# Übungen zu Mathematik 1

## Blatt 3

**1)** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion folgenden Sachverhalt:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

**2)** Es seien $A$ und $B$ Mengen und $M_1, M_2 \subseteq A$ und $N_1, N_2 \subseteq B$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f : A \longrightarrow B$ gilt:

(a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

(b) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$

(c) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

(d) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$

Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass in b) im allgemeinen nicht die Gleichheit gilt. Was ist der Grund hierfür?

**3)** Die Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch:

$$f(n) := \begin{cases} n-1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Ist $f$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung an.

**4)** Betrachtet wird die Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch $f(n) := n^3 - n, n \in \mathbb{N}$.

(a) Weisen Sie nach, dass $f$ injektiv ist. Bleibt die Injektivität erhalten, wenn der Definitionsbereich von $f$ von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}_0$ erweitert wird?
Hinweis, es gibt sehr verschiedene Lösungswege. Sie können beispielsweise von der folgenden Beziehung Gebrauch machen

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für die Wertemenge von $f$ gilt $f(\mathbb{N}) \subseteq \{6m | m \in \mathbb{N}_0\} =: 6\mathbb{N}_0$.
Hinweis: Faktorisieren Sie $f$.
Ist $f : \mathbb{N} \longrightarrow 6\mathbb{N}_0$ auch surjektiv?

**5)** Zeigen Sie, dass die Verkettung zweier injektiver Funktionen injektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung der Verkettung? Begründen Sie Ihr Ergebnis!