

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 7

1) Gegeben sind die drei Vektoren: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Für welches a sind die drei Vektoren linear unabhängig?
- (b) Für welches a bilden die Vektoren eine orthogonale Basis? Ist diese Basis auch orthonormal? Begründen Sie Ihre Antworten.

2) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $a, b \in V$. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $a, a+b, a-b$ linear abhängig sind.

3) Gegeben seien die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Berechnen Sie (a, b) , $\|a\|$, $\|b\|$ sowie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

4) Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A(1, 5, 7), B(-1, 3, 6), C(0, 4, 5).$$

5) Der Punkt $P_0(1, -2, 3)$ liegt in einer Ebene, die senkrecht steht zu dem Vektor $n = (2, -2, 1)$. Wie lautet die Gleichung der Ebene? Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_1(3, 1, 2)$ von dieser Ebene.

6) Bestimmen Sie, welche der angegebenen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen zwischen den Vektorräumen \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 sind. Begründen Sie Ihre jeweilige Aussage!

- (a) $\varphi(x, y, z) = (2x - y, z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$
- (b) $\varphi(x, y, z) = (x + y + z + 1, y + z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$
- (c) $\varphi(x, y, z) = (xy, x - z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$
- (d) $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey)$ für alle $x, y, z, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$