Campos cuánticos. Curso 2019/2020
Resolución de problemas propuestos.

MANUEL FERNÁNDEZ-ARROYO SORIANO

13 de enero de 2020

Índice

1. Ecuación de continuidad

Sea $\Psi(\vec{x}, t)$ una solución de la ecuación de Schrödinger correspondiente a una partícula de masa m sometida a un potencial $V(\vec{x})$. Sea $\rho = |\Psi|^2$ y $\vec{J} = -i\left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\right)/(2m)$ en unidades naturales. Demostrar que esta densidad y esta densidad de corriente satisfacen la ecuación de continuidad. Interpretar físicamente el resultado.

Solución.

Empezamos calculando

$$\begin{aligned} \nabla \vec{J} &= \nabla \left[\frac{-i}{2m} \left(\Psi^* \nabla \Psi - \psi \nabla \psi^* \right) \right] \\ &= -\frac{i}{2m} \left(\cancel{\nabla \psi^* \nabla \psi} + \psi^* \nabla^2 \psi - \cancel{\nabla \psi \nabla \psi^*} - \psi \nabla^2 \psi^* \right) \\ &= -\frac{i}{2m} \left(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Y despues calculamos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\partial_t \psi\right) \psi^* + \psi \left(\partial_t \psi^*\right)$$

Para simplificarlo usamos que ψ es solución de la

Ecuación de Schrodinger:

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{x})\psi \qquad -i\partial_t \psi^* = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi^* + V(\vec{x})\psi^* \tag{2}$$

Así que $\partial_t \psi = \frac{i}{2m} \nabla^2 \psi - iV(\vec{x})\psi$ y $\partial_t \psi^* = -\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi^* + iV(\vec{x})\psi$, y sustituyendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{i}{2m} \left(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \right) - \cancel{i\psi^* V(\vec{x})\psi} + \cancel{i\psi V(\vec{x})\psi^*} \\ &= \frac{i}{2m} \left(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Entonces, de 1 y 3 comprobamos que se cumple la ecuación de continuidad:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0} \tag{4}$$

■

2. Partícula relativista en un campo electromagnético

Dada una partícula relativista de masa m, carga q y cantidad de movimiento $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$, sometida a un campo electromagnético de potencial eléctrico Φ y potencial vector $\vec{A}$:

a) Obtener el momento canónico conjugado a partir del lagrangiano correspondiente.

b) Obtener el hamiltoniano correspondiente en términos de las variables canónicas.

c) Obtener las ecuaciones del movimiento (Fuerza de Lorentz relativista).

Solución.

a) El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi \tag{5}$$

Obtener el momento canónico conjugado a partir de aquí es sencillo, usando la definición:

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} = m\frac{1}{2\sqrt{1-v^2}}2v_i + qA_i = m\gamma v_i + qA_i = p_i + qA_i$$

$$\boxed{\vec{\pi} = \vec{p} + q\vec{A} = m\gamma\vec{v} + q\vec{A}} \tag{6}$$

b) El hamiltoniano lo calculamos haciendo la transformada de Legendre:

$$\begin{aligned} H = \vec{v}\cdot\vec{\pi} - L &= \vec{v}\cdot(\vec{p} + \cancel{q\vec{A}}) + m\sqrt{1-v^2} - \cancel{q\vec{v}\vec{A}} + q\phi \\ &= \vec{p}\cdot\vec{v} + m\sqrt{1-v^2} + q\phi = m\gamma v^2 + \frac{m}{\gamma} + q\phi \\ &= m\left(\gamma v^2 + \frac{1}{\gamma}\right) + q\phi = m\gamma\left(v^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + q\phi \\ &= m\gamma\left(v^2 + 1 - v^2\right) + q\phi = m\gamma + q\phi \end{aligned}$$

Pero debemos dejarlo en términos de $\vec{p}$, no de γ. Para encontrar esta dependencia:

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= m^{-2}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2\gamma^{-2} \\ \vec{v}^2(1 + m^{-2}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2) &= m^{-2}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2 \\ \vec{v}^2 &= \frac{m^{-2}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2}{1 + m^{-2}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{1 + m^{-2}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{H = m\gamma + q\phi = \sqrt{m^2 + (\vec{\pi} - q\vec{A})^2} + q\phi} \tag{7}$$

c) Las ecuaciones de movimiento las podremos obtener haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano 5:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

Operando tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = m\gamma\vec{v} + q\vec{A}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = qg_{ij}v^i\frac{\partial A^j}{\partial x^k} - q\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v} + q\vec{A}\right) - q\vec{v}\nabla\times\vec{A} + q\nabla\phi = 0$$

Y así finalmente:

$$\boxed{\frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -q\left(\nabla\phi + \partial_t\vec{A}\right) + q\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A}) = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}} \tag{8}$$

■

3. Hamiltoniano de Pauli

Obtener el hamiltoniano de Pauli a partir de la la ecuación de Dirac para una partícula de masa m y carga q sometida a una campo electromagnético externo descrito por el cuadripotencial A^μ.

Solución.

Ecuación de Dirac de partícula en un campo electromagnético:

$$(i\not{D} - m)\psi = 0 \quad \rightarrow \quad (i\not{\partial} - q\not{A} - m)\psi = 0 \tag{9}$$

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad \not{A} = \gamma^\mu A_\mu, \quad \gamma^\mu = (\beta, \vec{\alpha})$$

Desarrollando la ecuación 9:

$$\left[(i\partial_t - q\phi) - \vec{\alpha}(-i\nabla - q\vec{A}) - \beta m\right]\psi = 0$$

Si ahora introducimos biespinores de Dirac $\psi = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\chi + q\phi\varepsilon + m\varepsilon \\ i\dfrac{\partial \chi}{\partial t} = \vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\varepsilon + q\phi\chi - m\chi \end{cases}$$

Hacemos el cambio a las funciones de evolución lenta

$$\varepsilon = e^{-imt}\varepsilon'$$
$$\chi = e^{-imt}\chi'$$

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \varepsilon'}{\partial t} = \vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\chi' + q\phi\varepsilon' \\ i\dfrac{\partial \chi'}{\partial t} = \vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\varepsilon' + q\phi\chi' - 2m\chi' \end{cases} \tag{10}$$

E introducimos la aproximación no relativista: $\dfrac{\partial \chi'}{\partial t} = 0, \qquad q\phi \ll m$

$$\chi' = \frac{\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})}{2m}\varepsilon' \rightarrow \chi' \ll \varepsilon'$$

Sustituyendo en la primera ecuación de 10 obenemos la ecuación de Pauli, donde el término entre corchetes de la derecha es el hamiltoniano de Pauli:

$$i\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}\left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\right)^2 + q\phi\right]\varepsilon' \tag{11}$$

Podemos desarrollar esta expresión un poco más haciendo uso de la relación vectorial:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Con lo que

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} &= \left[\frac{1}{2m}\left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 - \frac{q\vec{\sigma}}{2m}\left(\nabla \times \vec{A} + \cancel{\vec{A} \times \nabla}\right) + q\phi\right]\varepsilon' \\ &= \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{S}\vec{B} + q\phi\right]\varepsilon' \end{aligned}$$

$$\boxed{H_{PAULI} = \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{S}\vec{B} + q\phi\right]} \tag{12}$$

■

4. Cuadriespinor de Dirac libre

Dado el cuadriespinor de Dirac libre $u(p)$ demostrar:

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs} \quad \text{y} \quad \sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m$$

Solución.

Cuadriespinores

$$u_s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix}; \qquad \bar{u}_s = u_s^\dagger \gamma^0; \qquad \xi_r^\dagger \xi_s = \delta_{rs}; \qquad \sum_s \xi^{s\dagger}\xi^s = 1$$

Matrices Sigma

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}); \qquad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$$

$$\sqrt{p\sigma} = \sqrt{E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}} \overset{\text{CM}}{=} \sqrt{m}; \qquad \sqrt{p\bar{\sigma}} = \sqrt{E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}} \overset{\text{CM}}{=} \sqrt{m}$$

Matrices Gamma

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(p)u_s(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^{r\dagger} & \sqrt{p\sigma}\xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{p\bar{\sigma}}\sqrt{p\sigma}\xi^{r\dagger}\xi^s + \sqrt{p\sigma}\sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^{r\dagger}\xi^s \\
&= m\delta^{rs} + m\delta^{rs}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs}} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^{s\dagger} & \sqrt{p\sigma}\xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \\
&= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^s\xi^{s\dagger} & \sqrt{p\sigma}\sqrt{p\sigma}\xi^s\xi^{s\dagger} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\sqrt{p\bar{\sigma}}\xi^s\xi^{s\dagger} & \sqrt{p\bar{\sigma}}\sqrt{p\sigma}\xi^s\xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma p\bar{\sigma}} & \sqrt{p\sigma p\sigma} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}p\bar{\sigma}} & \sqrt{p\bar{\sigma}p\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p\sigma \\ p\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} \\
&= \gamma p + m = \not{p} + m
\end{aligned}$$

■

5. Álgebra de operadores de creación-destrucción

Dados los operadores $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{N}$ del oscilador armónico, calcular los conmutadores $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]$, $[\hat{N},\hat{a}]$ y $[\hat{N},\hat{a}^\dagger]$.

Solución.

Operadores

$$\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger+\hat{a}\right)\qquad \hat{P}=i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)\tag{14}$$

$$\hat{a}=\frac{m\omega}{2}\left(\hat{X}+\frac{i}{m\omega}\hat{P}\right)\qquad \hat{a}^\dagger=\frac{m\omega}{2}\left(\hat{X}-\frac{i}{m\omega}\hat{P}\right)\tag{15}$$

$$[\hat{X},\hat{P}]=i\hbar=i\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]&=\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=\frac{m\omega}{2}\left(\hat{X}+\frac{i}{m\omega}\hat{P}\right)\left(\hat{X}-\frac{i}{m\omega}\hat{P}\right)=\\&=\frac{m\omega}{2}\left(\frac{-i}{m\omega}[\hat{X},\hat{P}]+\frac{i}{m\omega}[\hat{P},\hat{X}]\right)=\frac{-i}{2}([\hat{X},\hat{P}]+[\hat{X},\hat{P}])=\frac{-i}{2}(2i)=1\end{aligned}$$

Para calcular los otros dos conmutadores primero debemos hacer notar que

$$[\hat{a},\hat{a}]=\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger\right]=0\quad\text{y}\quad\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]=-\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\tag{17}$$

$$[\hat{N},\hat{a}]=[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}]=\cancel{\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}]}+[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\hat{a}=-[\hat{a},\hat{a}^\dagger]\hat{a}=-\hat{a}$$

$$\left[\hat{N},\hat{a}^\dagger\right]=\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}^\dagger\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]+\cancel{\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger\right]\hat{a}}=\hat{a}^\dagger$$

Finalmente:

$$\boxed{\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1\qquad\left[\hat{N},\hat{a}^\dagger\right]=-\hat{a}\qquad\left[\hat{N},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}^\dagger}\tag{18}$$

■

6. Campo electromagnético libre en una caja cúbica

Demostrar que el hamiltoniano de un campo electromagnético libre contenido en una caja cúbica de volumen V con condiciones de contorno periódicas puede escribirse como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\bar{k}}\left(\hat{\bar{P}}^2 + \omega_{\bar{k}}^2\hat{\bar{Q}}^2\right)$$

Solución.

Cuadrivectores

$$k = (\omega_k, \vec{k}) \qquad x = (t, \vec{x})$$
$$kx = k^\mu x_\mu \qquad \omega_k = |\vec{k}|$$

El hamiltoniano del campo electromagnético libre es:

$$H = \int_V d^3\vec{x}\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \int_V d\vec{x}\frac{1}{2}\left[\dot{\vec{A}}^2 + (\nabla\times\vec{A})^2\right] = \frac{V}{2}\sum_k\left[\dot{\vec{A}}_k\dot{\vec{A}}_k^* + \omega_k^2\vec{A}_k\vec{A}_k^*\right]$$

Introducimos el operador potencial vector del campo:

$$\hat{A}_k = \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger = \hat{A}_k^*$$
$$\dot{\hat{A}}_k = -i\omega_k\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right) = \dot{\hat{A}}_k^*$$

Desarrollando el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{V}{2}\sum_k\left(\dot{\hat{A}}\dot{\hat{A}}^* + \omega^2\hat{A}\hat{A}^*\right) = \frac{V}{2}\sum_k\left(-\omega_k^2\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right)^2 + \omega_k^2\left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger\right)^2\right)$$

Más operadores:

$$\hat{Q}_k = \sqrt{V}\left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger\right); \qquad \hat{P} = -i\omega_k\sqrt{V}_k\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right)$$
$$\hat{Q}_k^2 = V\left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger\right)^2; \qquad \hat{P}_k^2 = -\omega_k^2 V\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right)^2$$

Y así de forma natural sólo hay que comparar para obtener:

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_k\left(\hat{P_k}^2 + \omega_k^2\hat{Q_k}^2\right)} \tag{19}$$

■

7. Hamiltoniano de Schrödinger

Sea una partícula de masa m cuya dinámica está descrita por el hamiltoniano:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}})$$

y dos estados $|A\rangle$ y $|B\rangle$. Demostrar:

$$\langle B|\hat{\vec{P}}|A\rangle = im\langle B \left| \left[\hat{H}_0, \hat{\vec{x}}\right] \right| A\rangle.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\left[\hat{H}_0, \hat{\vec{x}}\right] &= \hat{H}_0\hat{\vec{x}} - \hat{\vec{x}}\hat{H}_0 = \left(\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}})\right)\hat{\vec{x}} - \hat{\vec{x}}\left(\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}})\right) \\
&= \frac{\hat{\vec{P}}^2\hat{\vec{x}}}{2m} + V(\hat{\vec{x}})\hat{\vec{x}} - \frac{\hat{\vec{x}}\hat{\vec{P}}^2}{2m} + \hat{\vec{x}}V(\hat{\vec{x}}) = \frac{1}{2m}[\hat{\vec{P}}\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{x}}] + \cancelto{0}{\left[V(\hat{\vec{x}}), \hat{\vec{x}}\right]} \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{P}}\left[\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{x}}\right] + \left[\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{x}}\right]\hat{\vec{P}}\right) = -\frac{1}{2m}(i\hat{\vec{P}} + i\hat{\vec{P}}) = -\frac{i}{m}\hat{\vec{P}}
\end{aligned}$$

Donde hemos hecho uso de la relación 16. Finalmente:

$$\boxed{\hat{\vec{P}} = im\left[\hat{H}_0, \hat{\vec{x}}\right] \Rightarrow \langle B|\hat{\vec{P}}|A\rangle = im\langle B\left|\left[\hat{H}_0, \hat{\vec{x}}\right]\right|A\rangle} \tag{20}$$

■

8. Armónicos esféricos

Demostrar que las coordenadas de un vector posición $\bar{x}$ en la representación esférica x_M pueden escribirse como:

$$x_M = |\vec{x}|\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_M^1(\theta,\phi)$$

Solución.

Primero definimos:

$$x_{\pm} = \mp\left(\frac{x \pm iy}{\sqrt{2}}\right); \quad x_0 = z; \quad |\vec{x}| = r$$

Pasamos a esfericas

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} x_+ = \dfrac{-r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{i\varphi} \\ x_- = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\psi} \\ x_0 = r\cos\theta \end{array}\right.$$

Usando armónicos esféricos

$$\left.\begin{array}{rcl} Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}e^{i\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta & \rightarrow & x_+ = r\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}}Y_1^1(\theta,\varphi) \\ Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}e^{-i\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta & \rightarrow & x_{-1} = r\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}}Y_1^{-1}(\theta,\varphi) \\ Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta & \rightarrow & x_0 = r\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}}Y_1^0(\theta,\varphi) \end{array}\right\}$$

$$\boxed{x_m = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^m(\theta,\varphi)} \tag{21}$$

■

9. Armónicos radiales

Calcular ∇R_{10} donde R_{10} es la parte radial de la función del átomo de hidrógeno no relativista con $n = 1$ y $l = 1$.

Solución.

$$R_{10} = 2\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-zr/a_0}$$

$$\frac{\partial R_{10}}{\partial r} = -2\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{z}{a_0}\right) e^{-zr/a_0} = -2\left(\frac{z}{a_0}\right)^{5/2} e^{-zr/a_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} R_{10} = \left(\frac{\partial R_{10}}{\partial r}, 0, 0\right) = \left(-2\left(\frac{z}{a_0}\right)^{5/2} e^{-zr/a_0}, 0, 0\right)} \tag{22}$$

■

10. Ecuaciones de Maxwell

Dada la densidad lagrangiana electromagnética:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu,$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, obtener las ecuaciones de Maxwell en forma covariante:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Solución.

Ecuaciones de Euler-Lagrange para campos

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -J^\mu \delta_\mu^\beta = -J^\beta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} = \frac{\partial \left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} F^{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{2}(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}) = -F^{\alpha\beta}$$

Donde hemos tenido en cuenta las

Propiedades de $\mathbf{F}^{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta\right)} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \qquad F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\sigma\nu} F_{\rho\sigma}$$

Y entonces las ecuaciones de movimiento quedan, efectivamente:

$$\boxed{-\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + J^\beta = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta} \tag{23}$$

■

11. Campo escalar complejo

Dada la densidad lagrangiana que describe un campo escalar complejo ψ de masa M y carga q, acoplado al campo electromagnético externo A^μ, demostrar que la corriente $J^\mu = iq\left(\psi^* D^\mu\psi - \psi(D^\mu\psi)^*\right)$ con $D^\mu\psi = (\partial^\mu + iqA^\mu)\psi$, tiene cuadridivergencia nula y escribir una expresión para la carga (eléctrica) conservada correspondiente.

Solución.

Teniendo en cuenta que $(D^\mu\psi)^* = (\partial^\mu - iqA^\mu)\psi^*$, desarrollamos la expresión proporcionada:

$$J^\mu = iq\left(\psi^* D^\mu\psi - \psi(D^\mu\psi)^*\right) = iq\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right) - 2q^2\psi\psi^* A_\mu$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^\mu =& iq\left(\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi + \psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^*\right)\\ &- 2q^2\left[\partial_\mu\psi\psi^* A_\mu + \psi\partial_\mu\psi^* A_\mu + |\psi|^2\partial_\mu A_\mu\right]\\ =& iq\left(\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^*\right) - 2q^2\left[(\partial_\mu\psi)\psi^* A_\mu + \psi(\partial_\mu\psi^*)A_\mu\right]\end{aligned} \tag{24}$$

Aplicando las ecuaciones de movimiento dadas por las ecuaciones de Klein-Gordon para ψ y ψ^*:

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\psi = 0$$

$$\begin{cases}\partial_\mu\partial^\mu\psi = -2iqA_\mu\left(\partial^\mu\psi\right) + \left(q^2 A_\mu A^\mu - m^2\right)\psi\\ \partial_\mu\partial^\mu\psi^* = 2igA_\mu\left(\partial^\mu\psi^*\right) + \left(q^2 A_\mu A^\mu - m^2\right)\psi^*\end{cases}$$

Sustituimos en las ecuaciones de más arriba y efectivamente:

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 2q^2 A_\mu\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right) - 2q^2 A_\mu\left[(\partial_\mu\psi)\psi^* + \psi(\partial_\mu\psi^*)\right] = 0} \tag{25}$$

La carga conservada asociada la obtenemos como:

$$\boxed{Q = \int d^3\vec{x} J^0 = \int\left[iq\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right) - 2q^2\phi|\psi|^2\right] d^3\vec{x}} \tag{26}$$

■

12. Ecuación de Dirac en un campo electormagnético

Dado el cuadriespinor Ψ demostrar que la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi$ conduce a la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético A^μ.

Solución.

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = \bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \bar{\Psi}q\gamma^\mu A_\mu\Psi - \bar{\Psi}m\Psi$$

Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange y aprovechamos que no hay dependencia en $\partial_\alpha\bar{\Psi}$:

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\bar{\Psi}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - q\gamma^\mu A_\mu\Psi - m\Psi = (i\not{D} - m)\Psi \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\bar{\Psi}\right)} = 0 \end{cases}$$

Y así se obtiene directamente la ecuación de Dirac:

$$\boxed{(i\not{D} - m)\Psi = 0} \tag{27}$$

■

13. Ecuación de Klein-Gordon

Demostrar que el operador de campo de un campo escalar real libre $\hat{\Phi}(\bar{x}, t)$, satisface la ecuación de Klein-Gordon.

Solución.

Operador de un campo escalar

$$\hat{\phi} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k} \left(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right) \quad , \quad \vec{k}^2 + m^2 = \omega^2$$

Lo comprobamos directamente:

$$\partial_t^2 \hat{\phi} = -\omega^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k} \left(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right) = -\omega^2 \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \vec{k}^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k} \left(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right) = \vec{k}^2 \hat{\phi}$$

$$\boxed{\left(\Box + m^2\right) \hat{\phi} = \left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right) \hat{\phi} = \left(-\omega^2 - \vec{k}^2 + m^2\right) \hat{\phi} = \left(-K^2 + m^2\right) \hat{\phi} = 0} \qquad (28)$$

■

14. Álgebra de operadores de un campo escalar

A partir de las relaciones de conmutación canónicas de un campo escalar libre obtener las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción:

$$\left[\hat{a}_{\bar{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\bar{k}'}\right] = 2E_k(2\pi)^3\delta\left(\bar{k}-\bar{k}'\right)$$

Solución.

Operadores de un campo escalar libre

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\left(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}^{\dagger}_k e^{ikx}\right) \quad , \quad \hat{\pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} iE_k\left(\hat{a}^{\dagger}_k e^{ikx} - \hat{a}_k e^{-ikx}\right)$$

Relaciones de conmutación

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = i\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{29}$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 \qquad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}]$$

Procedemos directamente al cálculo de los componentes del conmutador:

$$\hat{\phi}(\vec{x},\vec{k})\hat{\pi}(\vec{x}',\vec{k}') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} iE_{k'}\Big[\hat{a}_k\hat{a}^{\dagger}_{k'}e^{-i(kx-k'x')} + \hat{a}^{\dagger}_k\hat{a}^{\dagger}_{k'}e^{i(kx+k'x')} - \hat{a}_k\hat{a}_{k'}e^{-i(kx+k'x')} - \hat{a}^{\dagger}_k\hat{a}_{k'}e^{i(kx-k'x')}\Big]$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}',\vec{k}')\hat{\phi}(\vec{x},\vec{k}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} iE_{k'}\Big[\hat{a}^{\dagger}_{k'}\hat{a}_k e^{i(k'x'-kx)} + \hat{a}^{\dagger}_{k'}\hat{a}^{\dagger}_k e^{i(k'x'+kx)} - \hat{a}_{k'}\hat{a}_k e^{-i(k'x'+kx)} - \hat{a}_{k'}\hat{a}^{\dagger}_k e^{-i(k'x'-kx)}\Big]$$

Así:

$$\begin{aligned}\left[\hat{\phi}(\vec{x},\vec{k}), \hat{\pi}(\vec{x}',\vec{k}')\right] = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} iE_{k'}\Big[&\left(\hat{a}_k\hat{a}^{\dagger}_{k'} - \hat{a}^{\dagger}_{k'}\hat{a}_k\right)e^{-i(kx-k'x')} \\ &+ \left(\hat{a}^{\dagger}_k\hat{a}^{\dagger}_{k'} - \hat{a}^{\dagger}_{k'}\hat{a}^{\dagger}_k\right)e^{i(kx+k'x')} \\ &- \left(\hat{a}_k\hat{a}_{k'} - \hat{a}_{k'}\hat{a}_k\right)e^{-i(kx+k'x')} \\ &- \left(\hat{a}^{\dagger}_k\hat{a}_{k'} - \hat{a}_{k'}\hat{a}^{\dagger}_k\right)e^{i(kx-k'x')}\Big]\end{aligned}$$

Simplificando términos:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x},\vec{k}),\hat{\pi}(\vec{x}',\vec{k}')\right] = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} iE_{k'}2\left[\hat{a}_k,\hat{a}^\dagger_{k'}\right]e^{-i(kx-k'x')} \tag{30}$$

Para relacionar esto con la delta de Dirac recurrimos a la definición:

Delta de Dirac:

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-ikx}$$

$$\begin{aligned}\delta(\vec{x}-\vec{x}') &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-ik(x-x')} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-ik(x-x')} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-ikx}e^{ikx'}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\int d^3\vec{k}' e^{-i(kx-k'x')}\delta(\vec{k}-\vec{k}')\end{aligned} \tag{31}$$

Introduciendo la expresión 31 en 29 y comparando el resultado con 30:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} iE_{k'}2\left[\hat{a}_k,\hat{a}^\dagger_{k'}\right]e^{-i(kx-k'x')} = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\int d^3\vec{k}' e^{-i(kx-k'x')}\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\int d^3\vec{k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}\left[\hat{a}_k,\hat{a}^\dagger_{k'}\right] = \int d^3\vec{k}\int d^3\vec{k}'\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3 2E_k}\left[\hat{a}_k,\hat{a}^\dagger_{k'}\right] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Y por tanto:

$$\boxed{\left[\hat{a}_k,\hat{a}^\dagger_{k'}\right] = (2\pi)^3 2E_k\delta(\vec{k}-\vec{k}')} \tag{32}$$

■

15. Operador carga de un campo complejo

Dado un campo escalar complejo $\hat{\psi}(x)$ cargado eléctricamente con carga q demostrar que el operador carga puede escribirse como:

$$\hat{Q} = q\int \frac{d\bar{k}}{(2\pi)^3 2E_K}\left(\hat{n}_{\bar{k}} - \hat{\bar{n}}_{\bar{k}}\right)$$

Solución.

La corriente conservada de un campo escalar complejo cargado viene dada por:

$$J^\mu = iq\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right)$$

Y la carga conservada asociada a dicha corriente es, como vimos en el problema **11**:

$$Q = \int d^3\vec{x} J^0 = iq\int d^3\vec{x}\left(\psi^*\partial^0\psi - (\partial^0\psi^*)\psi\right)$$

Así que el operador carga se definirá como:

$$\hat{Q} = iq\int d^3\vec{x}\left(\hat{\psi}^\dagger\partial^0\hat{\psi} - (\partial^0\hat{\psi}^\dagger)\hat{\psi}\right) = iq\int d^3\vec{x}\left(\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}} - \dot{\hat{\psi}}^\dagger\hat{\psi}\right)$$

Operadores de un campo complejo:

$$\partial_0\hat{\psi} = \hat{\pi}^\dagger \quad , \quad \partial_0\hat{\psi}^\dagger = \hat{\pi}$$

$$\begin{cases} \hat{\psi}(\vec{x}) = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k}\left(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx}\right) \\ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k}\left(\hat{a}_k^\dagger e^{ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \hat{\pi}(\vec{x}) = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k}(iE_k)\left(\hat{a}_k^\dagger e^{ikx} - \hat{b}_k e^{-ikx}\right) \\ \hat{\pi}^\dagger(\vec{x}) = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k}(-iE_k)\left(\hat{a}_k e^{-ikx} - \hat{b}_k^\dagger e^{ikx}\right) \end{cases} \tag{33}$$

$$\hat{\pi}\hat{\psi} = i\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^2 2}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k}\left(\hat{a}_{k'}^\dagger\hat{a}_k e^{i(k'x-kx)} + \hat{a}_{k'}^\dagger\hat{b}_k^\dagger e^{i(k'x+kx)} - \hat{b}_{k'}\hat{a}_k e^{-i(k'x+kx)} - \hat{b}_{k'}\hat{b}_k^\dagger e^{-i(k'x-kx)}\right)$$

$$\hat{\psi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger = -i\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k}\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^2 2}\left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{k'} e^{-i(k'x-kx)} - \hat{a}_k^\dagger\hat{b}_{k'}^\dagger e^{i(k'x+kx)} + \hat{b}_k\hat{a}_{k'} e^{-i(k'x+kx)} - \hat{b}_k\hat{b}_{k'}^\dagger e^{i(k'x-kx)}\right)$$

Al hacer la resta los términos cruzados de partículas y antipartículas se anulan entre sí, y las exponenciales también, y queda:

$$\hat{\psi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \hat{\pi}\hat{\psi} = -i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k} \delta(\vec{x}) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger\right)$$

Para que la integral converja adecuadamente ordenamos temporalmente el operador y sustituimos:

$$\boxed{:\hat{Q}: = q \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k} \delta(\vec{x}) : \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger\right) := q \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2 2E_k} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k\right)} \quad (34)$$

■

16. Representación de Dirac

Encontrar la ecuación de evolución de un estado en la representación de Dirac en términos del hamiltoniano de interacción $\hat{H}'$ si el hamiltoniano total es $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$.

Solución.

La evolución temporal en la representación de Dirac viene dada por

$$\hat{H}'_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}'_I(0)e^{-i\hat{H}_0 t}$$

Y en general la evolución de un estado viene dada por:

$$i\partial_t\hat{\phi} = \left[\hat{\phi}, \hat{H}\right] = \left[\hat{\phi}, \hat{H}_0\right] + \left[\hat{\phi}, \hat{H}'\right]$$

En virtud de la ecuación de Klein-Gordon el primer sumando $\hat{H}_0\hat{\phi} = \left(\Box + m^2\right)\hat{\phi} = 0$, luego:

$$i\partial_t\hat{\phi} = \left[\hat{\phi}, \hat{H}'\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{i\frac{d}{dt}|\hat{\phi}_I\rangle = \hat{H}'_I|\hat{\phi}_I\rangle} \tag{35}$$

■

17. Sección eficaz diferencial

Encontrar la expresión para la sección eficaz diferencial de dos partículas con momentos iniciales paralelos.

Solución.

$$d\sigma = \frac{|T_{if}|^2}{4P_1^0 P_2^0 \,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} d^{(n)}LIPS$$

$$d^n LIPS = (2\pi)^n \delta^n \left(P^i - P^\rho\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_k}$$

De la relación $\left(P^0\right)^2 = |\vec{P}|^2 + m^2 = (m\gamma\vec{v})^2 + m^2 = E^2$ obtenemos $\vec{v} = \frac{\sqrt{P_0^2 - m^2}}{P^0} = \frac{\vec{P}}{P^0}$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|T_{if}|^2}{4P_1^0 P_2^0 \left|\frac{\vec{P}_1}{P_1^0} - \frac{\vec{P}_2}{P_2^0}\right|} d^{(n)}LIPS = \frac{|T_{if}|^2}{4\left|P_2^0\vec{P}_1 - P_i^0\vec{P}_2\right|} d^{(n)}LIPS \\ &= \frac{|T_{if}|^2}{4\sqrt{\left(P_2^0\vec{P}_1\right)^2 + \left(P_1^0\vec{P}_2\right)^2 - 2P_1^0P_2^0\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right|}} d^{(n)}LIPS \end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión calculamos

$$(P_1 \cdot P_2)^2 = \left(P_1^0 P_2^0 - \vec{P}_1\vec{P}_2\right)^2 = \left(P_1^0 P_2^0 - \left|\vec{P}_1\|\vec{P}_2\right|\right)^2 = \left(P_1^0\right)^2\left(P_2^0\right)^2 + \left|\vec{P}_1\right|^2\left|\vec{P}_2\right|^2 - 2P_1^0P_2^0\left|\vec{P}_1\|\vec{P}_2\right|$$

$$m_1^2 m_2^2 = \left(P_1^0\right)^2\left(P_2^0\right)^2 - \left(P_1^0\right)^2\left|\vec{P}_2\right|^2 - \left(P_2^0\right)^2\left|\vec{P}_1\right|^2 + \left|\vec{P}_1\right|^2\left|\vec{P}_2\right|^2$$

$$\Rightarrow (P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = \left(P_2^0\right)^2\left|\vec{P}_1\right|^2 + \left(P_1^0\right)^2\left|\vec{P}_2\right|^2 - 2P_1^0P_2^0\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right|$$

Y así tenemos:

$$\boxed{d\sigma = \frac{|T_{if}|^2}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d^{(n)}LIPS} \tag{36}$$

■

18. Sistema de referencia centro de masas

Sean dos partículas de cuadrimomentos k_1 y k_2 y de masas m_1 y m_2. Demostar que en el sistema centro de masas el módulo del momento común a ambas es:

$$k = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\left(s - m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 4m_1^2 m_2^2}$$

con $s = \left(k_1 + k_2\right)^2$.

Solución.

Centro de masas

$$k_1 = (E_1, \vec{k}), \qquad k_2 = (E_2, -\vec{k}), \qquad E^2 = \vec{k}^2 + m^2$$

$$\begin{aligned}
s &= k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \\
2k_1 k_2 = 2\left(E_1 E_2 - \vec{k}^2\right) &= s - m_1^2 - m_2^2 \\
2\left(\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2}\sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2}\right) &= s - m_1^2 - m_2^2 + 2\vec{k}^2 \\
4\left((\vec{k}^2 + m_1^2)(\vec{k}^2 + m_2^2)\right) &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 + 4\vec{k}^4 - 4\vec{k}^2(s - m_1^2 - m_2^2) \\
4\left(\cancel{\vec{k}^4} + \vec{k}^2 m_1^2 + \vec{k}^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2\right) &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 + \cancel{4\vec{k}^4} - 4\vec{k}^2(s - m_1^2 - m_2^2) \\
4\vec{k}^2\left(m_1^2 + m_2^2\right) + 4m_1^2 m_2^2 &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4\vec{k}^2(s - m_1^2 - m_2^2) \\
4\vec{k}^2\left(\cancel{m_1^2} + \cancel{m_2^2} + s - \cancel{m_1^2} - \cancel{m_2^2}\right) &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \\
4\vec{k}^2 s &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{k}^2 = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}} \tag{37}$$

■

19. Variables de Mandelstam

Sean dos partículas de cuadrimomentos k_1 y k_2 de masas m_1 y m_2 que interaccionan para producir otras dos partículas de cuadrimomentos k_3 y k_4 de masas m_3 y m_4.

Sean $s = (k_1 + k_2)^2$, $t = (k_1 - k_3)^2$ y $u = (k_1 - k_4)^2$ (variables de Mandelstam).

Demostrar que en cualquier sistema de referencia inercial $s+t+u = m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$.

Solución.

Tan sólo hay que sustituir y tener en cuenta las relaciones entre cuadrimomentos:

Cuadrimomentos:

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}), \qquad k_\mu = (k^0, -\vec{k}), \qquad k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = m^2$$

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4$$

$$\begin{aligned} s+t+u &= (k_1+k_2)^2 + (k_1-k_3)^2 + (k_1-k_4)^2 \\ &= k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 + k_1^2 + k_3^2 - 2k_1k_3 + k_1^2 + k_4^2 - 2k_1k_4 \\ &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_1\,\cancelto{0}{(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)} \end{aligned}$$

$$\boxed{s+t+u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} \tag{38}$$

■

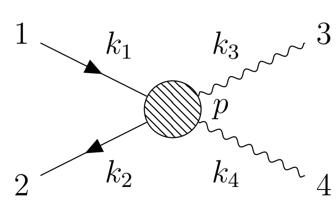
20. Aniquilación electrón-positrón

Escribir los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso $e^- e^+ \to \gamma\gamma$ al orden más bajo en teoría de perturbaciones y la correspondiente amplitud iT.

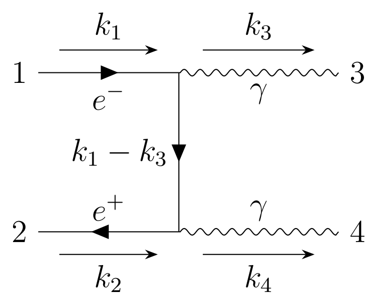
Solución.

Los diagramas de Feynman del proceso son:

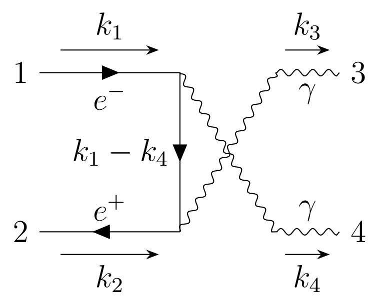
Figura 1: Proceso de aniquilación a primer órden.



(a) Diagrama



(b) Canal t



(c) Canal u

Por simplicidad usaremos la notación $u_i = u(\vec{k}_i, s_i)$, $\epsilon_{(i)\mu} = \epsilon_\mu(\vec{k}_i, \lambda_i)$, donde i es un índice que recorre partículas, y s_i y λ_i son los estados de espín y polarización de las partículas y los fotones respectivamente.

$$iT = iT_s + iT_t$$

$$iT_t = \bar{v}_2 (ie\gamma^\mu) \epsilon^*_{(4)\mu} \left(i \frac{\not{k}_1 - \not{k}_3 + m_e}{(k_1 - k_3)^2 - m_e^2} \right) \epsilon^*_{(3)\nu} (ie\gamma^\nu) u_1$$

$$iT_u = \bar{v}_3 (ie\gamma^\mu) \epsilon^*_{(3)\mu} \left(i \frac{\not{k}_1 - \not{k}_4 + m_e}{(k_1 - k_4)^2 - m_e^2} \right) \epsilon^*_{(4)\nu} (ie\gamma^\nu) u_1$$

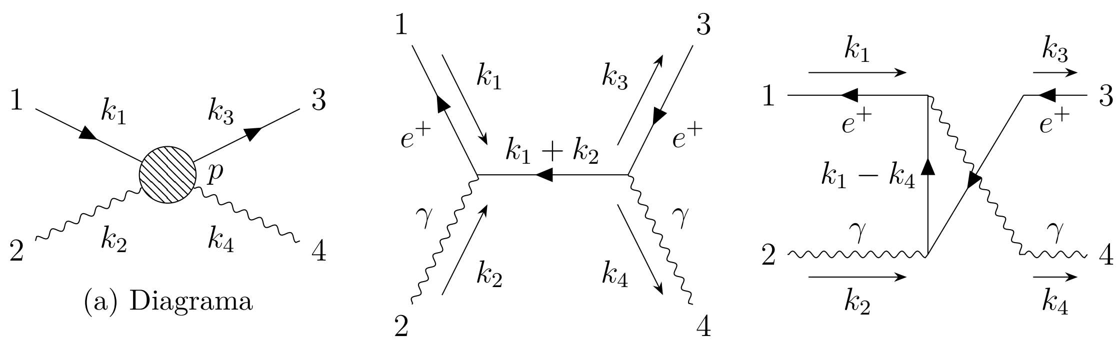
■

21. Dispersión Compton de positrones

Escribir los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso $e^+\gamma \to e^+\gamma$ al orden más bajo en teoría de perturbaciones y la correspondiente amplitud iT.

Solución.

Figura 2: Canales de desintegración



(a) Diagrama (b) Canal s (c) Canal u

Usaremos la misma notación que en el ejercicio anterior: $u_i = u(\vec{k}_i, s_i)$, $\epsilon_{(i)\mu} = \epsilon_\mu(\vec{k}_i, \lambda_i)$. En este caso la amplitud total será

$$iT = iT_t + iT_u$$

$$iT_s = \bar{v}_1(ie\gamma^\mu)\epsilon_{(2)\mu}\left(i\frac{\not{k}_1 + \not{k}_2 + m_e}{(k_1+k_2)^2 - m_e^2}\right)\epsilon^*_{(4)\nu}(ie\gamma^\nu)v_3$$

$$iT_u = \bar{v}_3(ie\gamma^\mu)\epsilon^*_{(3)\mu}\left(i\frac{\not{k}_1 - \not{k}_4 + m_e}{(k_1-k_4)^2 - m_e^2}\right)\epsilon^*_{(4)\nu}(ie\gamma^\nu)v_1$$

■

22. Colisión electrón-muón

En el límite ultrarelativista de la dispersión $\left(e^-\mu^- \to e^-\mu^-\right)$ se tiene en el sistema centro de masas:

$$|\bar{T}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}\left(s^2+u^2\right)$$

Expresar la sección eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ en términos del ángulo $\frac{\theta}{2}$, s y α siendo θ el ángulo entre la dirección del electrón inicial y el final.

Ayuda: $\alpha = e^2/4\pi$, $\quad \sin^2(\theta/2) = (1-\cos\theta)/2$, $\quad \cos^2(\theta/2) = (1+\cos\theta)/2$

Solución.

En el límite ultrarrelativista la energía de las partículas es mucho mayor que su masa $(m_i \to 0) \Rightarrow k_i^2 = m_i^2 = 0$ y por tanto $|\vec{k}^2| \approx E = k^0$ donde igual que en los ejercicios anteriores i recorre partículas, y k_i es el cuadrivector de dicha partícula.

Por conservación de la energía,entonces, $E_1+E_2 = E_3+E_4 \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'|$ y los cuadrimomentos de las partículas serán:

$$k_1 = (E,\vec{k}) \qquad k_2 = (E,-\vec{k}) \qquad\qquad k_3 = (E,\vec{k}') \qquad k_4 = (E,-\vec{k}')$$

Donde $\vec{k}$ tienen sólo componente en el eje x y $\vec{k}'$ forma un ángulo θ repecto a dicho eje.

Las variables de Mandlestam toman la forma:

$$\begin{cases} s = (k_1+k_2)^2 = 4E^2 \\ t = (k_1-k_3)^2 = k_1^2+k_3^2-2k_1k_3 \approx -2k_1k_3 = -2(E_1E_3-\vec{k_1}\vec{k_3}) = -2E^2(1-\cos\theta) \\ u = (k_1-k_4)^2 = k_1^2+k_4^2-2k_1k_4 \approx -2k_1k_4 = -2(E_1E_4-\vec{k_1}\vec{k_4}) = -2E^2(1+\cos\theta) \end{cases}$$

Usando las relaciones proporcionadas, finalmente obtenemos:

$$s = 4E^2 \qquad t = -4E^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad u = -4E^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{39}$$

Sólo queda sustituir:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s}|\bar{T}|^2 = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{2e^4}{t^2}\left(s^2+u^2\right) \\ &= \frac{32\alpha^2\cancel{\pi^2}}{64\cancel{\pi^2}4E^2}\frac{\cancel{16E^4}\left(1+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\cancel{16E^4}\sin^4(\frac{\theta}{2})}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2}\frac{\left(1+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}} \tag{40}$$

■

23. Dispersión Bhaba

En el límite ultrarelativista de la dispersión Bhabha ($e^-e^+ \to e^-e^+$) se tiene en el sistema centro de masas:

$$|\bar{T}|^2 = 2e^4 \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{u^2+t^2}{s^2} + 2\frac{u^2}{st} \right)$$

Expresar la sección eficaz diferencial $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ en términos del ángulo θ entre la dirección del electrón inicial y el final.

Solución.

En este problema, aunque hayan cambiado las masas, se dan las mismas condiciones que en el problema anterior (y las masas no afectan al resultado del problema), por lo que no repetiremos el desarrollo de las variables de Mandlestam, ya que toman los mismos valores que en 39.

Procediendo directamente al cálculo:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{u^2+t^2}{s^2} + 2\frac{u^2}{st} \right) \\
&= \frac{32\alpha^2 \cancel{\pi^2}}{64\cancel{\pi^2} s} \left(\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} + \frac{1}{2}\left(1+\cos^2\theta\right) + \frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)} \right) \\
&= \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{1+\sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right))^2}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \\
&= \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{1+\sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right))}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)
\end{aligned}$$

Y finalmente

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{1+\sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right))}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)} \tag{41}$$

■