

**KLAUSUR IN MATHEMATIK 1 und Konsolidierung
SS2016**

- 1) Gegeben Sei die Relation $R = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}, a \text{ und } b \text{ haben die selbe letzte Ziffer}\}$.
- (a) Zeigen Sie, dass die Relation R eine Äquivalenzrelation ist.
 - (b) Wieviele Äquivalenzklassen besitzt R ? Geben Sie alle Klassen in aufzählender Schreibweise an.

(4 Punkte)

- 2) Berechnen Sie $(\sqrt{12} - 6j)^6$ und geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an.

(4 Punkte)

- 3) Gegeben sind die drei Vektoren: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Für welches a sind die drei Vektoren linear unabhängig?
- (b) Für welches a bilden die Vektoren eine orthogonale Basis? Ist diese Basis auch orthonormal? Begründen Sie Ihre Antworten.

(5 Punkte)

- 4) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei (bzgl. der Basen gebildet aus den Standardeinheitsvektoren $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ des \mathbb{R}^3) festgelegt durch

$$\begin{aligned}\varphi(e^{(1)}) &= 4e^{(1)} - e^{(2)} + 3e^{(3)} \\ \varphi(e^{(2)}) &= e^{(1)} + e^{(2)} + 2e^{(3)} \\ \varphi(e^{(3)}) &= -2e^{(1)} + 3e^{(2)} + e^{(3)}\end{aligned}$$

- (a) Geben Sie eine Matrix A an, für die gilt $A \cdot x = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Ermitteln Sie den Rang der Abbildung φ .
- (c) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung φ .
- (d) Ermitteln Sie das Bild $\varphi(\mathbb{R}^3)$ der Abbildung φ .

(6 Punkte)

- 5) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Matrix A .
- (b) Geben Sie eine Basis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A an.

(8 Punkte)

6) Gegeben Sei die Funktion f ,

$$f = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$$

- .
- (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f .
 - (b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Nähe ihrer Definitionslücke(n).
 - (c) Geben Sie die Asymptoten der Funktion f für $x \rightarrow \pm\infty$ an. Untersuchen Sie, ob sich für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ die Kurve der Funktion f von unten oder von oben her ihrer Asymptote nhert. Begründen Sie Ihre Resultate.

(5 Punkte)