Potenzfunktionen

Definitionen

- mit natürlichen Exponenten $f(x) = x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$; $D = \mathbb{R}$
- mit ganzen Exponenten $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $D = \mathbb{R}^*$
- mit gebrochenen Exponenten $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; $D = \mathbb{R}_+^*$

1. Skizzieren Sie den Graphen der Potenzfunktion f mit

   a) $f(x) = x^{1,5}$ b) $f(x) = 2 \cdot x^{-1,5}$ c) $f(x) = \sqrt[8]{\frac{x^4 \cdot x^7}{x^5}}$

2. Geben Sie eine Potenzfunktion an, die sich für $x \to \infty$ von unten an die x-Achse annähert.

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen

   a) $f(x) = (x - 2)^3$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ c) $f(x) = x^{0,25}$

   d) $f(x) = x^{-\frac{27}{4}}$ e) $f(x) = (x - 3)^{0,75}$ f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   g) $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-4)}$ h) $f(x) = \frac{(x+5)^{\frac{1}{33}}}{x^2 - x}$ i) $f(x) = ((x - 2)^2 - 1)^{3,77}$

4. Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich sowie die Nullstellen der folgenden Funktionen. Skizzieren Sie ihr Schaubild.

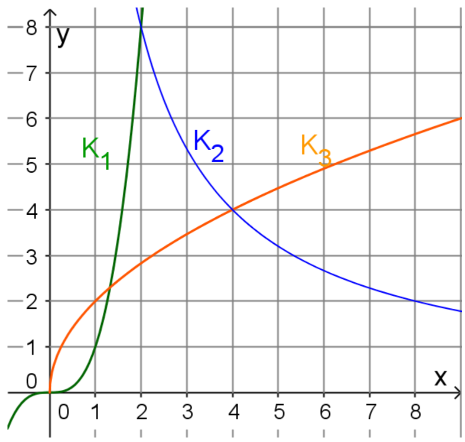
   a) $f(x) = \sqrt{2x}$ b) $f(x) = 1 - \sqrt{2x + 3}$ c) $f(x) = 2 - \sqrt{5 - 3x}$

   d) $f(x) = -\sqrt{\frac{5}{2} - x}$ e) $f(x) = 1 + \sqrt{6 - 3x}$

5. Ordnen Sie den Schaubildern in der Abbildung eine der folgenden Funktionen zu und bestimmen Sie den Funktionsterm der fehlenden Funktion.

   (A) $f(x) = 2\,x^{\frac{1}{2}}$

   (B) $f(x) = x^3$



Exponentialfunktionen

Definitionen		
Exponentialfunktion	$f(x) = b\cdot a^x$ mit $a > 0$;	$D = \mathbb{R}$
natürliche Exponentialfunktion	$f(x) = b\cdot e^x$ mit $e = 2{,}71828\ldots$;	$D = \mathbb{R}$

6. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit

   a) $f(x) = 1{,}5^x$ b) $f(x) = e\cdot x^2$ c) $f(x) = e^2\cdot x$

   d) $f(x) = 2\cdot e^x$ e) $f(x) = \frac{1}{3}\,2^{x-1}$ f) $f(x) = e^{1-x}$

7. Beschreiben Sie den Verlauf des Schaubildes der Funktion f mit

   a) $f(x) = e^{1,5x}$ b) $f(x) = 2 - e^{-x}$

   c) $f(x) = \frac{1}{2}\,e^{0,5x} - 2$ d) $f(x) = \frac{1}{3}\,e^{-0,2x} - 1$

8. Geben Sie eine Funktion vom Typ $f(x) = b\cdot a^x + c$ an, die folgende Eigenschaften besitzt:

   a) Die Punkte (0|2) und (2|0) liegen auf dem Schaubild von f und für $x \to -\infty$ geht f(x) gegen −1.

   b) Das Schaubild von f fällt streng monoton, schneidet die x-Achse im Punkt N(1|0) und die y-Achse im Punkt (0|2).

   c) Das Schaubild von f nähert sich für $x \to \infty$ der x-Achse an und geht durch die Punkte (0|2) und (−2|4).

9. Für die Auflösung einer chemischen Substanz in einer Flüssigkeit gilt die Gleichung

   $$M = m_S\,(1 - e^{-k\,t}).$$

   Dabei ist M die zur Zeit t aufgelöste Masse, m_S die Sättigungsmenge und k eine Stoffkonstante.

   a) Ermitteln Sie die Konstante k, falls von $m_S = 80$ g einer Säure nach 25 s bereits 38 g aufgelöst sind.

   b) Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Sättigungsmenge aufgelöst?

10. Lebende Organismen bauen stets einen nahezu konstanten Anteil radioaktiven Kohlenstoffs C_{14} in ihren Zellen ein. Beträgt die Gesamtmenge radioaktiven Kohlenstoffs zum Zeitpunkt des Absterbens M_0, dann ergibt sich durch radioaktiven Zerfall die Menge M nach t Jahren aus der Gleichung

    $$M = M_0 \cdot e^{-k\,t}.$$

    a) Berechnen Sie k, wenn die Halbwertszeit von C_{14} 5600 Jahre beträgt.

    b) Welchen Anteil der Anfangssubstanz an C_{14} enthält eine organische Substanz 1000, 5000 bzw. 10000 Jahre nach dem Tode?

    c) Geben Sie das Alter einer organischen Substanz an, die nur noch 80% (65%, 22%) des C_{14}-Anteils lebender Organismen enthalten.

Logarithmusfunktion

Definitionen

- Logarithmus zur Basis a $a^y = x \cdot \Leftrightarrow \quad y = \log_a(x) \cdot$ mit $a, x > 0$
- natürlicher Logarithmus $\ln(x) = \log_e(x)$ $D = \mathbb{R}^*$

Regeln

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a^c) = c$
- $a^{\log_a(c)} = c$
- $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
- $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
- $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

11. Berechnen Sie

a) $\log_6(1)$ b) $\log_2(16)$ c) $\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{27})$

d) $\log_{10}(0{,}01)$ e) $\lg(\frac{3}{4}) + \lg(\frac{4}{3})$ f) $\ln(3e^2)$

12. Zerlegen Sie die folgende Ausdrücke so weit wie möglich in elementare Logarithmusfunktionen (d.h. zerlegen Sie z.B. $\lg(a \cdot b)$ in $\lg(a) + \lg(b)$).

a) $\lg(\frac{ab}{cd})$ b) $\ln(\sqrt[3]{a^2b^4})$

c) $\lg(x^{-0,5}y^{-3})$ d) $\ln(\frac{x}{y})^x$

13. Fassen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem Logarithmus zusammen

a) $2\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(y)$ b) $2x\ln(x) \;\; \ln(9x\, y)$ c) $\big(\ln(x) - \ln(y)\big)(x + 3y - 2z)$

14. Stellen Sie die Funktion f als Exponentialfunktion zur angegebenen Basis dar.

a) $f(x) = 5^x$, neue Basis e

b) $f(x) = 0{,}99^x$, neue Basis 10

c) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$, neue Basis 2

Trigonometrische und Arkus-Funktionen

Definitionen

Im rechtwinkligen Dreieck mit dem spitzen Winkel α gilt …

- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Ein Punkt auf dem Einheitskreis hat die Koordinaten $(\cos(x) \mid \sin(x))$.
Dabei ist x das Bogenmaß des Winkels zwischen $\overline{OP}$ und der positiven x-Achse.

Wichtige Werte

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°
Winkel im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	1
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan(x)	0	$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Regeln

- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ und $\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ (Winkel im Bogenmaß)
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Satz des Pythagoras)
- $\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cdot\cos(x_2) + \cos(x_1)\cdot\sin(x_2)$
- $\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cdot\cos(x_2) - \sin(x_1)\cdot\sin(x_2)$

15. Bestimmen Sie Amplitude und Periode der Funktion und skizzieren Sie einen Wellenzug des Schaubildes der Funktion:

    a) $f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x) - 1$

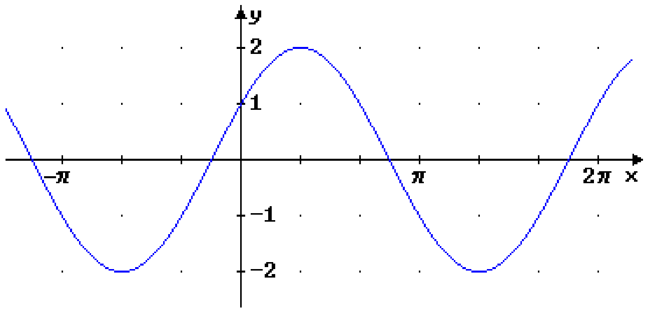
    b) $f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$

    c) $f(x) = \frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{3}x)$

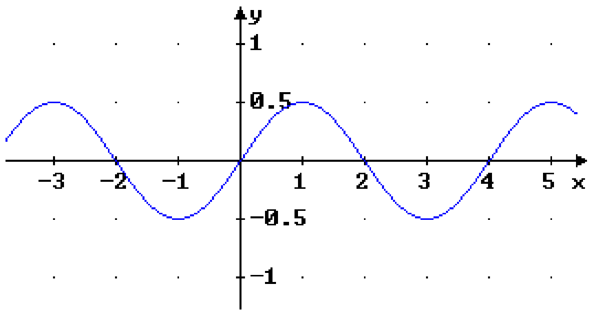
16. Berechnen Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der Funktionen aus Aufgabe 15.

17. Ordnen Sie den Schaubildern (mindestens) eine der Funktionen zu.

a)



b)



☐ $f(x) = 1 + \cos(x - \frac{\pi}{3})$

☐ $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$

☐ $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$

☐ $f(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$

☐ $f(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$

☐ $f(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right)$

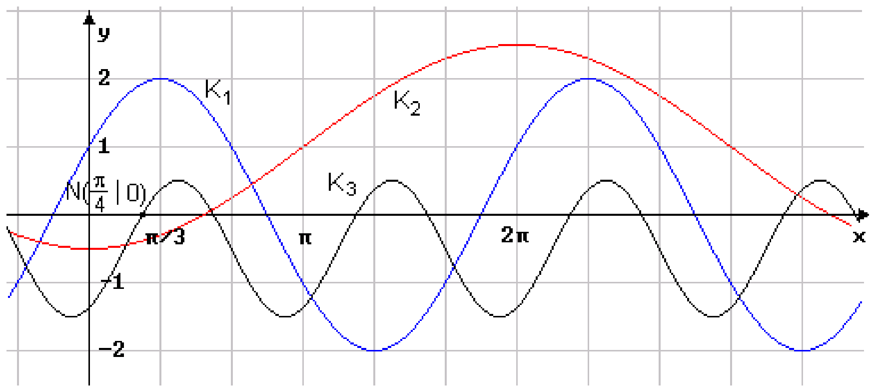
☐ $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$

☐ $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

☐ $f(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x - 1)$

☐ $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{2})$

18. Zu jedem der Schaubilder gehört eine der Funktionen. Treffen Sie die Zuordnung und bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c.



(A) $f(x) = a\sin(x + \frac{\pi}{6})$ (B) $f(x) = 1 - \frac{3}{2}\cdot\cos(b\cdot x)$ (C) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + c$

19. Gesucht ist eine Funktion vom Typ $g(x) = a\cos(b\,x) + d$ mit $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild K die angegebenen Eigenschaften hat.

   a) K hat die Periode π, geht durch den Ursprung und berührt die Gerade mit der Gleichung $y = -2$.

   b) K schneidet die x-Achse im Punkt $N(1|0)$ und die y-Achse im Punkt $S(0|1)$. Die Amplitude von K ist 2.

20. Lösen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Arkusfunktionen nach t auf

   a) $2\cos(\frac{1}{4}t + 1) = y$

   b) $\sin(t)\cdot\cos(t) = 2y$

   c) $\sqrt{1 - \sin^2(t)} = a$

Aufgaben zum Präsentieren

		Punkte
1.	Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion. Skizzieren Sie ihr Schaubild a) $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$ b) $f(x) = 2 - \ln(2 - x)$	2
2.	a) Geben Sie eine äquivalente Exponentialgleichung an: $x = 2 - 3 \cdot \log_5(y)$ b) Berechnen Sie (von Hand) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$	2
3.	Geben Sie die Funktion als Exponentialfunktion zur Basis e an und beschreiben Sie den Verlauf des Schaubildes. a) $f(x) = 4 - 0{,}2 \cdot 5^x$ b) $f(x) = 500 \cdot 1{,}02^x - 100$	2