Endliche Summen

Definitionen

$$\sum_{i=i_0}^{n} a_i = a_{i_0} + a_{i_0+1} + a_{i_0+2} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{i=i_0}^{n} a_i = a_{i_0} \cdot a_{i_0+1} \cdot a_{i_0+2} \cdot \ldots \cdot a_n$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Nützliche Formeln

$1 + 2 + 3 + \ldots + n$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

$0! = 1$ $\qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

1. Schreiben Sie jeweils mit Summenzeichen:
   a) $(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2$
   b) $4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 11 + 11 \cdot 12 + 12 \cdot 13$
   c) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 + 10 \cdot 11 + 12 \cdot 13 + 14 \cdot 15$
   d) $1-2 + 3-4 + 5-6 + 7-8 + 9-10$
   e) $(-3)^2-(-2)^2 + (-1)^2-0^2 + 1^2-2^2 + 3^2-4^2 + 5^2-6^2 + 7^2-8^2 + 9^2-10^2 + 11^2$
   f) $4 \cdot 5-5 \cdot 6 + 6 \cdot 7-7 \cdot 8 + 8 \cdot 9-9 \cdot 10 + 10 \cdot 11-11 \cdot 12 + 12 \cdot 13$
   g) $2 \cdot 3-4 \cdot 5 + 6 \cdot 7-8 \cdot 9 + 10 \cdot 11-12 \cdot 13 + 14 \cdot 15$

2. Schreiben Sie jeweils mit Produktzeichen:

a) $(-3)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 9^2 \cdot 10^2 \cdot 11^2$

b) $(4 + 5) \cdot 5 \cdot (5 + 6) \cdot 6 \cdot (6 + 7) \cdot 7 \cdot (7 + 8) \cdot 8 \cdot (8 + 9) \cdot 9 \cdot (9 + 10) \cdot 10 \cdot (10 + 11) \cdot 11 \cdot (11 + 12) \cdot 12$

c) $(2 + 3) \cdot (4 + 5) \cdot (6 + 7) \cdot (8 + 9) \cdot (10 + 11) \cdot (12 + 13) \cdot (14 + 15)$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{15}{16}$

e) $\frac{3^2}{4^3} \cdot \frac{5^2}{6^3} \cdot \frac{7^2}{8^3} \cdot \frac{9^2}{10^3} \cdot \frac{11^2}{12^3} \cdot \frac{13^2}{14^3} \cdot \frac{15^2}{16^3}$

f) $\frac{4+5}{5} \cdot \frac{5+6}{6} \cdot \frac{6+7}{7} \cdot \frac{7+8}{8} \cdot \frac{8+9}{9} \cdot \frac{9+10}{10} \cdot \frac{10+11}{11} \cdot \frac{11+12}{12}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{17}$

3.

a) Auf wie viele Arten können Sie die Symbole ✶, ✳ und ✸ anordnen? Schreiben Sie die Anordnungen auf!

b) Auf wie viele Arten können Sie die Symbole ✶, ✳, ✸ und ✹ anordnen?
Schreiben Sie diese Anordnungen ebenfalls auf!

c) Wie viele Anordnungen gibt es für 5, 6 …, n Symbole?

4.

a) Auf wie viele Arten können Sie aus den drei Symbolen ✶, ✳ und ✸ zwei auswählen (ohne Rücksicht auf die Reihenfolge)?

b) Wenn Sie wissen, dass man aus 5 Objekten 3 auf 10 Arten auswählen kann, auf wie viele Arten kann man dann 4 aus 5 auswählen?

c) Wie finden Sie sämtliche 5-elementigen Teilmengen der Menge {1; 2; 3; …; 10} mithilfe von Permutationen? Wie viele solche Teilmengen gibt es?

5. Berechnen Sie:

a) $\binom{101}{3}$ b) $\binom{502}{500}$ c) $\binom{25}{6}$

d) $\binom{99}{2} + \binom{99}{3}$ e) $\binom{n}{2}$ f) $\binom{n}{n-2}$

6. Bestätigen Sie mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks

a) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

b) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

c) $$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = 0$$

Aufgaben zum Präsentieren

		Punkte
1.	Schreiben Sie ausführlich und berechnen Sie:	2

a) $\sum\limits_{i=1}^{10} (2i - 1)$

b) $\prod\limits_{i=1}^{10} \frac{i}{i+1}$

2.	Begründen Sie mit Hilfe der „nützlichen Formeln“	2

a) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$

b) $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$

3.	Schreiben Sie die folgenden Produkte mit dem Produktsymbol und mit Hilfe von Fakultäten:	2

a) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50$

b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 99$

4.	Berechnen Sie (von Hand)	2

a) $\binom{55}{50}$

b) $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n+1}{4}$