# Clase del 26 de mayo de 2020
# Problemas hoja 5: sistemas muy alejados del equilibrio

En este documento se resuelven en detalle todos los problemas de la hoja 5. He intentado escribir todas las explicaciones necesarias. También he tratado de seguir un mismo estilo en todos los problemas, aunque no siempre ha sido posible.

Los mismos problemas están explicados en vídeo.

## Problema 30

La evolución temporal de una variable termodinámica $x$ es $\dot{x} = -ax^3 + b\lambda x$, donde $a$ y $b$ son constantes positivas, y $\lambda$ un parámetro libre del sistema, que puede ser tanto positivo como negativo. Analícense los estados estacionarios del sistema y su estabilidad en función de $\lambda$. ¿Se observa en este sistema alguna bifurcación?

### Solución

Planteamiento.- Es un problema estándar de análisis de estabilidad en sistemas dinámicos. El planteamiento más sencillo consiste en seguir los pasos discutidos en la clase de teoría: *(i)* cálculo de los puntos fijos (estados estacionarios); *(ii)* análisis de estabilidad lineal, y *(iii)* interpretación de la estabilidad marginal para determinar la existencia y, en su caso, el tipo de bifurcaciones. Su peculiaridad es que el sistema solo tiene una coordenada, lo que facilita los cálculos.

Estados estacionarios.- Los estados estacionarios se obtienen imponiendo $-ax^3+b\lambda x = 0$. Las soluciones de esta ecuación son:

$$x^{(1)} = 0; \quad x^{(2)} = \sqrt{\frac{b\lambda}{a}}; \quad x^{(3)} = -\sqrt{\frac{b\lambda}{a}}. \tag{1}$$

El primer punto fijo existe para cualquier valor de $\lambda$. En cambio, el segundo y el tercero solo existen si $\lambda \geq 0$.

Este escenario es compatible con una bifurcación de pitchfork en $\lambda = 0$. No obstante, para ello es necesario también que el sistema dinámico posea una simetría que queda rota en alguno de los puntos fijos (normalmente, en los dos que aparecen en $\lambda = 0$), y que la estabilidad de estos cambie en $\lambda = 0$.

Con respecto a la simetría, la ecuación del sistema dinámico, $\dot{x} = -ax^3 + b\lambda x$, es invariante bajo la transformación $x \to -x$. Además, el punto fijo $x^{(1)}$ también lo es. Sin embargo, los puntos fijos $x^{(2)}$ y $x^{(3)}$, que solo existen si $\lambda > 0$, rompen esta simetría. Así pues, el escenario parece muy compatible con una bifurcación de pitchfork en $\lambda = 0$. Pasamos al análisis de estabilidad para confirmarlo.

Estabilidad lineal.- Empezamos calculando el jacobiano de las ecuaciones que determinan el sistema dinámico. En este caso, denotando $f(x) \equiv -ax^3 + b\lambda x$, obtenemos:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = -3ax^2 + b\lambda. \tag{2}$$

Como solo hay una ecuación, la "matriz" de estabilidad es un único número para cada uno de los puntos fijos. Para obtenerla, solo hay que sustituir los valores de $x$ de cada punto fijo en la ecuación (2). El resultado es:

$$\boldsymbol{M}(0) = b\lambda; \quad \boldsymbol{M}(\sqrt{b\lambda/a}) = \boldsymbol{M}(-\sqrt{b\lambda/a}) = -2b\lambda. \tag{3}$$

Si $\lambda < 0$, solo existe el primer punto fijo; es estable. Por el contrario, si $\lambda > 0$ aparecen los otros dos. En estas condiciones, el primero es inestable; los otros dos, estables.

Bifurcación.- Estos resultados confirman que hay una bifuración de pitchfork en $\lambda = 0$.

## Problema 31

Un sistema químico que puede presentar oscilaciones es el $ClO_2 - I_2 - MA$. Un modelo para este reactivo es:

$$\dot{x} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2}, \tag{4}$$

$$\dot{y} = bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right), \tag{5}$$

donde $x$ e $y$ representan las concentraciones de dos compuestos intermedios, y $a$ y $b$ son dos parámetros positivos del sistema. Analícense los estados estacionarios y su estabilidad en función de $a$ y $b$.

### Solución

Planteamiento.- El problema puede plantearse en los mismos términos que el anterior. Comenzamos, pues, con el cálculo de los puntos fijos (estados estacionarios), y seguimos con el análisis de estabilidad lineal.

Estados estacionarios.- Los estados estacionarios son aquellos que cumplen:

$$a - x - \frac{4xy}{1+x^2} = 0, \tag{6}$$

$$bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right) = 0. \tag{7}$$

La única solución a este par de ecuaciones es $x = a/5$, $y = 1 + (a/5)^2$. (En el vídeo damos algún detalle más sobre el procedimiento más simple para resolver el sistema de ecuaciones).

Estabilidad.- De nuevo, empezamos calculando el jacobiano, cálculo que siempre constituye el punto de partida para obtener la matriz de estabilidad. Llamando $f(x,y)$ a la primera ecuación, y $g(x,y)$, a la segunda, el jacobiano es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4(x^2-1)y}{(1+x^2)^2} - 1 & -\frac{4x}{1+x^2} \\ \frac{b(x^2-1)y}{(1+x^2)^2} + b & -\frac{bx}{1+x^2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Como siempre, obtenemos la matriz de estabilidad evaluando el jacobiano en los puntos fijos. En este caso, solo hay uno:

$$\boldsymbol{M}(a/5, 1+(a/5)^2) = \begin{pmatrix} 3 - \dfrac{200}{25+a^2} & -\dfrac{20a}{25+a^2} \\ \dfrac{2a^2b}{25+a^2} & -\dfrac{5ab}{25+a^2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Según hemos visto en la clase de teoría, la estabilidad lineal del sistema viene determinada por sus autovalores, siempre y cuando sea aplicable el teorema de Hartman Grobman. Esto puede resumirse en los siguientes puntos:

- El análisis de estabilidad lineal solo es válido en los valores de los parámetros para los cuales la matriz de estabilidad, $\boldsymbol{M}(x^s, y^s)$, no tenga ningún autovalor cuya parte real sea nula.
- En tal caso:
  - Si la parte real de todos los autovalores es negativa, el punto fijo es estable.
  - En caso contrario (es decir, si existe al menos un autovalor con parte real positiva), el punto fijo es inestable.

Si el sistema dinámico tiene tan solo dos coordenadas, podemos sustituir el cálculo de los autovalores, que siempre es más pesado, por el de la traza y el determinante, pues

$$\Delta \equiv \mathrm{Det}\boldsymbol{M}(x^s, y^s) = \lambda_1\lambda_2, \tag{10}$$

$$\tau \equiv \mathrm{Tr}\boldsymbol{M}(x^s, y^s) = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{11}$$

Para este sistema, el resultado es:

$$\Delta = \frac{25ab}{25+a^2}, \tag{12}$$

$$\tau = \frac{3a^2 - 5ab - 125}{25+a^2}. \tag{13}$$

Como $a > 0$ y $b > 0$, el determinante es siempre positivo. En consecuencia, la estabilidad queda determinada por la traza: si $\tau < 0$, el sistema es estable. De este análisis se deduce que si $b > (3a^2 - 125)/(5a)$, el sistema es estable; en caso contrario, es inestable. En consecuencia, si $a^2 < 125/3$, el sistema es siempre estable. En caso contrario, su estabilidad depende de $b$, con un punto crítico en $b = (3a^2 - 125)/(5a)$.

Interpretación.- En este caso, el punto crítico, $b = (3a^2 - 125)/(5a)$, se caracteriza por $\Delta > 0$ y $\tau = 0$. Esto implica necesariamente que los dos autovalores son imaginarios puros. Así pues, dicho punto crítico constituye una bifurcación de Hopf. Es de esperar, por lo tanto, que si $b < (3a^2 - 125)/(5a)$, el sistema evolucione hacia un ciclo límite.

## Problema 32

Un sistema reactivo está descrito por las siguientes ecuaciones cinéticas:

$$\frac{dx}{dt} = a - x + x^2 y, \tag{14}$$

$$\frac{dy}{dt} = b - x^2 y, \tag{15}$$

donde $x$ e $y$ representan las concentraciones adimensionales de las sustancias reactivas, y $a$ y $b$ son dos parámetros positivos.

1. Analice los estados estacionarios del sistema y su estabilidad en función de $a$ y $b$.

2. Determine el periodo de las oscilaciones cuando el sistema se inestabiliza.

### Solución

Planteamiento.- La primera pregunta se plantea exactamente igual que los problemas anteriores: constituye un ejemplo típico de análisis de estabilidad en sistemas dinámicos. La segunda es más complicada y requiere una discusión más pausada.

Estados estacionarios.- Los estados estacionarios son aquellos que cumplen

$$a - x + x^2 y = 0, \tag{16}$$

$$b - x^2 y = 0. \tag{17}$$

La única solución de este sistema de ecuaciones es $x = a + b$, $y = b/(a+b)^2$.

Estabilidad lineal.- Utilizando la misma notación que en el problema anterior, es decir, $f(x, y) = a - x + x^2 y$, y $g(x, y) = b - x^2 y$, la matriz jacobiana es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2xy & x^2 \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

En consecuencia, la matriz de estabilidad es:

$$\boldsymbol{M}(a + b, b/(a+b)^2) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2b}{a+b} & (a+b)^2 \\ -\frac{2b}{a+b} & -(a+b)^2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

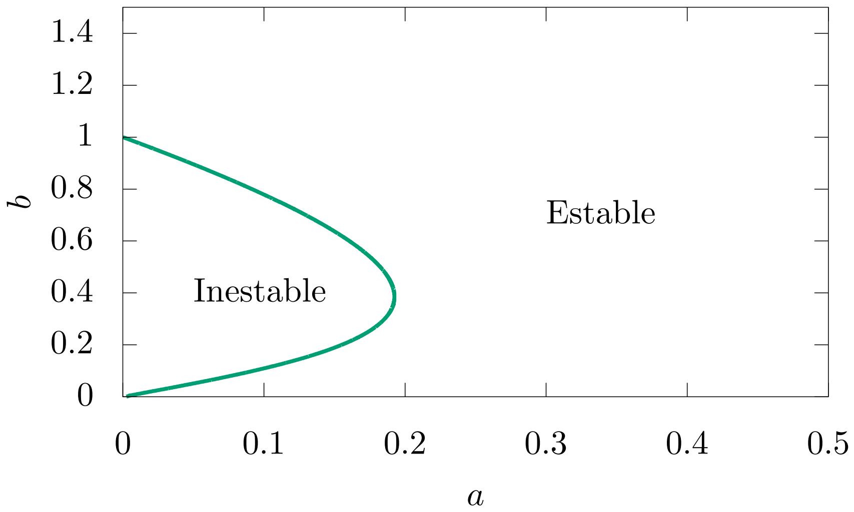
De nuevo, al igual que en el problema anterior, para estudiar su estabilidad obtenemos la traza y el determinante:

$$\Delta = (a+b)^2, \tag{20}$$

$$\tau = \frac{2b}{a+b} - (a+b)^2 - 1. \tag{21}$$

Como el determinante es positivo, la estabilidad queda determinada por la traza: si es negativa, el punto fijo es estable; si es positiva, inestable. Como la ecuación resultante sería de tercer grado, no es necesario desarrollarlo más.

A modo de ilustración, la curva $2b/(a+b)-(a+b)^2-1=0$ separa la región estable de la región inestable. Para visualizar mejor el comportamiento del sistema, la representamos en la siguiente gráfica:




Periodo de las oscilaciones.- Esta pregunta es más compleja y requiere cierta interpretación. Para hacerla, partimos de los siguientes hechos:

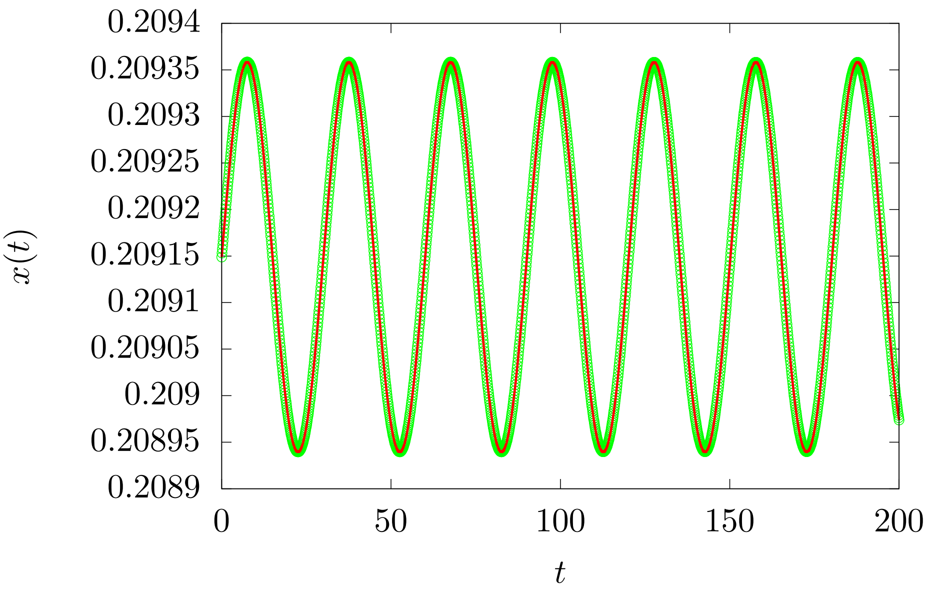
- La línea $2b/(a+b)-(a+b)^2-1=0$ genera una bifuración de Hopf. En ella, los dos autovalores de la matriz densidad son imaginarios puros: $\lambda = \pm i\sqrt{\Delta} = \pm i\,|a+b| = \pm i(a+b)$
- En esa línea, el teorema de Hartman Grobman no es aplicable. La linealización del sistema no nos informa sobre el comportamiento de este alrededor del punto fijo.
- En la parte estable de la gráfica, cualquier perturbación decae hacia el punto fijo. En la parte inestable, cualquier perturbación se amplifica.

Para responder a la pregunta, consideremos que acabamos de cruzar la línea de estabilidad marginal y que acabamos de entrar en la región inestable, es decir, estamos en una situación en la que $2b/(a+b)-(a+b)^2-1=\epsilon$, con $\epsilon>0$ muy pequeño. Como los autovalores de $\boldsymbol{M}$ con complejos, el sistema se alejará del punto fijo oscilando: representará una oscilación modulada que tenderá a crecer. Eventualmente, alcanzará un ciclo límite, es decir, una solución periódica estable (siempre y cuando, el sistema siga manteniéndose fuera del equilibrio).

Una forma de estimar cuál es el periodo de esas oscilaciones alrededor del punto fijo consiste en dar por buena la aproximación lineal y estudiar el periodo de oscilación que tendría el sistema en estas condiciones. En tales circunstancias, la evolución en torno al punto fijo sigue una trayectoria dada por exponenciales $\exp(\pm it[a+b])$. En consecuencia, el periodo es el tiempo para el cual el argumento de la exponencial se hace igual a $2\pi$, luego

$$T = \frac{2\pi}{a+b} \tag{22}$$

Por supuesto, dado que el teorema de Hartman Grobman no puede aplicarse en la línea de estabilidad marginal, no podemos estar seguros de que esta conclusión sea correcta. No obstante, lo cierto es que funciona en muchas circunstancias. Para verlo, mostramos a continuación el resultado de resolver numéricamente el sistema dinámico con $a = 0.1$ y $b = 0.109149$ (punto de estabilidad marginal), con una condición inicial: $x(0) = x^s$ y $y(0) = y^s + 10^{-3}$. En puntos negros, mostramos el resultado numérico. En línea rojo, representamos una solución periódica $x(t) = \alpha + \beta \sin([a+b]t)$, donde $\alpha$ y $\beta$ se han obtenido mediante ajuste:




Como se puede apreciar, en muy buena aproximación, el sistema oscila con el periodo predicho. No obstante, remarcamos que *el teorema de Hartman Grobman no asegura nada si la estabilidad es marginal.* En todo caso, puede darnos una pista que habría que comprobar, bien numéricamente, bien mediante métodos analíticos más sofisticados, que no hemos visto en el curso.

## Problema 33

Un sistema termodinámico está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x - 4xy - 2x^3 + 4xy^2, \tag{23}$$

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon y - x^2 - 8y^3 + x^2 y, \tag{24}$$

donde $x$ e $y$ representan las variables termodinámicas, y $\epsilon$ es una constante que cumple $\epsilon \geq 2$.

1. El punto $(x, y) = (0, 0)$ es un estado estacionario. ¿Para qué valores de $\epsilon$ es estable?

2. Considerando soluciones de la forma $x = 2y$, ¿para qué valores de $\epsilon$ aparecen nuevos estados estacionarios? ¿Son estables estos nuevos estados?

**Solución**

Planteamiento.- El problema es muy similar a los anteriores. Trabajamos por separado cada una de sus preguntas.

Estabilidad del punto fijo $(0, 0)$.- En este caso nos dan ya el punto fijo. Procedemos, pues, a obtener la matriz jacobiana, utilizando la misma notación que en problemas anteriores:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon - 6x^2 + 4y(y-1) & 4x(2y-1) \\ 2x(y-1) & \epsilon + x^2 - 24y^2 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Así pues, evaluando esta matriz en el punto $(0, 0)$, obtenemos la matriz de estabilidad:

$$\boldsymbol{M}(0,0) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \tag{26}$$

En este caso, hemos obtenido directamente una matriz diagonal; sus dos autovalores son iguales a $\epsilon$. Así pues, como en el enunciado nos dicen que $\epsilon > 2$, el punto es inestable siempre.

Estados estacionarios $y = 2x$.- El sistema que estamos analizando tiene muchos estados estacionarios. En el enunciado, se nos piden puntos que cumplan $x = 2y$, es decir, puntos del estilo $(2a, a)$. Si consideramos $x = 2y$ en las ecuaciones que determinan los puntos fijos, obtenemos dos ecuaciones idénticas; en la variable $y$, su forma más sencilla es: $\epsilon y - 4y^2 - 4y^3 = 0$. Esta tiene una solución trivial, $y = 0$, que implica $x = 0$; es la que acabamos de analizar. Las otras dos soluciones son:

$$y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+\epsilon}\right), \tag{27}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+\epsilon}. \tag{28}$$

Como $\epsilon > 2$ y no hay restricción sobre los signos de $x$ e $y$, las dos soluciones existen. Para simplificar la notación, consideramos $\lambda = \sqrt{1+\epsilon}$. El enunciado impone $\lambda > \sqrt{3}$.

Estabilidad de los puntos fijos $y = 2x$.- Analizamos cada uno por separado.

La matriz de estabilidad del punto $(-1+\lambda, (-1+\lambda)/2)$ es

$$\boldsymbol{M}(-1+\lambda, (-1+\lambda)/2)) \begin{pmatrix} -4(1+\lambda)^2 & 4(\lambda-1)(\lambda-2) \\ (\lambda-3)(\lambda-1) & 2(1-\lambda)(2\lambda-3) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

A partir de ella, como siempre, obtenemos el determinante y la traza:

$$\Delta = 2(\lambda-1)^2(3\lambda^2-5\lambda), \tag{30}$$
$$\tau = -2(\lambda-1)(4\lambda-5). \tag{31}$$

Lo que implica que el determinante es positivo si $\lambda > 5/3$, y la traza negativa si $\lambda > 5/4$. Las condiciones del enunciado implican que $\lambda > \sqrt{3}$, de modo que todos los valores permitidos tienen determinante positivo y traza negativa. El punto fijo es estable en cualquier caso.

La matriz de estabilidad del punto $(-1-\lambda, (-1-\lambda)/2)$ es

$$\boldsymbol{M}(-1-\lambda, (-1-\lambda)/2) = \begin{pmatrix} -4(1+\lambda)^2 & 4(\lambda+1)(\lambda+2) \\ (\lambda+3)(\lambda+1) & -2(1+\lambda)(2\lambda+3) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Su determinante y su traza son:

$$\Delta = 4(\lambda+1)^2(3\lambda^2+5\lambda),$$
$$\tau = -2(\lambda+1)(4\lambda+5).$$

En este caso es obvio que el determinante es siempre positivo, y la traza, siempre negativa. En consecuencia, este punto fijo también es estable.