Brüche

Regeln

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\,d \pm c\,b}{b\,d} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

1. Berechnen Sie

a) $\frac{12}{35} + \frac{5}{14} =$

b) $\frac{\frac{7}{4} - 2}{\frac{5}{6} - 1} =$

c) $\frac{\frac{14}{19} + \frac{7}{38}}{\frac{7}{19} - \frac{9}{38}} =$

d) $\frac{21}{8} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5} - \frac{7}{2}\,\frac{17}{3}\right) =$

2. Fassen Sie zusammen

a) $\frac{b - 2c + a}{3} - \frac{2a - 4b + c}{6} - \frac{b - 3c + a}{2} =$

b) $\frac{x + y}{3} - \frac{3x - 3y}{9} =$

c) $\frac{a - 3}{a + 4} - \frac{a^2 - 9a - 3}{a^2 + a - 12} + \frac{a - 5}{a - 3} =$

d) $\frac{b}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} =$

e) $\frac{a}{a - b} - \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^2 b}{a^3 - b^3} =$

f) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$

3. Vereinfachen Sie so weit wie möglich

a) $\frac{2x - 2y}{3x + 3y} : \frac{x - y}{x + y} =$

b) $\frac{a\,x - a\,y}{b\,x + b\,y} : \frac{b^2\,x - b^2\,y}{a^2\,x + a^2\,y} =$

c) $\frac{\frac{x^3 - x\,y^2}{y}}{\frac{x^3 - x^2\,y}{y^2}} =$

d) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} =$

e) $\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right) =$

f) $\left(1 - \frac{a}{b}\right) : \left(\frac{a}{b} - 1\right)$

g) $\frac{a - \frac{a}{2a\,b + 1}}{1 - \frac{1}{1 - 2a\,b}}$

h) $\frac{\frac{r}{s} + \frac{s}{r} - 2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}$

4. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ Ein Bruch hat den Wert Null, wenn der Zähler Null ist.
- ☐ Ein Bruch hat den Wert Null, wenn der Nenner 0 ist.
- ☐ Ein Bruch ist nur dann positiv, wenn der Zähler positiv ist.
- ☐ Ein Bruch ist negativ, wenn sowohl Zähler als auch Nenner negativ sind.
- ☐ Der Bruch $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6}$ kann vollständig gekürzt werden.

Potenzen und Wurzeln

Definitionen

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$	für $n \in \mathbb{N}^*$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	für $n \in \mathbb{Z};\ a \in \mathbb{R}^*$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	für $n \in \mathbb{Q}^*;\ a \in \mathbb{R}_+^*$
$1^n = 1$	für $n \in \mathbb{Q}^*$	$a^0 = 1$	für $a \in \mathbb{R}^*$	0^0 ist nicht definiert	

Rechenregeln

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$a^n \cdot b^n = (a\ b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

5. Vereinfachen Sie den Term in der ersten Spalte. Eine der rechts davon angegebenen Lösungen ist richtig. Die Buchstaben und Zeichen links von den richtigen Lösungen ergeben nacheinander gelesen einen Lösungsspruch.

$\sqrt[3]{0{,}064}$	F	0,04	H	0,4	P	0,8	D	0,08
$0{,}25^{-2}$	O	0,2	U	8	I	16	E	0,0625
$x^2 + 1$	C	< 0 für $x < 0$	H	< 1 für $x \leq 1$		$= 0$ für $x = -1$	R	≥ 1 für alle x
$x^3 > x^4$	N	für $0 < x < 1$	L	für $x \in \mathbb{R}_+^*$	I	für $x > 1$	H	für $x \in \mathbb{R}$
$\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a^{-3}}}$		a	V	a^2	T	$\sqrt{2}$	J	a^4
2^{15}	E	kleiner als 4000	O	größer als 32000		zwischen 5000 und 10000	G	zwischen 10000 und 20000
$\sqrt[4]{3}$	E	kleiner als 1	G	zwischen 1 und 1,5	R	zwischen 1,5 und 2	O	größer als 2
$\frac{2^{-1}}{0{,}2^2}$	S	−50	H	5	N	50	G	12,5
$(\frac{1}{2}\ e)^{-3}$	A	$\frac{2}{e^3}$	U	$\frac{1}{2\ e^3}$	I	$\frac{8}{e^3}$	C	$-\frac{1}{8}\ e^3$
$x^3 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^3$	C	$x\ y^3$	N	y^3	B	y^{-3}	E	$x^2\ y^3$
$\frac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)^2}$	G	$\frac{1}{(a-b)^2}$	H	$(a+b)^2$	!	$(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^2$	T	0

6. Ordnen Sie der Größe nach

$0{,}002^{-2}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^4$; $100000^{0{,}2}$; $0{,}5^{-3}$; $(-0{,}25)^{-2}$; $0{,}5^{-0{,}25}$; $2{,}5^5$; $2{,}5^{-5}$; $(-2{,}5)^5$

7. Welche der folgenden Potenzen hat den Wert 8?

☐ $(-2)^{-3}$ ☐ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ☐ $512^{\frac{1}{3}}$

☐ 64^{-2} ☐ $\sqrt{16^{1{,}5}}$ ☐ $0{,}125^{-\frac{1}{3}}$

8. Berechnen Sie

a) $(1+\sqrt{5})^2$ b) $\sqrt[3]{16\,a^5}\cdot\sqrt{2\,a^3}$ c) $(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$

d) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{\sqrt{5\,x^2}}{5\sqrt{x}}$ f) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

9. Fassen Sie zusammen

a) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}$ b) $\dfrac{26\cdot 5^m - 5^m}{5^{m+2}}$

c) $\left(\dfrac{a^2\,b}{c\,d^3}\right)^3 : \left(\dfrac{a\,b^2}{c^2\,d^2}\right)^4$ d) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}$

e) $\sqrt[3]{x^{-2}\sqrt{x\sqrt{x}}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{z^5}}{\sqrt{z}\cdot\sqrt[3]{z}}$

g) $\dfrac{(15x^2\,y^{-3})^{-4}}{(25x^3\,y^{-6})^{-2}}$ h) $\left(\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{x^2\sqrt[4]{a+x}}\right)^{3n}\cdot\left(\dfrac{a\,x^{-2}}{2\sqrt[3]{a+x}}\right)^{-3n}$

10. Erklären Sie die Fehler bei folgenden Umformungen und berechnen Sie den richtigen Term

a) $\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^3}} = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^3-y^3}} = \dfrac{x-y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 0$

b) $\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt[4]{(x-y)^2} = \sqrt[4]{(x^2-y^2)\,(x-y)^2} = \sqrt[4]{(x^2-y^2)\,(x^2-y^2)} = \sqrt[4]{(x^2-y^2)^2}$
$= \sqrt{(x^2-y^2)} = x-y$

11. Welche Aussagen sind richtig?

☐ $\sqrt{a}$ ist für $a > 0$ immer positiv.

☐ $\sqrt{0}$ ist nicht definiert.

☐ $\sqrt{-a}$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ nicht definiert.

☐ $-\sqrt{a}$ ist für $a > 0$ nicht definiert.

Quadratische Binome

Regeln

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a\,b + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

12. Berechnen Sie

a) $(2a + 3x)^2$ b) $(2x - y)(2x + y)$ c) $(x - a)(a - x)$

d) $(x^2 - 4y^2)^2$ e) $(-7 + 9x)^2$ f) $(2u + v)^2\,(2u - v)^2$

13. Berechnen Sie mit Hilfe der Binomischen Formeln

a) 2002^2 b) $498 \cdot 502$ c) 4999^2

d) 251^2 e) $8980 \cdot 9020$ f) 295^2

14. Faktorisieren Sie mit Hilfe der Binomischen Formeln

a) $a^2 + 22a + 121$ b) $16x^2 - 4y^2$

c) $\frac{25}{49} - \frac{4}{9}z^2$ d) $\frac{1}{16}r^4 - 81\,s^4$

e) $8\,x^4 + 24\,x^3\,y + 18\,x^2\,y^2$ f) $(z^2 - 1)(2\,z^2 - 4\,z)$

15. Ergänzen Sie die fehlenden Summanden

a) $(a - \_\_\_)^2 = a^2 - \_\_\_ + 121$ b) $(b - \_\_\_)^2 = \_\_\_ - 8bc + \_\_\_$

c) $100\,a^2 - \_\_\_ = (\_\_\_ + 4b)(10a - \_\_\_)$ d) $(\_\_\_ + 4d)^2 = 25a^2 + \_\_\_ + \_\_\_$

16. Vereinfachen Sie folgende Bruchterme

a) $\dfrac{3u}{2u - 4} - \dfrac{u^2}{u^2 - 4} - \dfrac{u + 11}{3u + 6}$ b) $\dfrac{\frac{a}{x + y}}{\frac{a^2}{x^2 - y^2}}$

c) $\dfrac{\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}}{2 + \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1}}$ d) $\dfrac{\frac{m^2 - 2m + 1}{m + 1}}{\frac{1 - m}{3m}}$

17. Welche Gleichung ist richtig?

- ☐ $(-a - b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$
- ☐ $(-a - b)^2 = -a^2 + 2ab - b^2$
- ☐ $(-a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ☐ $(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Linearfaktorzerlegung

18. Zerlegen Sie folgende Polynome so weit wie möglich in Linearfaktoren.
    a) $x^3 - 23x^2 + 126x$
    b) $3x^4 - 6x^2 + 3$
    c) $x^4 - 17x^2 + 16$
    d) $2x^4 + 4x^3 - 30x^2$

19. Zerlegen Sie folgenden Polynome mithilfe des Horner-Schemas in zwei Faktoren:
    a) $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 32$; $x_1 = 2$
    b) $3x^4 + x^3 + 2x^2 - 6$; $x_1 = 1$
    c) $3x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x - 2$; $x_1 = -1$
    d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 7$; $x_1 = -1$
    e) $x^4 - x^3 - 49x^2 - 11x + 210$; $x_1 = 2$
    f) $4x^5 - 6x^4 - 13x^3 + 3x^2 - x - 159$; $x_1 = 3$

20. Zerlegen Sie vollständig in Linear- und quadratische Faktoren:
    a) $x^3 - x^2 + x - 1$
    b) $x^4 - 1$
    c) $x^3 - 67x - 126$
    d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
    e) $x^4 - x^3 - 49x^2 - 11x + 420$

Aufgaben zum Präsentieren

Punkte

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich 2

a) $\frac{x + 4}{x - 7} : \left((x + 4) : \frac{x - 7}{x + 1}\right)$

b) $\frac{8a + 6}{5ab - b^2} \cdot \frac{25ab - 5b^2}{2ab}$

2. Vereinfachen Sie soweit wie möglich 2

a) $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a}}$

b) $\frac{\sqrt[4]{z^5}}{\sqrt[5]{z^4}}$

3. 2

a) Ergänzen Sie die fehlenden Terme
$\left(\frac{1}{x} + \_\_\_\_\right)^2 = \_\_\_\_ + 4 + \_\_\_\_\ x^2$

b) Um wie viel Prozent ist 799^2 kleiner als 800^2?

4. 2

a) Zerlegen Sie das Polynom so weit wie möglich in Linearfaktoren:
$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

b) Berechnen Sie mit dem Horner-Schema
$(5x^3 + 9x^2 - 3x + 7) : (x + 3)$