Instituição: Universidade Federal de Minas Gerais
Disciplina: Análise Numérica
Professora: Fabrício Murai
Aluna: Lorena Mendes Peixoto
Matrícula: 2017015002

Terceira Lista de Exercícios

Questão 1)

Questão 1) $\{(\overset{x_0}{0.0}, \overset{y_0}{0.0}), (\overset{x_1}{0.63}, \overset{y_1}{0.59}), (\overset{x_2}{1.26}, \overset{y_2}{0.95}), (\overset{x_3}{1.88}, \overset{y_3}{0.95})\}$

a) $P_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

$P_0(x) = (x-0,63)(x-1,26)(x-1,88) = (x^2-1,26x-0,63x+0,7938)$

$(x-1,88) = x^3-3,77x^2+4,347x-6,68$

$P_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)$

$P_2(x) = (x)(x-0,63)(x-1,88) = x(x^2-2,51x+1,1844) = x^3-2,51x^2+1,1844x$

b) $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$L_n(\sqrt{2}/2) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \cdot \frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)} = 0$

$+ y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} \cdot \frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)} = 0,59 \cdot \frac{(0,707)}{(0,63)} \cdot \frac{(-0,553)}{(-0,63)} \cdot \frac{(-1,173)}{(-1,25)} = 0,545$

$+ y_2 \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)} \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \cdot \frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)} = 0,95 \cdot \frac{(0,707)}{(1,26)} \cdot \frac{(0,077)}{(0,63)} \cdot \frac{(-1,173)}{(-0,62)} = 0,123$

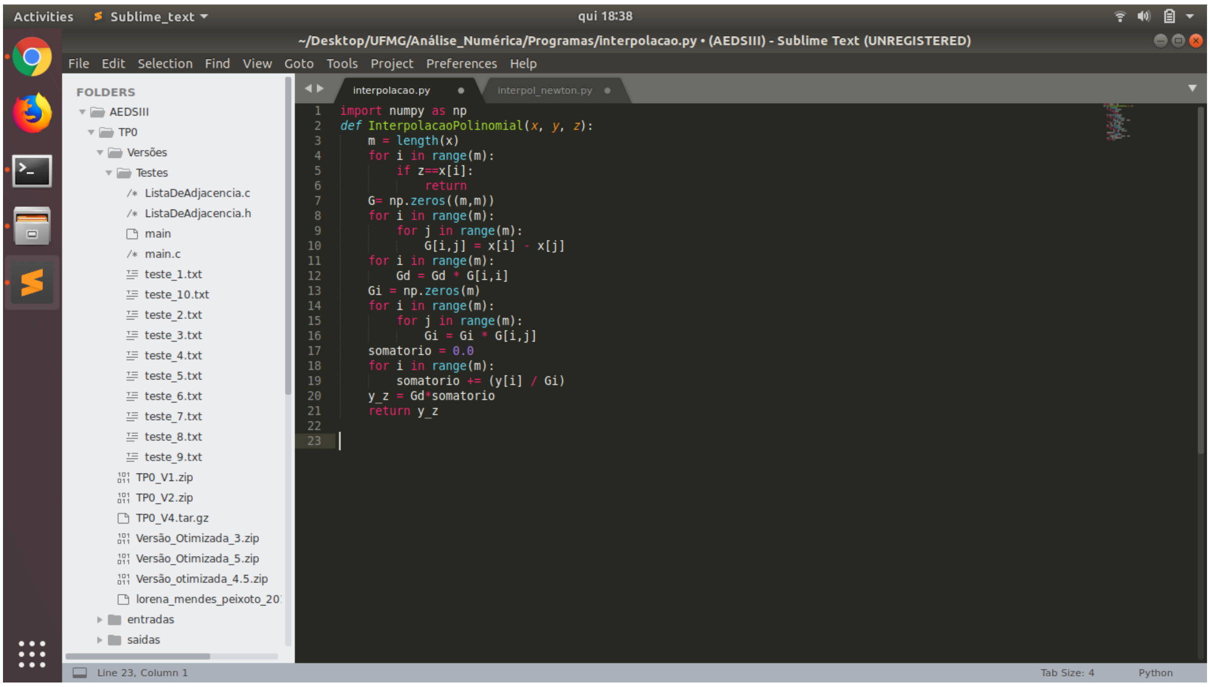
$+ y_3 \frac{(x-x_0)}{(x_3-x_0)} \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)} = 0,95 \cdot \frac{(0,707)}{(1,88)} \cdot \frac{(0,077)}{(1,25)} \cdot \frac{(-0,553)}{(0,62)} = -0,0196$

$L_n(\sqrt{2}/2) = 0,648$

c) A fórmula de Lagrange diz que $P_i(x_i) \neq 0$ e $P_i(x_j) = 0 \ \forall \ i \neq j$. Dessa forma, sendo 0,63 o ponto x_1, $P_0(x_1) = 0 \ \therefore \ P_0(0,63) = 0$.

d) Sendo $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $L_n(0,0) = 0,0$.

Questão 2)



```python
import numpy as np
def InterpolacaoPolinomial(x, y, z):
    m = length(x)
    for i in range(m):
        if z==x[i]:
            return
    G= np.zeros((m,m))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            G[i,j] = x[i] - x[j]
    for i in range(m):
        Gd = Gd * G[i,i]
    Gi = np.zeros(m)
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            Gi = Gi * G[i,j]
    somatorio = 0.0
    for i in range(m):
        somatorio += (y[i] / Gi)
    y_z = Gd*somatorio
    return y_z
```

Questão 4)

Questão 4) a)

i	xi	yi	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0,0	0,0	0,936	-0,290	-0,089
1	0,63	0,59	0,571	-0,457	
2	1,26	0,95	0		
3	1,88	0,95			

b) $P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$

$P_3(\sqrt{2}/2) = \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 y_0 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$P_3(\sqrt{2}/2) = 0,936(0,707) - 0,290(0,707)(0,077) - 0,089(0,707)(0,077)(-0,553)$

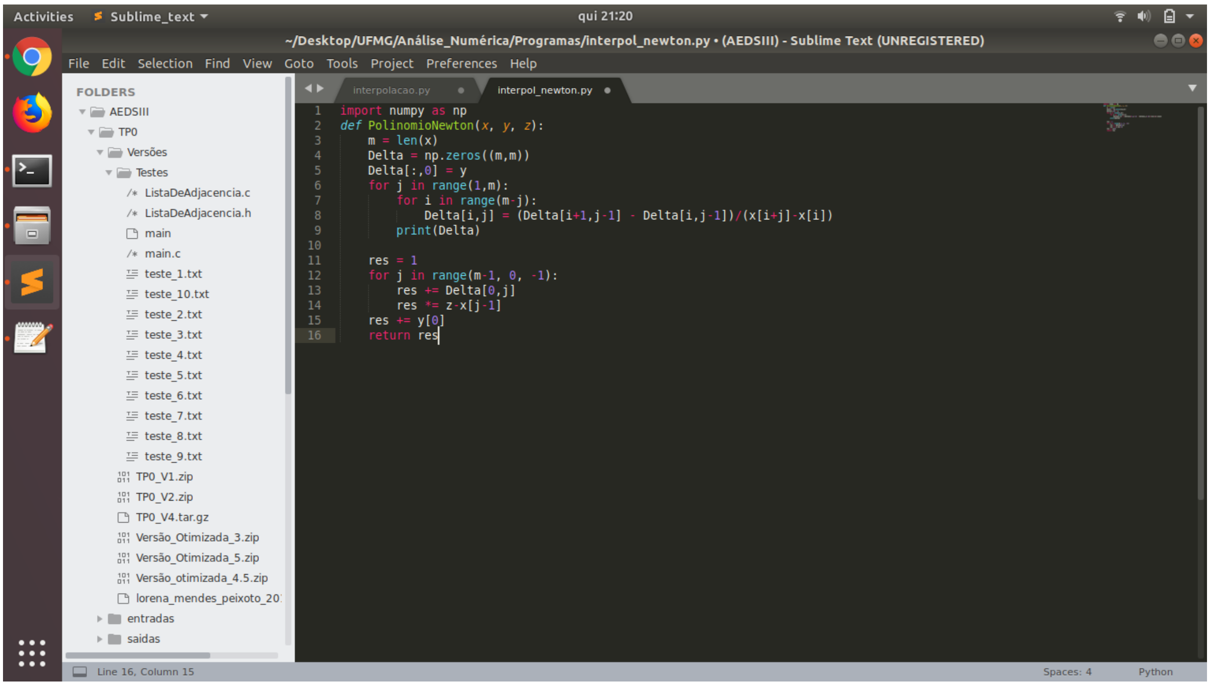
$P_3(\sqrt{2}/2) = 0,6426$

c) $P_3(\sqrt{3}/2) = \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 y_0 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$P_3(\sqrt{3}/2) = 0,936(0,866) - 0,290(0,866)(0,236) - 0,089(0,866)(0,236)(-0,394)$

$P_3(\sqrt{3}/2) = 0,811 - 0,059 + 0,0083 = 0,760$

Questão 5)



Questão 6)

(F) Por n pontos, pode passar somente um polinômio interpolador, independentemente da metodologia utilizada.

(F) Com n+1 pontos distintos, interpola-se um polinômio de grau n.

(F) Se um polinômio é de grau n, então suas diferenças divididas de grau n+1 são identicamente nulas. Da mesma forma, as diferenças divididas de grau n+2 são nulas. Por isso, não se pode afirmar que o polinômio é de grau 3, afinal, ele pode ter graus 1, 2 ou 3.

(F) Entre dois pontos interpolados, há infinitos pontos, não necessariamente coincidentes com a curva "original".

Questão 7)

Para a interpolação cúbica em z=2.2, devo escolher os 4 pontos que tenham abscissa mais próxima do ponto z e em um intervalo que o contenha. Por isso, escolho 1.50, 1.75, 2.00 e 4.00.

Questão 8)

Questão 8) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x = (1,\ 1.5,\ 2.5)$; $y = (1,\ 0.667,\ 0.4)$

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad x_0 < \xi < x_n$$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \rightarrow T_2(1{,}2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$T_2(1{,}2) = \frac{-6}{x^4} \cdot \frac{1}{6} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \rightarrow T_2(1{,}2) = \frac{-1}{x^4} \cdot (x-1)(x-1.5)(x-2.5)$$

$$T_2(1{,}2) = \frac{-1}{\xi^4} (0{,}2)(-0{,}3)(-1{,}3) = \frac{-1}{\xi^4} \cdot 0{,}078$$

→ Achar o valor de ξ, $x_0 \leq \xi \leq x_n$, tal que $f'''(\xi)$ seja o maior possível em módulo.

$$\xi = 1 \rightarrow T_2(1{,}2) = \frac{-1}{1^4} \cdot 0{,}078 = -0{,}078$$

Como o erro não pode ser negativo, aqui é aplicado o módulo. Dessa forma, o erro de truncamento é 0,078.

Questão 9)

Questão 9) $f(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2$ $\quad K = 2 \quad K+1 = 3$ (grau)

$f(1) = 1$; $f(2) = 1 + 2^2 = 3$; $f(3) = 1 + 2^2 + 3^2 = 14$; ... Pontos (1, 2, 3, ...)

Como o grau é 3:

i	n_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	1	4	2,5	1/3
1	2	5	9	3,5	
2	3	14	16		
3	4	30			

$$P_n(n) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (n - n_j)$$

$$P_n(n) = 1 + 4(n-1) + 2{,}5(n-1)(n-2) + 0{,}33(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$P_n(n) = 1 + 4n - 4 + 2{,}5(n^2 - 3n + 2) + 0{,}33(n^3 - 6n^2 + 11n - 6)$$

$$P_n(n) = 4n - 3 + \tfrac{5}{2}n^2 - 15/2n + 5 + n^3/3 - \tfrac{4}{2}n^2 + 11n/3 - 2$$

$$P_n(n) = n^3/3 + n^2/2 - n/6$$

$$P_n(n) = \frac{2n^3}{6} + \frac{3n^2}{6} - \frac{n}{6} = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n - 1)$$ → É o mesmo polinômio que o desejado

Correção: f(2) = 5 (escrevi que é igual a 3 na segunda linha da foto, mas corrigi logo abaixo).

Questão 10)

(V) Complexidade de operações aritméticas por sistema linear: $O(n^3)$.
Complexidade de operações aritméticas no método de Lagrange: $O(n^2)$.
Substituindo 10 em n, nota-se que Lagrange custa assintoticamente menos que a na solução por sistema linear.
(V) Para o polinômio de Newton, isso é possível. A complexidade de se adicionar um ponto é $O(n)$. Ao se adicionar um ponto, adiciona-se um $P_n(x)$ e o grau aumenta.
(F) De acordo com a fórmula da interpolação de Lagrange, a adição de um novo ponto acarretaria uma alteração em todo o processo. Por isso, adicionar um novo termo em Lagrange é mais caro que em Newton.