Übungen zu Mathematik 1

Blatt 2

1) Gegeben Sei die Relation $R = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{N}, a$ und b haben die selbe letzte Ziffer $\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Wieviele Äquivalenzklassen besitzt R? Geben Sie alle Klassen in aufzählender Schreibweise an.

2) Auf der Menge $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ sei eine binäre Relation R gegeben durch
$R = \{(1,1), (1,8), (3,3), (3,7), (4,4), (9,8), (7,3), (5,5), (9,1), (9,9), (8,9), (8,8), (8,1), (1,9), (7,7)\}$.

(a) Stellen Sie R mit Hilfe einer Matrix und eines Graphen dar.

(b) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf A ist.

(c) Geben Sie alle Äquivalenzklassen in aufzählender Form an.

3) Untersuchen Sie, ob die Relation $R := \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | \exists s \in \mathbb{N} : b = sa\}$ reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv ist.

4) Zeigen Sie, dass die Relation $aRb :\Leftrightarrow a \cdot b$ ist ungerade oder $a = b$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist. Wie lauten die Äquivalenzklassen bezüglich R?

5) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen werde eine binäre Relation R erklärt durch

$$xRy :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + xy = 2k,$$

d.h. $x + xy$ ist eine gerade Zahl. Zeigen Sie, dass R reflexiv und transitiv ist. Ist R auch symmetrisch?