Simetrias y grupos 019

T1

Tema 1: Introducción. Importancia de las simetrías en física

- Intro
- Relación simetrías y teoría de Grupos
- Tipos de simetrías
- Activo vs pasivo
- Case Study: Red discreta

T2

Tema 2: Elementos generales de teoría de grupos

2.1. Definición y ejemplos

- Def: Grupo
    - Propiedades
    - Grupo abeliano
    - Órden de un grupo
- Th: Teorema de reordenamiento
- Eg:
    - Grupos finitos
    - Grupos discretos de órden ∞
    - Grupos contínuos compactos

    - Grupos contínuos no compactos
        - $GL(n, \mathbb{K})$
        - $SL(n, \mathbb{K})$
        - $E(n)$

2.2. Subgrupos

- Def: Subgrupo
- Th: Identidad
- Def: Subgrupo propio
- Eg:
    - Centro $Z(g)$
    - Centralizador Z_g

2.3. Clases de conjugación

- Relación de Equivalencia
- Clase de conjugación
    - Propiedades
- Eg: Grupo de permutaciones S_3
- Tabla de multiplicación

2.4. Subgrupos normales

- Eg: Subgrupo normal o invariante por conjugación
- Th: Teorema de unión de clases de conjugación
- Def: Subgrupo simple
- Def: Subgrupo semisimple
- Eg: S_3 no es simple

2.5. Cosets

- Def: Coset
    - Propiedades
- Th: Teorema de Lagrange
- Def: Índice

2.6. Grupo cociente

- Def: Producto de Cosets
- Prob: 1
- Th: Grupo cociente o grupo factor G/H
- Eg: Cociente S_3/A_3
- Grupo cociente de permutaciones cíclicas

2.7. Homomorfismos entre grupos

- Def: Homomorfismo
    - Propiedades
    - Homomorfismo fiel o inyectivo
    - Isomorfismo
- Pr: Imagen
- Def: Núcleo
- Th: Teorema de Cayley
- Eg:
    - Aplicación $\mathbb{R} \to S_1$
    - S_3 es isomorfo a D_3
- Th:
    - Núcleo y Subgrupo normal
    - Imagen y Subgrupo
    - Grupo cociente y Núcleo
    - Dems
    - Cor: Subgrupo normal y Homomorfismos
- Eg: Grupo matricial en $\mathbb{K}$
- Resumen:
    - Homomorfismo
        - conjugación
        - Automorfismo
        - Centro

2.8. Producto de Grupos

- Def: Producto directo $G_1 \times G_2$
    - Propiedades
- Th: Producto directo de Subgrupos
- Eg:
    - $U(n) = U(1) \times SU(n)$
    - $O(3) \sim SO(3) \times G_2$
- Def: Producto semidirecto
- Prob:
    - Grupo finito de órden primo $\to$ cíclico
    - $G = H_1 \times H_2 \Rightarrow G/H_1 \sim H_2$
    - Ejercicio del campus

```
████████╗██████╗ 
╚══██╔══╝╚════██╗
   ██║    █████╔╝
   ██║    ╚═══██╗
   ██║   ██████╔╝
   ╚═╝   ╚═════╝ 
```

Tema 3 - Representaciones de Grupos

3.1. Acciones de Grupos

- Def: Representación
- Def: Grupo simétrico de un conjunto X
- Def: Acción de Grupo
    - Eg: Algunos grupos se definen por su acción
    - Props
    - Acción Fiel
    - Acción Transitiva
    - Acción Libre
    - Acción Regular
    - Obs
- Def: Órbita
- Def: Estabilizador
- Th: Teorema Órbita-Estabilizador

3.2. Representaciones Lineales

- Grupo de operadores
- Composición de transformaciones lineales
- Grupo de transformaciones lineales o Grupo de operadores
- Def: Representación lineal de un grupo
    - Def: Dimensión de la representación
        - Obs
    - Def: Repreesentación Fiel
    - Def: Representación degenerada
- Def: Representación Matricial
    - Eg
    - Eg: Representación Trivial
- Def: Representación “de definición”
    - Eg: Ejemplos concretos
    - Proposiciones

3.3. Representación conjugada o contragradiente

- Def: Representacion compleja conjugada
    - Obs: Representación real
- Def: Representación contragradiente

3.4. Representaciones equivalentes

- Def: Transformación de similaridad, “Intertwiner”
- Def: Representaciones equivalentes

- Def: Carácter de una Representación
  - Props:

3.5. Representaciones reducibles e irreducibles

- Def: Espacio invariante
  - Representacón reducible
  - Representacón irreducible
  - Representacón descomponible
  - Representacón completamente reducible
  - Eg:
- Def: Suma directa de representaciones

3.6. Unitariedad

- Def: Representación unitaria
  - Props:
- Th: Teorema de Schur-Auerbach
  - Dem:
- Grupos no finitos
  - Def: Medida invariante de Haar
- Th: Teorema de Maschke

3.7. Lemas de Schur

- Lema previo
  - Dem:
- Lemas:
  - 1
  - 2
  - 3
  - Proposiciones
- Probs:
  - Representación del grupo cíclico C_3
  - Representación del grupo bidimensional S_1

3.8. Relaciones de ortonormalidad y completitud

- Relación de ortonormalidad
  - Grupos finitos
  - Grupos compactos
  - Eg: Grupo de Klein V_4
- Relación de completitud
  - Grupos finitos
  - Grupos compactos
  - Delta de Dirac adaptada a la medida de Haar de un grupo

- Th: Teorema de Peter-Weyl
- Relaciones de ortonormalidad y completitud con caracteres
- Tabla de caracteres
  - Eg: Grupos abelianos
  - Props:
- Prob: Representación paridad

3.9. Producto tensorial de representaciones y coeficientes de Clebsch-Gordan

- Tensores
  - Def: Producto tensorial de operadores
  - Def: Producto tensorial de representaciones
  - Def: Descomposición de Clebsch-Gordan
    - Def: Multiplicidad
    - Proposicion
- Probs:
  - Representación irreducible unitaria de $D^{(2)}$
  - Tabla de caracteres de S_3
  - Representación bidimensional irreducible unitaria de S_3
- Def: Coeficientes de Clebsch-Gordan
  - Relaciones de ortogonalidad y completitud
  - Prob: Coeficientes de Clebsch-Gordan para $D^{(2)} \otimes D^{(2)}$

3.10. Teorema de Wigner-Eckart

- Def: Conjunto de operadores tensoriales irreducibles
- Th: Teorema de Wigner-Eckart

3.11. Representaciones del producto directo de grupos

```
████████╗██╗  ██╗
╚══██╔══╝██║  ██║
   ██║   ███████║
   ██║   ╚════██║
   ██║        ██║
   ╚═╝        ╚═╝
```

Tema 4: Grupos y álgebras de Lie

4.1 Elementos básicos sobre espacios topológicos

- Compacidad

- Conexión
  - Camino en S
  - Arco-conexo
  - Simplemente conexo
  - n-veces conexo
  - Eg: $\mathcal{R}^n$ y $\mathcal{R}^2$
- Mapa homeomórfico
  - Continuo
  - Propiedades o invariantes topológicos
- Espacio Hausdorff
  - Axioma de separabilidad
- Carta
- Variedad analítica de dimensión n

4.2 Grupo de Lie: definición

- Def: Grupo de Lie
  - Condiciones sobre elementos

4.3 Grupos de Lie lineales

- Def: Condiciones sobre un grupo lineal
- Recubridor universal
- Representaciones unitarias del grupo de Lie
- Eg:
  - $GL(n, \mathcal{C})$: grupo general lineal de matrices complejas, de dimensión 2n^2.
  - $SL(n, \mathcal{C})$: grupo especial lineal
  - GL($n, \mathcal{R}$): de dimensión n^2.
  - $SL(n, \mathcal{R})$: de dimensión $n^2 - 1$.
  - $U(n)$: grupo unitario de matrices complejas U tal que $U^+U = UU^+ = \mathbb{1}^n$ de dimensión n^2 (en principio es subgrupo de GL pero la condición de conmutación nos quita la mitad).
  - SU(n): grupo especial unitario, subgrupo de U(n) que agrupa las matrices con detU=1, de dimensión $n^2 - 1$ (como el det U es un complejo de fase libre y norma 1 solo pone 1 condición sobre el detU).
  - O(n): grupo ortogonal de matrices reales que cumplen $OO^+ = O^+O = \mathbb{1}_n$ de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$.
  - SO(n): grupo ortogonal especia, subgrupo de O(n) con detO=1, de la misma dimensión que O(n).
  - Sp(n): grupo simpléptico, grupo de matrices unitarias (n $\times$ n) con n par.
  - U(l,n-l): grupo pseudo-unitario de matrices complejas U que satisfacen $UgU^+ = g$ siendo g una matriz diagonal de unos y menos unos.
  - O(n,l-n): grupo pseudo-ortogonal de matrices reales con $OgO^+ = g$ con la misma g, de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$. Es el grupo de Lorentz, la g es una pseudo-métrica.
- Eg:
  - Compactos

    - No Compactos
- Prob:
    - ¿Son $O(n)$ y $U(n)$ grupos conexos?
    - ¿Son $SO(2) \sim U(1)$ y $SU(2)$ simplemente conexos?
    - Justificar por qué $SO(1,1)$ no es compacto
    - ¿Qué grupo es el recubridor universal de $SO(2)$? Buscar el grupo normal de G tal que $S_1 \sim G/H$.
- Medida de integración invariante
    - Th: Integral invariante para grupos de Lie compactos
    - Medida de Lebesgue

4.4 Estudio local de un grupo de Lie: álgebras de Lie

- Def: Álgebra de Lie real
    - Def: Corchete de Lie
    - Def:
        - Subálgebra
        - Subálgebra invariante
        - Función exponencial de matrices
            - Props:
                - Fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff
- Subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie lineal
- Generadores del álgebra de Lie
- Relación entre álgebras de Lie lineales y grupos de Lie linealees
    - Th: Exponenciación
    - Th: Subrupos uniparamétrico
    - Nota:
    - Eg: Álgebra de Lie real de $SU(n)$
    - Eg: Álgebra de Lie real de $SL(n, \mathbb{R})$
    - Ex: Caracterizar el álgebra de Lie $so(2)$

4.5 Representaciones adjuntas de álgebras y grupos de Lie: constantes de estructura

- Representación de un álgebra de Lie
    - Obs: Eqyuvakebcua de reoresentaciones, irreducibilidad, lemas de Schur, Descomposición CB…
    - Th: Representación analítica n-dimensional
- Constantes de estructura
    - Def: Matriz adjunta de $A \in \mathcal{L}$
    - Def: Representación adjunta del álgebra
    - Def: Constantes de estructura
        - Obs:
        - Props:
- Representación de un grupo de Lie lineal
    - Def: Representación adjunta del grupo

        - Obs:
    - Th: Representaciones adjuntas
    - Th: Automorfismo interno del álgebra

4.6 Álgebras de Lie simples y semi-simples

- Def: Álgebra de Lie simple
- Def: Álgebra de Lie semi-simple
    - Props:
- Operadores de casimir
    - Th: Conmutación
- Def: Forma de Killing

```
████████╗███████╗
╚══██╔══╝██╔════╝
   ██║   ███████╗
   ██║   ╚════██║
   ██║   ███████║
   ╚═╝   ╚══════╝
```

Tema 5: Rotaciones en R^3: Los grupos SO(3) y SU(2)

5.1. Descripción de SO(3)

- Parametrización ángulo-eje
    - Eg: $S=(3)$ es doblemente conexos
- Clases de conjugación
- Parametrización en ángulos de Euler

5.2. De SO(3) a SU(2)

- Def: Matrices de Pauli
- Def: Matriz hermítica $X=\vec{x}\vec{\sigma}$
    - Homomorfismo $SU(2)$-$SO(3)$

5.3. Generados infinitesimales y el álgebra de Lie

- Eg: Generadores de $SO(3)$
    - Base de generadores del álgebra de Lie
- Eg: Generadores de $SU(2)$

5.4. Representaciones de $SU(2)$

- Propiedades de m
- Representación de espín j de $SU(2)$
    - Matriz de Wigner

5.5. Producto directo de representaciones de $SU(2)$

- Coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(2)$
-

5.6. Medida de Haar invariante en $SU(2)$

5.7. Ortogonalidad, completitud, caracteres

- Polinomios de Chebyshev

5.8. Teorema de Wigner-Eckart

- Th: Wigner-Eckart
- Reglas de selección

5.9. Aplicación física: Isospín

- Transiciones
    - Operador de transición

5.10 Rotación de funciones de onda

5.11 Rotación de operadores

- Escalares
- Vectoriales
    - Eg: Operador de posición
    - Relación entre coordenadas V_i y Q^j_m
- Tensoriales
    - Tensor de órden 2
    - Ex:

```
████████╗ ██████╗ 
╚══██╔══╝██╔════╝ 
   ██║   ███████╗ 
   ██║   ██╔═══██╗
   ██║   ╚██████╔╝
   ╚═╝    ╚═════╝ 
```

Tema 6: El grupo de Lorentz

6.1. Propiedades básicas

- Espacio de Minkowski
- Ex: Matrices Λ
- Subgrupo ortocrono propio

6.2 Grupo de Lorentz ortocrono propio

- Rotaciones espaciales
- Transformación de Lorentz pura
  - Ex:
- Parametrización
  - Compacidad
  - Conectividad
- Recubridor universal de $\mathcal{L}_+^\uparrow$
  - Homeomorfismo
  - Matrices unitarias y hermíticas

6.3 Álgebra de Lie

- Generadores hermíticos de rotaciones
- Boosts puros
- Tensor antisimétrico $M_{\mu\nu}$
- Casimires

6.4 Representaciones irreducibles

- Complexificación
- Representaciones tensoriales y espinoriales
- Representación de espín más bajo

```
████████╗███████╗
╚══██╔══╝╚════██║
   ██║       ██╔╝
   ██║      ██╔╝
   ██║      ██║
   ╚═╝      ╚═╝
```

Tema 7: El grupo de Poincaré

7.1 Propiedades básicas

7.2 Álgebra de Lie del grupo de Poincaré ortocrono propio

7.3 Representaciones unitarias del grupo de Poincaré ortocrono propio

7.4 Representación sobre estados de una partícula

7.5 Campo de Klein-Gordon