Ableitungen

Definitionen

• durchschnittliche Änderungsrate (Differenzenquotient)	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
• momentane Änderungsrate (Differenzialquotient)	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Ableitungen

• $f(x) = a \cdot x^n \quad ; \quad n \in \mathbb{Q}$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$
speziell: $f(x) = \frac{a}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{x^{n+1}}$
$f(x) = a \cdot \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$
• $f(x) = b \cdot a^x \quad ; \quad a > 0$	$f'(x) = b \ln(a) \cdot a^x$
speziell: $f(x) = a \cdot e^x$	$f'(x) = a\, e^x$
• $f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
speziell: $f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
• $f(x) = a \sin(x)$	$f'(x) = a \cos(x)$
$f(x) = a \cos(x)$	$f(x) = -a \sin(x)$
• $f(x) = \arcsin(x)$ mit $x \in [-1; 1]$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$ mit $x \in [-1; 1]$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ableitungsregeln

• $f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
• $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) \quad u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
• $f(x) = f(g(x))$	$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1. Berechnen Sie jeweils die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen:

   a) $f_t(x) = (x - t)\, e^{x/t}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_+^*$

   b) $f(x) = \sqrt{x + t}$ mit $x > -t$ und $t \in \mathbb{R}$

   c) $f_t(x) = (x + t)\,(t - e^x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$

   d) $f(x) = (1 - \sin(\frac{x}{2}))^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

   e) $f_t(x) = (x + t)\cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$

   f) $f_t(x) = \sin(\frac{\pi}{t}\,x)\cdot\cos(\frac{\pi}{t}\,x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_+^*$

   g) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$ mit $x \in \mathbb{R}^*$

2. Zeigen Sie, dass f die Ableitung von F ist:

   a) $f(x) = x\, e^{-x}$ $F_t(x) = -(x + 1)\, e^{-x}$

   b) $f(x) = \cos^2 x$ $F(x) = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cdot\cos(x))$

   c) $f_n(x) = e^x\,(e^x - 1)^n$ $F_n(x) = \frac{1}{n+1}(e^x - 1)^{n+1}$

   d) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$

3. Welche der folgenden Funktionen sind streng monoton?

   a) $f(x) = \frac{4}{(x + 10)^5}$ mit $x \in \mathbb{R}_{>-10}$

   b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ mit $x \in \mathbb{R}_+$

   c) $f(x) = \sin(\frac{x}{300})$ mit $x \in \mathbb{R}$

   d) $f(x) = (50x + 1)^{51}$ mit $x \in \mathbb{R}$

   e) $f(x) = (1 - e^{0,001x})^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

4. Untersuchen Sie die Schaubilder der Funktionen zunächst von Hand auf Monotonie, lokale Extrema, Krümmung und Wendestellen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit GeoGebra.

   a) $f(x) = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{2}\,x)$ mit $x \in [0; 8]$

   b) $f(x) = x^2\, e^{-0,5x}$ mit $x \in \mathbb{R}$

   c) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ mit $x \in \mathbb{R}$

   d) $f(x) = \sqrt{25 - 4x^2}$ mit $x \in [-5; 5]$

5. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion einer differenzierbaren Funktion f.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

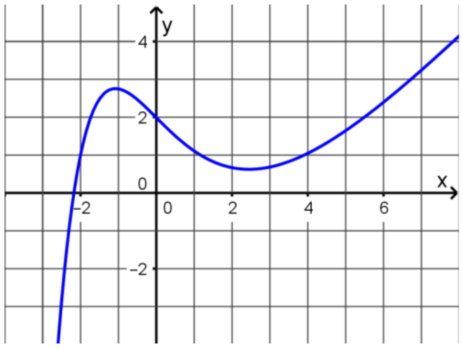
   (A) Im Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Tangente an das Schaubild von f die Steigung 2.

   (B) f ist streng monoton wachsend für $x \geq -1$.

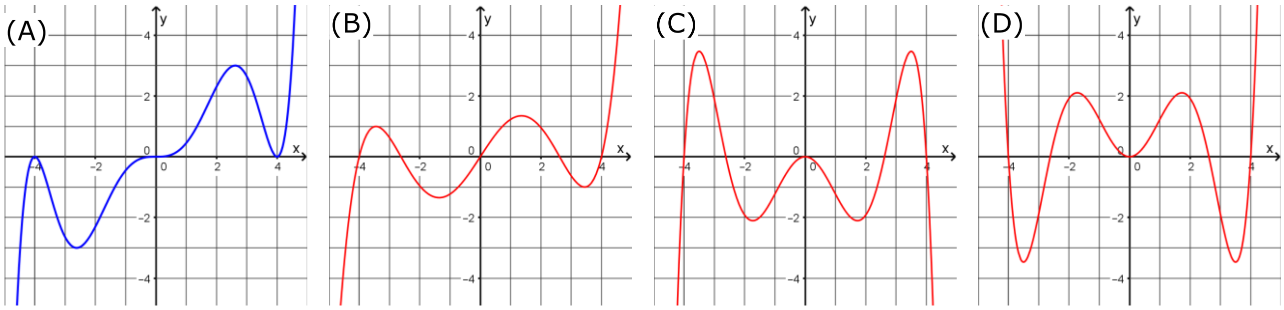
   (C) f hat ein lokales Maximum aber kein Minimum.

   (D) f hat im Intervall $[-2; 7]$ genau zwei Wendestellen.

   (E) f ist für $x > 0$ rechtsgekrümmt.



6. Zum Schaubild (A) gehört eine Funktion, deren Ableitung zu einem der Schaubilder (B) bis (D) gehört. Treffen Sie die Zuordnung und skizzieren Sie zu jeder der beiden anderen Ableitungen ein mögliches Schaubild der zugehörigen Funktion.

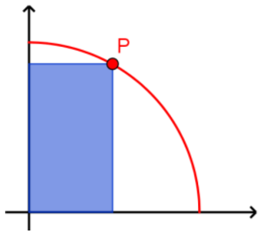


7. Der skizzierte Viertelkreis hat einen Radius von 4 cm. Bestimmen Sie den Punkt P, sodass das eingezeichnete Rechteck …

   a) maximalen Umfang

   b) maximale Fläche

   c) bei Rotation um die horizontale Achse maximales Volumen hat.



8. Ein Zeitschriftenverlag möchte seinen Gewinn dadurch erhöhen, dass mehr Zeitschriften-Abos verkauft werden. Zurzeit sind es 2000 Abos, und mit jedem Abo werden 25 € Gewinn gemacht. Marktanalysen haben ergeben, dass mit jedem Euro, um den der Abopreis und damit der Gewinn gesenkt werden, die Zahl der Abos um 100 zunimmt.

   Um wie viel Euro sollte der Verlag den Gewinn pro Abo senken, wenn er einen möglichst hohen Gewinn machen will?

9. Ein Behälter hat die Form eines Zylinders mit ebenem Boden und aufgesetzter Halbkugel als Deckel.
Das Volumen des Behälters einschließlich der Wände soll 5 m^3 betragen.

   a) Welche Maße hat der Behälter, dessen Oberfläche einschließlich Boden minimal ist?
   Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Durchmesser und die Höhe des Behälters gleich groß sind.

   b) Begründen Sie, dass der Zusammenhang aus Teilaufgabe a) für alle gleichartigen Behälter mit minimaler Oberfläche zutrifft, unabhängig von ihrem Volumen.