

Exakte Lösungsverfahren

<i>Eindeutige Umkehroperationen</i>		
Addition/ Subtraktion eines Terms	$x + a = b$	$\Leftrightarrow x = b - a$
Multiplikation/ Division mit einem Term $\neq 0$	$a \cdot x = b$	$\Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$
Spezialfall: Kehrbruch nehmen	$\frac{a}{x} = b$	$\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
Potenzieren mit ungeradem Exponent	$\sqrt[n]{x} = a$	$\Leftrightarrow x = a^n \quad (n \in \{1; 3; 5; \dots\})$
Ungerade Wurzeln ziehen	$x^n = a$	$\Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} \quad (n \in \{1; 3; 5; \dots\})$
In den Exponenten zu einer Basis erheben	$\log_a(x) = b$	$\Leftrightarrow x = a^b$
Logarithmieren	$a^x = b$	$\Leftrightarrow x = \log_a(b)$
<i>Lösungsformel</i>		
für quadratische Gleichungen	$ax^2 + bx + c = 0$	$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$x^2 + px + q = 0$	$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
<i>Faktorisieren</i>		
Satz vom Nullprodukt	$u(x) \cdot v(x) = 0$	$\Leftrightarrow u(x) = 0 \text{ oder } v(x) = 0$
Spezialfall: Satz von Vieta	$x^2 - bx + c = 0$	$\Leftrightarrow (x - u)(x - v) = 0$ $\Leftrightarrow x = u \vee x = v$ wenn $b = u + v$ und $c = u \cdot v$
<i>Substituieren</i>		
Spezialfall: Biquadratische Gleichung	$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$\Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0 \text{ und } z = x^2$

1. Lösen Sie die Gleichungen

a) $(2x + 2)(1 - x) = 0$

b) $(2x + 2)(1 - x) = 2$

c) $(2x + 2)(1 - x) = 4$

d) $(2x + 2)(1 - x) = 1 - x$

2. Wo steckt der Fehler?

$$\begin{aligned}
 1 \text{ €} &= 100 \text{ Ct.} \\
 &= 10 \text{ Ct.} \cdot 10 \text{ Ct.} \\
 &= 0,1 \text{ €} \cdot 0,1 \text{ €} \\
 &= 0,01 \text{ €} \\
 &= 1 \text{ Ct.}
 \end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Gleichungen sind mit einem exakten Lösungsverfahren lösbar? Bestimmen Sie für diese Fälle die Lösungsmenge.

a) $x^{99} = -1$

b) $x^{-16} = -16$

c) $4^x + 3 \cdot 4^x = 1024$

d) $4x + 3 \cdot 4^x = 1024$

e) $5000 \cdot 0,98^x = 0$

f) $5000 \cdot 0,98^x = 1000$

g) $5000 \cdot 0,98^x = 1000x^2$

h) $x^9 + x^5 + x + 1 = 0$

i) $\sqrt{\ln(2x - 1)} = \pi$

j) $\sin(x) = x + 1$

4. Lösen Sie die Gleichungen:

a) $3 \cdot 2^x = 8$

b) $3 \cdot 2^x = 2^{2x-1}$

c) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^{x-1}$

d) $e^{0,5x} = 2015$

e) $1000 \cdot 1,02^x = 2015$

f) $80 e^{-1,2x} = 22$

g) $\log_2(3x) = -1$

h) $\log_2(x) + \log_2(x + 1) = 1$

i) $\ln(2x - 1) = 0,5$

j) $\ln(2x) - \ln(2) = 3$

5. Lösen Sie die Gleichungen mit Hilfe einer Substitution:

a) $u^4 - 8u^2 + 15 = 0$

b) $-4e^x - 2e^{-x} + 9 = 0$

c) $8x^{-6} + 999x^{-3} = 125$

6.

a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 65, die Summe ihrer Quadratwurzeln ergibt 11. Wie lauten die beiden Zahlen?

b) Wird der Durchmesser eines Kreises um 3 cm vergrößert, so verdoppelt sich damit der Flächeninhalt. Wie groß war der ursprüngliche Durchmesser?

c) Eine Hohlkugel aus Stahl (Dichte = 7,85 kg/dm³) von 3 cm Wanddicke hat die Masse 39,360 kg. Wie groß ist ihr Durchmesser?

7. Lösen Sie graphisch und rechnerisch

a) $|x + 3| = 1$

b) $|x + 3| > 2$

c) $|2x - 3| = x$

8. Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge an, und lösen Sie die Bruchgleichungen

a) $\frac{1}{x-4} = \frac{3}{2x+1}$

b) $\frac{2x}{x-4} = \frac{3x+1}{2x-3}$

c) $\frac{2x}{x-4} = 1 - \frac{3x+1}{2x+1}$

d) $\frac{2x}{x^2-4} = 3 - \frac{3x+1}{x+2}$

9. Lösen Sie graphisch und rechnerisch:

a) $(3x - 1)^2 \geq 1$

b) $x(x + 3) < 0$

c) $x^2 - x - 6 < 0$

d) $\frac{2}{3x+1} < 5$

e) $\frac{2x}{x-4} \geq \frac{3x+1}{2x-3}$

f) $\frac{2x}{x^2-4} = 3 - \frac{3x+1}{x+2}$

g) $|3x - 4| \geq 7$

h) $|x + 1| > |x - 1|$

i) $|2x + 1| > 2 + |x - 1|$

j) $\sqrt{3x-1} > 2$

k) $\sqrt{3x-1} > 2x$

l) $\sqrt{3x-1} > 2x$

10. Lösen Sie die Gleichungen

a) $\sqrt{x^2 - 9} = 1$

b) $2 \cdot e^{x-3} = 100$

c) $2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1 = 0$

d) $2 \sin(2\pi x) = 1$

e) $x \cdot \ln(x+1) - \ln(x+1) = 0$

f) $\sin(x) \cos(2x-1) = 0$

g) $4^x - 3 \cdot 2^x = 0$

h) $x^{10} + 3x^5 - 10 = 0$

i) $4e^{0,5x} - e^x = 4$

j) $\frac{3}{x+1} - 2 = \frac{1}{(x+1)^2}$

11. Jeder der folgenden Lösungswege enthält Fehler?

Untersuchen Sie, an welcher/welchen Stelle(n) fehlerhafte Umformungen vorgenommen wurden und führen Sie die Lösung fehlerfrei zu Ende.

a) $\sqrt{x^4 - 81} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 9)(x^2 + 9)} = 16$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} \cdot \sqrt{x^2 + 9} = 16$
 $\Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x + 3) = 16$
 $\Leftrightarrow x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$

b) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x+6} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 2x + \frac{2x}{x+6} = \frac{8}{9}x$
 $\Leftrightarrow 2x + \frac{2}{6} = \frac{8}{9}x \Leftrightarrow \frac{10}{9}x = -\frac{2}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{13}{9}$

c) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} \cdot (1 - 4e^{-4x}) = 4$
 $\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \vee 1 - 4e^{-4x} = 4$
 $\Leftrightarrow 2x = \ln(4) \vee -4e^{-4x} = 3$
 $\Leftrightarrow x = \ln(2) \vee -4x = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x = \ln(2) \vee x = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

d) $\sqrt{11-x} = x-5 \Leftrightarrow 11-x = (x-5)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 7 \vee x = 2$

e) $\frac{2}{2x-4} + \frac{2x^2-4x}{x-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + \frac{2x(x-2)}{x-2} = 1$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + 2x = 1$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 - 2x$
 $\Leftrightarrow (1-2x)(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow 1-2x = 0 \vee x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5 \vee x = 2$

12. Lösen Sie Ungleichungen:

a) $4 - e^{0,2x} > 1$

b) $\ln(x^2 - 1) \leq 4$

c) $e^{-x^2} < 0,1$

d) $\ln(x) + \ln(x + 1) < 0$

e) $e^{x+1} + 2e^{x-1} \geq 1000$

f) $\ln(2x) - 2\ln(x) > 0$

13. Wie viele Lösungen hat die Gleichung. Begründen Sie Ihre Antwort.
(Die Lösung wird nicht erwartet)

a) $\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}x$

b) $e^x = x$

c) $e^x = x^2$

d) $\cos(x) + \sin(x) = 2$

14. Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus

a) $2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

b) $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1$

$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13$

$3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1$

$-3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1$

$-5x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$

c) $3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$

d) $-5x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 3$

$-x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -7$

$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_4 = 3$

$4x_1 - x_2 + 5x_3 = 9$

$3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -1$

$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1$

Aufgaben zum Präsentieren

Punkte

1. Lösen Sie die Gleichung 2
 - a) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1 = 0$
 - b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3$

2. Lösen Sie graphisch und rechnerisch: 2
 - a) $|x - 2| < x$
 - b) $(x + 3)^2 > 4$

3. Lösen Sie die Ungleichung 2
 - a) $\frac{2}{x} + 1 < x$
 - b) $100 \cdot 0,99^x < 0,5$

4. Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus 1
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 16x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$