

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 10

1) Berechnen Sie

$$(a) \begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -15 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 178 & -65 & 13 \\ 0 & 4 & 99 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hinweis zu (e): Versuchen Sie zunächst, unter Anwendung elementarer Umformungen möglichst viele Nullen in der zugrundeliegenden Matrix zu erzeugen.

2) Berechnen Sie für beliebige reelle Zahlen a und b die Werte der folgenden Determinanten unter Anwendung elementarer Umformungen

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^3 & a^4 & a^5 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix}.$$

3) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme. Ermitteln Sie auch den Rang und die Determinante der jeweiligen Koeffizientenmatrix.

$$(a) \begin{array}{rrrrrr} 2x & - & y & + & z & - & 3w & = & 5 \\ x & + & y & + & 2z & - & w & = & 3 \\ 4x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 10 \\ -x & - & 3y & + & 6z & + & 3w & = & -19 \end{array} \quad (b) \begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & - & 3w & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & - & 2w & = & 6 \\ -x & - & y & + & 2z & + & 6w & = & 2 \\ 5x & + & 2y & - & z & - & 18w & = & -11 \end{array}$$

4) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme. Ermitteln Sie auch den Rang und die Determinante der jeweiligen Koeffizientenmatrix.

$$(a) \begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & - & 3w & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & - & 2w & = & 6 \\ -x & - & 2y & + & 2z & + & 6w & = & -1 \\ 5x & + & y & - & z & - & 18w & = & -11 \end{array} \quad (b) \begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & - & 3w & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & 7z & + & 4w & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & 4z & - & 3w & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 7z & - & w & = & 5 \end{array}$$