Resumen de Simetrías y Grupos en Física

Asier López Gordón

13 de diciembre de 2019

2. Elementos generales de teoría de grupos

Definición 2.1. g_1 se dice **conjugado** a g_2 si $\exists\ h$ tal que $g_1 = hg_2h^{-1}$, con $g_1, g_2, h \in G$.

- Los elementos conjugados forman una **clase de conjugación**.
- Si dos elementos son conjugados a un tercero, son conjugados entre sí.
- Cada elemento de un grupo forma parte de una única clase de conjugación.

Definición 2.2. Un subgrupo H de G es **normal** o **invariante por conjugación**, $H \triangleleft G$, si

$$ghg^{-1} \in H \qquad \forall g \in G \quad \forall h \in H \tag{2.1}$$

Teorema 2.1. Un subgrupo es normal si es la unión de clases de conjugación.

Definición 2.3. Un grupo se dice **simple** si no tiene subgrupos normales propios. Si no tiene subgrupos normales abelianos propios se dice **semi-simple**.

Definición 2.4. Dado un grupo G con un subgrupo H, su **coset** por la izda. (resp. por la dcha.) asociado a $g \in G$ es el conjunto $gH = \{gh_i\}$ (resp. $Hg = \{h_i g\}$).

- El coset es subgrupo ssi $g \in H$.
- Cada elemento de G pertenece a algún coset.
- G es la unión disjunta de cosets asociados a H.

Teorema 2.2 (Lagrange)**.** Si G es un grupo finito y H un subgrupo de G, el orden de H es divisor del orden de G, i.e. $|G| \,/\, |H|$ es entero.

Teorema 2.3. Un subgrupo H de un grupo G es normal ssi sus cosets por la izda. y por la dcha. coinciden

$$H \triangleleft G \iff gH = Hg \quad \forall g \in G \tag{2.2}$$

Definición 2.5. Definiendo el producto de dos cosets de $H \triangleleft G$ como

$$g_1H * g_2H = (g_1 \cdot g_2)H \tag{2.3}$$

donde $\cdot$ es la multiplicación ordinaria en G, el conjunto de cosets de H forma un grupo con respecto a la multiplicación $*$, llamado **grupo cociente** y denotado por G/H.

Si dos elementos $g, g' \in G$ pertenecen al mismo coset, $gH = g'H$, existe una relación de equivalencia entre ellos. El grupo cociente es el conjunto de estas clases de equivalencia.

Ejemplo 2.1. Sea $G = S_n$ (grupo de las permutaciones) y $H = A_n$ (permutaciones pares). El grupo cociente clasifica a las permutaciones en pares e impares:

$$S_n/A_n = \{A_n, \tau_i A_n\} \tag{2.4}$$

Definición 2.6. Un **homomorfismo** es una aplicación que respeta la estructura de grupo:

$$\phi : G \to G' \qquad (G, \cdot) \quad (G', *) \tag{2.5a}$$
$$\phi(g \cdot h) = \phi(g) * \phi(h) \tag{2.5b}$$

En particular, se cumple

$$\phi(e_G) = e_{G'} \tag{2.6a}$$
$$\phi(g^{-1}) = [\phi(g)]^{-1} \tag{2.6b}$$

Un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo, $G \cong G'$

Definición 2.7. El **núcleo** del homomorfismo es

$$\ker \phi = \phi^{-1}(e_{G'}) = \{g \in G | \phi(g) = e_{G'}\} \subset G \tag{2.7}$$

Proposición 2.4. Un homomorfismo ϕ es **fiel** (inyectivo) ssi su núcleo es la identidad, $\ker \phi = \{e_G\}$.

Teorema 2.5. Sea $\phi : G \to G'$ un homomorfismo entre grupos. Entonces:

I) El núcleo es subgrupo normal de G, $\ker \phi \triangleleft G$

II) La imagen $\phi(G)$ es subgrupo de G'.

III) $G/\ker \phi \cong \phi(G)$ con el isomorfismo dado por

$$\tilde{\phi} : G/\ker \phi \to \phi(G) \tag{2.8a}$$
$$g \ker \phi \mapsto \tilde{\phi}(g \ker \phi) = \phi(g) \tag{2.8b}$$

Corolario 2.5.1. Un subgrupo H de un grupo G es normal ssi existe un homomorfismo entre grupos $\phi : G \to G'$ con $\ker \phi = H$.

Ejemplo 2.2. El determinante es un homomorfismo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Su núcleo está formado por el subgrupo normal de las matrices con $\det = 1$

$$SL(n, \mathbb{C}) \triangleleft \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \qquad \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/SL(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^* \tag{2.9}$$

Definición 2.8. El **producto directo** de dos grupos G_1 y G_2 es el grupo

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1, \ g_2 \in G_2\} \tag{2.10a}$$
$$(g_1, g_2) \star (g_1', g_2') = (g_1 \cdot g_1', g_2 * g_2') \tag{2.10b}$$

- $|G_1 \times G_2| = |G_1| \, |G_2|$
- $\{(g_1, e_{G_2}) | g_1 \in G_1\} \cong G_1$ y $\{(e_{G_1}, g_2) | \ g_2 \in G_2\} \cong G_2$ son subgrupos normales

Teorema 2.6. Un grupo G es **producto directo** de sus subgrupos G_1 y G_2 si cumple:

I) G_1 y G_2 son subgrupos normales de G, o equivalentemente $g_1 g_2 = g_2 g_1 \ \forall g_i \in G_i$

II) Todo elemento $g \in G$ se puede expresar como $g = g_1 g_2$ de forma única

III) $G_1 \cap G_2 = \{e\}$

Corolario 2.6.1. Si $G = G_1 \times G_2$, entonces $G/G_1 \cong G_2$ y $G/G_2 \cong G_1$.

Definición 2.9. Un grupo G es **producto semi-directo**, $G = G_1 \rtimes G_2$ si

I) G_1 es subgrupo normal de G

II) Todo elemento $g \in G$ se puede expresar como $g = g_1 g_2$ de forma única

III) $G_1 \cap G_2 = \{e\}$

3. Representaciones de grupos

Definición 3.1. Una **representación lineal** $D(G)$ de un grupo G es una aplicación que a cada $g \in G$ le asocia un operador invertible que actúa sobre el espacio vectorial (EV) V y preserva la estructura de grupo:

$$D(g \cdot h) = D(g)D(h) \tag{3.1a}$$
$$D(e) = \mathbb{1}_V \tag{3.1b}$$
$$D(g^{-1}) = [D(g)]^{-1} \tag{3.1c}$$

La **dimensión** de una representación es la dimensión del EV sobre el que actúa.

Una representación se dice **fiel** si el homomorfismo es isomorfo. En caso contrario se dice **degenerada**.

Proposición 3.1. Toda representación no trivial de un grupo simple es fiel.

Proposición 3.2. Dado un grupo G con un subgrupo normal H, cualquier representación de G/H es representación degenerada de G.

Definición 3.2. Dos representaciones $D(G)$ y $D'(G)$ son equivalentes si existe un *intertwiner* A tal que

$$D' = ADA^{-1} \tag{3.2}$$

Representación contragradiente: $g \mapsto \tilde{D}(g) = [D(g)^t]^{-1}$

Definición 3.3. El **carácter** de $g \in G$ en la representación $D(G)$ es la función

$$G \to \mathbb{C} \tag{3.3a}$$
$$g \mapsto \chi(g) = \mathrm{Tr}(D(g)) \tag{3.3b}$$

- Dos representaciones equivalentes tienen el mismo carácter.
- El carácter es una función de clase –toma el mismo valor para todos los elementos de una clase de conjugación.
- $\chi(e) = \mathrm{Tr}\, \mathbb{1}_V = \dim V = \dim D$

Definición 3.4. $V_1 \subset V$ es un **subespacio invariante** si $D(g)v_1 \in V_1 \quad \forall g \in G,\ \forall v_1 \in V_1$.

La representación es **irreducible** si V no tiene ningún subespacio propio invariante bajo $D(G)$. En caso contrario se dice **reducible**.

Definición 3.5. Una representación reducible es **descomponible** si V es la suma directa de dos subespacios propios invariantes bajo D:

$$V = V_1 \oplus V_2 \tag{3.4a}$$
$$D(G) = D_1(G) \oplus D_2(G) \tag{3.4b}$$

con $D_i(G)V_i = D(G)V_i \subset V_i$.

Una representación descomponible es **completamente reducible** si se descompone en suma directa de representaciones irreducibles. Matricialmente

$$\mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(g) & & & \\ & \mathcal{D}_2(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{D}_n(g) \end{pmatrix} \qquad \forall g \in G \tag{3.5}$$

Teorema 3.3 (Schur-Auerbach)**.** Toda representación de un grupo finito o compacto sobre un EV con producto escalar es equivalente a una representación unitaria.

Teorema 3.4 (Maschke)**.** Toda representación de un grupo finito o compacto es completamente reducible.

Lema 3.5 (Schur)**.** Sean $D : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $D' : G \to \mathrm{GL}(V')$ dos representaciones **irreducibles** entrelazadas por $A : V \to V'$. Entonces:

i) Si $\dim D \neq \dim D'$, entonces $A = \mathbb{0}$.

II) Si $\dim D = \dim D'$, entonces bien $A = \mathbb{0}$ o bien D y D' son equivalentes (A es un isomorfismo).

III) Si $D = D'$, esto es $AD(g) = D(g)A \ \forall g \in G$, entonces $A = \lambda\mathbb{1}$.

Proposición 3.6. Sea $D : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de un grupo G finito o compacto. Si los únicos operadores lineales que conmutan con $D(g)$ $\forall g \in G$ son múltiplos de la identidad, entonces D es irreducible.

Proposición 3.7. Una representación de un grupo abeliano es irreducible ssi es unidimensional.

Corolario 3.7.1. Todas las representaciones de un grupo abeliano finito o compacto son unitarias.

Relación 3.8 (Ortonormalidad)**.** Sea G un grupo finito con representaciones irreducibles inequivalentes $D^{(\rho)}(G)$, de dimensión $\dim D^{(\rho)} \equiv d_\rho < \infty$. Entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\rho)}_{ij}(g)\bar{D}^{(\rho')}_{i'j'}(g) = \frac{1}{d_\rho}\delta_{\rho\rho'}\delta_{ii'}\delta_{jj'} \tag{3.6}$$

Análogamente, si G es un grupo de Lie compacto

$$\frac{1}{v(G)}\int_G \mathrm{d}\mu(g) D^{(\rho)}_{ij}(g)\bar{D}^{(\rho')}_{i'j'}(g) = \frac{1}{d_\rho}\delta_{\rho\rho'}\delta_{ii'}\delta_{jj'} \tag{3.7}$$

con $v(G) = \int_G \mathrm{d}\mu(g)$.

Relación 3.9 (Completitud)**.** Sea G un grupo finito con representaciones irreducibles inequivalentes $D^{(\rho)}(G)$, de dimensión $d_\rho < \infty$. Entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\rho} D^{(\rho)}_{ij}(g)\bar{D}^{(\rho)}_{ij}(g') = \delta_{gg'} \tag{3.8}$$

En el caso de un grupo de Lie compacto, se tiene

$$\frac{1}{v(G)}\sum_{\rho} D^{(\rho)}_{ij}(g)\bar{D}^{(\rho)}_{ij}(g') = \delta(g,g') \tag{3.9}$$

con $\int_G \mathrm{d}\mu(g)\delta(g,g')f(g) = f(g')$.

Corolario 3.9.1. Si G es un grupo finito, el orden del grupo y las dimensiones de las representaciones irreducibles inequivalentes se relacionan de la forma

$$\sum_\rho d_\rho^2 = |G| \tag{3.10}$$

Teorema 3.10 (Peter-Weyl)**.** Cualquier función $f : G \to \mathbb{C}$ continua o de cuadrado sumable se puede expandir en las funciones $D^{(\rho)}_{ij}(g)$:

$$f(g) = \sum_{g'}\delta_{gg'}f(g') = \sum_\rho\sum_{ij} d_\rho D^{(\rho)}_{ij}(g)\overbrace{\sum_{g'}\frac{1}{|G|}D^{(\rho)\dagger}_{i}(g')f(g')}^{f^\rho_{ij}} =: \sum_\rho\sum_{ij} d_\rho D^{(\rho)}_{ij}(g) f^\rho_{ij} \tag{3.11}$$

Por ejemplo, la descomposición de Fourier para $G = S^1 \cong U(1)$.

Relación 3.11 (Ortogonalidad y completitud con caracteres)**.** Sea G un grupo finito con representaciones irreducibles inequivalentes $D^{(\rho)}(G)$ de dimensión d_ρ y caracteres $\chi^{(\rho)}(g)$. Entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(\rho)}(g)\bar{\chi}^{(\rho')}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^m |\mathcal{C}_i|\,\chi^{(\rho)}_i(g)\bar{\chi}^{(\rho')}_i(g) = \delta_{\rho\rho'} \tag{3.12a}$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_\rho d_\rho\chi^{(\rho)}(g)\bar{\chi}^{(\rho)}(g') = \frac{1}{|G|}\sum_\rho d_\rho\chi^{(\rho)}(gg'^{-1}) = \delta_{gg'} \tag{3.12b}$$

$$\frac{|\mathcal{C}_i|}{|G|}\sum_\rho \chi^{(\rho)}_i\bar{\chi}^{(\rho)}_j = \delta_{ij} \tag{3.12c}$$

donde m es el número de clases de conjugación de G, $|\mathcal{C}_i|$ es el número de elementos en la clase $\mathcal{C}_i$ y $\chi^{(\rho)}_i$ es el carácter de la clase $\mathcal{C}_i$ en la representación (ρ).

En el caso compacto, basta reemplazar $|G| \to v(G)$, $\quad\sum_G \to \int_G \mathrm{d}\mu(g)$ y $\delta_{gg'} \to \delta(g,g')$.

Los caracteres $\chi_i^{(\rho)}$ pueden verse como los componentes de una matriz o tabla, con $\rho = 1, \dots, m$ el índice de fila e $i = 1, \dots, m$ el índice de columna.

Proposición 3.12. El número de clases de conjugación de un grupo es igual al número de representaciones irreducibles inequivalentes.

Ejemplo 3.1 (Tabla de caracteres de S_3)**.** S_3 tiene tres clases de conjugación,

$$\mathcal{C}_1 = \{e\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

y por tanto tres representaciones irreducibles inequivalentes:

1. En la representación trivial (unidimensional)

$$D^{(0)}(g) = 1 \ \forall g \in S_3 \Longrightarrow \chi_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

2. Del grupo cociente $S_3/A_3 = \{A_3, \tau_i A_3\} \cong C_2$ se induce la representación paridad (*cf.* ejemplo 2.1):

$$D^{(1)}(e) = D^{(1)}(\sigma_i) = 1, \ D^{(1)}(\tau_i) = -1 \Longrightarrow \chi_1^{(1)} = 1, \ \chi_2^{(1)} = -1, \ \chi_3^{(1)} = 1$$

3. A partir de la expresión (3.10) obtenemos la dimensión de la representación que falta: $6 = 1 + 1 + d_2^2 \Rightarrow d_2 = 2$. Sabemos además que $D^{(2)}(e) = \mathbb{1}_2 \Rightarrow \chi_1^{(2)} = 2$. De las relaciones de ortonormalidad se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot y \qquad \rho = 0, \ \rho' = 2 \\ 0 &= 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot y \qquad \rho = 1, \ \rho' = 2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene $x = 0, \ y = -1$.

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$
$\chi^{(0)}$	1	1	1
$\chi^{(1)}$	1	-1	1
$\chi^{(2)}$	2	x	y

Cuadro 1: Tabla de caracteres de S_3

Propiedades de los caracteres (para grupos finitos y compactos).

I) Puesto que cualquier representación es completamente reducible, $D = \bigoplus_\rho m_\rho D^{(\rho)}$, el carácter se puede descomponer como

$$\chi = \sum_\rho m_\rho \chi^{(\rho)}, \qquad m_\rho = \frac{1}{|G|} \sum_i |\mathcal{C}_i| \underbrace{\chi_i}_{D} \underbrace{\bar{\chi}_i^{(\rho)}}_{D^{(\rho)}} \tag{3.13}$$

II) Una representación es irreducible ssi $\|\chi\|^2 = 1$, con $\|\chi\|^2 := \frac{1}{|G|} \sum_g |\chi(g)|^2 = \sum_\rho m_\rho^2$.

III) Dos representaciones de un grupo finito o compacto son equivalentes ssi tienen los mismos caracteres.

IV) (Th. de Peter-Weyl) Cualquier función de clase se puede expandir en caracteres irreducibles.

Descomposición de Clebsch-Gordan. El producto tensorial de representaciones irreducibles es completamente reducible:

$$D^{(\sigma)} \otimes D^{(\tau)} = \bigoplus_\rho m_\rho^{\sigma\tau} D^\rho \tag{3.14}$$

donde

$$m_\rho^{\sigma\tau} = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(\sigma)}(g) \chi^{(\tau)}(g) \bar{\chi}^{(\rho)}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_i |\mathcal{C}_i| \, \chi_i^{(\sigma)} \chi_i^{(\tau)} \bar{\chi}_i^{(\rho)} \tag{3.15a}$$

$$\chi^{(\sigma)} \chi^{(\tau)} = \sum_\rho m_\rho^{\sigma\tau} \chi^{(\rho)} \tag{3.15b}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan. La descomposición de C-G expresa cómo se descomponen las matrices de representación en representaciones irreducibles bajo la acción de un grupo. Los coeficientes de C-G describen cómo se descomponen los vectores del EV de representación.

$$v_i^{(\rho)} \otimes v_j^{(\sigma)} = \sum_{\tau,a,k} C_{\rho,i,\sigma,j|\tau,a,k} \; v_k^{\tau_a} \tag{3.16a}$$

$$|\rho, i, \sigma, j\rangle = \sum_{\tau,a,k} \langle \tau, a, k| \; \rho, i, \sigma, j\rangle \;\; |\tau, a, k\rangle \tag{3.16b}$$

Satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completitud (en una base ortonormal y una representación unitaria):

$$\sum_{\tau,a,k} \langle \tau, a, k| \; \rho, i, \sigma, j\rangle \, \langle \rho, i', \sigma, j'| \; \tau, a, k\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'} \tag{3.17a}$$

$$\sum_{i,j} \langle \tau, a, k| \; \rho, i, \sigma, j\rangle \, \langle \rho, i, \sigma, j| \; \tau', a', k'\rangle = \delta_{\tau\tau'}\delta_{aa'}\delta_{kk'} \tag{3.17b}$$

Definición 3.6 (Conjunto de operadores tensoriales irreducibles)**.** Sean $D^{(\rho)}$ y $D^{(\sigma)}$ representaciones irreducibles de G sobre los espacios vectoriales con producto escalar V_ρ y V_σ respectivamente. Sea $Q : V_\rho \to V_\sigma$ un operador lineal. El conjunto de tales operadores, $\mathcal{L}(V_\rho, V_\sigma)$ forma un EV de dimensión $d_\rho \cdot d\sigma$. Definimos ahora para cada $g \in G$ un operador $D'(g)$ que actúa en $\mathcal{L}(V_\rho, V_\sigma)$ de la forma:

$$D'(g)Q := D^{(\sigma)}(g) \; Q \; D^{(\rho)}(g)^{-1} \qquad \forall Q \in \mathcal{L}(V_\rho, V_\sigma) \tag{3.18}$$

Estos operadores forman una representación de G sobre $\mathcal{L}(V_\rho, V_\sigma)$, en general reducible. Supongamos que es completamente reducible, y que $D^{(\tau)}$ es una de las representaciones irreducibles que aparecen en su deducción. Sea $\{Q_1^{(\tau)}, \dots, Q_{d\tau}^{(\tau)}\}$ una base del subespacio de $\mathcal{L}(V_\rho, V_\sigma)$ donde actúa $D^{(\tau)}$. Este conjunto recibe el nombre de **conjunto de operadores tensoriales irreducibles de la representación** $D^{(\tau)}$ de G.

Teorema 3.13 (Wigner-Eckart)**.** Sea G un grupo finito o compacto. Sean $D^{(\rho)}$, $D^{(\sigma)}$, $D^{(\tau)}$ representaciones unitarias irreducibles de G, y sean $\left\{v_i^{(\rho)}\right\}_{i=1}^{d_\rho}$ y $\left\{v_i^{(\rho)}\right\}_{j=1}^{d_\sigma}$ bases ortonormales de los EVs sobre los que están definidas $D^{(\rho)}$ y $D^{(\sigma)}$ resp. Finalmente, sea $\left\{Q_k^{(\tau)}\right\}_{k=1}^{d_\tau}$ un conjunto de operadores tensoriales irreducibles de $D^{(\tau)}$. Entonces

$$\left(v_j^{(\sigma)}, Q_k^{(\tau)} v_i^{(\rho)}\right) = \sum_{a=1}^{m_\sigma^{\rho\tau}} \bar{C}_{\rho,i,\tau,k|\sigma,a,j} \left(\sigma||Q^{(\tau)}||\rho\right)_a \tag{3.19}$$

$\forall i = 1, \dots, d_\rho, \quad \forall j = 1 \dots, d_\sigma, \quad \forall k = 1, \dots, d_\tau$

Los «elementos de matriz reducidos» $\left(\sigma||Q^{(\tau)}||\rho\right)_a$ son independientes de i, j, k. La dependencia en i, j, k de las cantidades $\left(v_j^{(\sigma)}, Q_k^{(\tau)} v_i^{(\rho)}\right)$ está completamente recogida en los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Representaciones en espacios funcionales. Dada una representación de un grupo G, $D : G \to \mathrm{GL}(n\mathbb{C})$, sobre el EV $\mathbb{C}^n$, los vectores $\mathbb{C}^n$ se transforman bajo los elementos de G según

$$\vec{x} \longmapsto \vec{x}' = D(g) \; \vec{x} \tag{3.20a}$$

$$x^i \longmapsto x'^i = \sum_j D(g)^i_j \; x_j \tag{3.20b}$$

donde i es el índice de fila y j el de columna.

Si consideramos funciones $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$, la transformación de las coordenadas induce una transformación en la función:

$$f'(\vec{x}') = f(\vec{x}) \Longrightarrow f'(D(g) \; \vec{x}) = f(\vec{x}) \tag{3.21}$$

y concluimos que

$$f \mapsto f' \qquad \boxed{f'(\vec{x}) = f\left(D(g^{-1})\vec{x}\right)} \tag{3.22}$$

4. Grupos y álgebras de Lie

Definición 4.1. Una **variedad topológica** es un espacio topológico Hausdorff (para cada par de puntos existen sendos abiertos disjuntos que los contienen) con una base numerable de abiertos que es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. La variedad se dice **analítica** si para cada par de cartas con intersección no vacía el mapa $\phi_\beta o \phi_\alpha^{-1}$ es una función analítica.

Definición 4.2. Un **grupo de Lie** G de dimensión n es un conjunto de elementos que

I) Forman grupo

II) Forman una variedad analítica de dimensión n

III) El mapa $\phi : G \times G \to G \qquad (g_1, g_2) \mapsto \phi(g_1, g_2) = g_1 g_2$ es analítico $\forall g_1, g_2 \in G$

IV) El mapa $\phi : G \to G \qquad g \mapsto \phi(g) = g^{-1}$ es analítico $\forall g \in G$

Definición 4.3. Un **grupo de Lie lineal** G de dimensión n satisface:

I) Posee una representación matricial fiel D, de dimensión m. Definimos la distancia como

$$d(g, g') := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |D(g)_{ij} - D(g')_i j|^2} \tag{4.1}$$

Sea M_δ un entorno de la identidad:

$$M_\delta = \{g_i \in G \mid d(g_i, e) < \delta\} \tag{4.2}$$

II) Existe un $\delta > 0$ tal que los elementos de M_δ se pueden parametrizar con $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, con e correspondiente a $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Cada elemento de M_δ se corresponde con un único punto de $\mathbb{R}^n$, y no hay un punto de $\mathbb{R}^n$ correspondiente a más de un $g_i \in M_\delta$.

III) Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\sum_i x_i^2 < \varepsilon$, $(x_1, \ldots, x_n)$ se corresponde a un $g_i \in G$

IV) $D(g(x_1, \ldots, x_n)) \equiv D(x_1, \ldots, x_n)$ es una función analítica de $(x_1, \ldots, x_n)$ $\forall (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\sum_i x_i^2 < \varepsilon$

Remark 4.1. Todo grupo de Lie lineal es isomorfo a algún subgrupo de $\mathrm{GL}(n)$.

Definición 4.4 (Recubridor universal)**.** Si G es un grupo de Lie múltiplemente conexo, existe un $\tilde{G}$ simplemente conexo tal que G es isomorfo a $\tilde{G}/Z(\tilde{G})$ o a alguno de sus subgrupos, donde el $Z(\tilde{G})$ es el centro de $\tilde{G}$:

$$Z(\tilde{G}) = \left\{h \in \tilde{G} | hg = gh \quad \forall g \in \tilde{G}\right\} \tag{4.3}$$

Teorema 4.1. Si G es un grupo de Lie compacto, la **medida de Haar** proporciona

$$\int_G f(g) \mathrm{d}g = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x_1 \ \cdots \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x_n \ \sigma(x_1, \ldots, x_n) \ f(g(x_1, \ldots, x_n)) < \infty \tag{4.4}$$

para toda función $f(g)$ continua, con $\int_G \mathrm{d}g = 1$.

Definición 4.5. Un **álgebra de Lie real** $\mathscr{L}$ de dimensión $n \geq 1$ es un espacio vectorial real con un corchete de Lie $[,]$ que satisface:

I) $[A, B] \in \mathscr{L}$

II) $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C] \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

III) $[A, B] = -[B, A]$

IV) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ identidad de Jacobi

$\forall A, B, C, \in \mathscr{L}$.

Para un álgebra de Lie de matrices, el corchete de Lie es el conmutador.

Remark 4.2. Para toda matriz S no singular se tiene

$$e^{SAS^{-1}} = Se^A S^{-1} \tag{4.5}$$

Relación 4.2 (fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff)**.** Sean A y B dos matrices que no conmutan con entradas suficientemente pequeñas. Entonces

$$e^A e^B = e^C \qquad C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] + [B,[B,A]]\right) + \cdots \tag{4.6}$$

Definición 4.6. Un **subgrupo uniparamétrico** es un subgrupo de un grupo de Lie lineal formado por matrices $T(t)$ que dependen de un parámetro real t de tal forma que

$$T(t)\ T(t') = T(t+t') = T(t')\ T(t) \tag{4.7a}$$

$$T(0) = \mathbb{1}_m \tag{4.7b}$$

$$T^{-1}(t) = T(-t) \tag{4.7c}$$

Un **vector tangente en la identidad** ω viene dado por

$$\omega \equiv \left.\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}T}\right|_{t=0} \rightsquigarrow T(t) = e^{\omega t} \tag{4.8}$$

Definición 4.7 (Generadores del álgebra de Lie)**.** Por la definición de grupo de Lie lineal de dimensión n, las matrices de representación son funciones analíticas de $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Las matrices

$$(A_r)_{ij} = \left.\frac{\partial D_{ij}(g)}{\partial x_r}\right|_{x_1=\cdots=x_n=0} \qquad \forall r = 1, \ldots, n \quad \forall i,j = 1, \ldots, m \tag{4.9}$$

con $g \in M_\delta$ (elementos conexos con la identidad) y $m = \dim D$, forman una base del EV real de dimensión n. Dicho EV es el álgebra de Lie asociada al grupo G, siendo el corchete de Lie el conmutador. Las matrices $A_1, \ldots, A_n$ son los **generadores del álgebra de Lie** y en física se toman hermíticas.

Proposición 4.3 (Relación entre álgebras de Lie reales y grupos de Lie lineales)**.** Sea G un grupo de Lie y $\mathscr{L}$ su álgebra de Lie asociada. Entonces

I) Todo elemento $A \in \mathscr{L}$ está asociado con un subgrupo uniparamétrico de G dado por

$$T(t) = e^{At} \qquad \forall t \in (-\infty, +\infty) \tag{4.10}$$

II) Todo elemento de G en un entorno cercano a la identidad pertenece a un subgrupo uniparamétrico de G: $T(0) = e$.

III) Si G es compacto, todo elemento de un subgrupo conexo de G se puede expresar de la forma e^A, con $A \in \mathscr{L}$. Si G es además conexo, todo elemento de G es de la forma e^A, con $A \in \mathscr{L}$.

Nota 4.3. El álgebra de Lie es el espacio tangente de G evaluado en la identidad:

$$T(t) = e^{\omega t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \omega T(t) \tag{4.11}$$

Definición 4.8 (Representación de un álgebra de Lie)**.** . A cada elemento $A \in \mathscr{L}$ le corresponde una matriz $m \times m$ $D(A)$ tal que

$$D(\alpha A + \beta B) = \alpha D(A) + \beta D(B) \tag{4.12a}$$

$$D([A,B]) = [D(A), D(B)] \tag{4.12b}$$

$\forall A, B \in \mathscr{L}; \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Estas matrices forman una representación de dimensión m de $\mathscr{L}$. Si los elementos de $\mathscr{L}$ son matrices, $D(A) = A$.

Teorema 4.4. Sea D_G una representación analítica m-dimensional de un grupo de Lie lineal con álgebra de Lie $\mathscr{L}$. Entonces

1. Existe una representación de $\mathscr{L}$ definida por

$$D_{\mathscr{L}}(A) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_G(e^{tA})\right|_{t=0} \qquad \forall A \in \mathscr{L} \tag{4.13}$$

2. $e^{tD_{\mathscr{L}}(A)} = D_G(e^{tA}) \qquad \forall A \in \mathscr{L} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
3. $D'_{\mathscr{L}}$ es equivalente a $D_{\mathscr{L}}$ si D'_G es equivalente a D_G. El recíproco es cierto si G es conexo.
4. $D_{\mathscr{L}}$ es [completamente] reducible si D_G lo es. El recíproco se cumple si G es conexo.
5. Si G es conexo, entonces $D_{\mathscr{L}}$ es irreducible ssi D_G lo es.
6. $D_{\mathscr{L}}(A)$ es antihermítica si D_G es unitaria. El recíproco es cierto para G conexo.

5. Rotaciones en $\mathbb{R}^3$: SO(3) y SU(2)

- Las rotaciones (propias) son transformaciones lineales de $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ que dejan invariante su norma y preservan la orientación.
- En una base ortonormal los elementos de SO(3) son matrices 3×3 ortogonales de $\det = 1$.
- La dimensión del grupo es 3: se puede parametrizar por un vector unitario en la dirección del eje y un ángulo ψ, con $0 \leq \psi \leq \pi$.
- **Parametrización ángulo-eje:** el eje $\vec{n}$ queda determinado por los ángulos polar y azimutal (θ, ϕ), con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

Remark 5.1. Puesto que $R_{\vec{n}}(\pi) = R_{-\vec{n}}(\pi)$, SO(3) es isomorfo a la esfera con las antillas identificadas:

$$\mathrm{SO}(3) \cong S_3/\mathbb{Z}_2 \tag{5.1}$$

Nota 5.2. SO(3) es doblemente conexo: hay dos clases de caminos cerrados, homótopos a un punto y no homótopos a un punto.

Relación 5.1 (Fórmula de Olinde-Rodrigues)**.**

$$R_{\vec{n}}(\psi)\vec{x} = \cos\psi\vec{x} + (1-\cos\psi)(\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n} + \sin\psi(\vec{n}\times\vec{x}) \tag{5.2}$$

$$(R_{\vec{n}}(\psi))_{ij} = \delta_{ij}\cos\psi + n_i n_j(1-\cos\psi) - \sin\psi\sum_k \epsilon_{ijk}n_k \tag{5.3}$$

Teorema 5.2. Todas las rotaciones por el mismo ángulo pertenecen a la misma clase:

$$RR_{\vec{n}}(\psi R^{-1}) = R_{\vec{n}'}(\psi) \qquad \vec{n}' = R\vec{n} \tag{5.4}$$

$\forall R \in \mathrm{SO}(3)$.

Proposición 5.3. SU(2) es el recubridor universal de SO(3):

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \tag{5.5}$$

SU(2) se puede escribir como

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{U_{\vec{n}}(\psi) = e^{-i\frac{\psi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}},\ 0 \leq \psi < 2\pi\right\} \cong S^3 \tag{5.6}$$

donde $\vec{(\sigma)} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son las matrices de Pauli, con las propiedades siguientes:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{5.7a}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{5.7b}$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1} \tag{5.7c}$$

El homomorfismo $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ viene dado por:

$$\vec{x}' = R_{\vec{n}}(\psi)\vec{x} \longmapsto X' = U_{\vec{n}}(\psi)XU^\dagger_{\vec{n}}(\psi) = \vec{x}'\cdot\vec{\sigma} \tag{5.8}$$

Nótese que U y $-U$ mapean la misma rotación de SO(3).

Generadores de SO(3). Existe un subgrupo uniparamétrico asociado a las rotaciones de eje fijo $\vec{n}$. Cada uno de estos subgrupos lleva asociado un generador $J_{\vec{n}}$:

$$R_{\vec{n}}(\psi) = e^{-i\psi J_{\vec{n}}} = e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} \tag{5.9a}$$

$$J_k = i\left.\frac{\mathrm{d}R_k(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\right|_{\psi=0} \qquad k = 1,2,3 \tag{5.9b}$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{5.9c}$$

El Casimir es $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, que conmuta con los tres J_i.

Generadores de SU(2). Toda matriz $U \in \mathrm{SU}(2)$ se puede escribir como $U = e^{iH}$, con H hermítica y de traza nula. El conjunto de matrices H forma un espacio vectorial de dimensión 3, con base $\{\sigma_i\}$:

$$H = \sum_{k=1}^{3} \eta_k \frac{\sigma_k}{2} \Longrightarrow U = e^{i\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tag{5.10a}$$

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} \tag{5.10b}$$

Las matrices de Pauli generan la misma álgebra que las J_i: $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$. $\frac{\vec{\sigma}}{2}$ y $\vec{J}$ forman dos representaciones unitarias independientes del mismo álgebra de Lie.

Otra base es $J_z = J_3,\ J_\pm = J_1 \pm iJ_2$

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \tag{5.11a}$$

$$[J_+, J_-] = 2J_z \tag{5.11b}$$

$$\vec{J}^2 = J_z + J_z + J_- J_+ \tag{5.11c}$$

$$[\vec{J}^2, J_\pm] = 0 \tag{5.11d}$$

En física los generadores J_k se toman hermíticos:

$$J_i^\dagger = J_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{5.12a}$$

$$J_\pm^\dagger = J_\mp \tag{5.12b}$$

Representación de espín j **de** $\mathfrak{su}(2)$. Sean $|j,\ m\rangle$ autovectores ortonormales de $\vec{J}^2$ y J_z, que forman un EV de $dim = 2j+1$. Se toma $\langle j\ j|\ j\ j\rangle = 1$ y se cumple

$$\vec{J}^2 |j\ m\rangle = j(j+1)|j\ m\rangle \qquad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \tag{5.13}$$

$$J_z |j\ m\rangle = m|j\ m\rangle \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j \tag{5.14}$$

$$J_\pm |j\ m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\ |j\ m\pm 1\rangle \tag{5.15}$$

Representación de espín j **de** SU(2). Bajo la acción de la «rotación» $U \in \mathrm{SU}(2)$, la matriz D^j de la representación de espín j actúa sobre el EV $\mathrm{lin}\{|j\ m\rangle,\ m = -j, \ldots, j\}$ de la siguiente forma:

$$|j\ m\rangle \longmapsto D^j(U)|j\ m\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} |j\ m'\rangle D^j_{m'm}(U) \tag{5.16}$$

con

$$\begin{aligned} D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) &= \langle jm'|\, D(\alpha,\beta,\gamma)\,|jm\rangle = \langle jm'|\, e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}\,|jm\rangle = \\ &= e^{i\alpha m'} d^j_{mm'}(\beta) e^{-i\gamma m} \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$d^j_{mm'}(\beta) = \langle jm'|\, e^{-i\beta J_y}\,|jm\rangle \qquad \text{matriz de Wigner} \tag{5.18}$$

Producto directo de representaciones de $\mathfrak{su}(2)$. Los autovectores de $(\vec{J}^{(i)})^2$ y $J_{i\ z}$ son $|j_1\ m_1\rangle \otimes |j_2\ m_2\rangle \equiv |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$. Los descomponemos en la base de autovectores comunes de $(\vec{J}^{(1)})^2, (\vec{J}^{(2)})^2,\ \vec{J}^2$ y J_z: $\quad |(j_1, j_2) J\ M\rangle$.

En términos de los coeficientes de Clebsch-Gordan

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2 | JM} = \langle (j_1, j_2) JM|\ j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \tag{5.19}$$

se tiene

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2|JM}\ |(j_1, j_2)JM\rangle \tag{5.20a}$$

$$|(j_1, j_2)JM\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} C^*_{j_1 m_1 j_2 m_2|JM}\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \tag{5.20b}$$

Estos coeficientes:

- Dependen de una elección de fase relativa entre vectores. Por convenio,

$$\langle (j_1,\ j_2)\ J\ J |\ j_1\ j_1\ j_2\ J - j_1 \rangle \in \mathbb{R} \tag{5.21}$$

- Satisfacen la relación de recurrencia dada por

$$\begin{aligned}
&\sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)}\, \langle J\ M |\ m_1\ m_2 \rangle = \\
&= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)}\, \langle J\ M \pm 1 |\ m_1 \pm 1\ m_2 \rangle \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)}\, \langle J\ M \pm 1 |\ m_1\ m_2 \pm 1 \rangle
\end{aligned} \tag{5.22}$$

- Se les impone además la condición de normalización

$$\sum_{m_1, m_2} |\langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 |\ (j_1, j_2)\ J\ M \rangle|^2 = 1 \tag{5.23}$$

que fija, salvo signo, todos los coeficientes de C-G.

Teorema de Wigner-Eckart: Si un sistema físico admite el grupo de simetría SU(2), las transformaciones de simetría implican relaciones entre los observables que pertenecen a la misma representación, i.e. las cantidades físicas se corresponden con tensores irreducibles.

Sea un conjunto de operadores tensoriales irreducibles $\left\{ Q^{\tilde{j}}_{\tilde{m}} \right\}^{\tilde{j}}_{\tilde{m}=-\tilde{j}}$ que se transforman con la representación de espín j:

$$D^j(g) Q^{\tilde{j}}_{\tilde{m}} D^{j'}(g^{-1}) = \sum_{m'} Q^{\tilde{j}}_{m'} D^{\tilde{j}}_{m' \tilde{m}}(g) \tag{5.24}$$

Entonces sus elementos de matriz entre estados físicos cumplen

$$\langle j' m' |\, Q^{\tilde{j}}_{\tilde{m}}\, | j m \rangle = C_{jm, \tilde{j}\tilde{m} | j' m'} (j' || \tilde{Q}' || j) \tag{5.25}$$

donde los elementos de matriz reducida $(j' || \tilde{Q}' || j)$ son independientes de m, m' y $\tilde{m}$.

Sin ningún conocimiento acerca de la física del sistema podemos obtener:

- Reglas de selección

$$\left| j - \tilde{j} \right| \leq j' \leq j + \tilde{j} \tag{5.26a}$$

$$m' = m + \tilde{m} \tag{5.26b}$$

- Los cocientes

$$\frac{\langle j m' |\, Q^{j}_{\tilde{m}}\, | j m \rangle}{\langle j n' |\, Q^{j}_{\tilde{n}}\, | j n \rangle} = \frac{C_{jm, \tilde{j}\tilde{m} | j' m'}}{C_{jn, \tilde{j}\tilde{n} | j' n'}} \tag{5.27}$$

Ejemplo 5.1 (Isospín)**.** La simetría de isospín aparece cuando la única interacción relevante es la electromagnética y el único observable la carga eléctrica. Los nucleones y los mesones π corresponden al doblete y al triplete de isospín respectivamente:

$$p = \left| \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle \qquad n = \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^+ = |1\ 1\rangle \quad \pi^0 = |1\ 0\rangle \quad \pi^- = |1\ -1\rangle$$

Efectuando la descomposición de C-G de $\frac{1}{2} \otimes 1$ e invirtiéndola se obtiene

$$|p\ \pi^+\rangle = \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$|p\ \pi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{2} \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

Por el teorema de Wigner-Eckart

$$\langle I\ I_z |\, \mathcal{T}\, | I'\ I'_z \rangle = \mathcal{T}_I \delta_{I I'} \delta_{I_z I'_z}$$

de modo que los elementos de matriz del operador transición $\mathcal{T}$ entre los diferentes estados resultan

$$\langle p\ \pi^+ |\, \mathcal{T}\, | p\ \pi^+ \rangle = \mathcal{T}_{3/2}$$

$$\langle p\ \pi^- |\ \mathcal{T}\ | p\ \pi^- \rangle = \frac{1}{3}\mathcal{T}_{3/2} + \frac{2}{3}\mathcal{T}_{1/2}$$

Experimentalmente, para energías de $\sim 180\text{MeV}$ se tiene

$$\frac{\sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p \to \pi^- p)} = 9$$

de lo que inferimos que $\mathcal{T}_{1/2} \ll \mathcal{T}_{3/2}$.

Rotación de funciones de onda. Consideremos el espacio de representación $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}\vec{x})$ de vectores

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\ \psi(\vec{x})\ |\vec{x}\rangle \tag{5.28}$$

La transformación $\vec{x} \to \vec{x}' = R\vec{x}$ ($x'_i = R_{ij}x_j$) induce la transformación

$$|\vec{x}'\rangle = U(R)\,|\vec{x}\rangle = |R\vec{x}\rangle\, 0 \tag{5.29}$$

donde $U(R)$ es la representación de R sobre $\mathcal{H}$, de modo que

$$|\psi'\rangle = U(R)\,|\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\ \psi(\vec{x})\ |\vec{x}'\rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\ \psi(R^{-1}\vec{x})\ |\vec{x}\rangle \tag{5.30}$$

$$\boxed{\psi'(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x})} \tag{5.31}$$

Para estados etiquetados con un número cuántico discreto (espín)

$$U(R)\,|\vec{x}\ \sigma\rangle = |R\vec{x}\ \lambda\rangle\ \ D^{1/2}_{\lambda\sigma}(R) \tag{5.32}$$

con $D^{1/2}_{\lambda\sigma}(R)$ representación de espín 1/2 de SU(2), se tiene

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\ \psi_\sigma(\vec{x})\ \ |\vec{x}\ \sigma\rangle \xrightarrow{R} |\psi'\rangle = U(R)\,|\psi\rangle &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\ \ \psi_\sigma(\vec{x})\ \ |R\vec{x}\ \lambda\rangle\ \ D^{1/2}_{\lambda\sigma}(R) \\ &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\ \ \underbrace{\psi_\sigma(R^{-1}\vec{x})\ D^{1/2}_{\lambda\sigma}(R)}_{\psi'_\lambda(\vec{x})}\ \ |\vec{x}\ \lambda\rangle \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\boxed{\psi'_\lambda(\vec{x}) = \psi_\sigma(R^{-1}\vec{x})\ D^{1/2}_{\lambda\sigma}(R)} \tag{5.34}$$

Definición 5.1. Un conjunto de funciones multi-componente $\{\phi_m(\vec{x}),\ m = -j\ldots,j\}$ del vector de coordenadas $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ se dice que forma una **función de onda irreducible** o un **campo irreducible de espín** j si se transforma bajo rotaciones $R \in \mathrm{SO}(3)$ como

$$\phi \xrightarrow{R} \phi' \qquad \phi'_m(\vec{x}) = D^j_{m'm}(R)\phi_m(R^{-1}\vec{x}) \tag{5.35}$$

donde $D^j_{m'm}$ es la matriz que representa a R en la representación irreducible de espín j:

$$D^j_{m'm}(R) = \langle j\ m'|\, D^j(R)\,|j\ m\rangle \tag{5.36}$$

Rotación de operadores. Consideramos ahora las propiedades de transformación de operadores $\widehat{Q}$ que actúan sobre $|\vec{x}\rangle$, cuyo valor esperado será invariante:

$$\langle\psi|\,\widehat{Q}\,|\psi\rangle = \langle\psi'|\,\widehat{Q}'\,|\psi'\rangle = \langle\psi|\,U^\dagger(R)\ \widehat{Q}'\ U(R)\,|\psi\rangle \tag{5.37}$$

$$\boxed{\widehat{Q}' = U(R)\ \widehat{Q}\ U^{-1}(R)} \tag{5.38}$$

Conjunto de operadores tensoriales irreducibles de rango j: Conjunto de $(2j+1)$ operadores $\{Q^j_m\}^j_{m=-j}$ que se transforman bajo la rotación R de SO(3) de acuerdo a la representación

$$U(R)\ Q^j_m\ U^{-1}(R) = \sum_{m'} Q^j_{m'}\ D^j_{m'm}(R) = \sum_{m'} Q^j_{m'}\ \ \langle j\ m'|\, U(R)\,|j\ m\rangle \tag{5.39}$$

Equivalentemente, se caracterizan por sus conmutadores con los generadores del álgebra:

$$[J_3, Q^j_m] = m\ Q^j_m \tag{5.40a}$$

$$[J_\pm, Q^j_m] = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\ Q^j_{m\pm 1} \tag{5.40b}$$

Además, se comprueba

$$\sum_{i=1}^{3} [J_i, [J_i, Q^j_m]] = j(j+1)\ Q^j_m \tag{5.41}$$

Operadores escalares. Son invariantes bajo rotaciones $\longrightarrow$ se transforman en la representación $j = 0$.

$$U(R)\ \widehat{S}\ U^{-1}(R) = \widehat{S} \Longrightarrow [\widehat{S}, J_i] = 0 \tag{5.42}$$

Operadores vectoriales

- Se transforman como un vector en $\mathbb{R}^3$ (en la representación de definición de SO(3)): $\widehat{V}_i$, con coordenadas cartesianas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

  $$U(R)\ \widehat{V}_i\ U^{-1}(R) = \widehat{V}_j\ R_{ji} \Longleftrightarrow U^{-1}(R)\ \widehat{V}_i\ U(R) = R_{ij}\ \widehat{V}_j \tag{5.43}$$

  Infinitesimalmente

  $$U(R)\ \widehat{V}_i\ U^{-1}(R) = \widehat{V}_i + i\psi n_k[\widehat{V}_i, J_k] + \mathcal{O}(\psi^2) \tag{5.44}$$
  $$\widehat{V}_i\ R_{ji} = \widehat{V}_i + \psi\epsilon_{ijk}n_k\widehat{V}_j + \mathcal{O}(\psi^2) \tag{5.45}$$
  $$\therefore\quad [V_i, J_k] = i\epsilon_{ijk}V_j \tag{5.46}$$

- Se transforman en la representación $j = 1$: Q^1_m $(m = -1, 0, 1)$, con coordenadas «esféricas» en la base de autoestados de $\vec{J}^2$ y J_z

  $$U(R)\ Q^1_m\ U^{-1}(R) = \sum_{m'=-1}^{1} Q^1_{m'}\ D^1_{m'm}(R) \tag{5.47}$$

- Relación entre coordenadas V_i y Q^1_m

  $$\widehat{V} = V_1\ \hat{e}_1 + V_2\ \hat{e}_2 + V_3\ \hat{e}_3 = Q^1_1\,|1\ 1\rangle + Q^1_0\,|1\ 0\rangle + Q^1_{-1}\,|1\ -1\rangle \tag{5.48}$$

  Los autovalores de $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (en la base canónica de $\mathbb{R}^3$) son

  $$|1\ 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \quad |1\ -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \quad |1\ 0\rangle = \hat{e}_3 \tag{5.49}$$
  $$V_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1_1 - Q^1_{-1}) \quad V_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(Q^1_1 + Q^1_{-1}) \quad V_3 = Q^1_0 \quad \text{salvo fase} \tag{5.50}$$

Operadores tensoriales de rango 2. Un tensor $\widehat{T} = T^{ij}\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j,\ T^{ij} = a^ib^j$ se puede descomponer como

$$\widehat{T} = \widehat{T}^{(0)} + \widehat{T}^{(1)} + \widehat{T}^{(2)} \tag{5.51}$$

donde

- $\widehat{T}^{(0)} = \frac{a_kb_k}{3}\ \delta_{ij}$ se transforma como un escalar, $\mathrm{Tr}(\widehat{T}) = a^kb_k \longrightarrow$ espín 0
- $\widehat{T}^{(1)} = \frac{1}{2}(a_ib_j - a_jb_i)$ se transforma como un vector, $\frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{b} \longrightarrow$ espín 1
- $\widehat{T}^{(2)} = \frac{1}{2}(a_ib_j - a_jb_i) - \frac{a_kb_k}{3}\delta_{ik}$ se transforma como un tensor simétrico sin traza $\longrightarrow$ espín 2

  Bajo SO(3) un tensor se transforma según

  $$T \xrightarrow{R} T' = R\ T\ R^{-1} \tag{5.52}$$

6. El grupo de Lorentz

El espacio de Minkowski es un espacio $\mathbb{R}^4$ con una métrica pseudo-euclídea de signatura $(+,-,-,-)$. En una base en la que los 4-vectores x^μ (contravariantes) tienen coordenadas $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})$ la métrica es diagonal

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{6.1}$$

y la norma al cuadrado del 4-vector es

$$x \cdot x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \tag{6.2}$$

El **grupo de Lorentz** $\mathcal{L} \cong \mathrm{O}(1,3)$ es el grupo de isometría de esta forma cuadrática, es decir

$$\Lambda \in \mathrm{O}(1,3): \quad x \xrightarrow{\Lambda} x' = \Lambda x \qquad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{6.3}$$

$$x' \cdot x' = \Lambda^\mu{}_\rho\, x^\rho\, \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\sigma\, x^\sigma = x \cdot x \tag{6.4}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Lambda^\mu{}_\rho\, \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}} \qquad \boxed{\Lambda^t\, \eta\, \Lambda = \eta} \tag{6.5}$$

- $\mathcal{L}$ es un grupo de Lie lineal de dimensión 6: $\Lambda^\mu{}_\nu$ son 16 componentes sujetas a 10 ecuaciones.
- $\mathcal{L}$ es un grupo no conexo, formado por 4 conjuntos disjuntos (componentes u hojas). En efecto, de (6.5) se sigue

$$\det \Lambda^t\ \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \Longrightarrow \det \Lambda = \pm 1 \tag{6.6}$$

$$\Lambda^\mu{}_0\, \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 = 1 \Rightarrow \Lambda^0{}_0 = \begin{cases} \geq & 1 \\ \leq & -1 \end{cases} \tag{6.7}$$

Cada una de estas componentes sí es conexa. Nos restringiremos a la componente conectada con la identidad, llamada **subgrupo ortocrono propio** o **grupo de Lorentz restringido**: $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong \mathrm{SO}(1,3)$.

Todas las $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ pueden escribirse como el producto de una rotación $R \in \mathrm{SO}(3)$ por una «transformación de Lorentz pura» o *boost* L.

$$R_{\vec{n}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R_{\vec{n}}(\phi) \in \mathrm{SO}(3) \end{array}\right) \tag{6.8}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma =: \cosh\psi \tag{6.9}$$

$$L = (L^\mu{}_\nu) = \left(\begin{array}{c|c} \cosh\psi & n_j \sinh\psi \\ \hline -n^i \sinh\psi & \delta^i{}_j - n^i n_j\ (\cosh\psi - 1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \beta_j \gamma \\ \hline -\beta^i \gamma & \delta^i{}_j - \frac{\beta^i \beta_j}{\beta^2}\ (\gamma - 1) \end{array}\right) \tag{6.10}$$

con $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ vector unitario en la dirección $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

De (6.8) se sigue que SO(3) es subgrupo de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Remark 6.1. Las transformaciones de Lorentz puras en general no forman subgrupo, solo las que son uniparamétricas como L_1.

Parametrización. Una transformación genérica $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ se puede obtener (como mostraremos más adelante) de la forma $\Lambda = LR$.

De los 6 parámertros que caracterizan Λ, podemos asociar 3 a los 3 parámetros de R y otros 3 a los de L. El espacio de parámetros correspondiente a la transformación L se puede tomar como un hiperboloide en el espacio euclídeo de dimensión 4. De hecho, la cantidad

$$x \cdot x = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = \text{const.} \tag{6.11}$$

(ec. del hiperboloide) es invariante bajo L.

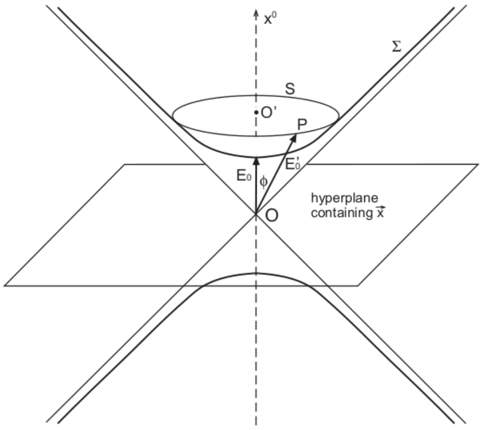

Figura 1: Dominio de la parametrización para las transformaciones de Lorentz puras [1]

El hiperboloide tiene dos ramas dentro del cono de luz, pero si consideramos $x^0 > 0$ solo necesitamos la primera (Σ), ya que $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ no puede cambiar el signo de x^0. Un *boost* $L : E_0 \to E_0'$ queda unívocamente definido por el punto P. Para un ϕ dado, P se encuentra en la esfera S (un círculo en la figura 1) y necesitamos dos parámetros más para fijar la posición de P en S. En el espacio de Minkowski ϕ se convierte en imaginario, y corresponde a $\psi = i\phi$.

Las propiedades topológicas de este espacio de parámetros nos permiten inferir las siguientes propiedades de $\mathcal{L}_+^\uparrow$:

- $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es un grupo**no compacto**, al no ser compacto el hiperboloide.
- $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es **doblemente conexo**. El subconjunto de los *boosts* L es simplemente conexo, puesto que cualquier camino cerrado en Σ se puede deformar de forma continua a un punto. Sin embargo, como ya vimos, el subgrupo SO(3) de las rotaciones es doblemente conexo, y por tanto lo es el propio $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Recubridor universal de $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong \mathrm{SO}(1,3)$: grupo simplemente conexo homeomorfo a $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Asociamos a cada 4-vector la matriz hermítica

$$X = \sigma_\mu x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

con $\sigma_\mu := (\sigma_0, \vec{\sigma}), \qquad \sigma^\mu \equiv \underline{\sigma}_\mu := (\sigma_0, -\vec{\sigma}), \qquad \sigma_0 := \mathbb{1}_{2\times 2}$.

Se verifica

$$\mathrm{Tr}\left(\underline{\sigma}_\mu \sigma_\nu\right) = 2\eta_{\mu\nu} \tag{6.13}$$

$$x^\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\underline{\sigma}^\mu X\right) \tag{6.14}$$

Introducimos una matriz compleja unimodular

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \det A = \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{6.15}$$

y transformemos X según

$$X' = AXA^\dagger \Rightarrow x' \cdot x' = \det X' = \det X = x \cdot x \tag{6.16}$$

A describe una transformación lineal de x^μ que deja $x \cdot x$ invariante, esto es, una transformación de Lorentz. La relación entre matrices A y Λ está dada por

$$\Delta^\mu{}_\nu\ x^\nu = x'\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\underline{\sigma}^\mu X'\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\underline{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^\dagger\right)\ x^\nu \tag{6.17}$$

$$\therefore \Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\underline{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^\dagger\right) \tag{6.18}$$

[1]Giovanni Costa, Gianluigi Fogli, *Symmetries and Group Theory in Particle Physics* p. 48

El conjunto de matrices A dadas por (6.15) forman el grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Por cada matriz A hay una transformación de Lorentz Λ, y por cada transformación de Lorentz Λ hay dos matrices de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$: A y $-A$. En particular, tanto $\mathbb{1}$ como $-\mathbb{1}$ se corresponden con la identidad en $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Esta relación entre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es un homomorfismo, ya que preserva la estructura de grupo.

Podemos escribir $A = e^S$, con S una matriz 2×2 de traza nula. Hay 6 matrices 2×2 sin traza que sean independientes, podemos elegir las 3 matrices de Pauli hermíticas σ_k y las tres matrices anti-hermíticas $i\sigma_k$. Entonces, en general, $S = S_1 + S_2$ con

$$S_1 = -i\frac{\phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \tag{6.19}$$

$$S_2 = -\frac{\psi}{2}\vec{u}\cdot\vec{\sigma} \tag{6.20}$$

donde ϕ y ψ son parámetros reales y $\vec{n}$ y $\vec{u}$ vectores unitarios reales.

Obtenemos dos tipos de matrices: unitarias y hermíticas.

$$U = e^{S_1} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \in \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \tag{6.21}$$

$$H = e^{S_2} = \cosh\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathbb{1} - i\sinh\left(\frac{\psi}{2}\right)\vec{u}\cdot\vec{\sigma} \tag{6.22}$$

que corresponden a rotaciones puras y a *boosts* puros (con $\vec{\beta} = \vec{u}\tanh\psi$) respectivamente.

Un teorema de álgebra lineal garantiza que toda matriz $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ se puede escribir como $A = HU$. El homomorfismo entre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$ implica

$$\Lambda(A) = \Lambda(H)\Lambda(U) \Longrightarrow \boxed{\Lambda = LR} \tag{6.23}$$

Álgebra de Lie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Como ya sabemos, las transformaciones infinitesimales se corresponden con los generadores del álgebra.

El subgrupo de las rotaciones espaciales puras es generado por tres elementos independientes, que escogemos $R_1(\phi)$, $R_2(\phi)$ y $R_3(\phi)$ (vistas como matrices 4×4.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R_i(\phi)_{3\times 3}\end{array}\right) \tag{6.24}$$

Los generadores hermíticos de estas rotaciones son

$$J_k = i\left.\frac{\partial R_k}{\partial\phi}\right|_{\phi=0} \qquad k = 1,2,3 \tag{6.25}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & (J_i)_{\mathrm{SO}(3)}\end{array}\right) \tag{6.26}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

Una rotación infinitesimal pura (de ángulo $\delta\phi$) viene dada por

$$R = \mathbb{1} - i\delta\phi\vec{n}\cdot\vec{J} \tag{6.28}$$

Análogamente, podemos derivar los generadores infinitesimales anti-hermíticos K_l de los *boosts* a partir del conjunto linealmente independiente $\{L_1(\psi), L_2(\psi), L_3(\psi)\}$

$$K_l = i\left.\frac{\partial L_l}{\partial\psi}\right|_{\psi=0} \qquad l = 1,2,3 \tag{6.29}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

Un *boost* infinitesimal puro (de rapidez $\delta\psi$) a lo largo de la dirección $\vec{n}$ está dado por

$$L = \mathbb{1} - i\delta\psi\vec{u}\cdot\vec{K} \qquad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{6.31}$$

Las transformaciones finitas se obtienen de exponenciar el álgebra[2]

$$R = e^{-i\phi\vec{n}\cdot\vec{J}} \tag{6.32}$$
$$L = e^{-i\psi\vec{u}\cdot\vec{K}} \tag{6.33}$$
$$\Lambda = e^{-i(\phi\vec{n}\cdot\vec{J}+\psi\vec{u}\cdot\vec{K})} \tag{6.34}$$

El álgebra de Lie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ y dde $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ cumple las **reglas de conmutación** siguientes

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{6.35a}$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \tag{6.35b}$$
$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{6.35c}$$

Definimos el tensor antisimétrico $M_{\mu\nu}$ de componentes

$$(M_{12}, M_{23}, M_{31}) = (J_3, J_1, J_2) \longrightarrow M_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k \tag{6.36}$$
$$(M_{01}, M_{02}, M_{03}) = (K_1, K_2, K_3) \longrightarrow M_{0i} = K_i = -M_{i0} \tag{6.37}$$

de modo que los conmutadores (6.35) en forma covariante resultan

$$[M_{\lambda\rho}, M_{\mu\nu}] = -i\left(\eta_{\lambda\mu}M_{\rho\nu} + \eta_{\rho\nu}M_{\lambda\mu} - \eta_{\lambda\nu}M_{\rho\mu} - \eta_{\rho\mu}M_{\lambda\nu}\right) \tag{6.38}$$

y una transformación general de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ se puede escribir como

$$\Lambda = e^{-\frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} \tag{6.39}$$

donde $\omega^{\mu\nu}$ es una matriz real antisimétrica.

Se tienen los dos **Casimires**

$$\frac{1}{2}M^{\mu\nu}M_{\mu\nu} = \vec{J}^2 - \vec{K}^2 \tag{6.40}$$
$$\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}M_{\mu\nu}M_{\sigma\tau} = -\vec{J}\cdot\vec{K} \tag{6.41}$$

Representaciones irreducibles de $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong \mathrm{SO}(1,3)$. Al ser $\mathcal{L}_+^\uparrow$ no compacto, dichas representaciones no pueden ser unitarias. Al no ser hermíticos los generadores $\vec{K}$, las matrices Λ en general no serán unitarias.

Para clasificar las representaciones irreducibles introducimos las siguientes combinaciones de generadores

$$M_i = \frac{1}{2}\left(J_i + iK_i\right) \tag{6.42a}$$
$$N_i = \frac{1}{2}\left(J_i - iK_i\right) \tag{6.42b}$$

que son hermíticas. Cumplen las reglas de conmutación

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k \tag{6.43}$$
$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k \tag{6.44}$$
$$[M_i, N_j] = 0 \tag{6.45}$$

$\vec{M}$ y $\vec{N}$ son los generadores de dos copias de $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$ ($\mathfrak{su}(2)$ complejificado). Es decir, si denotamos por $M_\mathbb{C}$ y $N_\mathbb{C}$ la envolvente lineal compleja de $\vec{M}$ y $\vec{N}$ tenemos el isomorfismo

$$\mathfrak{so}(1,3)_\mathbb{C} = M_\mathbb{C} \oplus N_\mathbb{C} \cong \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \tag{6.46}$$

[2]Aunque formalmente $\Lambda = LR$, la Λ dada por (6.34) NO es el producto de la L dada por (6.33) por la R dada por (6.32).

Tenemos que

$$[\vec{M}^2, M_i] = 0 \tag{6.47a}$$

$$[\vec{N}^2, N_i] = 0 \tag{6.47b}$$

por lo que podemos etiquetar las representaciones irreducibles de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ con los autovalores $j(j+1)$ y $j'(j'+1)$ de los Casimir $\vec{M}^2$ y $\vec{N}^2$ respectivamente, donde $j, j' = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$

Podemos tomar los $d = (2j+1)(2j'+1)$ autoestados independientes como base del EV sobre el que actúa la representación irreducible de dimensión d de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Cada elemento $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ queda representado por una matriz $D^{(j,j')}(\Lambda)$.

Restringiéndonos al subgrupo de rotaciones SO(3), las representaciones dejan de ser irreducibles y pueden descomponerse en términos de las representaciones irreducibles de SO(3) de la forma

$$D^{\left(j,j'\right)}(R) = D^{(j)}(R) \otimes D^{\left(j'\right)}(R) = D^{\left(j+j'\right)}(R) \oplus \ldots \oplus D^{\left(|j-j'|\right)}(R) \tag{6.48}$$

Al igual que para SO(3) se tienen dos clases de representaciones irreducibles para $\mathcal{L}_+^\uparrow$: tensoriales y espinoriales, con $j + j'$ entero y semi-entero respectivamente. Las espinoriales se obtienen de su recubridor universal $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ y desde el punto de vista de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ son bivaluadas –al ser $\mathcal{L}_+^\uparrow$ doblemente conexo, sus elementos admiten dos representaciones de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Mientras que los campos tensoriales se transforman bien bajo SO(1, 3), los campos espinoriales se transforman bajo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, análogamente a los tensores y espinores de SO(3) y SU(2).

Representaciones de espín más bajo. Hay dos representaciones de dimensión 2 inequivalentes: $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ y $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$

Mientras que $\Lambda(A) = \Lambda(-A)$, A y $\bar{A}$ no dan lugar a representaciones equivalentes. Como en general las matrices $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ no son unitarias, no hay una transformación de similaridad que relacione A con $\bar{A}$. En el caso de las rotaciones, una representación y su compleja conjugada sí que son equivalentes.

Las matrices A y $\bar{A}$ constituyen, en general, dos representaciones irreducibles inequivalentes de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ que actúan en dos espacios vectoriales diferentes. Tenemos entonces dos bases no equivalentes y, generalmente, dos clases de biespinores (contravariantes): ξ y $\bar{\xi}$.

Estos biespinores se transforman de acuerdo a

$$\xi' = A\xi \qquad \text{en comps. contravariantes: } \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \xi'^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{6.49a}$$

$$\bar{\xi}' = \bar{A}\bar{\xi} \qquad \text{en comps. contravariantes: } \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad \bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} = \bar{A}\dot{\alpha}\ {}_{\dot{\beta}}\xi^{\dot{\beta}} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{6.49b}$$

En términos de componentes covariantes $\eta = (\eta_1 \quad \eta_2)\,, \bar{\eta} = (\eta_{\dot{1}} \quad \eta_{\dot{2}})$

$$\eta'_{\alpha} = \eta_{\beta}\left(A^{-1}\right)^{\beta}_{\ \alpha} \Longleftrightarrow \eta' = \eta A^{-1} \tag{6.50a}$$

$$\eta'_{\dot{\alpha}} = \eta_{\dot{\beta}}\left(\bar{A}^{-1}\right)^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} \Longleftrightarrow \bar{\eta}' = \bar{\eta} A^{\dagger} \tag{6.50b}$$

y los productos $\eta\xi$ y $\bar{\eta}\bar{\xi}$ son invariantes (escalares bajo $\mathcal{L}_+^\uparrow$).

Queremos obtener los generadores $\vec{J}$ y $\vec{K}$ para las representaciones A y $\bar{A}$. Sabemos que

$$A = e^{-\frac{i}{2}(\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma} - i\psi\vec{u}\cdot\vec{\sigma})} \tag{6.51}$$

$$A = e^{-\frac{i}{2}(-\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}^* - i\psi\vec{u}\cdot\vec{\sigma}^*)} \tag{6.52}$$

$$D = e^{-i(\phi\vec{n}\cdot\vec{J} + \psi\vec{u}\cdot\vec{K})} \tag{6.53}$$

de modo que

- Para los espinores $\xi \quad J_i = \frac{1}{2}\sigma_i,\ K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i \Longrightarrow M_i = \frac{\sigma_i}{2},\ \ N_i = 0 \rightsquigarrow j = \frac{1}{2},\ \ j' = 0 \longrightarrow D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(\Lambda)$
- Para los espinores $\bar{\xi} \quad J_i = -\frac{1}{2}\sigma_i,\ K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$. Como $\sigma_2\sigma_i^*\sigma_2 = -\sigma_i$, esta representación es equivalente a $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i,\ \ K_i = \frac{i}{2}\sigma_i \Longrightarrow M_i = 0,\ \ N_i = \frac{\sigma_i}{2} \rightsquigarrow j = 0,\ \ j' = \frac{1}{2} \longrightarrow D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$

A y $(A^t)^{-1}$ están relacionadas por una transformación de similaridad, de modo que corresponden a representaciones equivalentes:

$$\exists C \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \text{ tal que } (A^t)^{-1} = CAC^{-1} \Leftrightarrow C = A^t C A \tag{6.54}$$

En particular, para $C = i\sigma_2$ se tiene

$$\tilde{\eta}' = \tilde{A}^{-1}\tilde{\eta} = CAC^{-1}\tilde{\eta} \Longrightarrow \tilde{\eta} = C\xi \tag{6.55}$$

Representación de dimensión 4: $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$. El EV es el de los 4-vectores x^μ que se transforman de acuerdo con (6.3) o (6.12). Consideremos la cantidad $\xi\bar{\xi}$ que se transforma según

$$\xi'\xi'^\dagger = A\xi\xi^\dagger A^\dagger \tag{6.56}$$

al igual que X'.

Es decir que podemos tomar $\xi\xi^\dagger$ como la base del espacio de representación $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$. Esto es consistente con

$$D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \underbrace{D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}}_{\xi} \otimes \underbrace{D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}}_{\bar{\xi}} \tag{6.57}$$

y por tanto debe contener los dos tipos de espinores ξ y $\bar{\xi}$.

Nota 6.2. Si queremos mantener la correspondencia entre representaciones irreducibles y estados de espín bien definido para $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (al igual que para SO(3)) tenemos que introducir condiciones extra que reduzcan el número de elementos independientes de la base. En particular, una partícula de espín 1 se describe con una base de 4 dimensiones, por lo que necesitamos una condición extra para dejar solo 3 elementos independientes, llamada condición de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{6.58}$$

(para fotones).

Transformación de funciones escalares. El espacio de funciones $\psi(x)$ con $x = (x^0, x^i) = (ct, -x_i)$ proporciona una representación de los operadores X_μ, P_μ y $M_{\mu\nu}$:

$$X_\mu\psi(x) = x_\mu\psi(x) \tag{6.59}$$
$$P_\mu\psi(x) = +i\partial_\mu\psi(x) \tag{6.60}$$
$$M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu \tag{6.61}$$

donde el signo positivo en (6.60) proviene de la signatura $(+,-,-,-)$.

Para una transformación de Lorentz infinitesimal

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = -\frac{i}{2}\delta\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned}\delta\psi(x) &= \psi'(x) - \psi(x) = \psi'(x' - \delta x) - \psi(x) = -\delta x^\mu\partial_\mu\psi(x)\\ &= \frac{i}{2}\delta\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\, x^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) \equiv -\frac{i}{2}\delta\omega^{\rho\sigma}\tilde{M}_{\rho\sigma}(\psi)\end{aligned} \tag{6.63}$$

con

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i\left(\eta_\rho{}^\mu\eta_{\sigma\nu} - \eta_\sigma{}^\mu\eta_{\rho\nu}\right) \tag{6.64}$$

$$\tilde{M}_{\rho\sigma} = -i\left(\eta_\rho{}^\mu\eta_{\sigma\nu} - \eta_\sigma{}^\mu\eta_{\rho\nu}\right)x^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = -i\left(x_\sigma\frac{\partial}{\partial x^\rho} - x_\rho\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right) = X_\rho P_\sigma - X_\sigma P_\rho \tag{6.65}$$

Espinor de Weyl levógiro. Campo $\psi_L(x)$ que bajo Λ se transforma en la representación $\left(\frac{1}{2},0\right)$, es decir se transforma según

$$\psi_L(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'_L(x') = \underbrace{e^{(-i\phi\vec{n}-\psi\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}}_{\Lambda_L}\ \psi_L(x) \tag{6.66}$$

con

$$\Lambda_L = e^{(-i\phi\vec{n}-\psi\vec{u})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tag{6.67}$$

Veamos la representación de los generadores de Lorentz sobre ψ_L

$$\begin{aligned}\delta\psi_L(x) &= \psi'_L(x) - \psi_L(x) = \psi'_L(x'-\delta x) - \psi_L(x) = \\ &= \underbrace{\psi'_L(x')}_{\Lambda_L\psi_L(x)} - \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) - \psi_L(x) = (\Lambda_L - \Lambda)\psi_L(x) - \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x)\end{aligned} \tag{6.68}$$

Escribiendo Λ_L de la forma

$$\Lambda_L = e^{-\frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\tilde{S}_{\mu\nu}} = 1 - \frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\tilde{S}_{\mu\nu} \tag{6.69}$$

se tiene

$$\delta\psi_L = -\frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\tilde{J}_{\mu\nu}\psi_L \tag{6.70}$$

con $\tilde{J}_{\mu\nu}$ el momento angular total:

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \tilde{M}_{\mu\nu} + \tilde{S}_{\mu\nu} \tag{6.71}$$

donde $\tilde{M}_{\mu\nu}$ aparece siempre y $\tilde{S}_{\mu\nu}$ depende de la representación.

Comparando las dos expresiones para Λ_L, (6.67) y (6.69), deducimos

$$S_i = \frac{1}{2}\epsilon_i{}^{jk}S_{jk} = \frac{\sigma_i}{2} \tag{6.72a}$$

$$S_{0i} = -i\frac{\sigma_i}{2} \tag{6.72b}$$

de modo que $j = \frac{1}{2}$ y $j' = 0$. Los espinores de Weyl se transforman en la representación $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$.

Análogamente, los espinores de Dirac se transforman en la representación $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.