}$  é solução de (2.18) se, e somente se,  $r$  é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (2.19)$$

que é chamada **equação característica** de (2.18).



Observe que a equação característica pode ser obtida da equação diferencial com coeficientes constantes trocando-se  $y''$  por  $r^2$ ,  $y'$  por  $r$  e  $y$  por 1.

Como uma equação de 2º grau pode ter duas raízes reais, somente uma raiz real ou duas raízes complexas, usando a equação característica podemos chegar a três situações distintas.

### A Equação Característica Tem Duas Raízes Reais

Se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , então a equação característica de (2.18) tem duas raízes reais (distintas),  $r_1$  e  $r_2$ . Neste caso

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções fundamentais, pois o wronskiano de  $y_1(t) = e^{r_1 t}$  e  $y_2(t) = e^{r_2 t}$  é

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes reais distintas  $r_1$  e  $r_2$ ,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é a solução geral de (2.18).

**Exemplo 2.7.** Seja  $\omega$  um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

A equação característica desta equação diferencial é  $r^2 - \omega^2 = 0$ , que tem como raízes  $r_1 = \omega$  e  $r_2 = -\omega$ . Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$

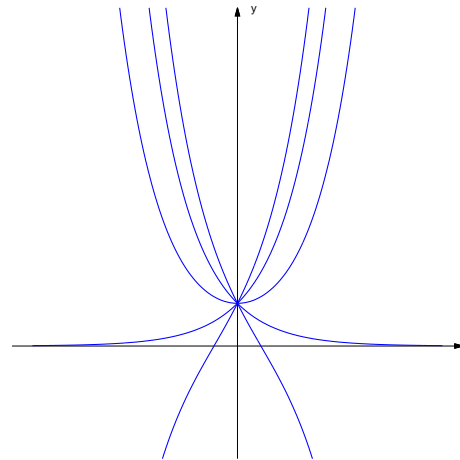


Figura 2.5 – Algumas soluções da equação do Exemplo 2.7

### A Equação Característica Tem Somente Uma Raiz Real

Se  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , então a equação característica (2.19) tem somente uma raiz real  $r = -\frac{b}{2a}$ . Neste caso,

$$y_1(t) = e^{rt} = e^{-\frac{b}{2a}t}$$

é solução da equação diferencial (2.18).

No Exemplo 2.6 na página 172 mostramos como encontrar uma segunda solução para esta equação. Lá mostramos que  $y_2(t) = te^{rt} = te^{-\frac{b}{2a}t}$  também é solução da equação (2.18) e que  $y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$  e  $y_2(t) = te^{-\frac{b}{2a}t}$  são soluções fundamentais da equação diferencial (2.18).

Portanto no caso em que a equação característica tem somente uma raiz real  $r = -\frac{b}{2a}$ ,

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t}$$

é a solução geral de (2.18).

**Exemplo 2.8.** Vamos encontrar a solução geral da equação  $y'' + 2y' + y = 0$ .

A equação característica é  $r^2 + 2r + 1 = 0$ , que tem como raiz  $r_1 = -1$ . Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

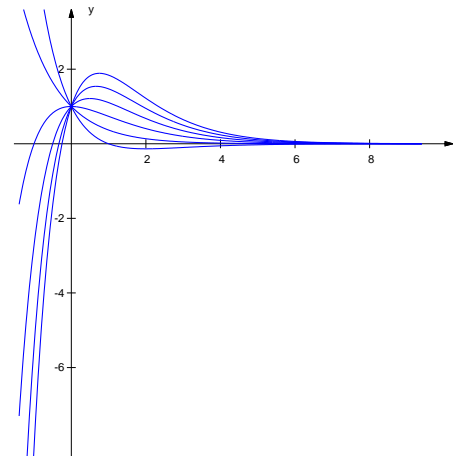


Figura 2.6 – Algumas soluções da equação do Exemplo 2.8

### A Equação Característica Tem Duas Raízes Complexas

Se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , então a equação característica (2.19) tem duas raízes complexas, que são conjugadas, ou seja, se  $r_1 = \alpha + i\beta$  é uma raiz da equação característica (2.19), então a outra raiz é  $r_2 = \alpha - i\beta$ . Neste caso, pela fórmula de Euler (2.9) temos:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \quad e \\ y_2(t) &= e^{r_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t)) = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t). \end{aligned}$$

Pela análise feita no início dessa seção sabemos que  $y_1(t) = e^{r_1 t}$  e  $y_2(t) = e^{r_2 t}$  são soluções (complexas) da equação diferencial (2.18). Além disso, assim como quando  $r_1$  e  $r_2$  são reais, o wronskiano

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} = -2i\beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais de (2.18). Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$ ,

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

é a solução geral complexa de (2.18).

Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. A solução geral complexa pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)t} \\ &= C_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + C_2 e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t) \\ &= (C_1 + C_2) e^{\alpha t} \cos \beta t + i(C_1 - C_2) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tomando  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$  em (2.20), temos a solução real  $u(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ .

Tomando  $C_1 = -C_2 = \frac{1}{2i}$ , temos a solução real  $v(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ .

Vamos mostrar, agora, que se as raízes da equação característica são complexas, então  $u(t)$  e  $v(t)$  são soluções fundamentais de (2.18).

$$\begin{aligned} W[u, v](t) &= \det \begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t) & e^{\alpha t}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) \end{bmatrix} \\ &= e^{2\alpha t} \left( \alpha \det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ \cos \beta t & \sin \beta t \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right) \\ &= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$ ,

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

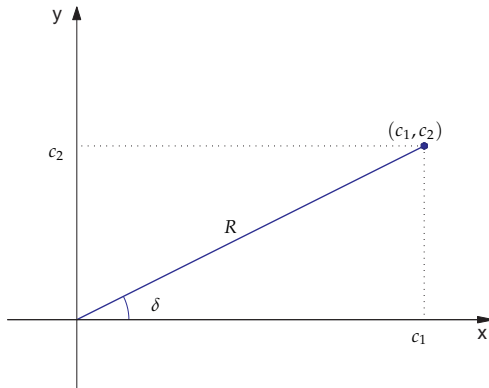
é a solução geral de (2.18).

**Exemplo 2.9.** Seja  $\omega$  um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

A equação característica desta equação diferencial é  $r^2 + \omega^2 = 0$ , que tem como raízes  $r_1 = i\omega$  e  $r_2 = -i\omega$ . Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (2.21)$$

Escrevendo o par  $(c_1, c_2)$  em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 &= R \cos \delta, \\ c_2 &= R \sin \delta. \end{cases} \quad (2.22)$$

Substituindo-se os valores de  $c_1$  e  $c_2$  na equação (2.21) obtemos

$$y(t) = R (\cos \delta \cos(\omega t) + \sin \delta \sin(\omega t)) = R \cos(\omega t - \delta), \quad \text{em que } R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ e } \delta \text{ são obtidos de (2.22).}$$

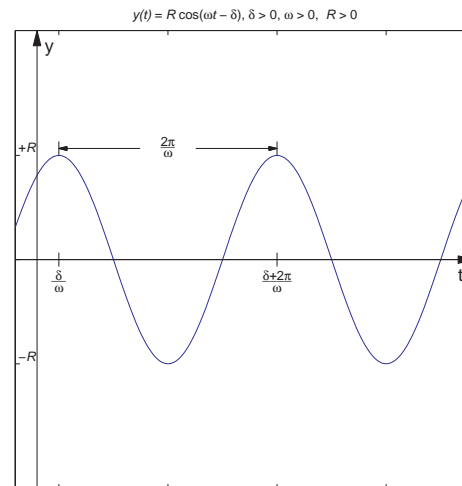


Figura 2.7 – Uma solução da equação do Exemplo 2.9



## Resumo

Para resolver a equação diferencial  $ay'' + by' + cy = 0$ , para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , encontramos a equação característica  $ar^2 + br + c = 0$ .

(a) Se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \text{ em que } r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(b) Se  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t}.$$

(c) Se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \text{ em que } \alpha = \frac{-b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

## Exercícios (respostas na página 243)

2.1. Mostre que  $y_1(x) = x^3$  é solução da equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' - 9y = 0.$$

Encontre uma função  $u(x)$  tal que  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções fundamentais.

2.2. Mostre que  $y_1(x) = x^{-1}$ ,  $x > 0$ , é solução da equação diferencial

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Encontre uma função  $u(x)$  tal que  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções fundamentais.

2.3. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad \text{em que } b, c \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Existem valores constantes de  $r$  tais que  $y(x) = x^r$  é uma solução de (2.23). Além disso  $y(x) = x^r$  é solução da equação (2.23) se, e somente se,

$$r^2 + (1 - b)r + c = 0, \quad (2.24)$$

que é chamada **equação indicial de (2.23)**. Se a equação indicial  $r^2 + (b - 1)r + c = 0$  tem somente uma raiz real,  $r = \frac{1-b}{2}$ , determine uma segunda solução linearmente independente da forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{\frac{1-b}{2}}, \quad \text{para } x > 0.$$

2.4. (a) Determine qual ou quais das funções  $z_1(x) = x^2$ ,  $z_2(x) = x^3$  e  $z_3(x) = e^{-x}$  são soluções da equação

$$(x + 3)y'' + (x + 2)y' - y = 0$$

- (b) Seja  $y_1(x)$  uma das soluções obtidas no item anterior. Determine uma segunda solução  $y_2(x)$  de forma que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  sejam soluções fundamentais da equação.
- (c) Determine a solução geral da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

e obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Justifique sua resposta!

- 2.5. Mostre que a solução do problema  $y'' + 2y' = 0, y(0) = a, y'(0) = b$  tende para uma constante quando  $t \rightarrow +\infty$ . Determine esta constante.
- 2.6. Mostre que se  $0 < b < 2$ , então toda solução de  $y'' + by' + y = 0$  tende a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ .
- 2.7. Considere o problema  $y'' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = b \neq 0$ . Mostre que  $y(t) \neq 0$  para todo  $t \neq 0$ .
- 2.8. Considere o problema  $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0, y(0) = 2, y'(0) = b$ . Determine os valores de  $b$  para os quais a solução  $y(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .
- 2.9. Considere a equação  $y'' + 2by' + y = 0$ . Para quais valores de  $b$  a solução  $y(t)$  tende a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ , independente das condições iniciais.
- 2.10. (a) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para  $\alpha > 1$ , para  $\alpha = 1$  e para  $\alpha < 1$ .

- (b) Para quais valores de  $\alpha$  todas as soluções tendem a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ .

## 2.3 Equações Não Homogêneas

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é **não homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t). \quad (2.25)$$

com  $f(t)$  uma função não-nula.

---

**Teorema 2.6.** *Seja  $y_p(t)$  uma solução particular da equação (2.25). Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea (2.25) é*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

*Ou seja, a solução geral da equação diferencial linear de 2ª ordem não homogênea é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente,  $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ , com uma solução particular da equação diferencial não homogênea,  $y_p(t)$ .*

---

**Demonstração.** Seja  $y(t)$  uma solução qualquer de (2.25) e  $y_p(t)$  uma solução particular de (2.25). Vamos mostrar que  $Y(t) = y(t) - y_p(t)$  é solução da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} Y''(t) + p(t)Y'(t) + q(t)Y(t) &= (y(t) - y_p(t))'' + p(t)(y(t) - y_p(t))' + q(t)(y(t) - y_p(t)) \\ &= \underbrace{(y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t))}_{=f(t)} - \underbrace{(y_p''(t) + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t))}_{=f(t)} \\ &= f(t) - f(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais da equação homogênea associada (2.26), existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$Y(t) = y(t) - y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

ou seja, se  $y(t)$  é uma solução qualquer de (2.25) e  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais da equação homogênea associada (2.26), então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t). \quad (2.27)$$



Portanto para encontrar a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem não homogênea precisamos encontrar uma solução particular e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

**Exemplo 2.10.** A função  $y_p(t) = \frac{t}{4}$  é solução da equação diferencial

$$y'' + 4y = t.$$

(verifique!) Já vimos no [Exemplo 2.2 na página 159](#) que a solução geral da equação diferencial homogênea correspondente,  $y'' + 4y = 0$ , é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Logo a solução geral da equação não homogênea  $y'' + 4y = t$  é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{t}{4}.$$

A função  $y_2(t) = \frac{t}{2} \sin(2t)$  é solução da equação

$$y'' + 4y = 2 \cos(2t)$$

(verifique!). Logo

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{t}{2} \sin(2t).$$

é solução geral da equação diferencial

$$y'' + 4y = 2 \cos(2t).$$

---

**Teorema 2.7 (Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas).** Se  $y_p^{(1)}(t)$  é uma solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e  $y_p^{(2)}(t)$  é uma solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t),$$

então  $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)$  é solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t) + f_2(t).$$

---

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
y_p(t)'' + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t) &= \\
&= (y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))'' + p(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))' + q(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)) = \\
&= \underbrace{y_p^{(1)}(t)'' + p(t)y_p^{(1)}(t)' + q(t)y_p^{(1)}(t)}_{=f_1(t)} + \underbrace{y_p^{(2)}(t)'' + p(t)y_p^{(2)}(t)' + q(t)y_p^{(2)}(t)}_{=f_2(t)} = \\
&= f_1(t) + f_2(t),
\end{aligned}$$

pois  $y_p^{(1)}(t)$  é solução da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e  $y_p^{(2)}(t)$ , da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t).$$



**Exemplo 2.11.** Vimos no [Exemplo 2.10](#) que a função  $y_1(t) = \frac{t}{4}$  é solução da equação diferencial

$$y'' + 4y = t$$

e a função  $y_2(t) = \frac{t}{2} \sin(2t)$  é solução da equação

$$y'' + 4y = 2 \cos(2t).$$

Pelo Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas ([Teorema 2.7](#))

$y(t) = \frac{t}{4} + \frac{t}{2} \sin(2t)$  é solução da equação

$$y'' + 4y = 2 \cos(2t) + t$$

e a solução geral desta equação é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{t}{4} + \frac{t}{2} \sin(2t).$$

### 2.3.1 Equações Não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t). \quad (2.28)$$

em que  $a, b$  e  $c$  são números reais,  $a \neq 0$ .

Este método funciona quando a função  $f(t)$  tem uma das seguintes formas:

- (1)  $f(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ , em que  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s (A_0 + \dots + A_n t^n),$$

em que  $s$  é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de  $y_p(t)$  seja solução da equação homogênea correspondente e  $A_0, \dots, A_n$  são coeficientes a serem determinados substituindo-se  $y_p(t)$  na equação (2.28). O Exemplo 2.12 ilustra este caso.

- (2)  $f(t) = (a_0 + \dots + a_n t^n) e^{\alpha t}$ , em que  $a_0, \dots, a_n, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s (A_0 + \dots + A_n t^n) e^{\alpha t},$$

em que  $s$  é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de  $y_p(t)$  seja solução da equação homogênea correspondente e  $A_0, \dots, A_n$  são coeficientes a serem determinados substituindo-se  $y_p(t)$  na equação (2.28). O Exemplo 2.13 ilustra este caso.



- (3)  $f(t) = (a_0 + \dots + a_n t^n) e^{\alpha t} \cos \beta t$  ou  $f(t) = (a_0 + \dots + a_n t^n) e^{\alpha t} \sin \beta t$ ,  
em que  $a_0, \dots, a_n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s [(A_0 + \dots + A_n t^n) e^{\alpha t} \cos \beta t + (B_0 + \dots + B_n t^n) e^{\alpha t} \sin \beta t],$$

em que  $s$  é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de  $y_p(t)$  seja solução da equação homogênea correspondente e  $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$  são coeficientes a serem determinados substituindo-se  $y_p(t)$  na equação (2.28). O Exemplo 2.14 ilustra este caso.

**Exemplo 2.12.** Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y' = 2 + t^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + y' = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + r = 0$$

que tem como raízes  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -1$ . Assim a solução geral da equação homogênea correspondente  $y'' + y' = 0$  é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

O segundo membro da equação diferencial,  $2 + t^2$ , é da forma (1). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^1 (A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = A_0 t + A_1 t^2 + A_2 t^3$$

O valor de  $s$  é igual a 1, pois para  $s = 0$ , a parcela  $A_0$  é solução da equação homogênea ( $c_2 = 0$  e  $c_1 = A_0$ ).

$$y_p'(t) = A_0 + 2A_1t + 3A_2t^2$$

$$y_p''(t) = 2A_1 + 6A_2t.$$

Substituindo  $y_p'(t)$  e  $y_p''(t)$  na equação  $y'' + y' = 2 + t^2$  obtemos

$$(2A_1 + 6A_2t) + (A_0 + 2A_1t + 3A_2t^2) = (A_0 + 2A_1) + (2A_1 + 6A_2)t + 3A_2t^2 = 2 + t^2$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} A_0 + 2A_1 = 2 \\ 2A_1 + 6A_2 = 0 \\ 3A_2 = 1 \end{cases}$$

que tem solução  $A_0 = 4$ ,  $A_1 = -1$  e  $A_2 = 1/3$ . Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 + c_2e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 \quad (2.29)$$

Para resolvermos o problema de valor inicial vamos calcular a derivada da solução geral da equação não homogênea

$$y'(t) = -c_2e^{-t} + t^2 - 2t + 4 \quad (2.30)$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $y = 1$  em (2.29) e  $t = 0$  e  $y' = 2$  em (2.30) obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4 - c_2 = 2 \end{cases}$$

de onde obtemos  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 2$ . Logo a solução do PVI é

$$y(t) = -1 + 2e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

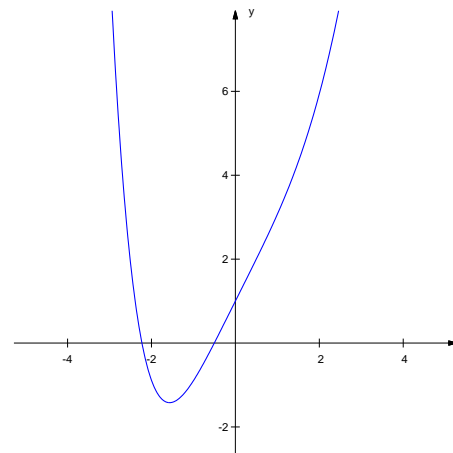


Figura 2.8 – A solução do problema de valor inicial do Exemplo 2.12

**Exemplo 2.13.** Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = (2 + t)e^{-t}.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tem como raiz  $r_1 = -1$ . Assim a solução geral da equação homogênea correspondente  $y'' + 2y' + y = 0$  é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

O segundo membro da equação diferencial,  $(2 + t)e^{-t}$ , é da forma (2). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^2(A_0 + A_1 t)e^{-t} = (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t}$$

O valor de  $s$  é igual a 2, pois para  $s = 0$  as parcelas  $A_0 e^{-t}$  e  $A_1 t e^{-t}$  são soluções da equação homogênea ( $c_1 = A_0$ ,  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = A_1$ ) e para  $s = 1$  a parcela  $A_0 t e^{-t}$  é solução da equação homogênea ( $c_1 = 0$  e  $c_2 = A_0$ ).

$$y'_p(t) = (2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3)e^{-t}$$

$$y''_p(t) = (2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3)e^{-t}.$$

Substituindo  $y'_p(t)$  e  $y''_p(t)$  na equação  $y'' + 2y' + y = (2 + t)e^{-t}$  obtemos

$$\begin{aligned} & (2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3)e^{-t} + \\ & + 2(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3)e^{-t} + \\ & + (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t} = (2 + t)e^{-t} \end{aligned}$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(2A_0 + 6A_1t)e^{-t} = (2 + t)e^{-t} \Rightarrow 2A_0 + 6A_1t = 2 + t$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2A_0 &= 2 \\ 6A_1 &= 1 \end{cases}$$

que tem solução  $A_0 = 1$  e  $A_1 = 1/6$ . Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = (t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + (t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$$

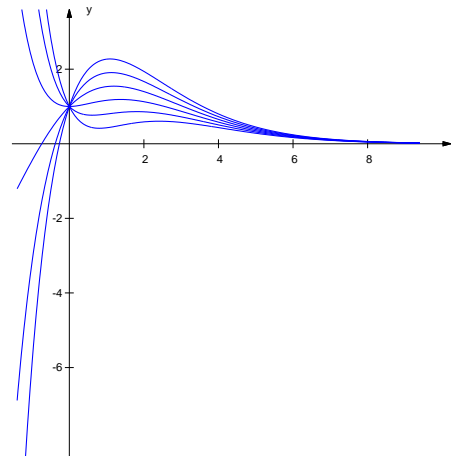


Figura 2.9 – Algumas soluções da equação do Exemplo 2.13

**Exemplo 2.14.** Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = e^t \cos t.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

que tem como raízes  $r_1 = -1 + i$  e  $r_2 = -1 - i$ . Assim a solução geral da equação homogênea correspondente  $y'' + 2y' + 2y = 0$  é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t.$$

O segundo membro da equação diferencial,  $e^t \cos t$ , é da forma (3). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^0 (Ae^t \cos t + Be^t \sin t) = Ae^t \cos t + Be^t \sin t$$

O valor de  $s$  é igual a 0, pois nenhuma parcela de  $y_p(t)$  é solução da equação homogênea.

$$y'_p(t) = A(e^t \cos t - e^t \sin t) + B(e^t \sin t + e^t \cos t) = (A + B)e^t \cos t + (B - A)e^t \sin t$$

$$y''_p(t) = 2Be^t \cos t - 2Ae^t \sin t.$$

Substituindo  $y'_p(t)$  e  $y''_p(t)$  na equação  $y'' + 2y' + y = e^t \cos t$  obtemos

$$\begin{aligned} 2Be^t \cos t - 2Ae^t \sin t + 2((A + B)e^t \cos t + (B - A)e^t \sin t) \\ + 2(Ae^t \cos t + Be^t \sin t) = e^t \cos t \end{aligned}$$



Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(4A + 4B)e^t \cos t + (4B - 4A)e^t \sin t = e^t \cos t$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $t = \pi/2$  obtemos obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 4A + 4B = 1 \\ -4A + 4B = 0 \end{cases}$$

que tem solução  $A = 1/8$  e  $B = 1/8$ . Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = \frac{1}{8}e^t \cos t + \frac{1}{8}e^t \sin t$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t + \frac{1}{8}e^t (\cos t + \sin t)$$

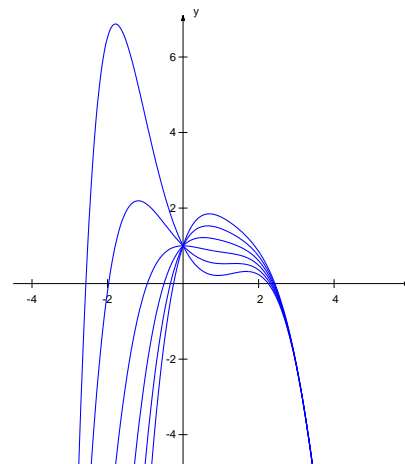


Figura 2.10 – Algumas soluções da equação do Exemplo 2.14

## Exercícios (respostas na página 252)

3.1. Encontre a solução geral das equações:

(a)  $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$ .

(b)  $y'' - 4y' + 6y = 3x$ .

(c)  $y'' + 4y = 2\sin(2t) + t$

(d)  $y'' + 2y = e^t + 2$

3.2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a)  $y'' + y' - 2y = t^2 + 3$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(b)  $y'' + 2y' + y = 3\sin(2t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(c)  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-t}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(d)  $2y'' + 2y' + y = t^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

3.3. (a) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para  $\alpha > 1$ , para  $\alpha = 1$  e para  $\alpha < 1$ .

(b) Determine a forma adequada para uma solução particular da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = te^{-t} \sin(\sqrt{\alpha - 1} t)$$

para  $\alpha > 1$ .

## 2.4 Oscilações

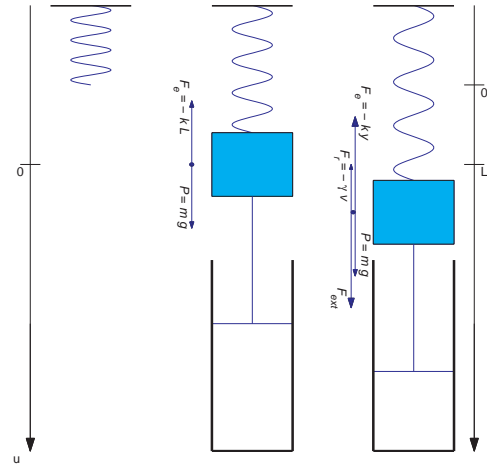


Figura 2.11 – Sistema massa-mola na vertical

Considere um sistema massa-mola na vertical. Seja  $L$  o alongamento provocado na mola pela colocação de um corpo de massa  $m$  quando o sistema está em equilíbrio. Neste caso a magnitude da força elástica é igual a magnitude da força peso, ou seja,

$$mg = kL. \quad (2.31)$$

Aqui  $k$  é chamada **constante da mola**. Seja  $y(t)$  o alongamento da mola em um instante  $t$ . Defina a nova função

$$u(t) = y(t) - L.$$

Sobre o corpo de massa  $m$  agem o seu peso,

$$P = mg,$$

a força da mola que é proporcional ao seu alongamento e tem sentido oposto a ele,

$$F_e = -ky(t) = -k(u(t) + L),$$

uma força de resistência proporcional a velocidade,

$$F_r = -\gamma y'(t) = -\gamma u'(t)$$

e uma força externa  $F_{ext}$ . Aqui  $\gamma$  é a **constante de amortecimento**.

Pela segunda lei de Newton, temos que

$$my''(t) = mg - ky(t) - \gamma y'(t) + F_{ext}$$

ou escrevendo em termos de  $u(t) = y(t) - L$ :

$$mu''(t) = mg - k(L + u(t)) - \gamma u'(t) + F_{ext} \quad (2.32)$$

Assim, por (2.31) e (2.32),  $u(t)$  satisfaz a seguinte equação diferencial

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_{ext}. \quad (2.33)$$

que é a mesma equação que satisfaz  $x(t)$  no caso em que o sistema massa-mola se movimenta na horizontal sobre uma superfície lisa. Verifique!

### 2.4.1 Oscilações Livres

Sem Amortecimento

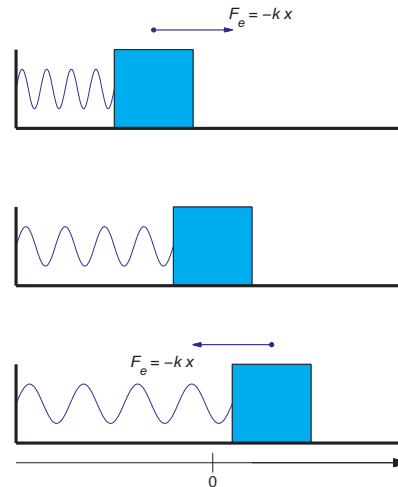


Figura 2.12 – Sistema massa-mola livre não amortecido

Como as oscilações são livres,  $F_{ext} = 0$  e como são não amortecidas,  $\gamma = 0$ . Assim a equação (2.33) para o movimento do sistema massa-mola é

$$mu'' + ku = 0$$

A equação característica é

$$mr^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i.$$

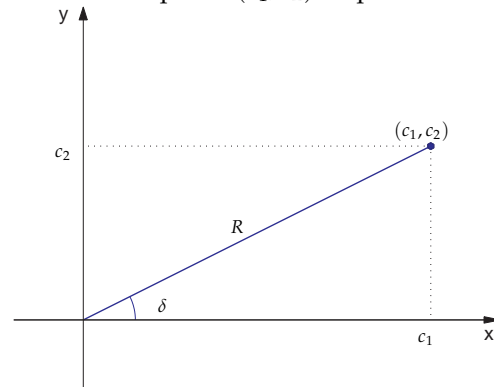
Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Seja  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Então a equação acima pode ser escrita em termos de  $\omega_0$  como

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t). \quad (2.34)$$

Marcando o ponto  $(c_1, c_2)$  no plano e escrevendo em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 = R \cos \delta, \\ c_2 = R \sin \delta. \end{cases} \quad (2.35)$$

Substituindo-se os valores de  $c_1$  e  $c_2$  obtidos de (2.35) na equação (2.34) obtemos

$$\begin{aligned}u(t) &= R \cos \delta \cos (\omega_0 t) + R \sin \delta \sin (\omega_0 t) \\&= R (\cos \delta \cos (\omega_0 t) + \sin \delta \sin (\omega_0 t)) \\&= R \cos (\omega_0 t - \delta),\end{aligned}$$

Aqui foi usada a relação

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$\omega_0$  é chamada **frequência natural** do sistema,  $\delta$  a **fase** e  $R$  a **amplitude**.

Neste caso a solução da equação é periódica de **período**  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Este movimento oscilatório é chamado **movimento harmônico simples**.



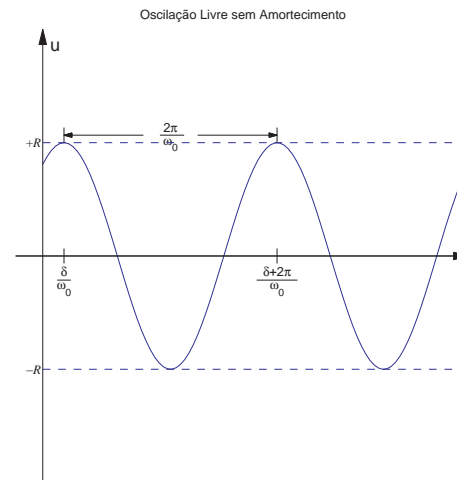


Figura 2.13 – Solução do sistema massa-mola livre não amortecido

**Exemplo 2.15.** Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- (a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.
- (b) Esboce o gráfico da solução obtida.

**Solução:**

- (a) Equação característica é  $r^2 + 2 = 0$ , que tem como raízes  $r = \pm\sqrt{2}i$ . Logo a solução geral da equação diferencial é :

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2} t) + c_2 \sin(\sqrt{2} t).$$

Para resolver o PVI precisamos calcular a derivada da solução geral:

$$y'(t) = -c_1 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} t) + c_2 \sqrt{2} \cos(\sqrt{2} t)$$

Substituindo-se  $t = 0, y = 0, y' = 1$  obtemos:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solução do PVI:

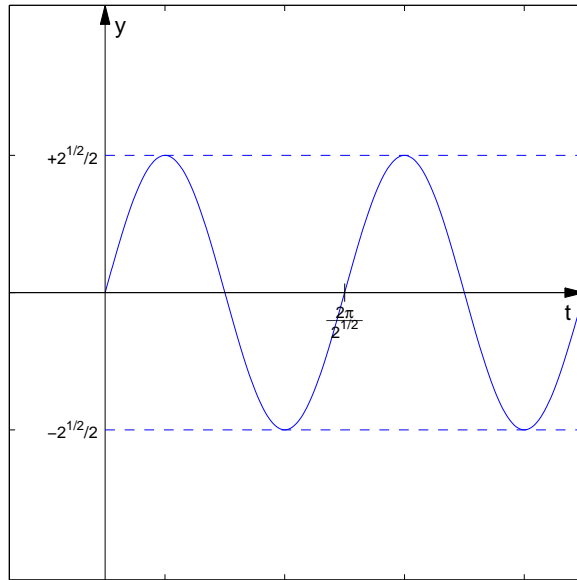
$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2} t).$$

Marcando o ponto  $(c_1, c_2) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  no plano obtemos que  $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , ou seja,

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2} t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\sqrt{2} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A amplitude é igual a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , a frequência é igual a  $\sqrt{2}$ , a fase é igual a  $\pi/2$  e o período é igual a  $2\pi/\sqrt{2}$ .

(b)



#### Com Amortecimento

Como as oscilações são livres,  $F_{ext} = 0$ . Assim a equação (2.33) para o movimento do sistema massa-mola é

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0$$

A equação característica é  $mr^2 + \gamma r + k = 0$  e  $\Delta = \gamma^2 - 4km$

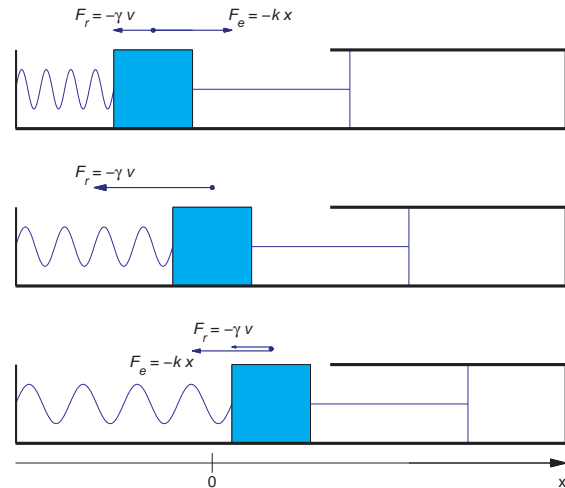


Figura 2.14 – Sistema massa-mola livre com amortecimento

Aqui temos três casos a considerar:

(a) Se  $\Delta = \gamma^2 - 4km > 0$  ou  $\gamma > 2\sqrt{km}$ , neste caso

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

em que

$$r_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} < 0$$

Este caso é chamado **superamortecimento** e a solução

$$u(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

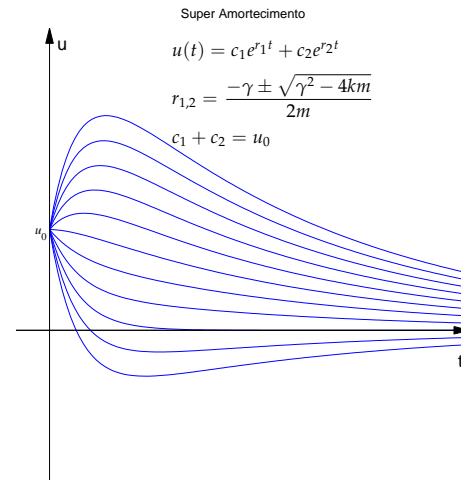


Figura 2.15 – Algumas soluções do sistema massa-mola livre com superamortecimento

(b) Se  $\Delta = \gamma^2 - 4km = 0$  ou  $\gamma = 2\sqrt{km}$ , neste caso

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} + c_2 t e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$$

Este caso é chamado **amortecimento crítico** e a solução

$$u(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

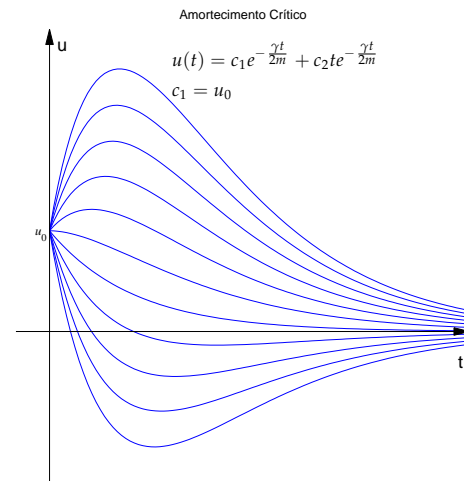


Figura 2.16 – Algumas soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento crítico

(c) Se  $\Delta = \gamma^2 - 4km < 0$  ou  $0 < \gamma < 2\sqrt{km}$ , neste caso

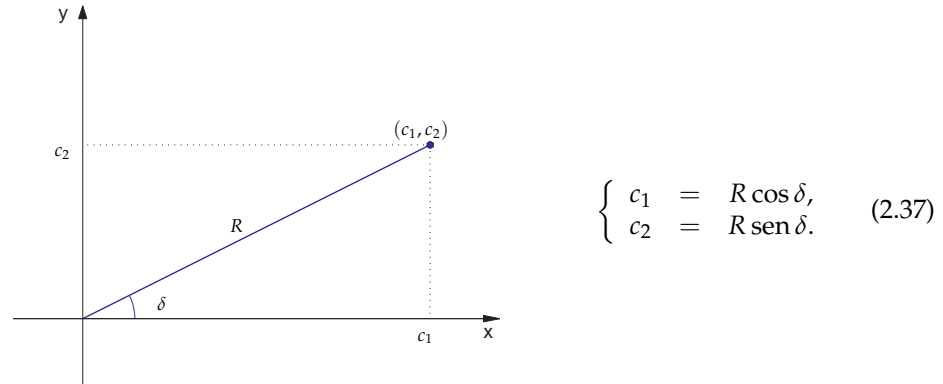
$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t) \quad (2.36)$$

em que

$$\mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} < \omega_0$$

Aqui,  $\mu$  é chamado **quase frequência** e  $T = \frac{2\pi}{\mu}$  é chamado **quase período**.

Escrevendo novamente o par  $(c_1, c_2)$  em coordenadas polares temos que



Substituindo-se os valores de  $c_1$  e  $c_2$  na equação (2.36) obtemos

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} (R \cos \delta \cos \mu t + R \sin \delta \sin \mu t) = R e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos(\mu t - \delta),$$

em que  $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  e  $\delta$  são obtidos de (2.37).

Este caso é chamado **subamortecimento** e a solução

$$u(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$



Este é um movimento oscilatório com amplitude  $Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}$  é chamado **quase-periódico**.

Observe que nos três casos a solução tende a zero quando  $t$  tende a  $+\infty$ .

Figura 2.17 – Algumas soluções do sistema massa-mola livre com subamortecimento

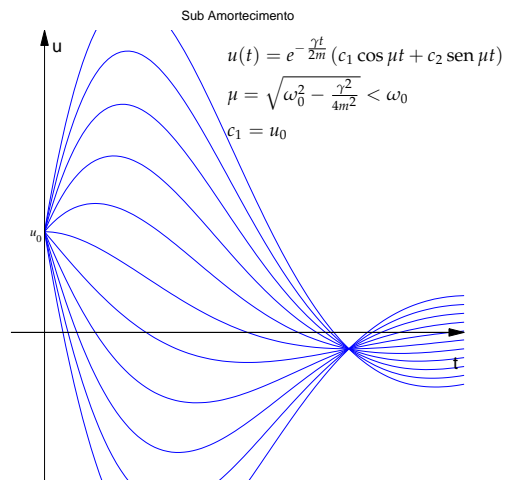
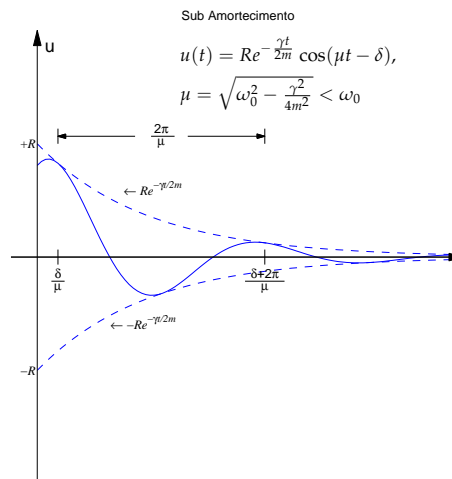


Figura 2.18 – Solução típica do sistema massa-mola livre com subamortecimento



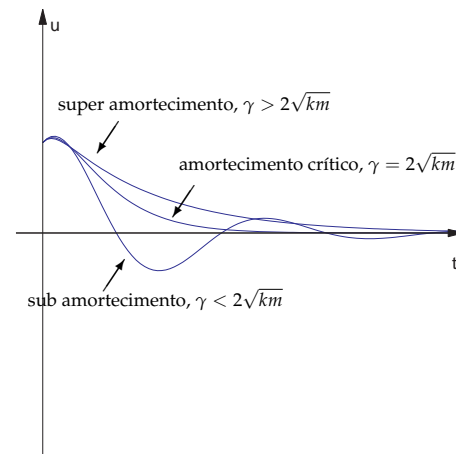


Figura 2.19 – Comparação das soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento para diferentes valores da constante de amortecimento  $\gamma$

### 2.4.2 Oscilações Forçadas

Vamos supor que uma força externa periódica da forma  $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$ , com  $\omega > 0$ , seja aplicada ao corpo de massa  $m$ . Então a equação (2.33) para o movimento do sistema é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

#### Oscilações Forçadas sem Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento da sistema é

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.38)$$

Sabemos que as soluções são da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + u_p(t)$$

em que, pelo método dos coeficientes a determinar,

$$u_p(t) = t^s [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

é uma solução particular e  $s$  é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de  $u_p(t)$  seja solução da equação homogênea correspondente e  $A$  e  $B$  são coeficientes a serem determinados substituindo-se  $u_p(t)$  na equação diferencial (2.38).

Temos dois casos a considerar:

- (a) Se  $\omega \neq \omega_0$ . Neste caso  $s = 0$ , pois nenhuma das parcelas de  $u_p(t)$  é solução da equação homogênea correspondente. Então a solução particular é da forma

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se  $u_p(t)$  na equação diferencial (2.38) encontramos

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

Neste caso a solução  $u(t)$  é oscilatória e limitada.

- (b) Se  $\omega = \omega_0$ . Neste caso  $s = 1$ , pois para  $s = 0$  as parcelas,  $A \cos(\omega_0 t)$  e  $B \sin(\omega_0 t)$ , de  $u_p(t)$ , são soluções da equação homogênea correspondente. Então a solução particular é da forma

$$u_p(t) = t[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + t[A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se  $u_p(t)$  na equação diferencial (2.38) encontramos

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B = \frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Neste caso  $u(t)$  é oscilatória, mas fica ilimitada quando  $t$  tende a  $+\infty$ . Este fenômeno é conhecido como **ressonância** e a frequência  $\omega = \omega_0$  é chamada **frequência de ressonância**.

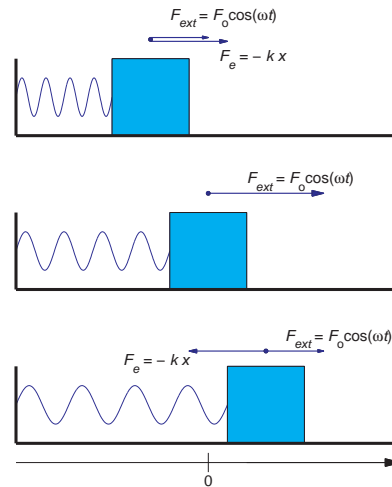


Figura 2.20 – Sistema massa-mola forçado sem amortecimento

**Exemplo 2.16.** Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

Temos dois casos a considerar:

(a) Se  $\omega \neq \omega_0$ . A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Derivando e substituindo-se  $t = 0$ ,  $u = 0$  e  $u' = 0$  obtemos que (verifique!)

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B$$

então

$$u(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$$

em que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 - \omega}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2}.$$

Como  $\omega_1$  é menor do que  $\omega_2$ , então o movimento é uma oscilação de frequência  $\omega_2$  com uma amplitude também oscilatória

$$R(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_1 t)$$

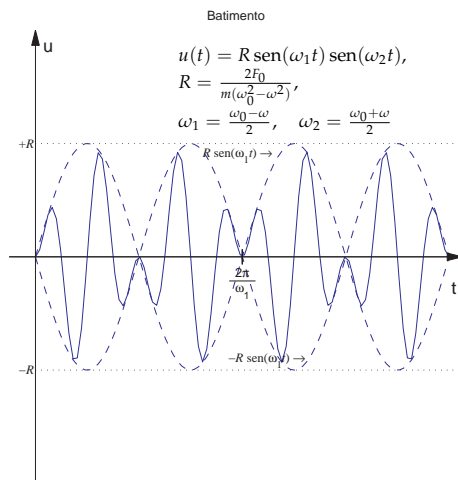


Figura 2.21 – Solução do sistema massa-mola, para  $u(0) = u'(0) = 0$ , no caso de batimento

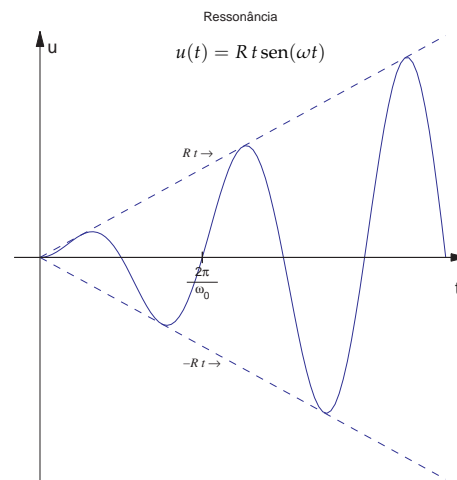


Figura 2.22 – Solução do sistema massa-mola, para  $u(0) = u'(0) = 0$ , no caso de ressonância



de frequência  $\omega_1$ . Este movimento é chamado **batimento**.

(b) Se  $\omega = \omega_0$ . A solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Já vimos que neste caso  $u(t)$  fica ilimitada quando  $t$  tende a  $+\infty$  que é o fenômeno da ressonância. Derivando e substituindo-se  $t = 0$ ,  $u = 0$  e  $u' = 0$  obtemos que (verifique!)

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Este movimento é uma oscilação de frequência  $\omega_0$  com uma amplitude

$$R(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t$$

que aumenta proporcionalmente a  $t$ .

### Oscilações Forçadas com Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento do sistema é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.39)$$

Seja  $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$  a solução da equação homogênea correspondente. Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que  $u_p(t)$  é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se  $u_p(t)$  e suas derivadas na equação diferencial (2.39) encontramos

$$A = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad B = \frac{F_0 \gamma \omega}{\Delta},$$

em que  $\Delta = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2$ . Podemos escrever

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = R \cos(\omega t - \delta)$$

em que  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\delta$  é tal que  $A = R \cos \delta$  e  $B = R \sin \delta$ . Neste caso a amplitude da solução estacionária é dada por

$$R = \frac{F_0}{\sqrt{\Delta}}.$$

Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R \cos(\omega t - \delta).$$

A solução geral da equação homogênea correspondente,  $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ , é a solução do problema de oscilação livre amortecida e já mostramos que tende a zero quando  $t$  tende a  $+\infty$ , por isso é chamada **solução transiente**, enquanto a solução particular,  $R \cos(\omega t - \delta)$ , permanece e por isso é chamada **solução estacionária**.

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R \cos(\omega t - \delta) \approx R \cos(\omega t - \delta), \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.}$$

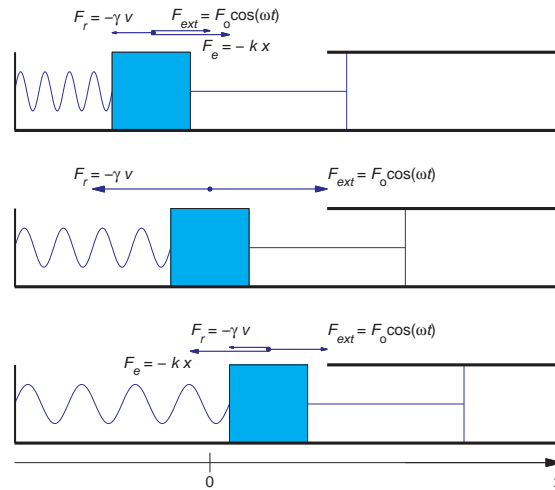


Figura 2.23 – Sistema massa-mola forçado com amortecimento

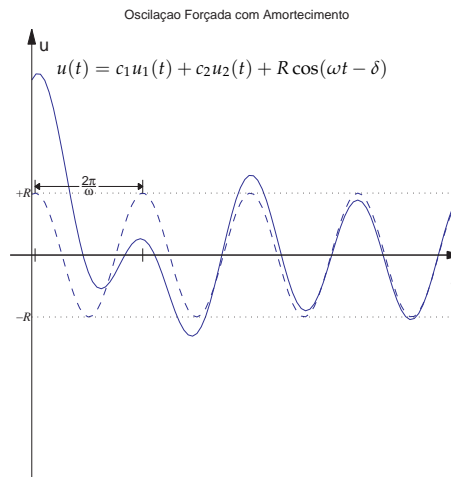


Figura 2.24 – Solução do sistema massa-mola forçado com amortecimento

### 2.4.3 Circuitos Elétricos

Considere um circuito elétrico formado por um capacitor, um resistor e um indutor ligados em série a um gerador como mostrado na [Figura 2.25](#).

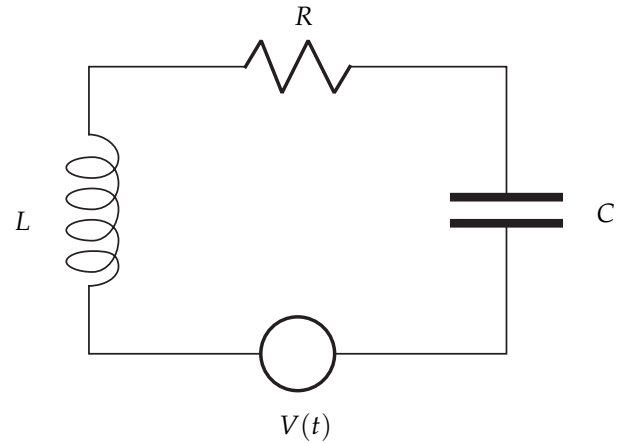


Figura 2.25 – Circuito LRC

A queda de potencial num resistor de resistência  $R$  é igual a  $RI$ , num capacitor de capacitância  $C$  é igual a  $\frac{Q}{C}$  e em um indutor de indutância  $L$  é igual a  $L\frac{dI}{dt}$ . Pela segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas) a soma das forças eletromotrizes (neste caso apenas  $V(t)$ ) é igual a soma das quedas de potencial (neste caso  $RI$  na resistência,  $Q/C$  no capacitor e  $L\frac{dI}{dt}$  no indutor), ou seja,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t) \quad (2.40)$$

Substituindo-se  $I = \frac{dQ}{dt}$  obtemos uma equação diferencial de 2a. ordem para a carga elétrica no capacitor.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t) \quad (2.41)$$

com condições iniciais  $Q(0) = Q_0$  e  $Q'(0) = I_0$ . Uma equação diferencial de 2a. ordem para a corrente elétrica no circuito pode ser obtida derivando-se a equação (2.40), ou seja,

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}(t)$$

e substituindo-se  $I = \frac{dQ}{dt}$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}(t)$$

com condições iniciais  $I(0) = I_0$  e  $I'(0) = \frac{V(0) - RI_0 - Q_0/C}{L}$ . A última condição é obtida usando a equação (2.41).

**Exemplo 2.17.** Um circuito possui um capacitor de  $0,5 \times 10^{-1}$  F, um resistor de  $25 \Omega$  e um indutor de  $5$  H, em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante

$t = 0$  conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de  $10e^{-t/4}$  V, e o circuito é fechado.

Vamos determinar a carga no capacitor em qualquer instante  $t > 0$ . A equação diferencial para a carga no capacitor é

$$5Q'' + 25Q' + \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-1}}Q = 10e^{-t/4}.$$

Dividindo-se por 5 obtemos a equação

$$Q'' + 5Q' + 4Q = 2e^{-t/4}.$$

Equação característica é

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

cuja raízes são  $r = -1, -4$ .

Assim a solução geral da equação homogênea é

$$Q(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}.$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma

$$Q_p(t) = A_0e^{-t/4}.$$

$$Q'_p(t) = -\frac{1}{4}A_0e^{-t/4}, \quad Q''_p(t) = \frac{A_0}{16}e^{-t/4}$$

Substituindo-se na equação  $Q_p(t)$ ,  $Q'_p(t)$  e  $Q''_p(t)$  obtemos

$$\frac{A_0}{16}e^{-t/4} - \frac{5}{4}A_0e^{-t/4} + 4A_0e^{-t/4} = 2e^{-t/4}$$

$$\frac{45}{16}A_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{32}{45}$$

Portanto a solução geral da equação diferencial é

$$Q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{32}{45} e^{-t/4}$$

Derivada da solução geral:  $Q'(t) = -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} - \frac{8}{45} e^{-t/4}$

Substituindo-se  $t = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $Q' = 0$  obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{32}{45} = 0 \\ -c_1 - 4c_2 - \frac{8}{45} = 0 \end{cases} \quad , \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -8/9 \\ c_2 = 8/45 \end{cases}$$

Portanto a solução do PVI formado pela equação diferencial e  $Q(0) = 0$ ,  $Q'(0) = 0$  é

$$Q(t) = -\frac{8}{9} e^{-t} + \frac{8}{45} e^{-4t} + \frac{32}{45} e^{-t/4}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0.$$



## Exercícios (respostas na página 258)

4.1. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- (a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.
- (b) Esboce o gráfico da solução obtida.

4.2. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$2y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- (a) Encontre a solução geral da equação e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.
- (b) Esboce o gráfico da solução obtida.

4.3. Uma mola, de um sistema massa-mola sem amortecimento, tem constante de elasticidade igual a 3 N/m. Pendura-se na mola um corpo de massa 2 kg e o sistema sofre a ação de uma força externa de  $3 \cos(3t)$ . Determine a função que descreve o movimento do corpo em qualquer instante  $t$ , considerando a posição inicial igual  $u_0$  e a velocidade inicial  $u'_0$ .

4.4. Se um sistema massa-mola com um corpo de massa 2 kg e uma mola com constante de elasticidade igual 0,5 N/m é colocado em movimento, no instante  $t = 0$ , num meio em que a constante de amortecimento é igual a 1 N.s/m, determine a posição do corpo em qualquer instante  $t$ , considerando a posição inicial igual a  $u_0$  e a velocidade inicial  $u'_0$ .

4.5. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de  $10^3$  centímetros por segundo ao quadrado. Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento. Determine a posição  $u$  em função do tempo  $t$  e faça um esboço do seu gráfico.

- (a) Se sistema é colocado em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontada para cima de 4 centímetros por segundo.
  - (b) Se o sistema é puxado para baixo esticando a mola 1 centímetro e depois colocado em movimento com uma velocidade para baixo de 10 centímetros por segundo.
  - (c) Se o sistema é puxado para baixo esticando a mola 2 centímetros e depois é solto.
- 4.6. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de  $10^3$  centímetros por segundo ao quadrado.
- (a) Para quais valores da constante de amortecimento  $\gamma$  o sistema é super-amortecido, tem um amortecimento crítico e é sub-amortecido.
  - (b) Suponha que o amortecedor exerce uma força de  $10^4$  dinas (=gramas·centímetros por segundos<sup>2</sup>) quando a velocidade é de 10 centímetros por segundo. Se o sistema é puxado para baixo 2 centímetros e depois é solto, determine a posição  $u$  em função do tempo  $t$  e faça um esboço do seu gráfico. Qual o valor do quase período?
- 4.7. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de  $10^3$  centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento com uma força externa de  $9600 \cos(6t)$  dinas, determine a posição do corpo como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.
- 4.8. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de  $10^3$  centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento na posição de equilíbrio com uma força externa de  $1000 \cos(\omega t)$  dinas, para  $\omega$  igual a frequência de ressonância, determine a posição do corpo como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.
- 4.9. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de  $10^3$  centímetros por segundo ao quadrado. Suponha que o amortecedor exerce uma força de 4200 dinas quando a velocidade é de 1 centímetro por segundo. Se o sistema está sob a ação de uma força externa de  $26000 \cos(6t)$  dinas, determine a posição

do corpo  $u$  em função do tempo  $t$  e faça um esboço do seu gráfico, considerando somente a solução estacionária.

**4.10.** Considere um sistema massa-mola descrito pelo problema de valor inicial

$$u'' + u' + 2u = \cos \omega t, \quad \omega > 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

- (a) Determine a solução geral da equação diferencial.
- (b) Determine a solução estacionária deste problema.
- (c) Encontre a amplitude da solução estacionária como função de  $\omega$ .

**4.11.** Considere a equação diferencial do sistema massa-mola forçado sem amortecimento

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Mostre que a solução geral:

- (a) Se  $\omega \neq \omega_0$  é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t);$$

- (b) Se  $\omega = \omega_0$  é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

**4.12.** Mostre que a solução do PVI

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

- (a) Se  $\omega \neq \omega_0$  é dada por

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

(b) Se  $\omega = \omega_0$  é dada por

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

4.13. Encontre a solução estacionária de

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t).$$

4.14. Um circuito possui um capacitor de  $0,125 \times 10^{-1}$  F, um resistor de  $60 \, \Omega$  e um indutor de  $10$  H, em série. A carga inicial no capacitor é zero. No instante  $t = 0$  conecta-se o circuito a uma bateria cuja tensão é de  $12$  V e o circuito é fechado.

(a) Determine a carga no capacitor em qualquer instante  $t > 0$ .

(b) Determine a carga no capacitor quando  $t \rightarrow +\infty$ .

(c) Esboce o gráfico da solução obtida.

4.15. O movimento de um pêndulo simples de massa  $m$  e comprimento  $l$  é descrito pela função  $\theta(t)$  que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Considere a aproximação  $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ .

(a) Encontre  $\theta(t)$  sabendo-se que o pêndulo é solto de um ângulo  $\theta_0$ .

(b) Determine a frequência, o período e a amplitude de oscilação do pêndulo.

## 2.5 Respostas dos Exercícios

### 1. Equações Homogêneas - Parte I (página 167)

1.1. (a) Sejam  $y_1(t) = e^{-\omega(t-a)}$  e  $y_2(t) = e^{\omega(t-a)}$ .

$$y_1''(t) - \omega^2 y_1(t) = \omega^2 e^{-\omega(t-a)} - \omega^2 e^{-\omega(t-a)} = 0.$$

$$y_2''(t) - \omega^2 y_2(t) = \omega^2 e^{\omega(t-a)} - \omega^2 e^{\omega(t-a)} = 0.$$

Logo  $y_1(t) = e^{-\omega(t-a)}$  e  $y_2(t) = e^{\omega(t-a)}$  são soluções da equação diferencial.

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{-\omega(t-a)} & e^{\omega(t-a)} \\ -\omega e^{-\omega(t-a)} & \omega e^{\omega(t-a)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\omega & \omega \end{bmatrix} = 2\omega \neq 0.$$

Logo a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{-\omega(t-a)} + c_2 e^{\omega(t-a)}.$$

(b) Sejam  $y_1(t) = \cosh(\omega(t-a)) = \frac{e^{-\omega(t-a)} + e^{\omega(t-a)}}{2}$  e  $y_2(t) = \sinh(\omega(t-a)) = \frac{e^{-\omega(t-a)} - e^{\omega(t-a)}}{2}$ .

$$y_1''(t) - \omega^2 y_1(t) = \omega^2 \cosh(\omega(t-a)) - \omega^2 \cosh(\omega(t-a)) = 0.$$

$$y_2''(t) - \omega^2 y_2(t) = \omega^2 \sinh(\omega(t-a)) - \omega^2 \sinh(\omega(t-a)) = 0.$$

Logo  $y_1(t) = \cosh(\omega(t-a))$  e  $y_2(t) = \sinh(\omega(t-a))$  são soluções da equação diferencial.

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cosh(\omega(t-a)) & \sinh(\omega(t-a)) \\ \omega \sinh(\omega(t-a)) & \omega \cosh(\omega(t-a)) \end{bmatrix} = \omega \det \begin{bmatrix} \cosh(\omega(t-a)) & \sinh(\omega(t-a)) \\ \sinh(\omega(t-a)) & \cosh(\omega(t-a)) \end{bmatrix} = \omega \neq 0, \text{ pois } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \cosh(\omega(t-a)) + c_2 \sinh(\omega(t-a)).$$

1.2. (a)  $x^2 y_1'' - 6x y_1' + 10 y_1 = x^2(2) - 6x(2x) + 10(x^2) = 0$

$$x^2 y_2'' - 6x y_2' + 10 y_2 = x^2(20x^3) - 6x(5x^4) + 10(x^5) = 0$$

Logo,  $y_1(x) = x^2$  e  $y_2(x) = x^5$  são soluções da equação.

(b) Como

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$$

então a solução geral é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

Agora, como  $y(1) = 3$ , então substituindo  $x = 1$  e  $y = 3$  na expressão de  $y(x)$  obtemos que  $c_1 + c_2 = 3$ . Como  $y'(1) = 3$ , substituindo-se  $x = 1$  e  $y' = 3$  na expressão obtida derivando-se  $y(x)$ :

$$y'(x) = 2c_1 x + 5c_2 x^4$$

obtemos  $2c_1 + 5c_2 = 3$ . Resolvendo o sistema

$$c_1 + c_2 = 3, \quad 2c_1 + 5c_2 = 3$$

obtemos  $c_2 = 4$  e  $c_1 = -1$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 4x^2 - x^5$$

1.3. Substituindo-se  $y = x^r$ ,  $\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$  em (2.11) obtemos

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + b x r x^{r-1} + c x^r = 0.$$

$$(r^2 + (b-1)r + c) x^r = 0.$$

Como  $x^r \neq 0$ , então  $y = x^r$  é solução da equação (2.11) se, e somente se,  $r$  é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.4.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{bmatrix} \\ &= x^{r_1-1} x^{r_2-1} \det \begin{bmatrix} x & x \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) x^{r_1+r_2-1} \neq 0, \end{aligned}$$

para todo  $x > 0$ .

1.5. Neste caso, para  $x > 0$ , pela fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= x^{r_1} = e^{r_1 \ln x} = e^{(\alpha+i\beta) \ln x} \\
 &= e^{\alpha \ln x} (\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)) \\
 &= x^\alpha (\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)) \quad e \\
 y_2(x) &= x^{r_2} = e^{r_2 \ln x} = e^{(\alpha-i\beta) \ln x} \\
 &= e^{\alpha \ln x} (\cos(-\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(-\beta \ln x)) \\
 &= x^\alpha (\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x))
 \end{aligned}$$

são soluções complexas da equação diferencial (2.11).

A solução geral complexa é

$$\begin{aligned}
 y(x) &= C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\
 &= C_1 x^\alpha (\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)) \\
 &\quad + C_2 x^\alpha (\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)) \\
 &= (C_1 + C_2) x^\alpha \cos(\beta \ln x) \\
 &\quad + i(C_1 - C_2) x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)
 \end{aligned}$$

Tomando  $C_1 = C_2 = 1/2$ , temos que a solução

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

e tomando  $C_1 = -\frac{i}{2}$  e  $C_2 = \frac{i}{2}$ , temos a solução

$$v(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

$$\det \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{bmatrix} = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0, \quad \forall x > 0.$$

1.6. Vamos mostrar que

$$y_1(x) = x^r \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^r \ln x$$

são soluções fundamentais da equação de Euler, em que  $r = \frac{1-b}{2}$ .

$$y_2'(x) = x^{r-1}(r \ln x + 1),$$

$$y_2''(x) = x^{r-2}((r^2 - r) \ln x + 2r - 1))$$

$$x^2 y_2'' + b x y_2' + c y_2 =$$

$$= x^r((r^2 + (b-1)r + c) \ln x + 2r + b - 1) = 0.$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_1} \ln x \\ r_1 x^{r_1-1} & (1 + r_1 \ln x) x^{r_1-1} \end{bmatrix} \\ &= x^{2r_1-1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln x \\ r_1 & (1 + r_1 \ln x) \end{bmatrix} \\ &= x^{2r_1-1} \neq 0, \quad \text{para todo } x > 0. \end{aligned}$$

1.7. (a) Equação indicial:

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$$

(b) Equação indicial:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$



(c) Equação indicial:

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-1} \cos(2 \ln x) + c_2 x^{-1} \sin(2 \ln x)$$

1.8. (a)

$$p(t) = 0$$

$$q(t) = \frac{t-2}{t^2-1} = \frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$

$$f(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}.$$

Como  $t_0 = 0$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $-1 < t < 1$ .

(b)

$$p(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$

$$q(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}$$

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)}.$$

Como  $t_0 = 2$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $t > 1$ .

(c)

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$f(t) = \frac{e^t}{t^2 - t} = \frac{e^t}{t(t-1)}.$$

Como  $t_0 = -1$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $t < 0$ .

(d)

$$p(t) = \frac{t+3}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{2}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$

$$f(t) = \frac{\cos t}{t^2-t} = \frac{\cos t}{t(t-1)}.$$

Como  $t_0 = 2$ , então o problema de valor inicial tem solução no intervalo  $t > 1$ .

1.9. Sejam  $y_1(t)$  a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

e  $y_2(t)$  a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 1, \end{cases}$$

então  $W[y_1, y_2](t_0) = 1 \neq 0$ .

1.10. Substituindo-se  $y(t) = \sin(t^2)$  na equação diferencial  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  obtemos

$$-4t^2 \sin(t^2) + q(t) \sin(t^2) + 2p(t)t \cos(t^2) + 2 \cos(t^2) = 0.$$

Substituindo-se  $t = 0$  obtemos  $2 = 0$ , que é um absurdo.

1.11.  $y_1'(t) = 3t^2$ ,  $y_1''(t) = 6t$ ,  $y_2'(t) = 3t|t|$ ,  $y_2''(t) = 6|t|$ . Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$ty_1'' - (2 + t^2)y_1' + 3ty_1 = 6t^2 - (2 + t^2)3t^2 + 3t^4 = 0.$$

$$ty_2'' - (2 + t^2)y_2' + 3ty_2 = 6t|t| - (2 + t^2)3t|t| + 3t^3|t| = 0.$$

Logo  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da equação diferencial.  $y_1(t) = y_2(t)$ , para  $t \geq 0$  e  $y_1(t) = -y_2(t)$ , para  $t < 0$ . Logo  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são LI

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**1.12.** Vamos supor que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não são soluções fundamentais da equação diferencial no intervalo  $I$ , então  $W[y_1, y_2](t) = 0$ , para todo  $t \in I$ . Considere a combinação linear nula

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0.$$

Derivando em relação a  $t$  obtemos

$$c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t) = 0.$$

Substituindo-se  $t_0 \in I$  nas duas últimas equações obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = 0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = \vec{0}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $W[y_1, y_2](t_0) = \det(A) \neq 0$ , então o sistema tem solução não trivial  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ . Seja

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

$y(t)$  satisfaz as condições iniciais  $y(t_0) = 0$  e  $y'(t_0) = 0$ . Logo pelo Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 2.1 na página 152),

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como  $c_1$  e  $c_2$  não são ambos nulos, então ou  $y_2(t) = -\frac{c_1}{c_2}y_1(t)$  ou  $y_1(t) = -\frac{c_2}{c_1}y_2(t)$ , para todo  $t \in I$ . Ou seja,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são LD.

**1.13. (a)**

$$W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2]'(t) &= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) \\ &\quad - y_2'(t)y_1'(t) - y_2(t)y_1''(t) \\ &= y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t) \end{aligned}$$

- (b) Como  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da equação  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , então

$$y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0 \quad (2.42)$$

$$y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0 \quad (2.43)$$

Multiplicando-se a equação (2.43) por  $y_1(t)$  e subtraindo-se da equação (2.42) multiplicada por  $y_2(t)$  obtemos

$$y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t) + p(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)) = 0,$$

ou seja, pelo item anterior

$$W[y_1, y_2]'(t) + p(t)W[y_1, y_2](t) = 0$$

- (c) Pelo item anterior o wronskiano satisfaz a equação diferencial  $W' + p(t)W = 0$ . A equação diferencial pode ser escrita como uma equação separável

$$\frac{W'}{W} = -p(t).$$

Integrando-se em relação a  $t$  obtemos

$$\int \frac{W'}{W} dt = - \int p(t) dt + c_1$$

$$\int \frac{1}{W} dW = - \int p(t) dt + c_1$$

$$\ln |W(t)| = - \int p(t) dt + c_1$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros obtemos

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = ce^{-\int p(t) dt}.$$

- (d) Pelo item anterior, se para algum  $t_0 \in I$ ,  $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ , então  $c = 0$  e  $W[y_1, y_2](t) = 0$ , para todo  $t \in I$ .

Por outro lado, se para algum  $t_0 \in I$ ,  $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ , então  $c \neq 0$  e  $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

- (e) Substituindo-se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  na equação diferencial  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  obtemos o sistema  $AX = B$ , em que  $A = \begin{bmatrix} y_1'(t) & y_1(t) \\ y_2'(t) & y_2(t) \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -y_1''(t) \\ -y_2''(t) \end{bmatrix}$ . Assim,
- $$\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} y_1'(t) & y_1(t) \\ y_2'(t) & y_2(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -y_1''(t) \\ -y_2''(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W[y_1, y_2](t)} \begin{bmatrix} y_2(t) & -y_1(t) \\ -y_2'(t) & y_1'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \end{bmatrix} =$$
- $$\frac{1}{W[y_1, y_2](t)} \begin{bmatrix} y_2(t)y_1''(t) - y_1(t)y_2''(t) \\ y_1'(t)y_2''(t) - y_2'(t)y_1''(t) \end{bmatrix}. \text{ Observe a aplicação do Teorema de Abel (exercício anterior).}$$

## 2. Equações Homogêneas - Parte II (página 184)

- 2.1. (a)  $2x^2y_1'' - xy_1' - 9y_1 = 2x^2(6x) - x(3x^2) - 9x^3 = 12x^3 - 3x^3 - 9x^3 = 0$   
Logo,  $y_1(x) = x^3$  é solução da equação.

(b) Seja  $y_1(x) = x^3$ . Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^3.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^3 + 3v(x)x^2 \quad \text{e}$$

$$y''(x) = v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x,$$

então  $y(x)$  é solução da equação se, e somente se,

$$2x^2y'' - xy' - 9y = 0$$

$$2x^2(v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x) - x(v'(x)x^3 + 3v(x)x^2) - 9v(x)x^3 = 0$$

$$2x^5v''(x) + 11x^4v'(x) = 0.$$

Seja  $w(x) = v'(x)$ . Então a equação acima pode ser escrita como

$$2xw' + 11w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$2\frac{w'}{w} = -\frac{11}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(2 \ln |w|) = -\frac{11}{x}$$

$$2 \ln |w| = -11 \ln |x| + \tilde{c}_1$$

$$\ln |x^{11}(w(x))^2| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-11/2}$$

Resolvendo a equação para  $v(x)$ :

$$v(x) = c_1 \int x^{-11/2} dx = -c_1 \frac{2}{9} x^{-9/2} + c_2$$

Tomando-se  $c_2 = 0$  e  $c_1 = -9/2$  obtemos  $v(x) = x^{-9/2}$  e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-9/2}x^3 = x^{-3/2}$$

Vamos ver que  $y_1(x) = x^3$  e  $y_2(x) = x^{-3/2}$  são soluções fundamentais da equação.

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^3 & x^{-3/2} \\ 3x^2 & -\frac{3}{2}x^{-5/2} \end{bmatrix} = -\frac{9}{2}x^{1/2} \neq 0, \text{ para } x \neq 0.$$

2.2. (a)  $x^2y_1'' + 3xy_1' + y_1 = x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) + x^{-1} = 2x^{-1} - 3x^{-1} + x^{-1} = 0$

Logo,  $y_1(x) = x^{-1}$  é solução da equação.

(b) Seja  $y_1(x) = x^{-1}$ . Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{-1}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2} \quad \text{e}$$

$$y''(x) = v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3},$$

então  $y(x)$  é solução da equação se, e somente se,

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

$$x^2(v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3}) + 3x(v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2}) + v(x)x^{-1} = 0$$

$$xv''(x) + v'(x) = 0.$$

Seja  $w(x) = v'(x)$ . Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} (\ln |w|) = -\frac{1}{x}$$

$$\ln |w| = -\ln |x| + \tilde{c}_1$$

$$\ln |xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-1}$$

Resolvendo a equação para  $v(x)$ :

$$v(x) = c_1 \int x^{-1} dx = c_1 \ln x + c_2$$

Tomando-se  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 1$  obtemos  $v(x) = \ln x$  e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-1} \ln x$$

Vamos ver que  $y_1(x) = x^{-1}$  e  $y_2(x) = x^{-1} \ln x$  são soluções fundamentais da equação.

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^{-1} & x^{-1} \ln x \\ -x^{-2} & x^{-2}(1 - \ln x) \end{bmatrix} = x^{-3} \neq 0, \text{ para } x \neq 0$$

### 2.3.

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{\frac{1-b}{2}}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2}v(x)x^{\frac{-1-b}{2}} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= v''(x)x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(x)x^{\frac{-1-b}{2}} \\ &\quad - \frac{1-b^2}{4}v(x)x^{\frac{-3-b}{2}}, \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Euler:

$$x^2(v''(x)x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(x)x^{\frac{-1-b}{2}} - \frac{1-b^2}{4}v(x)x^{\frac{-3-b}{2}}) + bx(v'(x)x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2}v(x)x^{\frac{-1-b}{2}}) + cv(x)x^{\frac{1-b}{2}} = 0$$

$$x^{\frac{5-b}{2}}v''(x) + x^{\frac{3-b}{2}}v'(x) = 0.$$



$$xv''(x) + v'(x) = 0.$$

Seja  $w(x) = v'(x)$ . Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx} (\ln |w| + \ln |x|) = 0$$

$$\ln |xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-1}$$

Resolvendo a equação para  $v(x)$ :

$$v(x) = c_1 \int x^{-1} dx = c_1 \ln x + c_2$$

Tomando-se  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 1$  obtemos  $v(x) = \ln x$  e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$$

Vamos mostrar que

$$y_1(x) = x^r \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^r \ln x$$

são soluções fundamentais da equação de Euler.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^r & x^r \ln x \\ rx^{r-1} & (1+r \ln x)x^{r-1} \end{bmatrix} \\ &= x^{2r-1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln x \\ r & (1+r \ln x) \end{bmatrix} \\ &= x^{2r-1} \neq 0, \quad \text{para todo } x > 0. \end{aligned}$$

- 2.4. (a)  $(x+3)z_1'' + (x+2)z_1' - z_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = 3x^2 + 6x + 6 \neq 0$   
 $(x+3)z_2'' + (x+2)z_2' - z_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$   
 $(x+3)z_3'' + (x+2)z_3' - z_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$   
 Logo,  $z_1(x) = x^2$  e  $z_2(x) = x^3$  não são soluções da equação e  $z_3(x) = e^{-x}$  é solução da equação.
- (b) Seja  $y_1(x) = e^{-x}$ . Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-x}.$$

Como

$$y'(x) = (v'(x) - v(x))e^{-x} \text{ e } y''(x) = (v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x},$$

então  $y(x)$  é solução da equação se, e somente se,

$$(x+3)y'' + xy' - y = 0$$

$$(x+3)(v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x} + (x+2)(v'(x) - v(x))e^{-x} - v(x)e^{-x} = 0.$$

$$(x+3)v''(x) + (-2(x+3) + (x+2))v'(x) = 0$$

$$(x+3)v''(x) - (x+4)v'(x) = 0$$

Seja  $w(x) = v'(x)$ . Então a equação acima pode ser escrita como

$$(x+3)w' - (x+4)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1ª. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = \frac{x+4}{x+3}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln |w|) = \frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$$

$$\ln |w| = x + \ln(x+3) + \tilde{c}_1$$

$$\ln \left| \frac{w(x)}{x+3} \right| - x = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 e^x (x+3)$$

Resolvendo a equação para  $v(x)$ :

$$v(x) = c_1 \int e^x(x+3)dx = c_1(x+2)e^x + c_2$$

Tomando-se  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 1$  obtemos  $v(x) = (x+2)e^x$  e uma segunda solução da equação

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = (x+2)e^xe^{-x} = x+2$$

Vamos ver que  $y_1(x) = e^{-x}$  e  $y_2(x) = x+2$  são soluções fundamentais da equação.

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{-x} & x+2 \\ -e^{-x} & 1 \end{bmatrix} = e^{-x}(3+x) \neq 0, \text{ para } x \neq -3$$

(c) Como  $y_1(x) = e^{-x}$  e  $y_2(x) = x+2$  são soluções fundamentais da equação a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2(x+2),$$

Agora, como  $y(1) = 1$ , então substituindo  $x = 1$  e  $y = 1$  na expressão de  $y(x)$  obtemos que  $c_1e^{-1} + 3c_2 = 1$ . Como  $y'(1) = 3$ , substituindo-se  $x = 1$  e  $y' = 3$  na expressão obtida derivando-se  $y(x)$ :

$$y'(x) = -c_1e^{-x} + c_2$$

obtemos  $-c_1e^{-1} + c_2 = 3$ . Resolvendo o sistema

$$c_1e^{-1} + 3c_2 = 1, \quad -c_1e^{-1} + c_2 = 3$$

obtemos  $c_1 = -2e$  e  $c_2 = 1$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = -2e^{-x+1} + x + 2$$

**2.5.**  $y'' + 2y' = 0$  tem solução geral  $y(t) = k_1e^{-2t} + k_2$ . Logo,  $k_1 + k_2 = a$ ,  $k_1 = -b/2$  e  $k_2 = a + b/2$  e  $y \rightarrow a + b/2$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

2.6. Se  $0 < b < 2$  então as raízes da equação característica são

$$-b/2 \pm i\sqrt{4-b^2}/2$$

e as soluções são da forma

$$y(t) = c_1 e^{(-b/2)t} \cos \omega t + c_2 e^{(-b/2)t} \sin \omega t,$$

onde  $\omega = \sqrt{4-b^2}/2$ . Logo, como  $0 < b$ , então  $y \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

2.7. As raízes da equação característica são  $\pm 2$  e a solução geral é  $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ . Então  $c_1 = -c_2 = b/4$  e

$$y(t) = \frac{b}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) = 0$$

Como  $b \neq 0$ , então  $e^{2t} = e^{-2t}$ , ou seja,  $e^{4t} = 1$  e  $t = 0$ .

2.8. A equação característica tem  $1/2$  como única raiz. Assim, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}.$$

$y(0) = 2$  implica que  $c_1 = 2$ .

$$y'(t) = \frac{c_1}{2} e^{t/2} + c_2(1 + \frac{t}{2})e^{t/2}$$

$y'(0) = b$  implica que  $c_1/2 + c_2 = b$ . Assim,  $c_2 = b - 1$  e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{(1/2)t}(2 + (b-1)t).$$

Logo, se  $b \geq 1$ ,  $y(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

2.9. A equação característica é

$$r^2 + 2b + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(b^2 - 1)$$

- Se  $|b| > 1$  então as raízes da equação característica são  $-b \pm \sqrt{b^2 - 1}$  e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{(-b - \sqrt{b^2 - 1})t} + c_2 e^{(-b + \sqrt{b^2 - 1})t}.$$

Se  $b > 1$ , então  $y(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

- Se  $b = \pm 1$  então a raiz da equação característica é  $-b$  e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}.$$

Se  $b = 1$ , então  $y(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

- Se  $-1 < b < 1$  então as raízes da equação característica são  $-b \pm i\sqrt{1 - b^2}$  e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{-bt} \cos(\sqrt{1 - b^2} t) + c_2 e^{-bt} \sin(\sqrt{1 - b^2} t).$$

Se  $0 < b < 1$ , então  $y(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Logo, para  $b > 0$ , então  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

### 2.10. A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1 - \alpha)$$

- (a) Se  $\alpha > 1$ , então  $\Delta < 0$ , as raízes da equação característica são  $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$  e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{\alpha - 1} t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{\alpha - 1} t)$$

- (b) Se  $\alpha = 1$ , então  $\Delta = 0$  e  $r = -1$  é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- (c) Se  $\alpha < 1$ , então  $\Delta > 0$ , as raízes da equação característica são  $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$  e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

### 3. Equações não Homogêneas (página 201)

- 3.1. (a) A equação característica é

$$r^2 + 5r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

As raízes da equação característica são  $r_1 = -3$  e  $r_2 = -2$  e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 x) e^{-5x},$$

$$y'_p(x) = A_1 e^{-5x} - 5(A_0 + A_1 x) e^{-5x} = (A_1 - 5A_0 - 5A_1 x) e^{-5x},$$

$$y''_p(x) = -5A_1 e^{-5x} - 5(A_1 - 5A_0 - 5A_1 x) e^{-5x} = (-10A_1 + 25A_0 + 25A_1 x) e^{-5x}.$$

Substituindo-se  $y_p(x)$ ,  $y'_p(x)$  e  $y''_p(x)$  na equação obtemos

$$(-10A_1 + 25A_0 + 25A_1 x) + 5(A_1 - 5A_0 - 5A_1 x) + 6(A_0 + A_1 x) = x$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 6A_0 - 5A_1 = 0 \\ 6A_1 = 1 \end{cases}$$

que tem solução  $A_0 = 5/36$  e  $A_1 = 1/6$ . Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \left( \frac{5}{36} + \frac{1}{6}x \right) e^{-5x}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \left( \frac{5}{36} + \frac{1}{6}x \right) e^{-5x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

(b) A equação característica é

$$r^2 - 4r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 16 - 24 = -8$$

As raízes da equação característica são  $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$  e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{2x} \sin(\sqrt{2}x)$$

$y_p(x) = A_0 + A_1 x$ ,  $y_p'(x) = A_1$ ,  $y_p''(x) = 0$ . Substituindo-se  $y_p(x)$ ,  $y_p'(x)$  e  $y_p''(x)$  na equação obtemos

$$-4A_1 + 6(A_0 + A_1 x) = 3x$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 6A_0 - 4A_1 = 0 \\ 6A_1 = 3 \end{cases}$$

que tem solução  $A_0 = 1/3$  e  $A_1 = 1/2$ . Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{2x} \sin(\sqrt{2}x)$$

(c) Eq. característica:  $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$ .

Sol. geral da eq. homog.:  $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$

Vamos usar o princípio da Superposição para equações não homogêneas:  $y_p^{(1)}(t) = t[A \cos(2t) + B \sin(2t)]$  é uma solução da equação  $y'' + 4y = 2 \sin(2t)$  e

$y_p^{(2)}(t) = Ct + D$  é uma solução da equação  $y'' + 4y = t$ . Logo  $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)$  é solução da equação  $y'' + 4y = 2 \sin(2t) + t$ .

Vamos encontrar uma solução particular de  $y'' + 4y = 2 \sin(2t)$ :

$$y_p^{(1)}(t) = t[A \cos(2t) + B \sin(2t)]$$

$$y_p^{(1)'}(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t) + t[-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t)]$$

$$y_p^{(1)''}(t) = (-4At + 4B) \cos(2t) + (-4Bt - 4A) \sin(2t)$$

Substituindo-se na equação

$$(-4At + 4B) \cos(2t) + (-4Bt - 4A) \sin(2t) + 4t[A \cos(2t) + B \sin(2t)] = 2 \sin(2t)$$

$$[-4At + 4B + 4At] \cos(2t) + [-4Bt - 4A + 4Bt] \sin(2t) = 2 \sin(2t)$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $t = \pi/4$  obtemos

$$\begin{cases} 4B = 0 \\ -4A = 2 \end{cases}$$

Logo  $A = -1/2, B = 0$  e  $y_p^{(1)}(t) = \frac{1}{2}t \cos(2t)$ .

Vamos encontrar uma solução particular de  $y'' + 4y = t$ :

$$y_p^{(2)}(t) = Ct + D,$$

$$y_p^{(2)'}(t) = D,$$

$$y_p^{(2)''}(t) = 0.$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$4C + 4Dt = t$$

Substituindo-se  $t = 0$ , obtemos  $4C = 0$ . Derivando-se de substituindo-se  $t = 0$  obtemos  $4D = 1$ .

Logo  $C = 0, D = 1/4$  e  $y_p^{(2)}(t) = \frac{1}{4}t$ .

Sol. particular  $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t) = -\frac{t}{2} \cos(2t) + \frac{1}{4}t$ .

Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - \frac{t}{2} \cos(2t) + \frac{1}{4}t$$



3.2. (a) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = (-2A_2)t^2 + (2A_2 - 2A_1)t + (2A_2 + A_1 - 2A_0)$$

$$\begin{cases} -2A_2 & & & = 1 \\ 2A_2 & - & 2A_1 & = 0 \\ 2A_2 & + & A_1 & - 2A_0 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = -9/4 - 1/2 t - 1/2 t^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t - 9/4 - 1/2 t - 1/2 t^2$$

Solução do PVI

$$y(t) = 7/12 e^{-2t} + 5/3 e^t - 9/4 - 1/2 t - 1/2 t^2$$

(b) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

Solução particular da equação não homogênea:

$$y_p(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$$

Substituindo-se na equação

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = (-3A + 4B) \cos 2t + (-4A - 3B) \sin 2t = 3 \sin 2t$$

$$\begin{cases} -3A + 4B = 0 \\ -4A - 3B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{25} \\ -\frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = -\frac{12}{25} \cos 2t - \frac{9}{25} \sin 2t$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} - \frac{12}{25} \cos 2t - \frac{9}{25} \sin 2t$$

Derivada da solução geral:

$$y'(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 (1-t)e^{-t} + \frac{24}{25} \sin 2t - \frac{18}{25} \cos 2t$$

Substituindo-se  $t = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y' = 0$ :

$$c_1 = \frac{12}{25}, \quad c_2 = \frac{6}{5}$$

Solução do PVI:

$$y(t) = \frac{12}{25} e^{-t} + \frac{6}{5} t e^{-t} - \frac{12}{25} \cos 2t - \frac{9}{25} \sin 2t$$

(c) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} t$$

$$y_p(t) = 1/3 e^{-t}$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} t + 1/3 e^{-t}$$

Solução do PVI

$$y(t) = -1/3 e^{2t} + e^{2t}t + 1/3 e^{-t}$$

(d) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \sin(t/2)$$

Solução particular:

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

Substituindo-se na equação:

$$2y_p'' + 2y_p' + y_p = (A_2)t^2 + (4A_2 + A_1)t + (4A_2 + 2A_1 + A_0) = t^2$$

$$\begin{cases} A_2 & & & = 1 \\ 4A_2 & + & A_1 & = 0 \\ 4A_2 & + & 2A_1 & + & A_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \sin(t/2) + (t - 2)^2$$

Derivada da solução geral:

$$y'(t) = c_1 e^{-t/2} (-(1/2) \cos(t/2) - (1/2) \sin(t/2)) + c_2 e^{-t/2} (-(1/2) \sin(t/2) + (1/2) \cos(t/2)) + 2(t - 2)$$

Substituindo-se  $t = 0, y = 0, y' = 0$ :

$$c_1 = -4, \quad c_2 = 4$$

Solução do PVI:

$$y(t) = -4e^{-t/2} \cos(t/2) + 4e^{-t/2} \sin(t/2) + (t - 2)^2$$

### 3.3. (a) A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1 - \alpha)$$

- i. Se  $\alpha > 1$ , então  $\Delta < 0$ , as raízes da equação característica são  $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$  e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{\alpha - 1} t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{\alpha - 1} t)$$

- ii. Se  $\alpha = 1$ , então  $\Delta = 0$  e  $r = -1$  é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- iii. Se  $\alpha < 1$ , então  $\Delta > 0$ , as raízes da equação característica são  $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$  e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1 - \sqrt{1 - \alpha})t} + c_2 e^{(-1 + \sqrt{1 - \alpha})t}$$

(b)  $y_p(t) = t[(A_0 + A_1 t)e^{-t} \sin(\sqrt{\alpha - 1} t) + (B_0 + B_1 t)e^{-t} \cos(\sqrt{\alpha - 1} t)],$  se  $\alpha > 1$ .

## 4. Oscilações (página 231)

### 4.1. (a) A equação característica é

$$r^2 + 5 = 0$$

que tem como raízes  $r = \pm \sqrt{5}i$ . Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{5} t) + c_2 \sin(\sqrt{5} t)$$

Para resolver o problema de valor inicial precisamos calcular a derivada da solução geral

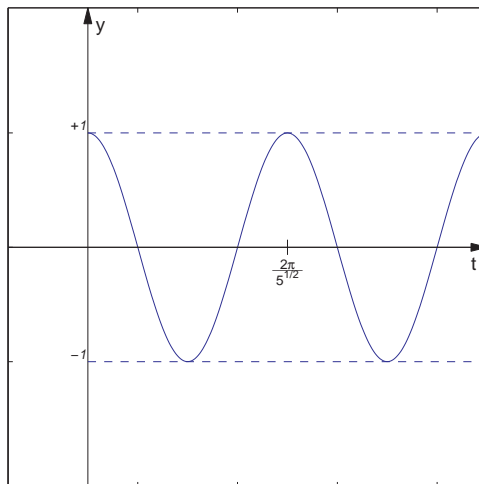
$$y'(t) = -\sqrt{5} c_1 \sin(\sqrt{5} t) + \sqrt{5} c_2 \cos(\sqrt{5} t)$$

Substituindo-se  $t = 0$ ,  $y = 1$  e  $y' = 0$  obtemos  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 0$  e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \cos(\sqrt{5} t)$$

A amplitude é igual a 1, a frequência é igual a  $\sqrt{5}$ , a fase é igual a zero e o período é igual a  $2\pi / \sqrt{5}$ .

(b)



4.2. (a) Equação característica:  $2r^2 + 3 = 0$

Raízes:  $r = \pm \sqrt{3/2} i$

Solução geral:  $y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}} t\right)$

Derivada da solução geral:

$$y'(t) = -c_1 \sqrt{3/2} \sin\left(\sqrt{3/2} t\right) + c_2 \sqrt{3/2} \cos\left(\sqrt{3/2} t\right)$$

Substituindo-se  $t = 0, y = 1, y' = 0$ :

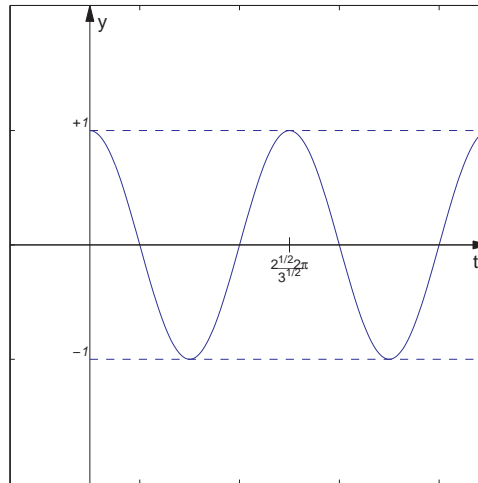
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

Solução do PVI:

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}} t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a frequência é igual a  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ , a fase é igual a zero e o período é igual a  $2\sqrt{2}\pi/\sqrt{3}$ .

(b)



4.3.

$$2u'' + 3u = 3\cos(3t)$$

$$2r^2 + 3 = 0 \quad r = \pm i\sqrt{3/2}$$

Solução da equação homogênea

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{3/2}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{3/2}t\right)$$

$$u_p(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t)$$

$$u'_p(t) = -3A \sin(3t) + 3B \cos(3t)$$

$$u''_p(t) = -9A \cos(3t) - 9B \sin(3t)$$

Substituindo-se  $u_p(t)$ ,  $u'_p(t)$  e  $u''_p(t)$  na equação obtemos

$$-15A \cos(3t) - 15B \sin(3t) = 3 \cos(3t)$$

$$\begin{cases} -15A & = 3 \\ -15B & = 0 \end{cases}$$

que tem solução  $A = -1/5$  e  $B = 0$ . Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$u_p(t) = -\frac{1}{5} \cos(3t)$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$u(t) = -\frac{1}{5} \cos(3t) + c_1 \cos(\sqrt{3/2}t) + c_2 \sin(\sqrt{3/2}t).$$

$$u'(t) = \frac{3}{5} \sin(3t) - \sqrt{3/2}c_1 \sin(\sqrt{3/2}t) + \sqrt{3/2}c_2 \cos(\sqrt{3/2}t).$$

$$u(0) = u_0 = -\frac{1}{5} + c_1 \Rightarrow c_1 = u_0 + \frac{1}{5}$$

$$u'(0) = u'_0 = \sqrt{3/2}c_2 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2/3}u'_0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\frac{1}{5} \cos(3t) + (u_0 + \frac{1}{5}) \cos(\sqrt{3/2}t) + \sqrt{2/3}u'_0 \sin(\sqrt{3/2}t).$$

## 4.4.

$$2u'' + u' + \frac{1}{2}u = 0 \quad \Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$u(t) = c_1 e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right) + c_2 e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right)$$

$$u'(t) = c_1 \left(-\frac{1}{4} e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right)\right) + c_2 \left(-\frac{1}{4} e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right)\right)$$

$$u(0) = u_0 = c_1$$

$$u'(0) = u'_0 = -\frac{c_1}{4} + \frac{\sqrt{3}c_2}{4} \Rightarrow c_2 = \frac{4u'_0 + u_0}{\sqrt{3}}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = u_0 e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right) + \frac{4u'_0 + u_0}{\sqrt{3}} e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t\right)$$

## 4.5. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 10i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$



A frequência natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^4}{100}} = 10.$$

O período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \text{ segundos}$$

(a) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = -4. \end{cases}$$

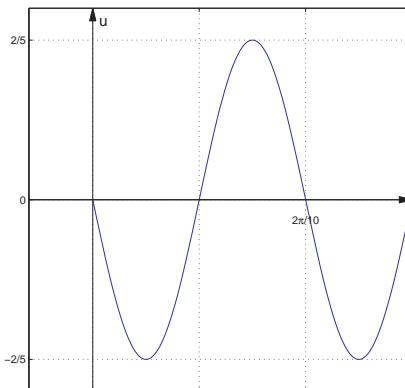
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 = c_1, \\ u'(0) = -4 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\frac{2}{5} \operatorname{sen}(10t)$$

A amplitude é igual a  $2/5$ .



(b) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 10. \end{cases}$$

$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 1 = c_1, \\ u'(0) = 10 = 10c_2. \end{cases}$$

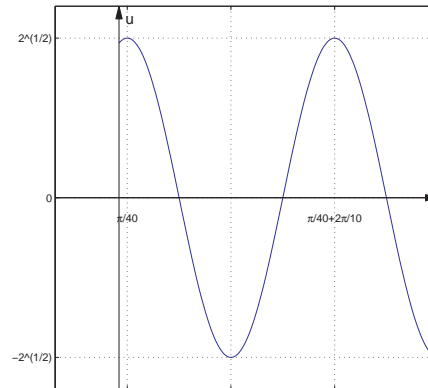
Logo  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 1$ . Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2}, \quad \delta = \arccos \frac{c_1}{R} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \cos(10t) + \operatorname{sen}(10t) = \sqrt{2} \cos(10t - \pi/4)$$

A amplitude é igual a  $\sqrt{2}$ .



(c) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

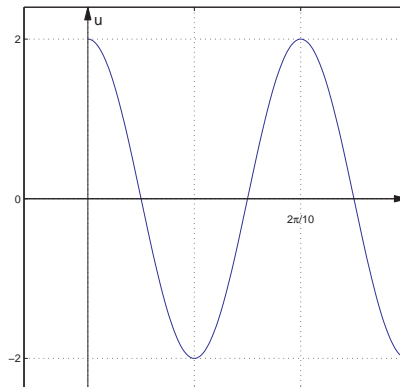
$$u'(t) = -10c_1 \sin(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2 \cos(10t)$$

A amplitude é igual a 2.



4.6. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + \gamma u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + \gamma r + 10^4 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4 \cdot 10^6$$

- (a)
- Se  $\gamma > 2 \cdot 10^3$  o sistema é super-amortecido.
  - Se  $\gamma = 2 \cdot 10^3$  o sistema tem um amortecimento crítico.
  - Se  $\gamma < 2 \cdot 10^3$  o sistema é sub-amortecido

(b) Neste caso a constante de amortecimento é dada por

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{10^4}{10} = 10^3.$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^3 u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + 10^3 r + 10^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -5 \pm 5\sqrt{3}i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + c_2 e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{3}t)$$

A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 10u' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= e^{-5t}((5\sqrt{3}c_2 - 5c_1) \cos(5\sqrt{3}t) + \\ &\quad + (-5\sqrt{3} - 5c_2) \operatorname{sen}(5\sqrt{3}t)) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 5\sqrt{3}c_2 - 5c_1. \end{cases}$$

Logo  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 2/\sqrt{3}$ . Assim

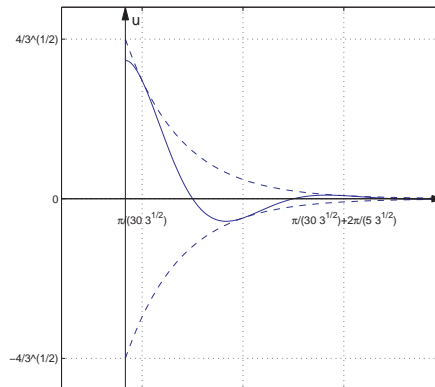
$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\delta = \arccos \frac{c_1}{R} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{3}t) = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t - \pi/6)$$

A quase frequência é igual a  $5\sqrt{3}$  e o quase período é igual a  $2\pi/5\sqrt{3}$ .



4.7.

$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 9600 \cos(6t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \sin(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos  $A_0 = 3/2$  e  $B_0 = 0$ .

A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t) + \frac{3}{2} \cos(6t)$$

Derivando e substituindo-se  $t = 0$ ,  $u = 0$  e  $u' = 0$  obtemos que

$$c_1 = -3/2, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

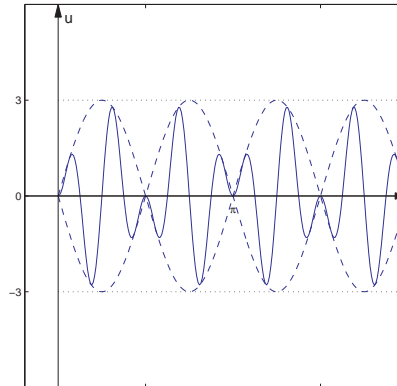
$$u(t) = \frac{3}{2} (\cos(6t) - \cos(10t)).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

então

$$u(t) = 3 \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(8t)$$



4.8.

$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 10^3 \cos(10t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = t(A_0 \cos(10t) + B_0 \sin(10t))$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos  $A_0 = 0$  e  $B_0 = 1/2$ .

A solução geral da equação é

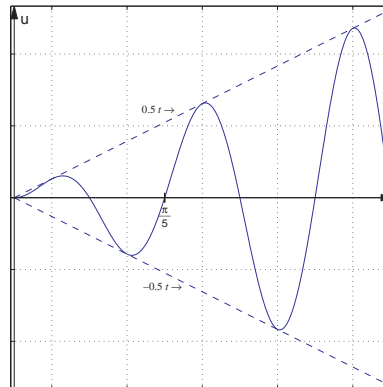
$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t) + \frac{t}{2} \sin(10t)$$

Derivando e substituindo-se  $t = 0$ ,  $u = 0$  e  $u' = 0$  obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{t}{2} \sin(10t)$$





4.9. Neste caso a constante de amortecimento é dada por

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{4200}{1} = 4200$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 4200 u' + 10^4 u = 26000 \cos(6t)$$

A solução estacionária é a solução particular da equação não homogênea

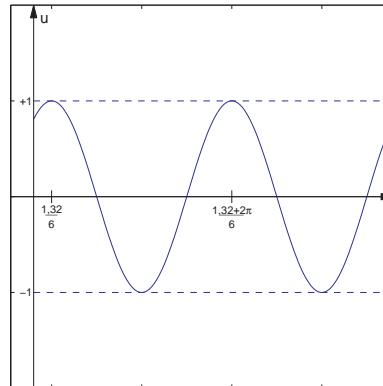
$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \sin(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos

$$A_0 = 16/65, \quad B_0 = 63/65,$$

$$R = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1, \quad \delta = \arccos \frac{A_0}{R} = \arccos \frac{16}{65} \approx 1,32.$$

$$u_p(t) = \frac{16}{65} \cos(6t) + \frac{63}{65} \sin(6t) = \cos(6t - 1,32)$$



**4.10. (a)** A solução da equação homogênea correspondente é

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}t}{2}.$$

Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}t}{2} + u_p(t)$$

em que  $u_p(t)$  é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

$$u'_p(t) = \omega \cos(\omega t) B - \omega \sin(\omega t) A$$

$$u''_p(t) = -\omega^2 \sin(\omega t) B - \omega^2 \cos(\omega t) A$$

Substituindo-se  $u_p(t)$ ,  $u'_p(t)$  e  $u''_p(t)$  na equação diferencial obtemos

$$(\omega B - \omega^2 A + 2A) \cos \omega t$$

$$- (\omega^2 B - 2B + \omega A) \sin \omega t = \cos \omega t$$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} (2 - \omega^2) A + \omega B = 1 \\ -\omega A + (2 - \omega^2) B = 0 \end{cases}$$

que tem solução

$$A = \frac{2 - \omega^2}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}, \quad B = \frac{\omega}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}.$$

Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}t}{2} + \frac{(2 - \omega^2)}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4} \sin(\omega t).$$

(b) A solução estacionária é a solução particular da equação diferencial que é dada por

$$u_p(t) = \frac{(2 - \omega^2)}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4} \sin(\omega t).$$

(c) A amplitude é

$$R = R(\omega) = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{(\omega^4 - 3\omega^2 + 4)^{1/2}}$$

4.11. A solução geral da equação homogênea é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t),$$

em que  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

(a) Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Derivando-se:

$$u_p'(t) = B\omega \cos(\omega t) - A\omega \sin(\omega t)$$

$$u_p''(t) = -B\omega^2 \sin(\omega t) - A\omega^2 \cos(\omega t).$$

Substituindo-se na equação diferencial:

$$(k - m\omega^2) (\sin(\omega t) B + \cos(\omega t) A) = F_0 \cos(\omega t)$$

Comparando-se os termos em cosseno e em seno obtemos

$$\begin{cases} (k - m\omega^2) A = F_0 \\ (k - m\omega^2) B = 0 \end{cases}$$

Assim

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, B = 0.$$

Logo a solução geral é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

(b) Dividindo a equação diferencial por  $m$  e substituindo-se  $k/m = \omega_0^2$  obtemos:

$$u'' + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = t [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)].$$

Derivando-se:

$$u_p'(t) =$$

$$(\omega_0 t B + A) \cos(\omega_0 t) + (B - \omega_0 t A) \sin(\omega_0 t)$$

$$u_p''(t) =$$

$$-\omega_0 (\omega_0 t B + 2A) \sin(\omega_0 t) - (2B - \omega_0 t A) \cos(\omega_0 t).$$

Substituindo-se na equação diferencial  $u'' + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ :

$$2\omega_0 (\cos(\omega_0 t) B - \sin(\omega_0 t) A) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

Comparando-se os termos em cosseno e em seno obtemos

$$\begin{cases} 2\omega_0 B = F_0/m \\ -2\omega_0 A = 0 \end{cases}$$

Assim

$$A = 0, B = \frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Logo a solução geral é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

4.12. (a)

$$u(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2) m} + c_2 \sin(\omega_0 t) + c_1 \cos(\omega_0 t)$$

$$u'(t) = -\frac{F_0 \omega \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2) m} - \omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t)$$

Derivando e substituindo-se  $t = 0$ ,  $u = 0$  e  $u' = 0$  obtemos que

$$\frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) m} + c_1$$

$$\omega_0 c_2$$

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

(b)

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

$$u'(t) = \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0 m} - \omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t)$$

$$+ \frac{F_0 t \cos(\omega_0 t)}{2m} + \omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t)$$

Derivando-se e substituindo-se  $t = 0$ ,  $u = 0$  e  $u' = 0$  obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

**4.13.** Seja  $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$  a solução da equação homogênea correspondente. Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que  $u_p(t)$  é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t).$$

$$u_p'(t) = \omega \cos(\omega t) B - \omega \operatorname{sen}(\omega t) A$$

$$u_p''(t) = -\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) B - \omega^2 \cos(\omega t) A$$

Substituindo-se  $u_p(t)$ ,  $u_p'(t)$  e  $u_p''(t)$  na equação diferencial obtemos  $(\omega B \gamma + (\omega_0^2 - \omega^2) m A) \cos \omega t + ((\omega_0^2 - \omega^2) m B - \omega A \gamma) \operatorname{sen} \omega t = F_0 \cos \omega t$

Substituindo-se  $t = 0$  e  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) m A + \omega \gamma B &= F_0 \\ -\omega \gamma A + (\omega_0^2 - \omega^2) m B &= 0 \end{cases}$$

encontramos

$$A = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad B = \frac{F_0 \gamma \omega}{\Delta},$$

em que  $\Delta = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2$ . Logo, uma solução particular da equação diferencial é

$$u_p(t) = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta} \cos(\omega t) + \frac{F_0 \gamma \omega}{\Delta} \operatorname{sen}(\omega t).$$

4.14. (a)

$$10Q'' + 60Q' + \frac{1}{0,125 \cdot 10^{-1}} = 12$$

Dividindo-se por 10:

$$Q'' + 6Q' + 8Q = \frac{6}{5}$$

Equação característica:  $r^2 + 6r + 8 = 0$ Raízes:  $r = -2, -4$ Solução geral da equação homogênea:  $Q(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$ Solução particular da forma  $Q_p(t) = A_0$ .

$$Q'_p(t) = Q''_p(t) = 0$$

Substituindo-se na equação:

$$8A_0 = \frac{6}{5} \Rightarrow A_0 = \frac{3}{20}$$

Solução geral:

$$Q(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{3}{20}$$

Derivada da solução geral:  $Q'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t}$ Substituindo-se  $t = 0, Q = 0, Q' = 0$ :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{3}{20} = 0 \\ -2c_1 - 4c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3/10 \\ c_2 = 3/20 \end{cases}$$

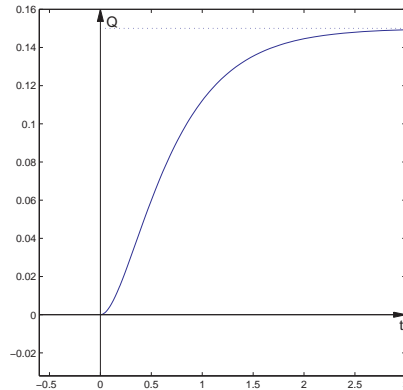
Solução do PVI:

$$Q(t) = -\frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^{-4t} + \frac{3}{20}$$

(b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \frac{3}{20} \text{ C}$$

(c)



4.15. (a) Com a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$  a equação diferencial se torna

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

que tem solução geral

$$\theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

$$\theta_0 = \theta(0) = c_1$$

$$0 = \theta'(0) = c_2 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Logo a solução do PVI é

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

(b) A frequência é  $\sqrt{\frac{g}{l}}$ , o período é  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  e a amplitude é  $\theta_0$ .



---

## Transformada de Laplace

---

### 3.1 Introdução

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial da forma

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \text{para } A, B, C \in \mathbb{R}$$

Para isso, a equação diferencial é inicialmente transformada pela transformada de Laplace numa equação algébrica. Depois resolve-se a equação algébrica e finalmente transforma-se de volta a solução da equação algébrica na solução da equação diferencial inicial.

A transformada de Laplace pode ser entendida como a “caixa” da [Figura 3.1](#). Do

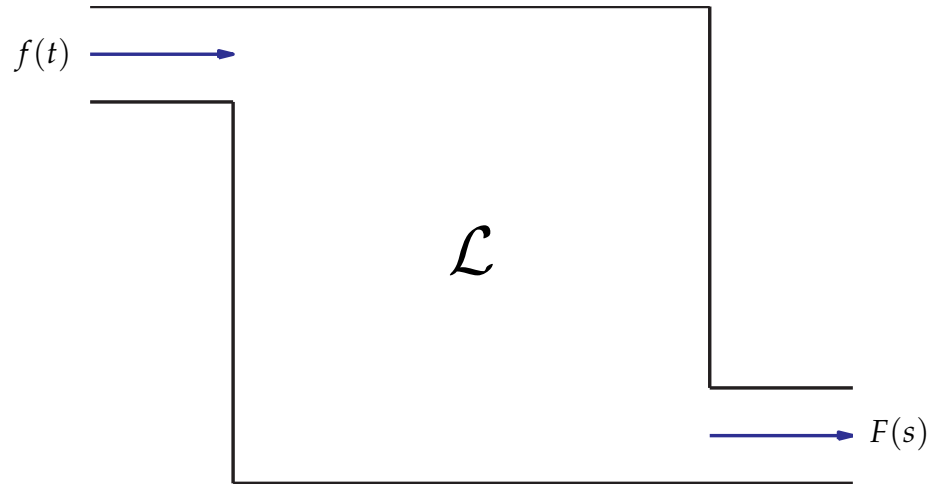


Figura 3.1 – Transformada de Laplace como uma “caixa”

lado esquerdo entram as funções originais e do lado direito saem as funções transformadas pela transformada de Laplace.

A **transformada de Laplace** de uma função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) é definida por

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

para todo  $s > 0$  tal que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por  $t$ . Enquanto a transformada de Laplace será representada pela letra correspondente maiúscula e a sua variável por  $s$ . Por exemplo, as transformadas de Laplace das funções  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  serão representadas por  $F(s)$ ,  $G(s)$  e  $H(s)$ , respectivamente.

Vamos calcular a transformada de Laplace de várias funções e apresentar propriedades da transformada de Laplace que possibilitarão que dadas a transformada de Laplace de algumas funções, que serão as funções elementares, poderemos calcular muitas outras. A transformada de Laplace das funções elementares estão agrupadas na tabela na página 345 e podem ser consultadas a qualquer momento.

**Exemplo 3.1.** A transformada de Laplace da função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = 1$  é dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s} = 0 - \frac{e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

**Exemplo 3.2.** Seja  $a$  uma constante real. A transformada de Laplace da função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = e^{at}$  é dada por

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{a-s} \right|_0^{\infty} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{a-s} - \frac{e^{-(s-a)0}}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } s > a. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3.** Seja  $a$  uma constante real. Vamos determinar a transformada de Laplace das funções  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = \cos at$  e  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = \sin at$ . Para isso, vamos calcular a transformada de Laplace da função  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $h(t) = e^{iat}$ .

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{iat} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-ia)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)} \right|_0^{\infty} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}(\cos aT + i \sin aT)}{-(s-ia)} - \frac{e^{-(s-ia)0}}{-(s-ia)} = 0 - \frac{e^{-(s-ia)0}}{ia-s} \\ &= \frac{1}{s-ia}, \quad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$H(s) = \mathcal{L}(h)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (\cos at + i \sin at) dt = \mathcal{L}(f)(s) + i\mathcal{L}(g)(s) = F(s) + iG(s).$$

Assim a **parte real** de  $H(s)$  é igual a  $F(s)$ ,  $\operatorname{Re}\{H(s)\} = F(s)$ , e a **parte imaginária** de  $H(s)$  é igual a  $G(s)$ ,  $\operatorname{Im}\{H(s)\} = G(s)$ . Como

$$H(s) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2},$$

então a transformada de Laplace de  $f(t) = \cos at$  é

$$F(s) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{s - ia}\right\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \text{para } s > 0$$

e a transformada de Laplace de  $g(t) = \sin at$  é

$$G(s) = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{s - ia}\right\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

**Exemplo 3.4.** Seja  $n$  um inteiro positivo. Vamos calcular a transformada de Laplace da função  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(t) = t^n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \left. \frac{t^n e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty - \frac{n}{-s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} F_{n-1}(s). \end{aligned}$$

Aplicando-se recursivamente a fórmula obtida obtemos

$$F_n(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} F_{n-2}(s) = \frac{n(n-1) \dots 1}{s^n} F_0(s).$$

Mas  $F_0(s)$  é a transformada de Laplace da função constante 1, ou seja,  $F_0(s) = \frac{1}{s}$ . Assim, a transformada de Laplace de  $f_n(t) = t^n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  é

$$F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{para } s > 0.$$

Para calcular a transformada de Laplace de outras funções vamos usar as propriedades que apresentaremos a seguir.

---

**Teorema 3.1 (Linearidade).** *Se a transformada de Laplace de  $f(t)$  é  $F(s)$ , para  $s > a_1$ , e a transformada de Laplace de  $g(t)$  é  $G(s)$ , para  $s > a_2$ , então para quaisquer constantes  $\alpha$  e  $\beta$*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s) = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \text{para } s > \max\{a_1, a_2\}.$$

---

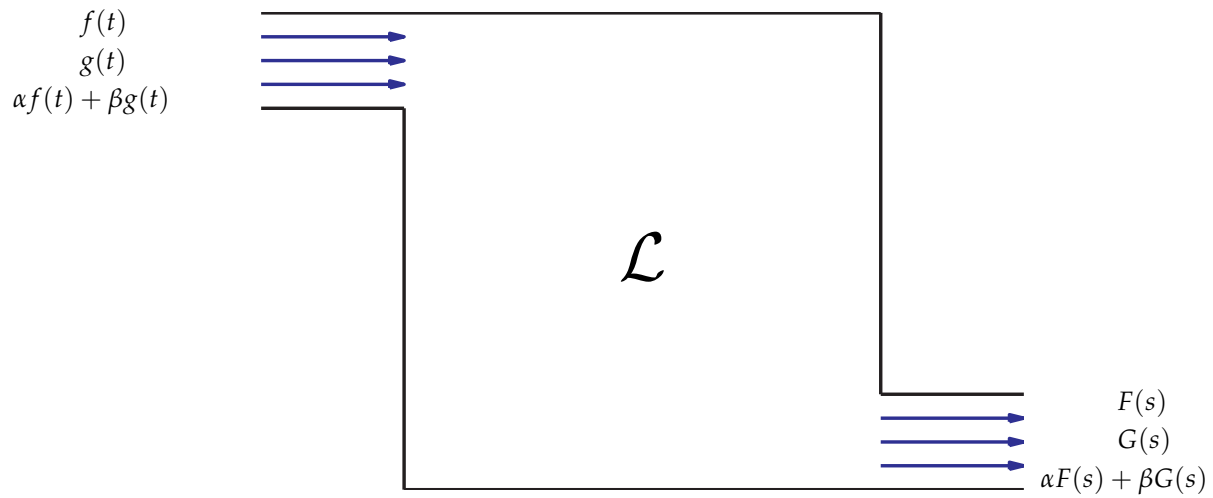


Figura 3.2 – Transformada de Laplace de uma combinação linear

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\
&= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt \\
&= \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s)
\end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.5.** A transformada de Laplace do polinômio  $f(t) = 2t^2 + 3t + 5$  é pelo Teorema 3.1 e usando o resultado do Exemplo 3.4

$$F(s) = 2\frac{2}{s^3} + 3\frac{1}{s^2} + 5\frac{1}{s}.$$

**Exemplo 3.6.** Seja  $a$  uma constante. Pelo Teorema anterior a transformada de Laplace do cosseno hiperbólico de  $at$ ,  $f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ , é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

**Exemplo 3.7.** Seja  $a$  uma constante. Pelo Teorema anterior a transformada de Laplace do seno hiperbólico de  $at$ ,  $f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ , é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$



Dizemos que uma função  $f(t)$  é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo  $[a, b]$  se  $f(t)$  é contínua em  $[a, b]$  exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Dizemos que uma função  $f(t)$  é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo  $[a, \infty)$  se  $f(t)$  é seccionalmente contínua para todo intervalo da forma  $[a, A]$ , com  $A > a$ .

Se a função  $f(t)$  crescer muito rápido ela pode não ter transformada de Laplace, como por exemplo  $f(t) = e^{t^2}$  (verifique!). Isto não acontece para funções  $f(t)$ , para as quais existem  $M > 0$  e  $k > 0$  tais que,

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0. \quad (3.1)$$

Chamamos **funções admissíveis** às funções seccionalmente contínuas que satisfazem (3.1).

Se duas funções admissíveis têm a mesma transformada de Laplace então elas são iguais exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade, como enunciado a seguir e demonstrado ao final desta seção na página 294.

---

**Teorema 3.2 (Injetividade).** Dadas duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  admissíveis se

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s), \quad \text{para } s > a,$$

então  $f(t) = g(t)$ , exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

---

Portanto se  $F(s)$  é a transformada de Laplace de uma função admissível  $f(t)$ , esta função está determinada a menos dos pontos de descontinuidade e dizemos que  $f(t)$  é a **transformada de Laplace inversa** de  $F(s)$  e escrevemos simplesmente

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t),$$

considerando duas funções iguais, se elas forem iguais em todos os pontos onde ambas são contínuas.

**Exemplo 3.8.** Se a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2-3s+2}$$

então vamos determinar a função  $f(t)$ . Para isso vamos decompor  $F(s)$  em frações parciais. O denominador de  $F(s)$  tem duas raízes reais  $s = 1$  e  $s = 2$ . Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2},$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes a determinar. Multiplicando  $F(s)$  por  $(s - 1)(s - 2)$  obtemos

$$s + 3 = A(s - 2) + B(s - 1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  e  $s = 2$  obtemos

$$4 = -A \quad \text{e} \quad 5 = B$$

Assim,

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s - 1)(s - 2)} = -4 \frac{1}{s - 1} + 5 \frac{1}{s - 2}$$

e a função cuja transformada é  $F(s)$  é

$$f(t) = -4e^t + 5e^{2t}.$$

---

**Teorema 3.3 (1º Teorema de Deslocamento).** *Seja  $a$  uma constante. Se a transformada de Laplace da função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é  $F(s)$ , para  $s > c$ , então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = e^{at} f(t)$$

*é*

$$G(s) = F(s - a), \quad \text{para } s > a + c$$

---

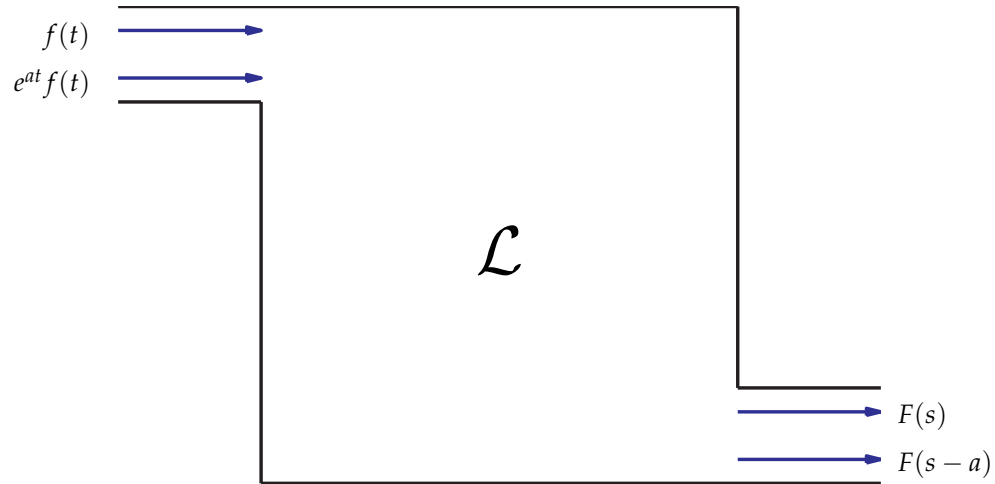


Figura 3.3 – 1º Teorema de Deslocamento

**Demonstração.**

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$



**Exemplo 3.9.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se  $g(t) = \cos(at)$ , então pelo Exemplo 3.3 na página 282

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Pelo 1º Teorema de Deslocamento

$$\mathcal{L}[e^{bt}g(t)](s) = G(s-b).$$

Logo se  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(t) = e^{bt} \cos at$  então a sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

**Exemplo 3.10.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Pelo 1º Teorema de Deslocamento e o Exemplo 3.3 na página 282 obtemos que a transformada de Laplace de  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = e^{bt} \sin at$  é dada por

$$F(s) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

**Exemplo 3.11.** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e  $n$  um inteiro positivo. Pelo 1º Teorema de Deslocamento e o Exemplo 3.4 na página 283 obtemos que a transformada de Laplace de  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = e^{at} t^n$  é dada por

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \text{para } s > a.$$

**Exemplo 3.12.** Se a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+4}$$

então vamos determinar a função  $f(t)$ . Para isso vamos decompor  $F(s)$  em frações parciais. O denominador de  $F(s)$  tem somente uma raiz real,  $s = -2$ . Assim,

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2},$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes a determinar. Multiplicando  $F(s)$  por  $(s+2)^2$  obtemos

$$s-3 = A(s+2) + B \tag{3.2}$$

Substituindo-se  $s = -2$  obtemos

$$-5 = B.$$

Derivando-se (3.2) obtemos

$$1 = A.$$

Assim

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - 5 \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Observando a Tabela na página 345, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é  $F(s)$  é dada por

$$f(t) = e^{-2t} - 5e^{-2t}t.$$

**Exemplo 3.13.** Se a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é

$$F(s) = \frac{s-2}{2s^2+2s+2}$$

então vamos determinar a função  $f(t)$ . Completando quadrados podemos reescrever  $F(s)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s-2}{2s^2+2s+2} = \frac{s-2}{2[s^2+s+1]} = \frac{s-2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\ &= \frac{s+1/2-5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} = \frac{s+1/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} - \frac{5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{4} \frac{1}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4} \end{aligned}$$

Observando a Tabela na página 345, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é  $F(s)$  é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Explicação: Pelo 1º Teorema de Deslocamento

$$\mathcal{L}[e^{at}g(t)](s) = G(s-a) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}^{-1}[G(s-a)](t) = e^{at}g(t).$$

Se  $G(s + 1/2) = \frac{s + 1/2}{(s + 1/2)^2 + 3/4}$ , então  $G(s) = \frac{s}{s^2 + 3/4}$  e pela a Tabela na página 345

$$g(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s + 1/2)](t) = e^{-t/2}g(t) = e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

O mesmo ocorre com o termo  $\frac{\sqrt{3}/2}{(s + 1/2)^2 + 3/4}$ . Se  $G(s + 1/2) = \frac{1}{(s + 1/2)^2 + 3/4}$ , então

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{s^2 + 3/4}$$

e pela a Tabela na página 345

$$g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s + 1/2)](t) = e^{-t/2}g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

### 3.1.1 Demonstração da Injetividade da Transformada de Laplace

**Demonstração do Teorema 3.2 na página 288.** Pela linearidade da transformada de Laplace, basta provarmos que se  $\mathcal{L}(h)(s) = 0$ , para  $s > a$ , então  $h(t) = 0$ , para todos



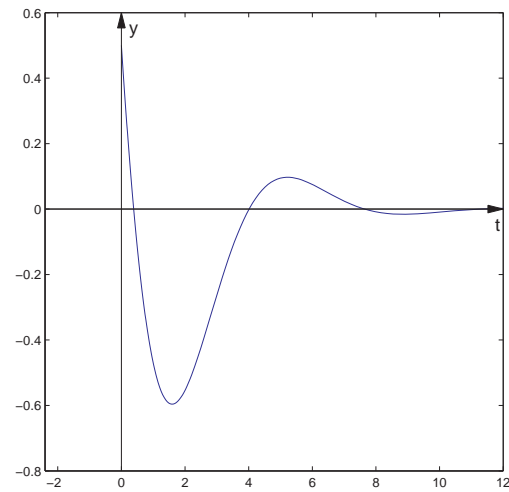


Figura 3.4 –  $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

os valores de  $t > 0$  para os quais  $h(t)$  é contínua. Vamos provar somente para o caso em que  $h(t)$  seja contínua. Seja  $n = 1, 2, \dots$

$$0 = \mathcal{L}(h)(a + n) = \int_0^{\infty} e^{-nt} e^{-at} h(t) dt.$$

Façamos a mudança de variáveis  $t = -\ln x$  e definamos  $v(x) = e^{a \ln x} h(-\ln x)$ . Então

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-nt} e^{-at} h(t) dt = \int_0^1 x^{n-1} v(x) dx. \quad (3.3)$$

Seja  $\epsilon > 0$ . Existe um polinômio  $p(x)$  tal que

$$\int_0^1 |p(x) - v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

A existência de tal polinômio é uma consequência imediata do Teorema de aproximação de Weierstrass que será demonstrado a seguir. De (3.3) segue-se que

$$\int_0^1 p(x) v(x) dx = 0.$$

Então

$$\int_0^1 |p(x) - v(x)|^2 dx = \int_0^1 |p(x)|^2 dx + \int_0^1 |v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Logo

$$\int_0^1 |v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Como  $\epsilon$  é um número positivo arbitrário, então  $v(x) = 0$ , para  $0 < x \leq 1$ . Logo  $h(t) = 0$ , para  $t > 0$ . ■

**Teorema 3.4 (Teorema da Aproximação de Weierstrass).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Para todo  $\epsilon > 0$ , existe um polinômio  $p(t)$  tal que  $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ , para todo  $t \in [a, b]$ .*

**Demonstração.** Seja  $t = (1 - x)a + xb$ . Então  $x = \frac{1}{b-a}(t - a)$  e  $t \in [a, b]$  se, e somente se,  $x \in [0, 1]$ . Seja  $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\tilde{f}(x) = f((1 - x)a + xb)$ . Seja

$$\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{e} \quad p(t) = \tilde{p}\left(\frac{1}{b-a}(t-a)\right).$$

Este polinômio é chamado de **polinômio de Bernstein**.

Vamos usar o fato de que

$$\sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (3.4)$$

para qualquer  $A \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

Como  $f$  é contínua existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.5)$$

Sejam  $b_1 = x - \delta$  e  $b_2 = x + \delta$ . Seja  $M = \max_{x \in [0, 1]} |\tilde{f}(x)| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ . Seja  $n$  tal que

$4Me^{-2\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{2}$ . Vamos usar o seguinte fato que será demonstrado a seguir:

$$b_2 \leq \frac{k}{n} \leq 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \frac{k}{n} \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{k}{n}} (1-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq e^{-2(x-b)^2} b^{\frac{k}{n}} (1-b)^{1-\frac{k}{n}}. \quad (3.6)$$

Então por (3.4), (3.5) e (3.6) temos que

$$\begin{aligned}
 |\tilde{f}(x) - \tilde{p}(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \tilde{f}(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \left| \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right) - \tilde{f}(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} \left| \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right) - \tilde{f}(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \sum_{\frac{k}{n} \geq b_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\frac{k}{n} \leq b_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2Me^{-2\delta^2 n} \sum_{\frac{k}{n} \geq b_2} \binom{n}{k} b_2^k (1-b_2)^{n-k} + 2Me^{-2\delta^2 n} \sum_{\frac{k}{n} \leq b_1} \binom{n}{k} b_1^k (1-b_1)^{n-k} \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + 4Me^{-2\delta^2 n} \leq \epsilon.
 \end{aligned}$$

■

**Lema 3.5.** Se  $0 \leq x < b \leq \frac{k}{n} \leq 1$  ou  $0 \leq \frac{k}{n} \leq b < x \leq 1$ , então

$$x^{\frac{k}{n}} (1-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq e^{-2(x-b)^2} b^{\frac{k}{n}} (1-b)^{1-\frac{k}{n}}.$$

**Demonstração.** Precisamos mostrar que

$$\frac{x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}} \leq e^{-2(x-b)^2},$$

ou aplicando-se o logaritmo nesta desigualdade, que

$$H(x) = \ln \frac{x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}} + 2(x-b)^2 \leq 0.$$

Temos que  $H(b) = 0$ .

- (a) Se  $0 < x < b \leq \frac{k}{n} \leq 1$ , vamos mostrar que  $H'(x) \geq 0$ . Como, para  $0 < x < 1$ ,  
 $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ , então

$$H'(x) = \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + 4(x-b) \geq 4\left(\frac{k}{n} - x\right) + 4(x-b) = 4\left(\frac{k}{n} - b\right) \geq 0.$$

- (b) Se  $0 \leq \frac{k}{n} \leq b < x < 1$ , vamos mostrar que  $H'(x) \leq 0$ . Como, para  $0 < x < 1$ ,  
 $4 \leq \frac{1}{x(1-x)}$ , então

$$H'(x) = \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + 4(x-b) \leq \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + \frac{x-b}{x(1-x)} = \frac{\frac{k}{n} - b}{x(1-x)} \leq 0.$$

■

## Exercícios (respostas na página 346)

1.1. Determine a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{2s - 5}{s(s^2 + s - 12)},$$

ou seja, uma função,  $f(t)$ , cuja transformada de Laplace é a função dada,  $F(s)$ .

1.2. Considere  $\mathcal{L}(y)(s) = Y(s)$ . Determine  $y(t)$ :

(a)  $Y(s) = \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)}$

(b)  $Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)}$

1.3. Seja  $a$  uma constante. Sabendo-se que a transformada de Laplace de  $f(t) = \sin at$  é

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

e a de  $g(t) = t \cos at$  é

$$G(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$$

mostre que a transformada de Laplace de  $h(t) = \sin at - at \cos at$  é

$$H(s) = \frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0.$$

1.4. Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$Y(s) = \frac{2s - 1}{(s^2 - 1)(4s^2 + 4s + 5)}.$$

1.5. Mostre que se  $f(t)$  é seccionalmente contínua e existem  $k > 0$  e  $M > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0,$$

então existe a transformada de Laplace de  $f(t)$ ,  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ , definida para  $s > k$  e além disso

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

1.6. Mostre que  $f(t) = e^{t^2}$  não tem transformada de Laplace.

1.7. (Função Gama) A função gama é definida pela integral imprópria

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad \text{para } p > 0.$$

(a) Mostre que  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ , para  $p > 0$ .

(b) Mostre que  $\Gamma(n+1) = n!$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$

(c) Seja  $p > -1$ . Mostre que  $\mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ , para  $s > 0$ .

(d) Usando o fato de que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , mostre que  $\mathcal{L}(t^{-1/2})(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$  e  $\mathcal{L}(t^{1/2})(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$ .

## 3.2 Problemas de Valor Inicial

O próximo resultado mostra o efeito de aplicar a transformada de Laplace na derivada de uma função.

---

**Teorema 3.6 (Derivação).** *Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função admissível e contínua.*

*(a) Se  $f'(t)$  é seccionalmente contínua, então*

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0),$$

*em que  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ .*

*(b) Se  $f'(t)$  é admissível e contínua e  $f''(t)$  é seccionalmente contínua, então*

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

*em que  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ .*

---

**Demonstração.** (a) Vamos provar para o caso em que  $f'(t)$  é contínua.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + sF(s),\end{aligned}$$

pois como  $f(t)$  é admissível,  $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) = 0$ , para  $s > k$ .



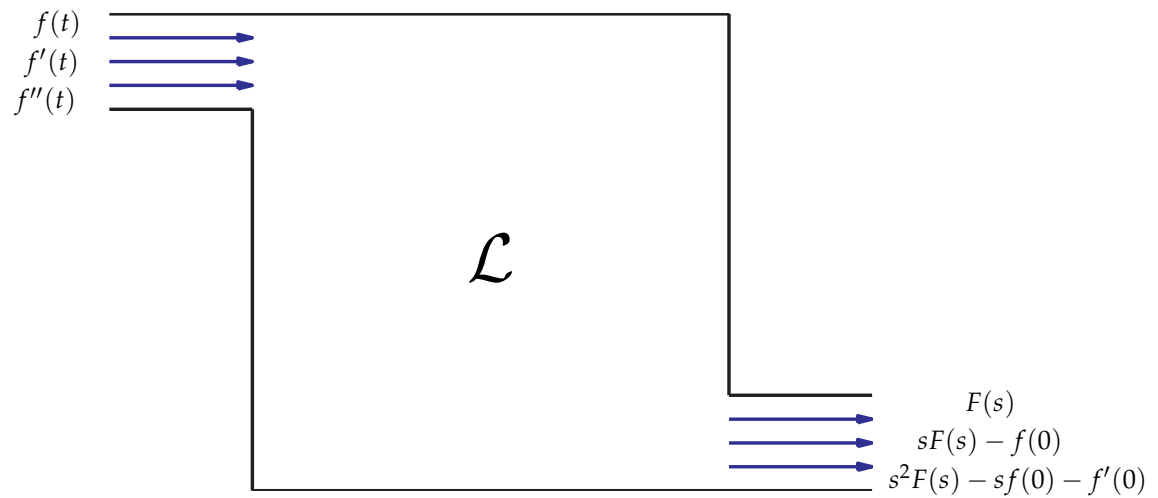


Figura 3.5 – Transformada de Laplace das Derivadas

(b) Vamos provar para o caso em que  $f''(t)$  é contínua. Usando o item anterior:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(s) &= -f'(0) + s\mathcal{L}(f')(s) \\ &= -f'(0) + s(-f(0) + sF(s)) \\ &= -f'(0) - sf(0) + s^2F(s)\end{aligned}$$



**Exemplo 3.14.** Seja  $a$  uma constante. Seja  $f(t) = t \operatorname{sen} at$ . Vamos determinar  $F(s)$ .

$$f'(t) = \operatorname{sen} at + at \cos at$$

$$f''(t) = 2a \cos at - a^2 t \operatorname{sen} at = 2a \cos at - a^2 f(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace e usando o Teorema 3.6 de Derivação, já que  $f(t)$  e  $f'(t)$  são admissíveis e contínuas e  $f''(t)$  é contínua, obtemos

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = 2a \frac{s}{s^2 + a^2} - a^2F(s)$$

Assim,

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Como

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} t \operatorname{sen} at \, dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} t |\operatorname{sen} at| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-st} t \, dt < \infty, \quad \text{para } s > 0,$$

então a transformada de Laplace  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$  está definida para  $s > 0$ .

**Exemplo 3.15.** Seja  $a$  uma constante. Seja  $f(t) = t \cos at$ . Deixamos como exercício mostrar usando o Teorema 3.6 de Derivação que

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

**Exemplo 3.16.** Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 2 \frac{1}{s^2}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + s - 2) Y(s) = \frac{2}{s^2} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} \\ &= \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se por  $s^2(s+2)(s-1)$  obtemos

$$s^2 + 2 = As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2) \quad (3.7)$$

Substituindo-se  $s = -2, 0, 1$  obtemos

$$\begin{cases} 6 &= -12C \\ 2 &= -2B \\ 3 &= 3D \end{cases}$$

que tem solução  $B = -1$ ,  $C = -\frac{1}{2}$  e  $D = 1$ . Comparando os termos de grau 3 da equação (3.7) obtemos

$$0 = A + C + D = A + \frac{1}{2}.$$

Logo  $A = -\frac{1}{2}$ .  
Assim,

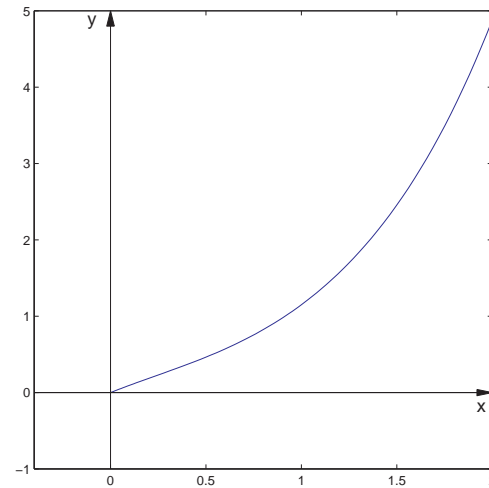
$$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$

de onde obtemos

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t,$$

usando a Tabela na página 345.

Figura 3.6 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.16



## Exercícios (respostas na página 349)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial usando a transformada de Laplace:

(a)  $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos 2t$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

(b)  $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$

(c)  $y'' - 2y' + y = te^t + 4$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

(d)  $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

(e)  $y'' + 4y = 3 \sin 2t$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$

(f)  $y'' + 4y = e^t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

(g)  $y'' - 2y' + y = e^{2t}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

(h)  $y'' + 2y' + 2y = e^t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

2.2. Resolva o problema:  $y'' - 6y' + 8y = \sin t$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

(a) sem usar transformada de Laplace

(b) usando transformada de Laplace

2.3. Seja  $a$  uma constante. Seja  $f(t) = t \cos at$ . Mostre que

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$$

(Sugestão: derive uma vez e use as transformadas de Laplace de  $\cos at$  e de  $t \sin at$ .)

2.4. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = e^{-2t} \sin 3t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2, \end{cases}$$

usando a transformada de Laplace.

2.5. (Derivada da transformada de Laplace) É possível mostrar que se  $f(t)$  é admissível, isto é,  $f(t)$  é seccionalmente contínua e existem  $k > 0$  e  $M > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0,$$

então

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt.$$

- (a) Mostre que  $F'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))(s)$ .
- (b) Mostre que  $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s)$ .
- (c) Use os item anterior para calcular  $\mathcal{L}(t^2 \sin at)(s)$ .

### 3.3 Equações com Termo Não Homogêneo Descontínuo

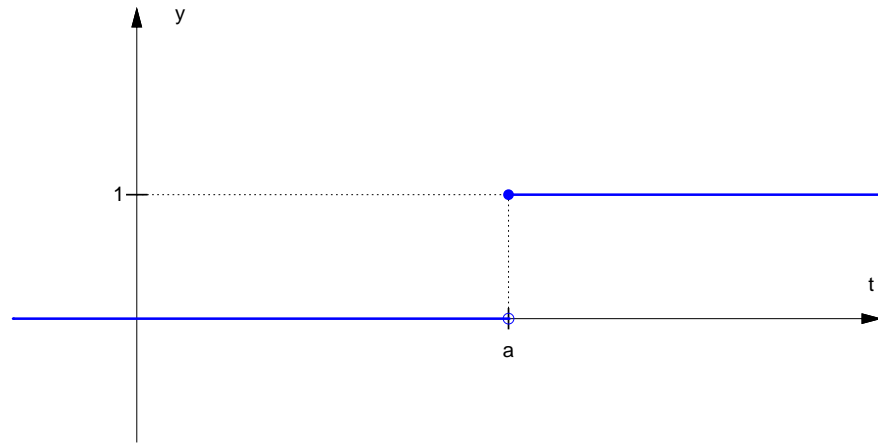


Figura 3.7 – Função de Heaviside



Para resolver problemas de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

em que  $f(t)$  é uma função descontínua vamos escrever  $f(t)$  em termos da função que definiremos a seguir.

Seja  $a$  uma constante maior ou igual a zero. Definimos a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

Observe que  $u_a(t) = u_0(t - a)$ . Em muitos sistemas computacionais a função  $u_0(t)$  é uma função pré-definida no sistema.

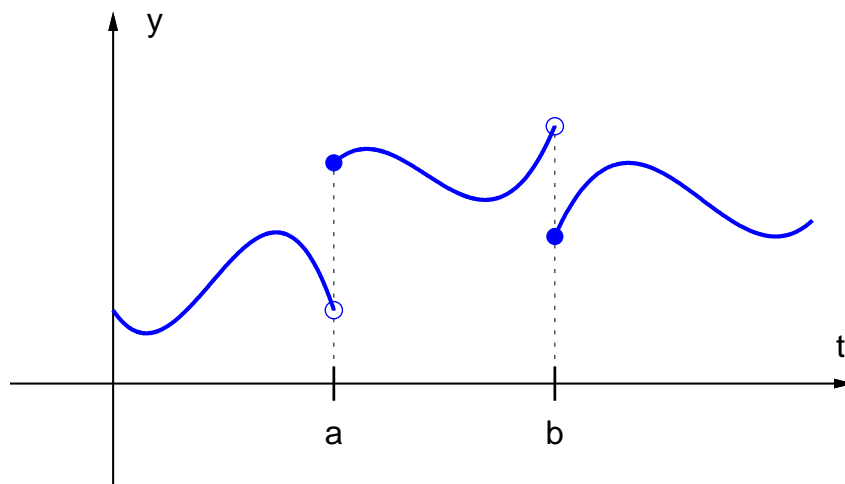


Figura 3.8 – Uma função descontínua dada por três expressões

Vamos ver como podemos escrever uma função descontínua dada por três expressões em termos da função de Heaviside. Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \leq t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \geq b \end{cases}.$$

Esta função pode ser escrita como

$$f(t) = f_1(t) - u_a(t)f_1(t) + u_a(t)f_2(t) - u_b(t)f_2(t) + u_b(t)f_3(t).$$

Observe que para “zerar”  $f_1(t)$  a partir de  $t = a$ , subtraímos  $u_a(t)f_1(t)$  e para “acrescentar”  $f_2(t)$  a partir de  $t = a$  somamos  $u_a(t)f_2(t)$ . Para “zerar”  $f_2(t)$  a partir de  $t = b$ , subtraímos  $u_b(t)f_2(t)$  e para “acrescentar”  $f_3(t)$  a partir de  $t = b$  somamos  $u_b(t)f_3(t)$ . Esta ideia pode ser repetida para o caso em que existam mais pontos de descontinuidade.

Vamos calcular a transformada de Laplace da função de Heaviside  $f(t) = u_a(t)$ .

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) dt = \int_0^a e^{-st} dt + \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^{\infty} = 0 - \frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{para } s > 0 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.17.** Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 1 - u_2(t).$$

Assim usando a linearidade da Transformada de Laplace obtemos

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}.$$

**Exemplo 3.18.** Vamos calcular a transformada de Laplace da função

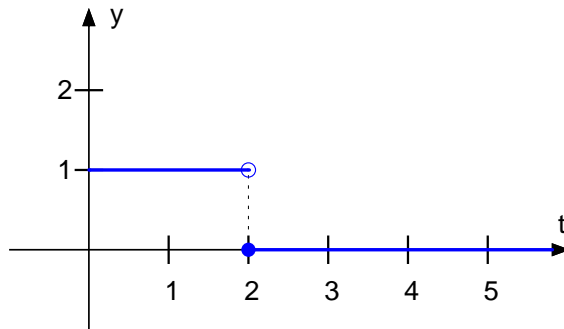
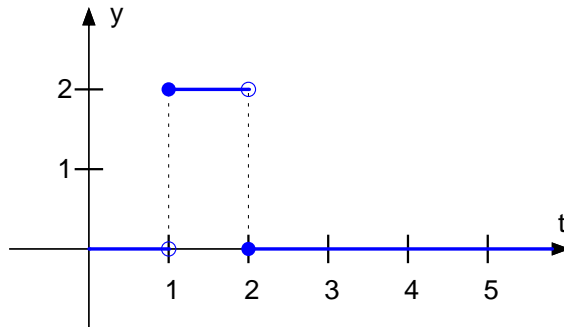
$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 2, & \text{para } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_1(t) - 2u_2(t).$$

Assim usando a linearidade da Transformada de Laplace obtemos

$$F(s) = 2\frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s}.$$

Figura 3.9 – Função  $f(t) = 1 - u_2(t)$ Figura 3.10 – Função  $f(t) = 2u_1(t) - 2u_2(t)$

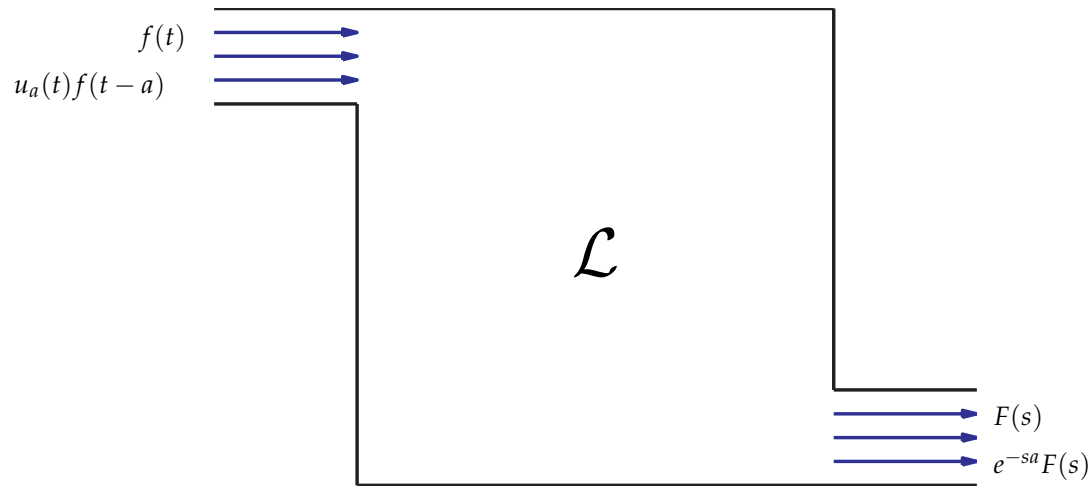


Figura 3.11 – 2º Teorema de Deslocamento

**Teorema 3.7 (2º Teorema de Deslocamento).** *Seja  $a$  uma constante positiva. Se a transformada de Laplace da função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é  $F(s)$ , para  $s > c$ , então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = u_a(t)f(t-a)$$

é

$$G(s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt = \int_0^a e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)} f(t) dt \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = e^{-as} F(s) \end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.19.** Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & \text{para } t \geq 1 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = u_1(t)(t-1)^2 = u_1(t)g(t-1),$$

em que  $g(t) = t^2$ . Usando o [Teorema 3.7](#)

$$F(s) = e^{-s} \frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-s}}{s^3}.$$

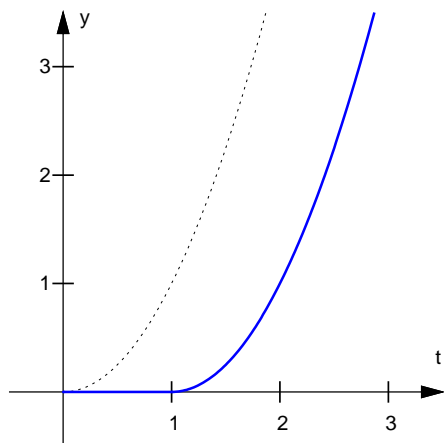


Figura 3.12 – Função  $f(t) = u_1(t)(t-1)^2$



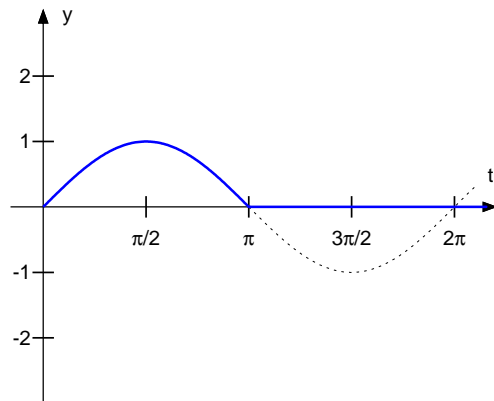


Figura 3.13 – Função  $f(t) = \sin t - u_\pi(t) \sin t$

**Exemplo 3.20.** Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = \sin t - u_{\pi}(t) \sin t.$$

Para usarmos o [Teorema 3.7](#) precisamos escrever a segunda parcela em termos de uma função  $g(t - \pi)$ . Para isso, somamos e subtraímos  $\pi$  a  $t$  no argumento da função seno, ou seja,

$$\sin t = \sin[(t - \pi) + \pi] = \sin(t - \pi) \cos \pi + \cos(t - \pi) \sin \pi = -\sin(t - \pi).$$

Aqui foi usado que  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ . Assim

$$f(t) = \sin t + u_{\pi}(t) \sin(t - \pi)$$

e

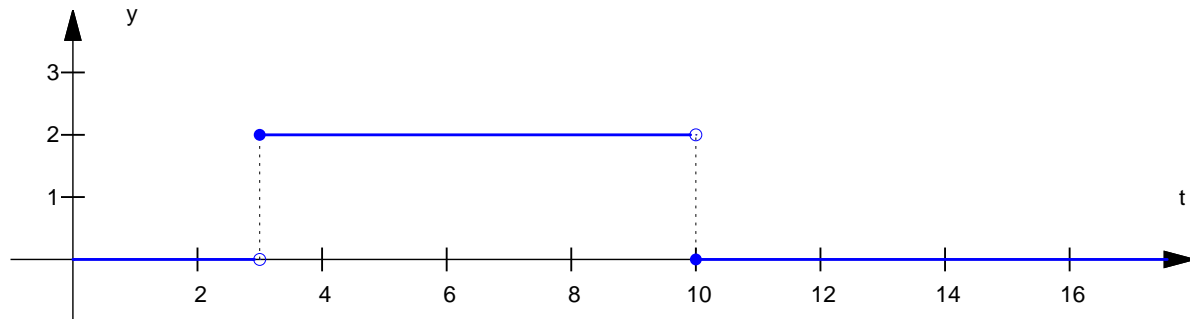
$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

**Exemplo 3.21.** Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$2y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

em que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 3 \\ 2, & \text{para } 3 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$$

Figura 3.14 –  $f(t) = 2u_2(t) - 2u_{10}(t)$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_3(t) - 2u_{10}(t).$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$2 \left( s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \right) + 2 \left( sY(s) - y(0) \right) + 2Y(s) = 2 \frac{e^{-3s}}{s} - 2 \frac{e^{-10s}}{s}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(2s^2 + 2s + 2) Y(s) = 2 \frac{e^{-3s} - e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)}.$$

Para aplicarmos o 2º Teorema de Deslocamento vamos definir

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}.$$

E assim

$$Y(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)} = (e^{-3s} - e^{-10s})H(s) = e^{-3s}H(s) - e^{-10s}H(s).$$

Depois de encontrar a função  $h(t)$  cuja transformada de Laplace é  $H(s)$ , a solução do problema de valor inicial é então, pelo 2º Teorema de Deslocamento, dada por

$$y(t) = u_3(t)h(t-3) - u_{10}(t)h(t-10).$$

Vamos a seguir encontrar a função  $h(t)$  cuja transformada de Laplace é  $H(s)$ . Como  $s^2 + s + 1$  tem raízes complexas, a decomposição de  $H(s)$  em frações parciais é da forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1}.$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $s(s^2 + s + 1)$  obtemos

$$1 = A(s^2 + s + 1) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$  obtemos  $A = 1$ . Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 1 + B \\ 0 &= A + C = 1 + C \end{cases}$$

que tem solução  $B = -1$  e  $C = -1$ . Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1/2}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4} \end{aligned}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é  $H(s)$  é

$$h(t) = 1 - e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = u_3(t)h(t-3) - u_{10}(t)h(t-10).$$

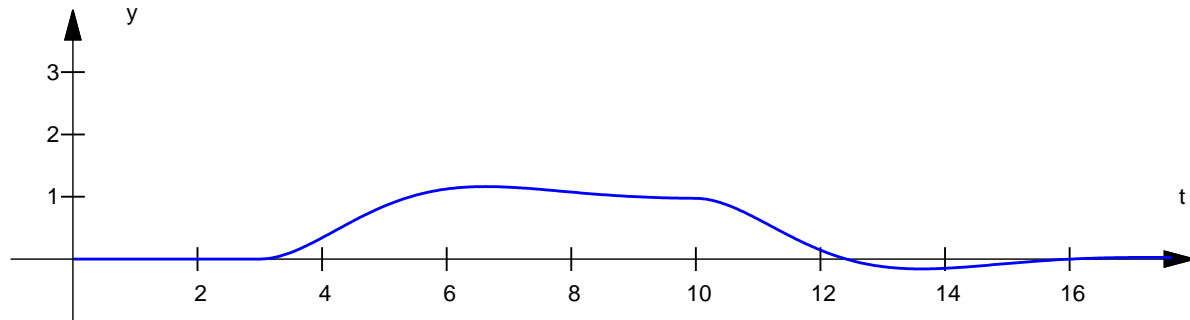
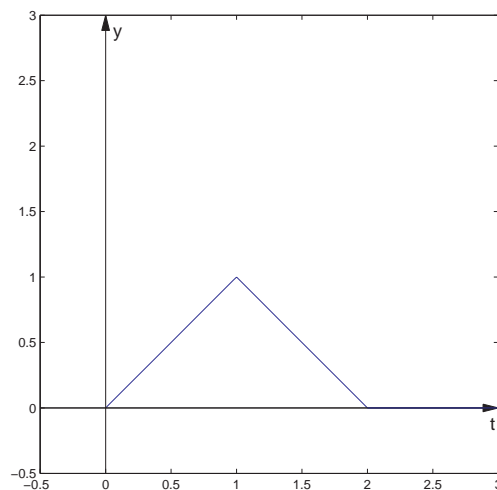


Figura 3.15 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.21

## Exercícios (respostas na página 363)

3.1. Seja  $f(t)$  a função cujo gráfico é mostrado na figura ao lado

- (a) Expresse  $f(t)$  em termos da função degrau.
- (b) Calcule a transformada de Laplace de  $f(t)$ .



3.2. Considere

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < 2\pi \\ e^{-\frac{t}{10}}, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

- (a) Expresse  $f$  em termos da função degrau.
- (b) Calcule a transformada de Laplace de  $f$ .

3.3. Considere

$$f(t) = \begin{cases} |\cos t|, & 0 \leq t < 3\pi/2 \\ 0, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$$

Calcule a transformada de Laplace de  $f$ .

3.4. Resolva os problemas de valor inicial:

- (a)  $y'' + y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , em que  $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{para } t \geq \pi/2 \end{cases}$
- (b)  $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , em que  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 2\pi \end{cases}$
- (c)  $y'' + 4y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{para } 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 2\pi \end{cases}$
- (d)  $y'' + 4y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$
- (e)  $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$
- (f)  $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , em que  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 1, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$
- (g)  $y'' + y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , em que  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 3\pi \\ 1, & \text{para } t \geq 3\pi \end{cases}$
- (h)  $y'' + y' + \frac{5}{4}y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$
- (i)  $y'' + 4y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \leq t < 3\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 3\pi \end{cases}$
- (j)  $y'' + 4y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$
- (k)  $y'' - 2y' + y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$
- (l)  $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , em que  $f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$



(m)  $y'' + 4y' + 13y = f(t)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ , em que  $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} \operatorname{sen} 3t, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{se } t \geq \pi \end{cases}$

### 3.4 Transformada de Laplace do Delta de Dirac

Seja  $t_0 \geq 0$ . O **delta de Dirac** ou **impulso unitário**  $\delta(t)$  é uma função generalizada definida pela seguinte propriedade

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0), \quad \text{para toda função } f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ seccionalmente contínua.} \quad (3.8)$$

Pode-se mostrar que não existe uma função (usual) que satisfaça tal propriedade. Entretanto podemos mostrar como podemos aproximar o delta por uma sequência de funções. Considere a sequência de funções

$$g_n(t) = \begin{cases} n, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

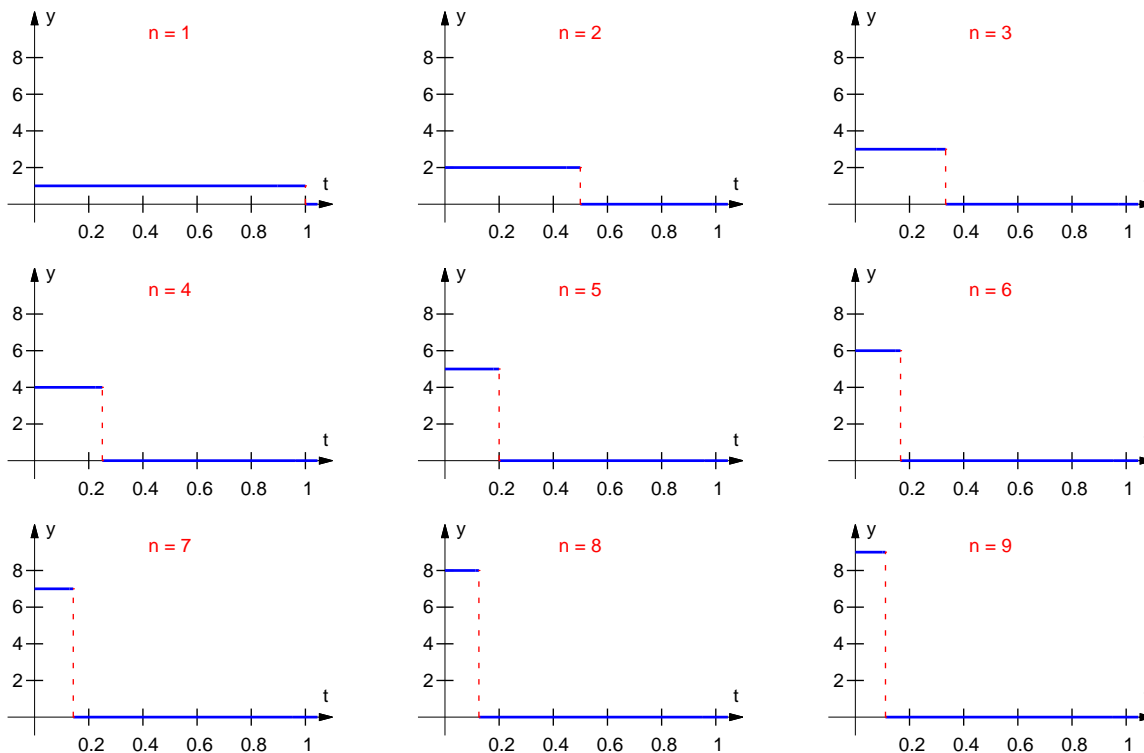


Figura 3.16 – Sequência de funções  $g_n(t) = 1/n$ , se  $0 < t < n$  e  $g_n(t) = 0$ , caso contrário.

Calculando a integral do produto  $f(t)g_n(t - t_0)$ , para  $f(t)$  uma função contínua obtemos

$$\int_0^\infty f(t)g_n(t - t_0)dt = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} f(t)n dt = n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} f(t)dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais

$$\int_0^\infty f(t)g_n(t - t_0)dt = f(\xi_n), \quad \text{com } t_0 \leq \xi_n \leq t_0 + \frac{1}{n}.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t)g_n(t - t_0)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(t_0).$$

Observe que não podemos passar o limite para dentro da integral, pois enquanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t)g_n(t - t_0)dt = f(t_0),$$

$$\int_0^\infty f(t) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t - t_0) \right) dt = 0,$$

já que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = t_0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto mostra que o delta de Dirac não é o limite da sequência  $g_n$ , mas dá uma ideia de como podemos aproximar o delta de Dirac por funções.

Podemos usar o delta de Dirac, por exemplo, para obter o torque em uma viga devido a uma carga concentrada usando a mesma fórmula que é usada para se obter o torque devido a uma distribuição de carga.

O torque devido a uma distribuição de carga  $w(x)$  sobre uma viga de comprimento  $l$  em relação a um dos seus extremos é dada por

$$M = \int_0^l xw(x)dx.$$

Se uma carga  $F$  é concentrada em um ponto  $x_0$ , então podemos descrever a distribuição de carga usando o delta de Dirac como sendo  $w(x) = F\delta(x - x_0)$ . Neste caso o torque devido a esta carga concentrada pode ser calculado aplicando a propriedade que define o delta de Dirac (3.8) obtendo

$$M = \int_0^l xw(x)dx = \int_0^l xF\delta(x - x_0)dx = F \int_0^l x\delta(x - x_0)dx = x_0F.$$

A transformada de Laplace do delta de Dirac também pode ser calculada aplicando a propriedade que o define (3.8) obtendo

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t - t_0)dt = e^{-t_0s}$$

Também temos que

$$\mathcal{L}(f(t)\delta(t - t_0))(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)e^{-t_0s}$$

**Exemplo 3.22.** Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 10y'' - 3y' - 4y = \delta(t - \pi) \cos t, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1/10, \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$10(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 3(sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = e^{-\pi s} \cos \pi$$

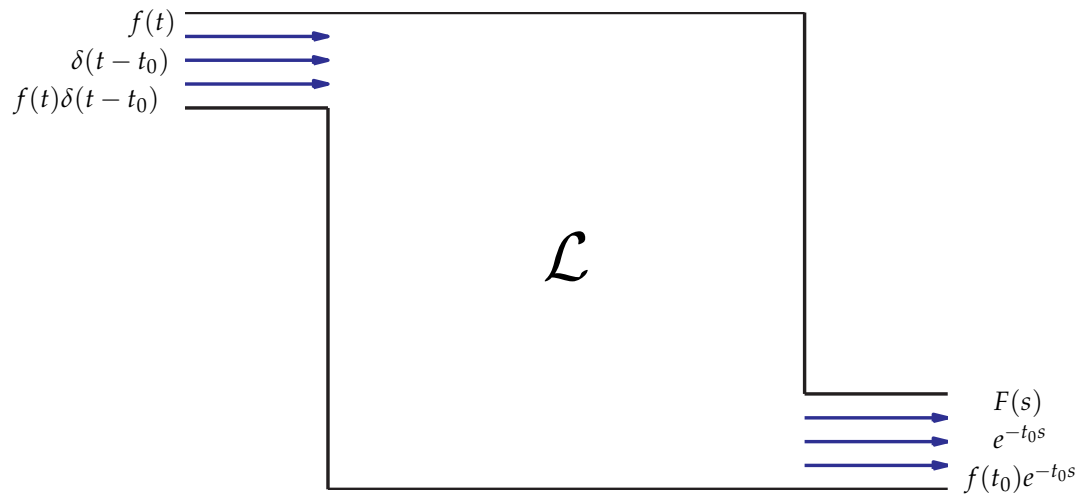


Figura 3.17 – Transformada de Laplace do delta de Dirac

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1/10$  obtemos

$$(10s^2 - 3s - 4)Y(s) = -e^{-\pi s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{10s^2 - 3s - 4} - \frac{e^{-\pi s}}{10s^2 - 3s - 4} = H(s) - e^{-\pi s}H(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{10s^2 - 3s - 4} = \frac{1}{10(s - 4/5)(s + 1/2)} = \frac{A}{s - 4/5} + \frac{B}{s + 1/2}$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $10(s - 4/5)(s + 1/2)$ :

$$1 = 10A(s + 1/2) + 10B(s - 4/5)$$

Substituindo-se  $s = -1/2, 4/5$

$$\begin{cases} 1 = -13B \\ 1 = 13A \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução  $A = 1/13$  e  $B = -1/13$ . Assim,

$$H(s) = \frac{1}{13} \frac{1}{s - 4/5} - \frac{1}{13} \frac{1}{s + 1/2}$$

$$h(t) = \frac{1}{13} e^{4t/5} - \frac{1}{13} e^{-t/2}$$

$$y(t) = h(t) - u_{\pi}(t)h(t - \pi)$$

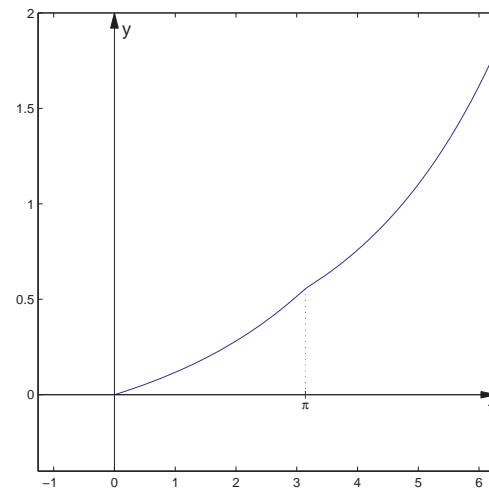


Figura 3.18 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo [3.22](#)



## Exercícios (respostas na página 384)

4.1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a)  $\begin{cases} y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos t, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^t \delta(t - 1), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} y'' + 4y = e^t \delta(t - 2), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$

(d)  $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{2t} \delta(t - 1), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$

(e)  $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t - 1) + u_3(t)t^2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$

4.2. (a) Determine a solução do problema

$$y'' + 4y + 20y = e^{-\frac{\pi}{2}} \delta(t - \frac{\pi}{4}) \quad \text{com } y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(b) Esboce o gráfico da solução encontrada

4.3. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' = u_1(t) + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

### 3.5 Convolução

A **convolução de duas funções**  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

---

**Teorema 3.8.** Seja  $F(s)$  a transformada de Laplace de  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G(s)$  a transformada de Laplace de

$$g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Então,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$


---

**Demonstração.** Por um lado,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t - \tau)g(\tau)d\tau dt$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tilde{\zeta}} f(\tilde{\zeta})d\tilde{\zeta} \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)d\eta = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\eta+\tilde{\zeta})} f(\tilde{\zeta})g(\eta)d\tilde{\zeta}d\eta \end{aligned}$$

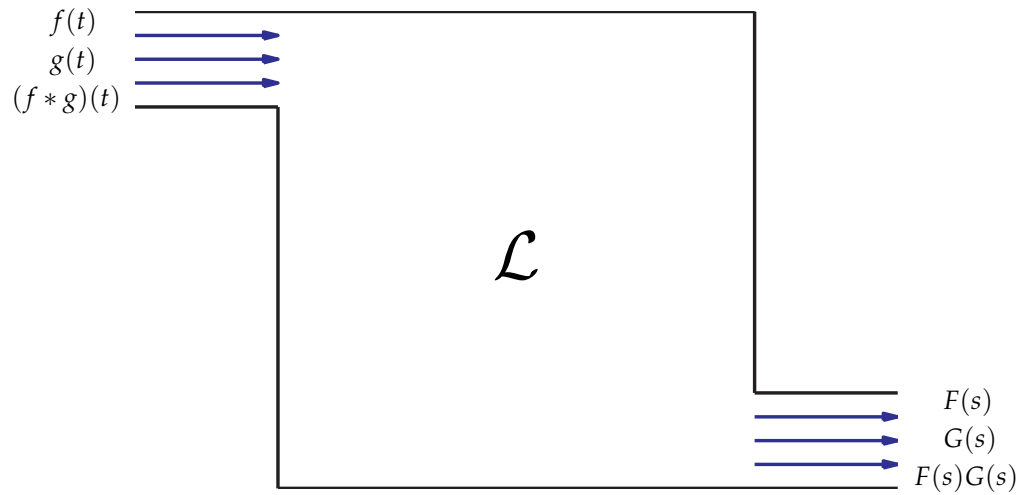
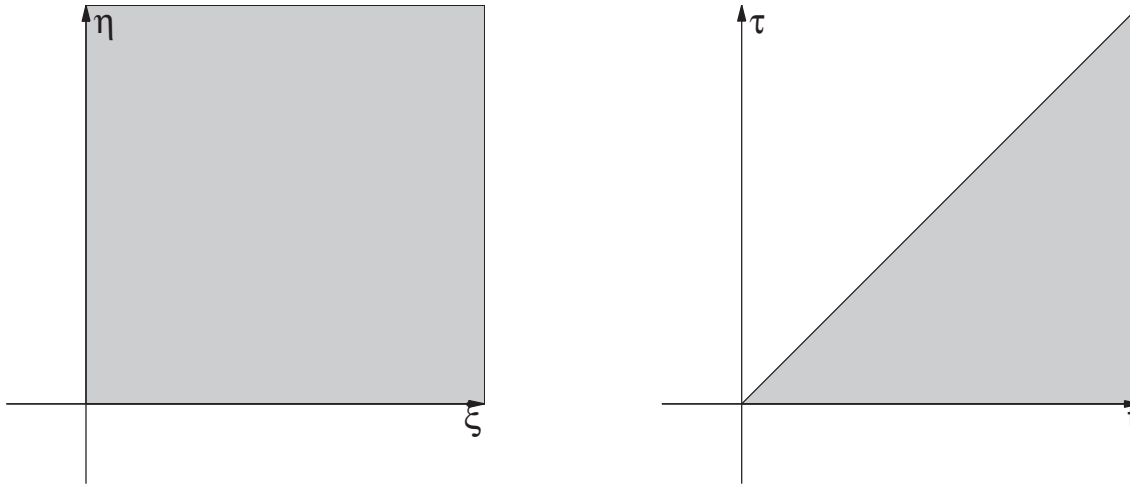


Figura 3.19 – Transformada de Laplace da Convolução



Fazendo a mudança de variáveis  $t = \eta + \xi$  e  $\tau = \eta$  obtemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)g(\tau) dt d\tau,$$

Trocando a ordem de integração obtemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\tau)g(\tau) d\tau dt$$

Logo,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

■

**Exemplo 3.23.** Considere  $\mathcal{L}(h)(s) = H(s) = \frac{1}{(s-4)(s+1)}$ . Vamos determinar  $h(t)$  usando convolução. Sejam

$$F(s) = \frac{1}{s-4} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Então

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t e^{4(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = e^{4t} \int_0^t e^{-5\tau} d\tau = e^{4t} \frac{1}{-5} e^{-5\tau} \Big|_0^t = -\frac{e^{4t}}{5} (e^{-5t} - 1)$$

**Teorema 3.9.** A convolução satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $f * g = g * f$
- (b)  $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
- (c)  $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (d)  $f * 0 = 0 * f = 0$

**Demonstração.** (a)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\tau' = t - \tau$  obtemos

$$(f * g)(t) = - \int_t^0 f(\tau')g(t-\tau')d\tau' = \int_0^t f(\tau')g(t-\tau')d\tau' = (g * f)(t)$$

(b)

$$\begin{aligned}
 f * (g_1 + g_2)(t) &= \int_0^t f(t - \tau)(g_1(\tau) + g_2(\tau))d\tau \\
 &= \int_0^t f(t - \tau)g_1(\tau)d\tau + \int_0^t f(t - \tau)g_2(\tau)d\tau \\
 &= (f * g_1)(t) + (f * g_2)(t)
 \end{aligned}$$

(c) Por um lado,

$$\begin{aligned}
 f * (g * h)(t) &= \int_0^t f(t - \tau)(g * h)(\tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \left( \int_0^\tau g(\tau - u)h(u)du \right) d\tau \\
 &= \int_0^t \int_0^\tau f(t - \tau)g(\tau - u)h(u)dud\tau \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 ((f * g) * h)(t) &= \int_0^t (f * g)(t - x)h(x)dx = \int_0^t \left( \int_0^{t-x} f(t - x - y)g(y)dy \right) h(x)dx \\
 &= \int_0^t \int_0^{t-x} f(t - x - y)g(y)h(x)dydx \\
 &= \int_0^t \int_0^{t-y} f(t - x - y)g(y)h(x)dx dy
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u = x$  e  $\tau = x + y$ , obtemos

$$((f * g) * h)(t) = \int_0^t \int_0^\tau f(t - \tau)g(\tau - u)h(u)dud\tau$$

Logo por (3.9)

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

(d)

$$(f * 0)(t) = \int_0^t f(t - \tau) 0 d\tau = 0 = (0 * f)(t)$$



Vimos acima que várias das propriedades do produto de funções são válidas para a convolução, mas duas propriedades do produto não são válidas para a convolução:

(a)  $1 * f \neq f$ , pois, por exemplo, para  $f(t) = t$ ,

$$(1 * f)(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$$

(b)  $f * f \not\geq 0$ , pois, por exemplo, para  $f(t) = \cos t$ ,

$$\begin{aligned} (f * f)(t) &= \int_0^t f(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \cos(t - \tau) \cos \tau d\tau \\ &= \cos t \int_0^t \cos^2 \tau d\tau + \sin t \int_0^t \sin \tau \cos \tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} \cos t \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + \frac{1}{2} \sin^3 t \end{aligned}$$

$$(f * f)(\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

**Exemplo 3.24.** Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases}$$

em que  $f(t)$  é uma função qualquer que tem uma transformada de Laplace.

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = F(s)$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 4) Y(s) = F(s) + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2 + 4} = F(s)H(s) + H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) + (h * f)(t)$$



**Exemplo 3.25.** A equação integral a seguir pode ser resolvida usando transformada de Laplace.

$$1 + \int_0^t \cos(t - \tau)y(\tau)d\tau = y(t)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 1}Y(s) &= Y(s) \\ Y(s) \left(1 - \frac{s}{s^2 + 1}\right) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{s^2 + 1}{(s^2 - s + 1)s}\end{aligned}$$

Decompondo  $Y(s)$  em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - s + 1}$$

Multiplicando-se or  $(s^2 - s + 1)s$ :

$$s^2 + 1 = A(s^2 - s + 1) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$  obtemos  $A = 1$ . Comparando-se os termos de grau 2 obtemos  $1 = A + B$  ou  $B = 0$ . Comparando-se os termos de grau 1 obtemos  $0 = -A + C$  ou  $C = 1$ . Assim

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 - s + 1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{s} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

Assim a solução da equação integral é

$$y(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

## Exercícios (respostas na página 391)

5.1. Considere  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \frac{1}{s(s+3)}$ . Determine  $f(t)$ :

- (a) Utilizando frações parciais.
- (b) Utilizando convolução.

5.2. Considere  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 4s + 5)}$ . Determine  $f(t)$ :

- (a) Utilizando frações parciais.
- (b) Utilizando convolução.

5.3. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 4y = f(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

para uma função  $f(t)$  arbitrária.

5.4. Resolva a equação integral

$$1 + t + \int_0^t \sin 2(t - \tau)y(\tau)d\tau = y(t)$$

## 3.6 Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, \text{ para } s > a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \text{ para } s > 0$	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \text{ para } s > 0$
$t^n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } s > 0$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$
$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0s}, s > 0$
$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$	$\frac{e^{-as}}{s}, \text{ para } s > 0$	$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(t)\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0s}f(t_0), s > 0$	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

### 3.7 Respostas dos Exercícios

#### 1. Introdução (página 300)

##### 1.1.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s-5}{s(s-3)(s+4)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+4} \end{aligned}$$

Multiplicando por  $s(s-3)(s+4)$  obtemos

$$2s-5 = A(s-3)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s-3)$$

Substituindo-se  $s = 0, 3, -4$  obtemos  $A = \frac{5}{12}$ ,  $B = \frac{1}{21}$  e  $C = -\frac{13}{28}$ . Assim,

$$f(t) = \frac{5}{12} + \frac{1}{21}e^{3t} - \frac{13}{28}e^{-4t}$$

$$\begin{aligned} 1.2. \quad (a) \quad Y(s) &= \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} \\ &= \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se por  $s^2(s+2)(s-1)$  obtemos

$$s^2 + 2 = \tag{3.10}$$

$$= As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2)$$

Substituindo-se  $s = -2, 0, 1$  obtemos

$$\begin{cases} 6 &= -12C \\ 2 &= -2B \\ 3 &= 3D \end{cases}$$

que tem solução  $B = -1$ ,  $C = -\frac{1}{2}$  e  $D = 1$ . Comparando-se os termos de grau 3 em (3.10):

$$0 = A + C + D = A - \frac{1}{2} + 1$$

de onde obtemos  $A = -\frac{1}{2}$ .

Assim,

$$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t$$

(b)  $Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$

O numerador da segunda parcela é de 1º grau ( $Bs + C$ ), pois o denominador tem raízes complexas. Multiplicando-se a equação pelo denominador  $(s-1)(s^2+4)$  obtemos

$$3 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  obtemos  $A = 3/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 3/5 + B \\ 0 &= -B + C \end{cases}$$

que tem solução  $B = -3/5$  e  $C = -3/5$ . Assim,

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{3}{5} \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{3}{5} \frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10} \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = \frac{3}{5}e^t - \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t$$

### 1.3.

$$h(t) = f(t) - ag(t)$$

Aplicando-se a linearidade da transformada de Laplace obtemos

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \mathcal{L}(h)(s) \\
 &= \mathcal{L}(f)(s) - a \mathcal{L}(g)(s) \\
 &= F(s) - a G(s) \\
 &= \frac{a}{s^2 + a^2} - a \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \\
 &= \frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$1.4. Y(s) = \frac{2s-1}{(s^2-1)(4s^2+4s+5)} = \frac{2s-1}{(s-1)(s+1)(4s^2+4s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{4s^2+4s+5}.$$

Multiplicando-se a equação pelo denominador  $(s^2 - 1)(4s^2 + 4s + 5)$  obtemos

$$2s - 1 = A(s + 1)(4s^2 + 4s + 5) + B(s - 1)(4s^2 + 4s + 5) + (Cs + D)(s^2 - 1)$$

Substituindo-se  $s = +1, -1$  obtemos:

$$1 = 26A \text{ e } -3 = -10B. \text{ Logo } A = 1/26 \text{ e } B = 3/10.$$

Comparando-se os coeficientes dos termos de graus 3 e 2 obtemos:

$$0 = 4A + 4B + C = 88/65 + C \text{ e } 0 = 8A + D = 4/13 + D. \text{ Logo } C = -88/65 \text{ e } D = -20/65.$$

$$\text{Assim } Y(s) = \frac{1}{26} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{10} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{65} \frac{88s+20}{4s^2+4s+5}$$

$$Y(s) = \frac{1}{26} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{10} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{65} \frac{22s+5}{s^2+s+5/4} =$$

$$\frac{1}{26} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{10} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{65} \frac{22(s+1/2)-6}{(s+1/2)^2+1} =$$

$$\frac{1}{26} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{10} \frac{1}{s+1} - \frac{22}{65} \frac{(s+1/2)}{(s+1/2)^2+1} + \frac{6}{65} \frac{6}{(s+1/2)^2+1}$$

Logo a transformada de Laplace inversa de  $Y(s)$  é

$$y(t) = \frac{1}{26} e^t + \frac{3}{10} e^{-t} - \frac{22}{65} e^{-t/2} \cos t + \frac{6}{65} e^{-t/2} \sin t.$$

$$1.5. \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(s-k)t} dt = \frac{M}{s-k}, \text{ para } s > k.$$

Logo  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$  está definida para  $s > k$  e além disso

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

- 1.6. Para  $s > 0$  temos que a reta tangente à parábola  $y(t) = t^2 - st$  em  $t = s$  é  $y(t) = st - s^2$  e assim  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} e^{t^2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{t^2 - st} dt \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{st - s^2} dt \geq e^{-s^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{st} dt = \infty$ . Logo  $f(t) = e^{t^2}$  não tem transformada de Laplace.

(a) Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = -x^p e^{-x} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \\ &= p\Gamma(p).\end{aligned}$$

pois  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$ .

- (b)  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1) \cdots \Gamma(1) = n(n-1) \cdots 1 = n!$   
 (c) Fazendo a mudança de variáveis  $x = st$  obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^p)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^p dt = \\ &= \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{s^{p+1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(d)} \quad \mathcal{L}(t^{-1/2})(s) &= \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}. \\ \mathcal{L}(t^{1/2})(s) &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.\end{aligned}$$

## 2. Problemas de Valor Inicial (página 308)

- 2.1. (a)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 4 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$   
 Substituindo-se os valores  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = 4 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + s + 2$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{4s+4}{(s^2+2s+5)^2} + \frac{s+2}{s^2+2s+5} \\
 &= 4 \frac{s+1}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4} \\
 &= \frac{2 \cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+4}
 \end{aligned}$$

De onde obtemos

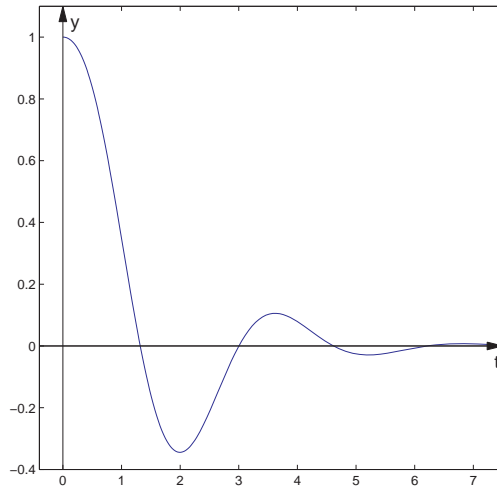
$$y(t) = te^{-t} \operatorname{sen} 2t + e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t.$$

Aqui usamos a tabela da página 345 e o 1º Teorema de Deslocamento:

$$\mathcal{L}[e^{bt}g(t)](s) = G(s-b),$$

onde  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ .





$$(b) (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 2$  obtemos

$$(s^2 + 4) Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1} + 2 \text{ Assim,}$$

$$Y(s) = \quad (3.11)$$

$$= \frac{2}{s^3(s^2+4)} + \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} + \frac{2}{s^2+4}$$

A primeira parcela de (3.11) pode ser decomposta como

$$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$$

Multiplicando-se a equação acima por  $s^3(s^2 + 4)$  obtemos

$$2 = \quad (3.12)$$

$$= As^2(s^2 + 4) + Bs(s^2 + 4) + C(s^2 + 4) + (Ds + E)s^3$$

Substituindo-se  $s = 0, 2i$  em (3.12)

$$\begin{cases} 2 &= 4C \\ 2 &= (2iD + E)(-8i) = 16D - 8iE \end{cases}$$

De onde obtemos  $C = \frac{1}{2}$  e comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação do sistema acima

$$\begin{cases} 2 &= 16D \\ 0 &= -8E \end{cases}$$

De onde obtemos  $D = \frac{1}{8}$  e  $E = 0$ . Comparando-se os termos de grau 4 na equação (3.12) obtemos  $0 = A + D = A + \frac{1}{8}$ .

Logo  $A = -\frac{1}{8}$ . Comparando-se os termos de grau 3 na equação (3.12) obtemos  $0 = B$ .

Assim,

$$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = -\frac{1/8}{s} + \frac{1}{4} \frac{2}{s^3} + \frac{1}{8} \frac{s}{s^2+4}$$

A segunda parcela de (3.11) pode ser decomposta como

$$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$3 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s - 1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  obtemos  $A = 3/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

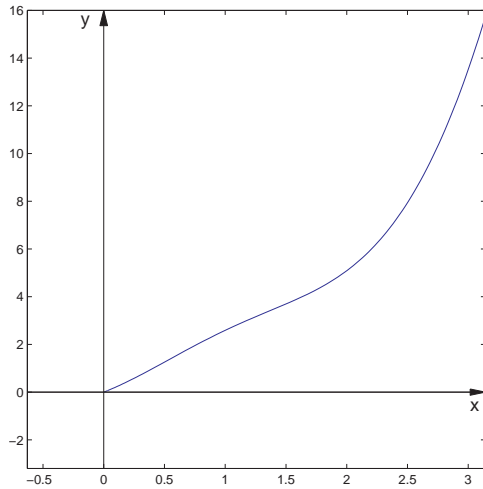
$$\begin{cases} 0 &= A + B = 3/5 + B \\ 0 &= -B + C \end{cases}$$

que tem solução  $B = -3/5$  e  $C = -3/5$ . Assim,

$$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{3}{5} \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{3}{5} \frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10} \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{8} \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \frac{2}{s^3} + \frac{1}{8} \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{3}{5} \frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10} \frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} t^2 - \frac{19}{40} \cos 2t + \frac{3}{5} e^t + \frac{7}{10} \sin 2t$$



(c)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 - 2s + 1) Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s} + s - 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{4}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por  $s(s-1)^2$  obtemos

$$4 = A(s-1)^2 + B(s-1)s + Cs \quad (3.13)$$

Substituindo-se  $s = 0, 1$  obtemos

$$\begin{cases} 4 &= A \\ 4 &= C \end{cases}$$

Comparando-se os termos de grau 2 na equação (3.13) obtemos

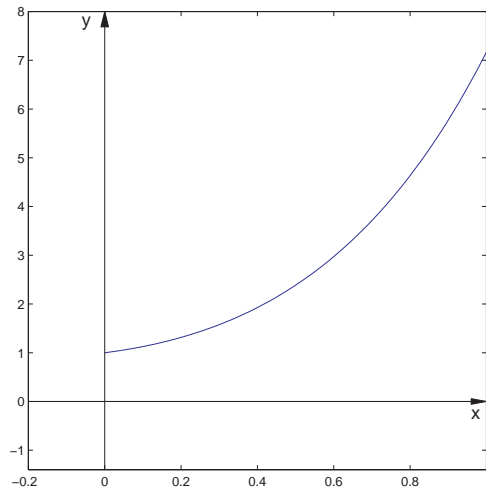
$$0 = A + B = A + 4$$

Logo  $B = -4$ .

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{6} \frac{6}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t + 4 - 3e^t + 4te^t$$



$$(d) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = 3 \frac{1}{(s-2)^2}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 - 2s - 3)Y(s) = 3 \frac{1}{(s-2)^2} + s - 2$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= 3 \frac{1}{(s^2-2s-3)(s-2)^2} + \frac{s-2}{s^2-2s-3} \\
 &= 3 \frac{1}{(s-3)(s+1)(s-2)^2} + \frac{s-2}{(s-3)(s+1)} \\
 &= \frac{3+(s-2)^3}{(s-3)(s+1)(s-2)^2} \\
 &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}
 \end{aligned}$$

Multiplicando-se  $Y(s)$  por  $(s-3)(s+1)(s-2)^2$  obtemos

$$3 + (s-2)^3 = \quad (3.14)$$

$$= A(s+1)(s-2)^2 + B(s-3)(s-2)^2 + C(s-3)(s+1)(s-2) + D(s-3)(s+1)$$

Substituindo-se  $s = -1, 2$  e  $3$  na equação acima obtemos  $A = 1$ ,  $B = \frac{2}{3}$  e  $D = -1$ . Comparando-se os termos de grau 3 em (3.14) obtemos

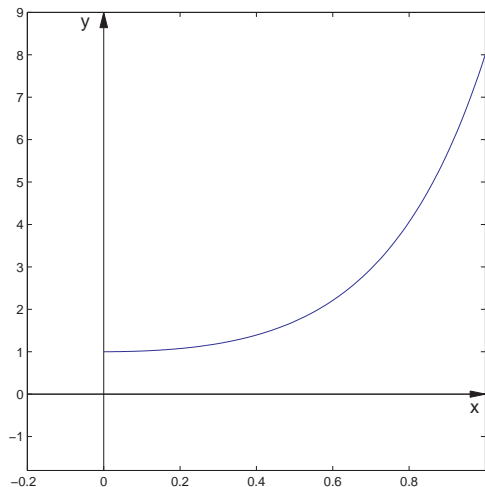
$$1 = A + B + C = 1 + \frac{2}{3} + C$$

que tem solução  $C = -\frac{2}{3}$ .

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{2/3}{s+1} - \frac{2/3}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$y(t) = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$$



$$(e) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = 3 \frac{2}{s^2 + 4}$$

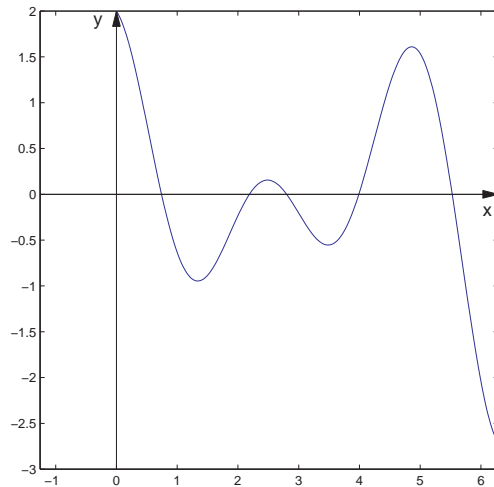
Substituindo-se os valores  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = -1$  obtemos

$$(s^2 + 4) Y(s) = 3 \frac{2}{s^2 + 4} + 2s - 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{6}{(s^2 + 4)^2} + \frac{2s - 1}{s^2 + 4} \\ &= \frac{6}{16} \frac{16}{(s^2 + 4)^2} + 2 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{s^2 + 4} \\ &= \frac{3}{8} \frac{16}{(s^2 + 4)^2} + 2 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{3}{8}(\sin 2t - 2t \cos 2t) + 2 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \\
 &= 2 \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{3}{4}t \cos 2t
 \end{aligned}$$



(f)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{s-1}$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando-se  $Y(s)$  por  $(s-1)(s^2+4)$ :

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  obtemos  $A = 1/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1/5 + B = 0 \\ 4/5 - C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução  $B = -1/5$  e  $C = -1/5$ . Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{s^2+4} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t$$

(g)  $(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-2)(s^2-2s+1)} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} \\ \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \end{aligned}$$



Multiplicando-se por  $(s-2)(s-1)^2$  obtemos

$$1 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-2)$$

Substituindo-se  $s = 1$  e  $s = 2$  obtemos  $C = -1$  e  $A = 1$ . Comparando-se os termos de grau 2 obtemos

$0 = A + B = 1 + B$ . Logo  $B = -1$ . Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = e^{2t} - e^t - te^t$$

(h)

$$\begin{aligned} & \left( s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) \right) + \\ & + 2(s Y(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 2s + 2) Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2 + 2s + 2)} \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

Multiplicando-se  $Y(s)$  por  $(s-1)(s^2 + 2s + 2)$  obtemos

$$1 = A(s^2 + 2s + 2) + (Bs + C)(s-1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  obtemos  $A = 1/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos

$$\begin{cases} 1/5 + B = 0 \\ 2/5 - C = 1 \end{cases}$$

que tem solução  $B = -1/5$  e  $C = -3/5$ . Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+3}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+3}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

De onde obtemos que a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t} \cos t - \frac{2}{5}e^{-t} \sin t.$$

- 2.2. (a)** A equação característica é  $r^2 - 6r + 8 = 0$ , que tem raízes  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 4$ .  
A equação homogênea correspondente tem solução geral

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}.$$

Uma solução particular da equação não homogênea é da forma  $y_p(t) = A \cos t + B \sin t$ . Substituindo-se  $y_p(t)$ ,  $y_p'(t)$  e  $y_p''(t)$  na equação:

$$(7A - 6B) \cos t + (6A + 7B) \sin t = \sin t$$

De onde obtemos  $A = 6/85$  e  $B = 7/85$ . A solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = \frac{6}{85} \cos t + \frac{7}{85} \sin t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

$$y'(0) = 0 = \frac{7}{85} + 2c_1 + 4c_2$$

$$y(0) = 0 = \frac{6}{85} + c_1 + c_2$$

$$c_1 = -1/10 \text{ e } c_2 = 1/34.$$

$$y(t) = \frac{6}{85} \cos t + \frac{7}{85} \operatorname{sen} t - \frac{1}{10} e^{2t} + \frac{1}{34} e^{4t}$$

$$(b) (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 6(sY(s) - y(0)) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 - 6s + 8) Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 6s + 8)(s^2 + 1)}$$

$$\frac{1}{(s^2 - 6s + 8)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Multiplicando-se por  $(s-2)(s-4)(s^2+1)$  obtemos

$$1 = A(s-4)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs+D)(s-2)(s-4)$$

Substituindo-se  $s = 2, 4, i$  obtemos

$$\begin{cases} 1 &= -10A \\ 1 &= 34B \\ 1+i0 &= (iC+D)(i-4) \\ &= (-C-4D) + i(-4C+D) \end{cases}$$

que tem solução  $A = -1/10$ ,  $B = 1/34$ ,  $C = 6/85$  e  $D = 7/85$ . Assim,

$$Y(s) = -\frac{1}{10} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{34} \frac{1}{s-4} + \frac{6}{85} \frac{s}{s^2+1} + \frac{7}{85} \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{10} e^{2t} + \frac{1}{34} e^{4t} + \frac{6}{85} \cos t + \frac{7}{85} \operatorname{sen} t$$

## 2.3.

## 2.4.

$$f'(t) = \cos at - a t \operatorname{sen} at$$

Aplicando a transformada de Laplace e usando o Teorema 3.6 de Derivação, já que  $f(t)$  é admissível e contínua e  $f'(t)$  é contínua, obtemos

$$sF(s) - f(0) = \frac{s}{s^2 + a^2} - a \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Isolando-se  $F(s)$

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Como

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} t \cos at \, dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} t |\cos at| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-st} t \, dt < \infty, \quad \text{para } s > 0,$$

então a transformada de Laplace  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$  está definida para  $s > 0$ .

$$2.5. \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 2$  obtemos

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = \frac{3}{(s+2)^2 + 9} + s + 6$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{3}{(s^2 + 4s + 13)^2} + \frac{s + 6}{s^2 + 4s + 13} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 3^2} \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^2}{[(s + 2)^2 + 9]^2} + \frac{s + 2 + 4}{(s + 2)^2 + 9} \\
 &= \frac{1}{18} \frac{2 \cdot 3^3}{[(s + 2)^2 + 9]^2} + \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9} + \\
 &\quad + \frac{4}{3} \frac{3}{(s + 2)^2 + 9}.
 \end{aligned}$$

De onde obtemos que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{18} e^{-2t} (\sin 3t - 3t \cos 3t) + e^{-2t} \cos 3t + \frac{4}{3} e^{-2t} \sin 3t.$$

Aqui usamos a tabela da página 345 e o 1º Teorema de Deslocamento:

$$\mathcal{L}[e^{bt}g(t)](s) = G(s - b),$$

onde  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$ .

- 2.6. (a)  $F'(s) = \frac{d}{ds} \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty (-t) e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(-tf(t))(s).$   
 (b)  $F^{(n)} = \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n} e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty (-t)^n e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s).$   
 (c)  $\mathcal{L}(-t \sin at)(s) = F'(s) = -\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$   
 $\mathcal{L}(t^2 \sin at)(s) = F''(s) = \frac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}, \text{ para } s > 0.$

### 3. Equações com Termo não Homogêneo Descontínuo (página 325)

3.1. (a)

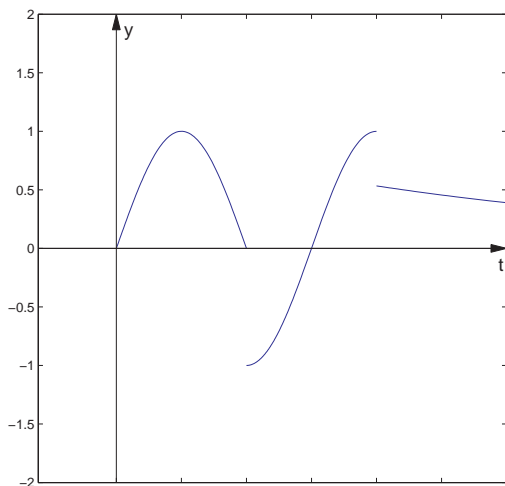
$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ -(t - 2), & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$f(t) = t - tu_1(t) - (t-2)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

(b)

$$f(t) = t - 2(t-1)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$



3.2. (a)  $f(t) = \text{sen } t - u_\pi(t) \text{sen } t + u_\pi(t) \cos t - u_{2\pi}(t) \cos t + u_{2\pi}(t)e^{-\frac{t}{10}}$

(b)  $f(t) = \text{sen } t + u_\pi(t)(\text{sen}(t - \pi) - \cos(t - \pi)) + u_{2\pi}(t)(-\cos(t - 2\pi) + e^{-\frac{\pi}{5}}e^{-\frac{t-2\pi}{10}})$

$$F(s) = \frac{1}{1+s^2} + e^{-\pi s}\left(\frac{1}{1+s^2} - \frac{s}{1+s^2}\right) + e^{-2\pi s}\left(-\frac{s}{1+s^2} + e^{-\frac{\pi}{5}}\frac{1}{s+\frac{1}{10}}\right)$$

3.3.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ -\cos t, & \pi/2 \leq t < 3\pi/2 \\ 0, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \cos t - u_{\pi/2}(t) \cos t - u_{\pi/2}(t) \cos t + u_{3\pi/2}(t) \cos t \\
 &= \cos t - 2u_{\pi/2}(t) \cos[(t - \pi/2) + \pi/2] \\
 &\quad + u_{3\pi/2}(t) \cos[(t - 3\pi/2) + 3\pi/2] \\
 &= \cos t + 2u_{\pi/2}(t) \sin(t - \pi/2) + u_{3\pi/2}(t) \sin(t - 3\pi/2) \\
 F(s) &= \frac{s}{1+s^2} + 2e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{1}{1+s^2} + e^{-3\pi s/2} \frac{1}{1+s^2}
 \end{aligned}$$

3.4. (a)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s}$  Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 1) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s(s^2+1)} \\
 &= \frac{1}{s^2+1} + H(s) - e^{-\pi s/2} H(s),
 \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

$$y(t) = \sin t + h(t) - h(t - \pi/2) u_{\pi/2}(t).$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $s(s^2 + 1)$  obtemos

$$1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$  e  $s = i$

$$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = (Bi + C)i = -B + Ci \end{cases}$$

De onde obtemos  $A = 1$ . Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos  $B = -1$  e  $C = 0$ .

Assim,

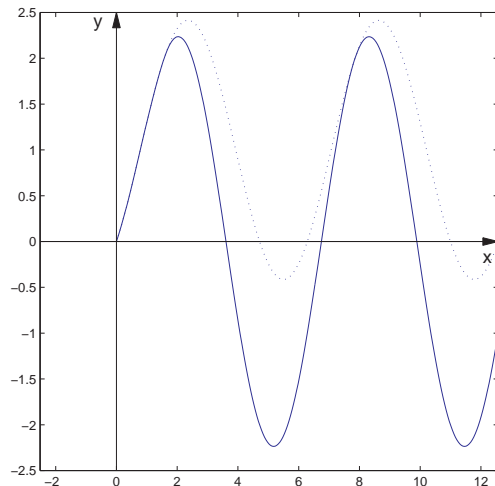
$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é  $H(s)$  é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \sin t + h(t) - h(t - \pi/2)u_{\pi/2}(t) = 1 - \cos t + \sin t - u_{\pi/2}(t)(1 - \sin t).$$



$$(b) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 2s + 2) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s} + 1$$



Assim,

$$Y(s) = 2 \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$= (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})H(s) + \frac{1}{(s+1)^2 + 1},$$

em que

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$y(t) = h(t - \pi)u_{\pi}(t) - h(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t} \sin t.$$

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2}.$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $s(s^2 + 2s + 2)$  obtemos

$$2 = A(s^2 + 2s + 2) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$  obtemos  $A = 1$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 1 + B \\ 0 &= 2A + C = 2 + C \end{cases}$$

que tem solução  $B = -1$  e  $C = -2$ . Assim,

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 1}$$

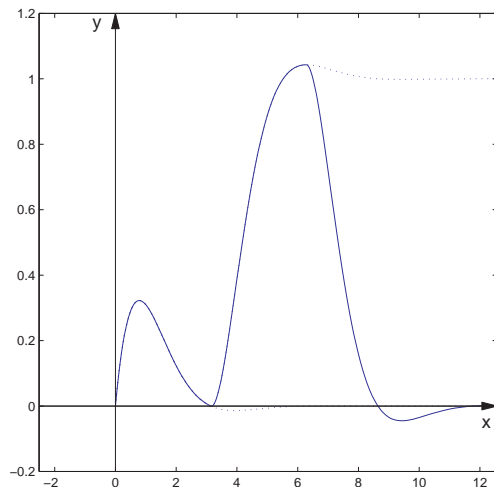
$$= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é  $H(s)$  é

$$h(t) = 1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = h(t - \pi)u_{\pi}(t) - h(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t} \sin t.$$



$$(c) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s} \frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 4) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= H(s) - e^{-2\pi s} H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t)h(t - 2\pi)$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Multiplicando-se por  $(s^2 + 1)(s^2 + 4)$ :

$$1 = (As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)$$

Substituindo-se  $s = i, 2i$

$$\begin{cases} 1 = (iA + B)3 \\ 1 = (2iC + D)(-3) \end{cases}$$

Como  $A, B, C$  e  $D$  são reais, comparando-se as partes real e imaginária obtemos

$$\begin{cases} 1 = 3B \\ 0 = 3A \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 1 = -3D \\ 0 = -6C \end{cases}$$

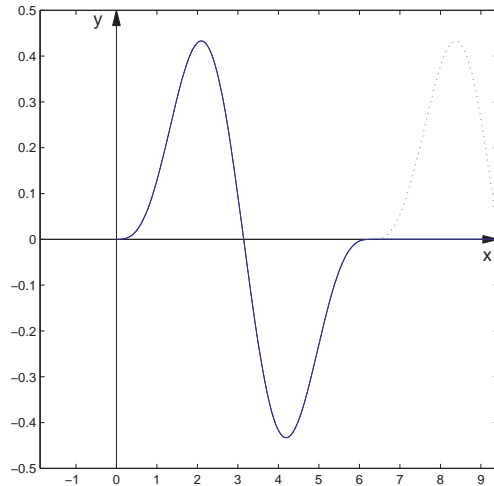
De onde obtemos a solução  $A = 0, B = 1/3, C = 0$  e  $D = -1/3$ .

Assim,

$$H(s) = \frac{1/3}{s^2 + 1} + \frac{-1/3}{s^2 + 4}$$

$$h(t) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t$$

$$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t)h(t - 2\pi) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t - u_{2\pi}(t)\left(\frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t\right)$$



(d)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+1}$  Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 4) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= H(s) + e^{-\pi s} H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t - \pi)$$

Do exercício anterior temos que

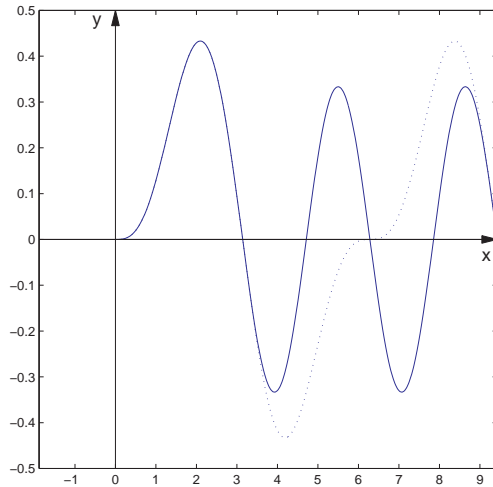
$$H(s) = \frac{1/3}{s^2 + 1} + \frac{-1/3}{s^2 + 4}$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t$$

e portanto

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t - \pi) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t - u_\pi(t) \left( \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{6} \sin 2t \right)$$



- (e)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$   
 Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 3s + 2) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} - \frac{e^{-10s}}{s(s^2 + 3s + 2)} = H(s) - e^{-10s}H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{10}(t)h(t - 10).$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Multiplicando  $H(s)$  por  $s(s^2 + 3s + 2)$  obtemos

$$1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

Substituindo-se  $s = 0, -1, -2$  obtemos

$$\begin{cases} 1 &= 2A \\ 1 &= -B \\ 1 &= 2C \end{cases}$$

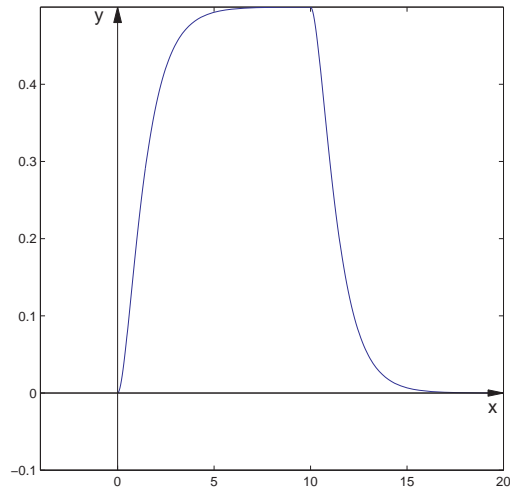
que tem solução  $A = 1/2$ ,  $B = -1$  e  $C = 1/2$ .

Assim,

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = h(t) - u_{10}(t)h(t-10)$$



$$(f) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 3s + 2) Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 3s + 2)} = Y_1(s) + e^{-2s} H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} \text{ e } Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2).$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = Y_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Multiplicando  $Y_1(s)$  por  $(s+1)(s+2)$ :

$$1 = A(s+2) + B(s+1)$$

Substituindo-se  $s = -1, -2$  obtemos  $A = 1$  e  $B = -1$ . Assim,

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

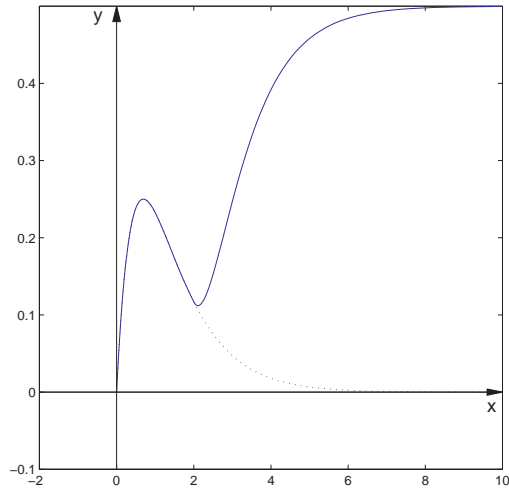
$$y_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Do exercício anterior

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2) = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)h(t-2)$$



(g)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s}$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 1) Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$= e^{-3\pi s} H(s) + \frac{1}{s^2+1},$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$y(t) = \text{sen } t + h(t - 3\pi)u_{3\pi}(t).$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$$



Multiplicando-se  $H(s)$  por  $s(s^2 + 1)$  obtemos

$$1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$  e  $s = i$

$$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = (Bi + C)i = -B + Ci \end{cases}$$

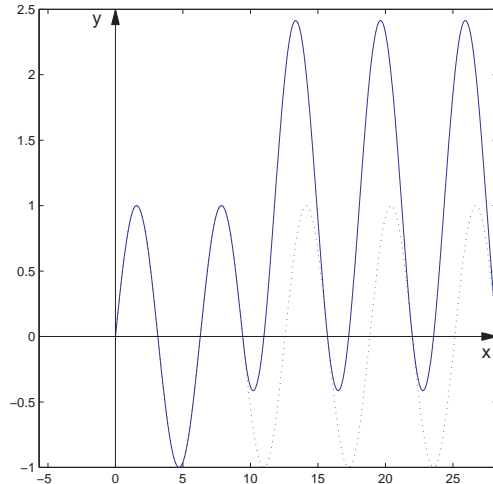
De onde obtemos  $A = 1$ . Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos  $B = -1$  e  $C = 0$ . Assim,

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é  $H(s)$  é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

$$y(t) = \sin t + h(t - 3\pi)u_{3\pi}(t) = \sin t + u_{3\pi}(t)[1 - \cos(t - 3\pi)]$$



$$(h) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + s + \frac{5}{4}) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+s+\frac{5}{4})} + e^{-\pi s} \frac{1}{(s^2+1)(s^2+s+\frac{5}{4})}$$

$$= H(s) + e^{-\pi s} H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+s+\frac{5}{4})}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+s+\frac{5}{4})} = \frac{4}{(s^2+1)(4s^2+4s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+s+\frac{5}{4}}$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $(s^2+1)(4s^2+4s+5)$ :

$$4 = (As+B)(4s^2+4s+5) + (Cs+D)(s^2+1) \quad (3.15)$$

Substituindo-se  $s = i$  obtemos

$$\begin{aligned} 4 &= (Ai+B)(-4+4i+5) \\ &= (-4A+B) + (A+4B)i \end{aligned}$$

Comparando-se as partes real e imaginária da equação acima obtemos

$$\begin{cases} 4 &= -4A+B \\ 0 &= A+4B \end{cases}$$

Resolvendo-se os sistemas acima obtemos a solução  $A = -16/17$ ,  $B = 4/17$ . Comparando os termos de grau 3 e de grau zero de (3.15) obtemos

$$0 = 4C + 4A, \quad 4 = 4D + 5B,$$

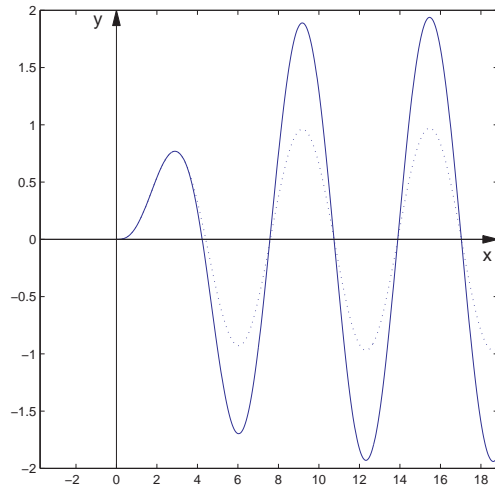
de onde obtemos

$$C = -A = 16/17 \text{ e } D = 1 - 5B/4 = 12/17.$$

Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{4}{17} \left( \frac{-4s+1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{s^2+s+\frac{5}{4}} \right) \\ &= \frac{4}{17} \left( -4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{(s+1/2)^2+1} \right) \\ &= \frac{4}{17} \left( -4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+3/4}{(s+1/2)^2+1} \right) \\ &= \frac{4}{17} \left( -4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1} + \frac{1}{(s+1/2)^2+1} \right) \\ h(t) &= \\ \frac{4}{17} \left( -4 \cos t + \sin t + 4e^{-t/2} \cos t + e^{-t/2} \sin t \right) \end{aligned}$$

$$y(t) = h(t) + u_{\pi}(t)h(t - \pi)$$



$$(i) \quad (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = 2 \frac{e^{-\pi s}}{s} - 2 \frac{e^{-3\pi s}}{s}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 4) Y(s) = 2 \frac{e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}}{s}$$

Assim,

$$Y(s) = 2 \frac{e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}}{s(s^2 + 4)}$$

$$= (e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}) H(s),$$

em que

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

$$y(t) = u_{\pi}(t)h(t - \pi) - u_{3\pi}(t)h(t - 3\pi).$$

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}.$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $s(s^2 + 4)$  obtemos

$$2 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$ ,  $2i$  obtemos

$$\begin{cases} 2 &= 4A \\ 2 + i0 &= (2iB + C)2i = (-4B) + i(2C) \end{cases}$$

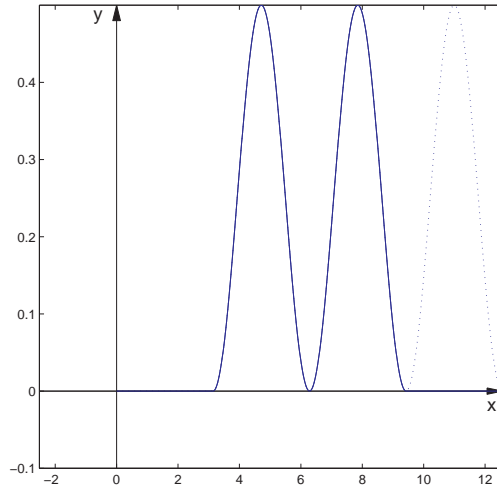
que tem solução  $A = 1/2$ ,  $B = -1/2$  e  $C = 0$ . Assim,

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 4}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é  $H(s)$  é

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$$

$$y(t) = u_{\pi}(t)h(t - \pi) - u_{3\pi}(t)h(t - 3\pi)$$



(j)

$$f(t) = e^t - u_2(t)e^t = e^t - u_2(t)e^{(t-2)+2} = e^t - e^2 u_2(t)e^{t-2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+4)} - e^2 \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s^2+4)} \\ &= H(s) - e^2 e^{-2s} H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}.$$

$$H(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $(s-1)(s^2+4)$ :

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  obtemos  $A = 1/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os termos de grau 0 obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1/5 + B = 0 \\ 4/5 - C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução  $A = 1/5$ ,  $B = -1/5$  e  $C = -1/5$ . Assim,

$$H(s) = \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{s^2+4}$$

$$h(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - e^2 u_2(t) h(t-2)$$

$$f(t) = e^{2t}(1 - u_1(t)) = e^{2t} - e^2 e^{2(t-1)} u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2}$$

(k)

$$\begin{aligned} & \left( s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \right) \\ & - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} - e^2 \frac{e^{-s}}{(s-1)^2(s-2)} \\ &= H(s) - e^2 e^{-s} H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)}.$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por  $(s-2)(s-1)^2$  obtemos

$$1 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-2)$$

Substituindo-se  $s = 1$  e  $s = 2$  obtemos  $C = -1$  e  $A = 1$ . Comparando-se os termos de grau 2 obtemos  $0 = A + B = 1 + B$ , de onde obtemos  $B = -1$ .

Assim,

$$H(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$h(t) = e^{2t} - e^t - te^t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - e^2 u_1(t) h(t-1)$$

(1)

$$f(t) = e^t(1 - u_1(t)) = e^t - ee^{t-1}u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e \frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$\begin{aligned} & \left( s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \right) \\ & + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1}{s-1} - e \frac{e^{-s}}{s-1} \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-1} - e \frac{e^{-s}}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)} \\ &\quad - e \frac{e^{-s}}{(s^2+2s+2)(s-1)} \\ &= H(s) - ee^{-s}H(s) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}, \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} \end{aligned}$$



Multiplicando-se  $H(s)$  por  $(s-1)(s^2+2s+2)$  obtemos

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se  $s = 1$  obtemos  $A = 1/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos

$$\begin{cases} 1/5 + B = 0 \\ 2/5 - C = 1 \end{cases}$$

que tem solução  $B = -1/5$  e  $C = -3/5$ . Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+3}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+3}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

Pelo item anterior temos que

$$h(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t} \cos t - \frac{2}{5}e^{-t} \sin t.$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - eu_1(t)h(t-1)$$

$$(m) \quad f(t) = e^{-2t} \sin 3t - u_\pi(t)e^{-2t} \sin 3t = e^{-2t} \sin 2t + u_\pi(t)e^{-2\pi}e^{-2(t-\pi)} \sin 3(t-\pi). \\ (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = (1 + e^{-2\pi}e^{-\pi s}) \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 2$  obtemos

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = (1 + e^{-2\pi}e^{-\pi s}) \frac{3}{(s+2)^2+9} + s + 6$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= (1 + e^{-2\pi} e^{-\pi s}) \frac{3}{(s^2 + 4s + 13)^2} + \frac{s + 6}{s^2 + 4s + 13} \\ &= (1 + e^{-2\pi} e^{-\pi s}) H(s) + G(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{em que } H(s) &= \frac{3}{(s^2 + 4s + 13)^2} = \frac{1}{2 \cdot 3^2} \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^2}{[(s+2)^2 + 9]^2} \\ G(s) &= \frac{s+6}{s^2+4s+13} = \frac{s+2+4}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{4}{3} \frac{3}{(s+2)^2+9} \end{aligned}$$

Logo

$$h(t) = \frac{1}{18} e^{-2t} (\sin 3t - 3t \cos 3t)$$

$$g(t) = e^{-2t} \cos 3t + \frac{4}{3} e^{-2t} \sin 3t$$

De onde obtemos que a solução do PVI é

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) + e^{-2\pi} u_{\pi}(t) h(t - \pi) + g(t) = \\ &= \frac{1}{18} e^{-2t} (\sin 3t - 3t \cos 3t) + \frac{e^{-2t}}{18} u_{\pi}(t) (\sin 3(t - \pi) - 3(t - \pi) \cos 3(t - \pi)) + e^{-2t} \cos 3t + \\ &+ \frac{4}{3} e^{-2t} \sin 3t. \end{aligned}$$

#### 4. Transformada de Laplace do Delta de Dirac (página 335)

4.1. (a)  $(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = e^{-2\pi s} \cos(2\pi)$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 1) Y(s) = e^{-2\pi s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = u_{2\pi}(t) \sin(t - 2\pi) + \sin t = (u_{2\pi}(t) + 1) \sin t.$$

(b)  $(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = ee^{-s}$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 2s + 2) = ee^{-s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{ee^{-s}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{ee^{-s}}{(s+1)^2 + 1} = ee^{-s}G(s),$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \Rightarrow g(t) = e^{-t} \sin t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = eu_1(t)e^{-t+1} \sin(t-1) = e^{-t+2} \sin(t-1)u_1(t)$$

(c)

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = e^2e^{-2s}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 + 4)Y(s) = e^2e^{-2s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^2e^{-2s}}{s^2 + 4} = e^2e^{-2s}G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{e^2}{2} u_2(t) \sin(2(t-2))$$

(d)

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = e^2 e^{-s}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  obtemos

$$(s^2 - 2s + 1) Y(s) = e^2 e^{-s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^2 e^{-s}}{(s-1)^2} = e^2 e^{-s} G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow g(t) = te^t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^2 u_1(t)(t-1)e^{t-1} = (t-1)e^{t+1} u_1(t)$$

(e)

$$\begin{aligned} f(t) &= \delta(t-1) + u_3(t)t^2 \\ &= \delta(t-1) + u_3(t)((t-3)+3)^2 \\ &= \delta(t-1) + u_3(t)((t-3)^2 + 6(t-3) + 9) \end{aligned}$$

$$F(s) = e^{-s} + e^{-3s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s} \right)$$

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \\ + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= e^{-s} + \\ &+ e^{-3s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s} \right) \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$\begin{aligned}(s^2 + 2s + 2)Y(s) &= e^{-s} + e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right) + 1 \\ &= 1 + e^{-s} + e^{-3s}\frac{2 + 6s + 9s^2}{s^3}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}Y(s) &= (1 + e^{-s})\frac{1}{s^2 + 2s + 2} + e^{-3s}\frac{2 + 6s + 9s^2}{s^3(s^2 + 2s + 2)} \\ &= (1 + e^{-s})\frac{1}{(s+1)^2 + 1} + e^{-3s}H(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{2 + 6s + 9s^2}{s^3(s^2 + 2s + 2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 + 2s + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 + 6s + 9s^2 &= As^2(s^2 + 2s + 2) + Bs(s^2 + 2s + 2) + \\ &\quad + C(s^2 + 2s + 2) + (Ds + E)s^3 \\ &= (As^2 + Bs + C)(s^2 + 2s + 2) \\ &\quad + (Ds + E)s^3\end{aligned}\tag{3.16}$$

Substituindo-se  $s = 0$  obtemos  $C = 1$ .

Comparando-se os termos de grau 1 obtemos  $6 = 2C + 2B = 2 + 2B$ , de onde obtemos  $B = 2$ .

Comparando-se os termos de grau 2 obtemos  $9 = C + 2B + 2A = 5 + 2A$ , de onde obtemos  $A = 2$ .

Comparando-se os termos de grau 3 obtemos  $0 = E + B + 2A = E + 6$ , de onde obtemos  $E = -6$ .

Comparando-se os termos de grau 4 obtemos  $0 = D + A = D + 2$ , de onde obtemos  $D = -2$ .

Assim

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{-2s-6}{s^2+2s+2} \\
 &= \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{-2s-6}{(s+1)^2+1} \\
 &= \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^3} \\
 &\quad - 2 \left( \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$h(t) = 2 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - 2(e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t)$$

Como

$$Y(s) = (1 + e^{-s}) \frac{1}{(s+1)^2+1} + e^{-3s} H(s)$$

então

$$y(t) = e^{-t} \sin t + u_1(t) e^{-(t-1)} \sin(t-1) + u_3(t) h(t-3)$$

**4.2. (a)** Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 20Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}s}$$

Substituindo-se  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos

$$(s^2 + 4s + 20)Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}s} + 1$$

$$Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4s+20} + \frac{1}{s^2+4s+20} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}s} H(s) + H(s)$$

em que

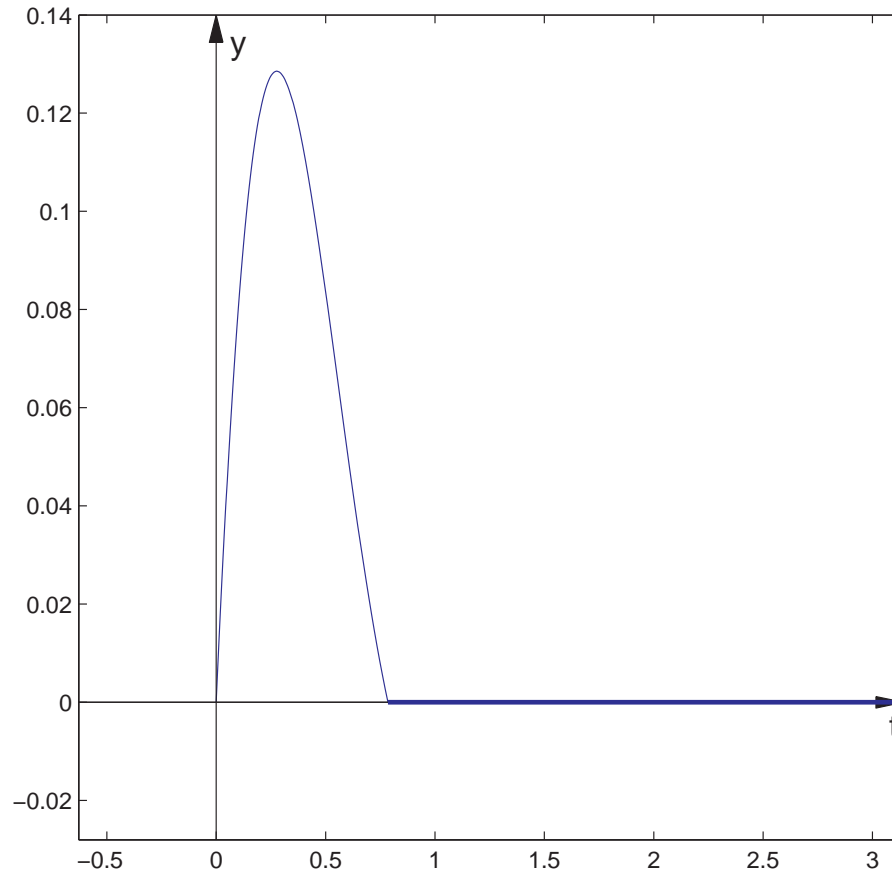
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 20} = \frac{1}{(s+2)^2 + 16}$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} \operatorname{sen} 4t$$

$$y(t) = e^{-\frac{\pi}{2}} u_{\frac{\pi}{4}}(t) h(t - \frac{\pi}{4}) + h(t)$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad y(t) &= e^{-\frac{\pi}{2}} u_{\frac{\pi}{4}}(t) \frac{1}{4} e^{-2(t-\frac{\pi}{4})} \operatorname{sen}(4t - \pi) + \frac{1}{4} e^{-2t} \operatorname{sen} 4t = (-u_{\frac{\pi}{4}}(t) + 1) \frac{1}{4} e^{-2t} \operatorname{sen} 4t = \\ &\begin{cases} \frac{1}{4} e^{-2t} \operatorname{sen} 4t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ 0, & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{aligned}$$



4.3. Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) = \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}$$

Substituindo-se  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  obtemos



$$(s^2 + s)Y(s) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s+1)} + \frac{e^{-2s}}{s(s+1)} = (1 + e^{-2s})H_1(s) + e^{-s}H_2(s)$$

em que

$$H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} \text{ e } H_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

Multiplicando-se por  $s(s+1)$  obtemos

$$1 = A(s+1) + Bs$$

Substituindo-se  $s = 0, -1$  obtemos  $A = 1$  e  $B = -1$ .

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

Multiplicando-se por  $s^2(s+1)$  obtemos

$$1 = As(s+1) + B(s+1) + Cs^2$$

Substituindo-se  $s = 0, -1$  obtemos  $C = 1$  e  $B = 1$ . Comparando-se os termos de grau 2 obtemos  $A = -1$ .

Assim,

$$h_1(t) = 1 - e^{-t}$$

$$h_2(t) = -1 + t + e^{-t}$$

$$y(t) = h_1(t) + u_2(t)h_1(t-1) + u_1(t)h_2(t-2)$$

## 5. Convolução (página 344)

### 5.1. (a)

$$F(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

Multiplicando  $F(s)$  por  $s(s+3)$  obtemos

$$1 = A(s+3) + Bs$$

Substituindo-se  $s = 0, -3$  obtemos  $A = 1/3$  e  $B = -1/3$ . Assim,

$$F(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+3}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t}$$

$$(b) \quad f(t) = \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = -\frac{1}{3} e^{-3\tau} \Big|_0^t = -\frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3}$$

5.2. (a)

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 - 4s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - 4s + 5}$$

Multiplicando-se  $H(s)$  por  $s(s^2 - 4s + 5)$ :

$$1 = A(s^2 - 4s + 5) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se  $s = 0$  obtemos  $A = 1/5$ . Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 1 obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A + C = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução  $B = -1/5$  e  $C = 4/5$ . Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{5} \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{s-4}{s^2-4s+5} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{s-4}{(s-2)^2+1} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{s-2}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{5} \frac{-2}{(s-2)^2+1} \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{2t} \cos t + \frac{2}{5} e^{2t} \sin t$$

(b)

$$h(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \tau e^{2\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} \tau e^{2\tau} d\tau &= e^{2\tau}(-\cos \tau) - 2 \int e^{2\tau}(-\cos \tau) d\tau \\ &= -e^{2\tau} \cos \tau + \\ &\quad + 2 \left( e^{2\tau} \operatorname{sen} \tau - 2 \int e^{2\tau} \operatorname{sen} \tau d\tau \right) \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{sen} \tau e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{5} \left( -e^{2\tau} \cos \tau + 2e^{2\tau} \operatorname{sen} \tau \right)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{5} \left( -e^{2\tau} \cos \tau + 2e^{2\tau} \operatorname{sen} \tau \right) \Big|_0^t \\ &= -\frac{1}{5} e^{2t} \cos t + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} e^{2t} \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} &\left( s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \right) + \\ &+ 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = F(s), \end{aligned}$$

em que  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ . Substituindo-se os valores  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = -3$  obtemos

$$(s^2 + 4s + 4) Y(s) = F(s) + 5 + 2s$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{F(s)}{s^2 + 4s + 4} + \frac{5 + 2s}{s^2 + 4s + 4} \\ &= \frac{F(s)}{(s + 2)^2} + \frac{5 + 2s}{(s + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{5 + 2s}{(s + 2)^2} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{(s + 2)^2}$$

Multiplicando-se por  $(s + 2)^2$  obtemos

$$5 + 2s = A(s + 2) + B$$

Substituindo-se  $s = -2$  obtemos  $1 = B$ . Comparando-se os termos de grau zero obtemos  $5 = 2A + B = 2A + 1$ , de onde obtemos  $2 = A$ . Assim,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s + 2)^2} + \frac{2}{s + 2} + \frac{1}{(s + 2)^2}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (e^{-2t}t * f)(t) + 2e^{-2t} + e^{-2t}t \\ &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)}(t-\tau)f(\tau)d\tau + 2e^{-2t} + e^{-2t}t \end{aligned}$$

**5.4.** Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2 + 4} Y(s) = Y(s)$$

$$Y(s) \left( 1 - \frac{2}{s^2 + 4} \right) = \frac{s + 1}{s^2}$$

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{(s+1)(s^2+4)}{s^2(s^2+2)} \\&= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2}\end{aligned}$$

Multiplicando-se por  $s^2(s^2+2)$  obtemos

$$(s+1)(s^2+4) = As(s^2+2) + B(s^2+2) + (Cs+D)s^2$$

Substituindo-se  $s = 0$  obtemos  $B = 2$ . Comparando-se os termos de grau 1 obtemos

$$4 = 2A.$$

Logo  $A = 2$ . Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 3 obtemos

$$1 = B + D = 2 + D,$$

$$1 = A + C = 2 + C.$$

Logo  $C = -1$  e  $D = -1$ . Assim

$$y(t) = 2 + 2t - [\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)]$$

---

---

## 4

# Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

---

---

Exemplo 4.1. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) &= \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) &= \lambda_2 x_2(t) \end{cases}$$

em que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Temos aqui um sistema de equações que envolvem derivadas das funções que são incógnitas. Neste caso as duas equações são desacopladas, isto é, podem ser resolvidas independentemente. A solução do sistema é

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ou escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 4.2.** Considere, agora, o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= \lambda x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= \lambda x_2(t) \end{cases}$$

Este sistema não é desacoplado, mas podemos resolver a segunda equação independentemente da primeira. A segunda equação tem solução

$$x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Substituindo  $x_2(t)$  na primeira equação obtemos a equação

$$x_1'(t) = \lambda x_1(t) + c_2 e^{\lambda t}$$

que tem solução

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Assim a solução do sistema acima é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Os sistemas anteriores foram resolvidos porque pelo menos uma das equações pode ser resolvida independentemente das outras.

Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots & \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma de uma equação diferencial matricial

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad (4.1)$$

em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Observe que o sistema do [Exemplo 4.1](#) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

e o do [Exemplo 4.2](#), como

$$\begin{bmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Para sistemas lineares é válido o seguinte teorema sobre existência e unicidade de soluções que será demonstrado somente ao final deste capítulo.



**Teorema 4.1 (Existência e Unicidade).** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{cases} \quad (4.2)$$

*Suponha que  $a_{ij}(t)$ ,  $f_i(t)$  sejam funções contínuas num intervalo  $I = [a, b]$  contendo  $t_0$ . Então o problema (4.2) tem uma única solução no intervalo  $I$ .*

Para os **sistemas de equações lineares homogêneos**, isto é, sistemas da forma (4.1) com  $F(t) = \vec{0}$ ,

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (4.3)$$

é válido o **princípio da superposição** que diz que se  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções de (4.3), então

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) \quad (4.4)$$

também o é, para todas as constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . Uma expressão da forma (4.4) é chamada **combinação linear** de  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ .

Vamos verificar que realmente  $X(t)$  dado por (4.4) é solução de (4.3).

$$\begin{aligned} X'(t) &= \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t) = \alpha A(t)X_1(t) + \beta A(t)X_2(t) \\ &= A(t)(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) = A(t)X(t), \end{aligned}$$

pois como  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções de (4.3), então  $X_1'(t) = A(t)X_1(t)$  e  $X_2'(t) = A(t)X_2(t)$ . Provamos o seguinte teorema.

**Teorema 4.2 (Princípio da Superposição).** Se  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções do sistema homogêneo

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

então,  $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ , para  $\alpha$  e  $\beta$  números, também o é.

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X^{(0)}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Vamos determinar condições sobre  $n$  soluções  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  para que existam constantes  $c_1, \dots, c_n$  tais que  $X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t)$  seja solução do problema de valor inicial (4.5).

Substituindo-se  $t = 0$  na solução

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t)$$

obtemos o sistema de equações lineares algébricas

$$c_1 X_1(0) + \dots + c_n X_n(0) = X^{(0)}$$

que pode ser escrito na forma

$$MC = X^{(0)}$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} X_1(0) & \dots & X_n(0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema  $M$  é invertível, então para toda condição inicial  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  o sistema  $MC = X^{(0)}$  tem uma única solução  $(c_1, \dots, c_n)$  (A solução é  $C = M^{-1}X^{(0)}$ ). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero

Portanto, se

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & \cdots & X_n(0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para toda condição inicial  $X^{(0)}$  existem constantes  $c_1, \dots, c_n$  tais que

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$$

é solução do problema de valor inicial (4.5).

**Teorema 4.3.** Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema  $X' = AX$  tais que

$$\det[ X_1(0) \ \dots \ X_n(0) ] \neq 0$$

Então para toda condição inicial  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X^{(0)} \end{cases}$$

tem uma única solução e é da forma

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t). \quad (4.6)$$

**Definição 4.1.** (a) Sejam  $X_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, X_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais. O determinante

$$W[X_1, \dots, X_n](t) = \det[ X_1(t) \ \dots \ X_n(t) ]$$

é chamado **wronskiano** das funções vetoriais  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  em  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) Se  $n$  soluções  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  do sistema  $X' = AX$  são tais que o seu wronskiano é diferente de zero no ponto  $t = 0$  dizemos que elas são **soluções fundamentais** do sistema homogêneo

$$X' = AX.$$

(c) Se  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são soluções fundamentais do sistema  $X' = AX$ , então a família de soluções

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t), \quad (4.7)$$

para constantes  $c_1, \dots, c_n$  é chamada **solução geral** de  $X' = AX$ .

Assim para encontrar a solução geral de um sistema homogêneo  $X' = AX$ , precisamos encontrar  $n$  soluções fundamentais, ou seja, soluções  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  tais que no ponto  $t = 0$

$$W[X_1, \dots, X_n](0) = \det \begin{bmatrix} X_1(0) & \cdots & X_n(0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

**Exemplo 4.3.** A solução encontrada do sistema do [Exemplo 4.1](#) é a solução geral pois ela pode ser escrita como

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

e

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

são tais que  $\det[X_1(0) \ X_2(0)] = \det(I_2) = 1 \neq 0$ .

**Exemplo 4.4.** A solução encontrada do sistema do [Exemplo 4.2](#) é a solução geral pois ela pode ser escrita como

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

e

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

são tais que  $\det[X_1(0) \ X_2(0)] = \det(I_2) = 1 \neq 0$ .

Os sistemas dos Exemplos 4.1 e 4.2 foram resolvidos porque pelo menos uma das equações pode ser resolvida independentemente das outras. O sistema do Exemplo 4.1 pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e o do Exemplo 4.2, como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Enquanto a matriz do primeiro sistema é diagonal a do segundo é “quase” diagonal. O estudo que faremos, a seguir, de sistemas de equações diferenciais se baseia em transformar o sistema em um no qual a sua matriz é diagonal ou “quase” diagonal.

## 4.1 A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{R}$

### 4.1.1 Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas

Vamos supor que existam matrizes  $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , com  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.8)$$

Substituindo-se (4.8) em (4.3) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \quad (4.9)$$

Fazendo a mudança de variável

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \quad (4.10)$$

a equação (4.9) pode ser escrita como

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \end{cases}$$

as equações podem ser resolvidas independentemente. Este sistema foi resolvido no [Exemplo 4.1 na página 396](#) e sua solução é

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ou escrito na forma matricial

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Assim, da mudança de variáveis (4.10), a solução da equação (4.3) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Como  $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ , então a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + w_1 c_2 e^{\lambda_2 t} \\ v_2 c_1 e^{\lambda_1 t} + w_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pelo Teorema 4.3 na página 402 esta é a solução geral do sistema, pois para as soluções

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & X_2(0) \end{bmatrix} = \det(P) \neq 0$$

e assim a solução de qualquer problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

pode ser obtida desta solução atribuindo-se valores adequados às constantes  $c_1$  e  $c_2$  como mostraremos a seguir.

Se são dadas as condições iniciais  $x_1(0) = x_1^{(0)}$  e  $x_2(0) = x_2^{(0)}$ , então para determinarmos  $c_1$  e  $c_2$  substituímos  $t = 0$  na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} v_1 c_1 + w_1 c_2 = x_1^{(0)} \\ v_2 c_1 + w_2 c_2 = x_2^{(0)} \end{cases}$$

#### 4.1.2 Sistema com $n$ Equações e $n$ Incógnitas

O que fizemos anteriormente pode ser estendido para uma sistema com  $n$  equações e  $n$  incógnitas.



Supondo que existam matrizes

$$P = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que  $V_j$  é a coluna  $j$  de  $P$ , com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.12)$$

Substituindo-se (4.12) em (4.3) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \quad (4.13)$$

Fazendo a mudança de variável

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \quad (4.14)$$

a equação (4.13) pode ser escrita como

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

as equações podem ser resolvidas independentemente. A solução deste sistema é

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}.$$

ou escrito na forma matricial

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Assim, da mudança de variáveis (4.14), a solução da equação (4.3) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Como  $P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]$ , então a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, \end{aligned}$$

pois pelo Teorema 4.3 na página 402, para as soluções

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda_1 t} V_1, \quad \dots, \quad X_n(t) = e^{\lambda_n t} V_n, \\ \det [X_1(0) \ \dots \ X_n(0)] &= \det(P) \neq 0. \end{aligned}$$

### 4.1.3 Como Encontrar as Matrizes $P$ e $D$

Vamos, agora, mostrar como determinar matrizes

$$P = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que  $V_j$  é a coluna  $j$  de  $P$ , com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.15)$$

Multiplicando à direita por  $P$  ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD. \quad (4.16)$$

Por um lado

$$AP = A [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] = [ AV_1 \quad AV_2 \quad \dots \quad AV_n ]$$

e por outro lado

$$PD = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = [ \lambda_1 V_1 \quad \lambda_2 V_2 \quad \dots \quad \lambda_n V_n ]$$

Assim, (4.16) pode ser reescrita como,

$$[ AV_1 \quad AV_2 \quad \dots \quad AV_n ] = [ \lambda_1 V_1 \quad \lambda_2 V_2 \quad \dots \quad \lambda_n V_n ].$$

Logo,

$$AV_j = \lambda_j V_j,$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Ou seja, as colunas de  $P$ ,  $V_j$ , e os elementos da diagonal de  $D$ ,  $\lambda_j$ , satisfazem a equação

$$AV = \lambda V.$$

Isto motiva a seguinte definição.

---

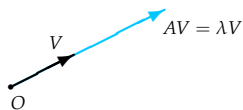
**Definição 4.2.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Um escalar  $\lambda$  é chamado **autovalor** de  $A$ , se existe um vetor *não nulo*

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que}$$

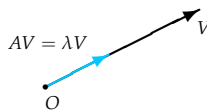
$$AV = \lambda V. \quad (4.17)$$

Um vetor *não nulo* que satisfaça (4.17), é chamado de **autovetor** de  $A$ .

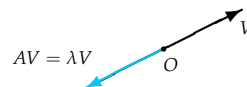
---



$$\lambda > 1$$



$$0 < \lambda < 1$$



$$\lambda < 0$$

Observe que, usando o fato de que a matriz identidade

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é tal que  $I_n V = V$ , a equação (4.17) pode ser escrita como

$$AV = \lambda I_n V,$$

ou

$$(A - \lambda I_n)V = \vec{0}. \quad (4.18)$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de  $\lambda$ , para os quais o sistema  $(A - \lambda I_n)V = \vec{0}$  tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz  $A$ .

**Proposição 4.4.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .*

(a) *Os autovalores de  $A$  são as raízes do polinômio*

$$p(t) = \det(A - t I_n) \quad (4.19)$$

(b) *Para cada autovalor  $\lambda$ , os autovetores associados a  $\lambda$  são os vetores não nulos da solução do sistema*

$$(A - \lambda I_n)X = \vec{0}. \quad (4.20)$$

**Definição 4.3.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . O polinômio*

$$p(t) = \det(A - t I_n) \quad (4.21)$$

*é chamado **polinômio característico de  $A$** .*

Já vimos que se uma matriz  $A$  é diagonalizável, então as colunas da matriz  $P$ , que faz a diagonalização, são autovetores associados a autovalores, que por sua vez são elementos da matriz diagonal  $D$ . Como a matriz  $P$  é invertível, estes  $n$  autovetores são LI. Vamos mostrar, a seguir, que se a matriz  $A$  tem  $n$  autovetores LI, então ela é diagonalizável.

**Teorema 4.5.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  que tem  $n$  autovetores LI  $V_1, \dots, V_n$  associados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Então as matrizes*

$$P = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \quad e \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

são tais que

$$A = PDP^{-1},$$

ou seja,  $A$  é diagonalizável.

**Demonstração.** Suponha que  $V_1, \dots, V_n$  são  $n$  autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Vamos definir as matrizes

$$P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como  $AV_j = \lambda_j V_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ , então

$$\begin{aligned} AP &= A [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] = [AV_1 \ AV_2 \ \dots \ AV_n] \\ &= [\lambda_1 V_1 \ \lambda_2 V_2 \ \dots \ \lambda_n V_n] = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD. \end{aligned}$$

Como  $V_1, \dots, V_n$  são LI, a matriz  $P$  é invertível. Assim, multiplicando a equação anterior por  $P^{-1}$  à direita obtemos

$$A = PDP^{-1}.$$

Ou seja, a matriz  $A$  é diagonalizável. ■

Assim, se uma matriz  $A$  é diagonalizável e  $A = PDP^{-1}$ , então os autovalores de  $A$  formam a diagonal de  $D$  e  $n$  autovetores linearmente independentes associados aos autovalores formam as colunas de  $P$ .

O resultado que vem a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [11], garante que se conseguirmos para cada autovalor, autovetores LI, então ao juntarmos todos os autovetores obtidos, eles continuarão sendo LI

**Proposição 4.6.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Se  $V_1^{(1)}, \dots, V_{n_1}^{(1)}$  são autovetores LI associados a  $\lambda_1$ ,  $V_1^{(2)}, \dots, V_{n_2}^{(2)}$  são autovetores LI associados a  $\lambda_2$ , ...,  $V_1^{(k)}, \dots, V_{n_k}^{(k)}$  são autovetores LI associados a  $\lambda_k$ , com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  distintos, então  $\{V_1^{(1)}, \dots, V_{n_1}^{(1)}, \dots, V_1^{(k)}, \dots, V_{n_k}^{(k)}\}$  é um conjunto LI*

**Exemplo 4.5.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t),$$

em que  $X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$  e  $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ .

Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ -4 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3.$$

Como os autovalores de  $A$  são as raízes de  $p(t)$ , temos que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ .



Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Para isto vamos resolver os sistemas  $(A - \lambda_1 I_2)Z = \vec{0}$  e  $(A - \lambda_2 I_2)Z = \vec{0}$ . Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, -2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 3$  acrescentado o vetor nulo. Agora,

$$(A - \lambda_2 I_2)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = -1$  acrescentado o vetor nulo.

Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Um gráfico mostrando diversas soluções aparecem na [Figura 4.1](#). Este tipo de gráfico, em que desenhamos no plano cartesiano curvas  $(x_1(t), x_2(t))$  soluções do sistema, é chamado **retrato de fase**. As curvas são chamadas **trajetórias**. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear  $X' = AX$ , em que os autovalores de  $A$  são reais não nulos com sinais contrários. Neste caso, dizemos que a origem é um **ponto de sela**.

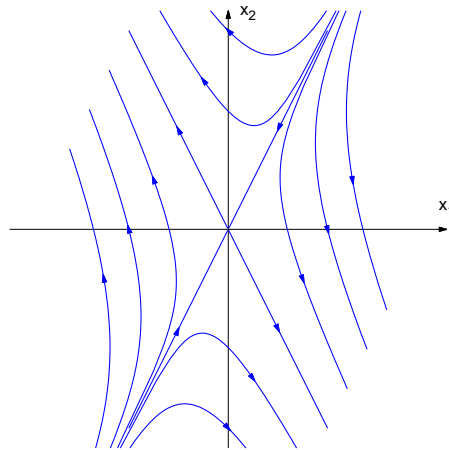


Figura 4.1 – Trajetórias do sistema do Exemplo 4.5

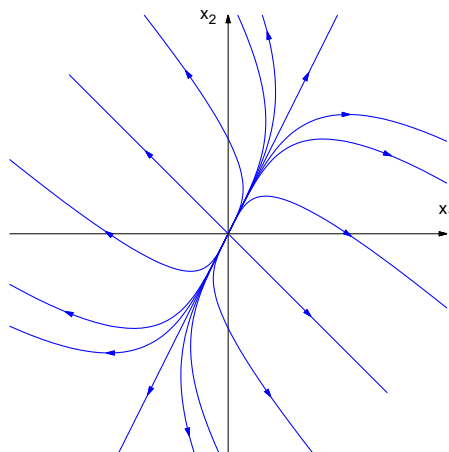


Figura 4.2 – Trajetórias do sistema do Exemplo 4.6

**Exemplo 4.6.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 3-t & -1 \\ -2 & 2-t \end{bmatrix} = (3-t)(2-t) - 2 = t^2 - 5t + 4.$$

Como os autovalores de  $A$  são as raízes de  $p(t)$ , temos que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 4$ .

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 4$ .

Para isto vamos resolver os sistemas  $(A - \lambda_1 I_2)Z = \vec{0}$  e  $(A - \lambda_2 I_2)Z = \vec{0}$ .

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 1$  acrescentado o vetor nulo. Podemos tomar o autovetor  $V = (1, 2)$ .

Agora,

$$(A - \lambda_2 I_2)Z = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = 4$  acrescentado o vetor nulo. Podemos tomar o autovetor  $W = (-1, 1)$ .

Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável e as matrizes

$$P = [V \ W] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O plano de fase com várias trajetórias é mostrado na [Figura 4.2](#). A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear  $X' = AX$ , em que os autovalores de  $A$  são reais e positivos. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó instável** ou **fonte**. No caso em que os autovalores de  $A$  são reais e negativos as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da [Figura 4.2](#). Neste caso, dizemos que a origem é um **nó atrator** ou **sumidouro**.

**Exemplo 4.7.** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema pode ser escrito como  $X' = AX$ , em que  $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . O

polinômio característico de  $A$  é

$$p(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} -3-t & 0 & 2 \\ -2 & -1-t & 2 \\ -4 & 0 & 3-t \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante em termos da 2ª coluna obtemos que

$$p(t) = (-1)^{(2+2)}(-1-t) \det \begin{bmatrix} -3-t & 2 \\ -4 & 3-t \end{bmatrix} = (-1-t)[(-3-t)(3-t)+8] = -(1+t)(t^2-1)$$

cujas raízes são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 1$  que são os autovalores de  $A$ .

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = -1$  são os vetores  $Z \neq \bar{0}$  que satisfazem

$AZ = \lambda_1 Z$ , ou seja,

$$(A - \lambda_1 I_3)Z = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & 2z & = & 0 \\ -4x & + & 4z & = & 0 \end{cases}$$

cujas matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

$-1 \times 1^\text{ª} \text{ linha} + 2^\text{ª} \text{ linha} \rightarrow 2^\text{ª} \text{ linha}$ $-2 \times 1^\text{ª} \text{ linha} + 3^\text{ª} \text{ linha} \rightarrow 3^\text{ª} \text{ linha}$
--

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a  $\lambda_1 = -1$  acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, \alpha, \beta) = \alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto  $V_1 = (1, 0, 1)$  e  $V_2 = (0, 1, 0)$  são autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda_1 = -1$ .

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = 1$  são os vetores  $Z \neq \vec{0}$  que satisfazem  $AZ = \lambda_2 Z$ , ou seja,

$$(A - \lambda_2 I_3)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -4x & & & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -1 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a  $\lambda_2 = 1$  acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha(1, 1, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Assim,  $W = (1, 1, 2)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = 1$ .

Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{R}$  e as matrizes

$$P = [V_1 \ V_2 \ W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema de equações diferenciais é dada por

$$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Substituindo  $t = 0$  na solução geral e usando a condição inicial obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 & + & c_3 & = & 0 \\ & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & & + & 2c_3 & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo obtemos  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  e  $c_3 = 0$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Exercícios (respostas na página 481)

1.1. Ache a solução geral do sistema de equações e desenhe o retrato de fase:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

$$(c) X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X$$

$$(d) X' = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$(e) X' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X$$

$$(f) X' = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X$$

1.2. Encontre a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2ax_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4ax_2(t) \end{cases}$$

1.3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \frac{dL}{dt} \\ \frac{dD}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ k & -k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} L(0) \\ D(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ D_0 \end{bmatrix}$$

em que  $L$  é o teor de material orgânico que pode ser aproveitado pelas bactérias como alimento e  $D$  é o déficit de oxigênio.

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial para  $k = 2$  e  $k_r = 3$ .

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial para  $k \neq k_r$ .

1.4. Dois tanques interligados nos leva ao problema de valor inicial.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

em que  $x$  e  $y$  são o desvios dos níveis de sal  $Q_1$  e  $Q_2$  dos seus respectivos pontos de equilíbrio.

- (a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.
- (b) Faça um esboço das trajetórias.

1.5. (a) Resolva o problema  $X' = AX$  em que

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- (b) No plano de fase, esboce a curva solução  $X(t)$  encontrada no item (a).

1.6. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X \text{ e } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1.7. Resolva o seguinte sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} X$$

**Comando do pacote GAAL:**

`>>fluxlin(A)` desenha algumas trajetórias que são soluções do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$ .

## 4.2 A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{C}$

### 4.2.1 Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas

Considere, novamente, um sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases}$$

em que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  com  $b$  ou  $c$  não nulos. Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t), \quad (4.22)$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Vamos supor, agora, que existam matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix},$$

tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.23)$$

Substituindo-se (4.23) em (4.22) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , obtemos o sistema

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= (\alpha + i\beta) y_1(t) \\ y_2'(t) &= (\alpha - i\beta) y_2(t) \end{cases}$$

Este sistema foi resolvido no [Exemplo 4.1 na página 396](#) e sua solução é

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \\ y_2(t) &= C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}. \end{aligned}$$

Assim a solução complexa da equação (4.22) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \\ C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \end{bmatrix}.$$

Como  $P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix}$ , então a solução geral complexa é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \\ C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \end{bmatrix} = \\ &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são complexas. Estamos interessados em encontrar a solução geral real. Para isto vamos escrever a solução complexa em termos de soluções reais. Defina

$$X_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad X_2(t) = \operatorname{Im} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \right\}$$

então  $X(t)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1(X_1(t) + iX_2(t)) + C_2(X_1(t) - iX_2(t)) \\ &= (C_1 + C_2)X_1(t) + i(C_1 - C_2)X_2(t) \end{aligned}$$

Logo a solução geral complexa pode ser escrita em termos de soluções reais. Tomando  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$  obtemos a solução  $X_1(t)$  e tomando  $C_1 = -C_2 = \frac{1}{2i}$  obtemos a solução  $X_2(t)$ .

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & X_2(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \frac{i}{2} \det(P) \neq 0,$$

pois

$$\begin{aligned} \det(P) &= \det \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} w_1 & v_1 - iw_1 \\ w_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & w_1 \\ w_2 & w_2 \end{bmatrix} \\ &= -2i \det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo pelo [Teorema 4.3 na página 402](#) a solução geral (real) do sistema é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \\ &= c_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \right\} + c_2 \operatorname{Im} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 e^{\alpha t} \left( \cos \beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} \beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{\alpha t} \left( \cos \beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} \beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

4.2.2 Sistema com  $n$  Equações e  $n$  Incógnitas

Supondo que existam matrizes

$$P = [ Z_1 \quad \bar{Z}_1 \quad \dots \quad Z_k \quad \bar{Z}_k \quad V_{2k+1} \quad \dots \quad V_n ] \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_k & 0 & \\ \vdots & & & 0 & \bar{\lambda}_k & \vdots \\ & & & & \lambda_{2k+1} & \ddots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  e  $\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.25)$$

A solução geral complexa é

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \begin{bmatrix} Z_1 & \bar{Z}_1 & \dots & Z_k & \bar{Z}_k & V_{2k+1} & \dots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\
 &= C_1 e^{\lambda_1 t} Z_1 + C_2 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{Z}_1 + \dots + C_{2k-1} e^{\lambda_k t} Z_1 + C_{2k} e^{\bar{\lambda}_k t} \bar{Z}_1 + \\
 &\quad + C_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_n + \dots + C_n e^{\lambda_n t} V_n \\
 &= (C_1 + C_2) \operatorname{Re}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\} + i(C_1 - C_2) \operatorname{Im}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\} \\
 &\quad + \dots + (C_{2k-1} + C_{2k}) \operatorname{Re}\{e^{\lambda_k t} Z_k\} + i(C_{2k-1} - C_{2k}) \operatorname{Im}\{e^{\lambda_k t} Z_k\} + \\
 &\quad + c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_n + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n
 \end{aligned}$$

A solução geral real é

$$\begin{aligned}
 X(t) &= c_1 \operatorname{Re}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\} + c_2 \operatorname{Im}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\} + \dots + c_{2k-1} \operatorname{Re}\{e^{\lambda_k t} Z_k\} + c_{2k} \operatorname{Im}\{e^{\lambda_k t} Z_k\} + \\
 &\quad + c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_{2k+1} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n
 \end{aligned}$$

pois pelo [Teorema 4.3 na página 402](#), para

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= \operatorname{Re}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\}, \quad X_2(t) = \operatorname{Im}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\}, \dots, \\
 X_{2k-1} &= \operatorname{Re}\{e^{\lambda_k t} Z_k\}, \quad X_{2k} = \operatorname{Im}\{e^{\lambda_k t} Z_k\}, \quad X_{2k+1} = e^{\lambda_{2k+1} t} V_{2k+1}, \dots, \quad X_n(t) = e^{\lambda_n t} V_n, \\
 \det \begin{bmatrix} X_1(0) & \dots & X_n(0) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{Z_1\} & \operatorname{Im}\{Z_1\} & \dots & \operatorname{Re}\{Z_k\} & \operatorname{Im}\{Z_k\} & V_{2k+1} & \dots \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{i}{2}\right)^k \det(P) \neq 0
 \end{aligned}$$



### 4.2.3 Como Encontrar as Matrizes $P$ e $D$

Vamos, agora, mostrar como determinar matrizes

$$P = [ Z_1 \quad \bar{Z}_1 \quad \dots \quad Z_k \quad \bar{Z}_k \quad V_{2k+1} \quad \dots \quad V_n ] \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_k & 0 & \\ \vdots & & & 0 & \bar{\lambda}_k & \vdots \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & & \dots & & & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  e  $\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.26)$$

Vamos fazer exatamente a mesma coisa que fizemos para o caso em que a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{R}$ . Multiplicando à direita por  $P$  ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD. \quad (4.27)$$

Por um lado

$$\begin{aligned} AP &= A [ Z_1 \quad \bar{Z}_1 \quad \dots \quad Z_k \quad \bar{Z}_k \quad V_{2k+1} \quad \dots \quad V_n ] \\ &= [ AZ_1 \quad A\bar{Z}_1 \quad \dots \quad AZ_k \quad A\bar{Z}_k \quad AV_{2k+1} \quad \dots \quad AV_n ] \end{aligned}$$

e por outro lado

$$PD = [ \lambda_1 Z_1 \quad \bar{\lambda}_1 \bar{Z}_1 \quad \dots \quad \lambda_k Z_k \quad \bar{\lambda}_k \bar{Z}_k \quad \lambda_{2k+1} V_{2k+1} \quad \dots \quad \lambda_n V_n ].$$

Assim, (4.27) pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} AZ_1 & A\bar{Z}_1 & \dots & AZ_k & A\bar{Z}_k & AV_{2k+1} & \dots & AV_n \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 Z_1 & \bar{\lambda}_1 \bar{Z}_1 & \dots & \lambda_k Z_k & \bar{\lambda}_k \bar{Z}_k & \lambda_{2k+1} V_{2k+1} & \dots & \lambda_n V_n \end{bmatrix}$$

Comparando coluna a coluna obtemos que

$$AZ_j = \lambda_j Z_j, \quad (4.28)$$

$$A\bar{Z}_j = \bar{\lambda}_j \bar{Z}_j, \quad (4.29)$$

para  $j = 1, \dots, k$  e

$$AV_j = \lambda_j V_j,$$

para  $j = 2k + 1, \dots, n$ .

Ou seja, as colunas de  $P$  e os elementos da diagonal de  $D$  satisfazem a equação

$$AZ = \lambda Z. \quad (4.30)$$

em que o escalar complexo  $\lambda$  e o vetor complexo  $Z$  são incógnitas.

O escalar complexo  $\lambda$  é chamado **autovalor (complexo)** da matriz  $A$  e o vetor *não nulo*  $Z$  que satisfaça (4.30), é chamado de **autovetor (complexo)** de  $A$ .

Observe que a equação (4.30) pode ser escrita como

$$AZ = \lambda I_n Z$$

ou

$$(A - \lambda I_n)Z = \bar{0}. \quad (4.31)$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de  $\lambda$ , para os quais o sistema  $(A - \lambda I_n)Z = \bar{0}$  tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

Observe que a equação (4.29) é o conjugado da equação (4.28). Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores complexos de uma matriz  $A$ .

(a) Os autovalores de  $A$  são as raízes do polinômio

$$p(t) = \det(A - tI_n) \quad (4.32)$$

(b) Para cada autovalor  $\lambda$ , os autovetores associados a  $\lambda$  são os vetores não nulos da solução do sistema

$$(A - \lambda I_n)Z = \vec{0}. \quad (4.33)$$

(c) Os autovetores associados ao autovalor conjugado  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  são os conjugados dos autovetores associados a  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

**Exemplo 4.8.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma  $X'(t) = AX(t)$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico da matriz  $A$  é  $p(t) = \det(A - tI_2) = (-1 - t)(1 - t)^2 + 2 = t^2 + 1$  cujas raízes são  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$ . Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = i$ . Para isto vamos resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I_2)Z = \vec{0}$ .

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-i)x + 2y = 0 \\ -x + (1-i)y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{((1-i)\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \{\alpha(1-i, 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = i$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $Z = (1-i, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = i$ . E  $\bar{Z} = (1+i, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$ .

Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável em  $\mathbb{C}$  e as matrizes

$$P = [Z \bar{Z}] = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + c_2 \operatorname{Im} \left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 \left( \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 \left( \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na [Figura 4.3](#). A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear  $X' = AX$ , em que os autovalores de  $A$  são complexos com a parte real igual a zero. Neste caso, dizemos que a origem é um **centro**.

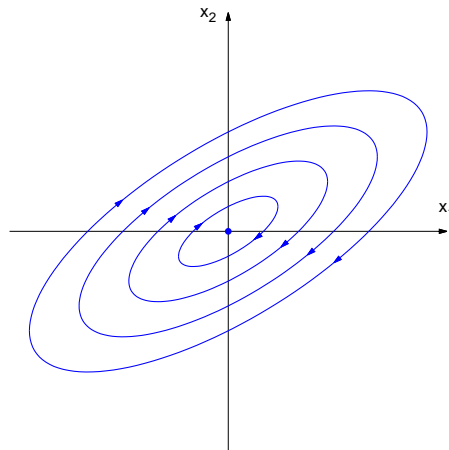


Figura 4.3 – Trajetórias do sistema do Exemplo 4.8

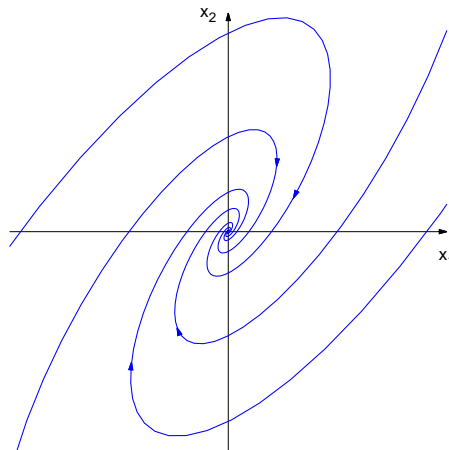


Figura 4.4 – Trajetórias do sistema do Exemplo 4.9

**Exemplo 4.9.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t), \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de  $A$  é  $p(t) = \det(A - tI_2) = (-3 - t)(1 - t) + 8 = t^2 + 2t + 5$  cujas raízes são  $\lambda_1 = -1 + 2i$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - 2i$ . Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = -1 + 2i$ . Para isto vamos resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0}$ .

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 - 2i & 2 \\ -4 & 2 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - 2i)x + 2y = 0 \\ -4x + (2 - 2i)y = 0 \end{cases}$$

cujas solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, (1 + i)\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = -1 + 2i$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $Z = (1, 1 + i)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = -1 + 2i$ . Temos também que  $\bar{Z} = (1, 1 - i)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - 2i$ .

Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{C}$  e as matrizes

$$P = [Z \bar{Z}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + i & 1 - i \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2i & 0 \\ 0 & -1 - 2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} + c_2 \operatorname{Im} \left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Plano de fase contendo diversas trajetórias aparecem na [Figura 4.4](#). A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear  $X' = AX$ , em que os autovalores de  $A$  são complexos com a parte real negativa. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco atrator** ou **sumidouro espiral**. Se os autovalores de  $A$  fossem complexos com a parte real positiva as trajetórias seriam espirais crescentes percorridos no mesmo sentido às da [Figura 4.4](#). Neste caso, diríamos que a origem era um **foco instável** ou **fonte espiral**.

**Exemplo 4.10.** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  é

$$p(t) = \det(A - t I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 2 \\ 0 & -1-t & 1 \\ 0 & -1 & -1-t \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante em termos da 1ª coluna obtemos que

$$p(t) = (-1)^2(2-t) \det \begin{bmatrix} -1-t & 1 \\ -1 & -1-t \end{bmatrix} = (2-t)[(-1-t)^2 + 1] = (2-t)(t^2 + 2t + 2)$$

cujas raízes são  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1 + i$  e  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -1 - i$  que são os autovalores de  $A$ .

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 2$  são os vetores  $Z \neq \bar{0}$  que satisfazem



$AZ = \lambda_1 Z$ , ou seja,

$$(A - \lambda_1 I_3)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

$$-\frac{1}{3} \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 \end{array} \right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a  $\lambda_1 = 2$  acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Portanto  $V = (1, 0, 0)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = 2$ .

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = -1 + i$  são os vetores  $Z \neq \vec{0}$  que satisfazem  $AZ = \lambda_2 Z$ , ou seja,

$$(A - \lambda_2 I_3)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-i)x + y + 2z = 0 \\ -iy + z = 0 \\ -y - iz = 0 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{array} \right]$$

$$i \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a  $\lambda_2 = -1 + i$  acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_2 = \left\{ \left( \alpha \frac{-1-2i}{3-i}, \alpha, i\alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \left( \alpha \left( -\frac{1}{10} - i\frac{7}{10} \right), \alpha, i\alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = -1 + i$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $Z = (-1 - 7i, 10, 10i)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = -1 + i$ . Temos também que  $\bar{Z} = (-1 + 7i, 10, -10i)$  é um autovetor associado a  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -1 - i$ .

Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{C}$  e as matrizes

$$P = [V \ Z \ \bar{Z}] = \begin{bmatrix} 1 & -1-7i & -1+7i \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10i & -10i \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral real do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \operatorname{Re} \left\{ e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} -1-7i \\ 10 \\ 10i \end{bmatrix} \right\} + c_3 \operatorname{Im} \left\{ e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} -1-7i \\ 10 \\ 10i \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left( \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad + c_3 e^{-t} \left( \cos t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Substituindo-se  $t = 0$  na solução geral e usando a condição inicial obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \\ \phantom{c_1} 10c_2 = 1 \\ \phantom{c_1} 10c_3 = 0 \end{cases}$$

Obtemos  $c_1 = 1/10$ ,  $c_2 = 1/10$  e  $c_3 = 0$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = \frac{1}{10} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} e^{-t} \left( \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right)$$

## Exercícios (respostas na página 495)

2.1. Ache a solução geral do sistema de equações dado e desenhe o retrato de fase correspondente:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 5x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

$$(c) X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} X$$

$$(d) X' = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$(e) X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X$$

2.2. Ache a solução geral do sistema de equações dado:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) \end{cases}$$

para  $a \neq \pm 4$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = ax_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

para  $a \neq 1/2$

$$(c) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = ax_1(t) + x_2(t) \end{cases} \text{ para } a \neq 0$$

2.3. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais  $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$ .

(a) Encontre a solução geral real do sistema.

(b) Encontre a solução tal que  $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

2.4. Um sistema massa-mola sem amortecimento é descrito pela equação diferencial

$$mu'' + ku = f(t).$$

- (a) Transforme a equação acima em um sistema de equações equivalente fazendo

$$x_1(t) = u(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = u'(t).$$

- (b) Resolva o sistema homogêneo correspondente ( $f(t) = 0$ ) e obtenha  $u(t)$  a solução da equação diferencial  $mu'' + ku = 0$ .

### 4.3 A Matriz $A$ não é Diagonalizável

#### 4.3.1 Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas

Considere, novamente, um sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases}$$

em que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  com  $b$  ou  $c$  não nulos. Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t), \quad (4.34)$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar (ver por exemplo [10]) que se uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ , não é diagonalizável, então existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tais que

$$A = PJP^{-1}. \quad (4.35)$$

Substituindo-se (4.35) em (4.34) obtemos

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , obtemos

$$Y'(t) = JY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= \lambda y_2(t) \end{cases}$$

Este sistema foi resolvido no [Exemplo 4.2 na página 397](#) e sua solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema (4.34) é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= PY(t) = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\ &= (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

pois pelo [Teorema 4.3 na página 402](#), para

$$X_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda t} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right),$$

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & X_2(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \det(P) \neq 0.$$

### 4.3.2 Sistema com $n$ Equações e $n$ Incógnitas

Pode-se mostrar (ver por exemplo [10]) que se uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , não é diagonalizável, então existem matrizes

$$P = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_{\lambda_2} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \dots & \bar{0} & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

em que

$$J_{\lambda_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j},$$

tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Vamos considerar aqui (para o caso geral ver por exemplo [7]) somente o caso em que os blocos  $J_{\lambda_j}$  têm tamanho no máximo  $2 \times 2$ , com  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ . Ou seja, vamos supor que existam matrizes

$$P = [ V_1 \quad W_1 \quad \dots \quad V_k \quad W_k \quad V_{2k+1} \quad \dots \quad V_n ] \quad \text{e}$$



$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_k & 1 & \\ \vdots & & & 0 & \lambda_k & \\ & & & & \lambda_{2k+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PJP^{-1}. \quad (4.36)$$

A solução geral do sistema  $X' = AX$  é

$$\begin{aligned} X(t) &= [V_1 \ W_1 \ \dots \ V_k \ W_k \ V_{2k+1} \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_{2k-1} e^{\lambda_k t} + c_{2k} t e^{\lambda_k t} \\ c_{2k} e^{\lambda_k t} \\ c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_1 t} (tV_1 + W_1) + \dots + c_{2k-1} e^{\lambda_k t} V_k + c_{2k} e^{\lambda_k t} (tV_k + W_k) + \\ &\quad + c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_{2k+1} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n \end{aligned}$$

pois pelo [Teorema 4.3 na página 402](#), para

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1, \ X_2(t) = e^{\lambda_1 t} (tV_1 + W_1), \ \dots, \ X_{2k-1}(t) = e^{\lambda_k t} V_k, \ X_{2k}(t) = e^{\lambda_k t} (tV_k + W_k),$$

$$X_{2k+1}(t) = e^{\lambda_{2k+1}t} V_{2k+1}, \dots, X_n(t) = e^{\lambda_n t} V_n$$

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & \dots & X_n(0) \end{bmatrix} = \det(P) \neq 0.$$

### 4.3.3 Como Encontrar as Matrizes $P$ e $J$

Vamos, agora, mostrar como determinar matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_{\lambda_2} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \dots & \bar{0} & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

em que

$$J_{\lambda_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j},$$

tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Vamos considerar aqui (para o caso geral ver por exemplo [10]) somente o caso em que os blocos  $J_{\lambda_j}$  têm tamanho no máximo  $2 \times 2$ , com  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ . Ou seja, vamos supor que existam matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & W_1 & \dots & V_k & W_k & V_{2k+1} & \dots & V_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_k & 1 & \\ \vdots & & & 0 & \lambda_k & \\ & & & & \lambda_{2k+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PJP^{-1}. \quad (4.37)$$

Multiplicando à direita por  $P$  ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PJ. \quad (4.38)$$

Por um lado

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{bmatrix} V_1 & W_1 & \cdots & V_k & W_k & V_{2k+1} & \cdots & V_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AV_1 & AW_1 & \cdots & AV_k & AW_k & AV_{2k+1} & \cdots & AV_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e por outro lado

$$PJ = \begin{bmatrix} \lambda_1 V_1 & V_1 + \lambda_1 W_1 & \cdots & \lambda_k V_k & V_k + \lambda_k W_k & \lambda_{2k+1} V_{2k+1} & \cdots & \lambda_n V_n \end{bmatrix}.$$

Assim, (4.38) pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} AV_1 & AW_1 & \cdots & AV_k & AW_k & AV_{2k+1} & \cdots & AV_n \\ \lambda_1 V_1 & V_1 + \lambda_1 W_1 & \cdots & \lambda_k V_k & V_k + \lambda_k W_k & \lambda_{2k+1} V_{2k+1} & \cdots & \lambda_n V_n \end{bmatrix} =$$

Comparando-se coluna a coluna obtemos que

$$AV_j = \lambda_j V_j \quad \text{ou} \quad (A - \lambda_j I_n)V_j = \bar{0} \quad (4.39)$$

$$AW_j = V_j + \lambda_j W_j \quad \text{ou} \quad (A - \lambda_j I_n)W_j = V_j \quad (4.40)$$

para  $j = 1, 3, \dots, 2k - 1$ .

Portanto

(a) De (4.39) segue-se que o vetor  $V_j$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_j$ .

(b) De (4.40) segue-se que o vetor  $W_j$  é uma solução do sistema linear

$$(A - \lambda_j I_n)X = V_j. \quad (4.41)$$

**Exemplo 4.11.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

O seu polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - t I_2) = (-1 - t)(-3 - t) + 1 = t^2 + 4t + 4$$

que só tem uma raiz  $\lambda = -2$ .

Os autovetores associados a  $\lambda = -2$  são obtidos da solução do sistema linear

$$(A - \lambda I_2)Z = \bar{0},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, -1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda = -2$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $V = (1, -1)$  é um autovetor associado a  $\lambda = -2$ . Precisamos encontrar o vetor  $W$  tal que

$$(A - \lambda I_2)W = V.$$

Para isso vamos resolver o sistema linear

$$(A - \lambda I_2)W = V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\{(\alpha, 1 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando  $\alpha = 0$ , obtemos o vetor  $W = (0, 1)$  que é tal que  $(A - \lambda I_2)W = V$ . Assim as matrizes

$$P = [V \ W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

O plano de fase contendo diversas trajetórias aparecem na [Figura 4.5](#). A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear  $X' = AX$ , em que a matriz  $A$  não é diagonalizável em  $\mathbb{C}$  e o único autovalor é negativo. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó impróprio**. No caso em que o único autovalor de  $A$  é positivo as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da [Figura 4.5](#). Neste caso, dizemos também que a origem é um **nó impróprio**.

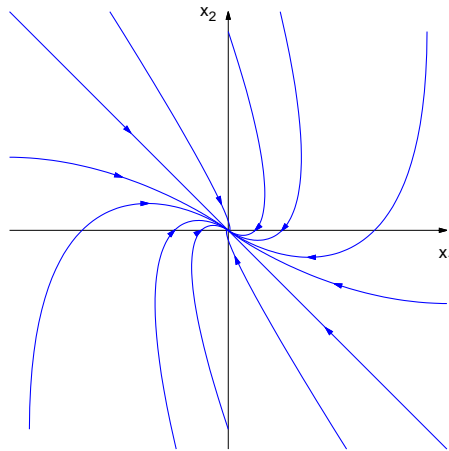


Figura 4.5 – Trajetórias do sistema do Exemplo 4.11

**Exemplo 4.12.** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Este sistema pode ser escrito como  $X' = AX$ , em que  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . O po-

linômio característico de  $A$  é

$$p(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante em termos da 1ª coluna obtemos que

$$p(t) = (-1)^{(1+1)}(2-t) \det \begin{bmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{bmatrix} = (2-t)[(3-t)(1-t) + 1] = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

cujas únicas raízes são  $\lambda_1 = 2$  que é o autovalor de  $A$ .

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 2$  são os vetores  $Z \neq \vec{0}$  que satisfazem

$AZ = \lambda_1 Z$ , ou seja,

$$(A - \lambda_1 I_3)Z = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a  $\lambda_1 = -1$  acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, \alpha, -\alpha) = \alpha(0, 1, -1) + \beta(1, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$



Portanto  $V_1 = (0, 1, -1)$  e  $V_2 = (1, 0, 0)$  são autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda_1 = 2$ .

Precisamos encontrar o vetor  $W$  tal que

$$(A - \lambda_1 I_3)W = V,$$

em que  $V$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_1 = 2$ , ou seja,  $V = (\beta, \alpha, -\alpha)$ . Assim,

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = \beta \\ y + z = \alpha \\ -y - z = -\alpha \end{cases}$$

Do sistema obtemos que  $\alpha = \beta$ . Tomando  $\alpha = \beta = 1$  obtemos  $V = (1, 1, -1)$  e vamos resolver o sistema

$$(A - \lambda_1 I_3)W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\{(\gamma, 1 - \delta, \delta) \mid \delta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Tomando  $\delta = \gamma = 0$  obtemos  $W = (0, 1, 0)$ . Assim temos

$$(A - 2I_3)W = V \Leftrightarrow AW = 2W + V$$

$$AV = 2V$$

$$AV_2 = 2V_2$$

Logo

$$[AV \quad AW \quad AV_1] = [2V \quad 2W + V \quad 2V_2]$$

$$\Updownarrow$$

$$A[V \ W \ V_2] = [V \ W \ V_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Como  $V, W$  e  $V_2$  são LI, a matriz  $P = [V \ W \ V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  tem inversa e assim multiplicando (4.42) à direita pela inversa de  $P$  obtemos

$$A = PJP^{-1},$$

em que  $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Aqui poderíamos ter escolhido no lugar de  $V_2 = (1, 0, 0)$

qualquer combinação linear de  $V_1 = (0, 1, -1)$  e  $V_2 = (1, 0, 0)$  desde que seja diferente de  $V = (1, 1, 0)$ .

Portanto a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} V + c_2 e^{2t} (W + tV) + c_3 e^{\lambda_1 t} V_2 \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Exercícios (respostas na página 506)

3.1. Ache a solução geral do sistema de equações dado e desenhe o seu retrato de fase:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 8x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$

3.2. Ache a solução geral do sistema de equações dado:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = & ax_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

3.3. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais  $X' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} X$ .

(a) Encontre a solução geral do sistema.

(b) Encontre a solução tal que  $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

## 4.4 Sistemas Não-Homogêneos (opcional)

Considere, agora, o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma de uma equação diferencial matricial

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$X'(t) = AX(t) + F(t), \quad (4.43)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

**Teorema 4.7.** *Seja  $X_p(t)$  uma solução particular do sistema não homogêneo (4.43). Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema homogêneo correspondente tais que  $X_1(0), \dots, X_n(0)$  são LI. Então a solução geral do sistema não homogêneo (4.43) é*

$$X(t) = X_p(t) + c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t)$$

**Demonstração.** Sejam  $X(t)$  uma solução qualquer e  $X_p(t)$  uma solução particular de (4.43), então  $Y(t) = X(t) - X_p(t)$  é solução do sistema homogêneo associado  $X' = AX$ , pois

$$Y'(t) = X'(t) - X_p'(t) = (AX(t) + F(t)) - (AX_p(t) + F(t)) = A(X(t) - X_p(t)) = AY(t).$$

Assim se  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema homogêneo correspondente tais que  $X_1(0), \dots, X_n(0)$  são LI, pelo Teorema 4.3 na página 402, existem constantes  $c_1, \dots, c_n$  tais que

$$Y(t) = X(t) - X_p(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t),$$

ou seja,

$$X(t) = X_p(t) + c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t).$$

■

Portanto para encontrar a solução geral de um sistema de equações lineares não homogêneo precisamos encontrar uma solução particular e a solução geral do sistema homogêneo correspondente.

#### 4.4.1 A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{R}$

Como no caso do sistema homogêneo em que a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{R}$ , existem matrizes

$$P = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que  $V_j$  é a coluna  $j$  de  $P$ , com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.44}$$

Substituindo-se (4.44) em (4.43) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + F(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , obtemos

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) + g_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

em que

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} = G(t) = P^{-1}F(t).$$

As equações podem ser resolvidas independentemente, encontramos soluções particulares de cada uma delas  $y_{1p}(t), \dots, y_{np}(t)$  e formamos o vetor

$$Y_p(t) = \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ \vdots \\ y_{np}(t) \end{bmatrix}$$

Uma solução particular do sistema inicial é então

$$X_p(t) = PY_p(t)$$

e pelo [Teorema 4.7](#) a solução geral é a soma da solução geral do sistema homogêneo com  $X_p(t)$ , ou seja,

$$X(t) = X_p(t) + c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n.$$

**Exemplo 4.13.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) + 2e^{-t} \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + x_2(t) + 4e^t \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^t \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  é a mesma do [Exemplo 4.5 na página 414](#), é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema desacoplado

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) + g_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) + g_2(t) \end{cases} \quad (4.45)$$

em que

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^t \\ e^{-t} + e^t \end{bmatrix}$$

Para resolver a equação (4.45), ou seja,

$$y_1' - 3y_1 = e^{-t} - e^t$$

multiplicamos a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{-3t}$  obtendo

$$\frac{d}{dt} (e^{-3t} y_1) = e^{-4t} - e^{-2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{-3t} y_1(t) = -\frac{1}{4} e^{-4t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + c_1.$$

Explicitando-se  $y_1(t)$ :

$$y_1(t) = -\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t + c_1 e^{3t}$$

Uma solução particular da equação  $y_1' - 3y_1 = e^{-t} - e^t$  é então

$$y_{1p}(t) = -\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t.$$

Para resolver a equação (4.46), ou seja,

$$y_2' + y_2 = e^{-t} + e^t$$



multiplicamos a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^t$  obtendo

$$\frac{d}{dt}(e^t y_2) = 1 + e^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^t y_2(t) = t + \frac{1}{2}e^{2t} + c_2.$$

Explicitando-se  $y_2(t)$ :

$$y_2(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}e^t + c_2e^{-t}.$$

Uma solução particular da equação  $y_2' + y_2 = e^{-t} + e^t$  é então

$$y_{2p}(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}e^t.$$

Uma solução particular do sistema não homogêneo é então

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \\ te^{-t} + \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-t} + e^t + te^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}.$$

Assim pelo [Teorema 4.7 na página 458](#) a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-t} + e^t + te^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix} + c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

#### 4.4.2 A Matriz $A$ é Diagonalizável em $\mathbb{C}$

Vamos considerar o caso  $2 \times 2$ , por que a notação fica mais simples. Entretanto a ideia se estende facilmente para o caso geral. Como no caso dos sistemas homogêneos, em que a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{C}$ , existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix},$$

tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad (4.47)$$

Substituindo-se (4.47) em (4.43) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + F(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , obtemos a equação matricial

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) &= (\alpha + i\beta)y_1(t) &+ \frac{g_1(t)}{g_1(t)} \\ y_2'(t) &= (\alpha - i\beta)y_2(t) &+ \frac{g_1(t)}{g_1(t)} \end{cases}$$

A segunda equação é conjugada da primeira, logo a solução da segunda equação é o conjugado da solução da primeira equação. Assim se  $y_{1p}(t)$  é uma solução particular da primeira equação, então  $y_{2p}(t) = \overline{y_{1p}(t)}$  é uma solução particular da segunda equação. Logo uma solução particular complexa do sistema é

$$X_p(t) = PY_p(t) = P \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{1p}(t) \end{bmatrix}.$$

Como  $P = \begin{bmatrix} V + iW & V - iW \end{bmatrix}$ , então uma solução particular do sistema é dada por

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \begin{bmatrix} V + iW & V - iW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{1p}(t) \end{bmatrix} = \\ &= y_{1p}(t)(V + iW) + \overline{y_{1p}(t)}(V - iW) \\ &= 2\operatorname{Re}\{y_{1p}(t)(V + iW)\} \end{aligned}$$

que é real. Assim, pelo [Teorema 4.7 na página 458](#) a solução geral (real) é a soma da solução geral (real) do sistema homogêneo com  $X_p(t)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t} (V+iW) \right\} + c_2 \operatorname{Im} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t} (V+iW) \right\} + 2 \operatorname{Re} \{ y_{1p}(t) (V+iW) \} \\ &= c_1 e^{\alpha t} \left( \cos \beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} \beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{\alpha t} \left( \cos \beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} \beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \{ y_{1p}(t) (V+iW) \}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.14.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  é a mesma do [Exemplo 4.9 na página 437](#), é diagonalizável em  $\mathbb{C}$  e as matrizes

$$P = [Z \ \bar{Z}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = (-1 + 2i)y_1(t) + g_1(t) \\ y_2'(t) = (-1 - 2i)y_2(t) + g_2(t) \end{cases} \quad (4.48)$$

$$(4.49)$$

em que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} &= P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \operatorname{sen} t \\ i \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para resolver a equação (4.48), ou seja,  $y_1' + (1 - 2i)y_1(t) = -i \operatorname{sen} t$ , multiplicamos a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{(1-2i)t}$  obtendo

$$\frac{d}{dt}(e^{(1-2i)t}y_1) = -i \operatorname{sen} t e^{(1-2i)t}.$$

Observe que  $-i \operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it})$ , pois pela fórmula de Euler

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \operatorname{sen} t \\ e^{-it} &= \cos t - i \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Logo a equação diferencial anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(e^{(1-2i)t}y_1) = -\frac{1}{2}(e^{(1-i)t} - e^{(1-3i)t})$$

Integrando-se obtemos

$$e^{(1-2i)t} y_1(t) = -\frac{1}{2-2i} e^{(1-i)t} + \frac{1}{2-6i} e^{(1-3i)t} + C_1.$$

Explicitando-se  $y_1(t)$ :

$$y_1(t) = y_{1p}(t) + C_1 e^{(-1+2i)t},$$

em que

$$y_{1p}(t) = -\frac{1}{2-2i} e^{it} + \frac{1}{2-6i} e^{-it}.$$

Logo

$$X_p(t) = 2\operatorname{Re}\{y_{1p}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ (1+i) \end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix} 2\operatorname{Re}\{y_{1p}(t)\} \\ 2\operatorname{Re}\{(1+i)y_{1p}(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{5} \cos t + \frac{7}{5} \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

é uma solução particular real do sistema não homogêneo. Então, pelo [Teorema 4.7 na página 458](#), a solução geral real do sistema é a soma da solução geral real do sistema homogêneo com uma solução particular, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= X_p(t) + c_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} + c_2 \operatorname{Im} \left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{5} \cos t + \frac{7}{5} \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + \\ &\quad c_1 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

#### 4.4.3 A Matriz $A$ não é Diagonalizável

Vamos considerar o caso  $2 \times 2$ , mas a ideia se estende facilmente para o caso geral. Como no caso dos sistemas homogêneos, em que a matriz  $A$  não é diagonalizável, existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tais que

$$A = PJP^{-1}. \quad (4.50)$$

Substituindo-se (4.50) em (4.43) obtemos

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t) + F(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , obtemos

$$Y'(t) = JY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda y_1(t) + y_2(t) + g_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda y_2(t) + g_2(t) \end{cases}$$

A segunda equação pode ser resolvida independentemente da primeira, obtendo-se uma solução particular  $y_{2p}(t)$ . Substituindo-se  $y_{2p}(t)$  na primeira equação ela pode ser resolvida encontrando-se uma solução particular  $y_{1p}(t)$ . Uma solução particular do sistema inicial é então

$$X_p(t) = PY_p(t) = P \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{2p}(t) \end{bmatrix}.$$

pelo [Teorema 4.7 na página 458](#) a solução geral é a soma da solução geral do sistema homogêneo com  $X_p(t)$ , ou seja,

$$X(t) = X_p(t) + c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right).$$

**Exemplo 4.15.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + t \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  é a mesma do [Exemplo 4.11 na página 450](#), não é diagonalizável e as matrizes

$$P = [V \ W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + g_1(t) \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} y_2'(t) = -2y_2(t) + g_2(t) \end{cases} \quad (4.52)$$

em que

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

Temos que resolver em primeiro lugar a equação (4.52), ou seja,

$$y_2' + 2y_2 = t.$$

Para isso multiplicamos a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{2t}$  obtendo

$$\frac{d}{dt} (e^{2t} y_2) = t e^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{2t} y_2(t) = \frac{t}{2} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + c_2.$$

Explicitando-se  $y_2(t)$ :

$$y_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c_2 e^{-2t}.$$

Logo

$$y_{2p}(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

é uma solução particular da segunda equação.

Para resolver a equação (4.51), ou seja,

$$y_1' + 2y_1 = \frac{3t}{2} - \frac{1}{4}$$



multiplicamos a equação pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{2t}$  obtendo

$$\frac{d}{dt} (e^{2t} y_1) = \frac{3t}{2} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{2t} y_1(t) = \frac{3t}{4} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{2t} + c_1.$$

Explicitando-se  $y_1(t)$ :

$$y_1(t) = \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} + c_1 e^{-2t}.$$

Logo

$$y_{1p}(t) = \frac{3t}{4} - \frac{1}{2}$$

é uma solução particular da primeira equação. Assim

$$X_p(t) = P Y_p(t) = P \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{2p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Portanto pelo [Teorema 4.7 na página 458](#), a solução geral do sistema é a soma da solução geral do sistema homogêneo com uma solução particular, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} + c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

#### 4.4.4 Usando a Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é particularmente adequada para resolver problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), & x_1(0) = x_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t), & x_n(0) = x_{n0} \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace no sistema obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_{10} &= a_{11}X_1(s) + \cdots + a_{1n}X_n(s) + F_1(s) \\ \vdots & \vdots \\ sX_n(s) - x_{n0} &= a_{n1}X_1(s) + \cdots + a_{nn}X_n(s) + F_n(s) \end{cases}$$

Este é um sistema de equações lineares algébrico que pode ser resolvido obtendo expressões para  $X_1(s), \dots, X_n(s)$ . A solução do problema de valor inicial é então

$$X(t) = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}^{-1}X_1)(t) \\ \vdots \\ (\mathcal{L}^{-1}X_n)(t) \end{bmatrix}$$

**Exemplo 4.16.** Vamos considerar o sistema do [Exemplo 4.14 na página 465](#)

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + x_2(t) + 2\sin t \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 0$ . Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= -3X_1(s) + 2X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= -4X_1(s) + X_2(s) + \frac{2}{1+s^2} \end{cases}$$

substituindo-se  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 0$  obtemos

$$\begin{cases} (s+3)X_1(s) - 2X_2(s) &= 0 \\ 4X_1(s) + (s-1)X_2(s) &= \frac{2}{s^2+1} \end{cases} \quad (4.53)$$

Resolvendo o sistema linear algébrico obtemos

$$X_1(s) = \frac{4}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$X_2(s) = \frac{2(s + 3)}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 5)}$$

Vamos decompor em frações parciais  $X_1(s)$ .

$$\frac{4}{(1 + s^2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 5}$$

Multiplicando-se por  $(1 + s^2)(s^2 + 2s + 5)$  obtemos

$$4 = (As + B)(s^2 + 2s + 5) + (Cs + D)(s^2 + 1) \quad (4.54)$$

Substituindo-se  $s = i$  obtemos

$$4 = (iA + B)(4 + 2i) = (-2A + 4B) + i(4A + 2B)$$

obtendo  $A = -2/5$  e  $B = 4/5$ . Comparando-se os termos de grau 3 e os de grau 0 de (4.54) obtemos  $C = 2/5$  e  $D = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{4}{(1 + s^2)(s^2 + 2s + 5)} = -\frac{2}{5} \frac{s - 2}{s^2 + 1} + \frac{2}{5} \frac{s}{s^2 + 2s + 5} \\ &= -\frac{2}{5} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4}{5} \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{5} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} - \frac{2}{5} \frac{1}{(s + 1)^2 + 4} \end{aligned}$$

Aplicando-se a inversa da transformada de Laplace obtemos

$$x_1(t) = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \sin t + \frac{2}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{5} e^{-t} \sin 2t$$

Vamos, agora, encontrar  $x_2(t)$ . Vamos decompor em frações parciais o termo

$$\frac{2s+6}{(1+s^2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

Multiplicando-se por  $(1+s^2)(s^2+2s+5)$  obtemos

$$2s+6 = (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+1) \quad (4.55)$$

Substituindo-se  $s = i$  obtemos

$$2i+6 = (iA+B)(4+2i) = (-2A+4B) + i(4A+2B)$$

obtendo  $A = -1/5$  e  $B = 7/5$ . Comparando-se os termos de grau 3 e os de grau 0 de (4.55) obtemos  $C = 1/5$  e  $D = -1$ . Assim,

$$\begin{aligned} X_2(s) = \frac{2s+6}{(1+s^2)(s^2+2s+5)} &= -\frac{1}{5} \frac{s-7}{s^2+1} + \frac{1}{5} \frac{s-5}{s^2+2s+5} \\ &= -\frac{1}{5} \frac{s}{s^2+1} + \frac{7}{5} \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{6}{5} \frac{1}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

Aplicando-se a inversa da transformada de Laplace obtemos

$$x_2(t) = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{7}{5} \sin t + \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{6}{5} e^{-t} \sin 2t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \sin t + \frac{2}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{5} e^{-t} \sin 2t \\ -\frac{1}{5} \cos t + \frac{7}{5} \sin t + \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{6}{5} e^{-t} \sin 2t \end{bmatrix}$$

## 4.4.5 Demonstração do Teorema de Existência e Unicidade

**Demonstração do Teorema 4.1 na página 399.**

(a) Existência:

Defina a sequência  $X^{(k)}(t)$  por

$$X^{(0)}(t) = X^{(0)}, \quad X^{(k)}(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^t (A(s)X^{(k-1)}(s) + F(s))ds, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Assim, cada componente  $X^{(k)}(t)$  é dada por

$$x_i^{(k)} = x_i^{(0)} + \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s) \right) ds.$$

Sejam  $M, N > 0$  tais que

$$|a_{ij}(t)| \leq M, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \text{ e } t \in I \quad (4.56)$$

$$|x_i^{(1)}(t) - x_i^{(0)}| \leq N, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \text{ e } t \in I$$

Então

$$\begin{aligned} |x_i^{(2)}(t) - x_i^{(1)}(t)| &\leq \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |x_j^{(1)}(s) - x_j^{(0)}| ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |x_j^{(1)}(s) - x_j^{(0)}| ds \leq nMN(t - t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_i^{(3)}(t) - x_i^{(2)}(t)| &\leq \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |x_j^{(2)}(s) - x_j^{(1)}(s)| ds \\
&\leq M \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |x_j^{(2)}(s) - x_j^{(1)}(s)| ds \leq nM^2N \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \\
&\leq n^2M^2N \frac{|t - t_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

Por indução

$$\begin{aligned}
|x_i^{(k+1)}(t) - x_i^{(k)}(t)| &\leq \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |x_j^{(k)}(s) - x_j^{(k-1)}(s)| ds \\
&\leq M \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)}(s) - x_j^{(k-1)}(s)| ds \leq M \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t n^{k-1} M^{k-1} N \frac{|s - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \\
&\leq n^k M^k N \frac{|t - t_0|^k}{k!}
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento usado na demonstração do [Teorema 1.1 na página 93](#) temos que  $x_i^{(k)}(t)$  é uma sequência convergente. Seja

$$x_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}(t).$$

Também pelo mesmo argumento usado na demonstração do [Teorema 1.1 na página 93](#) temos que  $x_i(t)$  é contínua e vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s) \right) ds = \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) x_j(s) + f_i(s) \right) ds.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}(t) = x_i^{(0)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s) \right) ds = \\
 &= x_i^{(0)} + \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s) \right) ds = \\
 &= x_i^{(0)} + \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) x_j(s) + f_i(s) \right) ds
 \end{aligned}$$

Derivando em relação a  $t$  esta equação vemos que  $x_i(t)$  é solução do problema de valor inicial.

(b) Unicidade:

Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  duas soluções do problema de valor inicial (4.2). Então

$$Z(t) = X(t) - Y(t)$$

é solução do problema de valor inicial (4.2) com  $X^{(0)} = 0$  e  $F(t) = 0$ . Assim temos que mostrar que  $Z(t) = 0$ , para todo  $t$ .

Seja  $u(t) = \int_{t_0}^t (|z_1(s)| + \dots + |z_n(s)|) ds$ . Como

$$z_1(t) = \int_{t_0}^t z_1'(s) ds, \dots, z_n(t) = \int_{t_0}^t z_n'(s) ds,$$

então por (4.56) temos

$$\begin{aligned} |z_1(t)| + \cdots + |z_n(t)| &\leq \int_0^t (|z'_1(s)| + \cdots + |z'_n(s)|) ds \\ &\leq \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |z_j(s)| ds \\ &\leq nM \int_0^t (|z_1(s)| + \cdots + |z_n(s)|) ds = nMu(t), \end{aligned}$$

para  $t \in I$ , ou seja,

$$u'(t) \leq nMu(t).$$

Multiplicando a inequação acima por  $e^{-nMt}$  obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-nMt}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que  $u(t) = 0$ , para todo  $t$  (verifique!) e portanto  $Z(t) = 0$ , para  $t \in I$ . ■

Como consequência do resultado que acabamos de provar temos o resultado abaixo para existência e unicidade de soluções de equações lineares de 2ª ordem.

**Demonstração do Teorema 2.1 na página 152.** Sejam  $x_1(t) = y(t)$  e  $x_2(t) = y'(t)$ . O problema de valor inicial é equivalente ao problema

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{cases}$$

em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}.$$



A conclusão segue-se da aplicação do Teorema 4.1. ■

### Exercícios (respostas na página 512)

4.1. Determine a solução geral dos sistemas de equações:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2 \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2t \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) + e^{2t} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + 4 \cos t \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2 \sin t \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 5x_1(t) + 3x_2(t) + 4 \cos t \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + te^t \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) + 6te^{2t} \\ x_2'(t) = -2x_1(t) \end{cases}$$

4.2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2 \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2t \end{cases}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) + e^{2t} \end{cases}, x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

$$(c) \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + 4 \cos t \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2 \sin t \end{cases}, x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$$

$$(d) \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5x_1(t) + 3x_2(t) + 4\cos t \end{cases}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$$

$$(e) \begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) + te^t \end{cases}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$$

$$(f) \begin{cases} x_1'(t) &= 4x_1(t) + 2x_2(t) + 6te^{2t} \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) \end{cases}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$$

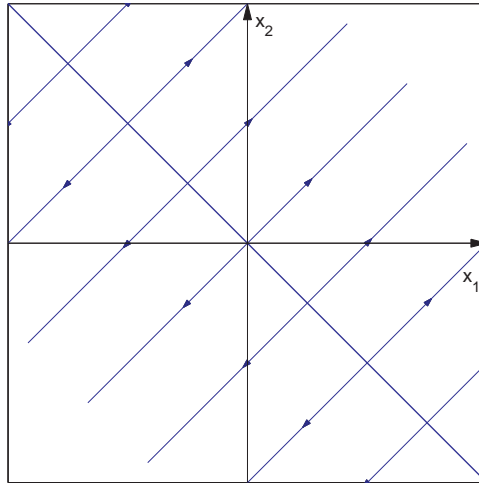
## 4.5 Respostas dos Exercícios

### 1. A Matriz $A$ é diagonalizável em $\mathbb{R}$ (página 424)

1.1. (a) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

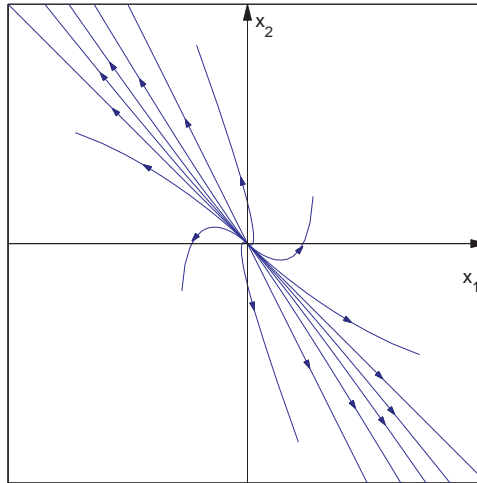
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



(b) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

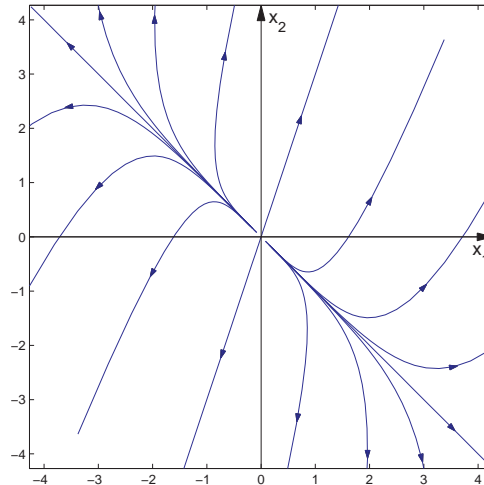
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$



(c) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

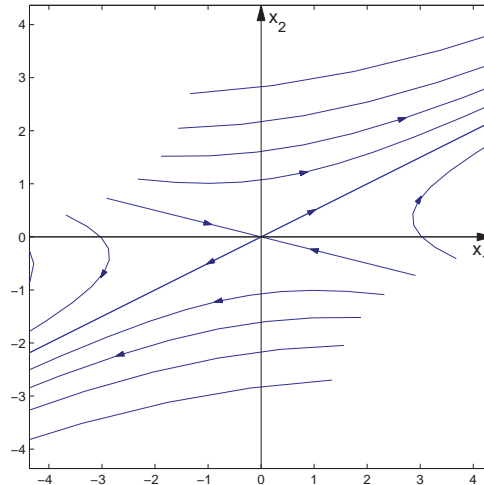
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



(d) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

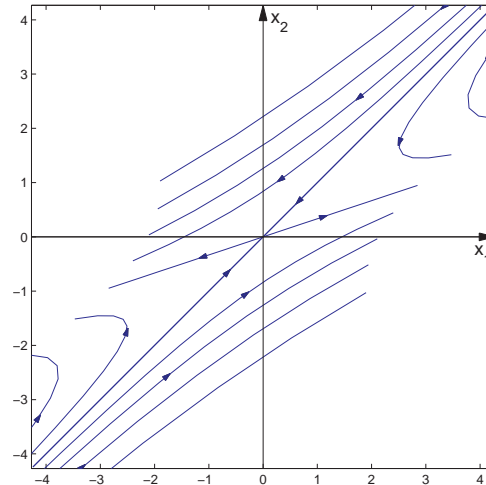
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



(e) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

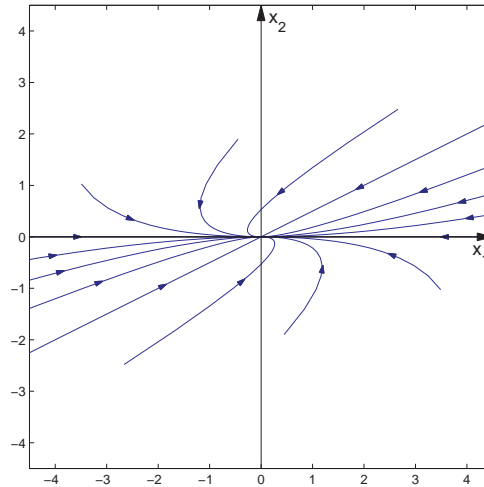
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



(f) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
 1.2. \quad P &= \begin{bmatrix} -a + \sqrt{a^2 + 1} & -a - \sqrt{a^2 + 1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} 3a + \sqrt{a^2 + 1} & 0 \\ 0 & 3a - \sqrt{a^2 + 1} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \\
 c_1 e^{(3a + \sqrt{a^2 + 1})t} \begin{bmatrix} -a + \sqrt{a^2 + 1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 + c_2 e^{(3a - \sqrt{a^2 + 1})t} \begin{bmatrix} -a - \sqrt{a^2 + 1} \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.3. (a) Os autovalores são as raízes de  $p(t) = (t + 2)(t + 3) = 0$ , ou seja,  $\lambda = -2$  ou  $\lambda = -3$ .



Os autovetores associados a  $\lambda_1 = -2$  são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é  $W_1 = (1, 2)$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_2 = -3$  são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é  $W_2 = (0, 1)$ .

A solução geral é

$$X(t) = \begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo  $t = 0$  na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} L(0) \\ D(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ D_0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 & = & L_0 \\ 2c_1 + c_2 & = & D_0 \end{cases}$$

Obtemos  $c_1 = L_0$  e  $c_2 = D_0 - 2L_0$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = L_0 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (D_0 - 2L_0) e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Os autovalores são as raízes de  $p(t) = (t + k)(t + k_r) = 0$ , ou seja,  $\lambda = -k$  ou  $\lambda = -k_r$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_1 = -k$  são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & k_r - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é  $W_1 = (k_r - k, k)$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_2 = -k_r$  são calculados pela sistema:

$$\begin{bmatrix} -k + k_r & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é  $W_2 = (0, 1)$ .

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-kt} \begin{bmatrix} k_r - k \\ k \end{bmatrix} + c_2 e^{-k_r t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo  $t = 0$  na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} L(0) \\ D(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} k_r - k \\ k \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ D_0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} (k_r - k)c_1 & = L_0 \\ kc_1 + c_2 & = D_0 \end{cases}$$

Obtemos  $c_1 = \frac{L_0}{k_r - k}$  e  $c_2 = D_0 - \frac{kL_0}{k_r - k}$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = \frac{L_0}{k_r - k} e^{-kt} \begin{bmatrix} k_r - k \\ k \end{bmatrix} + \left( D_0 - \frac{kL_0}{k_r - k} \right) e^{-k_r t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**1.4.** (a) Os autovalores são as raízes de  $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ , ou seja,  $\lambda = -1$  ou  $\lambda = -5$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_1 = -1$  são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é  $W_1 = (3, 2)$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_2 = -5$  são calculados pela sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é  $W_2 = (1, -2)$ .

A solução geral é

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo  $t = 0$  na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

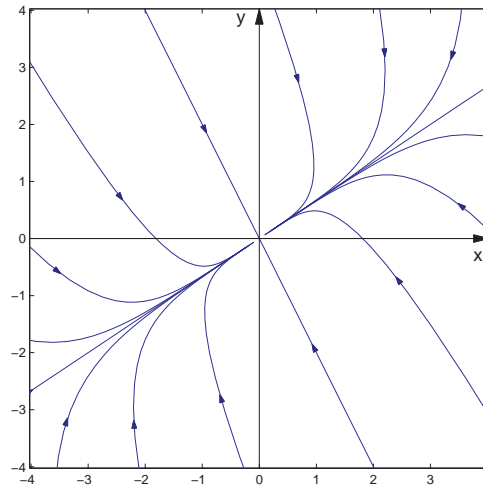
que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 = x_0 \\ 2c_1 - 2c_2 = y_0 \end{cases}$$

Obtemos  $c_1 = \frac{2x_0 + y_0}{8}$  e  $c_2 = \frac{2x_0 - 3y_0}{8}$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left( \frac{2x_0 + y_0}{8} \right) e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \left( \frac{2x_0 - 3y_0}{8} \right) e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b)



1.5. (a)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é  $p(t) = \det(A - tI_2) = (-4 - t)(3 - t) = t^2 + t - 6$  cujas raízes são  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{\alpha(6, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = -3$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $V = (6, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = -3$ .

$$(A - \lambda_2 I_2)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = 2$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $W = (1, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = 2$ .

Assim a solução do sistema é dada por

$$X(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

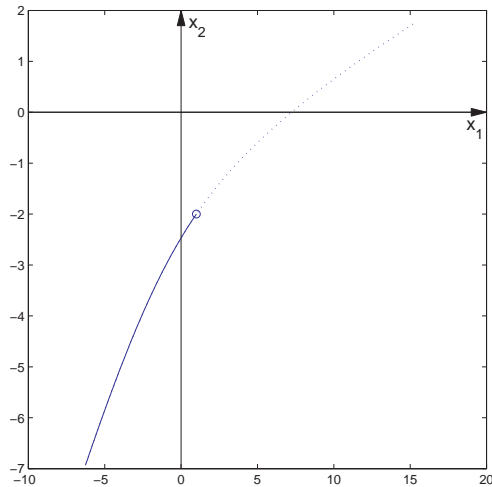
Substituindo-se  $t = 0$ :

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De onde obtemos que  $c_1 = 3/5$  e  $c_2 = -13/5$  e portanto a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = \frac{3}{5} e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{13}{5} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)



1.6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é  $p(t) = \det(A - tI_3) = (-1 - t)[(1 - t)^2 - 1] = -t(t + 1)(t - 2)$  cujas raízes são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 2$ .

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{\alpha(1, -1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 0$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $V = (1, -1, 0)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = 0$ .

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(0, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = -1$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $W = (0, 0, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = -1$ .

$$(A - \lambda_3 I_3)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_3 = \{\alpha(1, 1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_3 = 2$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $U = (1, 1, 0)$  é um autovetor associado a  $\lambda_3 = -1$ .

Assim a solução do sistema é dada por

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo-se  $t = 0$ :

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de onde obtemos  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -1$  e  $c_3 = 1$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = -e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.7.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é  $p(t) = \det(A - tI_3) = t(t^2 - 6t + 9)$  cujas raízes são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 3$ .

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 0$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $V = (1, 1, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = 0$ .

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$$



é

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cujas soluções gerais são

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = 3$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $W_1 = (1, 0, 1)$  e  $W_2 = (0, 1, 1)$  são autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda_2 = 3$ .

Assim a solução do sistema é dada por

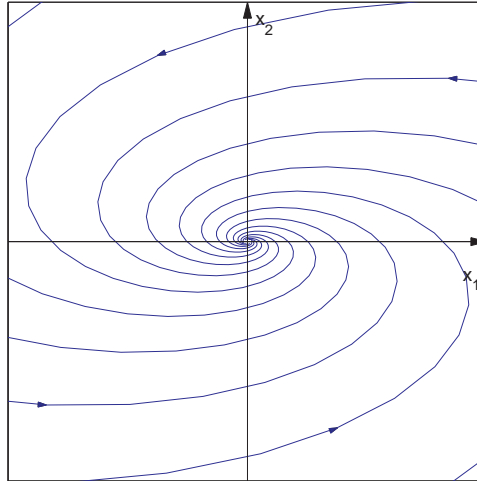
$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 2. A Matriz $A$ é diagonalizável em $\mathbb{C}$ (página 442)

**2.1.** (a) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

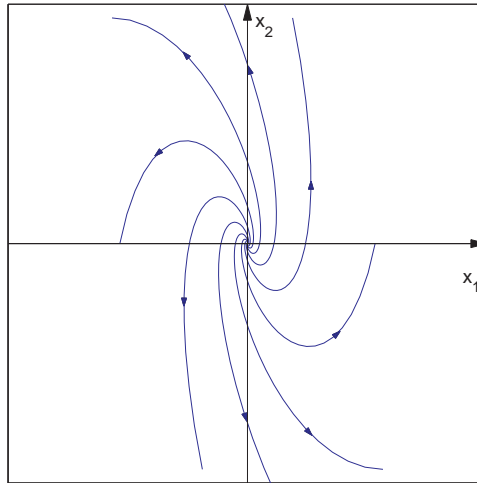
A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$



(b)  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2i-1 & 2i-1 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 2i+2 & 0 \\ 0 & 2-2i \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

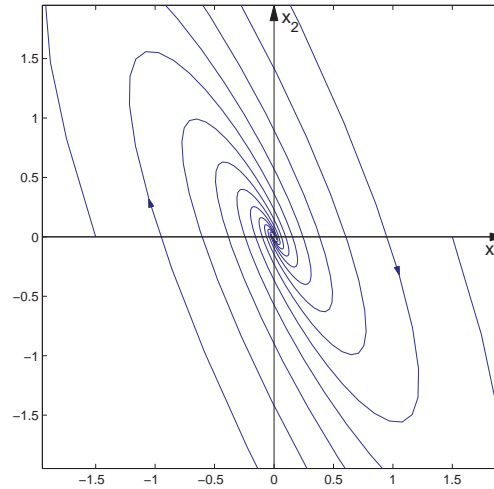
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{2t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$



(c) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 - \sqrt{3}i & -3 + \sqrt{3}i \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

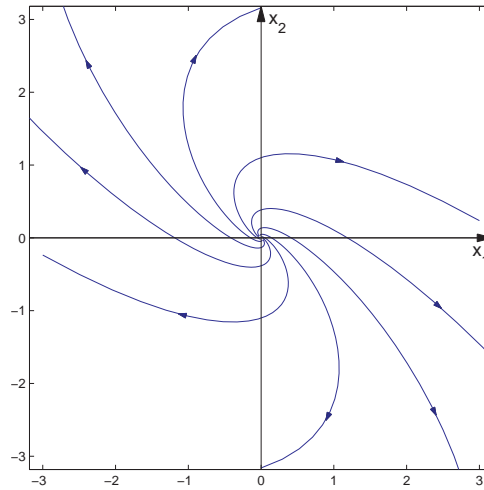
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$



(d) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 - \sqrt{5}i & -2 + \sqrt{5}i \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{5}i & 0 \\ 0 & 3 + \sqrt{5}i \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

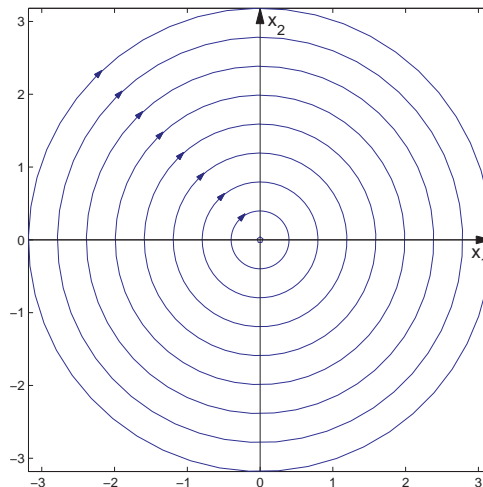
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \left( \cos \sqrt{5}t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \sin \sqrt{5}t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{3t} \left( \cos \sqrt{5}t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} + \sin \sqrt{5}t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$



(e) As matrizes  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$  são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2 \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$



2.2. (a) Se  $|a| > 4$ :

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + \sqrt{a^2 - 16} & -a - \sqrt{a^2 - 16} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2} \end{bmatrix}$$

Se  $|a| < 4$ :

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + i\sqrt{16 - a^2} & -a - i\sqrt{16 - a^2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a + i\sqrt{16 - a^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a - i\sqrt{16 - a^2}}{2} \end{bmatrix}$$

Se  $|a| > 4$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}\right)t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a + \sqrt{a^2 - 16} \end{bmatrix} +$$

$$c_2 e^{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2}\right)t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a - \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix}.$$

Se  $|a| < 4$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{at}{2}} (\cos(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix} - e^{\frac{at}{2}} \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix}) + c_2 e^{\frac{at}{2}} (\cos(\sqrt{16-a^2}t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix} + e^{\frac{at}{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{16-a^2}t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix})$$

Se  $a = \pm 4$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2 t) e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} \pm 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se  $a < 1/2$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 + \frac{\sqrt{1-2a}}{2} & -1 - \frac{\sqrt{1-2a}}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 + \frac{\sqrt{1-2a}}{2} & 0 \\ 0 & -1 - \frac{\sqrt{1-2a}}{2} \end{bmatrix}$$

Se  $a > 1/2$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 + \frac{i\sqrt{2a-1}}{2} & -1 - \frac{i\sqrt{2a-1}}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 + \frac{i\sqrt{2a-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 - \frac{i\sqrt{2a-1}}{2} \end{bmatrix}$$

Se  $a < 1/2$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{(-1+\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1 + \frac{\sqrt{1-2a}}{2} \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1 - \frac{\sqrt{1-2a}}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Se  $a > 1/2$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} (\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - e^{-t} \sin(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}) + c_2 e^{-t} (\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \sin(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

(c) Se  $a > 0$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & -\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{a} \end{bmatrix}$$

Se  $a < 0$ :

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{-a}} & \frac{i}{\sqrt{-a}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & 1 - i\sqrt{-a} \end{bmatrix}$$

Se  $a > 0$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{(1+\sqrt{a})t} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{(1-\sqrt{a})t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se  $a < 0$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 (e^t \cos(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^t \sin(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \\ 0 \end{bmatrix}) +$$



$$c_2(e^t \cos(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \sin(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

2.3. (a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é  $p(t) = \det(A - tI_3) = (1-t)[(1-t)^2 + 1] = (1-t)(t^2 - 2t + 2)$  cujas raízes são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1 + i$  e  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = 1 - i$ .

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y & = 0 \\ -x & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 1$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $V = (0, 0, 1)$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = 1$ .

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} -ix + y & = 0 \\ -x - iy & = 0 \\ iz & = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, i\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = 1 + i$  acrescentado o vetor nulo. Assim,  $\bar{Z} = (1, i, 0)$  é um autovetor associado a  $\lambda_2 = 1 + i$ .

Temos também que  $\bar{Z} = (1, -i, 0)$  é um autovetor associado a  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = 1 - i$ . Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável em  $\mathbb{C}$  e as matrizes

$$P = [V \ Z \ \bar{Z}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Assim a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned}
 X(t) &= c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \operatorname{Re} \left\{ e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\
 &\quad + c_3 \operatorname{Im} \left\{ e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\
 &\quad + c_2 e^t \left( \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\
 &\quad + c_3 e^t \left( \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

(b) Substituindo  $t = 0$  na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} c_2 &= 1 \\ c_3 &= 1 \\ c_1 &= 1 \end{cases}$$

Obtemos  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$  e  $c_3 = 1$ . Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \left( \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + e^t \left( \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

2.4. (a)  $\begin{cases} x_1'(t) = & x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) & + f(t)/m \end{cases}$

(b) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{k}{m}}i & -\sqrt{\frac{k}{m}}i \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k}{m}}i & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{k}{m}}i \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PDP^{-1}$ . A solução geral do sistema é  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$

$$c_1 \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} \right) + c_2 \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} + \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$u(t) = x_1(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

### 3. A Matriz $A$ não é diagonalizável (página 457)

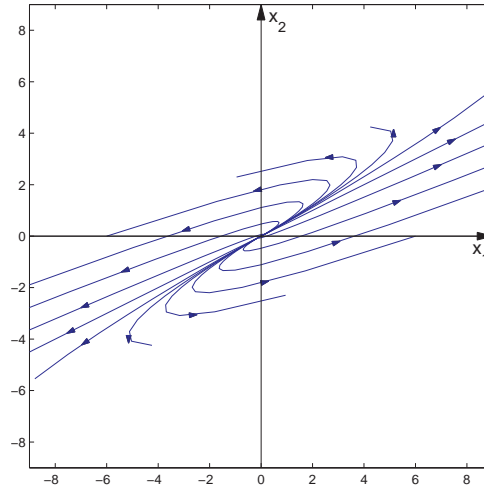
3.1. (a) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PJP^{-1}$ .

Assim a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

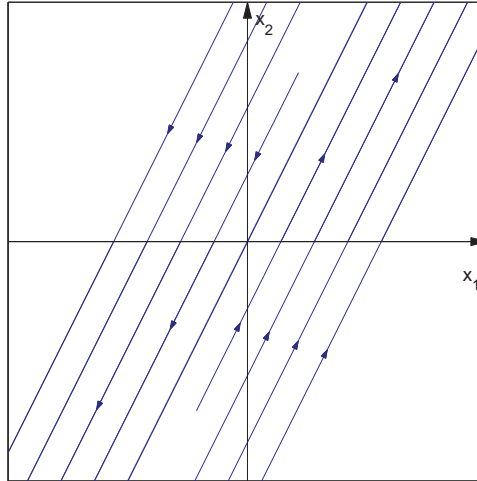


(b) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PJP^{-1}$ .

$$\text{Assim a solução geral é } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$



3.2. (a) Se  $|a| > 4$ :

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + \sqrt{a^2 - 16} & -a - \sqrt{a^2 - 16} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2} \end{bmatrix}$$

Se  $|a| < 4$ :

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + i\sqrt{16 - a^2} & -a - i\sqrt{16 - a^2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a + i\sqrt{16 - a^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a - i\sqrt{16 - a^2}}{2} \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

Se  $a = 4$ :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se  $a = -4$ :

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PJP^{-1}$ .

Se  $|a| > 4$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2}\right)t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a + \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix} + c_2 e^{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2}\right)t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a - \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix}.$$

Se  $|a| < 4$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{at}{2}} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix} - \sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{\frac{at}{2}} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix} + \sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix} \right)$$

Se  $a = \pm 4$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2 t)e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} \pm 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se  $a < 1/2$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1-2a} & -1 - \sqrt{1-2a} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1-2a} & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{1-2a} \end{bmatrix}$$

Se  $a > 1/2$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 + i\sqrt{2a-1} & -1 - i\sqrt{2a-1} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 + i\sqrt{2a-1} & 0 \\ 0 & -1 - i\sqrt{2a-1} \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

Se  $a = 1/2$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PJP^{-1}$ .

Se  $a < 1/2$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$

$$c_1 e^{(-1+\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1-2a} \\ 2 \end{bmatrix} +$$

$$c_2 e^{(-1-\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{1-2a} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Se  $a > 1/2$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} (\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$- e^{-t} \sin(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}) +$$

$$c_2 e^{-t} (\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$+ e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Bigg)$$

Se  $a = 1/2$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

- 3.3.** (a)  $\det(A - tI_3) = -(t-4)(t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$  ou  $t = 4$ . Logo os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ .

Para  $\lambda_1 = 2$ :

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim os autovetores associados a  $\lambda_1 = 2$  são  $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Assim  $V_1 = (1, 1, -1)$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_1 = 2$ .

Para  $\lambda_2 = 4$ :

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim os autovetores associados a  $\lambda_2 = 4$  são  $(\alpha, -\alpha, \alpha)$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Assim  $V_2 = (1, -1, 1)$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_2 = 4$ .

Vamos resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I_3)X = V_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Assim os vetores da forma  $X = (-\alpha, 1 - \alpha, \alpha)$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$  são tais

que  $(A - \lambda_1 I_3)X = V_1$ . Tomando  $\alpha = 0$ , temos que o vetor  $W_1 = (0, 1, 0)$  é tal que  $(A - 2I_3)W_1 = V_1 \Leftrightarrow AW_1 = 2W_1 + V_1$ . Logo:  $[AV_1 \ AW_1 \ AV_2] = [2V_1 \ 2W_1 + V_1 \ 4V_2] \Leftrightarrow A[V_1 \ W_1 \ V_2] =$

$$[V_1 \ W_1 \ V_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Multiplicando à direita pela inversa de } P = [V_1 \ W_1 \ V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos que  $A = PJP^{-1}$ , em que  $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

A solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_1 t} (W_1 + t V_1) + c_3 e^{\lambda_2 t} V_2 \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ &\quad + c_2 e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

(b) Substituindo-se  $t = 0$  e  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  na solução geral obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema algébrico obtemos  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  e  $c_3 = 1$ . A solução do PVI é

$$X(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

#### 4. Sistemas Não-Homogêneos (página 479)

4.1. (a) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 1 - t \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) + 1 + t \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= t - \frac{1}{2}t^2 \\ y_{2p}(t) &= -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t/2 - 3/4 - t^2/2 \\ -3t/2 - 3/4 + t^2/2 \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t/2 - 3/4 - t^2/2 \\ -3t/2 - 3/4 + t^2/2 \end{bmatrix}.$

(b) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} - e^t \\ e^{2t} + 2e^t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= 3y_1 - e^{2t} - e^t \\ \frac{d}{dt} y_2 &= 2y_2 + e^{2t} + 2e^t \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= \frac{2e^{2t} + e^t}{2} \\ y_{2p}(t) &= te^{2t} - 2e^t \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2e^{2t} + e^t}{2} \\ te^{2t} - 2e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} - 3/2e^t + e^{2t} \\ -te^{2t} + e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{2t} - 3/2e^t + e^{2t} \\ -te^{2t} + e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}.$

(c) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -2i-1 & 0 \\ 0 & 2i-1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -i \\ \frac{i}{2} & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \cos t \\ 2 \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos t - 2i \sin t \\ 2i \sin t + 2 \cos t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= (-2i-1) y_1 + 2e^{-it} \\ \frac{d}{dt} y_2 &= (2i-1) y_2 + 2e^{it} \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação obtemos como solução particular

$$y_{1p}(t) = \frac{2e^{-it}}{i+1}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = 2 \operatorname{Re}\{y_{1p}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix} 2 \cos t - 2 \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral real do sistema não homogêneo é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos t - 2 \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} + c_1 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{-t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(d) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ 2i-1 & & -2i-1 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2i+2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{4} & -\frac{i}{4} \\ \frac{i}{4} + \frac{1}{2} & \frac{i}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \cos t \\ i \cos t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= (2-2i) y_1 - i \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \frac{d}{dt} y_2 &= (2i+2) y_2 + i \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação obtemos como solução particular

$$y_{1p}(t) = \frac{(2i+1)e^{it} + (2i+3)e^{-it}}{2-16i}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = 2 \operatorname{Re}\{y_{1p}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2i-1 \end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{65} \cos t + \frac{16}{65} \sin t \\ -\frac{44}{65} \cos t - \frac{12}{65} \sin t \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral real do sistema não homogêneo é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{65} \cos t + \frac{16}{65} \sin t \\ -\frac{44}{65} \cos t - \frac{12}{65} \sin t \end{bmatrix} + c_1 e^{2t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{2t} \left( \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

(e) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t e^t \\ -2 t e^t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = JY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= y_1 + y_2 + t e^t \\ \frac{d}{dt} y_2 &= y_2 - 2 t e^t \end{aligned}$$

Resolvendo a segunda equação e substituindo o resultado na primeira obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) e^t \\ y_{2p}(t) &= -t^2 e^t \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \\ -t^2 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2t^3}{3} e^t \\ \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\frac{2t^3}{3} e^t \\ \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \end{bmatrix}.$

(f) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6te^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6te^{2t} \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , a equação  $X'(t) = AX(t) + F(t)$  se transforma em

$$Y'(t) = JY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ \frac{d}{dt} y_2 &= 2y_2 + 6te^{2t} \end{aligned}$$



Resolvendo a segunda equação e substituindo o resultado na primeira obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned}y_{1p}(t) &= t^3 e^{2t} \\ y_{2p}(t) &= 3 t^2 e^{2t}\end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = P Y_p(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 e^{2t} \\ 3 t^2 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 t^3 + 3 t^2) e^{2t} \\ -2 t^3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} (2 t^3 + 3 t^2) e^{2t} \\ -2 t^3 e^{2t} \end{bmatrix}$ .

4.2. (a) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{2}{s} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{4}{s^2} \end{cases}$$

substituindo-se  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 1$  obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{2}{s} \\ sX_2(s) - 1 &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{4}{s^2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned}X_1(s) &= \frac{3s^2 - 2s + 2}{(s-2)s^3} \\ X_2(s) &= \frac{s^3 - s^2 + 4s - 2}{(s-2)s^3}\end{aligned}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$\begin{aligned}X_1(s) &= -\frac{5}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{5}{4(s-2)} \\X_2(s) &= -\frac{1}{4s} - \frac{3}{2s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{5}{4(s-2)}\end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{5e^{2t}}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{5}{4} \\ \frac{5e^{2t}}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{1}{s-1} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{1}{s-2} \end{cases}$$

substituindo-se  $x_1(0) = 1$  e  $x_2(0) = 0$  obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - 1 &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{1}{s-1} \\ sX_2(s) &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{1}{s-2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned}X_1(s) &= \frac{s^3 - 6s^2 + 7s + 1}{(s-3)(s-2)^2(s-1)} \\X_2(s) &= \frac{3s^2 - 6s + 1}{(s-3)(s-2)^2(s-1)}\end{aligned}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= -\frac{3}{2(s-1)} + \frac{5}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{5}{2(s-3)} \\ X_2(s) &= \frac{1}{s-1} - \frac{6}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{5}{s-3} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} -\frac{5e^{3t}}{2} + te^{2t} + 5e^{2t} - \frac{3e^t}{2} \\ 5e^{3t} - te^{2t} - 6e^{2t} + e^t \end{bmatrix}$$

(c) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= -X_1(s) - 4X_2(s) + \frac{4s}{s^2+1} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{2}{s^2+1} \end{cases}$$

substituindo-se  $x_1(0) = 1$  e  $x_2(0) = 1$  obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - 1 &= -X_1(s) - 4X_2(s) + \frac{4s}{s^2+1} \\ sX_2(s) - 1 &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{2}{s^2+1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{s^3 + s^2 + 5s - 11}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 5)} \\ X_2(s) &= \frac{s^3 + 2s^2 + 7s + 4}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 5)} \end{aligned}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$X_1(s) = \frac{-s-1}{s^2+2s+5} + \frac{2s-2}{s^2+1}$$

$$X_2(s) = \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2s+5}$$

Achando a inversa da transformada de  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \cos(2t) - 2 \operatorname{sen} t + 2 \cos t \\ -\frac{e^{-t} \operatorname{sen}(2t)}{2} + \operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

(d) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = X_1(s) - X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = 5X_1(s) + 3X_2(s) + \frac{4s}{s^2+1} \end{cases}$$

substituindo-se  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 0$  obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) = X_1(s) - X_2(s) \\ sX_2(s) = 5X_1(s) + 3X_2(s) + \frac{4s}{s^2+1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$X_1(s) = -\frac{4s}{(s^2+1)(s^2-4s+8)}$$

$$X_2(s) = \frac{4(s-1)s}{(s^2+1)(s^2-4s+8)}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{28s - 128}{65(s^2 - 4s + 8)} - \frac{28s - 16}{65(s^2 + 1)} \\ X_2(s) &= \frac{44s + 96}{65(s^2 - 4s + 8)} - \frac{44s + 12}{65(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \left( \frac{28 \cos(2t)}{65} - \frac{36 \sin(2t)}{65} \right) + \\ + \frac{16 \sin t}{65} - \frac{28 \cos t}{65} \\ e^{2t} \left( \frac{92 \sin(2t)}{65} + \frac{44 \cos(2t)}{65} \right) + \\ - \frac{12 \sin t}{65} - \frac{44 \cos t}{65} \end{bmatrix}$$

(e) Aplicando a transformada de Laplace às equações e substituindo-se  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 0$  obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) = 3X_1(s) - 4X_2(s) \\ sX_2(s) = X_1(s) - X_2(s) + \frac{1}{(s-1)^2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= -\frac{4}{(s-1)^4} \\ X_2(s) &= \frac{s-3}{(s-1)^4} = \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{(s-1)^4} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2t^3 e^t}{3} \\ \frac{t^2 e^t}{2} - \frac{t^3 e^t}{3} \end{bmatrix}$$

(f) Aplicando a transformada de Laplace às equações e substituindo-se  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 0$  obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) &= 4X_1(s) + 2X_2(s) + \frac{6}{(s-2)^2} \\ sX_2(s) &= -2X_1(s) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{6s}{(s-2)^4} = \frac{6}{(s-2)^3} + \frac{12}{(s-2)^4} \\ X_2(s) &= -\frac{12}{(s-2)^4} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2t^3 e^{2t} + 3t^2 e^{2t} \\ -2t^3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

---

## Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

---

Neste capítulo estudaremos algumas equações diferenciais parciais usando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier.

Lembramos que uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se  $f(t)$  é contínua em  $[a, b]$  exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Vamos considerar duas funções contínuas por partes no intervalo  $[a, b]$  iguais se elas diferem possivelmente apenas nos pontos de descontinuidade.

Para toda função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes a **série de Fourier** da função  $f$  é definida por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad (5.1)$$

em que os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

## 5.1 Séries de Fourier

O teorema seguinte, cuja demonstração será realizada somente no final desta seção, afirma que para toda função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes, cuja derivada  $f'$  também é contínua por partes a série de Fourier de  $f$  converge.



**Teorema 5.1 (Fourier).** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, a série de Fourier de  $f$*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para  $f$  nos pontos de  $(-L, L)$  em que  $f$  é contínua. Ou seja, podemos representar  $f$  por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

As funções  $\cos \frac{n\pi t}{L}$  e  $\sin \frac{n\pi t}{L}$  são periódicas com período (fundamental=menor período) igual a  $\frac{2L}{n}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Assim  $2L$  é período comum a todas elas. Logo a série de Fourier de uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $T = 2L$ . Portanto a série de Fourier de  $f$  pode ser entendida como a série de Fourier da extensão periódica de  $f$ ,  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad \text{se } t \in [-L, L] \quad \text{e é tal que} \quad \tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t).$$

Ou seja, a série de Fourier de  $f$  é a mesma série de Fourier de  $\tilde{f}$  que é a função que é periódica de período  $2L$  e que coincide com  $f$  no intervalo  $[-L, L]$ .

O termo constante

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

representa a média da função  $f$  no intervalo  $[-L, L]$  e está escrito desta forma ( $\frac{a_0}{2}$  e não simplesmente  $a_0$ ) somente para que a fórmula que vale para os coeficientes dos cossenos da série de Fourier fique valendo também para o termo constante ( $n = 0$ ).

**Exemplo 5.1.** Seja  $L$  um número real maior que zero. Considere a função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de  $f_{c,d}^{(0)}$ . Fazendo a mudança de variáveis  $s = \frac{n\pi t}{L}$  obtemos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} dt = d - c,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{d-c}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi d - \operatorname{sen} n\pi c}{n} \cos \frac{n\pi t}{L} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi c - \cos n\pi d}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}. \end{aligned}$$

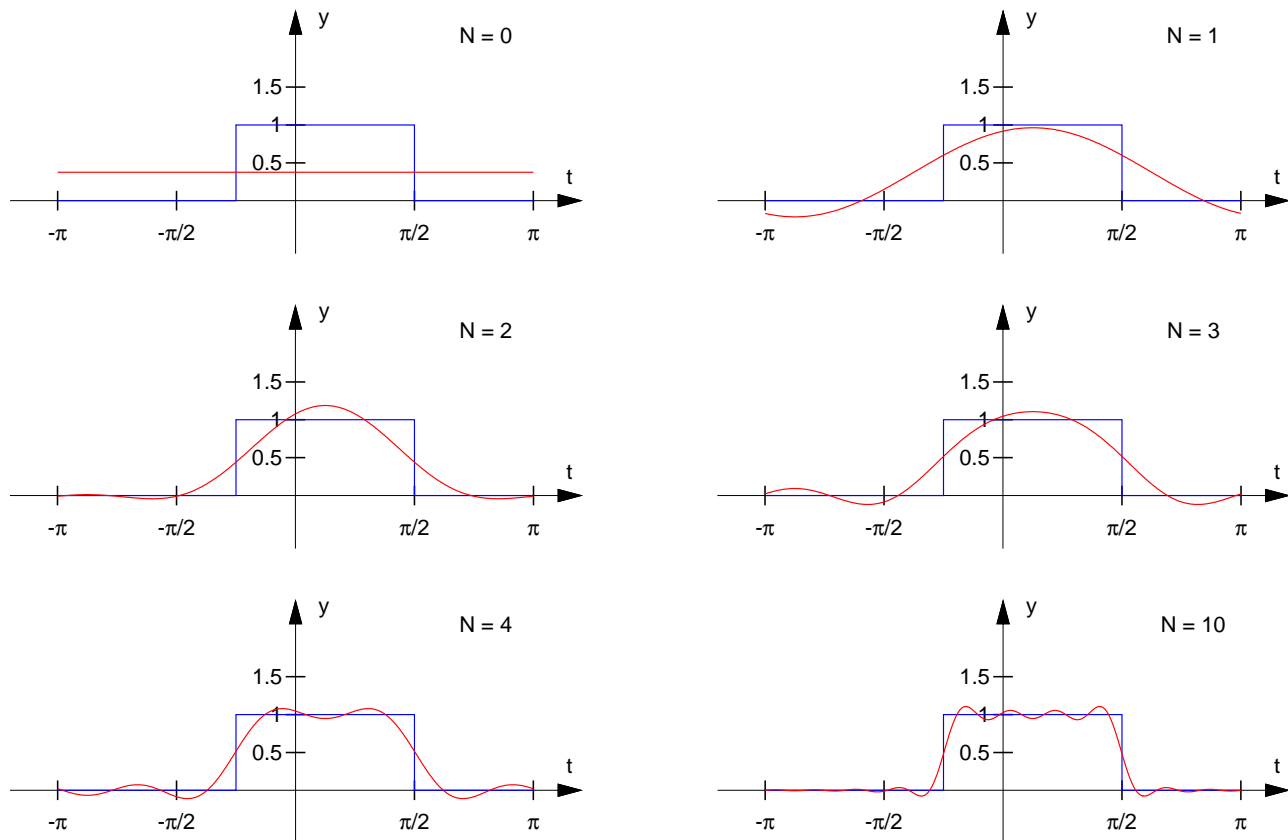


Figura 5.1 – Somas parciais da série de Fourier da função do Exemplo 5.1, para  $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$

**Exemplo 5.2.** Vamos calcular a série de Fourier da função  $u_0 : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u_0(t) = 1$ . Usando o exemplo anterior vemos que a série de Fourier da função

$$u_0 = f_{-1,1}^{(0)}$$

$$S_{u_0}(t) = 1 = u_0(t).$$

que é a própria função.

**Exemplo 5.3.** Vamos calcular a série de Fourier da função  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases}$$

Usando a notação do Exemplo 5.1, podemos escrever

$$f(t) = f_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}(t), \quad \text{com } L = \pi.$$

Portanto usando os coeficientes que obtivemos para  $f_{c,d}^{(0)}$  no Exemplo 5.1, com

$$c = -\frac{1}{4} \text{ e } d = \frac{1}{2} \text{ temos que}$$

$$S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt.$$

Pelo Teorema 5.1 (de Fourier) temos que  $f$  pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(t) = S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt,$$

$$\text{para } t \neq -\frac{\pi}{4} \text{ e } t \neq \frac{\pi}{2}.$$

**Exemplo 5.4.** Vamos calcular a série de Fourier da função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{e tal que } g(t + 2\pi) = g(t)$$

Esta função é a extensão periódica da função  $f = f_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}$  com período igual a  $2\pi$ .

Logo a sua série de Fourier é a mesma da função do Exemplo anterior

$$S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt.$$

Pelo Teorema 5.1 (de Fourier) temos que  $g$  pode ser representada por sua série de Fourier

$$g(t) = S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt,$$

para  $t \neq -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$  e  $t \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

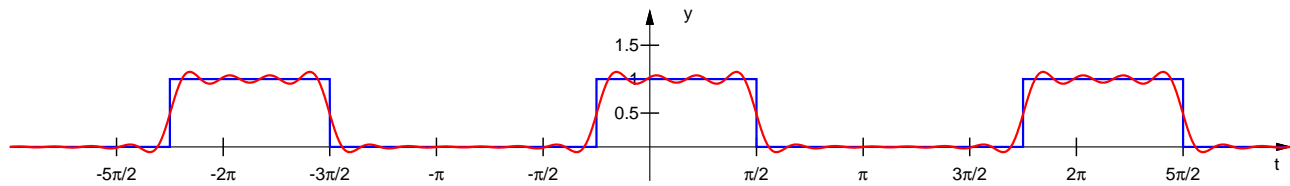


Figura 5.2 – Soma parcial da série de Fourier da função do Exemplo 5.4, com  $N = 10$

**Exemplo 5.5.** Seja  $L$  um número real maior que zero. Seja  $m$  um inteiro positivo. Seja

$u_m : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u_m(t) = \cos \frac{m\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Fazendo a mudança de variáveis  $s = \frac{\pi t}{L}$ ,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ms ds = 0,$$

Vamos calcular os coeficientes  $a_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Fazendo a mudança de variáveis  $s = \frac{\pi t}{L}$ , para  $n > 0$  e  $n \neq m$  temos que,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ms \cos ns ds$$

Usando o fato de que  $\cos ms \cos ns = \frac{1}{2}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]$ , temos então que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds \\ &= \frac{1}{2\pi(m+n)} \operatorname{sen}(m+n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(m-n)} \operatorname{sen}(m-n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

e para  $n = m$ ,

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ms ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ms] ds = 1.$$

Aqui usamos o fato de que  $\cos^2 ms = \frac{1}{2}[1 + \cos 2ms]$ .

Vamos calcular os coeficientes  $b_n$ , para  $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ms \sin ns \, ds \end{aligned}$$

Usando o fato de  $\cos ms \sin ns = \frac{1}{2}[\sin(m+n)s + \sin(m-n)s]$ , temos que

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)s + \sin(m-n)s] ds = 0$$

Nestas integrais usamos relações que podem ser obtidas somando-se ou subtraindo-se duas das relações abaixo.

$$\begin{aligned} \cos(m+n)s &= \cos ms \cos ns - \sin ms \sin ns \\ \cos(m-n)s &= \cos ms \cos ns + \sin ms \sin ns \\ \sin(m+n)s &= \sin ms \cos ns + \cos ms \sin ns \\ \sin(m-n)s &= \sin ms \cos ns - \cos ms \sin ns. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de  $u_m : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$S_{u_m}(t) = \cos \frac{m\pi t}{L} = u_m(t), \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

**Exemplo 5.6.** Seja  $L$  um número real maior que zero. Seja  $m$  um inteiro positivo. Seja

$v_m : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$v_m(t) = \sin \frac{m\pi t}{L}, \text{ para } t \in [-L, L]$$



Vamos calcular os coeficientes  $a_n$ , para  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Fazendo a mudança de variáveis

$$s = \frac{\pi t}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms ds = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $s = \frac{\pi t}{L}$ , temos que para  $n = 1, 2, 3 \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms \cos ns ds \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $\operatorname{sen} ms \cos ns = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s]$  obtemos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0$$

Vamos calcular os coeficientes  $b_n$ , para  $n = 1, 2 \dots$ . Para  $n \neq m$  temos que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns ds$$

Usando o fato de que  $\operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns = \frac{1}{2} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]$  temos que

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0$$

E para  $n = m$ ,

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 ms ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ms] ds = 1$$

Aqui usamos o fato de que  $\sin^2 ms = \frac{1}{2}[1 - \cos 2ms]$ .

Assim a série de Fourier de  $v_m : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$S_{v_m}(t) = \cos \frac{m\pi t}{L} = v_m(t), \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

Com os coeficientes das funções destes exemplos podemos determinar os coeficientes das séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

**Proposição 5.2.** *Sejam  $f, g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se*

$$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt,$$

$$a_n(g, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad b_n(g, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt,$$

então para quaisquer números  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$a_n(\alpha f + \beta g, L) = \alpha a_n(f, L) + \beta a_n(g, L) \quad e \quad b_n(\alpha f + \beta g, L) = \alpha b_n(f, L) + \beta b_n(g, L).$$

**Demonstração.**

$$a_n(\alpha f + \beta g, L) =$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (\alpha f(t) + \beta g(t)) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \alpha \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \beta \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt =$$

$$\alpha a_n(f, L) + \beta a_n(g, L).$$

$$\begin{aligned}
b_n(\alpha f + \beta g, L) &= \\
\frac{1}{L} \int_{-L}^L (\alpha f(t) + \beta g(t)) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt &= \alpha \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt + \beta \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \\
&= \alpha b_n(f, L) + \beta b_n(g, L).
\end{aligned}$$

■

**Exemplo 5.7.** Seja  $L$  um número real maior que zero. Seja  $n$  um inteiro positivo. Seja

$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = 3 - 2 \cos \frac{15\pi t}{L} + 4 \operatorname{sen} \frac{31\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Usando a Proposição 5.2 temos que os coeficientes da série de Fourier de  $f$  são dados por

$$a_n(f, L) = 3a_n(1, L) - 2a_n(\cos \frac{15\pi t}{L}, L) + 4a_n(\operatorname{sen} \frac{31\pi t}{L}, L) = 3a_n(u_0, L) - 2a_n(u_{15}, L) + 4a_n(v_{31}, L)$$

$$b_n(f, L) = 3b_n(1, L) - 2b_n(\cos \frac{15\pi t}{L}, L) + 4b_n(\operatorname{sen} \frac{31\pi t}{L}, L) = 3b_n(u_0, L) - 2b_n(u_{15}, L) + 4b_n(v_{31}, L)$$

Como já calculamos estes coeficientes nos exemplos anteriores e obtivemos que

$$a_n(u_0, L) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad b_n(u_0, L) = 0, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

$$a_n(u_{15}, L) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 15, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad b_n(u_{15}, L) = 0, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

$$a_n(v_{31}) = 0, \text{ para } n = 1, 2, \dots, \quad b_n(v_{31}, L) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 31, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então temos que a série de Fourier da função deste exemplo é ela própria:

$$S_f(t) = 3 - 2 \cos \frac{15\pi t}{L} + 4 \sin \frac{31\pi t}{L} = f(t).$$

**Exemplo 5.8.** Considere a função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de  $f_{cd}^{(1)}$ . Fazendo a mudança de variáveis  $s = \frac{n\pi t}{L}$  e integrando-se por partes obtemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} t dt = \frac{L}{2} (d^2 - c^2) \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} t \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{n\pi c}^{n\pi d} s \cos s ds \\ &= \frac{L}{n^2 \pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d} \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} t \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{n\pi c}^{n\pi d} s \sin s ds \\ &= \frac{L}{n^2 \pi^2} (-s \cos s + \sin s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{L(d^2 - c^2)}{4} + \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s \sin s + \cos s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} + \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-s \cos s + \sin s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n} \sin \frac{n\pi t}{L}. \end{aligned}$$

### 5.1.1 Funções Pares e Ímpares

Lembramos que uma função  $h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é **par**, se

$$h(-t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [-L, L]$$

e é **ímpar**, se

$$h(-t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [-L, L].$$

Lembramos também que se  $h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^L h(t) dt = 0,$$

e que se  $h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par, então

$$\int_{-L}^L h(t) dt = 2 \int_0^L h(t) dt.$$

Já vimos que se uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes com derivada  $f'$  também contínua por partes, então pelo Teorema 5.1 ela pode ser representada por sua série de Fourier

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}.$$

Se a função  $f$  é par, então  $f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}$  é ímpar e  $f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}$  é par (verifique!). Logo os coeficientes da série de Fourier de  $f$  são dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ou seja, se uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Analogamente, se a função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar, então  $f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$  é par e  $f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}$  é ímpar (verifique!) e assim os coeficientes da série de Fourier de  $f$  são dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ou seja, se uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

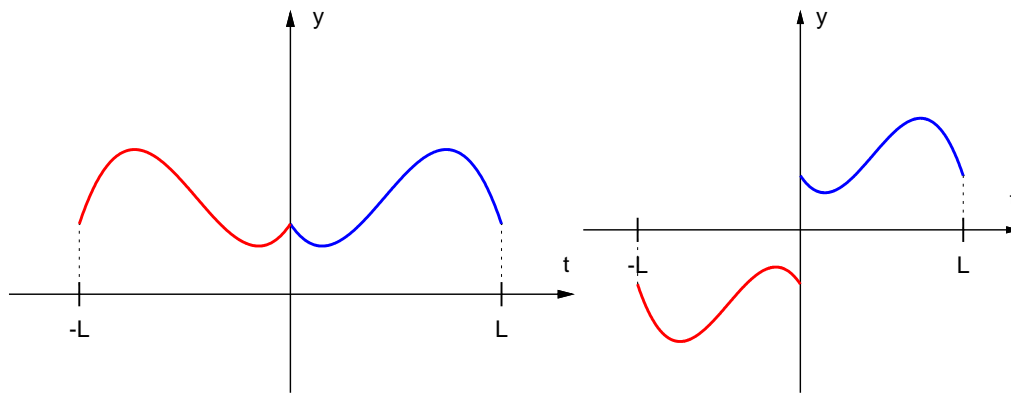


Figura 5.3 – Prolongamentos par e ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo  $[0, L]$

Para as funções  $f$  que são definidas apenas em  $[0, L]$  podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par ou ímpar no intervalo  $[-L, L]$ :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases} \quad \text{é par}$$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases} \quad \text{é ímpar.}$$

E assim temos o seguinte resultado.

**Corolário 5.3.** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes.*

(a) *A série de Fourier de cossenos de  $f$*

$$Sc_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

converge para  $f$  nos pontos do intervalo  $(0, L)$  em que  $f$  é contínua. Ou seja, podemos representar  $f$  por sua série de cossenos de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$



(b) A série de Fourier de senos de  $f$

$$Ss_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

converge para  $f$  nos pontos do intervalo  $(0, L)$  em que  $f$  é contínua. Ou seja, podemos representar  $f$  por sua série de senos de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

**Exemplo 5.9.** Considere a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(t) = 1$ , para  $0 \leq t \leq 1$ . A série de cossenos é obtida estendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja ímpar. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 561.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) = 2, \quad a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = 0,$$

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$Sc_f(t) = 1,$$

$$Ss_f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}.$$

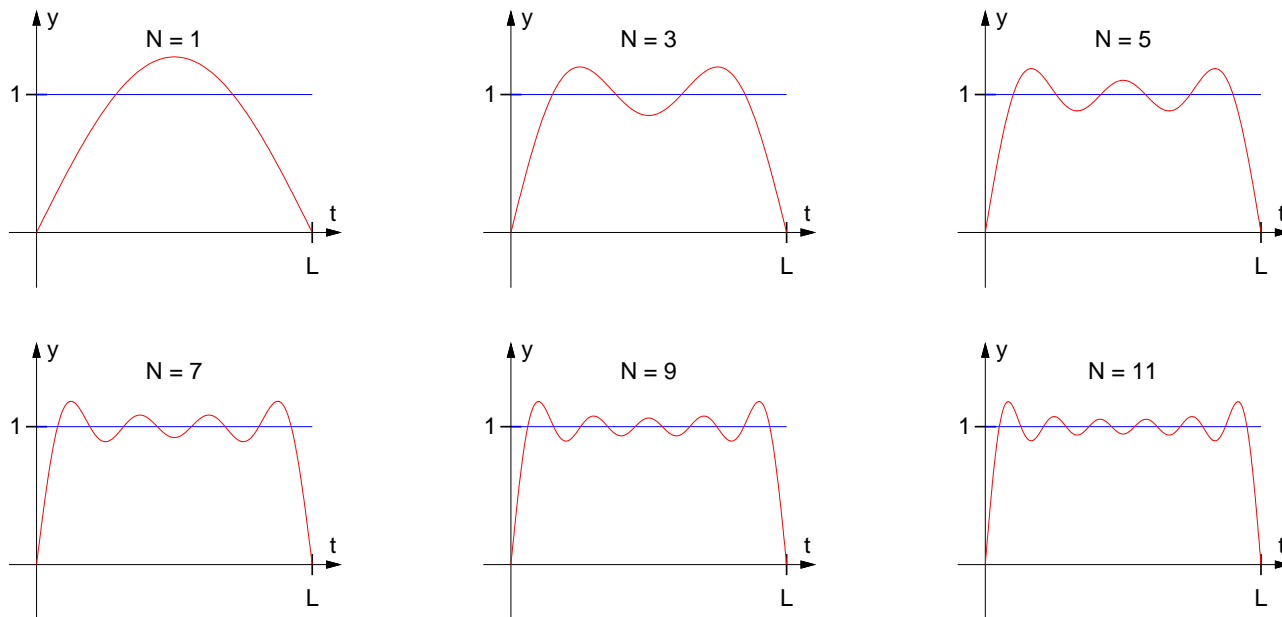


Figura 5.4 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = 1$  para  $t \in [0, L]$  e as somas parciais da série de Fourier de senos de  $f$ , para  $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Assim os termos de índice par da série de senos são nulos. Pelo Corolário 5.3 temos que

$$f(t) = Ss_f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \text{ para } t \in (0, L).$$

**Exemplo 5.10.** Considere a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(t) = t$ , para  $0 \leq t \leq L$ . A série de cossenos é obtida estendendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja ímpar. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 561.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(1)}, L) = L,$$

$$a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(1)}, L) = \frac{2L}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2L}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1),$$

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(1)}, L) = \frac{2L}{n\pi} (-\cos n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}2L}{n\pi}.$$

$$Sc_f(t) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{L},$$

$$Ss_f(t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

Assim os termos de índice par da série de cossenos (exceção de  $a_0$ ) são nulos. Pelo Corolário 5.3 temos que  $f$  pode ser representada por sua série de cossenos e por sua série de senos de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \\ &= \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \end{aligned}$$

para  $t \in (0, L)$ .

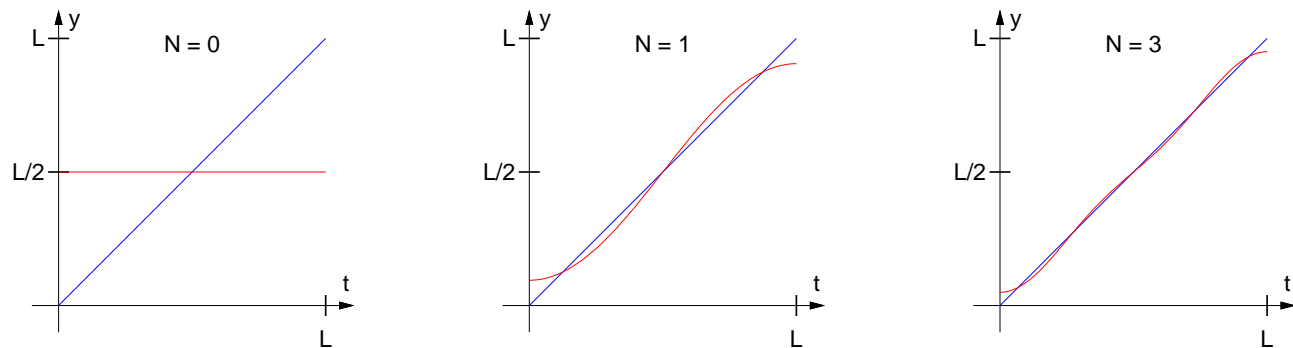


Figura 5.5 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = t$  para  $t \in [0, L]$  e somas parciais da sua série de Fourier de cossenos para  $N = 0, 1, 3$

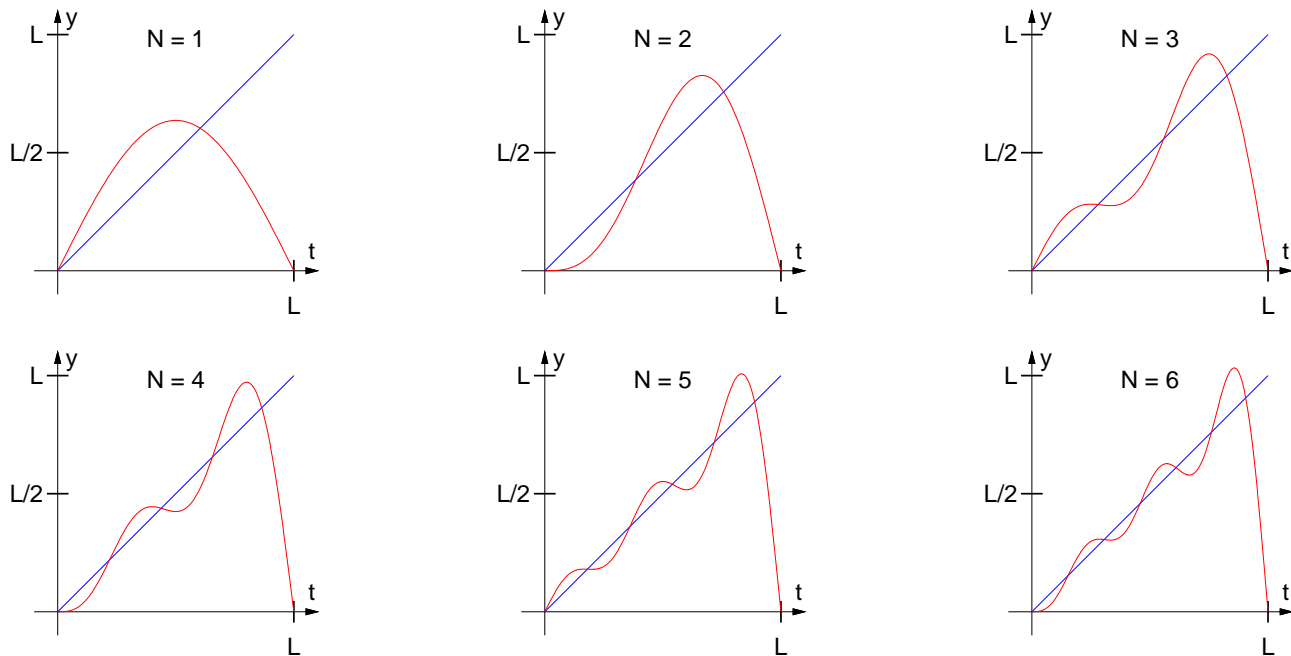


Figura 5.6 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = t$  para  $t \in [0, L]$  e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de  $f$ , para  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

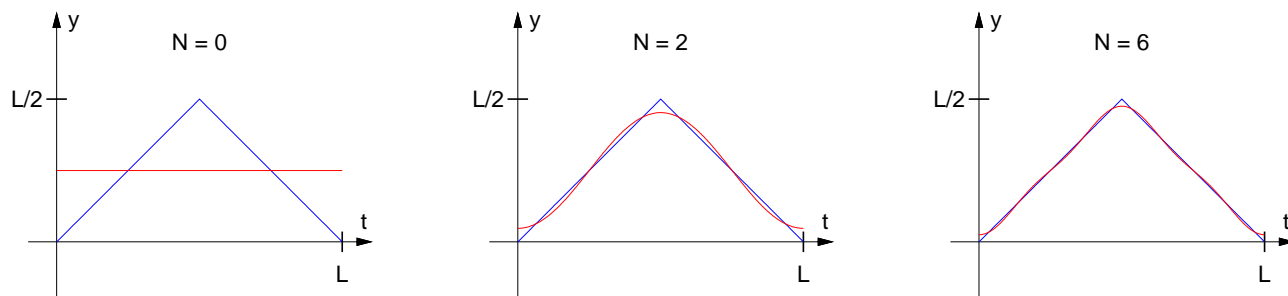


Figura 5.7 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(t) = t$  se  $t \in [0, L/2]$  e  $f(t) = L - t$  se  $t \in [L/2, L]$  e somas parciais da série de Fourier de cossenos para  $N = 0, 2, 6$

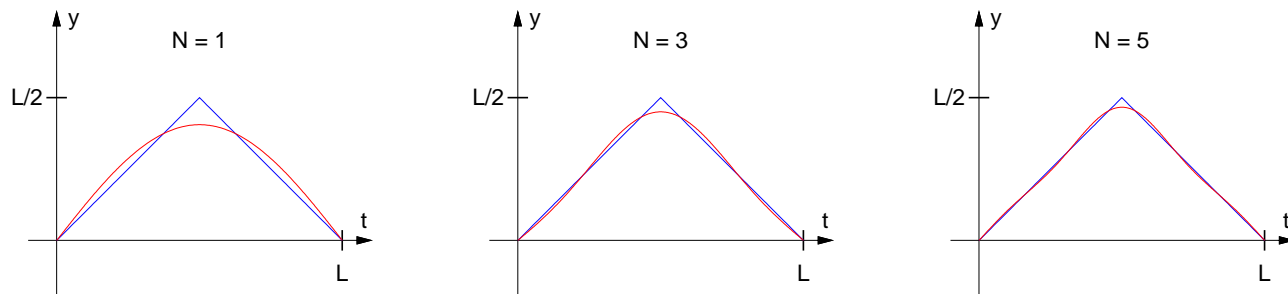


Figura 5.8 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(t) = t$  se  $t \in [0, L/2]$  e  $f(t) = L - t$  se  $t \in [L/2, L]$  e somas parciais da série de Fourier de senos para  $N = 1, 3, 5$

**Exemplo 5.11.** Considere a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq L/2 \\ L - t, & \text{se } L/2 < t \leq L \end{cases}$$

A série de cossenos é obtida estendendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja ímpar.

Usando a tabela na página 561 os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  podem ser calculados como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = 2 \left( a_0(f_{0,1/2}^{(1)}, L) + La_0(f_{1/2,1}^{(0)}, L) - a_0(f_{1/2,1}^{(1)}, L) \right) = \frac{L}{2} \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 2 \left( a_n(f_{0,1/2}^{(1)}, L) + La_n(f_{1/2,1}^{(0)}, L) - a_n(f_{1/2,1}^{(1)}, L) \right) \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big|_0^{n\pi/2} + \frac{2L}{n\pi} \sin s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{4L}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2L}{n^2\pi^2} - \frac{2L}{n^2\pi^2} \cos n\pi \\ &= 2L \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos. Podemos separar os termos em de índice par e de índice ímpar

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0 \\ a_{2k} &= 2L \frac{2 \cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = L \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

os termos de índice par podem ainda ser separados:

$$a_{2,2l} = 0$$



$$a_{2(2l+1)} = L \frac{-2}{(2l+1)^2 \pi^2} = -\frac{2L}{(2l+1)^2 \pi^2}.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/2}^{(1)}) + L b_n(f_{1/2,1}^{(0)}) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}) \right) \\ &= \frac{2L}{n^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi/2} - \frac{2L}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2 \pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{4L}{n^2 \pi^2} \left( -\frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{4L \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4L(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2}.$$

Como a função  $f$  é contínua com sua derivada  $f'$  também contínua, pelo Corolário 5.3, ela pode ser representada por sua série de cossenos e por sua série de senos de

Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} \\
 &= \frac{L}{4} + \frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{2n\pi t}{L} \\
 &= \frac{L}{4} - \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{2(2n+1)\pi t}{L} \\
 f(t) &= \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} \sin \frac{n\pi t}{L} \\
 &= \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi t}{L}
 \end{aligned}$$

Vários coeficientes são nulos e não é por acaso. Sempre que um coeficiente é calculado por uma integral de 0 a  $L$  de uma função  $h(t)$  que é simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (\frac{L}{2}, 0)$ , ou seja, tal que  $h(t) = -h(L-t)$ , para  $t \in [0, L/2]$ , o seu valor é igual a zero (verifique!). No exemplo anterior isto ocorreu com os coeficientes de índice ímpar da série de cossenos e com os de índice par da série de senos (verifique!). Isto é análogo ao que ocorre com funções ímpares sendo integradas em intervalos simétricos.

### 5.1.2 Demonstração do Teorema sobre a Convergência da Série de Fourier

**Demonstração do Teorema 5.1 na página 527.** Vamos mostrar que a soma parcial da série tende a  $f(x)$ , se  $x \in (-L, L)$  é um ponto de continuidade de  $f$ . Substituindo-se os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  na soma parcial da série,

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^N \left( \cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \sin \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left( \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \right) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi(t-x)}{L} \right) f(t) dt \quad (5.4) \end{aligned}$$

Mas

$$\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)s - \sin \frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^N \left( \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)s \right) = 2 \sin \frac{s}{2} \sum_{n=1}^N \cos ns$$

Logo

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos ns = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)s}{2 \sin \frac{s}{2}}.$$

Substituindo-se  $s$  por  $\frac{\pi(t-x)}{L}$  obtemos

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi(t-x)}{L} = \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi(t-x)}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-x)}{2L}}. \quad (5.5)$$

Substituindo-se (5.5) em (5.4) obtemos

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi(t-x)}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-x)}{2L}} f(t) dt$$

Substituindo-se  $f$  pela sua extensão periódica de período  $2L$ ,  $\tilde{f}$ , usando o fato de que neste caso as integrais anteriores podem ser calculadas de  $-L+x$  até  $L+x$  e fazendo a mudança de variáveis  $s = t - x$  obtemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{L} \int_{-L+x}^{L+x} \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi(t-x)}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-x)}{2L}} \tilde{f}(t) dt = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi s}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi s}{2L}} \tilde{f}(x+s) ds \quad (5.6) \end{aligned}$$

Tomando-se  $f(x) = 1$  em (5.6) obtemos

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi s}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi s}{2L}} = 1. \quad (5.7)$$

Assim de (5.6) e (5.7) temos que

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (\tilde{f}(x+s) - f(x)) \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi s}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi s}{2L}} ds = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{\tilde{f}(x+s) - \tilde{f}(x)}{s} \frac{\frac{s}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi s}{2L}} \operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi s}{L} ds. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Como  $\tilde{f}$  é contínua por partes com derivada  $\tilde{f}'$  também contínua por partes, então para  $x \in (-L, L)$  tal que  $f(x)$  é contínua temos que a função

$$g(s) = \frac{\tilde{f}(x+s) - \tilde{f}(x)}{s} \frac{\frac{s}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi s}{2L}}$$

é contínua por partes. Pois, pelo Teorema do valor médio, se  $f'$  é contínua em  $x$ , então  $g$  é contínua em  $s = 0$ . Se  $f$  não é contínua em  $x$ , então os limites laterais de  $f'(\xi)$  quando  $\xi$  tende a zero existem. Assim segue do lema que apresentaremos a seguir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N(x) - f(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(s) \operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi s}{L} ds = 0.$$

■

---

**Lema 5.4 (Riemann-Lebesgue).** *Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua por partes, então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(s) \operatorname{sen} \lambda s ds = 0$$

**Demonstração.** Seja

$$I(\lambda) = \int_a^b g(s) \operatorname{sen} \lambda s \, ds \quad (5.9)$$

Vamos supor inicialmente que  $g$  seja contínua. Fazendo-se a mudança de variáveis  $s = t + \frac{\pi}{\lambda}$  obtemos

$$I(\lambda) = - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(t + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda t \, dt \quad (5.10)$$

Seja  $M = \max_{s \in [a-\pi, b]} g(s)$ . Somando-se (5.9) e (5.10) e calculando-se o módulo obtemos que

$$\begin{aligned} |2I(\lambda)| &= \left| \int_a^b g(s) \operatorname{sen} \lambda s \, ds - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(s + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda s \, ds \right| = \\ &\leq \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a |g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b |g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds \\ &\leq \frac{2M\pi}{\lambda} + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds < 2\epsilon, \end{aligned}$$

para  $\lambda > \frac{2M\pi}{\epsilon}$  tal que  $|g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| < \frac{\epsilon}{b-a}$ , para todo  $s \in [a, b]$ . O caso geral segue da aplicação do argumento acima para cada parte de  $g$  que é contínua. ■

### 5.1.3 Limites e Derivação de Séries de Funções

**Teorema 5.5.** *Sejam  $u_1, u_2, \dots : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis. Seja  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Se

$$\left| \frac{du_n}{dx}(x) \right| \leq a_n, \quad \text{para todo } x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \dots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

então

$$\frac{du}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

**Demonstração.** Seja  $x \in [a, b]$ . Seja  $\epsilon > 0$ . Sejam

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x),$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x),$$

$$q_N(x, h) = \frac{S_N(x+h) - S_N(x)}{h},$$

$$q(x, h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $M, N > N_0$  implica  $\sum_{n=M}^N a_n < \frac{\epsilon}{3}$ . Então

$$|S'_N(x) - S'_M(x)| = \left| \sum_{n=M}^N \frac{du_n}{dx}(x) \right| \leq \sum_{n=M}^N \left| \frac{du_n}{dx}(x) \right| \leq \sum_{n=M}^N a_n < \frac{\epsilon}{3}, \quad (5.11)$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Deixando  $N$  fixo e passando ao limite quando  $M$  tende a infinito obtemos

$$|S'_N(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (5.12)$$

Sejam  $M, N > N_0$ . Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a  $S_N(x) - S_M(x)$  e por (5.11) obtemos que existe  $\xi$  entre  $x$  e  $x + h$  tal que

$$|q_N(x, h) - q_M(x, h)| = |S'_N(\xi) - S'_M(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Deixando  $N$  fixo e passando ao limite quando  $M$  tende a infinito obtemos

$$|q_N(x, h) - q(x, h)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } h \text{ tal que } x + h \in [a, b]. \quad (5.13)$$

Como  $\lim_{h \rightarrow 0} q_N(x, h) = S'_N(x)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < h < \delta$  implica que

$$|q_N(x, h) - S'_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (5.14)$$

De (5.13), (5.14) e (5.12) segue-se que

$$\begin{aligned} |q(x, h) - g(x)| &\leq |q(x, h) - q_N(x, h)| + |q_N(x, h) - S'_N(x)| + |S'_N(x) - g(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

■



**Teorema 5.6.** *Sejam  $u_1, u_2, \dots : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

*Se*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \text{para todo } x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \dots$$

*e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

*então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x),$$

*para  $x_0 \in [a, b]$  tal que existam  $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$ , para  $n = 1, 2, \dots$*

**Demonstração.** Seja  $\epsilon > 0$ . Sejam

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$$

$$L_n = \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

$$\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^N L_n$$

Existe  $L = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$ , pois  $|L_n| \leq a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

Logo existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $N > N_0$  temos que

$$|L - \tilde{S}_N| = |L - \sum_{n=1}^N L_n| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (5.15)$$

Também existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $M, N > N_1$  implica  $\sum_{n=M}^N a_n < \frac{\epsilon}{3}$ . Então

$$|S_N(x) - S_M(x)| = \left| \sum_{n=M}^N u_n(x) \right| \leq \sum_{n=M}^N |u_n(x)| \leq \sum_{n=M}^N a_n < \frac{\epsilon}{3}, \quad (5.16)$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Deixando  $N$  fixo e passando ao limite quando  $M$  tende a infinito obtemos

$$|S_N(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \quad (5.17)$$

Seja  $N > \max\{N_0, N_1\}$ . Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} S_N(x) = \tilde{S}_N$ , então existe  $\delta > 0$  tal que para  $|x - x_0| < \delta$ ,

$$|\tilde{S}_N - S_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (5.18)$$

De (5.15), (5.18) e (5.16) segue-se que

$$|L - u(x)| \leq |L - \tilde{S}_N| + |\tilde{S}_N - S_N(x)| + |S_N(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

■

## 5.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) &= d - c \\ a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) &= \frac{1}{n\pi} \sen s \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{2} (d^2 - c^2) \\ a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{n^2 \pi^2} (s \sen s + \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \\ \frac{L}{n^2 \pi^2} (-s \cos s + \sen s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{3} (d^3 - c^3) \\ a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{n^3 \pi^3} ((s^2 - 2) \sen s + 2s \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \\ \frac{L^2}{n^3 \pi^3} (2s \sen s + (2 - s^2) \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$

## Exercícios (respostas na página 648)

1.1. Mostre que uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é par, então os coeficientes da sua série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1.2. Mostre que uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar, então os coeficientes da sua série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1.3. (a) Mostre que se uma função  $h : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (\frac{L}{2}, 0)$ , ou seja, se

$$h(L - t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{L}{2}],$$

então

$$\int_0^L h(t) dt = 0.$$

(b) Mostre que se  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação à reta  $t = \frac{L}{2}$ , ou seja, tal que

$$f(t) = f(L - t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{L}{2}],$$

então os coeficientes de índice par da série de senos de Fourier são nulos, ou seja,  $b_{2k} = 0$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots$  (Sugestão: use o item anterior.)

(c) Mostre que se  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica em relação ao ponto  $(t, y) = (\frac{L}{2}, 0)$ , ou seja, tal que

$$f(t) = -f(L - t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{L}{2}],$$

então os coeficientes de índice par da série de cossenos de Fourier são nulos,  $a_{2k} = 0$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$  (Sugestão: use o item (a).)

1.4. Determine a série de Fourier da função  $f_{c,d}^{(2)} : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

1.5. Determine as séries de Fourier das funções  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(a) f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -L \leq t < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq t \leq L, \end{cases} \quad (b) f(t) = L/2 - |t|$$

1.6. Determine a série de Fourier da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = L/2 - |t - L/2|, \quad \text{se } -L/2 < t < 3L/2 \text{ e } f(t + 2L) = f(t).$$

1.7. Determine as séries de Fourier de senos e de cossenos da função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = t(L - t), \quad \text{para } t \in [0, L].$$

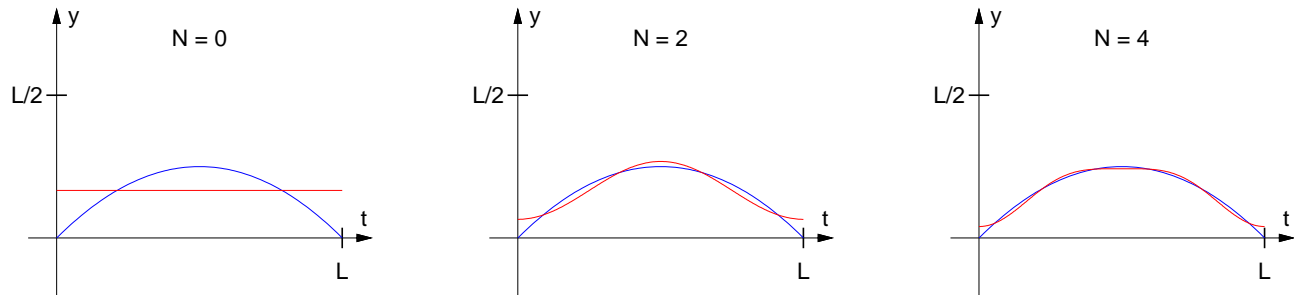


Figura 5.9 – Somas parciais da série de Fourier de cossenos da função  $f(t) = t(L-t)$ , para  $t \in [0, L]$ , para  $N = 0, 2, 4$ .

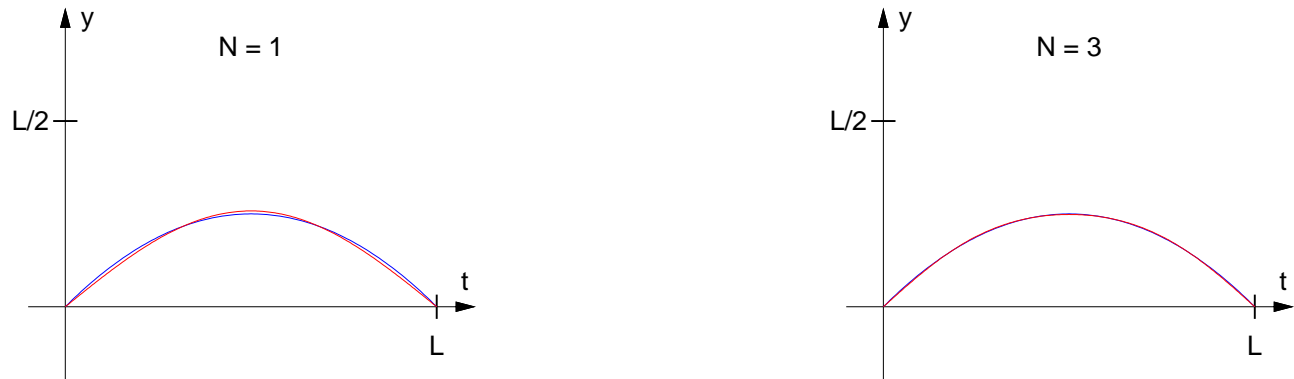


Figura 5.10 – Somas parciais da série de Fourier de senos da função  $f(t) = t(L-t)$ , para  $t \in [0, L]$ , para  $N = 1, 3$

1.8. Determine séries de Fourier de senos e de cossenos das funções  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(t) &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ 1, & \text{se } L/2 \leq t \leq L, \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(t) &= \begin{cases} 1, & \text{se } L/4 \leq t < 3L/4, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad f(t) &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ t - L/2, & \text{se } L/2 \leq t < L, \end{cases} \\ \text{(d)} \quad f(t) &= \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \leq t < 3L/4 \\ L - t, & \text{se } 3L/4 \leq t \leq L \end{cases} \end{aligned}$$

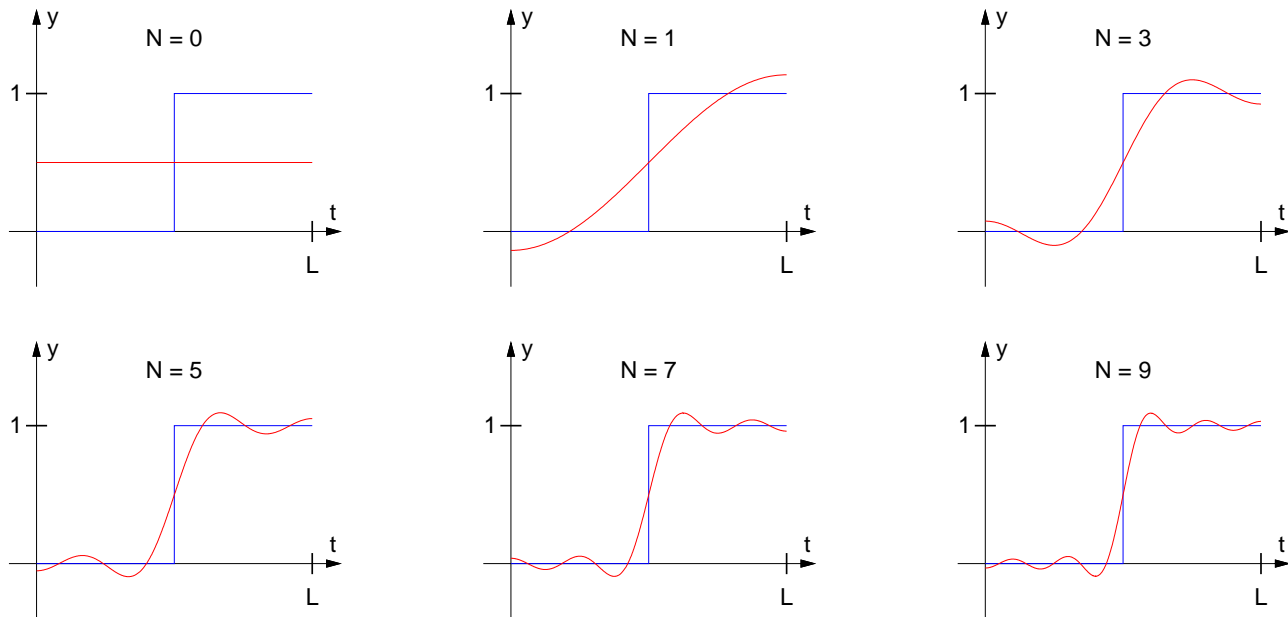


Figura 5.11 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = 1$ , se  $t \in [L/2, L]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para  $N = 0, 1, 3, 5, 7, 9$ .



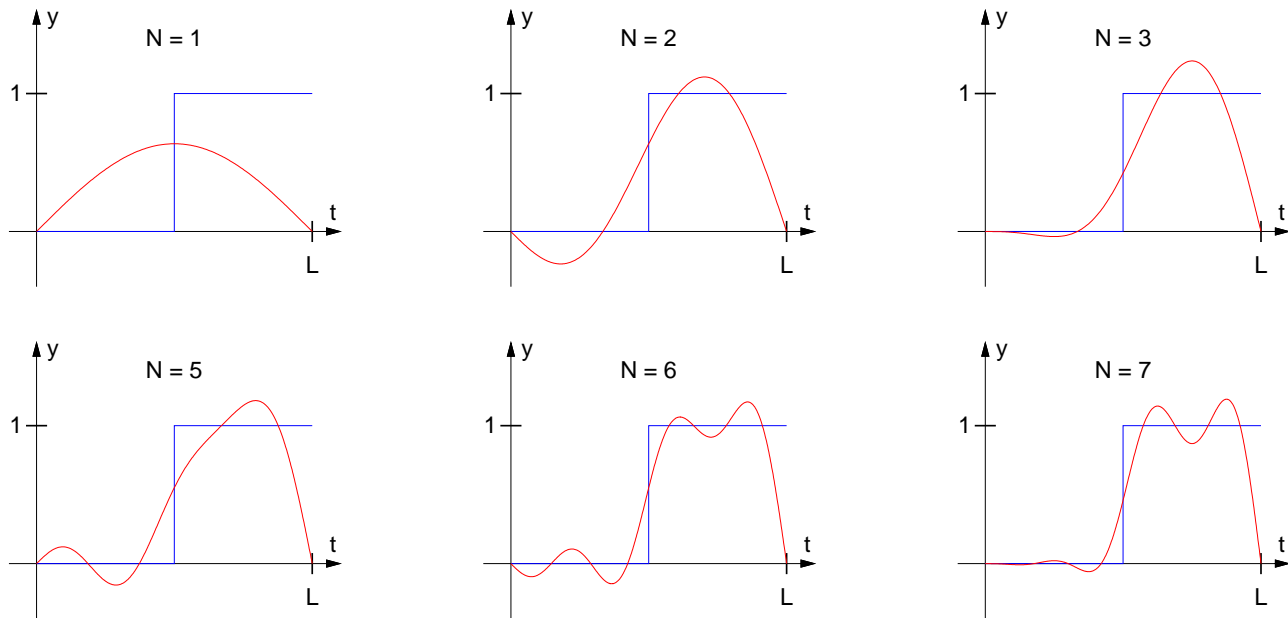


Figura 5.12 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = 1$ , se  $t \in [L/2, L]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para  $N = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ .

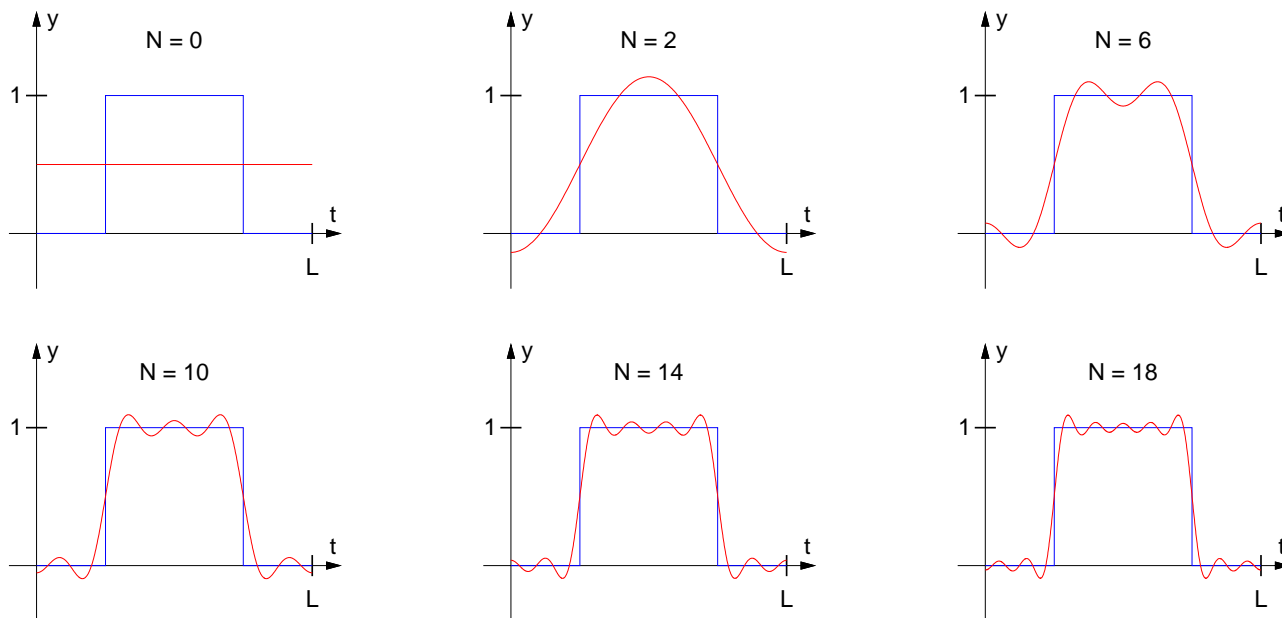


Figura 5.13 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = 1$ , se  $t \in [L/4, 3L/4]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para  $N = 0, 2, 6, 10, 14, 18$ .

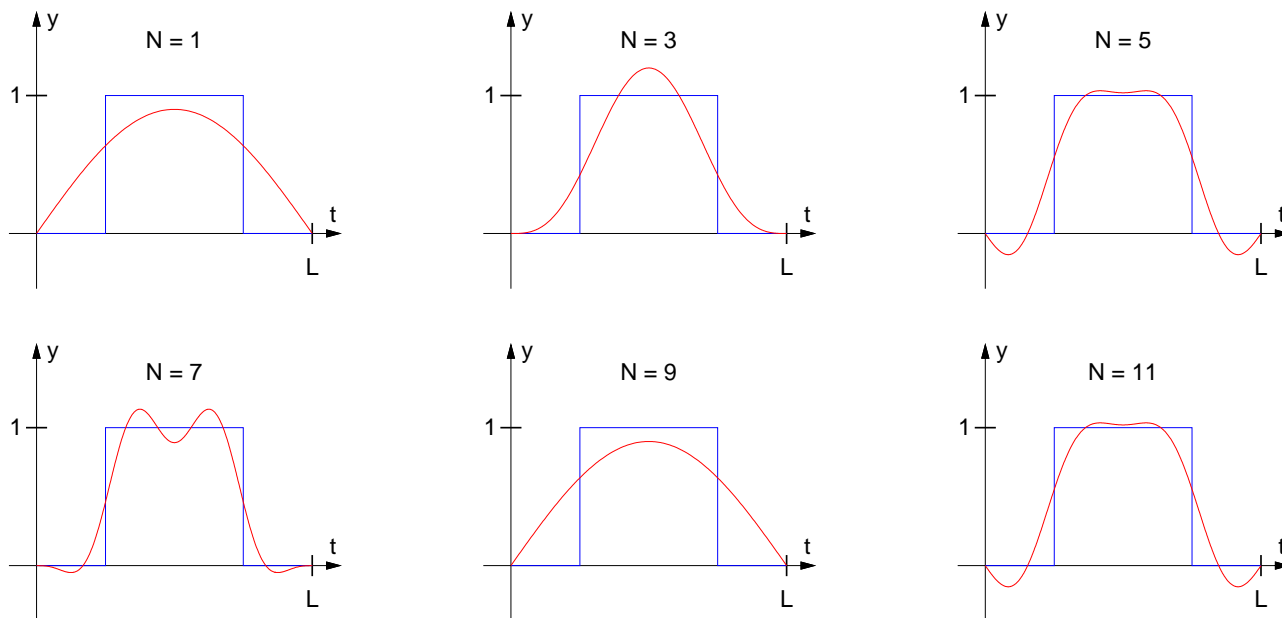


Figura 5.14 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = 1$ , se  $t \in [L/4, 3L/4]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para  $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ .

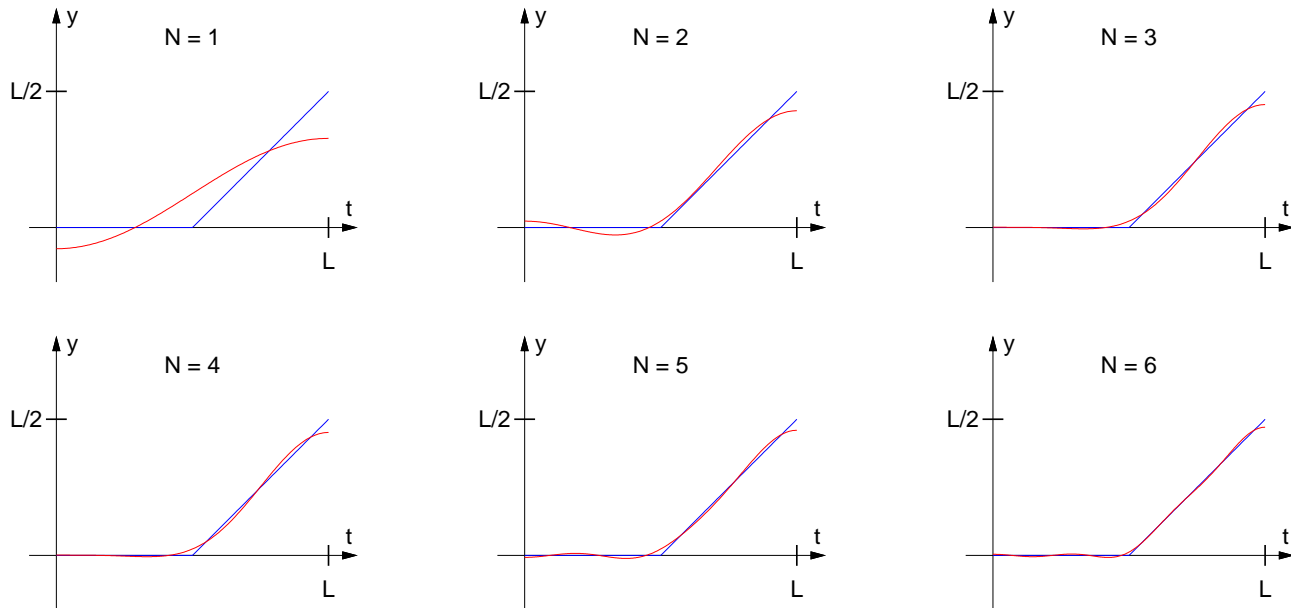


Figura 5.15 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = t - L/2$ , se  $t \in [L/2, L]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

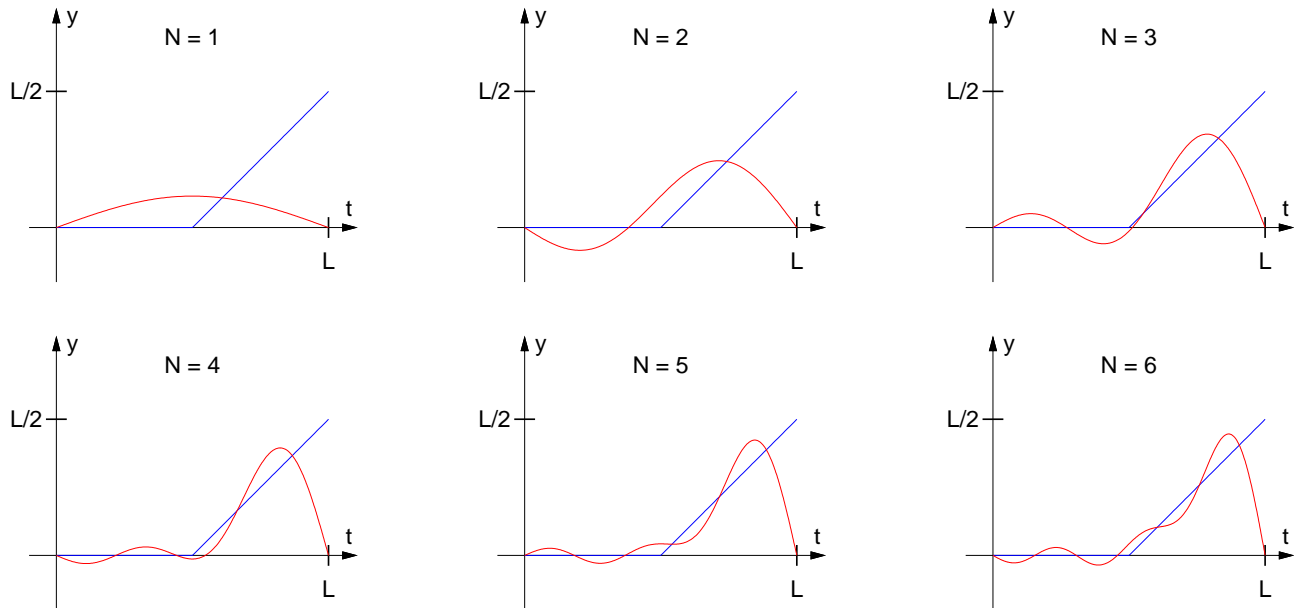


Figura 5.16 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = t - L/2$ , se  $t \in [L/2, L]$  e  $f(t) = 0$ , caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

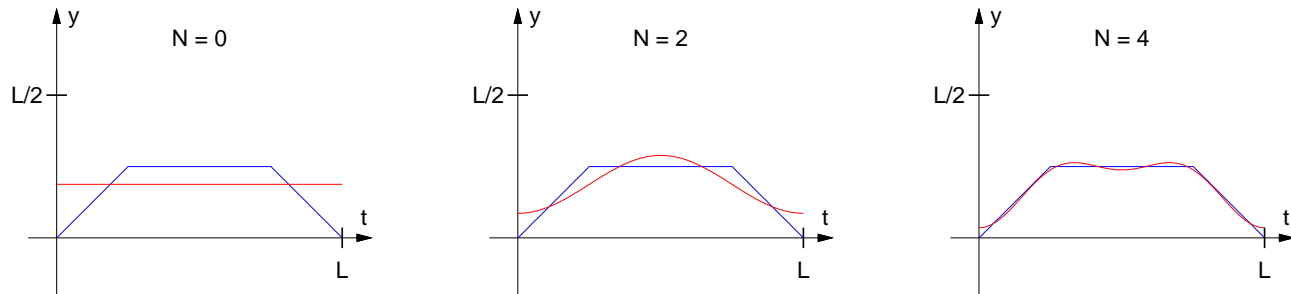


Figura 5.17 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = t$ , se  $t \in [0, L/4]$ ,  $f(t) = L/4$ , se  $t \in [L/4, 3L/4]$  e  $f(t) = L - t$ , se  $t \in [3L/4, L]$  e somas parciais da sua série de Fourier de cossenos para  $N = 0, 2, 4$ .

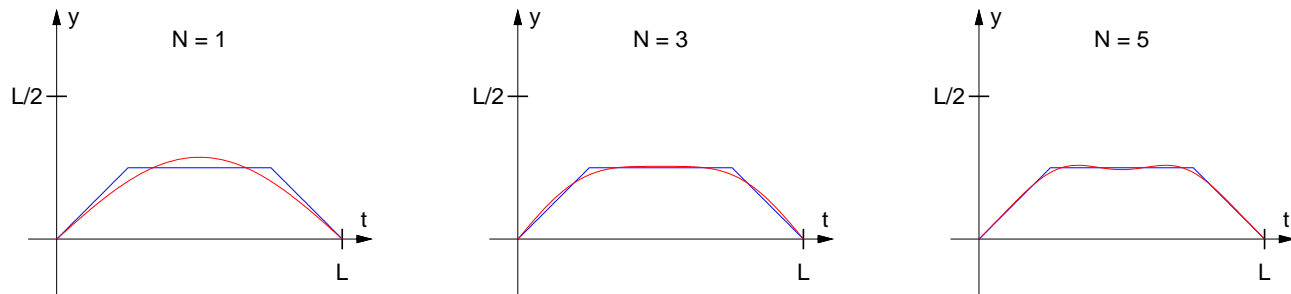


Figura 5.18 – A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = t$ , se  $t \in [0, L/4]$ ,  $f(t) = L/4$ , se  $t \in [L/4, 3L/4]$  e  $f(t) = L - t$ , se  $t \in [3L/4, L]$  e somas parciais da sua série de Fourier de senos para  $N = 1, 3, 5$ .

1.9. Considere a seguinte função :

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{e tal que } f(t+2) = f(t)$$

- (a) Encontre uma solução particular e a solução geral da equação diferencial  $2y'' + y = f(t)$ .
- (b) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2y'' + y = f(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

1.10. Considere a seguinte função :

$$f(t) = 1 - |t|, \quad \text{se } -1 < t \leq 1 \quad \text{e tal que } f(t+2) = f(t).$$

- (a) Calcule a série de Fourier  $S_f$  da função  $f$ ;
- (b) Determine os valores  $S_f(0)$  e  $S_f(100.5)$ . Justifique.

1.11. Considere a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = 1$ .

- (a) Encontre uma representação de  $f$  em série de Fourier que contenha somente termos em cossenos.
- (b) Encontre uma representação de  $f$  em série de Fourier que contenha somente termos em senos.
- (c) Encontre uma representação de  $f$  em série de Fourier que contenha termos em cossenos e senos.

## 5.2 Equação do Calor em uma Barra

Pode-se mostrar que a temperatura em uma barra homogênea, isolada dos lados, em função da posição e do tempo,  $u(x, t)$ , satisfaz a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação do calor em uma barra**. Aqui  $\alpha > 0$  é uma constante que depende do material que compõe a barra é chamada de **difusividade térmica**.

### 5.2.1 Extremidades a Temperaturas Fixas

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo,  $u(x, t)$  em uma barra isolada dos lados, de comprimento  $L$ , sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial,  $f(x)$ , e as temperaturas nas extremidades,  $T_1$  e  $T_2$ , que são mantidas constantes com o tempo, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos inicialmente resolver o problema com  $T_1 = T_2 = 0$ , que chamamos de **condições de fronteira homogêneas**.



## Condições de Fronteira Homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos usar um método chamado **separação de variáveis**. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por  $\alpha^2 X(x)T(t)$  obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, \quad X(L) = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\begin{cases} T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

As condições  $X(0) = X(L) = 0$  decorrem do fato de que a temperatura nas extremidades da barra é mantida igual a zero, ou seja,

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L, t) = X(L)T(t).$$

A equação  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  (a sua equação característica é  $r^2 - \lambda = 0$ ) pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > 0$ :**  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$

**Se  $\lambda = 0$ :**  $X(x) = c_1 + c_2 x.$

**Se  $\lambda < 0$ :**  $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$  implicam que

**Se  $\lambda > 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  na solução geral de  $X'' - \lambda X = 0$ ,

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

obtemos que  $0 = c_1 + c_2$ , ou seja,  $c_2 = -c_1$ . Logo

$$X(x) = c_1 (e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X = 0$  obtemos que  $c_1 (e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0$ . Logo, se  $c_1 \neq 0$ , então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que só é possível se  $\lambda = 0$ , que não é o caso.

**Se  $\lambda = 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  na solução geral de  $X'' - \lambda X = 0$ ,

$$X(x) = c_1 + c_2 x,$$

obtemos que  $c_1 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_2 x.$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X = 0$  obtemos  $c_2 L = 0$ . Logo, também  $c_2 = 0$ .

**Se  $\lambda < 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  na solução geral de  $X'' - \lambda X = 0$ ,

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x),$$

obtemos que  $c_2 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x). \quad (5.21)$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$ , obtemos

$$c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Logo se  $c_1 \neq 0$ , então  $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto as condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$  implicam que (5.19) tem solução não identicamente nula somente se  $\lambda < 0$  e mais que isso  $\lambda$  tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, substituindo-se estes valores de  $\lambda$  em (5.21) concluímos que o problema de valores de fronteira (5.19) tem soluções fundamentais

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  na equação diferencial (5.20) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0,$$

que tem solução fundamental

$$T_n(t) = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0. \end{cases}$$

tem soluções **soluções fundamentais**

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0. \end{cases}$$

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x),$$

para uma função  $f(x)$  mais geral.

Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira possa ser escrita como uma série da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \quad (5.22)$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x)$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.23)$$

Vamos verificar que realmente (5.22) com os coeficientes dados por (5.23) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.22) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de  $x \in (0, L)$  tais que  $f(x)$  é contínua. Vamos ver que (5.22) satisfaz a equação do calor. Cada termo da série satisfaz a equação do calor. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 5.5 na página 557 usando o fato de que

$$\begin{aligned} \left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| &\leq M \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n \\ \left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right| &\leq M \frac{n\pi}{L} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n \\ \left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| &\leq M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n \end{aligned}$$

para  $M = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx$ ,  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty.$$

Observamos que a temperatura em cada ponto da barra tende a zero quando  $t$  tende a  $+\infty$ , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \lim_{t \rightarrow \infty} u_n(x, t) \right) = 0, \quad \text{para } x \in [0, L],$$

que decorre da aplicação do Teorema 5.6 na página 559, usando o fato de que

$$|c_n u_n(x, t)| \leq M \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n$$

para  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $0 \leq x \leq L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty.$$

**Exemplo 5.12.** Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente  $\alpha = 1$ , com as extremidades mantidas a temperatura de  $0^\circ \text{C}$  e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

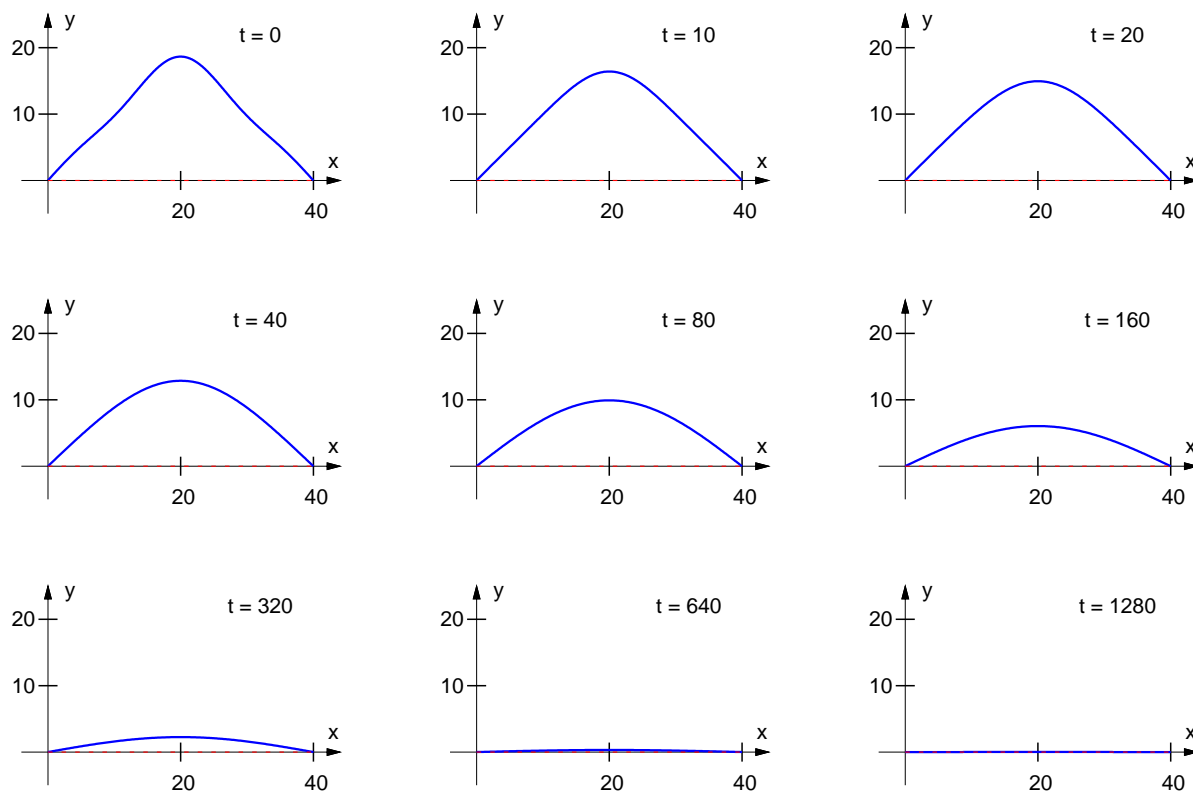


Figura 5.19 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 5.12 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$ , ou seja, usando a tabela na página 561, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, 40) + 40b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, 40) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, 40) \right) \\ &= \frac{80}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{160}{n^2\pi^2} \left( -\frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{80}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= 0 \\ c_{2k+1} &= \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Portanto a solução do problema é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t} \\ &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600} t} \end{aligned}$$



## Condições Não Homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

Observe que uma função somente de  $x$  (derivada parcial em relação a  $t$  nula), tal que a segunda derivada (em relação a  $x$ ) é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$v(x, t) = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira  $u(0, t) = T_1$  e  $u(L, t) = T_2$ . O que sugere como solução do problema inicial a função

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x, t),$$

em que  $u_0(x, t)$  é a solução do problema com condições homogêneas, ou seja,

$$u(x, t) = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , precisamos que

$$f(x) = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

ou ainda,

$$f(x) - T_1 - \left( \frac{T_2 - T_1}{L} \right) x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série de Fourier de senos de  $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x$  são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x \right] \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando  $t$  tende a mais infinito, a solução  $u(x, t)$  tende a solução

$$v(x, t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x$$

chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**. Observe que a solução estacionária é solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

**Exemplo 5.13.** Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente  $\alpha = 1$ , com as extremidades mantidas a temperaturas de  $10^\circ$  C e  $30^\circ$  C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 10, \quad u(40, t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - 10 - \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = 2 \left( \frac{3}{2} b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, 40) + 60 b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, 40) - \frac{3}{2} b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, 40) \right) \\ &= \frac{120}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{240}{n^2\pi^2} \left( -\frac{n\pi}{2} \cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2) \right) + \frac{120}{n\pi} \cos(n\pi/2) \\ &= \frac{240 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t} \\ &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{1600} t} \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 10 + \frac{x}{2}, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando  $t$  tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x, t) = 10 + \frac{x}{2}.$$

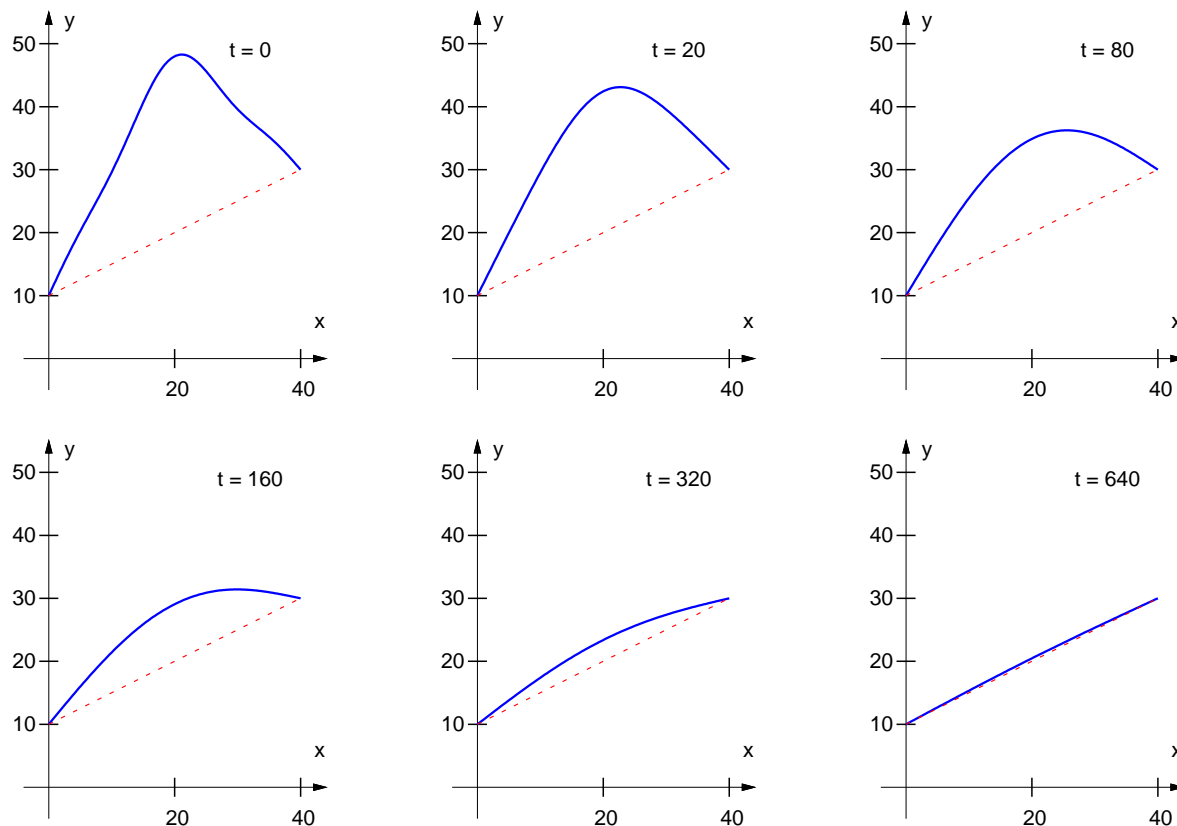


Figura 5.20 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 5.13 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

### 5.2.2 Barra Isolada nas Extremidades

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo,  $u(x, t)$  em uma barra isolada dos lados, de comprimento  $L$ , sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial,  $f(x)$ , e sabendo que as extremidades são mantidas também isoladas, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por  $\alpha^2 X(x)T(t)$  obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X'(0) = 0, X'(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$(5.25)$$

As condições  $X'(0) = X'(L) = 0$  decorrem do fato de que a barra está isolada nas extremidades, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = X'(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t).$$

A equação  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > 0$ :**  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ .

**Se  $\lambda = 0$ :**  $X(x) = c_1 + c_2 x$ .

**Se  $\lambda < 0$ :**  $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X'(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$  implicam que

**Se  $\lambda > 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})$ , obtemos que  $0 = c_1 - c_2$ , ou seja,  $c_2 = c_1$ . Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  obtemos  $\sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L})$ . Logo, se  $c_1 \neq 0$ , então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = -e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível se  $\lambda > 0$ .

**Se  $\lambda = 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = c_2$ , obtemos que  $c_2 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_1.$$

Se  $\lambda < 0$ :

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X' = 0$  em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)),$$

obtemos que  $c_1 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x). \quad (5.26)$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

obtemos

$$c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Logo, se  $c_2 \neq 0$ , então  $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Logo

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (5.24) tem solução não nula somente se

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se estes valores de  $\lambda$  em (5.26) vemos que o problema de valores de fronteira (5.24) tem soluções fundamentais

$$X_0 = 1 \quad \text{e} \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  na equação diferencial (5.25) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$$



que tem como solução fundamental

$$T_n(t) = c_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \end{cases}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , para uma função  $f(x)$  mais geral. Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \quad (5.27)$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de  $f(x)$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.28)$$

Vamos verificar que realmente (5.27) com os coeficientes dados por (5.28) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.27) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de  $x \in (0, L)$  tais que  $f(x)$  é contínua. Vamos ver que (5.27) satisfaz a equação do calor. Cada termo da série satisfaz a equação do calor. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 5.5 na página 557 usando o fato de que

$$\begin{aligned} \left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| &\leq M \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} \\ \left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right| &\leq M \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} \\ \left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| &\leq M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} \end{aligned}$$

para  $M = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx$ ,  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} &< \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} &< \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} &< \infty. \end{aligned}$$

Decorre da aplicação do Teorema 5.6 na página 559, usando o fato de que

$$|c_n u_n(x, t)| \leq M e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1}$$

para  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} < \infty,$$

que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \lim_{t \rightarrow \infty} u_n(x, t) \right) = c_0, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando  $t$  tende a mais infinito, a solução  $u(x, t)$  tende a solução constante e igual ao valor médio da temperatura inicial, chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**.

**Exemplo 5.14.** Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente  $\alpha = 1$ , com as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0 \end{cases}$$

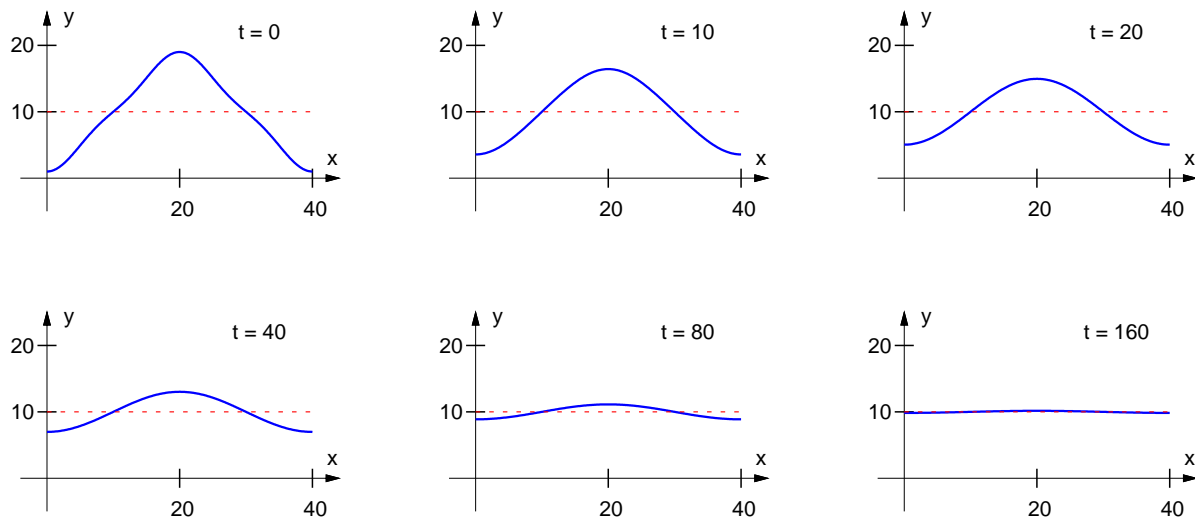


Figura 5.21 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 5.14 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de cossenos de  $f(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{40} \int_0^{40} f(x) dx = 10, \\ c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \cos \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, 40) + 40b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, 40) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, 40) \right) \\ &= \frac{80}{n^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_0^{n\pi/2} + \frac{80}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{160}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{80}{n^2\pi^2} - \frac{80}{n^2\pi^2} \cos n\pi \\ &= 80 \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos:

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = 80 \frac{2 \cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = 40 \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

e

$$c_{2 \cdot 2l} = 0$$

$$c_{2(2l+1)} = 40 \frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{80}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= 10 + \frac{80}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t} \\
 &= 10 + \frac{40}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{20} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{400} t} \\
 &= 10 - \frac{80}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{20} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{400} t}
 \end{aligned}$$

Observe que a solução tende a  $v(x, t) = 10$ , quando  $t$  tende a mais infinito, que é a solução estacionária.

## Exercícios (respostas na página 662)

- 2.1. (a) Encontre a temperatura  $u(x, t)$  em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de  $20^\circ \text{C}$ , supondo que  $\alpha = 1$  e que suas extremidades são mantidas a temperatura de  $0^\circ \text{C}$ .
- (b) Determine o tempo necessário para que o centro da barra esfrie a temperatura de  $10^\circ \text{C}$ .
- 2.2. Encontre a temperatura  $u(x, t)$  em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de  $20^\circ \text{C}$ , supondo que  $\alpha = 1$  e que suas extremidades são mantidas a temperatura de  $0^\circ \text{C}$  e  $60^\circ \text{C}$  respectivamente. Qual a temperatura estacionária?
- 2.3. Considere uma barra com 40 cm de comprimento,  $\alpha = 1$ , isolada dos lados e que está inicialmente a temperatura dada por  $u(x, 0) = 3x/2$ ,  $0 \leq x \leq 40$  e que as extremidades estão isoladas.
- (a) Determine  $u(x, t)$ .
- (b) Qual a temperatura estacionária?
- 2.4. Mostre que o problema de valores de contorno

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$$

tem solução não trivial somente se  $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ , para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- 2.5. Mostre que o problema de valores de contorno

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

tem solução não trivial somente se  $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ , para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- 2.6. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento  $L$  que do lado esquerdo está mantida a temperatura zero e do lado direito é

mantida isolada.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

- 2.7. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento  $L$  que do lado esquerdo está mantida a temperatura fixa  $T_1$  e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

- 2.8. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

- 2.9. (Equação do Calor Não Homogênea) Considere o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$



(a) Mostre que a solução deste problema é dada por

$$u(x, t) = v(x) + u_0(x, t),$$

em que  $v(x)$  é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} \alpha^2 v'' = -g(x) \\ v(0) = T_1, v(L) = T_2 \end{cases}$$

e  $u_0(x, t)$  é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) - v(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{cases}$$

(b) Resolva o PVIF e determine a solução estacionária.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3}{40} \\ u(x, 0) = f(x) = 20, 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, u(40, t) = 60 \end{cases}$$

### 5.3 Corda Elástica Presa nas Extremidades

Pode-se mostrar que o deslocamento vertical de cada ponto de uma corda elástica homogênea como função da posição e do tempo,  $u(x, t)$ , satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação da corda elástica**. Aqui  $a > 0$  é uma constante que depende do material que compõe a corda e é a **velocidade de propagação das ondas** na corda.

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo,  $u(x, t)$ , de cada ponto de uma corda de comprimento  $L$  presa nas extremidades, sendo conhecidos o deslocamento inicial de cada ponto da corda,  $f(x)$ , e a velocidade inicial de cada ponto da corda,  $g(x)$ , ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVI)F

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ( $f(x) = 0$ ),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ( $g(x) = 0$ ),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0. \end{cases}$$

### 5.3.1 Com Velocidade Inicial Nula

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo,  $u(x, t)$ , de cada ponto de uma corda elástica de comprimento  $L$  presa nas extremidades, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por  $f(x)$ , e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais e substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por  $a^2 X(x)T(t)$  obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\begin{cases} T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, & T'(0) = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

As condições  $X(0) = X(L) = 0$  decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L, t) = X(L)T(t).$$

A condição  $T'(0) = 0$ , decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = X(x)T'(0).$$

A equação (5.29) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (5.19) na página 575 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e tem como soluções fundamentais

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Substituindo-se  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  na equação (5.30) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0.$$

Para resolver esta equação temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm \frac{an\pi}{L} i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial para  $T(t)$  é

$$T(t) = c_1 \cos \frac{an\pi t}{L} + c_2 \sin \frac{an\pi t}{L}.$$

Com a condição inicial  $T'(0) = 0$  concluímos que a equação diferencial para  $T(t)$  com a condição inicial  $T'(0) = 0$  tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_n(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L \end{cases} \quad (5.31)$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.32)$$

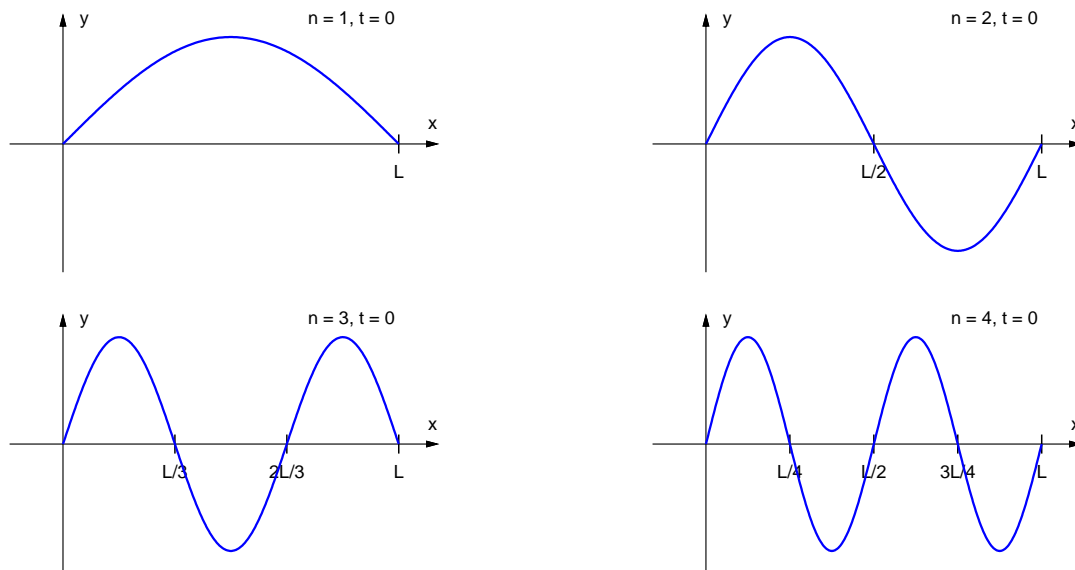


Figura 5.22 – Modos naturais de vibração  $u_n(x, t) = \cos \frac{an\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$ , para  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $t = 0$ .

Para cada  $n$ , a solução fundamental (5.32) do problema (5.31)

$$u_n(x, t) = \left[ \cos \frac{an\pi t}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

é chamada **modo normal (ou natural) de vibração, onda estacionária** ou **harmônico** e o seu período fundamental na variável  $x$  é igual a  $\frac{2L}{n}$  e é chamado **comprimento de onda** do modo normal. Os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitude variando de forma cossenoidal  $R_n(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$  com frequências  $\frac{an\pi}{L}$  chamadas **frequências naturais** da corda. Portanto, neste caso, os períodos fundamentais da corda são  $T_n = \frac{2L}{na}$ . Observe, também, que cada modo normal  $u_n(x, t)$  tem  $n - 1$  pontos fixos no intervalo  $0 < x < L$ .

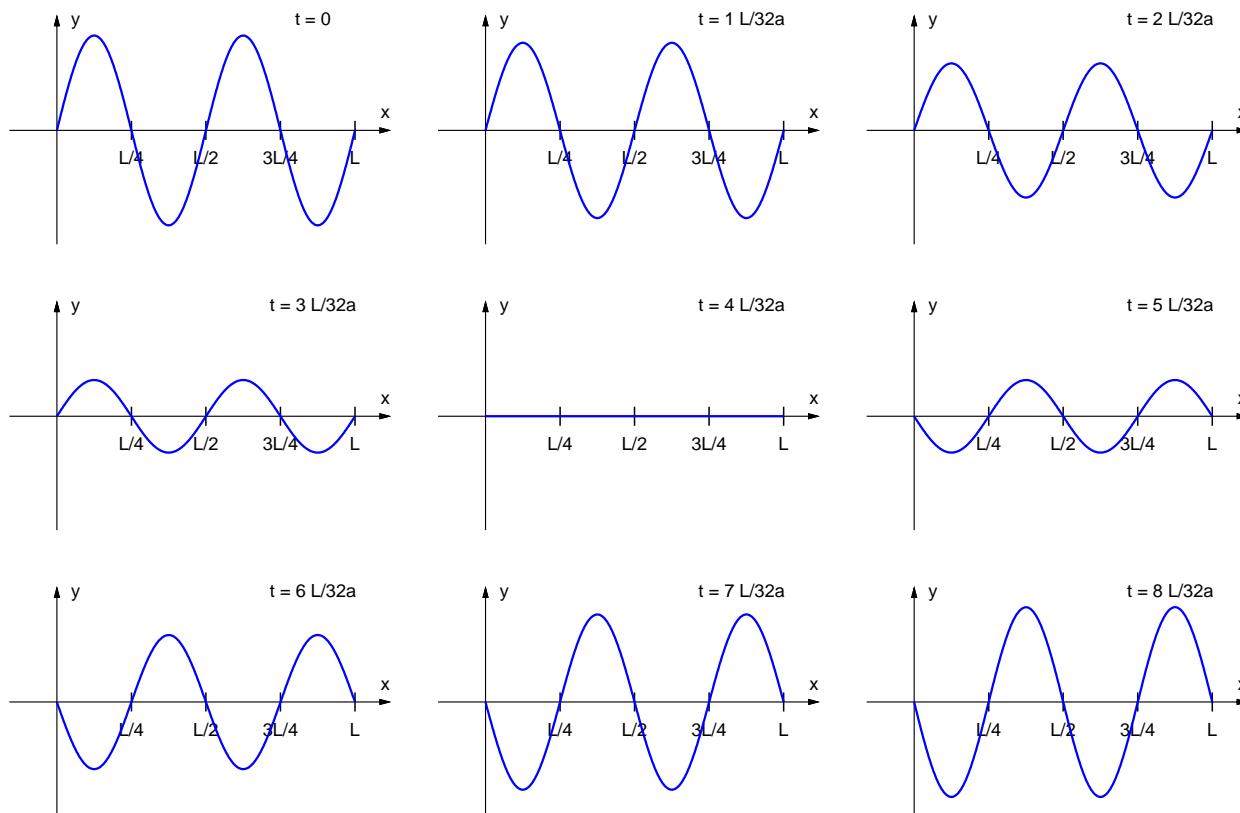


Figura 5.23 – Modo natural de vibração  $u_4(x, t) = \cos \frac{4a\pi t}{L} \sin \frac{4\pi x}{L}$ , para  $t = 0, \dots, \frac{L}{4a}$ .



Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , para uma função  $f(x)$  mais geral. Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} \quad (5.33)$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x)$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

para cada  $x$ , é periódica com relação a  $t$  com período fundamental  $T = \frac{2L}{a}$ , se  $c_1 \neq 0$ .

Para cada  $n$ , podemos reescrever a solução fundamental (5.32) do problema (5.31) na forma (verifique!)

$$u_n(x, t) = \cos \frac{an\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{n\pi(x - at)}{L} + \sin \frac{n\pi(x + at)}{L} \right)$$

Substituindo-se esta expressão na série (5.33) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi(x - at)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi(x + at)}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{f}(x - at) + \tilde{f}(x + at)), \end{aligned} \quad (5.34)$$

em que  $\tilde{f}$  é a extensão de  $f$  que é ímpar e periódica de período  $2L$ . A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a  $a$  que se refletem e se invertem em  $x = 0$  e  $x = L$ .

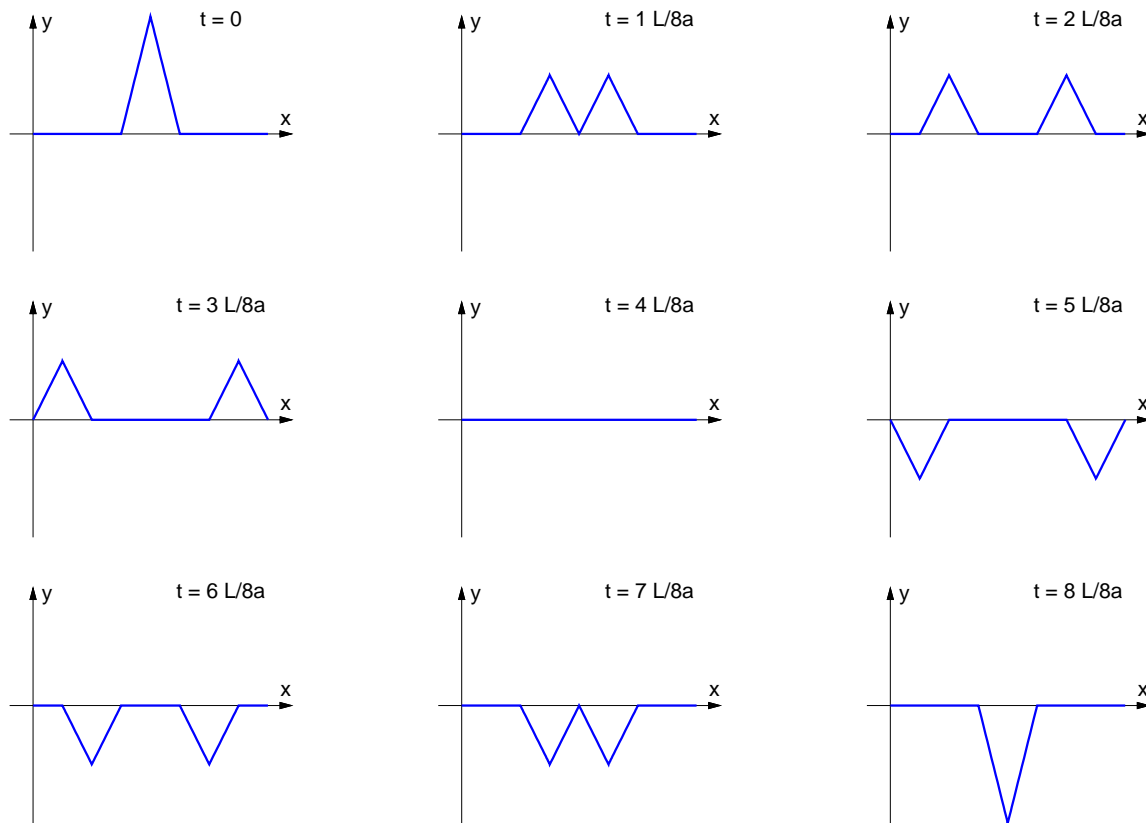


Figura 5.24 – Solução de D'Alembert,  $u(x, t)$ , do Problema da Corda Presa nas Extremidades

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se  $f$  é contínua por partes com as suas derivadas,  $f'$  e  $f''$ , também contínua por partes, então para  $(x, t)$  tal que  $\tilde{f}''$  é contínua em  $x - at$  e  $x + at$  temos que  $u(x, t)$  dado pela solução de d'Alembert, (5.34), satisfaz a equação da onda e  $u(x, 0) = f(x)$  para todo  $x \in [0, L]$ .

**Exemplo 5.15.** Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$  solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução em série é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$ . Usando a tabela na página

561, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\
 &= 2 \left( b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, 40) + 40b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, 40) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, 40) \right) \\
 &= \frac{80}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
 &= \frac{160}{n^2\pi^2} \left( -\frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{80}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \\
 &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots
 \end{aligned}$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} \\
 &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{20}
 \end{aligned}$$

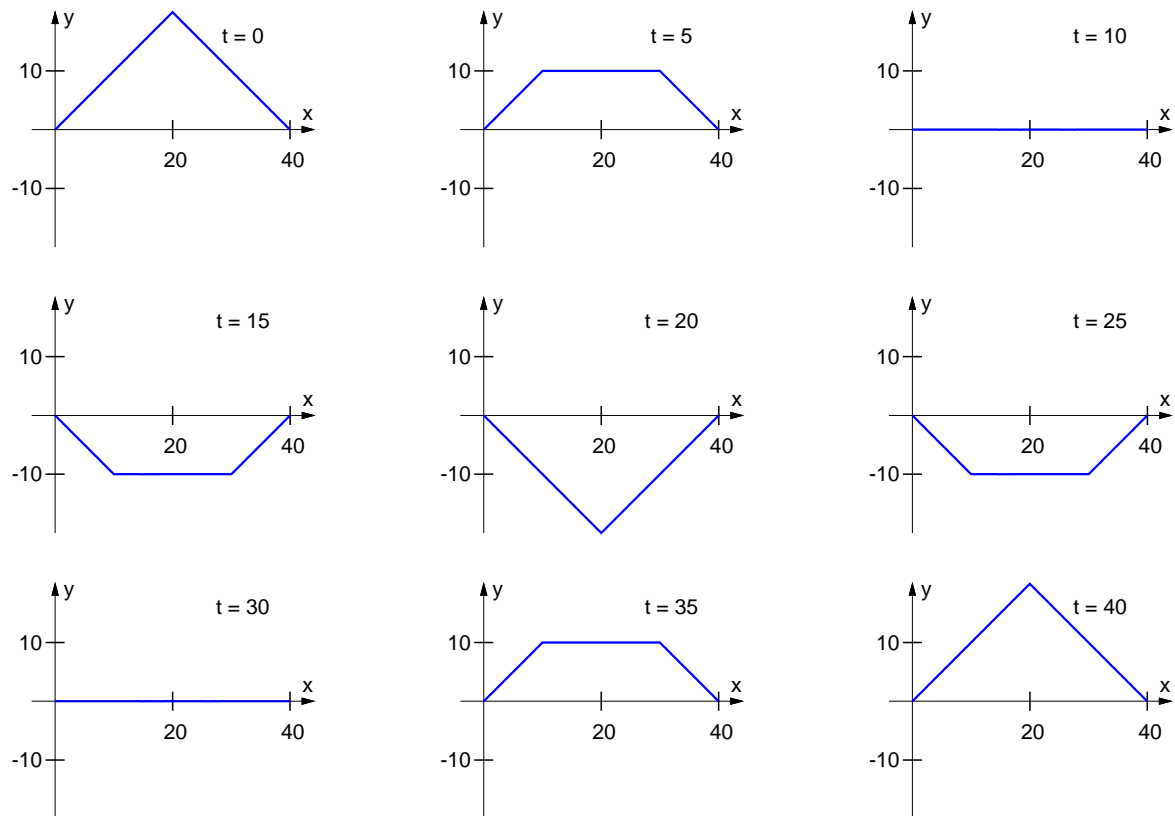
A solução de D'Alembert é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x - 2t) + \tilde{f}(x + 2t)), \quad (5.35)$$

em que  $\tilde{f}$  é a extensão de  $f$  que é ímpar e periódica de período 80, ou seja,  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 40 + x, & \text{se } -40 \leq x < -20, \\ x, & \text{se } -20 \leq x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 < x \leq 40, \end{cases} \quad \tilde{f}(x + 80) = \tilde{f}(x).$$

A solução  $u(x, t)$  é periódica de período  $T = 40$  segundos.

Figura 5.25 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 5.15.

### 5.3.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Dividindo-se por  $a^2 X(x)T(t)$  obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias, uma com condições de fronteira e a outra com condição inicial:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, \quad X(L) = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

$$\begin{cases} T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, & T(0) = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$



As condições  $X(0) = X(L) = 0$  decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L, t) = X(L)T(t).$$

A condição  $T(0) = 0$ , decorre do fato de que o deslocamento inicial é nulo, ou seja,

$$0 = u(x, 0) = X(x)T(0).$$

A equação (5.36) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (5.19) na página 575 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e tem como soluções fundamentais

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  na equação (5.37) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0.$$

Para resolver esta equação temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm \frac{an\pi}{L}i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial para  $T(t)$  é

$$T(t) = c_1 \cos \frac{an\pi t}{L} + c_2 \sin \frac{an\pi t}{L}.$$

Usando a condição inicial  $T(0) = 0$  concluímos que a equação diferencial para  $T(t)$  com a condição inicial  $T(0) = 0$  tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_n(t) = \text{sen} \frac{an\pi t}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L \end{cases} \quad (5.38)$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.39)$$

chamadas **modos normais (ou naturais) de vibração, ondas estacionárias** ou **harmônicos** e o seu período fundamental na variável  $x$  é igual a  $\frac{2L}{n}$  e é chamado **comprimento de onda** do modo normal. Os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitude variando de forma senoidal  $R_n(t) = \text{sen} \frac{an\pi t}{L}$  com frequências  $\frac{an\pi}{L}$  chamadas **frequências naturais** da corda. Portanto, neste caso, os períodos fundamentais da corda são  $T_n = \frac{2L}{na}$ . Observe, também, que cada modo normal  $u_n(x, t)$  tem  $n - 1$  pontos fixos no intervalo  $0 < x < L$ . Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{an\pi t}{L}. \quad (5.40)$$

Para satisfazer a condição inicial  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ , devemos ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.41)$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $g(x)$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $g'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

para cada  $x$ , é periódica com relação a  $t$  com período fundamental  $T = \frac{2L}{a}$ , se  $c_1 \neq 0$ .

Para cada  $n$ , podemos reescrever a solução fundamental (5.39) do problema (5.38) na forma (verifique!)

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{n\pi(x - at)}{L} - \cos \frac{n\pi(x + at)}{L} \right)$$

Substituindo-se esta expressão na série (5.40) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrita como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \cos \frac{n\pi(x - at)}{L} - \cos \frac{n\pi(x + at)}{L} \right).$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de  $g$  é a série das integrais, integrando-se (5.41), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y) dy = a \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \cos \frac{n\pi(x-at)}{L} - \cos \frac{n\pi(x+at)}{L} \right).$$

em que  $\tilde{g}$  é a extensão de  $g$  que é ímpar e periódica de período  $2L$ . Logo temos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y) dy. \quad (5.42)$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se  $g$  é contínua por partes com a sua derivada,  $g'$ , também contínua por partes, então para  $(x, t)$  tal que  $\tilde{g}'$  é contínua em  $x - at$  e  $x + at$  temos que  $u(x, t)$  dado pela solução de d'Alembert, (5.42), satisfaz a equação da onda e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  para todo  $x \in (0, L)$  onde  $g$  é contínua.

**Exemplo 5.16.** Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} x/10, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 4 - x/10, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

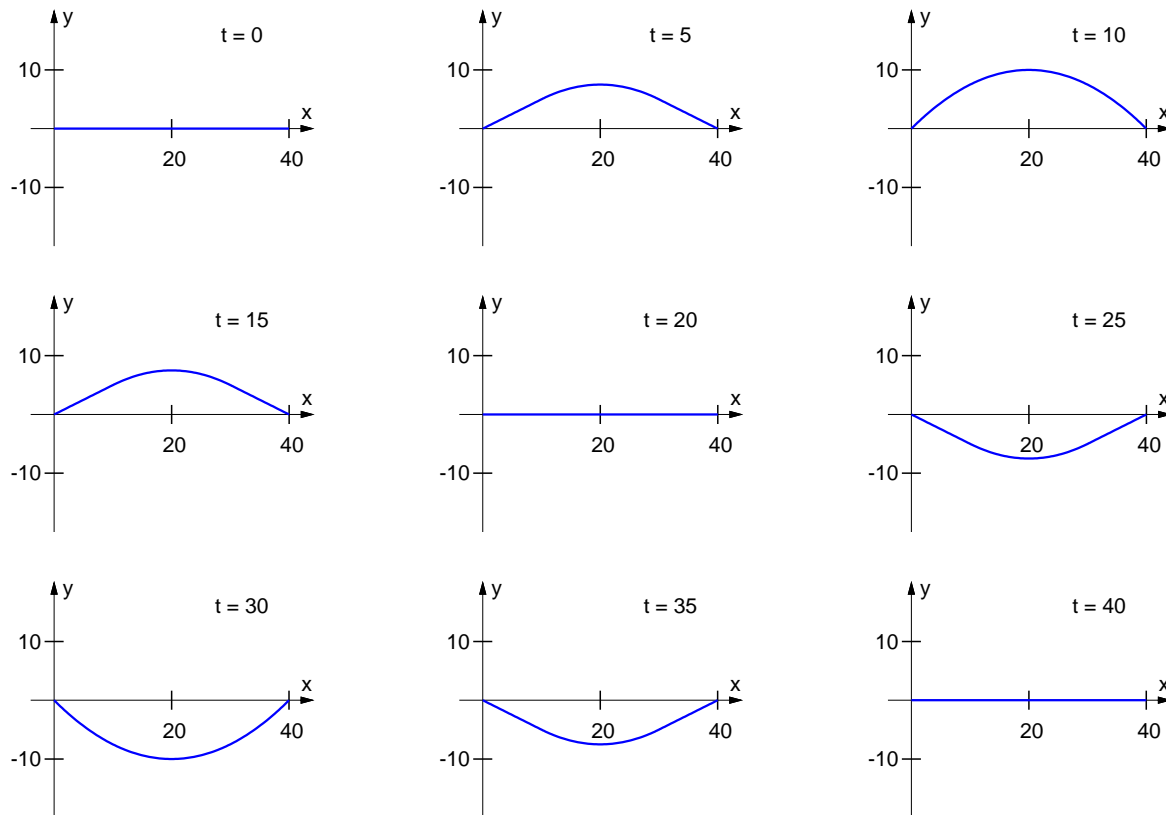
em que  $\frac{n\pi}{20} c_n$  são os coeficientes da série de senos de  $g(x)$ , que são os coeficientes obtidos para  $f(x)$  do Exemplo 5.15 na página 610 divididos por 10, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{16 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{320 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{320}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{320}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

Figura 5.26 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 5.16.

## 5.3.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Como observamos anteriormente a solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas  $f(x)$  não nula, que vamos denotar por  $u^{(f)}(x, t)$ , com a solução do problema com apenas  $g(x)$  não nula,  $u^{(g)}(x, t)$ , ou seja,

$$u(x, t) = u^{(f)}(x, t) + u^{(g)}(x, t),$$

que para cada  $x$ , é periódica com relação a  $t$  com período  $T = \frac{2L}{a}$ .

Usando (5.34) na página 608 e (5.42) na página 608 podemos escrever a solução do problema de valor inicial e de fronteira como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x - at) + \tilde{f}(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y) dy \quad (5.43)$$

em que  $\tilde{f}$  é a extensão de  $f$  que é ímpar e periódica de período  $2L$  e  $\tilde{g}$  é a extensão de  $g$  que é ímpar e periódica de período  $2L$ . A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se  $f$  é contínua por partes com suas derivadas,  $f'$  e  $f''$ , também contínuas por partes e  $g$  é contínua por partes com a sua derivada,  $g'$ , também contínua por partes, então para  $(x, t)$  tal que  $\tilde{g}'$  e  $\tilde{f}''$  são contínuas em  $x - at$  e  $x + at$  temos que  $u(x, t)$  dado pela solução de d'Alembert, (5.43), satisfaz a equação da onda e

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } x \in [0, L];$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } x \in (0, L) \text{ onde } g \text{ é contínua.}$$

**Exemplo 5.17.** Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , com deslocamento inicial  $f(x)$  e com uma velocidade inicial  $g(x)$  dados por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40, \end{cases} \quad g(x) = \frac{f(x)}{10}.$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas dados nos Exemplos 5.15 e 5.16, ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi x}{40} \sin \frac{n\pi t}{20}$$

em que  $c_n$  e  $\frac{n\pi}{20}d_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$  e de  $g(x)$ , respectivamente, ou seja,

$$c_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \sin \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{160 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

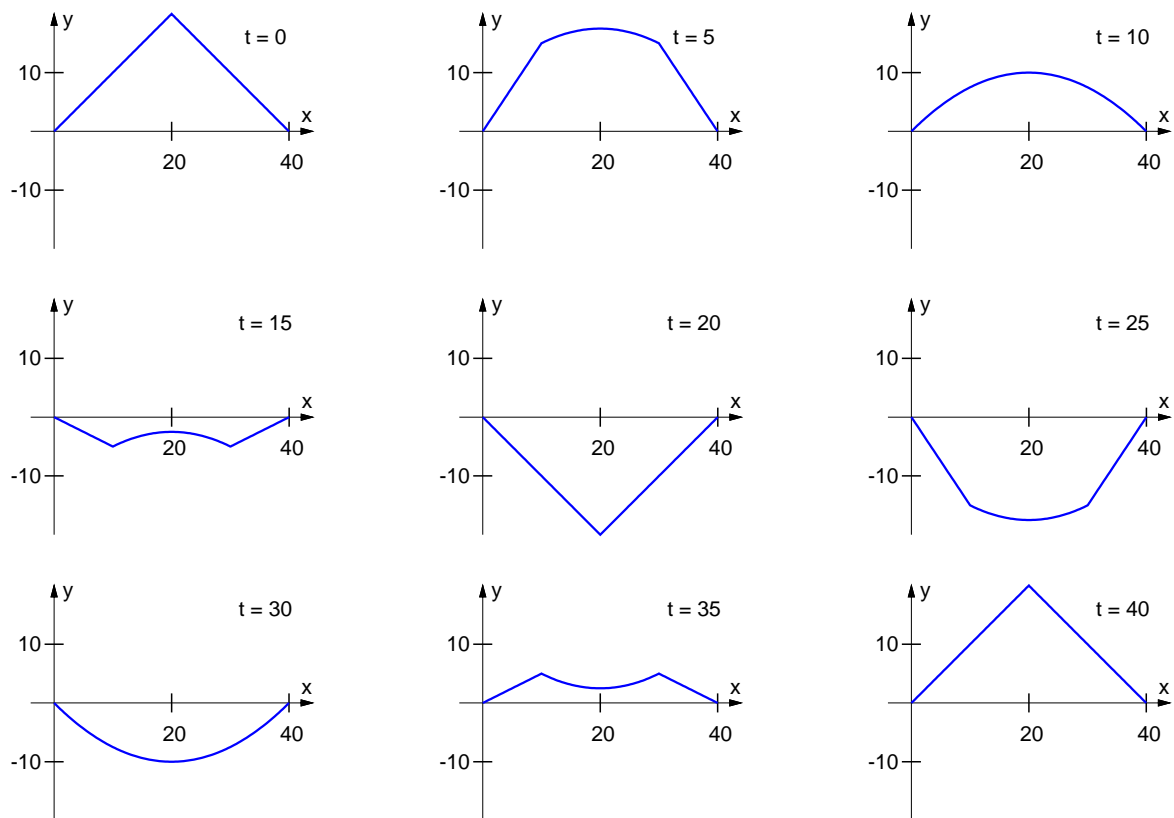
$$\frac{n\pi}{20} d_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \sin \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{16 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



$$d_n = \frac{320 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \frac{320}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{20} \\ &\quad + \frac{320}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

Figura 5.27 – Solução,  $u(x, t)$ , do PVIF do Exemplo 5.17.

## Exercícios (respostas na página 676)

- 3.1. Determine o deslocamento,  $u(x, t)$ , de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

- 3.2. Determine o deslocamento,  $u(x, t)$ , de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por  $\sin(\pi x/20)$ , para  $0 < x < 40$ . Qual o período fundamental da corda?

- 3.3. Determine o deslocamento,  $u(x, t)$ , de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

- 3.4. Determine o deslocamento,  $u(x, t)$ , de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por  $\sin(\pi x/20)$ , para  $0 < x < 40$ . Qual o período fundamental da corda?

- 3.5. Determine o deslocamento,  $u(x, t)$ , de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente  $a = 2$ , com deslocamento inicial  $f(x)$  solta de forma que a velocidade inicial seja  $g(x)$  em que

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

3.6. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L. \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0. \end{cases}$$

3.7. Encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + \frac{\partial u}{\partial x}; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t); \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0; \quad 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x); \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

3.8. Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0. \end{cases}$$

Verifique que se  $f$  é contínua por partes com suas derivadas,  $f'$  e  $f''$ , também contínuas por partes e  $g$  é contínua por partes com a sua derivada,  $g'$ , também contínua por partes, então para  $(x, t)$  tal que  $\tilde{g}'$  e  $\tilde{f}''$

são contínuas em  $x - at$  e  $x + at$  temos que  $u(x, t)$  dado pela solução de d'Alembert,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x - at) + \tilde{f}(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y) dy$$

satisfaz a equação da onda e

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{para } x \in [0, L],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \text{para } x \in (0, L) \text{ onde } g \text{ é contínua,}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

Aqui  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são as extensões ímpares de período  $2L$  de  $f$  e  $g$  respectivamente.

## 5.4 Equação de Laplace num Retângulo

Pode-se mostrar que o potencial elétrico,  $u(x, y)$ , numa região em que há ausência de cargas elétricas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

chamada **equação de Laplace**. Também as soluções estacionárias da equação do calor em uma placa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

assim como as soluções estacionárias da equação de uma membrana elástica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

satisfazem a equação de Laplace.

O problema de encontrar a solução da equação de Laplace numa região sendo conhecidos os seus valores na fronteira da região é chamado **problema de Dirichlet**.

Vamos considerar, agora, o problema de Dirichlet em um retângulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), \quad u(a, y) = k(y), \quad 0 < y < b \end{cases}$$

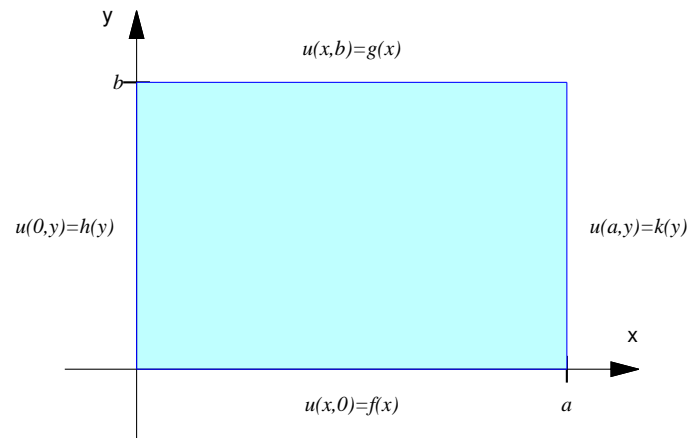


Figura 5.28 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(y)$  e  $k(y)$  não nulas (verifique!).

#### 5.4.1 Apenas $k(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = k(y), \quad 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por  $X(x)Y(y)$  obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$



A equação (5.45) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (5.19) na página 575 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$  na equação (5.44) obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X(x) = 0.$$

Esta equação tem solução geral

$$X(x) = \hat{c}_1 e^{-\frac{n\pi}{b}x} + \hat{c}_2 e^{\frac{n\pi}{b}x}.$$

Mas podemos escrever a solução geral na forma

$$X(x) = c_1 e^{\frac{n\pi}{b}a} e^{-\frac{n\pi}{b}x} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{b}a} e^{\frac{n\pi}{b}x} = c_1 e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)} + c_2 e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)}.$$

que com a condição  $X(0) = 0$  tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2 (e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ , para  $0 < x < a$  e  $u(0, y) = 0$ , para  $0 < y < b$ , tem **soluções fundamentais**

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b}. \quad (5.46)$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(a, y) = k(y)$ , precisamos ter

$$k(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $k(y)$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $k : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $k'(y)$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.47)$$

Vamos verificar que realmente (5.46) com os coeficientes dados por (5.47) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.46) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de  $x \in (0, a)$  tais que  $f(x)$  é contínua. Vamos ver se (5.46) satisfaz a equação de Laplace. Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 5.5 na página 557 usando o fato de que

$$|c_n| \leq \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \frac{2}{b} \int_0^b |k(y)| dy \leq \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1 - e^{-2\frac{n\pi a}{b}}} \leq \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1 - e^{-2\frac{\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-2\frac{\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, y) \right| \leq 2M \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x, y) \right| \leq 2M \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

para  $M = \frac{2}{b} \int_0^b |k(y)| dy$ ,  $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < a$ ,  $0 < y_1 \leq y \leq y_2 < b$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}} < \infty.$$

**Exemplo 5.18.** Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = 0, u(3, y) = k(y), 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

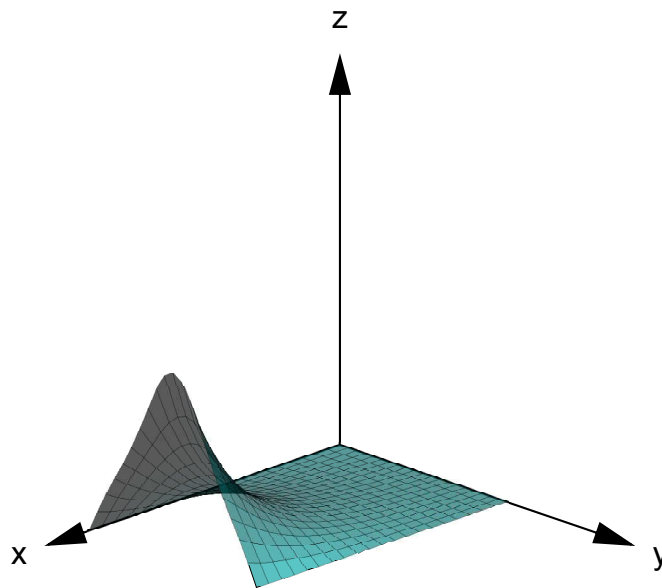


Figura 5.29 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.18 tomando apenas 3 termos não nulos da série

em que  $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$  são os coeficientes da série de senos de  $k(y)$ , ou seja, usando a tabela na página 561, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned} c_n \sinh \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, 2) + 2b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, 2) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, 2) \right) \\ &= \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ c_n &= \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= 0 \\ c_{2k+1} &= \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 \sinh \frac{3(2k+1)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \sinh \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

### 5.4.2 Apenas $h(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), u(a, y) = 0, 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por  $X(x)Y(y)$  obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases} \quad (5.48)$$

$$(5.49)$$

A equação (5.49) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (5.19) na página 575 - e tem

solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

e a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$  na primeira equação diferencial obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X(x) = 0,$$

que com a condição  $X(a) = 0$  tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ , para  $0 < x < a$  e  $u(a, y) = 0$ , para  $0 < y < b$ , tem soluções fundamentais

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a)).$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(0, y) = h(y)$ , precisamos ter

$$h(y) = u(0, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $h(y)$ . Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $h : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $h'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$-c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos evitar o sinal negativo se escrevemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \left( \frac{n\pi}{b} (a - x) \right) \quad (5.50)$$

e neste caso

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.51)$$

Vamos verificar que realmente (5.50) com os coeficientes dados por (5.51) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.50) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de  $y \in (0, b)$  tais que  $h(y)$  é contínua. Vamos ver se (5.50) satisfaz a equação de Laplace. Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 5.5 na página 557 usando o fato de que

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \frac{2}{b} \int_0^b |k(y)| dy \leq \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1 - e^{-2\frac{n\pi a}{b}}} \leq \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1 - e^{-2\frac{\pi a}{b}}}, \\ \left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| &\leq 2M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1 - e^{-2\frac{\pi a}{b}}}, \\ \left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, y) \right| &\leq 2M \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1 - e^{-2\frac{\pi a}{b}}}, \end{aligned}$$



$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x, y) \right| \leq 2M \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}}$$

para  $M = \frac{2}{b} \int_0^b |h(y)| dy$ ,  $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < a$ ,  $0 < y_1 \leq y \leq y_2 < b$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} e^{-\frac{n\pi x_1}{b}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} e^{-\frac{n\pi x_1}{b}} < \infty.$$

**Exemplo 5.19.** Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = h(y), u(3, y) = 0, 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh\left(\frac{n\pi}{2}(3-x)\right)$$

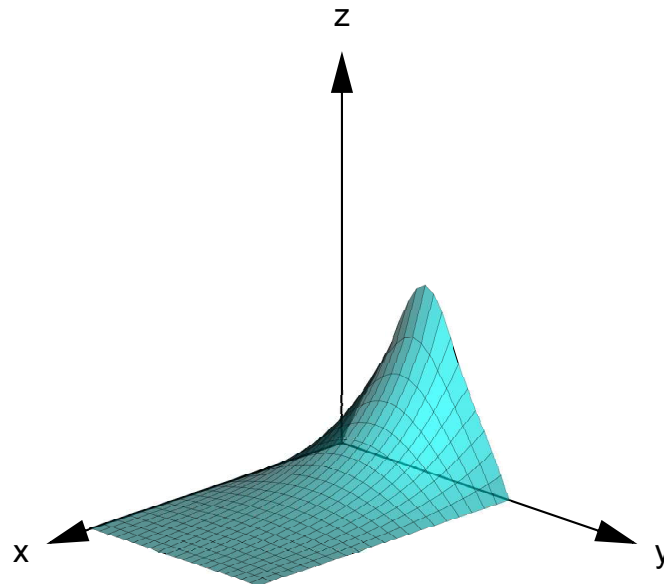


Figura 5.30 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.19 tomando apenas 3 termos não nulos da série

em que  $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$  são os coeficientes da série de senos de  $h(y)$ , que são os mesmos da função  $k(y)$  do Exemplo 5.18 na página 633, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y) \sin(\frac{n\pi y}{2}) dy \\ &= \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} c_{2k} &= 0 \\ c_{2k+1} &= \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 \sinh \frac{3(2k+1)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \sinh \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \end{aligned}$$

### 5.4.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), \quad u(a, y) = k(y), \quad 0 < y < b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(y)$  e  $k(y)$  não nulas, que denotamos por  $u^{(f)}(x, y)$ ,  $u^{(g)}(x, y)$ ,  $u^{(h)}(x, y)$  e  $u^{(k)}(x, y)$ , respectivamente. Ou seja,

$$u(x, y) = u^{(f)}(x, y) + u^{(g)}(x, y) + u^{(h)}(x, y) + u^{(k)}(x, y).$$

**Exemplo 5.20.** Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = h(y), u(3, y) = k(y), 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \left( \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{n\pi(3-x)}{2} \right)$$

em que  $c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}$  são os coeficientes da série de senos de  $k(y)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} dy \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

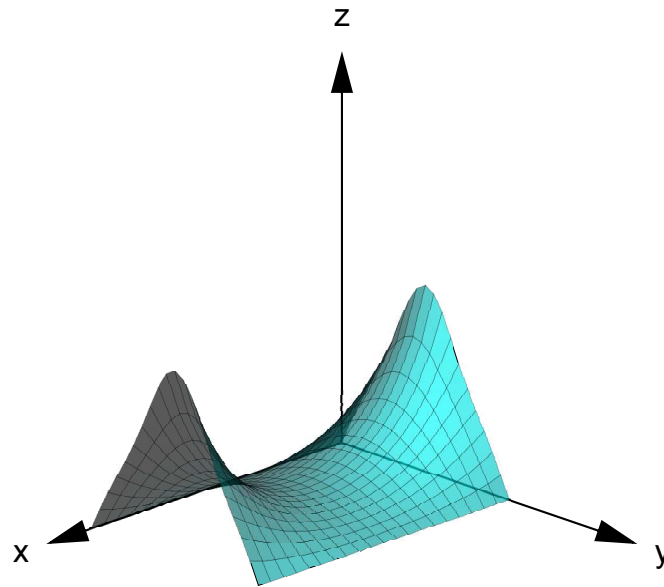


Figura 5.31 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.20 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Ou ainda,

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 \sinh \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi y}{2} \left( \sinh \frac{n\pi x}{2} + \sinh \frac{n\pi(3-x)}{2} \right) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \sinh \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2} \left( \sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2} + \sinh \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \right) \end{aligned}$$

## Exercícios (respostas na página 683)

## 4.1. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = 0, u(3, y) = k(y), 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

## 4.2. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = h(y), u(3, y) = 0, 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

## 4.3. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, 0 < y < b \end{cases}$$

4.4. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0, 0 < x < a \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, 0 < y < b \end{cases}$$

4.5. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), u(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$

4.6. Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h(y), \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(y)$  e  $k(y)$  não nulas.

(a) Resolva o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0, 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$



(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0, 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h(y), \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0, 0 < y < b \end{cases}$$

(c) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente  $f(x)$  diferente de zero, com somente  $g(x)$  diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h(y), \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$

(d) Explique por que este problema não tem solução única.

(e) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

**4.7.** Encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u - \frac{\partial u}{\partial x}; & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(0, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y); & 0 < y < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0; & 0 < x < 1, \\ u(x, 0) = f(x); & 0 < x < 1. \end{cases}$$

## 5.5 Respostas dos Exercícios

### 1. Séries de Fourier (página 562)

- 1.1. Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis  $t = -s$  na primeira parte e usando o fato de que o cosseno e a função  $f$  são pares:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-s) \cos \frac{-n\pi s}{L} (-ds) + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= -\frac{1}{L} \int_L^0 f(s) \cos \frac{n\pi s}{L} ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt
 \end{aligned}$$

Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis  $t = -s$  na primeira parte e usando o fato de que o seno é ímpar e a função  $f$  é par:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-s) \operatorname{sen} \frac{-n\pi s}{L} (-ds) + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = 0
 \end{aligned}$$

- 1.2. Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis  $t = -s$  na primeira parte e usando

o fato de que o cosseno é par e a função  $f$  é ímpar:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-s) \cos \frac{-n\pi s}{L} (-ds) + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(s) \cos \frac{n\pi s}{L} ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0
 \end{aligned}$$

Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis  $t = -s$  na primeira parte e usando o fato de que o seno e a função  $f$  são ímpares:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-s) \sin \frac{-n\pi s}{L} (-ds) + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= -\frac{1}{L} \int_L^0 f(s) \sin \frac{n\pi s}{L} ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt
 \end{aligned}$$

- 1.3. (a) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis  $t = L - s$  na segunda parte e usando o fato de que

$$h(L - t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L/2]$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^L h(t) dt &= \int_0^{L/2} h(t) dt + \int_{L/2}^L h(t) dt \\
 &= \int_0^{L/2} h(t) dt + \int_{L/2}^0 h(L-s) (-ds) \\
 &= \int_0^{L/2} h(t) dt + \int_{L/2}^0 h(s) ds = 0
 \end{aligned}$$

(b) Para  $h(t) = f(t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{L}$  temos que

$$\begin{aligned}
 h(L-t) &= f(L-t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi(L-t)}{L} = f(t) \operatorname{sen} \left( 2k\pi - \frac{2k\pi t}{L} \right) = f(t) \operatorname{sen} \left( -\frac{2k\pi t}{L} \right) \\
 &= -f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi t}{L} \right) = -h(t)
 \end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que  $b_{2k} = 0$ .

(c) Para  $h(t) = f(t) \cos \frac{2k\pi t}{L}$  temos que

$$\begin{aligned}
 h(L-t) &= f(L-t) \cos \frac{2k\pi(L-t)}{L} = -f(t) \cos \left( 2k\pi - \frac{2k\pi t}{L} \right) = -f(t) \cos \left( -\frac{2k\pi t}{L} \right) \\
 &= -f(t) \cos \left( \frac{2k\pi t}{L} \right) = -h(t)
 \end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que  $a_{2k} = 0$ .

1.4. Fazendo a mudança de variáveis  $s = \frac{n\pi t}{L}$  e integrando-se por partes duas vezes obtemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} t^2 dt = \frac{L^2}{3} (d^3 - c^3) \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} t^2 \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2 \cos s ds \\ &= \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \left( s^2 \sin s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d} - 2 \int_{n\pi c}^{n\pi d} s \sin s \right) \\ &= \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \left( (s^2 - 2) \sin s + 2s \cos s \right) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} t^2 \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2 \sin s ds \\ &= \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \left( -s^2 \cos s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d} + 2 \int_{n\pi c}^{n\pi d} s \cos s \right) \\ &= \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \left( 2s \sin s + (2 - s^2) \cos s \right) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{f_{c,d}^{(2)}}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{L^2}{6} (d^3 - c^3) + \frac{L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((s^2 - 2) \sin s + 2s \cos s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3} \cos \frac{n\pi t}{L} \\ &\quad + \frac{L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2s \sin s + (2 - s^2) \cos s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3} \sin \frac{n\pi t}{L} \end{aligned}$$

1.5. (a) A função é ímpar. A sua série de Fourier de período  $2L$  é dada por

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

com

$$b_n = 2 \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = -\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de Fourier de  $f$  é dada por

$$S_f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{L}.$$

(b) A função é par. Logo a sua série de Fourier de período  $2L$  é dada por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \left( \frac{L}{2} a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) - a_0(f_{0,1}^{(1)}, L) \right) \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \left( \frac{L}{2} a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) - a_n(f_{0,1}^{(1)}, L) \right) \\ &= \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_0^{n\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_0^{n\pi} \\ &= 0 - \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) = -\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de Fourier de  $f$  é dada por

$$S_f(t) = \frac{L}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{L}.$$

**1.6.** A função  $f$  é ímpar e periódica de período  $2L$ . Logo a sua série de Fourier é da forma

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/2}^{(1)}) + L b_n(f_{1/2,1}^{(0)}) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}) \right) \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi/2} - \frac{2L}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{4L}{n^2\pi^2} \left( -\frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{4L \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4L(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Assim a sua série de Fourier é dada por

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L} \end{aligned}$$

**1.7.** A função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(t) = t(L-t) = -t^2 + Lt$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L (-t^2 + Lt) dt = \frac{-2L^2}{3} + L^2 = \frac{L^2}{3} \\ a_n &= 2 \left( -a_n(f_{0,1}^{(2)}, L) + L a_n(f_{0,1}^{(1)}, L) \right) \\ &= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \left( (n^2\pi^2 - 2) \operatorname{sen} n\pi + 2n\pi \cos n\pi \right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2} (n\pi \operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi - 1) \\ &= \frac{2L^2}{n^2\pi^2} (-\cos n\pi - 1) = \frac{2L^2}{n^2\pi^2} ((-1)^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

Entretanto os coeficientes de índice ímpar são nulos. Podemos separar os termos em de índice par e de índice ímpar

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0 \\ a_{2k} &= \frac{-4L^2}{(2k)^2\pi^2} = \frac{-L^2}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left( -b_n(f_{0,1}^{(2)}, L) + L b_n(f_{0,1}^{(1)}, L) \right) \\ &= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \left( 2n\pi \operatorname{sen} n\pi + (2 - n^2\pi^2) \cos n\pi - 2 \right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2} (-n\pi \cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi) \\ &= \frac{4L^2}{n^3\pi^3} (-\cos n\pi + 1) = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} ((-1)^{n+1} + 1) \end{aligned}$$



Entretanto os coeficientes de índice par são nulos. :

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{8L^2}{(2k+1)^3 \pi^3}.$$

$$\begin{aligned} S_{c_f}(t) &= \frac{L^2}{3} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{6} - \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi t}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{s_f}(t) &= \frac{4L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L} \end{aligned}$$

1.8. (a)  $a_0 = 2a_0(f_{1/2,1}^{(0)}, L) = 1$ ,  $a_n = 2a_n(f_{1/2,1}^{(0)}, L) = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} = -\frac{2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n\pi},$

$$b_n = 2b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, L) = -\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} = -\frac{2((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2})}{n\pi}.$$

$$S_{c_f}(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n} \cos \frac{n\pi t}{L} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{L}.$$

$$S_{s_f}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$$

(b)  $a_0 = 2a_0(f_{1/4,3/4}^{(0)}, L) = 1$ ,  $a_n = 2a_n(f_{1/4,3/4}^{(0)}, L) = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}} = \frac{2(\operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4})}{n\pi},$

$$b_n = 2b_n(f_{1/4,3/4}^{(0)}, L) = -\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}} = -\frac{2(\cos \frac{3n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4})}{n\pi}.$$

$$Sc_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}}{n} \cos \frac{n\pi t}{L}$$

$$Ss_f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad a_0 &= 2 \left( a_0(f_{1/2,1}^{(1)}, L) - \frac{L}{2} a_0(f_{1/2,1}^{(0)}, L) \right) = \frac{L}{4}, \\ a_n &= 2 \left( a_n(f_{1/2,1}^{(1)}, L) - \frac{L}{2} f_{1/2,1}^{(0)} \right) = \frac{2L((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2})}{n^2 \pi^2}, \\ b_n &= 2 \left( b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, L) - \frac{L}{2} b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, L) \right) = \frac{L(n\pi(-1)^n + 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2})}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

$$Sc_f(t) = \frac{L}{8} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

$$Ss_f(t) = -\frac{L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^n + 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad a_0 &= 2 \left( a_0(f_{0,1/4}^{(1)}, L) + \frac{L}{4} a_0(f_{1/4,3/4}^{(0)}, L) + L a_0(f_{3/4,1}^{(0)}, L) - a_0(f_{3/4,1}^{(1)}, L) \right) = \frac{3L}{8}, \\ a_n &= 2 \left( a_n(f_{0,1/4}^{(1)}, L) + \frac{L}{4} a_n(f_{1/4,3/4}^{(0)}, L) + L a_n(f_{3/4,1}^{(0)}, L) - a_n(f_{3/4,1}^{(1)}, L) \right) = \frac{2L(\cos \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{3n\pi}{4} - 1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2}, \\ b_n &= 2 \left( b_n(f_{0,1/4}^{(1)}, L) + \frac{L}{4} b_n(f_{1/4,3/4}^{(0)}, L) + L b_n(f_{3/4,1}^{(0)}, L) - b_n(f_{3/4,1}^{(1)}, L) \right) = \frac{2L(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4})}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

$$Sc_f(t) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{3n\pi}{4} - 1 - (-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

$$Ss_f(t) = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

- 1.9. (a) Como  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes com a derivada  $f'$  também contínua por partes, ímpar e periódica de período igual a 2 podemos escrevê-la em termos de sua série de Fourier como

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi t, \quad \text{para } t \neq n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

com

$$b_m = 2 \int_0^1 f(t) \operatorname{sen} m\pi t \, dt = \frac{2}{m\pi} \cos s \Big|_0^{m\pi} = \frac{2}{m\pi} ((-1)^m - 1)$$

A solução da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t$$

Podemos procurar uma solução particular da forma

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\pi t + B_m \operatorname{sen} m\pi t)$$

com coeficientes  $A_m, B_m$  a determinar.

$$y'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-m\pi A_m \operatorname{sen} m\pi t + m\pi B_m \cos m\pi t)$$

$$y''(t) = - \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 \pi^2 A_m \cos m\pi t + m^2 \pi^2 B_m \operatorname{sen} m\pi t)$$

Substituindo-se  $y(t)$  e  $y''(t)$  na equação diferencial obtemos

$$-2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \pi^2 (A_m \cos m\pi t + B_m \operatorname{sen} m\pi t) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\pi t + B_m \operatorname{sen} m\pi t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi t$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [(B_m(1 - 2m^2 \pi^2) - b_m) \operatorname{sen} m\pi t + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\pi t] = 0$$

Fazendo  $t = 0$  e  $t = 1$  obtemos

$$A_m = 0, \quad B_m = \frac{b_m}{1 - 2m^2 \pi^2}, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots$$

Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$y_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{1 - 2m^2\pi^2} \operatorname{sen} m\pi t = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m(1 - 2m^2\pi^2)} \operatorname{sen} m\pi t$$

A solução geral é então

$$y(t) = c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m(1 - 2m^2\pi^2)} \operatorname{sen} m\pi t$$

(b)  $y(0) = 0$  implica que  $c_1 = 0$ . Logo,

$$y'(t) = c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{1 - 2m^2\pi^2} \cos m\pi t$$

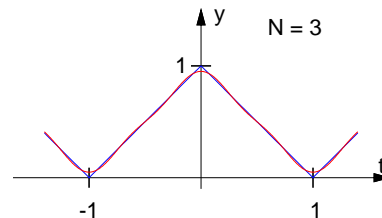
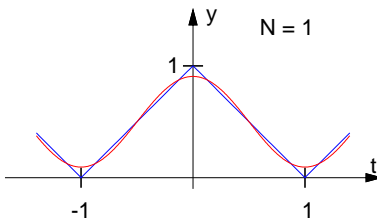
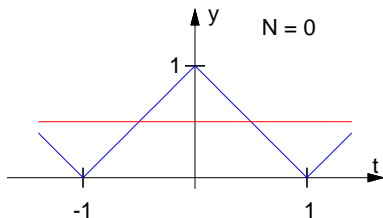
Substituindo-se  $t = 0$  e  $y' = 0$  obtemos

$$c_2 = -2\sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{1 - 2m^2\pi^2}$$

e a solução do PVI é

$$y(t) = \left( -2\sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{1 - 2m^2\pi^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m(1 - 2m^2\pi^2)} \operatorname{sen} m\pi t$$

1.10.



(a) A função é par, contínua por partes, de período igual a 2. Logo a sua série de Fourier é dada por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi t$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \left( a_0(f_{0,1}^{(0)}, 1) - a_0(f_{0,1}^{(1)}, 1) \right) \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \left( a_n(f_{0,1}^{(0)}, 1) - a_n(f_{0,1}^{(1)}, 1) \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_0^{n\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_0^{n\pi} \\ &= 0 - \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) = -\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de cossenos de  $f_{0,1}^{(1)}$  é dada por

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi t,$$

(b) Como a função  $f$  é contínua por partes com derivada  $f'$  também contínua por partes, então a série de Fourier de  $f$ ,  $S_f(t)$ , converge para  $f(t)$  nos pontos onde  $f$  é contínua, que é o caso de  $t = 0$ . Logo

$$S_f(0) = f(0) = 1.$$

Como a série de fourier é periódica de período fundamental igual a 2, então

$$S_f(t+100) = S_f(t+50 \cdot 2) = S_f(t).$$

Assim,

$$S_f(100.5) = S_f(100 + \frac{1}{2}) = S_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Além disso, para  $t = 1/2$  a função  $f$  também é contínua, logo

$$S_f(100.5) = S_f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

- 1.11.** (a) Estendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja par obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes dos termos de senos são nulos. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 561.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) = 2, \quad a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = 0,$$

$$f(t) = 1, \quad \text{para } 0 \leq t \leq L$$

- (b) Estendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela seja ímpar obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes dos termos de cossenos são nulos. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 561.

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq L.$$

Assim os termos de índice par da série de senos são nulos.

- (c) Estendo-se  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$  de forma que ela não seja nem par nem ímpar obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes os termos de cossenos e de senos são não nulos. Por exemplo, se a função  $f$  é estendida ao intervalo  $[-L, L]$  da forma da a seguir

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -L \leq t < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq t \leq L \end{cases}$$

então os coeficientes que podem ser obtidos da tabela na página 561 são dados por.

$$a_0 = a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) = 1, \quad a_n = a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = 0,$$

$$b_n = b_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = -\frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } -L \leq t \leq L.$$

## 2. Equação do Calor em uma Barra (página 597)

2.1. (a) Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) = 20, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\ &= 2 \left( 20b_n(f_{0,1}^{(0)}, 40) \right) \\ &= -20 \frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{40}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{40}{n\pi} (1 - (-1)^n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t} \\ &= \frac{80}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{40} x e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{1600} t} \end{aligned}$$



(b)

$$|u(x, t)| \leq \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{\pi^2}{1600} t} \right)^n = \frac{80}{\pi} \frac{e^{-\frac{\pi^2}{1600} t}}{1 - e^{-\frac{\pi^2}{1600} t}} = \frac{80}{\pi} \frac{1}{e^{\frac{\pi^2}{1600} t} - 1}, \text{ para } 0 < x < 40,$$

é equivalente a

$$e^{\frac{\pi^2}{1600} t} \geq \frac{\frac{80}{\pi}}{|u(x, t)|} + 1.$$

Ou seja, se

$$t \geq \frac{1600}{\pi^2} \ln \left( \frac{\frac{80}{\pi}}{|u(x, t)|} + 1 \right) = \frac{1600}{\pi^2} \ln \left( \frac{\frac{80}{\pi}}{10} + 1 \right) \approx 200 \text{ segundos},$$

então a temperatura no centro da barra será menor ou igual a  $10^\circ \text{ C}$ .

**2.2.** Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) = 20, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 60 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \frac{3x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - \frac{3x}{2} = 20 - \frac{3x}{2}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\
 &= 2 \left( 20b_n(f_{0,1}^{(0)}, 40) - \frac{3}{2}b_n(f_{0,1}^{(1)}, 40) \right) \\
 &= -\frac{40}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{n\pi} \\
 &= -\frac{40}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) - \frac{120}{n^2\pi^2} (-n\pi \cos(n\pi)) \\
 &= \frac{40(1 + 2(-1)^n)}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{3x}{2} + \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

Quando  $t$  tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária  $v(x, t) = \frac{3x}{2}$ .

**2.3.** (a) Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) = \frac{3x}{2}, \quad 0 < x < 40 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de cossenos de  $f(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{40} \int_0^{40} f(x) dx = 30, \\ c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \cos \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= 2 \left( \frac{3}{2} a_n(f_{0,1}^{(1)}, 40) \right) = \frac{120}{n^2 \pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_0^{n\pi} \\ &= 120 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 30 + \frac{120}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t} \\ &= 30 - \frac{240}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{1600} t} \end{aligned}$$

(b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 30.$

**2.4.** A equação  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > 0$ :**  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$

**Se  $\lambda = 0$ :**  $X(x) = c_1 + c_2 x.$

**Se  $\lambda < 0$ :**  $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$  implicam que

**Se  $\lambda > 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ , obtemos que  $0 = c_1 + c_2$ , ou seja,

$c_2 = -c_1$ . Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})$ , obtemos que se  $c_1 \neq 0$ , então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível se  $\lambda > 0$  (só é possível se  $\lambda = 0$ ).

**Se  $\lambda = 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 + c_2x$ , obtemos que  $c_1 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_2x.$$

Substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = c_2$ , obtemos que também  $c_2 = 0$ .

**Se  $\lambda < 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ , obtemos que  $c_2 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ , obtemos que se  $c_1 \neq 0$ , então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que  $\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ , para  $n = 0, 2, 3, \dots$ . Portanto

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**2.5.** A equação  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > 0$ :**  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ .

**Se  $\lambda = 0$ :**  $X(x) = c_1 + c_2x$ .

**Se  $\lambda < 0$ :**  $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X'(0) = 0$  e  $X(L) = 0$  implicam que

**Se  $\lambda > 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})$ , obtemos que  $0 = c_1 - c_2$ , ou seja,  $c_2 = c_1$ . Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})$ , obtemos que se  $c_1 \neq 0$ , então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = -e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível.

**Se  $\lambda = 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X' = 0$  em  $X(x) = c_2$ , obtemos que  $c_2 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_1.$$

Substituindo-se  $x = L$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_1$ , obtemos que também  $c_1 = 0$ .

**Se  $\lambda < 0$ :**

Substituindo-se  $x = 0$  e  $X' = 0$  em  $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x))$ , obtemos que  $c_1 = 0$ . Logo

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se  $x = L$  e  $X = 0$  em  $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ , obtemos que se  $c_2 \neq 0$ , então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que  $\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ , para  $n = 0, 2, 3, \dots$ . Portanto

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**2.6.** Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira  $X(0) = X'(L) = 0$  que decorrem do fato de que  $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$  e  $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t)$ :

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X'(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

$$(5.53)$$

A equação  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > 0$ :**  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ .

**Se  $\lambda = 0$ :**  $X(x) = c_1 + c_2 x$ .

**Se  $\lambda < 0$ :**  $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$  implicam que (5.52) tem solução não identicamente nula somente se  $\lambda < 0$  (conforme exercício anterior), mais que isso  $\lambda$  tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (5.52) tem solução

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$  na equação diferencial (5.53) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que tem como solução

$$T(t) = c_2 e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x, t) = X(x)T(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_{2n+1} u_{2n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^N c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

são soluções. Então, para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de  $f(x)$ . Entretanto, estendendo  $f$  ao intervalo  $[0, 2L]$  de forma que ela seja simétrica em relação a reta  $x = L$ , ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

pois

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_L^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_L^{2L} f(2L - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_L^0 f(x') \operatorname{sen} \left( 2n\pi - \frac{n\pi x'}{L} \right) (-dx') = 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo [Corolário 5.3 na página 542](#), se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua



derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned}
 c_{2n+1} &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx + \frac{1}{L} \int_L^{2L} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx + \frac{1}{L} \int_L^{2L} f(2L-x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx + \frac{1}{L} \int_L^0 f(x') \operatorname{sen} \left( (2n+1)\pi - \frac{(2n+1)\pi x'}{2L} \right) (-dx') \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx.
 \end{aligned}$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**2.7.** Observamos que  $v(x, t) = T_1$  é uma solução da equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que satisfaz as condições

$$u(0, t) = T_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

Logo a solução do problema é

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x, t),$$

em que  $u_0(x, t)$  é a solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

Assim, usando o resultado do exercício anterior

$$u(x, t) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} t}$$

é a solução do problema da valor inicial e de fronteiras se

$$u(x, 0) = f(x) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

ou seja, os coeficientes são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_1] \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx.$$

**2.8.** Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira  $X(0) = X(L) = 0$  que decorrem do fato de que  $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$  e  $0 = u(L, t) = X(L)T(t)$ :

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X(L) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

$$(5.55)$$

A equação  $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > -1$ :**  $X(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})x}$ .

**Se  $\lambda = -1$ :**  $X(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ .

**Se  $\lambda < -1$ :**  $X(x) = c_1 e^{-x} \sin(\sqrt{-1-\lambda}x) + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{-1-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$  implicam que (5.54) tem solução não identicamente nula somente se  $\lambda < -1$ , mais que isso  $\lambda$  tem que ter valores dados por

$$\lambda = -1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (5.54) tem solução

$$X(x) = c_1 e^{-x} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$  na equação diferencial (5.55) obtemos

$$T'(t) + \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) T(t) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = c_2 e^{-t} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

Vamos considerar as séries

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x)e^x$ . Assim, se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) e^x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

**2.9.** (a)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + g(x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = g(x).$

$$u(x, 0) = v(x) + u_0(x, 0) = v(x) + f(x) - v(x) = f(x), \quad u(0, t) = v(0) + u_0(0, t) = v(0) = T_1, \\ u(L, t) = v(L) + u_0(L, t) = v(L) = T_2$$

(b) A solução de

$$\begin{cases} v'' = \frac{3}{40} \\ v(0) = 0, v(40) = 60 \end{cases}$$

é  $v(x) = \frac{3}{80}x^2$ . A solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 20 - \frac{3}{80}x^2, 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, u(40, t) = 0 \end{cases}$$

é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = 20 - \frac{3}{80}x^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\ &= 2 \left( 20b_n(f_{0,1}^{(0)}, 40) - \frac{3}{80}b_n(f_{0,1}^{(2)}, 40) \right) \\ &= -\frac{40}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^3\pi^3} \left( 2s \operatorname{sen} s + (2 - s^2) \cos s \right) \Big|_0^{n\pi} \\ &= -\frac{40}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) - \frac{120}{n^3\pi^3} \left( (2 - n^2\pi^2) \cos(n\pi) - 2 \right) \\ &= \frac{40(2\pi^2n^2(-1)^n - 6(-1)^n + \pi^2n^2 + 6)}{\pi^3n^3}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{3}{80}x^2 + \frac{40}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 n^2 (-1)^n - 6(-1)^n + \pi^2 n^2 + 6}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t}$$

Quando  $t$  tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = \frac{3}{80}x^2.$$

### 3. Corda Elástica Com Extremidades Presas (página 625)

3.1. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

em que  $c_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/4}^{(1)}, 40) + 10b_n(f_{1/4,3/4}^{(0)}, 40) + 40b_n(f_{3/4,1}^{(0)}, 40) - b_n(f_{3/4,1}^{(1)}, 40) \right) \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

3.2. A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}.$$

$$f(x) = \sin 2\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{40}$$

Logo,

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 0, & \text{se } n \neq 2. \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

Período fundamental igual a  $\frac{2\pi}{\pi/10} = 20$  segundos.

3.3. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que  $\frac{n\pi}{20} c_n$  são os coeficientes da série de senos de  $g(x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1600}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{1600}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

**3.4.** A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}.$$

$$g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{20} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}.$$

Logo

$$\frac{n\pi}{20} c_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 0, & \text{se } n \neq 2. \end{cases}$$



Assim,

$$u(x, t) = \frac{10}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

Período fundamental da corda é igual a  $\frac{2\pi}{\pi/10} = 20$  segundos.

**3.5.** Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  não nulas.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

em que  $c_n$  e  $\frac{n\pi}{20}d_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$  e de  $g(x)$ , respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20}d_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{40}\right) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{1600}{\pi^3} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{80}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \\ &\quad \frac{1600}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{40} \sin \frac{n\pi t}{20} \end{aligned}$$

**3.6.** Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira  $X(0) = X(L) = 0$  e  $T'(0) = 0$  que decorrem do fato de que  $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$ ,  $0 = u(L, t) = X(L)T(t)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = X(x)T'(0) = 0$ :

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X(L) = 0 \\ T''(t) - \lambda T(t) = 0, & T'(0) = 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

$$\begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & T'(0) = 0 \end{cases} \quad (5.57)$$

A equação  $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$  pode ter como soluções,

**Se  $\lambda > -1$ :**  $X(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})x}$ .

**Se  $\lambda = -1$ :**  $X(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ .

**Se  $\lambda < -1$ :**  $X(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen}(\sqrt{-1-\lambda}x) + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{-1-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$  implicam que (5.56) tem solução não identicamente nula somente se  $\lambda < -1$ , mais que isso  $\lambda$  tem que ter valores dados por

$$\lambda = -1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (5.56) tem solução

$$X(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se  $\lambda = -1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$  em (5.57) obtemos

$$T''(t) + \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) T(t) = 0, \quad T'(0) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = c_2 \cos \left( \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} t \right), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = e^{-x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \left( \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} t \right)$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \left( \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} t \right)$$

Vamos considerar as séries

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \left( \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} t \right).$$

Mas para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x)e^x$ . Assim, se a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes tal que a sua derivada  $f'$  também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) e^x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

**3.7.** Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) - X(x)T(t) + X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + X'(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, & X'(1) = 0 \\ T''(t) + (1 - \lambda)T(t) = 0, & T(0) = 0 \end{cases}$$

3.8.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{a}{2} (\tilde{f}'(x + at) - \tilde{f}'(x - at)) + \frac{1}{2} (\tilde{g}(x + at) + \tilde{g}(x - at)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{a^2}{2} (\tilde{f}''(x + at) + \tilde{f}''(x - at)) + \frac{a}{2} (\tilde{g}'(x + at) - \tilde{g}'(x - at)) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{f}'(x + at) + \tilde{f}'(x - at)) + \frac{1}{2a} (\tilde{g}(x + at) - \tilde{g}(x - at)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{f}''(x + at) + \tilde{f}''(x - at)) + \frac{1}{2a} (\tilde{g}''(x + at) - \tilde{g}''(x - at)) \\ u(x, 0) &= \tilde{f}(x) = f(x) \text{ para } x \in [0, L]; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \text{ para } x \in (0, L) \text{ onde } g \text{ é contínua.} \\ u(0, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{f}(at) + \tilde{f}(-at)) = 0, \\ u(L, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{f}(L + at) + \tilde{f}(L - at - 2L)) = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Equação de Laplace (página 645)

4.1. A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

em que  $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$  são os coeficientes da série de senos de  $k(y)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \sinh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \int_0^2 k(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \\ &= 2 \left( b_n(f_{0,1/4}^{(1)}, 2) + \frac{1}{2} b_n(f_{1/4,3/4}^{(0)}, 2) + 2b_n(f_{3/4,1}^{(0)}, 2) - b_n(f_{3/4,1}^{(1)}, 2) \right) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ c_n &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \sinh(\frac{3n\pi}{2})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \sinh(\frac{3n\pi}{2})} \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

4.2. A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh\left(\frac{n\pi}{2}(3-x)\right)$$

em que  $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$  são os coeficientes da série de senos de  $h(y)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \sinh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \int_0^2 h(y) \sin \frac{n\pi y}{2} dy \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \sinh(\frac{3n\pi}{2})} \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh \frac{n\pi x}{2}$$

4.3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, & X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(0) = 0, & Y(b) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = c_1 \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição  $Y(0) = 0$  tem solução

$$Y(y) = c_2(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y}) = \tilde{C}_2 \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial  $u(x, b) = g(x)$ , temos que ter

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right).$$

Assim pelo [Corolário 5.3 na página 542](#) se as funções  $g(x)$ ,  $g'(x)$  são contínuas por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**4.4.** Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$



que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y(b) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição  $Y(b) = 0$  tem solução

$$Y(y) = c_2(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{-\frac{n\pi}{a}(y-b)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right).$$

Assim pelo [Corolário 5.3 na página 542](#) se as funções  $f(x)$ ,  $f'(x)$  são contínuas por partes, então os coeficientes são dados por

$$-c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos evitar o sinal de menos se escrevemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

e neste caso

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4.5.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), \quad u(a, y) = k(y), \quad 0 < y < b \end{cases}$$

$$u(x, y) = u^{(f)}(x, y) + u^{(g)}(x, y) + u^{(h)}(x, y) + u^{(k)}(x, y),$$

em que

$$u^{(f)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

$$u^{(g)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \sinh \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(g)} \sinh \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(h)} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(k)} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

- 4.6. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X'(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y'(0) = 0, Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1, \quad Y(y) = c_1 \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A primeira equação diferencial com a condição  $X'(0) = 0$  tem solução

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} + e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y)$ , temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de  $k(y)$  com primeiro coeficiente nulo. Assim pelo [Corolário 5.3 na página 542](#) se as funções  $k(y)$ ,  $k'(y)$  são contínuas por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de  $k(y)$  tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y) dy = 0$$

- (b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & Y'(0) = 0, Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1, \quad Y(y) = c_1 \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A primeira equação diferencial com a condição  $X'(a) = 0$  tem solução

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} + e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = h(y)$ , temos que ter

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de  $h(y)$  com primeiro coeficiente nulo. Assim pelo [Corolário 5.3 na página 542](#) se as funções  $h(y), h'(y)$  são contínuas por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de  $h(y)$  tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b h(y) dy = 0$$

(c)

$$u(x, y) = c_0 + u^{(f)}(x, y) + u^{(g)}(x, y) + u^{(h)}(x, y) + u^{(k)}(x, y),$$

em que

$$u^{(f)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(g)} \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{a} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(h)} \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n^{(k)} \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(d) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

(e) Pois para que tenha solução  $f(x), g(x), h(y)$  e  $k(y)$  tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.

4.7. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $y$ , ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y) - X'(x)Y(y)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $y$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + X'(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = X'(1) = 0 \\ Y''(y) + (\lambda - 1)Y(y) = 0, & Y'(1) = 0 \end{cases}$$



---

## Bibliografia

---

- [1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.
- [2] F. Brauer and J. A. Nohel. *Ordinary Differential Equations: A First Course*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.
- [3] Ricardo Motta Pinto Coelho. *Fundamentos em Ecologia*. Editora Artes Médicas, Porto Alegre, 2000.
- [4] Djairo G. de Figueiredo and Aloisio F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. SBM, Rio de Janeiro, 2a. edition, 2005.
- [5] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [6] E. C. de Oliveira and M. Tygel. *Métodos Matemáticos para Engenharia*. SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.
- [8] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, and Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

- [9] Erwin Kreiszg. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.
- [10] Reginaldo J. Santos. *Álgebra Linear e Aplicações*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2006.
- [11] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2007.
- [12] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [13] Dennis G. Zill. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. Thomson, São Paulo, 2003.
- [14] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Makron Books, São Paulo, 3a. edition, 2001.

---

# Índice Alfabético

---

- Amortecimento crítico, 212
- Amplitude, 206
- Autovalor
  - complexo, 432
- Autovetor
  - complexo, 432
- Batimento, 223
- Centro, 434
- Combinação linear, 399
- Condições de fronteira homogêneas, 574
- Constante
  - da mola, 203
  - de amortecimento, 203
- Convolução de duas funções, 336
- Crescimento exponencial, 36
- Crescimento logístico, 39
- Crescimento populacional, 36
- Curva integral, 8
- Datação por carbono 14, 44
- Delta de Dirac, 328
- Derivada da transformada de Laplace, 309
- difusividade térmica, 574
- Dinâmica populacional, 36
- Equação
  - Calor não homogênea, 598
  - característica, 174
  - da corda elástica, 600
  - de  $n$ -ésima ordem, 7
  - de 1ª ordem, 7
  - de 2ª ordem, 7
  - de Euler, 167, 184
  - de Laplace, 628

- diferencial, 1
- do calor, 574
- homogênea com coeficientes constantes, 174
- homogênea de 2ª ordem, 153
- linear, 8
- linear não homogênea com coeficientes constantes, 190
- não homogênea, 186
- não linear, 8
- ordinária, 7
- parcial, 7
- Equações
  - lineares de 1ª ordem, 14
  - separáveis, 25
- Fórmula de Euler, 166
- Fase, 206
- Fator integrante
  - da equação linear, 16
- Foco atrator, 438
- Foco instável, 438
- Fonte, 420
- Fonte espiral, 438
- Frequência de ressonância, 219
- Frequência natural, 206
- Frequências naturais, 605, 616
- Função
  - admissível, 287
  - contínua por partes, 287, 525
  - de Heaviside, 311
  - degrau (unitário), 311
  - seccionalmente contínua, 287, 525
- Função ímpar, 540
- Função Gama, 301
- Função par, 540
- Funções
  - linearmente dependentes (L.D.), 159
  - linearmente independentes (LI), 159
- Harmônico, 605, 616
- Impulso unitário, 328
- Intervalo de validade da solução, 29
- Lei de resfriamento de Newton, 52
- Lei de Torricelli, 56, 86
- Linearidade da transformada de Laplace, 284
- Método dos coeficientes a determinar, 190
- Misturas, 48
- Modo normal (ou natural) de vibração, 605, 616
- Movimento harmônico simples, 206
- Nó atrator, 420
- Nó impróprio, 452
- Nó instável, 420
- Onda estacionária, 605, 616
- Oscilações, 203
- Oscilações forçadas, 218
- Oscilações livres, 205
- Parte imaginária, 282

- Parte real, 282
- Período, 206
- Polinômio característico, 411
- Polinômio de Bernstein, 297
- Ponto de sela, 416
- Princípio da Superposição
  - para equações não homogêneas, 188
- Princípio da superposição, 153, 399
- Problema de Dirichlet, 628
- Problema de Neuman, 646
- Problema de valor inicial, 11
- Problema de Valor Inicial e de Fronteira, 574, 588, 600, 601
- PVI, 11
- PVIF, 574, 588, 600, 601
- Quase frequência, 214
- Resistência em fluidos, 59
- Ressonância, 219
- Retrato de fase, 416
- Série de Fourier de cossenos, 543
- Série de Fourier de senos, 543
- Séries de Fourier, 525
- Separação de variáveis, 575
- Sistemas de equações diferenciais
  - lineares, 396
- Sistemas de equações lineares homogêneos, 399
- Solução
  - d'Alembert, 608, 618, 621
  - dada implicitamente, 26
  - de equação de 1ª ordem, 11
  - de equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , 8
  - de Equilíbrio, 584
  - de equilíbrio, 593
  - estacionária, 224, 584, 593
  - geral, 158, 402
  - geral de equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , 9
  - particular de equação de 1ª ordem, 11
  - particular de equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , 8
  - transiente, 224
- Soluções
  - Fundamentais, 631
  - fundamentais, 158, 402, 578, 591, 603
- Subamortecimento, 214
- Sumidouro, 420
- Sumidouro espiral, 438
- Superamortecimento, 211
- Teorema
  - 1º de deslocamento, 289
  - 2º de deslocamento, 317
  - Abel, 169
  - convolução, 336
  - de existência e unicidade
    - para equações de 1ª ordem, 93
    - para equações de 1ª ordem lineares, 96
    - para equações de 2ª ordem, 152
    - para sistemas de equações diferenciais, 398

derivação para Transformada de Laplace, [302](#)  
linearidade da transformada de Laplace, [284](#)  
Trajetórias, [416](#)  
Transformada de Laplace, [281](#)  
Transformada de Laplace inversa, [288](#)  
Transformadas de Laplace Elementares, [345](#)  
  
Velocidade de propagação das ondas, [600](#)  
  
Wronskiano, [158](#), [402](#)