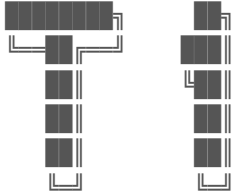


# Simetrías y grupos 019

---

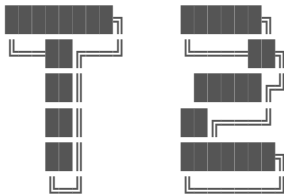


---

## Tema 1: Introducción. Importancia de las simetrías en física

---

- Intro
  - Relación simetrías y teoría de Grupos
  - Tipos de simetrías
  - Activo vs pasivo
  - Case Study: Red discreta
- 



---

## Tema 2: Elementos generales de teoría de grupos

---

### 2.1. Definición y ejemplos

- Def: Grupo
  - Propiedades
  - Grupo abeliano
  - Orden de un grupo
- Th: Teorema de reordenamiento
- Eg:
  - Grupos finitos
  - Grupos discretos de orden  $\infty$
  - Grupos continuos compactos

- Grupos continuos no compactos
  - $GL(n, \mathbb{K})$
  - $SL(n, \mathbb{K})$
  - $E(n)$

## 2.2. Subgrupos

- Def: Subgrupo
- Th: Identidad
- Def: Subgrupo propio
- Eg:
  - Centro  $Z(g)$
  - Centralizador  $Z_g$

## 2.3. Clases de conjugación

- Relación de Equivalencia
- Clase de conjugación
  - Propiedades
- Eg: Grupo de permutaciones  $S_3$
- Tabla de multiplicación

## 2.4. Subgrupos normales

- Eg: Subgrupo normal o invariante por conjugación
- Th: Teorema de unión de clases de conjugación
- Def: Subgrupo simple
- Def: Subgrupo semisimple
- Eg:  $S_3$  no es simple

## 2.5. Cosets

- Def: Coset
  - Propiedades
- Th: Teorema de Lagrange
- Def: Índice

## 2.6. Grupo cociente

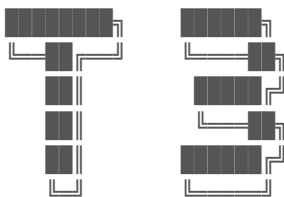
- Def: Producto de Cosets
- Prob: 1
- Th: Grupo cociente o grupo factor  $G/H$
- Eg: Cociente  $S_3/A_3$
- Grupo cociente de permutaciones cíclicas

## 2.7. Homomorfismos entre grupos

- Def: Homomorfismo
  - Propiedades
  - Homomorfismo fiel o inyectivo
  - Isomorfismo
- Pr: Imagen
- Def: Núcleo
- Th: Teorema de Cayley
- Eg:
  - Aplicación  $\mathbb{R} \rightarrow S_1$
  - $S_3$  es isomorfo a  $D_3$
- Th:
  - Núcleo y Subgrupo normal
  - Imagen y Subgrupo
  - Grupo cociente y Núcleo
  - Dems
  - Cor: Subgrupo normal y Homomorfismos
- Eg: Grupo matricial en  $\mathbb{K}$
- Resumen:
  - Homomorfismo
    - conjugación
    - Automorfismo
    - Centro

## 2.8. Producto de Grupos

- Def: Producto directo  $G_1 \times G_2$ 
  - Propiedades
- Th: Producto directo de Subgrupos
- Eg:
  - $U(n) = U(1) \times SU(n)$
  - $O(3) \sim SO(3) \times G_2$
- Def: Producto semidirecto
- Prob:
  - Grupo finito de orden primo  $\rightarrow$  cíclico
  - $G = H_1 \times H_2 \Rightarrow G/H_1 \sim H_2$
  - Ejercicio del campus



# Tema 3 - Representaciones de Grupos

---

## 3.1. Acciones de Grupos

- Def: Representación
- Def: Grupo simétrico de un conjunto  $X$
- Def: Acción de Grupo
  - Eg: Algunos grupos se definen por su acción
  - Props
  - Acción Fiel
  - Acción Transitiva
  - Acción Libre
  - Acción Regular
  - Obs
- Def: Órbita
- Def: Estabilizador
- Th: Teorema Órbita-Estabilizador

## 3.2. Representaciones Lineales

- Grupo de operadores
- Composición de transformaciones lineales
- Grupo de transformaciones lineales o Grupo de operadores
- Def: Representación lineal de un grupo
  - Def: Dimensión de la representación
    - Obs
  - Def: Representación Fiel
  - Def: Representación degenerada
- Def: Representación Matricial
  - Eg
  - Eg: Representación Trivial
- Def: Representación “de definición”
  - Eg: Ejemplos concretos
  - Proposiciones

## 3.3. Representación conjugada o contragradiante

- Def: Representación compleja conjugada
  - Obs: Representación real
- Def: Representación contragradiante

## 3.4. Representaciones equivalentes

- Def: Transformación de similaridad, “Intertwiner”
- Def: Representaciones equivalentes

- Def: Carácter de una Representación
  - Props:

### 3.5. Representaciones reducibles e irreducibles

- Def: Espacio invariante
  - Representación reducible
  - Representación irreducible
  - Representación descomponible
  - Representación completamente reducible
  - Eg:
- Def: Suma directa de representaciones

### 3.6. Unitariedad

- Def: Representación unitaria
  - Props:
- Th: Teorema de Schur-Auerbach
  - Dem:
- Grupos no finitos
  - Def: Medida invariante de Haar
- Th: Teorema de Maschke

### 3.7. Lemas de Schur

- Lema previo
  - Dem:
- Lemas:
  - 1
  - 2
  - 3
  - Proposiciones
- Probs:
  - Representación del grupo cíclico  $C_3$
  - Representación del grupo bidimensional  $S_1$

### 3.8. Relaciones de ortonormalidad y completitud

- Relación de ortonormalidad
  - Grupos finitos
  - Grupos compactos
  - Eg: Grupo de Klein  $V_4$
- Relación de completitud
  - Grupos finitos
  - Grupos compactos
  - Delta de Dirac adaptada a la medida de Haar de un grupo

- Th: Teorema de Peter-Weyl
- Relaciones de ortonormalidad y completitud con caracteres
- Tabla de caracteres
  - Eg: Grupos abelianos
  - Props:
- Prob: Representación paridad

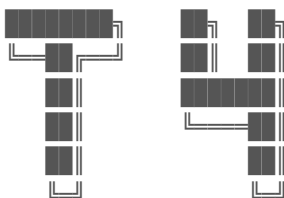
### 3.9. Producto tensorial de representaciones y coeficientes de Clebsch-Gordan

- Tensores
  - Def: Producto tensorial de operadores
  - Def: Producto tensorial de representaciones
  - Def: Descomposición de Clebsch-Gordan
    - Def: Multiplicidad
    - Proposición
- Probs:
  - Representación irreducible unitaria de  $D^{(2)}$
  - Tabla de caracteres de  $S_3$
  - Representación bidimensional irreducible unitaria de  $S_3$
- Def: Coeficientes de Clebsch-Gordan
  - Relaciones de ortogonalidad y completitud
  - Prob: Coeficientes de Clebsch-Gordan para  $D^{(2)} \otimes D^{(2)}$

### 3.10. Teorema de Wigner-Eckart

- Def: Conjunto de operadores tensoriales irreducibles
- Th: Teorema de Wigner-Eckart

### 3.11. Representaciones del producto directo de grupos



## Tema 4: Grupos y álgebras de Lie

### 4.1 Elementos básicos sobre espacios topológicos

- Compacidad

- Conexión
  - Camino en S
  - Arco-conexo
  - Simplemente conexo
  - n-veces conexo
  - Eg:  $\mathcal{R}^n$  y  $\mathcal{R}^2$
- Mapa homeomórfico
  - Continuo
  - Propiedades o invariantes topológicos
- Espacio Hausdorff
  - Axioma de separabilidad
- Carta
- Variedad analítica de dimensión n

## 4.2 Grupo de Lie: definición

- Def: Grupo de Lie
  - Condiciones sobre elementos

## 4.3 Grupos de Lie lineales

- Def: Condiciones sobre un grupo lineal
- Recubridor universal
- Representaciones unitarias del grupo de Lie
- Eg:
  - $GL(n, \mathcal{C})$ : grupo general lineal de matrices complejas, de dimensión  $2n^2$ .
  - $SL(n, \mathcal{C})$ : grupo especial lineal
  - $GL(n, \mathcal{R})$ : de dimensión  $n^2$ .
  - $SL(n, \mathcal{R})$ : de dimensión  $n^2 - 1$ .
  - $U(n)$ : grupo unitario de matrices complejas U tal que  $U^+ U = U U^+ = \mathbf{1}^n$  de dimensión  $n^2$  (en principio es subgrupo de GL pero la condición de conmutación nos quita la mitad).
  - $SU(n)$ : grupo especial unitario, subgrupo de  $U(n)$  que agrupa las matrices con  $\det U = 1$ , de dimensión  $n^2 - 1$  (como el  $\det U$  es un complejo de fase libre y norma 1 solo pone 1 condición sobre el  $\det U$ ).
  - $O(n)$ : grupo ortogonal de matrices reales que cumplen  $O O^+ = O^+ O = \mathbf{1}_n$  de dimensión  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
  - $SO(n)$ : grupo ortogonal especial, subgrupo de  $O(n)$  con  $\det O = 1$ , de la misma dimensión que  $O(n)$ .
  - $Sp(n)$ : grupo simpléctico, grupo de matrices unitarias ( $n \times n$ ) con n par.
  - $U(l, n-l)$ : grupo pseudo-unitario de matrices complejas U que satisfacen  $U g U^+ = g$  siendo g una matriz diagonal de unos y menos unos.
  - $O(n, l-n)$ : grupo pseudo-ortogonal de matrices reales con  $O g O^+ = g$  con la misma g, de dimensión  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Es el grupo de Lorentz, la g es una pseudo-métrica.
- Eg:
  - Compactos

- No Compactos
- Prob:
  - ¿Son  $O(n)$  y  $U(n)$  grupos conexos?
  - ¿Son  $SO(2) \sim U(1)$  y  $SU(2)$  simplemente conexos?
  - Justificar por qué  $SO(1, 1)$  no es compacto
  - ¿Qué grupo es el recubridor universal de  $SO(2)$ ? Buscar el grupo normal de  $G$  tal que  $S_1 \sim G/H$ .
- Medida de integración invariante
  - Th: Integral invariante para grupos de Lie compactos
  - Medida de Lebesgue

## 4.4 Estudio local de un grupo de Lie: álgebras de Lie

- Def: Álgebra de Lie real
  - Def: Corchete de Lie
  - Def:
    - Subálgebra
    - Subálgebra invariante
    - Función exponencial de matrices
      - Props:
        - Fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff
- Subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie lineal
- Generadores del álgebra de Lie
- Relación entre álgebras de Lie lineales y grupos de Lie lineales
  - Th: Exponenciación
  - Th: Subgrupos uniparamétrico
  - Nota:
  - Eg: Álgebra de Lie real de  $SU(n)$
  - Eg: Álgebra de Lie real de  $SL(n, \mathbb{R})$
  - Ex: Caracterizar el álgebra de Lie  $so(2)$

## 4.5 Representaciones adjuntas de álgebras y grupos de Lie: constantes de estructura

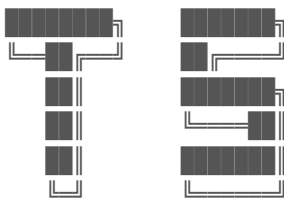
- Representación de un álgebra de Lie
  - Obs: Equivalencia de representaciones, irreducibilidad, lemas de Schur, Descomposición CB...
  - Th: Representación analítica n-dimensional
- Constantes de estructura
  - Def: Matriz adjunta de  $A \in \mathcal{L}$
  - Def: Representación adjunta del álgebra
  - Def: Constantes de estructura
    - Obs:
    - Props:
- Representación de un grupo de Lie lineal
  - Def: Representación adjunta del grupo



- Obs:
  - Th: Representaciones adjuntas
  - Th: Automorfismo interno del álgebra

## 4.6 Álgebras de Lie simples y semi-simples

- Def: Álgebra de Lie simple
- Def: Álgebra de Lie semi-simple
  - Props:
- Operadores de casimir
  - Th: Conmutación
- Def: Forma de Killing



## Tema 5: Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ : Los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$

### 5.1. Descripción de $SO(3)$

- Parametrización ángulo-eje
  - Eg:  $\mathcal{S} = (3)$  es doblemente conexos
- Clases de conjugación
- Parametrización en ángulos de Euler

### 5.2. De $SO(3)$ a $SU(2)$

- Def: Matrices de Pauli
- Def: Matriz hermítica  $X = \vec{x}\vec{\sigma}$ 
  - Homomorfismo  $SU(2) \rightarrow SO(3)$

### 5.3. Generados infinitesimales y el álgebra de Lie

- Eg: Generadores de  $SO(3)$ 
  - Base de generadores del álgebra de Lie
- Eg: Generadores de  $SU(2)$

### 5.4. Representaciones de $SU(2)$

- Propiedades de  $m$
- Representación de espín  $j$  de  $SU(2)$ 
  - Matriz de Wigner

## 5.5. Producto directo de representaciones de $SU(2)$

- Coeficiente de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$
- 

## 5.6. Medida de Haar invariante en $SU(2)$

## 5.7. Ortogonalidad, completitud, caracteres

- Polinomios de Chebyshev

## 5.8. Teorema de Wigner-Eckart

- Th: Wigner-Eckart
- Reglas de selección

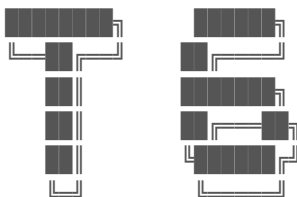
## 5.9. Aplicación física: Isospín

- Transiciones
  - Operador de transición

## 5.10 Rotación de funciones de onda

## 5.11 Rotación de operadores

- Escalares
- Vectoriales
  - Eg: Operador de posición
  - Relación entre coordenadas  $V_i$  y  $Q_m^j$
- Tensoriales
  - Tensor de orden 2
  - Ex:



# Tema 6: El grupo de Lorentz

---

## 6.1. Propiedades básicas

- Espacio de Minkowski
- Ex: Matrices  $\Lambda$
- Subgrupo ortocrono propio

## 6.2 Grupo de Lorentz ortocrono propio

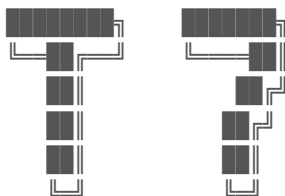
- Rotaciones espaciales
- Transformación de Lorentz pura
  - Ex:
- Parametrización
  - Compacidad
  - Conectividad
- Recubridor universal de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ 
  - Homeomorfismo
  - Matrices unitarias y hermíticas

## 6.3 Álgebra de Lie

- Generadores hermíticos de rotaciones
- Boosts puros
- Tensor antisimétrico  $M_{\mu\nu}$
- Casimires

## 6.4 Representaciones irreducibles

- Complexificación
- Representaciones tensoriales y espinoriales
- Representación de espín más bajo



---

# Tema 7: El grupo de Poincaré

---

## 7.1 Propiedades básicas

## **7.2 Álgebra de Lie del grupo de Poincaré ortocrono propio**

## **7.3 Representaciones unitarias del grupo de Poincaré ortocrono propio**

## **7.4 Representación sobre estados de una partícula**

## **7.5 Campo de Klein-Gordon**