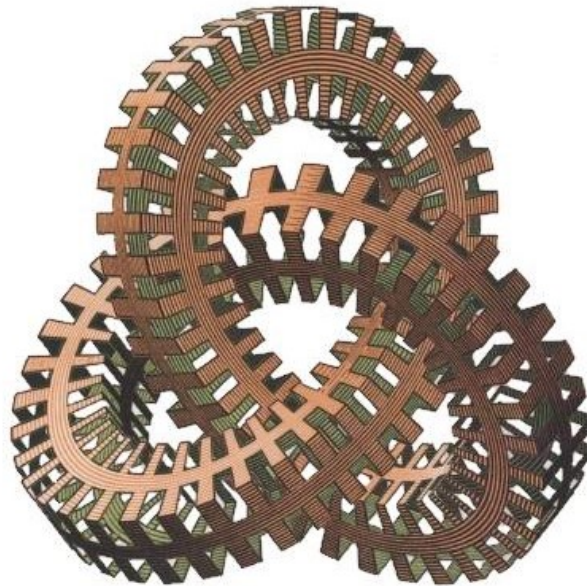


# De Klassieke Veldentheorie

OVER DE RELATIE TUSSEN FUNDAMENTELE KRACHTEN EN  
NATUURKUNDIGE THEORIEËN



*Door:*  
Sander Worm



# De Klassieke Veldentheorie

OVER DE RELATIE TUSSEN FUNDAMENTELE KRACHTEN EN  
NATUURKUNDIGE THEORIEËN



*Profiel:*

Natuur en techniek

*Begeleider:*

Sijtje Kooijstra

*Vakken:*

Natuurkunde en Wiskunde

*Door:*

Sander Worm



**Bertrand  
Russell college**  
openbare school voor havo en atheneum

Bertrand Russell college  
Krommenie

24 februari 2023



“The most beautiful experience we can have is the mysterious.  
It is the fundamental emotion that stands at the cradle of  
true art and true science.”

- Albert Einstein



# Dankwoord

Het zou niet mogelijk geweest zijn om dit profielwerkstuk tot dit bijzondere eindresultaat te ontwikkelen zonder de hulp van mijn begeleider, Sijte Kooijstra. Zijn enthousiaste en waardevolle opmerkingen over mijn profielwerkstuk hebben mij enorm geholpen. Daarnaast wil ik mijn begeleider bedanken voor zijn bereidheid om mij te ondersteunen bij mijn profielwerkstuk in verband met de verlate start van het traject.

Bovendien wil ik Ivar Mekel hartelijk bedanken voor de waardevolle feedback op inhoudelijk gebied. Ivar is een eerstejaarsstudent van de dubbele bachelor natuur- en wiskunde aan de universiteit van Leiden.

*Hartelijk bedankt!*





# Inhoudsopgave

<b>Introductie</b>	<b>12</b>
<b>1 Basisprincipes</b>	<b>17</b>
1.1 Complexe getallen . . . . .	17
1.1.1 Definitie . . . . .	17
1.1.2 Een tweedimensionaal getal . . . . .	18
1.1.3 Operatoren in het complexe vlak . . . . .	18
1.2 Maclaurin reeksen en Euler's identiteit . . . . .	19
1.3 Vectorvelden . . . . .	20
1.3.1 Partiële afgeleiden . . . . .	20
1.3.2 Vectorcalculus . . . . .	20
1.3.3 Gradient, divergentie en rotatie . . . . .	21
1.4 Lagrangiaanse- en hamiltoniaanse mechanica . . . . .	23
1.4.1 De newtoniaanse bewegingsvergelijkingen . . . . .	23
1.4.2 Het principe van minste actie . . . . .	23
1.4.3 De lagrangiaan . . . . .	24
1.4.4 Verandering van coördinaten en de hamiltoniaan . . . . .	25
1.5 Conclusie . . . . .	26
<b>2 De speciale relativiteitsleer</b>	<b>27</b>
2.1 De Lorentz-transformaties . . . . .	27
2.1.1 Coördinatenstelsels . . . . .	27
2.1.2 Bewegende referentiekaders . . . . .	28
2.1.3 De algemene Lorentz-transformaties . . . . .	29
2.1.4 Einstein's postulaten . . . . .	30
2.1.5 Tijdrek en lengtekrimp . . . . .	30
2.2 Eigentijd en ruimtetijdintervallen . . . . .	31
2.2.1 Invariantie en eigentijd . . . . .	31
2.2.2 Ruimtetijdintervallen . . . . .	32

2.2.3	Lichtkegels . . . . .	32
2.3	Viervectoren . . . . .	33
2.3.1	Verandering van notatie . . . . .	33
2.3.2	Viersnelheden . . . . .	33
2.4	Relativistische bewegingsvergelijkingen . . . . .	34
2.4.1	Actie . . . . .	34
2.4.2	Relativistische lagrangiaan . . . . .	35
2.5	Energie van een systeem . . . . .	35
2.5.1	Impuls . . . . .	35
2.5.2	Relativistische hamiltoniaan . . . . .	36
2.5.3	Energie-impuls relatie . . . . .	36
2.6	Conclusie . . . . .	37
<b>3</b>	<b>De klassieke veldentheorie</b>	<b>39</b>
3.1	Notatie . . . . .	39
3.1.1	Covariant en contravariant . . . . .	39
3.1.2	Afgeleiden . . . . .	40
3.1.3	D'Alembertiaan . . . . .	41
3.2	Transformaties van velden . . . . .	41
3.2.1	Scalaire velden . . . . .	41
3.2.2	Vectoren in ruimtetijd . . . . .	42
3.2.3	Invariant van een vectorveld . . . . .	43
3.3	Tensorvelden . . . . .	43
3.3.1	Tensoren . . . . .	43
3.3.2	Lorentz-invariantie van tensoren . . . . .	43
3.3.3	Symmetrische tensoren . . . . .	44
3.4	Bewegingsvergelijkingen binnen een veld . . . . .	45
3.4.1	Lokaliteit . . . . .	45
3.4.2	Lagrangiaan-dichtheid . . . . .	45
3.4.3	De algemene veldlagrangiaan . . . . .	46
3.4.4	Beschrijving van een deeltje . . . . .	47
3.5	IJkinvariantie . . . . .	47
3.5.1	Vectorpotentiaal . . . . .	47
3.5.2	IJktransformaties . . . . .	48
3.6	Conclusie . . . . .	49

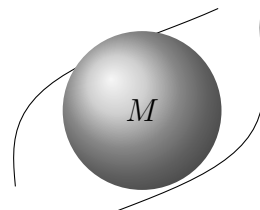
<b>4</b>	<b>Fundamentele krachten</b>	<b>51</b>
4.1	De elektromagnetische veldtensor . . . . .	51
4.1.1	Lorentzkracht . . . . .	51
4.1.2	Structuur van de veldtensor . . . . .	53
4.2	Afleiding van de Maxwell vergelijkingen . . . . .	53
4.2.1	Vierstroom . . . . .	53
4.2.2	Voorwaarden van een elektromagnetisch veld . . . . .	54
4.2.3	Maxwell vergelijkingen in viervectorvorm . . . . .	55
4.2.4	Maxwell vergelijkingen in drievectorvorm . . . . .	56
4.3	Wetten van elektromagnetisme . . . . .	57
4.3.1	Stelling van Gauss . . . . .	57
4.3.2	Een voorbeeld: de wet van Coulomb . . . . .	58
4.4	Relativistische gravitatie . . . . .	58
4.4.1	Newtoniaanse gravitatie . . . . .	59
4.4.2	Voorwaarden van een relativistisch gravitatieveld . . . . .	59
4.4.3	De bewegingsvergelijkingen . . . . .	60
4.5	Supplement: De algemene relativiteitstheorie . . . . .	61
4.5.1	Introductie . . . . .	61
4.5.2	Verandering van tensoren . . . . .	61
4.5.3	De geodeet . . . . .	62
4.5.4	Het equivalentieprincipe . . . . .	62
4.5.5	De veldvergelijkingen . . . . .	62
4.6	Conclusie . . . . .	63
	<b>Conclusie</b>	<b>64</b>
	<b>Bijlage A Evaluatie</b>	<b>67</b>
	<b>Bijlage B Logboek</b>	<b>69</b>
	<b>Bijlage C Overige verwijzingen</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliografie</b>	<b>78</b>



# Introductie

Een theorie die alles in ons universum beschrijft, dat is hetgeen waar theoretisch natuurkundigen naar streven. We zoeken een theorie die de vier fundamentele krachten van de natuur beschrijft: de sterke kernkracht, de zwakke kernkracht, de elektromagnetische kracht en de zwaartekracht.[1]

Theorieën die in de buurt komen van dit ideaal zijn onder andere: quantum electrodynamica, quantum chromodynamica en het standaardmodel. De basis voor deze theorieën zijn de algemene relativiteitstheorie, quantummechanica en een veldentheorie, zoals de klassieke veldentheorie. Algemene relativiteit is de studie van de kromming van ruimtetijd. Een voorbeeld hiervan is de manier waarop massa's invloed hebben op de baan van een lichtstraal (zie figuur 1). Een eigenaardig geval van deze theorie is de speciale relativiteitsleer. Hierbij wordt het concept van ruimtetijd en het gedrag van licht beschreven aan de hand van observaties vanuit verschillende perspectieven. Quantummechanica richt zich juist op het gedrag van atomen en sub-atomaire deeltjes. De eigenschappen van deze deeltjes liggen niet altijd voor de hand. Zo kunnen deeltjes zich op meerdere plekken tegelijkertijd bevinden, totdat iemand één van deze deeltjes waarneemt. Als laatste kunnen door het concept van velden eigenschappen toekennen aan deeltjes gebaseerd op hun positie in ruimtetijd. Hierdoor hoeven deeltjes niet individueel beschreven te worden, maar is er sprake van een emergente eigenschap als gevolg van het veld waar het deeltje zich in bevindt. Op dezelfde manier kan de elektrische energie van een lading in een elektrisch veld beschreven worden, dit is dan een eigenschap van het deeltje als gevolg van het veld. Bovendien kunnen symmetriën wiskundig gezien gemakkelijker verwerkt worden in een veldtheorie dan in andere theorieën. Deze symmetriën stellen een bepaalde fysische grootheid voor. Om deze reden zijn veldtheorieën fundamenteel voor geavanceerde formalismen binnen de natuurkunde.[2]



Figuur 1: De buiging van lichtstralen

Om vergelijkingen van een veld op te stellen, worden eerst keuzes gemaakt over het gedrag van het veld. Een veldentheorie kan bijvoorbeeld relativistisch of niet-relativistisch zijn. Relativistische veldentheorieën stemmen overeen met de speciale relativiteitsleer. Een verschil tussen een klassieke (niet-quantummechanische) veldentheorie en een quantumtheorie is dat een quantumtheorie ook rekening houdt met quantumgedrag. Hierdoor geven quantumtheorieën een betere benadering van de werkelijkheid. Quantumveldentheorie ontstaat door het toepassen van quantummechanica op de klassieke veldentheorie. Hiervoor is de klassieke veldentheorie dus cruciaal.

Doordat men het concept van een veldentheorie bijna overal ziet voorkomen, lijkt dit concept een fundamentele waarheid over het universum te bevatten. De interactie tussen deeltjes en velden zou misschien wel de grondslag van ons prachtige universum kunnen zijn. Daarom zullen we de eigenschappen van een veldentheorie onderzoeken en zullen we uiteindelijk bekijken welke fundamentele krachten ze kan omschrijven. Daartoe richten we ons op de klassieke veldentheorie, vanwege haar relatie met speciale relativiteit en haar fundamentele structuur, die als grondslag functioneert voor de quantumveldentheorie. We zullen proberen om antwoord te geven op de volgende vraag: *Hoe steekt de klassieke veldentheorie in elkaar en welke fundamentele krachten kan deze theorie beschrijven?*

Daartoe bekijken we in Hoofdstuk 1 de basisprincipes binnen de natuur- en wiskunde, die we nodig hebben om concepten binnen de klassieke veldentheorie te kunnen begrijpen. Principes zoals partiële afgeleiden, complexe getallen en klassieke mechanica vormen de grondslag voor de beschrijving van een veld. In Hoofdstuk 2 zullen we de speciale relativiteitsleer behandelen. Hierdoor kunnen we uiteindelijk relativistische velden definiëren. Vervolgens leiden we in Hoofdstuk 3 de eigenschappen van klassieke velden af. We sluiten het onderwerp af door te kijken welke fundamentele krachten we met deze theorie kunnen beschrijven, en bovenal hoe de afleiding daarvan in elkaar steekt.

**Hoofdvraag:** *Hoe steekt de klassieke veldentheorie in elkaar en welke fundamentele krachten kan deze theorie beschrijven?*

**Deelvragen:**

1. *Wat houdt de lagrangiaanse- en hamiltoniaanse mechanica in, en welke wiskundige principes hebben we nodig om een veld te beschrijven?*
2. *Hoe steekt de speciale relativiteitsleer in elkaar en welke gevolgen heeft dit?*

3. *Op welke manier kunnen we velden definiëren en wat voor relatie hebben deze met speciale relativiteit?*

4. *Welke fundamentele krachten kan de klassieke veldentheorie beschrijven?*

**Hypothese:** De klassieke veldentheorie omschrijft een functie van ruimte en tijd. Ook wordt de conditie van een veld weergegeven door een eindig aantal getallen. Uit deze basisvoorwaarden van een veld komen de eigenschappen van deeltjes naar voren. Bovendien mag een veld, ofwel de emergente eigenschap van deeltjes, niet verstoord worden als deze eigenschap wordt waargenomen. Dit impliceert anders namelijk dat de theorie rekening houdt met quantumgedrag, wat niet het geval is. Het blijkt dat functies binnen een veld golven bijzonder goed kunnen benaderen. Hierdoor is het mogelijk om trillingen binnen elektromagnetische velden wiskundig te formuleren. Om deze reden bevat de klassieke veldentheorie een beschrijving van de elektromagnetische kracht.[3] Door de relatie tussen Einstein's relativiteitstheorie en klassieke velden is het ook mogelijk om een relativistisch veld te omschrijven, waardoor de zwaartekracht in de klassieke veldentheorie geïntegreerd wordt. De klassieke veldentheorie is dus een formalisme waarin de elektromagnetische kracht en de zwaartekracht beschreven kunnen worden.[4]

We zullen de vier deelvragen beantwoorden door vergelijkingen af te leiden en bepaalde stellingen te bewijzen. Dit doen we aan de hand van wiskundige- en natuurkundige literatuur. In Hoofdstuk 1 zal de nadruk meer liggen op de wiskundige formaliteiten, zodat er een fundamentele basis gelegd wordt voor principes die we zullen gebruiken om natuurkundige wetten af te leiden. Uiteindelijk zullen we de laatste deelvraag beantwoorden door de antwoorden op de eerste drie deelvragen te combineren en een bindende afleiding te geven voor de fundamentele krachten.

Het zal een bijzondere reis worden door de wonderbaarlijke gebieden van de natuurkunde, waarbij ook aandacht wordt geschonken aan de wiskundige formaliteiten. Op sommige momenten zal de wiskunde niet altijd voor de hand liggen en enige moeilijkheden kunnen veroorzaken, maar hopelijk zal dit de lezer ook motiveren om door te zetten. Ik zal de klassieke veldentheorie zo duidelijk mogelijk proberen te beschrijven, zodat dit werk toegankelijker wordt en meer mensen dit prachtige gedeelte van de natuurkunde kunnen bewonderen.

*Veel leesplezier!*





# Hoofdstuk 1

## Basisprincipes

De wiskunde en natuurkunde zijn domeinen van logica en beredenering. Toch betekent dit niet dat men alle aspecten van deze vakgebieden kan begrijpen zonder achtergrondinformatie. Om verschillende gebieden van de natuur- en wiskunde te begrijpen zijn een aantal basisprincipes nodig, deze komen voort uit een grondige beredenering. In dit hoofdstuk zullen we deze principes uiteenzetten. We zullen onder anderen tweedimensionale getallen bekijken, vectorvelden bestuderen en de klassieke mechanica op een bijzondere manier benaderen.

### 1.1 Complexe getallen

#### 1.1.1 Definitie

Het is bekend dat, bij het vinden van, bijvoorbeeld, nulpunten van kwadratische vergelijkingen, men een wortel van een negatief getal tegen kan komen.

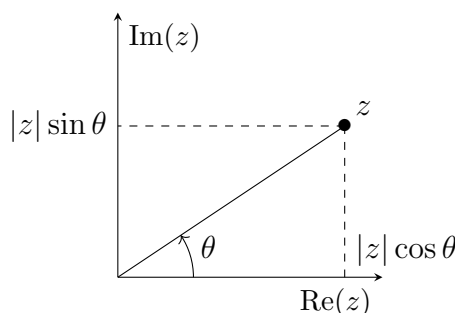
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.1)$$

In het geval dat  $b^2 < 4ac$  is er voor de kwadratische vergelijking dus geen reële oplossing. We kunnen deze nulpunten met  $A = -\frac{b}{2a}$  en  $B = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$  als volgt omschrijven:  $A \pm B\sqrt{-1}$ . Hierbij geldt  $A, B \in \mathbb{R}$ . Hierdoor krijgen we te maken met de wortel van  $-1$ . Vanaf nu zullen we dit schrijven als  $i^2 = -1$  en noemen we een getal van de vorm  $di$ , met  $d \in \mathbb{R}$ , een 'imaginair' of denkbeeldig getal. Nu merken we direct op dat de wortels van de kwadratische vergelijking een reële component  $A$  en een imaginaire component  $Bi$  hebben.

**Definitie 1.1.1.** *We noemen  $z$  een complex getal als  $z$  een reële en een imaginaire component heeft, zodat  $z = a + bi$  met  $a = \operatorname{Re}(z)$  en  $b = \operatorname{Im}(z)$ .*

### 1.1.2 Een tweedimensionaal getal

Naar aanleiding van de vorm van complexe getallen, merken we op dat we te maken hebben met tweedimensionale getallen. De reële getallenlijn heeft één dimensie. Daarentegen, complexe getallen hebben één reële component en één imaginaire component. Deze getallen hebben dus twee dimensies. Met deze twee componenten kunnen we een tweedimensionale vectorvoorstelling van een complex getal weergeven. Op deze manier kunnen we het complexe vlak associëren met een tweedimensionaal assenstelsel  $\mathbb{R}^2$ .



Figuur 1.1: Complexe getallen

**Definitie 1.1.2.** De afstand  $r$  van het complexe getal tot de oorsprong, wordt weergegeven door de modulus van  $z$ , gegeven door  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ .

Merk op dat we  $z$  dan kunnen weergeven met  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Hierbij is  $|z| \cos \theta$  de reële component en  $|z| \sin \theta$  de imaginaire component van het complexe getal. In de volgende paragraaf zullen we dit herschrijven tot complexe e-machten, zodat we complexe getallen kunnen gebruiken voor het oplossen van golf functies.[5]

### 1.1.3 Operatoren in het complexe vlak

Voor de volledigheid zullen we het optellen en vermenigvuldigen van complexe getallen behandelen, zodat de lezer weet hoe men met deze getallen rekt. De bewerking van getallen of functies, zoals vermenigvuldiging, wordt doorgaans een operator genoemd. Door twee complexe getallen,  $z_1$  en  $z_2$  op te tellen, worden het imaginaire en het reële gedeelte opgeteld volgens  $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ . Hierdoor ondervindt  $z_1$  een translatie van  $a_2$  op de reële as en een translatie van  $b_2i$  op de imaginaire as. Door  $z_1$  met  $z_2$  te vermenigvuldigen krijgen we  $z_3 = z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i - b_1b_2$ . Als gevolg is de hoek van  $z_3$  gelijk aan de som van de hoeken van  $z_1$  en  $z_2$ . Ook is de modulus van  $z_3$  het product van de  $|z_1|$  en  $|z_2|$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Het ligt buiten het bereik van het werkstuk om dit uitgebreid te bewijzen.

## 1.2 Maclaurin reeksen en Euler's identiteit

Om complexe getallen uit te drukken in complexe e-machten, kunnen we de sinus en cosinus functies opdelen in oneindig veel termen volgens een Maclaurinreeks. Bij een eindig aantal termen geeft de reeks een benadering van de Maclaurinreeks en dus van de eigenlijke functie.

**Definitie 1.2.1.** *Een Maclaurinreeks geeft een uitdrukking van een continue functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in een som van oneindig veel termen.<sup>2</sup> Deze reeks evalueren we op het punt  $a = 0$ .*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \quad (1.2)$$

Voor de Maclaurin reeks van de sinus krijgen we het volgende. Merk hierbij op dat standaard sinusoiden een periode van  $2\pi$  hebben en dat er geldt  $f(0) = f'''(0)$ . Daardoor zijn ook alle termen van de reeks met een even macht gelijk aan 0.

$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1 \quad (1.3)$$

$$\sin(x) = 0 + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!} \cdot -1 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (1.4)$$

Als we dit proces herhalen voor de cosinus functie en voor de functie  $e^x$  krijgen we het volgende resultaat.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1.5)$$

Zodra we dit gebruiken voor het herschrijven van een complex getal krijgen we een bijzondere identiteit. Hierbij vervangen we  $x$  door  $\theta$  en vermenigvuldigen we de Maclaurin reeks van  $\sin \theta$  met  $i$ , zodat we ons houden aan de oorspronkelijke uitdrukking van  $z$ .

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots\right) + \left(\theta i - \frac{i\theta^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots = e^{i\theta} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Deze relatie wordt Euler's identiteit genoemd. Op deze manier kunnen we een complex getal herschrijven als  $z = |z|e^{i\theta}$ . In hoofdstuk 3 zullen we dit gebruiken om oplossingen te vinden voor vergelijkingen van golven.[6]

---

<sup>2</sup>De functie neemt complexe getallen uit het complexe domein en beeldt deze af op het complexe vlak.

## 1.3 Vectorvelden

### 1.3.1 Partiële afgeleiden

De meeste mensen zijn bekend met het concept van een afgeleide. Het wordt gedefinieerd als de mate van verandering in elk punt van een functie  $f(x)$ , met een enkele variabele  $x$ . Hierbij is  $h$  een erg kleine verandering van de  $x$  waarde.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.7)$$

Er is hier sprake van een functie met één variabele, maar als we een multivariabele functie hebben dan kunnen we meerdere afgeleiden nemen tot de verschillende variabelen. Dit is een zogenoemde partiële afgeleide. Hierbij is  $i$  de index van een willekeurige variabele.

**Definitie 1.3.1.** *Gegeven is een continue multivariabele functie  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Dan bestaat er een partiële afgeleide  $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$  voor elke variabele  $x_i$ .*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \partial_x f = f_x \quad (1.8)$$

Natuurlijk kan er ook sprake zijn van een hogere orde partiële afgeleide. Hierbij moeten we wel uitkijken als we tot meerdere variabelen differentiëren. Zo krijgen we voor een tweede orde partiële afgeleide, bijvoorbeeld voor een functie  $\phi(x, t)$ , de volgende vergelijking. Hierbij maakt de volgorde van de partiële afgeleiden niet uit.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \phi_{xt} = \phi_{tx} = \partial_{xt} \phi \quad (1.9)$$

### 1.3.2 Vectorcalculus

Om vectorvelden weer te kunnen geven, zullen we eerst de definitie van vectoren bekijken. We zullen dit opvolgen met de studie van verandering binnen vectorvelden. Voor het gemak zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot driedimensionale vectoren en vectorvelden.

**Definitie 1.3.2.** *Een vector is een functie van een scalaire variabele  $u$ . De vector heeft een richting die wordt aangegeven door eenheidsvectoren  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$  en  $\hat{\mathbf{k}}$  in de richting van respectievelijk  $x, y$  en  $z$ .<sup>3</sup>*

---

<sup>3</sup>Dit is de natuurkundige definitie van een vector. In ons geval is dit handiger om te gebruiken dan de wiskundige definitie.

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}(u) = x(u)\hat{\mathbf{i}} + y(u)\hat{\mathbf{j}} + z(u)\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Hierbij zijn  $x(u)$ ,  $y(u)$  en  $z(u)$  ook functies van een scalaire variabele, ofwel een variabele zonder richting. Als we bewerkingen willen toepassen op vectoren verloopt dit voor elke richting van de eenheidsvectoren hetzelfde als bij scalaire functies, omdat elke eenheidsvector vermenigvuldigd wordt met een scalaire functie, zie vergelijking (1.10). Voor de afgeleide van  $\hat{\mathbf{r}}(u)$  krijgen we dan:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{du} = \frac{dx(u)}{du}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(u)}{du}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz(u)}{du}\hat{\mathbf{k}} \quad (1.11)$$

Een voorbeeld hiervan is de snelheid van een deeltje binnen een driedimensionale ruimte. Deze snelheid kan dan weergegeven worden met de afgeleide van de afstandsvector  $\vec{r}(t)$ . Hierbij worden de coördinaten met een subscript notatie aangegeven.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

### 1.3.3 Gradient, divergentie en rotatie

We zullen nu het geval bekijken waarbij een scalair getal of een vector niet gedefinieerd is op een punt, maar als een continue veld. Hierbij heeft elke coördinaat in het veld dus een bijbehorende vector. Bepaalde differentiaal operatoren voor velden zullen erg handig zijn bij het beschrijven van de klassieke veldentheorie. Dit zijn operatoren die worden opgesteld uit afgeleiden. Hierbij staat de operator  $\nabla$ , *del* of *nabla*, centraal. Deze operator is gelijkwaardig aan de partiële afgeleiden tot alle richtingen van de eenheidsvectoren.

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \quad (1.13)$$

Bij een scalair veld wordt elk punt in een veld gekenmerkt door een getal, niet door een vector zoals bij een vectorveld. Zo is een temperatuurverdeling in een ruimte een scalair veld en de snelheid van een vloeistof een vectorveld. Een vectorveld kan gedefinieerd worden als de gradient van een scalair veld  $\phi$ . Door middel van de gradient kunnen

we een scalair veld dus omzetten naar een vectorveld.

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.14)$$

Als we dan een bepaald vectorveld  $\hat{\mathbf{a}}$  hebben, kunnen we dit omzetten naar een scalair veld.<sup>4</sup> Hiervoor gebruiken we de divergentie, ofwel het inproduct van del en een vectorveld. De divergentie is de mate waarin een vectorveld uiteenloopt of samenkomt in een bepaald punt in het veld. In figuur (1.2) is de divergentie bijvoorbeeld gelijk aan 0, er zijn geen vectoren naar de oorsprong toegericht (negatieve divergentie) of vectoren die van de oorsprong af wijzen (positieve divergentie).

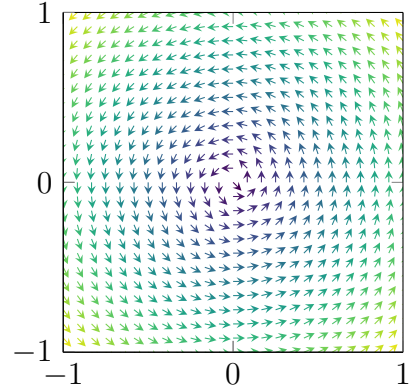
$$\text{div}(\hat{\mathbf{a}}) = \nabla \cdot \hat{\mathbf{a}} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.15)$$

Een willekeurig vectorveld  $\hat{\mathbf{b}}$ , dat afgeleid kan worden door middel van de gradient van een scalair veld  $\phi$ , voldoet aan het volgende principe:  $\hat{\mathbf{b}} = \nabla\phi$ . De divergentie van  $\hat{\mathbf{b}}$  kunnen we dan vereenvoudigd noteren met de vector laplaciaan  $\nabla^2$  volgens  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{b}} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$ . De laplaciaan kan gezien worden als de gemiddelde verandering van een veld. Deze operator is dus niet gelijk aan het originele scalaire veld. Als gevolg hiervan is de vector laplaciaan gelijkwaardig aan de tweede orde partiële afgeleide van een scalair veld tot alle richtingen van de eenheidsvectoren.

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.16)$$

Als laatste introduceren we de rotatie, ofwel het uitproduct van del en een bepaald vectorveld  $\hat{\mathbf{a}}$ . De rotatie van het veld is een mate voor de draaiing van het veld om een bepaald punt in dat veld. Hierbij correspondeert een positieve rotatie met een draaiing tegen de klok in en een negatieve rotatie met een draaiing met de klok mee, zie figuur (1.2).<sup>[6][7]</sup>

$$\text{rot}(\hat{\mathbf{a}}) = \nabla \times \hat{\mathbf{a}} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (1.17)$$



Figuur 1.2: Een tweedimensionaal vectorveld met positieve rotatie

<sup>4</sup>Dit impliceert niet dat de divergentie de gradient invertteert.

## 1.4 Lagrangiaanse- en hamiltoniaanse mechanica

De essentie van klassieke mechanica, ofwel de studie van beweging en kracht, is om objecten te beschrijven door middel van bewegingsvergelijkingen. De meest bekende methode om bewegingsvergelijkingen op te stellen is de newtoniaanse mechanica. In veel gevallen is het echter handiger om een manier te hebben om met een klein aantal stappen al de bewegingsvergelijkingen van een systeem op te stellen. Twee methoden zijn het opschrijven van de lagrangiaan en de hamiltoniaan. In deze paragraaf bekijken we de definities hiervan.

### 1.4.1 De newtoniaanse bewegingsvergelijkingen

In de newtoniaanse mechanica worden bewegingsvergelijkingen gevonden door middel van de tweede wet van Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , en een relatie tussen de kracht en de potentiële energie  $U$  van het systeem.<sup>5</sup> Als we de definitie van arbeid gebruiken krijgen we de zojuist genoemde relatie:

$$U(x + \Delta x) - U(x) = \Delta U(x, x + \Delta x) = -W(x, x + \Delta x) = - \int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \quad (1.18)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( - \int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \right) = -F(x) dx = dU(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (1.19)$$

Als we deze definitie van  $F(x)$  gelijkstellen aan  $F = ma$  krijgen we de newtoniaanse bewegingsvergelijking. Hierbij stelt  $\ddot{x}$  de tweede afgeleide van  $x$  tot tijd voor, ofwel de versnelling  $a$ .

$$F(x) = m\ddot{x} = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (1.20)$$

Uit ervaring blijkt dat deze methode voor ingewikkelde systemen erg inefficiënt en traag is. Daarom zullen we voortaan de lagrangiaan en hamiltoniaan gebruiken.<sup>6</sup> [8]

### 1.4.2 Het principe van minste actie

Uit een algemeen principe volgen de vergelijkingen van de lagrangiaan en de hamiltoniaan. Dit principe heet Hamilton's principe. Het beschrijft de beweging in systemen voor krachten die af te leiden zijn uit een algemene functie voor het potentiaal (de potentiële energie). Als dit potentiaal alleen een functie is van positiecoördinaten dan

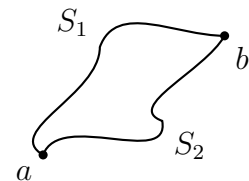
---

<sup>5</sup>In dit werkstuk noteren we  $K$  voor de kinetische energie en  $U$  voor de potentiële energie.

<sup>6</sup>We zullen niet expliciet een voorbeeld hiervoor zoeken, maar we zien later in hoe handig dit is bij het opstellen van een veld.

is de arbeid conservatief.<sup>7</sup> We hebben al gezien dat dit klopt voor de newtoniaanse relatie tussen de kracht en het potentiaal.

Hamilton's principe vertelt ons dat er een functie is, waarvoor het verschil tussen de kinetische en potentiële energie een extreme waarde aanneemt voor de eigenlijke verplaatsing van het lichaam. Deze functie wordt de *actie*,  $S$ , genoemd. De actie is de som van oneindig kleine stukjes over een pad dat een systeem aflegt, dit geven we aan met een integraal. Hieruit volgt een ander principe, namelijk, het principe van minste actie. Het houdt in dat als een systeem zich beweegt, van punt  $a$  op tijdstip  $t_1$  naar punt  $b$  op tijdstip  $t_2$ , het systeem het pad kiest waarbij de actie minimaal is (zie figuur 1.3). Dit is een van de meest fundamentele stellingen binnen de natuurkunde. Aan de hand hiervan kunnen bijvoorbeeld efficiënt bewegingsvergelijkingen van systemen opgesteld worden.



Figuur 1.3: Verschillende paden voor een systeem

### 1.4.3 De lagrangiaan

Uit de definitie van de actie volgt de lagrangiaan. De lagrangiaan is namelijk de functie waarover men integreert om de waarde van de actie te krijgen. Een voorwaarde hiervoor is dat we het systeem beschrijven met algemene coördinaten. Als het lichaam zich binnen een conservatief krachtveld beweegt, kunnen we de kinetische energie en de potentiële energie definiëren als functies van respectievelijk  $\dot{x}_i$  en  $x_i$ , zodat  $K = K(\dot{x}_i)$  en  $U = U(x_i)$ . Hierbij is  $\dot{x}_i$  de eerste afgeleide van  $x_i$  tot tijd. Het verschil tussen  $K(\dot{x}_i)$  en  $U(x_i)$  is de lagrangiaan  $L = K(\dot{x}_i) - U(x_i) = L(x_i, \dot{x}_i)$  en zoals we al eerder zagen, moet deze een extreme waarde aannemen om de actie minimaal te maken. Merk op dat  $i = 1, 2, 3$ , zodat  $x_i$  een willekeurige ruimtelijke coördinaat weergeeft, zoals  $x$  of  $y$ .

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt \quad (1.21)$$

Als we dit principe verder uit zouden werken, komen we uiteindelijk uit op de volgende voorwaarde voor een bewegingsvergelijking. Namelijk, de Euler-Lagrange vergelijking. Door  $L$  in te vullen, krijgen we direct een vergelijking voor de beweging van een

---

<sup>7</sup>Bij de verplaatsing in een conservatief krachtveld is de arbeid onafhankelijk van het gekozen pad.



systeem.<sup>8</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

We controleren dit door de lagrangiaan in te vullen in de Euler-Lagrange vergelijking. Hierbij is  $K(\dot{x}_i) = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$  en  $U = U(x_i)$  waarbij  $x_i$  een willekeurige richting is ( $x, y$  of  $z$ ).<sup>9</sup> Merk hierbij op dat  $U(x_i)$  alleen een functie is van  $x_i$ ;  $U(x_i)$  wordt dus als een constante behandeld bij (1.23). Hetzelfde geldt voor  $K(\dot{x}_i)$  en variabele  $\dot{x}_i$  bij (1.24).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m\ddot{x}_i \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -U'(x_i) \quad (1.24)$$

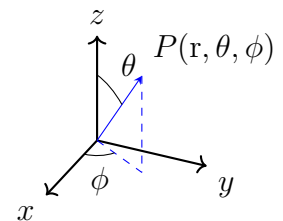
Dus voor de Euler-Lagrange vergelijking krijgen we dan:

$$m\ddot{x}_i = -U'(x_i) \quad (1.25)$$

Dit is precies de bewegingsvergelijking die we in paragraaf 1.4.1 hebben gevonden. Nu lijkt het gebruik van de lagrangiaan nog erg omslachtig, maar later in het verslag zullen we zien dat deze methode in veel gevallen eenvoudiger is dan de newtoniaanse manier.[9][10]

#### 1.4.4 Verandering van coördinaten en de hamiltoniaan

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot de cartesische coördinaten, ofwel  $x, y, z$ , maar we kunnen ook met systemen te maken krijgen waarbij het handiger is om gegeneraliseerde coördinaten te gebruiken. Zo is het bijvoorbeeld gebruikelijk om bolcoördinaten toe te passen om punten op een oppervlak van een bol te beschrijven (zie figuur 1.4). We kunnen dus een coördinatenstelsel opstellen, waarbij we ons niet alleen beperken tot de tijd en de cartesische coördinaten. Dit stelsel heeft variabele  $q_j$  en is een functie van  $x_i$  en  $t$ . Hierbij bevat  $x_i$  niet alleen de cartesische coördinaten, maar ook meer ingewikkelde mogelijkheden, zoals pool- of bolcoördinaten. Met het subscript  $i$  geven we aan dat de ruimtelijke coördinaten willekeurig zijn.



Figuur 1.4:  
Bolcoördinaten

$$x_i : (x_1, x_2, x_3, \dots) = (x, y, z, r, \theta, \phi, \dots) \quad (1.26)$$

<sup>8</sup>De afleiding van de Euler-Lagrange vergelijking is op dit moment niet nodig, omdat we alleen naar de voorwaarden voor de lagrangiaanse mechanica kijken.

<sup>9</sup>De notatie van  $U$  komt voort uit de voorwaarde van Hamilton's principe.

$$q_j = q_j(x_i; t) \quad (1.27)$$

Dit kunnen we ook omdraaien, zodat  $x_i$  een functie van  $q_j$  en  $t$  wordt  $x_i = x_i(q_j; t)$ . Vervolgens kunnen we deze coördinaten gebruiken om de hamiltoniaan weer te geven. Doorgaans kan het hamiltoniaanse formalisme de totale energie van een systeem geven. In bepaalde gevallen kan de hamiltoniaan niet alleen worden omschreven door de som van de kinetische en potentiële energie, omdat dit dan alleen een functie zou zijn van cartesische ruimtecoördinaten en tijd. Bovendien blijft de hamiltoniaan in elk gesloten systeem behouden, net zoals de totale energie. De hamiltoniaan wordt in het algemeen beschreven als de som van het product van de gegeneraliseerde impuls  $p_j$  en de afgeleide tot de tijd van een algemene coördinaat.<sup>10</sup> Hiervan wordt de lagrangiaan afgehaald. Doorgaans kan dit dus vereenvoudigd worden tot  $H = K + U$ . [11]

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.28)$$

## 1.5 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we gezien wat Maclaurinreeksen precies inhouden: het zijn reeksen die functies kunnen beschrijven met een som van een oneindig aantal termen. Door de reeksen van de sinus, cosinus en een exponentiële functie op een specifiek punt te evalueren, waren we uiteindelijk in staat om complexe getallen te herschrijven tot e-machten. Ook hebben we de definitie van partiële afgeleiden verduidelijkt en vervolgens toegepast om dynamiek binnen vectorvelden te beschrijven, namelijk, door middel van de rotatie en de divergentie. Bovendien hebben we een operator, de gradient, gevonden om scalaire velden om te zetten in vectorvelden. Deze middelen zijn cruciaal voor de beschrijving van velden. Verder hebben we de algemene vorm van bewegingsvergelijkingen bekeken en zagen we dat een systeem altijd voldoet aan het principe van minste actie. Afsluitend hebben we de lagrangiaan en de hamiltoniaan bekeken, principes die essentieel zijn om velden te bestuderen en om de beweging van ingewikkelde systemen te beschrijven.

In het volgende hoofdstuk zullen we de speciale relativiteitsleer behandelen. Dit geeft ons de mogelijkheid om later velden te beschrijven die rekening houden met het bijzondere gedrag van licht en de invloed van de zwaartekracht.

---

<sup>10</sup>De gegeneraliseerde impuls wordt dus ook gedefinieerd met variabele  $q_j$ .

# Hoofdstuk 2

## De speciale relativiteitsleer

Volgens Newton was tijd absoluut. Overal in het universum ervaart men tijd op precies dezelfde manier. Maar wat gebeurt er als we deze aanname loslaten? Stel we hebben drie klokken langs een rechte lijn, waarbij de linker klok A, dezelfde afstand heeft tot klok B als klok B tot klok C. Ook lopen alle klokken synchroon. Hierbij is B de middelste klok en C de rechter klok. Op een bepaald moment gaan er precies tegelijkertijd twee lichtstralen van A en C naar klok B. De lichtstralen zullen precies op hetzelfde moment aankomen, aangezien de afstanden tussen de klokken gelijk zijn. Nu rent er een persoon van klok B naar C op het moment dat de lichtstralen vrijkomen. De persoon zal zeggen dat de lichtstralen op verschillende momenten bij hem aankwamen, omdat de afstanden van de persoon tot A en C niet gelijk zijn. Hieruit concludeerde hij dat de klokken A en C niet synchroon lopen. Gebaseerd op dit gedachtenexperiment baseerde Einstein zijn speciale relativiteitstheorie. In dit hoofdstuk zullen we bestuderen hoe waarnemingen in bewegende stelsels afwijken van de newtoniaanse mechanica.

### 2.1 De Lorentz-transformaties

#### 2.1.1 Coördinatenstelsels

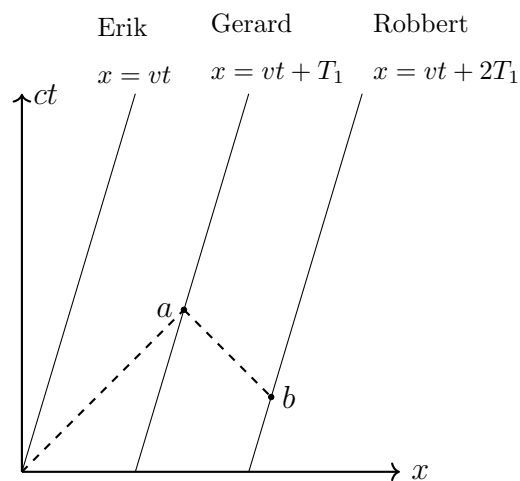
In speciale relativiteit wordt er gebruik gemaakt van verschillende stelsels, ofwel referentiekaders. Hierbij zijn  $(x, y, z, t)$  bijvoorbeeld de coördinaten van een stilstaand stelsel  $S$  en  $(x', y', z', t')$  de coördinaten van een bewegend stelsel  $S'$ . Omdat stelsel  $S$  stilstaat, kunnen de coördinaten van  $S'$  in het referentiekader van  $S$  als een beweging beschreven worden. In het referentiekader van  $S'$  lijkt stelsel  $S'$  dus stil te staan, omdat de coördinaten meebewegen met de oorsprong van  $S'$ .

We zullen veel gebruik maken van zogenaamde ruimtetijddiagrammen. Ruimtetijd is het concept waarbij de drie ruimtelijke richtingen en tijd verenigd worden. Dit wordt weergegeven met een Minkowski-diagram, ofwel een ruimtetijddiagram. Hierbij wordt de tijd weergegeven op de verticale as en de ruimtecoördinaten op de overige assen. Het pad dat een deeltje in een ruimtetijddiagram aflegt, noemen we de wereldlijn van het deeltje. Met de ruimtetijddiagrammen in deze paragraaf zullen we ons beperken tot één dimensie van ruimtecoördinaten. Ook veranderen we de grootte van de verticale as naar  $ct$ , zodat de eenheid overeenkomt met de ruimtelijke assen. Als gevolg kunnen we een lichtstraal met snelheid  $c$  weergeven met een rechte lijn met een hoek van  $45^\circ$  ten opzichte van de  $x$ -as. Voor deze lijn geldt namelijk  $ct = x$ . Als gevolg hiervan is de waarde  $ct - x$  altijd constant voor lichtstralen naar rechtsboven in de diagram;  $ct + x$  is dan constant voor lichtstralen naar rechtsbeneden. Lichtstralen zullen we aangeven met een gestippelde lijn in de ruimtetijddiagrammen.<sup>1</sup>

## 2.1.2 Bewegende referentiekaders

Om duidelijk in beeld te brengen hoe de bewegende referentiekaders afwijken van een stilstaand stelsel introduceren we drie personen: Erik, Gerard en Robbert.

Stel nu dat de drie personen met dezelfde snelheid naar rechts bewegen. Erik begint met bewegen in de oorsprong van het stilstaande stelsel  $S$ , Gerard begint bij translatie  $T_1$  en Robbert bij translatie  $2T_1$ . Als Erik op  $t = 0$  een lichtstraal richting Gerard uitzendt, bereikt deze lichtstraal Gerard bij punt  $a$ . Gerard kan alleen zeggen dat de tijden van Robbert en Erik synchroon zijn als Gerard ook een lichtstraal van Robbert op  $a$  ontvangt. Robbert moet deze lichtstraal dan op punt  $b$  uitzenden. Voor punt  $a$  geldt dan  $ct = vt + T_1$  zodat  $t_a = \frac{T_1}{(c-v)}$  en  $x_a = \frac{cT_1}{(c-v)}$ . Omdat  $ct + x$  constant is voor een lichtstraal naar rechtsbeneden, geldt er voor de lijn  $ab$  in punt  $a$ :  $x + t = \frac{T_1(c+1)}{(c-v)}$  en  $2T_1 = x - vt$ . Met behulp van substitutie krijgen we  $t = \frac{vx}{c^2}$ .<sup>2</sup> Dit is de voorstelling van de  $x'$  as. Op  $x'$  heeft elk punt namelijk dezelfde waarde van  $ct' = 0$ , ofwel er is



Figuur 2.1: Bewegende stelsels

<sup>1</sup>De diagrammen zijn niet op schaal, omdat we werken met  $v \ll c$ .

<sup>2</sup>De uitwerking hiervan is erg lang en bestaat voornamelijk uit algebra. Dit zal dus niet uitgebreid behandeld worden.

sprake van gelijktijdigheid op de  $x'$  as. Door symmetrie wordt de  $ct'$  as dan gegeven door  $x = vt$ . Op deze lijn heeft elk punt dezelfde waarde van  $x' = 0$ . Hieruit volgt dat  $x' = x - vt$  en  $ct' = ct - \frac{vx}{c}$ , maar zoals we weten geldt dit alleen voor  $t' = 0$  en  $x' = 0$ . Er moet dus nog een andere functie zijn, waardoor we deze relatie kunnen uitbreiden naar alle coördinaten.

### 2.1.3 De algemene Lorentz-transformaties

We kiezen een functie die onafhankelijk is van de richting van het bewegende stelsel, omdat we precies hetzelfde resultaat zouden krijgen voor  $ct' = 0$  en  $x' = 0$  voor een negatieve  $x$ , ofwel als de drie personen naar links bewegen. We kunnen bijvoorbeeld kiezen dat de functie variabele  $v^2$  heeft, zodat deze functie bij een tegenovergestelde richting van een stelsel nog steeds dezelfde waarde geeft. Hierdoor krijgen we het volgende:

$$x' = (x - vt)f(v^2) \quad ct' = (ct - \frac{vx}{c})f(v^2) \quad (2.1)$$

Merk op dat  $x'$  en  $t'$  met dezelfde functie vermenigvuldigd worden, aangezien  $x'$  en  $t'$  symmetrisch zijn ten opzichte van  $x = ct$ . Als we de assen van een stilstaande stelsel willen weergeven door middel van  $t'$  en  $x'$  gebruiken we het feit dat het stilstaande stelsel met snelheid  $-v$  ten opzichte van Erik, Gerard en Robbert beweegt. Dus we krijgen:

$$x = (x' + vt')f(v^2) \quad ct = (ct' + \frac{vx'}{c})f(v^2) \quad (2.2)$$

Door middel van substitutie merken we de volgende relatie tussen  $x$ ,  $x'$ ,  $ct$  en  $ct'$  op:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (x - vt)\gamma \quad ct' = \frac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (ct - x\beta)\gamma \quad (2.3)$$

Hierbij schrijven we  $\frac{v}{c} = \beta$  en  $f(v^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$ .<sup>3</sup> Merk op dat deze aanpassingen alleen gelden voor één ruimtelijke richting. Door ook de andere twee ruimtelijke richtingen hierbij te betrekken, krijgen we de Lorentz-transformaties, ofwel de relaties tussen stilstaande en bewegende stelsels. Doordat Erik, bijvoorbeeld, in de  $x$  richting beweegt, komt de factor  $\gamma$  alleen tevoorschijn voor de Lorentz-transformatie in de  $x$  richting. De coördinaten in de andere richtingen veranderen niet. Voor de Lorentz-transformaties krijgen we:

$$x' = (x - vt)\gamma \quad ct' = (ct - x\beta)\gamma \quad y' = y \quad z' = z \quad (2.4)$$

---

<sup>3</sup>Als  $\beta$  veel kleiner is dan 1 krijgen we weer de newtoniaanse vergelijkingen, ofwel Galilei-transformaties  $x' = x - vt$ ,  $t' = t$ ,  $y' = y$  en  $z' = z$ .

We herinneren ons dat  $S$  zich met snelheid  $-v$  ten opzichte van  $S'$  beweegt. Door de mintekens om te draaien, krijgen we dus de Lorentz-transformaties voor  $S$ .

$$x = (x' + vt')\gamma \quad ct = (ct' + x'\beta)\gamma \quad y = y' \quad z = z' \quad (2.5)$$

Tot nu toe hebben we met stelsels gewerkt, waarbij de assen parallel zijn ten opzichte van elkaar. Als de stelsel  $S$  en  $S'$  een hoek ten opzichte van elkaar hebben, hebben we nog een handeling nodig om de relatie tussen de stelsel weer te geven. Door voorafgaand aan de Lorentz-transformaties een rotatie toe te passen op stelsel  $S$ , kunnen we ervoor zorgen dat de assen van  $S$  en  $S'$  parallel komen te staan.<sup>4</sup> De combinatie van rotaties en eenvoudige Lorentz-transformaties (2.5) is de algemene Lorentz-transformatie.[12]

### 2.1.4 Einstein's postulaten

Als gevolg van de algemene Lorentz-transformaties zijn de natuurkundige wetten in stelsel  $S'$  hetzelfde als in  $S$ , aangezien stelsel  $S'$  beschreven kan worden vanuit  $S$  en vice versa. Dit wordt het eerste postulaat van Einstein genoemd.

Het tweede postulaat volgt direct uit de gamma factor. Stel een object heeft snelheid  $v$ , waarbij  $v > c$ . Dan geldt voor de gamma factor vergelijking (2.6). De Lorentz-transformatie voor het betreffende stelsel is dus imaginair, wat absoluut niet mogelijk is. Hieruit concluderen we dat niets sneller beweegt dan het licht.[13]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{i\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}} \quad (2.6)$$

### 2.1.5 Tijdrek en lengtekrimp

We kunnen ook bestuderen welke invloed de Lorentz-transformaties hebben op tijdsverloop en lengtes binnen een stelsel. In stelsel  $S'$  vinden twee gebeurtenissen plaats bij respectievelijk  $t'_1 = 0$  en  $t'_2 = \zeta'$  op  $x' = 0$ . Dan geldt er voor het tijdsinterval tussen die gebeurtenissen in stelsel  $S$ , waarbij  $t_1 = 0$  en  $t_2 = \zeta$ :

$$ct_2 - ct_1 = c\zeta = c\gamma\zeta' \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \quad (2.7)$$

Het bijzondere gevolg hiervan is dat het tijdsverloop voor  $S'$  steeds langzamer wordt ten opzichte van  $S$  naarmate de snelheid van  $S'$  dichterbij de lichtsnelheid komt. Dit

---

<sup>4</sup>Dit is overigens geen traditionele rotatie, maar een hyperbolische rotatie.

wordt tijdrek genoemd. Als Erik bijvoorbeeld in een ruimteschip stapt met een snelheid van  $v = \frac{1}{2}c$ . Dan wordt hij  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \approx 1,15$  keer minder snel oud dan de gemiddelde aardbewoner.<sup>5</sup> Een filosofisch vraagstuk gebaseerd op dit principe is bijvoorbeeld de tweeling paradox: hoe kunnen twee identieke personen alsnog met verschillende snelheid anders verouderen?

Een ander gevolg van de Lorentz-transformaties is lengtekrimp. Als we de lengte  $L$  van een object uit  $S$  meten in  $S'$  vinden we de lengte  $L'$ . Hierbij is  $x_1 = 0$  de achterkant van het voorwerp en  $x_2 = L$  de voorkant van het voorwerp.

$$L' = x'_2 - x'_1 = (L - vt)\gamma - (-vt)\gamma = L\gamma \quad \Rightarrow \quad L = \frac{L'}{\gamma} \quad (2.8)$$

Naarmate de snelheid van  $S'$  dichterbij de lichtsnelheid komt, wordt de lengte van het voorwerp in  $S$  steeds kleiner dan in  $S'$ .<sup>[14]</sup>

## 2.2 Eigentijd en ruimtetijdintervallen

### 2.2.1 Invariantie en eigentijd

Een van de meest krachtige concepten is het concept van invariantie. Een waarde die hetzelfde is in verschillende referentiekaders wordt ook wel een *invariante waarde* of *invariant* genoemd. Stel dat er twee referentiekaders  $S$  en  $S'$  zijn, waarbij de oorsprong van  $S'$  samenvalt met de oorsprong van  $S$ . Dan kunnen we direct opmerken dat de afstand van een willekeurig punt tot de oorsprong in beide stelsels gelijk is. In dit geval zou er dus moeten gelden dat  $c^2t^2 + x^2 = c^2t'^2 + x'^2$ . Als we dit controleren met de Lorentz-transformaties zien we dat dit niet het verwachte resultaat oplevert.

$$c^2t'^2 + x'^2 = (c^2t^2 - 4txv + x^2(\beta^2 + 1) + v^2t^2)\gamma^2 \neq c^2t^2 + x^2 \quad (2.9)$$

We merken op dat de uitdrukking  $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$  wel voldoet. Hierbij valt de  $-4txv$  term namelijk weg, zodat we  $c^2t'^2 - x'^2$  kunnen herschrijven tot  $c^2t'^2 - x'^2 = (x^2(\beta^2 - 1) + c^2t^2 - v^2t^2)\gamma^2 = c^2t^2 - x^2$ . De uitdrukking  $c^2t^2 - x^2$  is dus invariant. Volgens de Lorentz-transformatie geldt  $x' \neq x$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$  als een object met snelheid  $v > 0$  in de  $x$ -richting beweegt. Daardoor veranderen de afstanden langs de  $y$  en  $z$  assen niet. Als gevolg is  $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2\tau^2$  dus ook invariant. Omdat de lichtsnelheid constant is, is  $\tau$  invariant. We noemen deze invariante waarde de *eigentijd*. We kunnen

---

<sup>5</sup>Mensen rond de polen worden sneller oud. Mensen rond de evenaar worden juist langzamer oud, omdat ze een relatief grotere snelheid hebben. Dit verschil is overigens insignificant.

deze waarde interpreteren als de tijd die verstrijkt in een specifiek referentiekader. Als Erik bijvoorbeeld langs de  $t'$  as beweegt, zodat  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$ . Dan is er volgens Erik  $\tau = t'$  aan tijd verstreken.

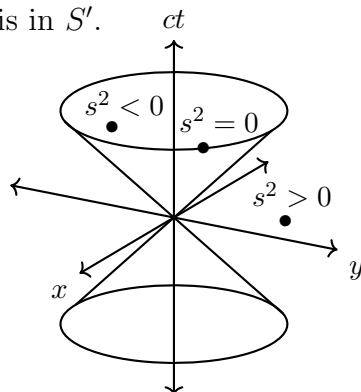
## 2.2.2 Ruimtetijdintervallen

We hebben zojuist gezien dat de eigentijd invariant is onder de Lorentz-transformaties. Ook hebben we gezien dat het kwadraat van de afstand tussen de oorsprong en een willekeurig punt in ruimtetijd wordt weergegeven door een invariante waarde. Doorgaans wordt de afstand tussen twee gebeurtenissen het ruimtetijdinterval  $ds$  genoemd. Voor de relatie tussen  $ds$  en  $cd\tau$  geldt  $ds^2 = -c^2d\tau^2$ . Voor de afstand van een punt tot de oorsprong wordt de notatie  $s$  gebruikt, omdat de coördinaten van het beginpunt gelijk zijn aan 0. Het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen in ruimtetijd wordt dan als volgt genoteerd.<sup>6</sup>

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2\tau^2 \quad (2.10)$$

## 2.2.3 Lichtkegels

Om ons voor te stellen hoe gebeurtenissen ten opzichte van elkaar plaatsvinden, introduceren we de lichtkegel, zie figuur 2.2.<sup>7</sup> In de figuur worden lichtstralen weergegeven met een kegel. We weten dat er voor de afgelegde afstand van lichtstralen in stelsel  $S$  geldt:  $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Hieruit volgt dat  $s^2 = 0$  voor alle lichtstralen vanuit de oorsprong. Dit komt overeen met de randen of het oppervlak van de lichtkegel. Als er dus een stelsel  $S'$  is dat een punt in ruimtetijd bevat dat correspondeert met  $s^2 = 0$  uit stelsel  $S$ , dan zal de lichtstraal dat punt bereiken. De oorsprong is dan lichtachtig gescheiden van de gebeurtenis in  $S'$ .



Figuur 2.2: Een lichtkegel

<sup>6</sup>Hier verwijzen we eigenlijk naar het kwadraat van het interval.

<sup>7</sup>Er wordt van de lezer verwacht om zich een vierde dimensie,  $z$ , in te beelden.



In het geval dat  $c^2t^2 > x^2 + y^2 + z^2$  en  $s^2 < 0$  dan zal het licht al voorbij het betreffende punt zijn, voordat de gebeurtenis plaatsvindt. De oorsprong is dan tijdachtig gescheiden van een gebeurtenis. Als laatste kan een gebeurtenis in  $S'$  een grote afstand hebben ten opzichte van de oorsprong in  $S$ , zodat de lichstraal het punt niet op tijd zal bereiken. Deze gebeurtenis is dan ruimteachtig van de oorsprong gescheiden, waarbij  $c^2t^2 < x^2 + y^2 + z^2$  en  $s^2 > 0$ .<sup>[15]</sup>

## 2.3 Viervectoren

### 2.3.1 Verandering van notatie

Tot nu toe hebben we gewerkt met coördinaten  $(ct, x, y, z)$ . Zoals we in de afgelopen paragrafen hebben gezien, is er een nauw verband tussen de ruimtelijke coördinaten en tijd. Om de relativistische beweging van systemen efficiënter te bestuderen, introduceren we een andere notatie. Bij de notatie waar de ruimtelijke coördinaten en tijd gescheiden zijn, wordt er gebruik gemaakt van de Latijnse index  $i$ . Deze index loopt van 1 tot 4 en komt achtereenvolgens met  $x, y$  en  $z$  overeen. De individuele coördinaten zijn componenten van een *drievector*  $X^i$ . Dit is hetzelfde als een vector met drie componenten.<sup>8</sup>

$$X^i = (x, y, z) \iff X^i = (X^1, X^2, X^3) \quad (2.11)$$

In het geval dat we ook tijd tot dezelfde notatie van coördinaten willen betrekken, gebruiken we de Griekse index  $\mu$ . Deze loopt van 0 tot 4 en correspondeert met  $ct, x, y$  en  $z$ .

$$X^\mu = (ct, x, y, z) \iff X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3) \quad (2.12)$$

Deze coördinaten zijn de componenten van de *viervector*  $X^\mu$ . De viervector kan dus bestaan in een vierdimensionale ruimte, ofwel ruimtetijd. Merk op dat er niets verandert aan de resultaten van de vorige paragrafen behalve de verandering van notatie.

### 2.3.2 Viersnelheden

Deeltjes met een positieve massa verplaatsen zich volgens een tijdachtige bewegingsvergelijking. Dit betekent dat de snelheid van een soortgelijk deeltje kleiner is dan de lichtsnelheid. Er geldt dan  $ds^2 < 0$ . Om een relativistische snelheid van een deeltje weer te geven, maken we gebruik van de viervector. Hierbij nemen we de afgeleide van

---

<sup>8</sup>Het is belangrijk om op te merken dat de superscript notatie  $X^i$  of  $X^\mu$  geen exponent is.

$X^\mu$  tot de eigentijd. We differentiëren tot  $\tau$ , omdat deze waarde invariant is onder de Lorentz-transformaties. Als resultaat krijgen we de *viersnelheid*  $U^\mu$  van het deeltje. Dit is vergelijkbaar met een snelheid in de vorm van een viervector.

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left( \frac{dX^0}{d\tau}, \frac{dX^1}{d\tau}, \frac{dX^2}{d\tau}, \frac{dX^3}{d\tau} \right) \quad (2.13)$$

Nu merken we op dat er iets wonderbaarlijks aan de hand is met de  $U^0$  term. Als we de definitie van de eigentijd gebruiken, kunnen we het volgende opmerken.

$$U^0 = \frac{dX^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c \left( \frac{\sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} - \frac{dy^2}{c^2} - \frac{dz^2}{c^2}}}{dt} \right)^{-1} = c \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1} = c\gamma \quad (2.14)$$

De verhouding tussen het tijdsinterval  $dt$  in  $S$  en de eigentijd  $d\tau$  van  $S'$  is dus gelijk aan de gammafactor. Hetzelfde verband zagen we bij tijdrek. Als gevolg kunnen we de viersnelheden omschrijven tot het volgende. Hierbij is  $V^i = \frac{dX^i}{dt}$  de snelheid van een deeltje dat wordt weergegeven door een drievector, ofwel een driesnelheid.

$$U^\mu = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dX^1}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dX^2}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dX^3}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = (c\gamma, V^1\gamma, V^2\gamma, V^3\gamma) \Rightarrow U^i = \gamma V^i \quad (2.15)$$

De snelheid van een object in een bewegend stelsel  $S'$  is gelijk aan de snelheid van het object in stelsel  $S$  maal de gammafactor.

## 2.4 Relativistische bewegingsvergelijkingen

### 2.4.1 Actie

Einstein's eerste postulaat houdt in dat de natuurkunde in alle referentiekaders hetzelfde is. Hieruit volgt dat de waarnemers uit die referentiekaders het eens moeten zijn over het pad van een deeltje, ofwel de actie van de verplaatsing. In de niet relativistische mechanica zouden we integreren over de lagrangiaan om de actie te krijgen, maar het blijkt dat de lagrangiaan zich soortgelijk gedraagt als een ruimtetijdinterval  $ds$ .<sup>9</sup> Hierbij geldt dat  $ds^2 < 0$ , omdat  $d(X^0)^2 > d(X^i)^2$ . Om te integreren over een positief interval, vermenigvuldigen we  $ds$  met  $-1$ . Hieruit volgt dat de actie gelijk is

---

<sup>9</sup>De motivatie hiervoor vereist veel meer achtergrondinformatie dan dat we op dit moment tot onze beschikking hebben.

aan de integraal over het ruimtetijdinterval  $\sqrt{-ds^2}$  maal een constante  $\epsilon$ .<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} S &= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-ds^2} = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2} \\ &= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - (V^i)^2} dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.4.2 Relativistische lagrangiaan

Vervolgens kunnen we deze uitdrukking benaderen met het binomium van Newton. Deze methode is soortgelijk aan de benadering met Maclaurinreeksen. Hierbij schrijven we de integrand (de lagrangiaan) als een functie van  $V^i$  en nemen we  $U = 0$ .<sup>11</sup> We willen dan dat de lagrangiaan gelijk is aan de niet-relativistische uitdrukking van de kinetische energie  $K = \frac{1}{2}m(V^i)^2$  als  $\frac{V^i}{c}$  naar nul gaat.<sup>12</sup> Ofwel als  $V^i \ll c$ .

$$\begin{aligned} L &= \epsilon \sqrt{c^2 - (V^i)^2} = \epsilon c \sqrt{1 - \beta^2} = \epsilon c \left( 1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \right) \\ &\approx \epsilon c \left( 1 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) = \epsilon c - \epsilon \frac{(V^i)^2}{2c} = \frac{1}{2}m(V^i)^2 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = -mc \end{aligned} \quad (2.17)$$

De derde term van de benadering bevat een factor van  $\beta^4$ , waardoor de hogere orde termen verwaarloosd kunnen worden. Door  $\epsilon$  in te vullen, krijgen we de relativistische lagrangiaan en de relativistische actie. Als we weer  $V^i \ll c$  nemen, krijgen we bij benadering  $L \approx \frac{1}{2}m(V^i)^2 - mc^2$ . [16][17]

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} \quad S = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{\gamma} dt \quad (2.18)$$

## 2.5 Energie van een systeem

### 2.5.1 Impuls

De formele definitie van de impuls is de partiële afgeleide van de lagrangiaan tot de snelheid van het object. Als we deze definitie gebruiken om de relativistische impuls  $P^i$  af te leiden, krijgen we het volgende.

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial V^i} = \frac{\partial}{\partial V^i} \left( -\frac{mc^2}{\gamma} \right) = mV^i \gamma = mU^i \quad (2.19)$$

<sup>10</sup> $ds$  is een ruimtetijdinterval, geen interval van de actie  $S$ .

<sup>11</sup>Merk op dat  $V^i$  de algemene notatie is van  $v$ , zodat ook  $\beta = \frac{V^i}{c}$ .

<sup>12</sup>We hebben nog geen gravitatie of interactie met velden behandeld. Daarom laten we de potentiële energie buiten beschouwing.

De impuls in het bewegende stelsel  $S'$  is dus  $\gamma$  keer zo groot ten opzichte van de impuls in  $S$ .

### 2.5.2 Relativistische hamiltoniaan

Als we ons de definitie van de hamiltoniaan herinneren, merken we op dat we een algemeen stelsel van coördinaten  $q_j$  nodig hebben om de hamiltoniaan op te schrijven. Dit coördinatenstelsel bevat één tijdcoördinaat en meerdere ruimtelijk coördinaten. We kunnen de viervector dus gebruiken voor de hamiltoniaan. Door dit te combineren met de relativistische impuls en de lagrangiaan, verkrijgen we de relativistische hamiltoniaan. Ofwel de algemene vorm van de totale relativistische energie.

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L = \sum_i V^i P^i - L = V^i P^i - L = V^i \cdot m V^i \gamma - L = m(V^i)^2 \gamma + \frac{mc^2}{\gamma} \quad (2.20)$$

Hierbij laten we de somnotatie weg.  $V^i$  is namelijk een driesnelheid en hoeft daarom niet gesommeerd te worden over de individuele componenten. Door deze uitdrukking te vereenvoudigen krijgen we de hamiltoniaan als een functie van de impuls  $P^0$  van de  $X^0$  coördinaat. Merk hierbij op dat  $c\gamma = U^0$  en dus  $mc\gamma = P^0$ .

$$H = \frac{m(V^i)^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m(V^i) + mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2 = cP^0 \quad (2.21)$$

De totale energie is dan  $E = \gamma mc^2$ . Naarmate een systeem dichter bij de lichtsnelheid komt, neemt de totale energie van dat systeem dus toe. Als een object een kinetische energie van  $K = 0$  heeft, ofwel  $V^i = 0$ , kan dit vereenvoudigd worden tot de volgende bekende vergelijking.

$$E = mc^2 \quad (2.22)$$

### 2.5.3 Energie-impuls relatie

Door de impuls te herschrijven kunnen we een relatie tussen de energie  $E$ , de massa  $m$  en de impuls  $P^i$  vinden. Deze vergelijking beschrijft alle objecten, ongeacht hun massa.

$$(P^i)^2 c^2 = \frac{m^2 c^2 (V^i)^2}{1 - \frac{(V^i)^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4 \left( \frac{(V^i)^2}{c^2} - 1 \right)}{1 - \frac{(V^i)^2}{c^2}} = -m^2 c^4 + \gamma^2 m^2 c^4 \quad (2.23)$$

En uiteindelijk krijgen we dan voor de relativistische energie:

$$\gamma mc^2 = E = \sqrt{m^2 c^4 + (P^i)^2 c^2} \quad (2.24)$$

## 2.6 Conclusie

Om te kijken hoe de speciale relativiteitsleer in elkaar steekt, hebben we eerst een gedachtenexperiment met drie personen uitgevoerd. Gebaseerd hierop hebben we gelijktijdigheid kunnen definiëren. Dit hebben we gegeneraliseerd met behulp van de algemene Lorentz-transformaties. Vervolgens hebben we de postulaten van Einstein bekeken en hebben we bewezen dat niets sneller beweegt dan licht. Ook zagen we wat de gevolgen van de Lorentz-transformaties op de perceptie van tijd en lengte zijn. Door middel van de invariante ruimtetijdintervallen zagen we wat tijdachtige, lichtachtige en ruimteachtige gebeurtenissen zijn. We hebben onze notatie van coördinaten aangepast naar de viervector. Daarna kwamen twee van de belangrijkste begrippen aan bod. Namelijk, de relativistische actie en de lagrangiaan. Afsluitend hebben we de relativistische impuls en de lagrangiaan gecombineerd om de totale energie van een relativistische systeem af te leiden. Hieruit hebben we geconcludeerd dat de impuls en de totale energie afhankelijk zijn van de gammafactor. Deze verbanden zijn cruciaal voor relativistische velden en daarom zullen we deze principes ook toepassen in hoofdstuk 3 en 4.

In het volgende hoofdstuk zullen we onze kennis van hoofdstuk 1 en 2 gebruiken om de voorwaarden voor een klassieke veldentheorie op te stellen.



# Hoofdstuk 3

## De klassieke veldentheorie

De afgelopen hoofdstukken hebben we de fundamenteën voor een klassieke veldentheorie bestudeert. In dit hoofdstuk zullen we de voorwaarden van een relativistische klassieke veldentheorie bekijken. Daartoe zullen we bestuderen hoe de bewegingsvergelijkingen van de klassieke mechanica verschillen van de bewegingsvergelijkingen in klassieke velden. Ook zullen we kijken naar verschillende eigenschappen van een klassiek veld, zodat we de basis leggen voor de afleiding van specifieke veldentheorieën.

### 3.1 Notatie

#### 3.1.1 Covariant en contravariant

Voordat we het concept van een veldentheorie kunnen bestuderen, moeten we een aantal notaties introduceren. Om deze nieuwe notatie te bekijken, gebruiken we een algemene viervector  $A^\mu$ . Dit is de combinatie van enkele infinitesimale viervectoren  $dX^\mu$ . Ofwel, de lengte van  $dX^\mu$  is groter dan 0, maar kleiner dan elk positief getal. Vanaf nu noemen we de superscript notatie  $A^\mu$  *contravariant*. De notatie waarbij we de index onderaan plaatsen, heet *covariant*. Met behulp van de *Minkowskitensor*  $\eta_{\mu\nu}$  kunnen we contravariante viervectoren omzetten in covariante viervectoren. Om covariante viervectoren te veranderen naar contravariante viervectoren maken we gebruik van de inverse van de minkowksitensor, ofwel  $\eta^{\mu\nu}$ . Deze heeft dezelfde diagonaal als  $\eta_{\mu\nu}$ , maar het is belangrijk om op te merken dat de twee niet gelijk zijn.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \eta^{\mu\nu} = [\eta_{\mu\nu}]^{-1} \quad (3.1)$$

We noteren  $A^\nu$  met de contravariante index en vermenigvuldigen deze met de Minkowskitensor.<sup>1</sup> We vinden het volgende verband.

$$A_\mu = \sum_\nu \eta_{\mu\nu} A^\nu = \eta_{\mu 0} A^0 + \eta_{\mu 1} A^1 + \eta_{\mu 2} A^2 + \eta_{\mu 3} A^3 = -A^0 + \sum_i A^i \quad (3.2)$$

$$A_\mu \iff (A_0, A_1, A_2, A_3) = (-A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (3.3)$$

Hieruit kunnen we concluderen dat  $A_0 = -A^0$  en  $A_i = A^i$ . Deze relatie zal erg goed van pas komen bij het noteren van sommaties en differentiaalvergelijkingen. Voor het gemak laten we de somnotatie bij een herhaalde index weg. Dit wordt de Einstein-sommatieconventie genoemd. Hierbij komt dezelfde index meerdere keren voor in de co- én contravariante vorm, bijvoorbeeld:

$$A^\mu A_\mu = A^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\nu A^\mu = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \quad (3.4)$$

Een som van viervectoren met een covariante én contravariante index geeft dus een scalaire waarde. Dit geldt ook voor twee verschillende viervectoren. Dus  $A^\mu B_\mu$  is ook scalair.[18]

### 3.1.2 Afgeleiden

Ook voor afgeleiden kunnen we onze notatie compacter maken. Stel we hebben een veldfunctie  $\phi$ . Deze differentiëren we tot de coördinaten van ruimtetijd, ofwel  $X^\mu$ . Als de partiële afgeleide van  $\phi$  tot  $X^\mu$  een covariante viervector is, gebruiken we de volgende notatie.

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} = \partial_\mu \phi \iff \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^0}, \frac{\partial \phi}{\partial X^1}, \frac{\partial \phi}{\partial X^2}, \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \right) \quad (3.5)$$

Vervolgens leiden we de contravariante afgeleide van  $\phi$  af met de inverse Minkowskitensor:  $\eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \partial^\mu$ .

$$\partial^\mu \phi \iff \left( -\frac{\partial \phi}{\partial X^0}, \frac{\partial \phi}{\partial X^1}, \frac{\partial \phi}{\partial X^2}, \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \right) \quad (3.6)$$

Met behulp van de contra- en covariante afgeleiden kunnen we lange notaties bondig opschrijven.<sup>2</sup> We zullen vaak te maken krijgen met de vermenigvuldiging van de

<sup>1</sup> $\nu$  is ook een Griekse index en loopt dus van 0 tot en met 3.

<sup>2</sup>Er wordt voortaan gebruik gemaakt van contra- en covariante afgeleiden in plaats van 'partiële' afgeleiden. Dit zorgt er ook voor dat een bepaalde tenseureigenschap behouden blijft. We zullen hier niet verder op ingaan.



contravariante afgeleide en de covariante afgeleide van  $\phi$ . Dit kunnen we weergeven als:

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \right)^2 \quad (3.7)$$

### 3.1.3 D'Alembertiaan

Zodra we te maken krijgen met de som van de tweede partiële afgeleide van  $\phi$  tot  $X^\mu$ , waarbij de term met  $X^0$  negatief is, gebruiken we de *d'Alembertiaan*  $\square$ . Het is belangrijk om op te merken dat de laplaciaan wordt beperkt tot de drie ruimtelijke coördinaten van ruimtetijd. Hierdoor kan de d'Alembertiaan gezien worden als de algemene laplaciaan bij de speciale relativiteitsleer.[19]

$$\square \phi = \partial^\mu \partial_\mu \phi = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial (X^0)^2} + \nabla^2 = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (3.8)$$

## 3.2 Transformaties van velden

Nu we de notatie onder de knie hebben, kunnen we de klassieke veldentheorie bestuderen. Het concept van een veld is een breed begrip. Een veld is een continue  $n$ -dimensionale ruimte, waarbij elk punt in deze ruimte gekenmerkt wordt door een scalaire waarde, een vector of een tensor. Een tensor is de algemene vorm van een vector, maar we zullen hier later op terugkomen. We zullen eerst het geval van een scalair veld bekijken. Hierbij wordt het veld weergegeven door een scalaire functie  $\phi(X^\mu)$ . Omdat we ons voornamelijk op relativistische velden richten, maken we gebruik van ruimtetijd. Het veld is dus een functie van  $ct, x, y$  en  $z$ , ofwel  $X^\mu$ .

### 3.2.1 Scalaire velden

Stel er is sprake van een scalair veld met de veldfunctie  $\phi(X^\mu)$ . Vanuit stelsel  $S$  wordt de waarde van dit veld gemeten op een bepaald punt. In stelsel  $S'$  wordt dezelfde meting uitgevoerd. De uitkomsten van de metingen moeten precies gelijk zijn, omdat de natuurwetten gelijk zijn in beide stelsels. Anders ervaart men namelijk andere natuurwetten. Dit zou Einstein's eerste postulaat tegenspreken. De waarde van een scalair veld is dus invariant onder de Lorentz-transformaties. Een scalair veld is dus altijd *Lorentz-invariant*. Hierbij is  $\phi'$  de waarde van het veld in  $S'$  en  $\phi$  de waarde van het veld in  $S$ .

$$\phi'((X')^\mu) = \phi(X^\mu) \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Vectoren in ruimtetijd

Op het moment dat we te maken hebben met een vectorveld, zullen de richtingen van de vectoren in het veld veranderen, naarmate het referentiekader gedraaid wordt. De waarden van de componenten van de viervector veranderen namelijk. Daardoor is een vectorveld niet invariant onder een rotatietransformatie. Zoals we al zagen in hoofdstuk 2 zijn viervectoren niet invariant onder de Lorentz-transformatie. We kunnen hieruit concluderen dat de waarde van een vectorveld niet invariant is onder de algemene Lorentz-transformaties. Wel kunnen we de transformaties van een vectorveld weergeven met een infinitesimale vector  $d(X')^\mu$  in stelsel  $S'$  ten opzichte van de vector  $dX^\nu$  in stelsel  $S$ . De index  $\nu$  loopt ook van 0 tot 4, net zoals  $\mu$ , maar is niet altijd gelijk aan  $\mu$ . De indexen zijn dus onafhankelijk van elkaar. Met behulp van de kettingregel krijgen we de afgeleide van  $(X')^\mu$ , waarbij we  $(X')^\mu$  als een functie van de bijbehorende componenten schrijven.<sup>3</sup>

$$(X')^\mu = (X')^\mu(X'(X)) \Rightarrow d(X')^\mu = \sum_\nu \frac{\partial(X')^\mu}{\partial X^\nu} dX^\nu \quad (A')^\mu = \frac{\partial(X')^\mu}{\partial X^\nu} A^\nu \quad (3.10)$$

Hierbij zijn  $(A')^\mu$  en  $A^\nu$  de algemene voorstellingen van de viervectoren. Als we deze uitdrukking gebruiken voor  $\mu = 0$  en  $\mu = 1$  vinden we  $(A')^1$  en  $(A')^0$ .

$$(A')^1 = \frac{\partial(X')^1}{\partial X^1} A^1 + \frac{\partial(X')^1}{\partial X^0} A^0 = \gamma A^1 - \gamma\beta A^0 = (A^1 - \beta A^0)\gamma \quad (3.11)$$

$$(A')^0 = \frac{\partial(X')^0}{\partial X^0} A^0 + \frac{\partial(X')^0}{\partial X^1} A^1 = \gamma A^0 - \gamma\beta A^1 = (A^0 - \beta A^1)\gamma \quad (3.12)$$

Waarbij we ons herinneren dat  $(X')^1 = (X^1 - \beta X^0)\gamma$  en  $(X')^0 = (X^0 - \beta X^1)\gamma$ . Merk op dat  $\nu$  in vergelijking (3.12) van 0 tot 2 loopt terwijl  $\mu = 0$ . Dit is mogelijk, omdat  $(X')^0$  een functie is van  $X^0$  én  $X^1$ . Ook geldt er  $X^2 = (X')^2$  en  $X^3 = (X')^3$ , zodat  $(A')^2 = A^2$  en  $(A')^3 = A^3$ . Deze vergelijkingen samen zijn de Lorentz-transformaties van viervectoren in een vectorveld. Dit kunnen we ook compacter weergeven met matrices. Hierbij komt  $(A')^\mu$  voort uit de vermengivuldiging van  $A^\nu$  met een matrix  $L^\mu{}_\nu$ . Als we onze resultaten uit vorige vergelijkingen aanhouden, zijn we in staat om de  $L^\mu{}_\nu$  te definiëren als:

$$\begin{pmatrix} (A')^0 \\ (A')^1 \\ (A')^2 \\ (A')^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \iff (A')^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu \quad (3.13)$$

<sup>3</sup>Dit is eigenlijk een differentiaal: een infinitesimale verandering van de functie.

De relatie tussen de viervector  $(A')^\mu$  in stelsel  $S'$  en viervector  $A^\nu$  in  $S$  is dus te beschrijven met matrix  $L^\mu{}_\nu$ . Ofwel de matrix geeft een voorwaarde voor Lorentz-invariantie van een vectorveld. Voor de duidelijkheid kunnen we  $L^\mu{}_\nu$  herschrijven tot  $L^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu}$ , waarbij  $\sigma$  ook een Griekse index is die van 0 tot 4 loopt. Als gevolg wordt de tweede index van  $L^{\mu\sigma}$  verhoogd, net zoals bij de omzetting van contravariante viervectoren in covariante viervectoren. We zullen dit overigens niet bewijzen.[20]

### 3.2.3 Invariant van een vectorveld

Vervolgens kunnen we een invariante waarde opstellen met behulp van viervectoren. Door middel van de definitie van een infinitesimaal tijdsinterval  $ds$ , kunnen we viervectoren omzetten tot een invariante waarde. Door  $dX^\mu$  te vervangen met  $A^\mu$  krijgen we een scalaire waarde die invariant onder de algemene Lorentz-Transformaties.[21]

$$(ds)^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 = A^\mu A_\mu \quad (3.14)$$

## 3.3 Tensorvelden

### 3.3.1 Tensoren

In de vorige paragrafen hebben we de definities van Lorentz-invariantie in scalaire velden en vectorvelden bekeken. Het soort veld dat we nog niet hebben bekeken is een tensorveld. Een tensor is een generalisatie van vectoren, matrices en scalaire waarden. Viervectoren zijn bijvoorbeeld tensoren van de laagste orde (rang 1). Hogere orde tensoren kunnen opgebouwd worden door de combinatie van meerdere lagere orde tensoren. Bijvoorbeeld door de combinatie van twee viervectoren. Voortaan zullen we tensoren opbouwen uit meerdere viervectoren vanwege de fundamentele functie van viervectoren in speciale relativiteit.

### 3.3.2 Lorentz-invariantie van tensoren

We maken gebruik van twee verschillende viervectoren,  $A$  en  $B$ . Door de contravariante viervectoren te combineren, krijgen we een contravariante tensor  $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ . Dit is de algemene voortstelling van een tensor in een willekeurig tensorveld. Deze tensor heeft rang 2, omdat de tensor twee indexen heeft. Elke tensor van rang 2 kan gezien worden als een matrix. In stelsel  $S'$  wordt deze tensor dan weergegeven met  $(T')^{\mu\nu}$ .

Met de Lorentz-invariante matrix kunnen we deze tensor herschrijven tot:

$$(T')^{\mu\nu} = (A')^\mu (B')^\nu = L^\mu_\sigma A^\sigma L^\nu_\tau B^\tau \quad (3.15)$$

Hier gebruiken we de Griekse index  $\sigma$  voor  $A$  en  $\tau$  voor  $B$ . Deze nieuwe formulering volgt hetzelfde principe als vergelijking (3.13). Vervolgens kunnen we  $A^\sigma$  en  $B^\tau$  hergroeperen om tensor  $T^{\sigma\tau}$  te vormen.<sup>4</sup>

$$(T')^{\mu\nu} = L^\mu_\sigma A^\sigma L^\nu_\tau B^\tau = L^\mu_\sigma L^\nu_\tau A^\sigma B^\tau = L^\mu_\sigma L^\nu_\tau T^{\sigma\tau} \quad (3.16)$$

Op dezelfde manier kunnen we viervectoren hergroeperen tot tensoren als we de Lorentz-transformatie van een tensor met een hogere rang willen vinden. Dit betekent dat de tensor meer dan twee indexen bevat. We gebruiken een tensor met rang 3 als voorbeeld.

$$(T')^{\mu\nu\lambda} = (A')^\mu (B')^\nu (C')^\lambda = L^\mu_\sigma A^\sigma L^\nu_\tau B^\tau L^\lambda_\kappa C^\kappa = L^\mu_\sigma L^\nu_\tau L^\lambda_\kappa T^{\sigma\tau\kappa} \quad (3.17)$$

We zien dus dat de Lorentz-transformaties in een tensorveld worden weergegeven door de combinatie van een aantal matrices van de vorm  $L^\mu_\nu$ . Vervolgens kunnen we ook de indexen verlagen door gebruik te maken van de Minkowskitensor:  $T^\mu_\nu = T^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu}$ . Daarnaast zouden we ook de covariante variant van de tensor  $T^{\mu\nu}$  kunnen vinden door middel van de definities van covariante en contravariante coördinaten. Hierbij herinneren we ons dat de  $X^0$  coördinaten van teken veranderen als we contravariante indexen omzetten tot covariante indexen en vice versa. Dit geldt ook voor tensoren. Als gevolg krijgen we het volgende resultaat:

$$T^{0\nu} = -T_{0\nu} \quad T^{00} = T_{00} \quad (3.18)$$

### 3.3.3 Symmetrische tensoren

Als elke component van een tensor hetzelfde is als de component van de tensor, waarvan de indexen zijn omgedraaid, noemen we deze tensor symmetrisch. Ofwel  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ . In het geval dat de waarde van deze componenten tegengesteld is, noemen we deze tensor asymmetrisch. Hierbij geldt dat  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , waarbij  $F$  een tensor is.[22]

---

<sup>4</sup>We zullen niet bewijzen waarom dit het geval is, aangezien dit bewijs veel nieuwe achtergrondinformatie vereist en onnodig is.

## 3.4 Bewegingsvergelijkingen binnen een veld

### 3.4.1 Lokaliteit

Als we gebeurtenissen en de bijbehorende invloed op omringende punten in ruimtetijd willen beschrijven, hebben we het principe van lokaliteit nodig. Dit principe houdt in dat de invloed van een gebeurtenis op een bepaald punt alleen te merken is in de omringende punten. De voorwaarde hiervoor is dat de lagrangiaan afhankelijk is van de veldfunctie en de afgeleide hiervan tot de coördinaten van ruimtetijd. Als een veld hieraan voldoet, noemen we het veld *lokaal*. In deze paragraaf zullen we de gevolgen van dit principe uitwerken.

### 3.4.2 Lagrangiaan-dichtheid

Een groot verschil tussen klassieke mechanica en de klassieke veldentheorie is de lagrangiaan. Bij klassieke mechanica zouden we lagrangiaan verkrijgen door het verschil te nemen tussen de kinetische energie en de potentiële energie. In het geval van een veld spreken we van de lagrangiaan-dichtheid  $\mathcal{L}$ , omdat de lagrangiaan als het ware verdeeld is over ruimtetijd. Door de lagrangiaan-dichtheid over de drie ruimtelijke coördinaten te integreren, vinden we de lagrangiaan.<sup>5</sup> Hierbij geven we met  $a$  en  $b$  aan dat de verplaatsing in ruimtetijd een beginpunt  $a$  en een eindpunt  $b$  heeft.

$$L = \int_a^b \mathcal{L} \, dx \, dy \, dz \quad (3.19)$$

Vervolgens vinden we de actie door de lagrangiaan te integreren tot de tijd, waarbij we de lagrangiaan schrijven zoals in vergelijking (3.19). Ook vereenvoudigen we  $dt \, dx \, dy \, dz$  tot  $d^4x$ . De lagrangiaan en de lagrangiaan-dichtheid zijn beide afhankelijk van de waarde van  $\phi$ ,  $X^\mu$  en de verandering van deze waarde tot de coördinaten van ruimtetijd. Dit volgt direct uit het principe van lokaliteit.

$$S = \int_a^b L \, dt = \int_a^b \mathcal{L} \, d^4x = \int_a^b \mathcal{L} \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}, X^\mu \right) d^4x \quad (3.20)$$

Hieruit volgt dat de Euler-Lagrange vergelijking voor een scalair veld ook afhangt van  $X^\mu$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}$  en  $\phi$ . Bovenal sommeren we over  $\mu$ . Deze Euler-Lagrange vergelijking beschrijft namelijk de verplaatsingen in alle coördinaten van ruimtetijd. Hierdoor krijgen we het volgende voor de Euler-Lagrange vergelijking. Merk hierbij op dat de

---

<sup>5</sup>We zullen de termen 'lagrangiaan' en 'lagrangiaan-dichtheid' afwisselend gebruiken, maar met beide termen verwijzen we naar de lagrangiaandichtheid.

afgeleide van  $\phi$  een covariante viervector is.

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.21)$$

Het is zeer belangrijk om op te merken dat deze Euler-Lagrange vergelijking uitsluitend voor één veld geldt. Als we meerdere velden zouden hebben, kunnen we een andere Euler-Lagrange vergelijking opschrijven voor ieder veld.[23][24]

### 3.4.3 De algemene veldlagrangiaan

Een voorwaarde van een relativistisch veld is dat de actie van een pad hetzelfde is voor elk referentiekader. Zoals we in de vorige paragrafen hebben gezien, is er voor een scalair- of vectorveld een invariant, deze is altijd scalair. Hieruit kunnen we concluderen dat er alleen aan de eis voldaan kan worden als de lagrangiaan-dichtheid een scalaire waarde is. Als gevolg van het lagrangiaanse formalisme blijkt dat lagrangiaan de eerstegraads partiële afgeleide  $\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}$  bevat.<sup>6</sup> Door de afgeleide te kwadrateren en de componenten met  $X^i$  negatief te nemen, wordt deze invariant. Dit is vergelijkbaar met de invariant  $(ds)^2$ , zie vergelijking (3.14). De resulterende lagrangiaan is het product van de genoemde afgeleide en een bepaalde scalaire functie  $F(\phi)$ . Hier wordt dan natuurlijk de potentiële energie  $V(\phi)$  vanaf gehaald. Merk op dat  $F(\phi)$  en  $V(\phi)$  nog onbekend zijn.

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi F(\phi) - V(\phi) \quad (3.22)$$

Om de bewegingsvergelijkingen van het veld op te stellen, kunnen we de scalaire lagrangiaan-dichtheid invullen bij de Euler-Lagrange vergelijking. Doorgaans wordt  $F(\phi)$  gelijkgesteld aan  $\frac{1}{2}$ . Hierdoor krijgen we een veel eenvoudigere bewegingsvergelijking. De bewegingsvergelijking (3.24) is dus een specifiek geval.<sup>7</sup>[25]

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right)} \right) = \frac{1}{2} \cdot -2 \square \phi = -\square \phi \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \Rightarrow -\square \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3.24)$$

Deze vergelijking wordt de Klein-Gordon vergelijking genoemd, de voorganger van de Schödinger vergelijking. De Klein-Gordon vergelijking stemt overeen met de spe-

---

<sup>6</sup>We zullen de motivatie hiervoor niet behandelen, aangezien dit erg complex is.

<sup>7</sup>We gebruiken dit als voorbeeld voor de bewegingsvergelijkingen. De algemene bewegingsvergelijking voor een veld is namelijk veel ingewikkelder en heeft geen gesloten oplossingen.

ciale relativiteitsleer, een gedeelte van quantummechanica en natuurlijk de klassieke veldentheorie. We zullen niet ingaan op de relatie tussen quantummechanica en de Klein-Gordon vergelijking, omdat we ons richten op niet-quantummechanische veldentheorieën.

### 3.4.4 Beschrijving van een deeltje

De verkregen bewegingsvergelijking kunnen we vervolgens oplossen. Voordat we dat doen stellen we het potentiaal gelijk aan  $\frac{1}{2}\kappa^2\phi^2$ . Dit is vergelijkbaar met de potentiële energie van een harmonische trilling. We maken deze keuze om een gesloten oplossing voor de veldfunctie te vinden. Vervolgens merken we direct op dat de oplossing een e-macht is. We kunnen deze e-macht het meest gegeneraliseerd opschrijven door in de exponent een constante  $k_\mu$  toe te voegen en de e-macht met een constante  $A$  te vermenigvuldigen. Doorgaans wordt de component van  $k_\mu$  voor  $\mu = 0$ ,  $\omega$  genoemd, ofwel de hoekfrequentie. We gebruiken  $k_i$  voor de overige constanten. Hierbij is  $k_i$  het zogenaamde golfgetal.<sup>8</sup>

$$\phi = Ae^{ik_\mu X^\mu} \quad k_\mu = (-\omega, k_1, k_2, k_3) \quad (3.25)$$

Als we dit controleren door middel van substitutie en differentiëren, krijgen we het volgende. Uiteindelijk vinden we een gesloten uitdrukking voor de hoekfrequentie.

$$(-\omega^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\phi + \kappa^2\phi = 0 \quad (3.26)$$

$$(-\omega^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \kappa^2)Ae^{ik_\mu X^\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\omega| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \kappa^2} \quad (3.27)$$

Deze vergelijking geeft dus weer hoe een deeltje zich beweegt in ruimtetijd, gebaseerd op golfgetallen  $k_i$ , de hoekfrequentie en het potentiaal van het veld op de positie van het deeltje. Door Euler's identiteit te gebruiken, vinden we de reële oplossingen.

$$\phi = Ae^{ik_\mu X^\mu} = A \cos(k_\mu X^\mu) + Ai \sin(k_\mu X^\mu) \quad \Rightarrow \quad \phi_{\text{reëel}} = A \cos(k_\mu X^\mu) \quad (3.28)$$

## 3.5 IJkinvariantie

### 3.5.1 Vectorpotentiaal

Zoals we net zagen is het belangrijk dat we weten welke keuzes we kunnen maken over het potentiaal van een veld. In deze paragraaf bekijken we een bijzondere voorwaarde

---

<sup>8</sup>Het golfgetal kan gezien worden als een hoekfrequentie tot de ruimtelijke coördinaten

waar het potentiaal aan moet voldoen. Daartoe introduceren we het concept van vectorpotentiaal. Als gevolg van de aanwezigheid van een klassiek veld, kan de actie van een bewegend deeltje beïnvloed worden. We zouden dit kunnen aanduiden met een extra term in de uitdrukking van de actie. We noemen deze nieuwe term het vectorpotentiaal. Hierbij herinneren we ons dat de lagrangiaan-dichtheid van deze term ook een scalaire waarde moet zijn. Daartoe geven we de nieuwe lagrangiaan-dichtheid weer met een infinitesimale scalaire waarde  $dX^\mu A_\mu$  maal een bepaalde constante  $\xi$ . Het is belangrijk om op te merken dat we uitgaan van een vrij deeltje dat voldoet aan de lagrangiaan van hoofdstuk 2. In het geval van de lagrangiaan in vergelijking (3.22) is de kinetische energie namelijk ook afhankelijk van het veld. Als we deze lagrangiaan zouden gebruiken, kunnen we dus niet opmerken wat het resulterende effect van het potentiaal is, als gevolg van het veld.

$$S = - \int_a^b \frac{mc^2}{\gamma} d^4x + \xi \int_a^b dX^\mu A_\mu \quad (3.29)$$

### 3.5.2 IJktransformaties

Stel dat het vectorpotentiaal verandert door de afgeleide van een scalaire functie  $W$ . Dan geldt er voor de viervector  $A_\mu$ :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \quad (3.30)$$

Hierdoor krijgen we voor de actie:

$$\begin{aligned} S &= - \int_a^b \frac{mc^2}{\gamma} d^4x + \xi \int_a^b dX^\mu \left( A_\mu + \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \right) \\ &= - \int_a^b \frac{mc^2}{\gamma} d^4x + \xi \int_a^b dX^\mu A_\mu + \xi \int_a^b dX^\mu \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Hierbij merken we op dat de laatste term vereenvoudigd kan worden tot  $\xi (W(b) - W(a))$ . Als het beginpunt en het eindpunt van de beweging niet veranderen, is deze waarde dus constant. Daardoor veranderen de extremen van de toppen veranderen niet ten opzichte van elkaar. Volgens het principe van minste actie blijft de bewegingsvergelijking dan hetzelfde. Dit concept wordt *ijkinvariantie* genoemd. De gegeneraliseerde definitie hiervan is dat de bewegingsvergelijkingen niet veranderen als de gradient van een scalaire functie wordt toegevoegd aan het vectorpotentiaal. Elke veldentheorie moet voldoen aan deze voorwaarde. De optelling van de gradient van een scalaire functie bij het vectorpotentiaal noemen we een *ijktransformatie*. [26][27]



## 3.6 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we gezien dat we een klassieke veldentheorie kunnen definiëren, gebaseerd op een aantal voorwaarden. Als eerste bestudeerden we het concept van Lorentz-invariantie. We zagen dat de waarde een scalair veld altijd invariant is onder de Lorentz-transformaties. Vervolgens hebben we de Lorentz-transformatie van infinitesimale vectoren bekijken, waardoor we een Lorentz-invariante scalaire waarde vonden voor vectorvelden. Daarna hebben we tensoren geïntroduceerd en zagen we dat de Lorentz-transformaties in een tensorveld worden weergegeven door de combinatie van een aantal matrices. Door middel van Lorentz-invariantie zagen we een duidelijk verband tussen de speciale relativiteitsleer en de klassieke veldentheorie. Vervolgens definieerden we de actie en de Euler-Lagrange vergelijking voor velden. Dit konden we doen aan de hand van het principe van lokaliteit. Vervolgens hebben we met enkele vereenvoudigingen de bewegingsvergelijkingen van een deeltje in een veld afgeleid. Afsluitend zagen we dat alle veldentheorieën ijk invariant zijn.

Een klassieke veldentheorie moet dus voldoen aan vier voorwaarden: de actie van een beweging is hetzelfde in elk referentiekader; het veld bevat waarden die invariant zijn onder de Lorentz-transformaties; alle punten in het veld moeten lokaal zijn; het veld is ijk invariant.

In het volgende hoofdstuk zullen we bekijken waar een klassieke veldentheorie tot in staat is, met betrekking tot het beschrijven van fundamentele krachten.



# Hoofdstuk 4

## Fundamentele krachten

Nu we alle voorwaarden voor een klassieke veldentheorie hebben bekeken, kunnen we bestuderen waar deze theorie tot in staat is. Daartoe zullen we zien welke fundamentele krachten de klassieke veldentheorie kan beschrijven.

### 4.1 De elektromagnetische veldtensor

Als eerste zullen we een poging doen om de elektromagnetische kracht te omschrijven. Deze kracht is de basis voor de interactie tussen geladen deeltjes en magnetische en elektrische velden. Een beschrijving van de elektromagnetische kracht wordt gegeven door de Maxwell vergelijkingen. In de komende paragrafen zullen we deze vergelijkingen afleiden en bestuderen we de consequenties van deze vergelijkingen.

#### 4.1.1 Lorentzkracht

We beginnen met de bewegingsvergelijkingen van een vrij deeltje in een veld met een vectorpotentiaal  $A_\mu$ . Hiervoor gebruiken we de relativistische Euler-Lagrange vergelijking en de actie van paragraaf (3.5). Het enige verschil tussen de relativistische Euler-Lagrange vergelijking en de niet-relativistische variant is dat de tijd vervangen wordt met de eigentijd. Hierbij wordt  $X^\mu$  als algemene coördinaat gebruikt en is de lagrangiaan de integrand van de genoemde actie. Merk op dat de lagrangiaan geïntegreerd wordt over  $d\tau$ .

$$S = - \int_a^b \frac{mc^2}{\gamma} d^4x + \xi \int_a^b \frac{dX^\mu}{d\tau} A_\mu d\tau \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} + \xi \frac{dX^\mu}{d\tau} A_\mu \quad (4.1)$$

Door de lagrangiaan in te vullen, krijgen we het volgende. Hierbij zetten we de drie-snelheid om in een viervector, waarbij we ons herinneren dat  $U^i = \gamma V^i$ . Om het aantal componenten aan beide kanten overeen te laten komen, krijgt de snelheid een covariante griekse index.<sup>1</sup>[28]

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{d}{d\tau} \left( m \frac{dX_\mu}{dt} \gamma + \xi A_\mu \right) = m \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dX_\mu}{d\tau} \right) + \xi \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} = \xi \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} U^\nu \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = \xi \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} U^\nu - \xi \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} \quad (4.3)$$

$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = \xi U^\nu \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right) = \xi U^\nu F_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

Aan de linkerkant van de vergelijking herkennen we de relativistische kracht  $F'_\mu$ . Hierbij geven we met  $F'_\mu$  aan dat de kracht wordt waargenomen in stelsel  $S'$ . De rechterkant van de vergelijking bevat de constante  $\xi$ , de viersnelheid  $U^\nu$  en een combinatie van afgeleiden van het vectorpotentiala tot  $X^\mu$  en  $X^\nu$ . We definiëren de laatste factor als de *veldtensor*  $F_{\mu\nu}$ . Het is belangrijk om op te merken dat de veldtensor niet vergelijkbaar is met de kracht  $F'_\mu$ . Door de uitdrukking verder uit te werken, vinden we de componenten van de veldtensor.

$$F'_\mu = m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = \xi U^0 \left( \frac{\partial A_0}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^0} \right) + \xi U^n \left( \frac{\partial A_n}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^n} \right) \quad (4.5)$$

Door gebruik te maken van  $U^0 = c\gamma$ ,  $P_\mu = mU_\mu$  en  $dt = \gamma d\tau$  krijgen we het volgende resultaat.

$$F'_\mu = m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = \frac{dP_\mu}{d\tau} = \xi c\gamma \left( \frac{\partial A_0}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^0} \right) + \xi U^n \left( \frac{\partial A_n}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^n} \right) \quad (4.6)$$

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{dt} = \xi c \left( \frac{\partial A_0}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^0} \right) + \xi U^n \left( \frac{\partial A_n}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^n} \right) \quad (4.7)$$

Nu definiëren we de elektrische lading  $q$ , het elektrisch veld  $E_m$  en het magnetisch veld  $B_n$  als volgt.

$$\frac{E_m}{c} = \frac{\partial A_0}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^0} \quad B_n = \nabla \times A_n \quad \xi = q \quad (4.8)$$

Op deze manier krijgen we voor het magnetisch veld:

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^3} \quad B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^1} \quad B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^2} \quad (4.9)$$

---

<sup>1</sup>We zullen de motivatie hiervoor niet grondig toelichten.

Na de uitdrukkingen te herschrijven, merken we op dat we de tweede term van vergelijking (4.7) kunnen noteren als het uitproduct van  $U^n$  en  $B_n$ . Als we alle uitdrukkingen combineren, vinden we de *lorentzkracht*  $F_L$ . Ofwel, de kracht die een deeltje met lading  $q$  en snelheid  $U^n$  ondervindt in een elektromagnetisch veld.

$$U^n \times B_n = U^n \left( \frac{\partial A_n}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^n} \right) \quad F_L = qE_m + q(U^n \times B_n) \quad (4.10)$$

### 4.1.2 Structuur van de veldtensor

Door de definitie van de veldtensor  $F_{\mu\nu}$  en de uitdrukkingen voor  $\frac{E_m}{c}$  en  $B_n$  te gebruiken, vinden we de componenten van de veldtensor. Als  $\nu$  en  $\mu$  aan elkaar gelijk zijn, is het resultaat 0. Daardoor zijn alle componenten van de diagonaal gelijk aan 0. Mede hierdoor kunnen we opmerken dat de veldtensor asymmetrisch is. Merk op dat we de contravariante veldtensor verkrijgen door de  $A_\mu$  en  $A_\nu$  in vergelijking (4.4) te vervangen door  $A^\mu$  en  $A^\nu$ .

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_1}{c} & -\frac{E_2}{c} & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

## 4.2 Afleiding van de Maxwell vergelijkingen

### 4.2.1 Vierstroom

Een voorwaarde van de Maxwell vergelijkingen is het behoud van lading. Daarom zullen we de verdeling van lading over ruimtetijd bestuderen. De *ladingsdichtheid*  $\rho$  is de dichtheid van een lading  $dQ$  in een volume  $dV$  in ruimtetijd, zodat  $dQ = \rho dV$ .

$$dQ dX^i = \rho dV dX^i = \rho dV dt \frac{dX^i}{dt} \quad (4.12)$$

We noemen de factor  $\rho \frac{dX^i}{dt}$  de *elektrische stroomdichtheid*  $J$ . Deze waarde beschrijven we met de drievector  $J^i$ . We kunnen dit zien als de verandering van de ladingsdichtheid ten opzichte van de ruimtelijke assen. Merk op dat de stroomdichtheid in de  $X^1$ -richting bijvoorbeeld niet verandert naar  $X^1$ . Er moet namelijk sprake zijn van verandering ten opzichte van de gekozen richting.

$$J^i = \rho \frac{dX^i}{dt} \quad (4.13)$$

We noemen deze vector de elektrische driestroom. Als we uitgaan van ladingsbehoud krijgen we het volgende. Hierbij nemen we de verandering in elektrische stroomdichtheid negatief.

$$dQ = -\frac{\partial J^i}{\partial X^i} dV dt \quad d\rho = -\frac{\partial J^i}{\partial X^i} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J^i}{\partial X^i} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J^i = 0 \quad (4.15)$$

Doorgaans wordt dit de continuïteitsvergelijking genoemd. Als er aan deze vergelijking wordt voldaan, blijft de lading dus behouden. Vervolgens kunnen we een viervector van de elektrische stroomdichtheid en de ladingsdichtheid opstellen, ofwel de vierstroom. We definiëren  $c\rho$  als de  $J^0$  component van de elektrische vierstroom zodat:

$$J^\mu \iff (c\rho, J^1, J^2, J^3) \Rightarrow \frac{\partial J^\mu}{\partial X^\mu} = 0 \quad (4.16)$$

### 4.2.2 Voorwaarden van een elektromagnetisch veld

Nu we het elektrisch- en magnetisch veld hebben gedefinieerd en een uitdrukking hebben gevonden voor de vierstroom, kunnen we de bewegingsvergelijkingen van het veld opstellen. Ten eerste moet het veld lokaal zijn, ofwel de lagrangiaan-dichtheid moet afhankelijk zijn van  $\phi$ ,  $\partial_\mu \phi$  en  $X^\mu$ . Daarnaast is de lagrangiaan een scalaire waarde, zodat de lagrangiaan Lorentz-invariant is. We zullen deze scalaire waarde opbouwen uit de elektromagnetische veldtensor. Door de covariante veldtensor te vermenigvuldigen met de contravariante versie krijgen we namelijk een invariante scalaire waarde. Dit is vergelijkbaar met de vermenigvuldiging van twee eerstegraads tensoren (viervectoren) in hoofdstuk 3. De nieuwe lagrangiaan bestaat dus uit een scalaire waarde  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  maal een willekeurige functie  $F(\phi)$ . Nogmaals stellen we deze functie gelijk aan  $\frac{1}{2}$ .

$$\mathcal{L} = F(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.17)$$

Door deze sommatie uit te werken, kunnen we de lagrangiaan herschrijven met het elektrisch- en magnetisch veld, zie vergelijking (4.11).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( -\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) \quad (4.18)$$

De enige voorwaarde die we nog niet hebben gecontroleerd, is ijk invariantie. Door de gradient van een scalaire functie  $W$  aan de covariante viervector  $A_\nu$  toe te voegen,

krijgen we het volgende.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{\partial \left( A_\nu + \frac{\partial W}{\partial X^\nu} \right)}{\partial X^\mu} - \frac{\partial \left( A_\mu + \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \right)}{\partial X^\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} + \frac{\partial \left( \frac{\partial W}{\partial X^\nu} \right)}{\partial X^\mu} - \frac{\partial \left( \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \right)}{\partial X^\nu} \\ &= \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hieruit kunnen we concluderen dat de veldtensor en dus ook de langrangiaan-dichtheid ijk invariant is.[29]

### 4.2.3 Maxwell vergelijkingen in viervectorvorm

Om de Maxwell vergelijkingen af te leiden, bestuderen we wat er gebeurt met de actie, zodra deze wordt aangepast met een bepaalde scalaire waarde. Daartoe bekijken we de verandering in de actie die veroorzaakt wordt door de vierstroom  $J^\mu$  maal het vectorpotentiaal  $A_\mu$ . Merk op dat deze waarde scalair is, omdat er sprake is van een sommatie over contravariante en covariante viervectoren. Hierbij bestuderen we alleen de term van de actie van het vectorpotentiaal, omdat we al weten dat  $F_{\mu\nu}$  ijk invariant is. We noteren deze term met  $\Delta S$ .

$$S = \int_a^b \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x + \int_a^b J^\mu A_\mu d^4x \quad \Delta S = \int_a^b J^\mu A_\mu d^4x \quad (4.20)$$

Als we dan controleren of de nieuwe term ook ijk invariant is, merken we het volgende op. Hierbij maken we gebruik van partieel integreren. Dit houdt in dat er wordt geïntegreerd tot de individuele componenten, waarbij het teken verandert en de partiële afgeleide naar de andere factor verplaatst.

$$\Delta S = \int_a^b J^\mu \left( A_\mu + \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \right) d^4x = \int_a^b J^\mu A_\mu d^4x + \int_a^b J^\mu \frac{\partial W}{\partial X^\mu} d^4x \quad (4.21)$$

$$\Delta S = \int_a^b J^\mu A_\mu d^4x + \int_a^b \frac{\partial J^\mu}{\partial X^\mu} W d^4x = \int_a^b J^\mu A_\mu d^4x \quad (4.22)$$

De nieuwe term  $J^\mu A_\mu$  is dus ook ijk invariant en scalair. Merk op dat we dus te maken hebben met positieve vierstroom. Daarom zullen we deze term ook verwerken in de langrangiaan. De langrangiaan wordt dus:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \quad (4.23)$$

---

<sup>2</sup>Hetzelfde resultaat wordt verkregen door de gradient op te tellen bij de contravariante viervector.

Voordat we de bewegingsvergelijkingen van het veld kunnen opstellen, is het erg belangrijk om aan te duiden dat het vectorpotentiaal bepaalt op welke manier een deeltje in het veld wordt beïnvloedt. De veldfunctie  $\phi$  is dus gelijk aan het vectorpotentiaal  $A_\mu$ . Als gevolg krijgen we voor de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \quad (4.24)$$

Als we de lagrangiaan-dichtheid invullen, krijgen we na herschrijven de Maxwell vergelijkingen in viervectorvorm.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right)} = F^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right)} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial X^\nu} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = J^\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial X^\nu} = J^\mu \quad (4.26)$$

Doorgaans wordt de scalaire functie  $J^\mu A_\mu$  vermenigvuldigd met constante  $\mu_0$ , zodat we uiteindelijk een extra factor  $\mu_0$  bij de maxwellvergelijkingen krijgen. Deze factor wordt de *magnetische permeabiliteit* van een systeem genoemd. Bovendien kan de lichtsnelheid herschreven worden met de magnetische permeabiliteit en de *dielektrische constante*  $\epsilon_0$ .<sup>3</sup>

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial X^\nu} = \mu_0 J^\mu \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad (4.27)$$

De linker vergelijking bevat twee van de vier maxwell vergelijkingen. Met behulp van de definities van elektrische en magnetische velden zullen we de overige twee vergelijkingen afleiden.[30]

#### 4.2.4 Maxwell vergelijkingen in drievectorvorm

Om de eerste Maxwell vergelijking in drievectorvorm te schrijven, bekijken we het geval waarbij  $\mu = 0$ . Hierbij kan  $\mu_0 J^0$  dus vereenvoudigd worden tot  $\mu_0 c \rho$ .

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial X^\nu} = \frac{\partial}{\partial X^1} \left( \frac{E_1}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial X^2} \left( \frac{E_2}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial X^3} \left( \frac{E_3}{c} \right) = \mu_0 J^0 = \mu_0 c \rho \quad (4.28)$$

---

<sup>3</sup>We zouden dit kunnen afleiden door middel van de Maxwell vergelijkingen in drievectorvorm, maar voor het gemak zullen we de constanten hier alvast toepassen.



Vervolgens kunnen we de linkerkant van de vergelijking vereenvoudigen met de divergentie. Het resultaat is een van de vier Maxwell vergelijkingen.

$$\nabla \cdot E_m = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4.29)$$

De tweede vergelijking krijgen we door de Maxwell vergelijkingen in viervectorvorm uit te schrijven, waarbij we  $\mu$  vervangen door een latijnse index  $p = 1, 2, 3$ . We krijgen het volgende resultaat:

$$\frac{\partial F^{p\nu}}{\partial X^\nu} = -\frac{\partial}{\partial X^0} \left( \frac{E_m}{c} \right) + \nabla \times B_n = \mu_0 J^p \quad \Rightarrow \quad \nabla \times B_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_m}{\partial t} = \mu_0 J^p \quad (4.30)$$

Tijdens de afleiding van de overige twee Maxwell vergelijkingen zullen we gebruikmaken van twee wiskundige identiteiten. Namelijk, de rotatie van de gradient is gelijk aan 0 en de divergentie van de rotatie is gelijk aan 0. Als we ons de definitie van het magnetisch en elektrisch veld herinneren, krijgen we het volgende.<sup>4</sup>

$$B_n = \nabla \times A_n \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot B_n = \nabla \cdot (\nabla \times A_n) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{E_m}{c} = \frac{\partial A_0}{\partial X^m} - \frac{\partial A_m}{\partial X^0} = -\frac{\partial A_m}{\partial X^0} + \nabla A_0 \quad (4.32)$$

$$\nabla \times \frac{E_m}{c} = -\nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial A_m}{\partial t} + \nabla \times \nabla A_0 = -\nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial A_m}{\partial t} \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{c} (\nabla \times E_m) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A_m) \quad \Rightarrow \quad \nabla \times E_m = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \quad (4.34)$$

Uiteindelijk hebben we dus de elektromagnetische kracht kunnen beschrijven door middel van de Maxwell vergelijkingen. Deze vergelijkingen geven aan op welke manier het elektromagnetische veld zich gedraagt; eventueel in de aanwezigheid van een lading of stroom. Om dit wonderbaarlijke resultaat te relativiseren aan bekendere natuurkunde, zullen we een van de wetten van elektromagnetisme afleiden. De wetten van elektromagnetisme zijn consequenties van de Maxwell vergelijkingen.[31][32]

## 4.3 Wetten van elektromagnetisme

### 4.3.1 Stelling van Gauss

Voordat we een van de wetten van elektromagnetisme af kunnen leiden, moeten we de stelling van Gauss introduceren. Deze stelling zegt dat de integraal van de divergentie

---

<sup>4</sup>Hierbij zijn vergelijkingen (4.31) en (4.34) dus de laatste twee Maxwell vergelijkingen.

van een vectorveld  $\vec{V}$  over een volume  $\Omega$  gelijk is aan de integraal van het uitproduct van  $\vec{V}$  en de normaalvector  $\hat{n}$ , over het bijbehorende oppervlak  $S$ . Met het dakje geven we aan dat de normaalvector een eenheidsvector is. Bovendien staat de normaalvector loodrecht op het betreffende oppervlak. Merk hierbij op dat  $dS$  geen ruimtetijdinterval is.[33]

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} d^3x = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dS \quad (4.35)$$

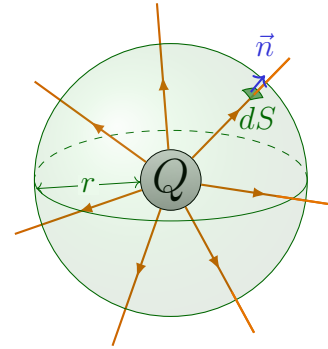
### 4.3.2 Een voorbeeld: de wet van Coulomb

Stel dat we de kracht van een elektrisch veld op een puntlading op het oppervlak van een bol willen berekenen. Om dit te bereiken, maken we gebruik van de stelling van Gauss. Als eerste integreren we over de ladingsdichtheid tot de ruimtelijke coördinaten om de totale lading te krijgen. Hierdoor tellen we dus infinitesimale stukjes van het volume op; dit wordt vermenigvuldigd met de ladingsdichtheid.

$$Q = \int_{\Omega} \rho d^3x = \int_{\Omega} \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) d^3x = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS \quad (4.36)$$

Ook weten we dat de veldlijnen van het elektrisch veld loodrecht op het oppervlak van de bol staan, ongeacht de lading. Bovendien is een bol symmetrisch, zodat de waarde van het elektrisch veld gelijk is op elk punt van het oppervlak. Hieruit volgt:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = E(\vec{r}) = E(r) \hat{n} \cdot \hat{n} = E(r) \quad (4.37)$$



Figuur 4.1: Een normaalvector op oppervlak  $dS$  ten opzichte van lading  $Q$

Als we gebruik maken van het gegeven dat de oppervlakte van een bol  $4\pi r^2$  is en dat er voor een elektrisch veld geldt  $F = qE$ , krijgen we als resultaat de wet van Coulomb.

$$Q = \epsilon_0 \int_S E(r) dS = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.38)$$

$$F = qE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} = f \frac{qQ}{r^2} \quad (4.39)$$

## 4.4 Relativistische gravitatie

Nu we de elektromagnetische kracht hebben omschreven met de Maxwell vergelijkingen, kunnen we ons richten op de verklaring van gravitatie. Daartoe zullen we

newtoniaanse gravitatie aanpassen en verwerken in een klassieke veldentheorie.

#### 4.4.1 Newtoniaanse gravitatie

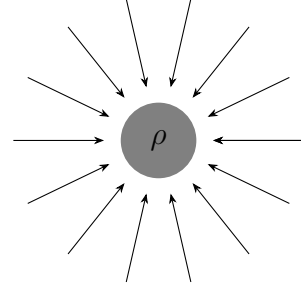
Newton's theorie van gravitatie gaat uit van een massa met dichtheid  $\rho$  die een invloed uitoefent op omringende deeltjes.<sup>5</sup> Deze massa veroorzaakt een zogenoemd zwaartekrachtsveld. De invloed van dit veld wordt weergegeven met de volgende vergelijking. Hierbij is  $G$  de gravitatieconstante en  $g$  de gravitatieversnelling. We zullen deze vergelijking overigens niet afleiden.

$$\nabla \cdot g = -4\pi G\rho \quad (4.40)$$

Dit betekent dat de grootte van verandering, van de gravitatieversnelling richting het middelpunt van een massa gelijk is aan  $-4\pi G\rho$ . Bovendien is het zwaartekrachtsveld alleen naar het middelpunt van een massa gericht, zodat  $\nabla \times g = 0$ , zie figuur (4.2). Doorgaans wordt  $g$  gedefinieerd als de negatieve gradient van de veldfunctie  $\phi$  voor het zwaartekrachtsveld. Hieruit volgt dat:

$$g = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (4.41)$$

Dit is dus de niet-relativistische bewegingsvergelijking voor een gravitatieveld. De werkelijke beweging van een object in een zwaartekrachtsveld kan dus bij kleine snelheden benaderd worden met vergelijking (4.41). Een ander groot probleem is dat dit gravitatieveld niet lokaal is. Ofwel, als een massa verplaatst wordt door middel van een botsing of dergelijke, dan heeft dit direct consequenties voor alle punten in het stelsel. Door lokaliteit te integreren in deze theorie wordt de invloed van deze verandering als het ware verspreid door het stelsel.



Figuur 4.2: Niet-relativistisch zwaartekrachtsveld

#### 4.4.2 Voorwaarden van een relativistisch gravitatieveld

Voordat we de bewegingsvergelijkingen van een relativistisch zwaartekrachtsveld afleiden, controleren we of het veld voldoet aan de principes van een klassieke veldentheorie. Allereerst moet de actie van een beweging gelijk zijn in elk referentiekader en moet het veld lokaal zijn. Als gevolg is de lagrangiaan-dichtheid afhankelijk van  $\phi$ ,  $\partial_\mu\phi$  en  $X^\mu$ .

<sup>5</sup>We kunnen  $\rho$  beter zien als een continue massaverdeling over de ruimte. Dit geeft een betere interpretatie voor als we later de lagrangiaan-dichtheid van het veld afleiden.

Vervolgens moet het veld een invariante waarde bevatten, waarmee we de lagrangiaan kunnen opbouwen. Om dit te bereiken, vermenigvuldigen we de contravariante afgeleide van de veldfunctie met de covariante afgeleide, zodat we een invariante scalaire waarde krijgen. Dit is hetzelfde als de eerste term van de algemene lagrangiaan in hoofdstuk 3. Bovendien is het vereist dat de lagrangiaan-dichtheid van het veld ijk-invariant is. We verkrijgen het potentiaal door de massadichtheid te vermenigvuldigen met de veldfunctie. Voor het gemak vermenigvuldigen we de gehele lagrangiaan met  $-1$ . Doorgaans wordt  $F(\phi)$  gelijkgesteld aan  $\frac{1}{8\pi G}$  voor een gravitatieveld. Hierdoor krijgen we het volgende resultaat.

$$\mathcal{L} = -F(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = \frac{1}{8\pi G}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \rho\phi \quad (4.42)$$

Vervolgens bekijken we of het potentiaal ijk-invariant is. Daartoe voegen we de gradient van een scalaire functie  $W$  toe aan de veldfunctie in de term van de potentiële energie. Nogmaals geven we de actie van de term met de potentiële energie aan met  $\Delta S$ . Voor de actie krijgen we dan het volgende:<sup>6</sup>

$$S = \int_a^b \frac{1}{8\pi G} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \, d^4x + \int_a^b \rho \left( \phi + \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \right) d^4x \quad (4.43)$$

$$\Delta S = \int_a^b \rho \left( \phi + \frac{\partial W}{\partial X^\mu} \right) d^4x = \int_a^b \rho\phi \, d^4x + \rho \int_a^b \frac{\partial W}{\partial X^\mu} d^4x \quad (4.44)$$

Hieruit concluderen we dat de actie toeneemt met  $\rho(W(b) - W(a))$ . Hierdoor veranderen de extremen van de actie niet ten opzichte van elkaar, zodat de bewegingsvergelijking hetzelfde blijft.[34]

### 4.4.3 De bewegingsvergelijkingen

Vervolgens vullen we de lagrangiaan-dichtheid in bij de Euler-Lagrange vergelijking voor velden. Op deze manier kunnen verkrijgen we de bewegingsvergelijking voor een relativistisch gravitatieveld:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right)} = \frac{1}{4\pi G} \partial^\mu \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right)} = \frac{1}{4\pi G} \square \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \rho \quad \Rightarrow \quad \square \phi = 4\pi G \rho \quad (4.46)$$

---

<sup>6</sup>De overige term  $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$  neemt ook met een bepaalde constante toe, in het geval dat de gradient van een scalaire functie hierbij wordt opgeteld. Het bewijs dat deze term ijk-invariant is, is echter vrij complex en dit zullen we dus niet behandelen.

We concluderen dat deze vergelijking een relativistisch zwaartekrachtsveld beschrijft. Uiteindelijk hebben we dus een uitdrukking gevonden voor de relativistische interactie tussen massa's. Ofwel, een omschrijving van de zwaartekracht.[35]

## 4.5 Supplement: De algemene relativiteitstheorie

Deze supplementaire paragraaf geeft de lezer een kort overzicht van de algemene relativiteitstheorie. De informatie die in deze paragraaf behandeld wordt, maakt dus geen deel uit van het antwoord op de onderzoeksvraag. Het doel hiervan is om de lezer een idee te geven van de geavanceerdere klassieke veldentheorieën voor gravitatie. Het vereist namelijk veel meer achtergrondinformatie om de algemene relativiteitstheorie volledig te verwerken in dit verslag.

### 4.5.1 Introductie

De afleiding voor de bewegingsvergelijking in de vorige paragraaf gaat uit van zogenaamde *platte ruimtetijd*. Dit betekent dat de verhouding tussen de assen gegeven wordt door de Minkowski-tensor  $\eta_{\mu\nu}$ , zoals we zagen in hoofdstuk 3. Het blijkt echter dat de verklaring van gravitatie veel fundamenteeler is dan dat. Een theorie die gravitatie op een fundamenteelere manier weet te beschrijven, is de algemene relativiteitstheorie. Deze theorie is gebaseerd op het principe van de kromming van ruimtetijd: in de aanwezigheid van een massa wordt het pad van een deeltje afgebogen. Natuurlijk is de algemene relativiteitstheorie een klassieke veldentheorie. De theorie voldoet namelijk aan het principe van lokaliteit en het principe van minste actie. Lorentz-invariantie en ijk-invariantie zijn ook geïntegreerd in de theorie.

### 4.5.2 Verandering van tensoren

In speciale relativiteit wordt gebruikgemaakt van de Minkowski-tensor om ruimtetijdintervallen weer te geven. Deze tensor is hetzelfde voor alle referentiekaders. In de algemene relativiteitsleer zijn de ruimtetijdintervallen echter gebaseerd op een metrische tensor  $g_{\mu\nu}$ . Deze tensor is een functie van de eigentijd van een specifiek referentiekader. Als gevolg krijgen we voor het kwadraat van de ruimtetijdintervallen:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \implies ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (4.47)$$

Vervolgens wordt de Lorentz-transformatie matrix  $L^\mu{}_\nu$  vervangen met een andere matrix  $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ . Deze matrix is ook een functie van  $X^\mu$  en  $g_{\mu\nu}$ . [36]

### 4.5.3 De geodeet

Als we de bewegingsvergelijking van de algemene relativiteitsleer uit zouden werken, krijgen we uiteindelijk de *geodeet*. De geodeet is de mogelijke wereldlijn voor een vrij deeltje dat zich verplaatst tussen twee punten in gekromde ruimtetijd. De enige voorwaarde hiervoor is dat de positie van het deeltje tijdachtig gescheiden is van de oorsprong. De geodeet wordt weergegeven met de volgende vergelijking.

$$\frac{d^2 X^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} = 0 \quad (4.48)$$

### 4.5.4 Het equivalentieprincipe

Een fundamenteel principe voor de algemene relativiteitstheorie is het equivalentieprincipe. Dit houdt in dat twee waarnemers alle natuurkundige wetten op dezelfde manier ervaren, ook als de ene waarnemer zich in een zwaartekrachtsveld bevindt en de andere waarnemer niet. Bij deze uitspraak wordt er uitgegaan van een homogeen gravitatieveld. Daarnaast zegt het equivalentieprincipe dat elk willekeurig zwaartekrachtsveld kan worden opgedeeld in voldoende kleine gedeelten van ruimtetijd, zodat het zwaartekrachtsveld benaderd kan worden met een homogeen zwaartekrachtsveld.<sup>7</sup>

### 4.5.5 De veldvergelijkingen

Alle veldvergelijkingen zijn gebaseerd op het principe van equivalentie en de metrische tensor. Ook is de lagrangiaan ijk invariant, Lorentz-invariant en is het veld lokaal. Bovendien volgt er uit het equivalentieprincipe dat de actie hetzelfde moet zijn voor elk referentiekader. Hieruit kunnen we dus concluderen dat de algemene relativiteitstheorie ook voldoet aan de eisen van een klassieke veldentheorie.[37]

Als we de algemene relativiteitstheorie grondig zouden bestuderen, zouden we uiteindelijk op de *Einstein-Hilbert actie* voor het veld uitkomen. Vervolgens kan men met behulp van de *Einsteintensor*  $G_{\mu\nu}$  de bewegingsvergelijkingen van het veld opstellen om het gedrag van een relativistisch gravitatieveld te beschrijven. Hierbij is  $R_{\mu\nu}$  de Ricci-tensor, deze geeft aan in welke mate de kromming van ruimtetijd afwijkt van platte ruimtetijd.  $R$  zonder indexen is een scalaire waarde die gebaseerd is op de Ricci-tensor.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (4.49)$$

---

<sup>7</sup>We zullen hier niet ingaan op de definitie van 'voldoende klein', dit is namelijk erg wiskundig rigoureus.

Afsluitend krijgt men de volgende veldvergelijkingen, waarbij  $\Lambda$  de kosmologische constante is en  $T_{\mu\nu}$  de energie-impuls tensor. Deze tensor geeft de dichtheid van energie en impuls van het veld weer.[38][39]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.50)$$

## 4.6 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we bekeken waar een klassieke veldentheorie tot in staat is. Daartoe hebben we als alleerst de Lorentz-kracht afgeleid. Hierdoor hebben we elektrische en magnetische velden grondig kunnen definiëren. Bovendien merkten we het verwantschap tussen de twee velden op door middel van de elektromagnetische veldtensor. Vervolgens bekeken we de definitie van een vierstroom en gebruikten we deze om het potentiaal van een elektromagnetisch veld op te stellen. Nadat we zagen dat de gevonden lagrangiaan-dichtheid voldeed aan de voorwaarden van een klassieke veldentheorie, leidden we de veldvergelijkingen af. Dit zijn de Maxwell vergelijkingen in viervectorvorm. Deze vergelijkingen beschrijven ladingen en hun interactie met elektromagnetische velden. Hieruit kunnen we concluderen dat we een omschrijving hebben kunnen vinden voor de elektromagnetische kracht. Afsluitend vereenvoudigde we de Maxwell vergelijkingen tot hun drievectorm. Hierdoor hebben we een van de wetten van elektromagnetisme af kunnen leiden, de Coulombkracht.

Daarnaast hebben we bestudeert wat de newtoniaanse gravitatie precies inhoudt. Vervolgens hebben we de algemene veldlangrangiaan toegepast om de veldvergelijkingen van een relativistisch gravitatieveld te vinden. Hierbij hebben we de massadichtheid in het potentiaal verwerkt. Ook dit gravitatieveld voldeed aan de voorwaarden van een klassieke veldentheorie. Al met al hebben we dus twee bevredigende antwoorden kunnen vinden op de laatste deelvraag.





# Conclusie

De natuurkunde is een van meest fascinerende verschijnselen als gevolg van het menselijk denken. Niet alleen komt deze tak van de wetenschap voort uit nieuwsgierigheid van de menselijke geest, maar het is ook een waardering van creativiteit en een ode aan de kunst van probleemoplossing. Op deze manier zijn er bijzonder veel mogelijkheden om fenomenen in ons universum te beschrijven. Een van die manieren is de klassieke veldentheorie, een krachtige, maar ook elegante natuurkundige theorie.

Allereerst hebben we in dit werkstuk bekeken welke wiskundige en natuurkundige principes vereist waren voor de klassieke veldentheorie. We hebben dynamiek binnen vectorenvelden bekeken. Ook behandelden we een effectieve methode om bewegingsvergelijkingen af te leiden, namelijk, de lagrangiaanse- en hamiltoniaanse mechanica. Vervolgens hebben we de niet-relativistische mechanica achter ons gelaten en zagen zo dat de werkelijkheid veel beter te benaderen is met relativistische theorieën. Een eenvoudig, maar bovenal ingenieus gedachtenexperiment gaf een aanleiding voor het ontstaan van een geheel nieuw vakgebied binnen de natuurkunde, de speciale relativiteitsleer. We bestudeerden de invloed van beweging op de waarneming van gebeurtenissen. Zo zagen we dat elk perspectief, of referentiekader, relatief is.

De vereniging van ruimtetijd vormde de basis voor de voorwaarden van een klassieke veldentheorie. Deze eisen lagen niet altijd voor de hand. We zagen bijvoorbeeld dat elk veld ijkvariant moet zijn. Niet alleen is de resulterende theorie erg krachtig, maar het is ook een elegante combinatie van lagrangiaanse mechanica en speciale relativiteit. Als gevolg waren we in staat om een algemene veldlagrangiaan op te stellen. Vervolgens gebruikten we deze veel omvattende vergelijking om elektromagnetische velden en zwaartekrachtsvelden te beschrijven. Afsluitend hebben we gebruik gemaakt van een potentiaal gebaseerd op de vierstroom en een potentiaal naar aanleiding van de massadichtheid. De wonderbaarlijke resultaten zijn twee veldvergelijkingen voor het elektromagnetische veld en het zwaartekrachtsveld. Een compacte omschrijving van twee van de vier fundamentele krachten die ons universum vormgeven.

Al met al heeft deze bijzondere reis door de verschillende takken van de natuur- en wetkunde geleid tot een bevredigend resultaat. Toch zagen we dat de verwerking van de newtoniaanse mechanica in het concept van een klassieke veldentheorie niet de meest fundamentele beschrijving van gravitatie gaf. De algemene relativiteitsleer, een geavanceerdere klassieke veldentheorie, poneert namelijk een veel fundamenteelere stelling. Platte ruimtetijd is namelijk niet alomtegenwoordig.

Geeft de algemene relativiteitsleer een perfecte beschrijving van gravitatie? De enige manier om op deze vraag een antwoord te krijgen, is door de meest fundamentele axiomen in twijfel te trekken en door theorieën te blijven ontwikkelen die een steeds betere beschrijving van de werkelijkheid geven. Door te streven naar een perfecte omschrijving van de fundamentele krachten hopen we uiteindelijk terecht te komen bij een theorie die alles omchrijft. Een ideale beschrijving van de relatie tussen fundamentele krachten en natuurkundige theorieën.

- *Einde* -

# Bijlage A

## Evaluatie

De afgelopen jaren heb ik een sterke interesse voor theoretische natuurkunde ontwikkeld. Met wiskunde als fundament en de beschrijving van het universum als doel wist dit vakgebied mij steeds nieuwsgieriger te maken. Langzamerhand leerde ik over de verschillende theorieën: de speciale relativiteitsleer, quantummechanica, snaartheorie en uiteindelijk de quantumveldentheorie.

Het idee van een quantumveldentheorie heeft mij sindsdien erg geïnteresseerd. De mogelijkheid om deeltjes te beschrijven in termen van een veld vond ik erg elegant. Toch vereiste de quantumveldentheorie de lastige combinatie van quantummechanica en het concept van een veldentheorie. Later realiseerde ik mij dat er ook veldentheorieën zijn waarin geen quantumgedrag verwerkt wordt, zodat deze als fundament voor de gequantiseerde veldentheorieën kunnen functioneren: de klassieke veldentheorieën. Het onderwerp was veel te interessant om niet te gebruiken voor mijn profielwerkstuk.

Twee maanden later heb ik de eindversie in mijn handen, tevreden over het resultaat. Het is gelukt om twee van de vier fundamentele krachten met de theorie te beschrijven. Met als kanttekening dat de zwaartekracht op een fundamenteelere manier beschreven kan worden door de algemene relativiteitsleer.

Bovendien ben ik erg tevreden over de opbouw van het werkstuk. Hoofdstuk 1 is erg toegankelijk en vereist wiskunde op atheneum 5 niveau. Vervolgens probeerde ik de speciale relativiteitsleer zo duidelijk mogelijk uit te leggen om het zo toegankelijk mogelijk te maken. Hoofdstuk 3 en 4 zijn daarentegen erg wiskundig en vereisen veel aandacht van de lezer. Daarom had ik als doelgroep niet specifiek de VWO 6 leerling in gedachten, maar de eerstejaarsstudent van een bachelor natuurkunde.

Het onderzoek naar de klassieke veldentheorie bestond voornamelijk uit het verzamelen van literatuur, het uitschrijven van afleidingen en het zo duidelijk mogelijk opschrijven van de informatie. Dit zorgde uiteindelijk voor een samenhangend netwerk aan achtergrondinformatie, afleidingen en resultaten. Het lastigste van alles was om de informatie duidelijk op te schrijven, maar door middel van de adviezen van mijn begeleider is dat uiteindelijk gelukt.

Om dit resultaat neer te zetten, heb ik efficiënt aan mijn profielwerkstuk moeten werken. In plaats van acht maanden heb ik twee maanden de tijd gehad om mijn profielwerkstuk te schrijven. Dit werd veroorzaakt doordat ik pas later tijdens dit schooljaar in de zesde klas ben geplaatst. Vorig jaar ben ik summa cum laude geslaagd voor de HAVO, met het idee om in VWO 5 een aantal vakken versneld af te ronden, zodat ik in het jaar daarop meer tijd zou hebben om vakken aan de universiteit te volgen. In december bleek echter dat dit niet mogelijk was, waardoor ik genoodzaakt was om in alle vakken versneld examen te doen. Om deze reden ben ik pas in eind december begonnen met mijn profielwerkstuk.

Ondanks deze moeilijkheden was mijn begeleider meteen bereid om mij te ondersteunen bij het werkstuk. We hebben elkaar regelmatig gesproken over de voortgang. Door middel van zijn advies is het schrijven van het werkstuk soepel verlopen. Bij het schrijven van het profielwerkstuk kreeg ik ook alle vrijheid. Dit gaf mij de mogelijkheid om onderwerpen uit de natuurkunde te behandelen, waar ik erg geïnteresseerd in was.

Op het moment dat ik begon met mijn profielwerkstuk had ik al veelbelovende berichten over  $\text{\LaTeX}$  gehoord. In het begin was het erg wennen aan het gebruik van code om vergelijkingen en afbeeldingen weer te geven, maar tijdens het schrijven van het werkstuk heb ik veel geleerd over het programma. De natuur- en wiskunde van het werkstuk zijn uiteindelijk mooi verweven samen met het gebruik van  $\text{\LaTeX}$ . Bovendien zal ik in de toekomst veel profijt hebben van de kennis die heb opgedaan over  $\text{\LaTeX}$ . Al met al, het is een verstandige keuze geweest om  $\text{\LaTeX}$  te gebruiken voor mijn werkstuk.

Daarnaast heb ik ook veel kennis opgedaan over de natuurkunde en wiskunde. Deze bijzondere reis door de verschillende onderzoeksgebieden heeft mij veel meer inzicht gegeven in natuurkundige theorieën en hun relatie met fundamentele krachten. Het is een mooie afsluiting van mijn loopbaan op de middelbare school en een drijvende kracht voor mijn passie voor de natuurkunde.

# Bijlage B

## Logboek

Werkzaamheden	Tijdsduur	Datum	Opmerkingen
Layout kloppend maken en titelpagina afmaken	25/12/22	5 uur en 30 minuten	n.v.t.
Onderzoekdoen voor de keuze van het onderwerp	27/12/22	3 uur en 30 minuten	n.v.t.
Onderzoekdoen voor de keuze van het onderwerp	28/12/22	4 uur	n.v.t.
Controleren of het onderwerp geschikt is en een overzicht maken van de informatie	29/12/22	4 uur	n.v.t.
Indeling van het werkstuk maken en de hoofdvraag formuleren	31/12/22	2 uur	n.v.t.
Stof categoriseren, deelvragen formuleren en introductie afmaken.	3/1/23	4 uur en 30 minuten	n.v.t.
Beginnen aan hoofdstuk 1	5/1/23	3 uur	n.v.t.
Hoofdstuk 1 tot rotatie, divergentie en gradient afgemaakt	6/1/23	2 uur	n.v.t.

Hoofdstuk 1 afmaken tot de lagrangiaanse en hamiltoniaanse mechanica	10/1/23	3 uur en 30 minuten	n.v.t.
Afspraak met begeleider	11/1/23	15 minuten	Hoofdvragen en deelvragen zijn in orde
Hoofdstuk 1 controleren en aanpassen	13/1/23	5 uur	n.v.t.
Hoofdstuk 1 nog aanpassen	16/1/23	3 uur	n.v.t.
Stuk over bewegende referentiekaders schrijven	20/1/23	3 uur	n.v.t.
Stuk over postulaten en tijdrek schrijven	22/1/23	2 uur	n.v.t.
Afspraak met begeleider	25/1/23	15 minuten	De introductie en hoofdstuk 1 zijn besproken
Aanpassingen gemaakt aan hoofdstuk 1 en 2	1/2/23	1 uur en 30 minuten	n.v.t.
Artikel van Minkowski lezen en stuk over invariantie schrijven	4/2/23	6 uur	n.v.t.
Paragrafen over actie en energie schrijven	5/2/23	6 uur en 30 minuten	n.v.t.
De conclusie van hoofdstuk 2 schrijven	6/2/23	1 uur	n.v.t.
Tot scalaire velden afmaken	8/2/23	3 uur	n.v.t.
Literatuur verzamelen en de relativistische veldlagrangiaan afleiden	11/2/23	2 uur	n.v.t.
Literatuur verzamelen	12/2/23	4 uur	n.v.t.
Tot de veldtensor afmaken	13/3/23	2 uur en 30 minuten	n.v.t.
Tot ijkvariantie schrijven	15/2/23	2 uur en 30 minuten	n.v.t.
Conclusie van hoofdstuk 3 schrijven	16/2/23	2 uur	n.v.t.

Afspraak met begeleider	17/2/23	45 minuten	Hoofdstuk 2 en gedeeltelijk hoofdstuk 3 besproken. De schrijfstijl is misschien iets te compact.
Verbeteringen maken en literatuur verzamelen	18/2/23	4 uur en 10 minuten	Feedback van eerstejaarsstudent dubbele bachelor wisnat leiden verwerken.
Tot en met elektrische vierstroom schrijven	19/2/23	4 uur	n.v.t.
Tot viervectorvorm schrijven	20/2/23	3 uur en 30 minuten	n.v.t.
Alles tot de elektromagnetische kracht afmaken en voorpagina afmaken	21/2/23	7 uur	n.v.t.
Tot algemene relativiteit schrijven en verbeteringen aanbrengen	22/2/23	5 uur	n.v.t.
Afspraak met begeleider	23/2/23	15 minuten	De structuur van hoofdstuk 3 en 4 is in orde.
De conclusie en de evaluatie schrijven. Het logboek invoegen en de bibliografie controleren.	23/2/23	5 uur	n.v.t.
Alles nog grondig controleren doornemen en verbeteren op taalfouten.	24/2/23	5 uur	n.v.t.
Het profielwerkstuk inleveren	24/2/23	5 minuten	Het werkstuk is succesvol afgerond





# Bijlage C

## Overige verwijzingen

### Afbeeldingen

- Afbeelding op de voorpagina [40]
- Figuur 1: zelf gemaakt met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
- Figuur 1.1: zelf gemaakt met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
- Figuur 1.2: aangepast aan de hand van [41]
- Figuur 1.3: zelf gemaakt met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
- Figuur 1.4: aangepast aan de hand van [42]
- Figuur 2.1: zelf gemaakt met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
- Figuur 2.2: zelf gemaakt met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
- Figuur 4.1: aangepast aan de hand van [43]
- Figuur 4.2: zelf gemaakt met L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

### Overig

- De layout van het profielwerkstuk is deels geïnspireerd door [44]
- Quote Albert Einstein [45]



# Bibliografie

- [1] Steven Weinberg. “The Making of the Standard Model”. In: (2003). DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2004-01761-1>.
- [2] Peter Woit. *Not even wrong*. Basic Books, 2006. ISBN: 9780465092765.
- [3] Andrew Steane. “Relativity Made Relatively Easy”. In: Oxford University Press, 2011. Hfdstk. 18.
- [4] Gleb Arutyunov. “Classical field theory”. In: (2011).
- [5] Richard Earl. *Towards higher mathematics*. Cambridge University Press, 2017. ISBN: 9781316614839.
- [6] K.F.Riley et al. *Mathematical methods for physics and engineering*. Cambridge University Press, 2020. ISBN: 9780521679718.
- [7] Murray R. Spiegel. *Vector Analysis*. McGraw-Hill, 1959.
- [8] Leonard Susskind. *Classical mechanics*. The Theoretical minimum. Penguin Books, 2014.
- [9] S.T. Thornton et al. *Classical Dynamics*. Thomson Brooks Cole, 2004.
- [10] Karl Weierstrass. *Mathematische Werke*. Cambridge University Press, 2013.
- [11] David Morin. *Introductory classical mechanics*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] Leonard Susskind. *Special Relativity and Classical Field Theory*. The Theoretical Minimum. Penguin Science, 2017. ISBN: 9780141985015.
- [13] Albert Einstein. “On the electrodynamics of moving bodies”. In: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), p. 891–921. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [14] H.D. Young en R.A. Freedman. *University Physics with Modern Physics*. Pearson Education Limited, 2020.

- [15] H. Minkowski. “Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern”. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1908). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01455871>.
- [16] Albert Einstein. “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?” In: *Annalen der Physik* 323.13 (1905), p. 639–641. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053231314>.
- [17] H. Goldstein et al. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2000.
- [18] A. Einstein. “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”. In: *Annalen der Physik* 354.7 (1916), p. 769–822. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>.
- [19] J.R. d’Alembert. *Recherches sur differens points importants du systeme du monde troisième partie*. C. David, 1756.
- [20] A.A. Ungar. “Thomas rotation and the parametrization of the lorentz transformation group”. In: *Foundation of Physics Letters* 1.1 (1988), p. 57–89. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00661317>.
- [21] R. Kaye and R. Wilson. *Linear Algebra*. Oxford Science Publications, 1998. ISBN: 0198502370.
- [22] P. Renteln. *Manifolds, tensors and forms: An introduction for mathematicians and physicists*. Cambridge University Press, 2014.
- [23] R.E. Peierls. “The commutation laws of relativistic field theory”. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 214 (1952). DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1952.0158>.
- [24] R. Brunetti. “The Generally Covariant Locality Principle – A New Paradigm for Local Quantum Field Theory”. In: *Communications in Mathematical Physics* 237 (2003), p. 31–68. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-003-0815-7>.
- [25] R. Banerjee et al. “Gauge symmetry and W-algebra in higher derivative systems”. In: (2010). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1012.2969>.
- [26] I.V. Tyutin. “Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism”. In: *P.N. Lebedev Physical Institute* 39 (1975). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0812.0580>.
- [27] S. Pokorski. *Gauge field theories*. Cambridge University Press, 1987.
- [28] S. Chanda et al. “Geometrical formulation of relativistic mechanics”. In: (2017). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.01921>.

- [29] G.A. Lalazissis et al. “A New Parameterization for the Lagrangian Density of Relativistic Mean Field Theory”. In: *Physics review C* 55 (1996). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.55.540>.
- [30] L.D. Landau et al. *The classical theory of fields*. Pergamon Press, 1971.
- [31] Freeman Dyson. “Comment on ‘Feynman’s proof of the Maxwell equations,’ by F.J. Dyson”. In: *American Journal of Physics* 58 (1990). DOI: <https://doi.org/10.1119/1.16188>.
- [32] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 1999.
- [33] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, 1873.
- [34] J.D. Bekenstein. “Relativistic gravitation theory for MOND paradigm”. In: *Physics Review D* 70.8 (2004). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.083509>.
- [35] J. Franklin. *Classical Field theory*. Cambridge University Press, 2017.
- [36] A. Einstein en A.D. Fokker. “Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls”. In: *Annalen der Physik* 44 (1914). DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.2005517S149>.
- [37] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley en Sons, 1972.
- [38] K. Thorne et al. *Gravitation*. W.H. Freeman en company, 1970. ISBN: 0-7167-0334-3.
- [39] D. Wands. “Extended Gravity Theories and the Einstein-Hilbert Action”. In: *IOP Science, classical and quantum gravity* 11 (1994). DOI: 10.1088/0264-9381/11/1/025.
- [40] M. Escher. *Knopen*. URL: <https://mcescher.com/nl/galerij/wiskundig/>. Geraadpleegd op 21-2-2023.
- [41] TikzBlog. *Plot Vector Field in LaTeX TikZ*. URL: <https://latexdraw.com/plot-vector-field-in-latex-tikz/>. Geraadpleegd op 6-1-2023.
- [42] Alexandros Tsagkaropoulos. *Spherical Coordinates in 3D Plane*. URL: [https://tikz.net/spherical\\_1/](https://tikz.net/spherical_1/). Geraadpleegd op 6-1-2023.
- [43] Izaak Neutelings. *Electric field of a sphere and Gauss’s law*. URL: [https://tikz.net/electric\\_field\\_sphere/](https://tikz.net/electric_field_sphere/). Geraadpleegd op 21-2-2023.

- [44] Joris de Man. “De Banach-Tarskiparadox”. In: (2019). URL: <https://storage.knaw.nl/2022-11/NT-pws-de-banach-tarskiparadox.pdf>.
- [45] Goodreads. *Albert Einstein quotes*. URL: [https://www.goodreads.com/author/quotes/9810.Albert\\_Einstein](https://www.goodreads.com/author/quotes/9810.Albert_Einstein). Geraadpleegd op 23-2-2023.