HTWG Konstanz
Fakultät für Informatik

Prof. Dr. J. Garloff

KLAUSUR IN MATHEMATIK 1

WS 2014/15

Aufgabe 1:

Wie lauten der Real- und der Imaginärteil der komplexen Zahl $z := \left(-1+\sqrt{3}j\right)^{10}$?

(ca. 4 Punkte)

Aufgabe 2:

Auf **R** sei eine binäre Relation R erklärt vermöge

$$xRy :\Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1,\ x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

b) Wie lauten die Äquivalenzklassen bezüglich R?

(ca. 7 Punkte)

Aufgabe 3:

Für welche reelle Zahlen λ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x & +\ \lambda y & +2z & = & 0 \\ -2x & -\ \lambda y & +\ z & = & 4 \\ 2\lambda x & +3\lambda^2 y & +9z & = & 4 \end{array}$$

a) genau eine Lösung,

b) unendlich viele Lösungen,

c) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) jeweils die Lösungsmenge an. Wie lautet im Fall b) die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems?

(ca. 9 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A das charakteristische Polynom $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ besitzt.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

c) Ermitteln Sie die Eigenräume zu den **reellen** Eigenwerten.

d) Die Matrix A stellt eine Rotation im $\mathbf{R}^3$ dar. Welche Vektoren des $\mathbf{R}^3$ bilden ihre Achse? Die Rotation überführt den Vektor $(1\ \ -1\ \ 0)^T$ in einen Vektor y. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektoren x und y den Winkel, um den rotiert wird.

(ca. 12 Punkte)