3 Logik

1. Aussagenlogik in der Spezifikation
2. Aussagenlogische Modellbildung
3. Prädikatenlogik

Aussagenlogik in der Spezifikation
Beispiel

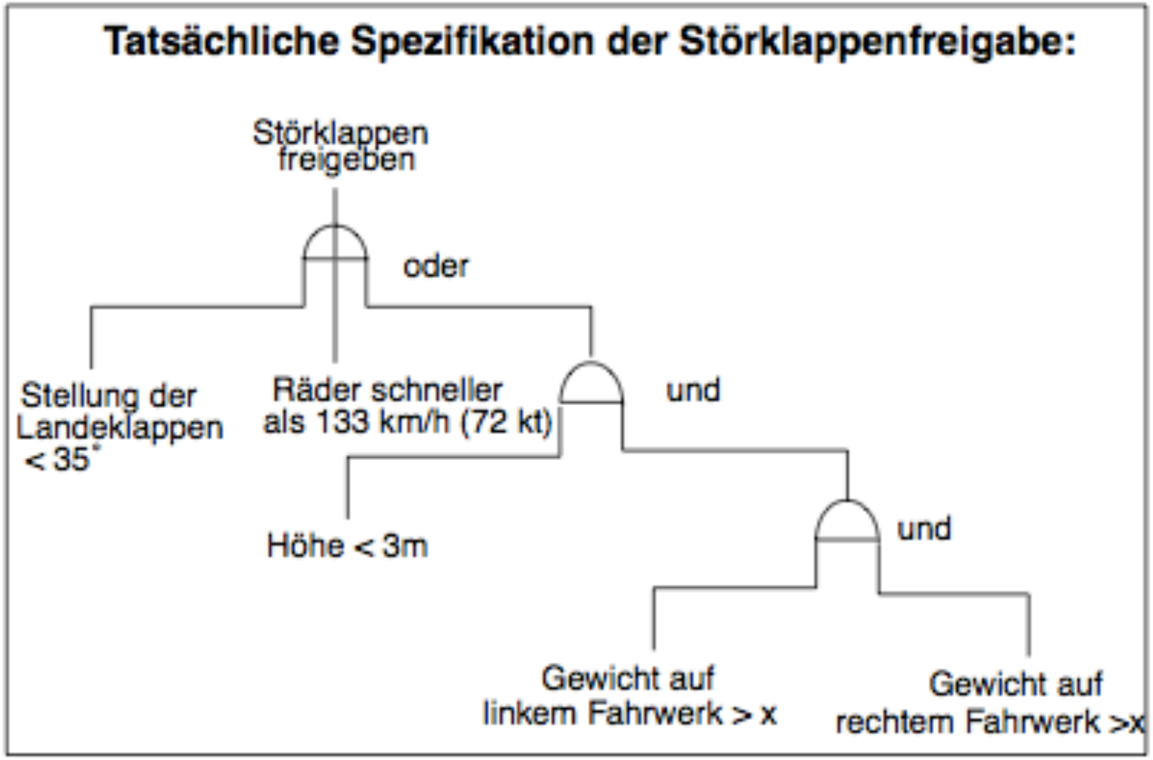
- Unfall durch fehlerhafte Spezifikation
  - Airbus A320, Warschau (1993): Der zuständige Rechner blockiert bei der Landung die Aktivierung der Schubumkehr und Störklappen, wodurch das Flugzeug über das Landebahnende hinausschießt. Es herrschen starker Wind von schräg hinten und Aquaplaning auf der Landebahn.
- Beabsichtigte Spezifikation der Störfreigabe
  - Die Störklappen dürfen benutzt werden
    - im Reise- und Sinkflug (Bremswirkung)
    - nach der Landung (Vernichtung des Auftriebs und Bremswirkung)
  - Sie dürfen nicht benutzt werden
    - im Endanflug (gefährlicher Auftriebs-verlust)

Quelle: wikipedia.de

Quelle: Kastens, Kleine Büning: Modellierung

Aussagenlogik in der Spezifikation
Beispiel

- Unvollständige Spezifikation in deutscher Sprache
  - Die Störklappen werden freigegeben, wenn die Stellung der Landeklappen < 35° oder Räder schneller als 133 km/h sind oder die Höhe < 3m und Gewicht auf den Fahrwerken > x ist



Quelle: Kastens, Kleine Büning: Modellierung

Aussagenlogik in der natürlichen Sprache

- Ausschnitt aus der AGB eines Internet-Portals
  - Der Kunde hat die Kosten der Rücksendung zu tragen, wenn die gelieferte Ware der bestellten entspricht und wenn der Preis der zurückzusendenden Sache einen Betrag von 40,00 EUR nicht übersteigt oder wenn bei einem höheren Preis dieser Sache zum Zeitpunkt des Widerrufs die Gegenleistung oder eine vertraglich vereinbarte Teilzahlung noch nicht erbracht ist.
    Anderenfalls ist die Rücksendung durch den Kunden kostenfrei.
- Wie ist die Klammerung in dieser Beschreibung?

Aussagenlogik

- Aussagen
  - Sätze, die prinzipiell als wahr oder falsch angesehen werden können
  - Beispiel: „Es regnet“, „Die Strasse ist naß“
- Junktoren verknüpfen Aussagen
  - Es regnet nicht, **oder** die Straße ist nass
- Belegung mit Wahrheitswerten
  - Regen $\rightarrow$ straßeNass

    w w

    w

Aussagenlogik

- Grundsymbole
  - Variablen
  - Funktionssymbole.
    0-stelliges Funktionssymbol wird Konstante genannt
  - Junktoren $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (Implikation, wenn-dann),
    $\leftrightarrow$ Äquivalenz (genau dann, wenn)
- Präzedenzregeln
  - $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
  - $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  - $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
- Weitere Definitionen
  - Elementaraussagen bezeichnet man auch als **Atome**
  - Ein **Literal** ist ein Atom A oder ein negiertes Atom $\neg A$

Aussagenlogik

- Aussagenlogische Formeln: Terme mit Variablen zur Signatur der boolschen Algebra
  - false: $\rightarrow$ BOOL
    true: $\rightarrow$ BOOL
    $\wedge$: BOOL× BOOL $\rightarrow$ BOOL
    $\vee$: BOOL× BOOL $\rightarrow$ BOOL
    $\neg$: BOOL $\rightarrow$ BOOL
- Erweiterung
  - $\rightarrow$: BOOL× BOOL $\rightarrow$ BOOL Implikation
    $\leftrightarrow$: BOOL× BOOL $\rightarrow$ BOOL Äquivalenz

Bewertung eines Terms

- $\mathfrak{I}$ sei Bewertung von Formeln
  - $\mathfrak{I}(\neg\alpha)$ = w genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha)$=f
  - $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta)$ = w genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha)$=w und $\mathfrak{I}(\beta)$=w
  - $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta)$ = w genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha)$=w oder $\mathfrak{I}(\beta)$=w
  - $\mathfrak{I}(\alpha \rightarrow \beta)$ = w genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha)$=f oder $\mathfrak{I}(\beta)$=w
  - $\mathfrak{I}(\alpha \leftrightarrow \beta)$ = w genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha)$=$\mathfrak{I}(\beta)$=w oder $\mathfrak{I}(\alpha)$=$\mathfrak{I}(\beta)$=f
  - $\mathfrak{I}$(true) = w und $\mathfrak{I}$(false)=f
- Wahrheitstafel

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha\wedge\beta$	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\rightarrow\beta$	$\alpha\leftrightarrow\beta$	$\alpha\veebar\beta$
W	W	F	W	W	W	W	F
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	F	W
F	F	W	F	F	W	W	F

Umformungsregeln

Negation	$\neg\neg\alpha \approx \neg\alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$ $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
Komplement	$\alpha \vee \neg\alpha \approx$ true $\alpha \wedge \neg\alpha \approx$ false
Neutrale Elemente	$\alpha \wedge$ true $\approx \alpha$ $\alpha \wedge$ false $\approx$ false $\alpha \vee$ true $\approx$ true $\alpha \vee$ false $\approx \alpha$

Weitere Umformungsregeln

Implikation	$\alpha \to \beta$ $\approx \neg\alpha \vee \beta$ $\approx \beta \vee \neg\alpha$ $\approx \neg\beta \to \neg\alpha$
Äquivalenz	$\alpha \leftrightarrow \beta \approx (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
Exklusives Oder	$\alpha \underline{\vee} \beta \approx (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$ $\alpha \underline{\vee} \beta \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

- Definieren Sie die Wahrheitstafel für Implikation, Äquivalenz und Exklusives Oder.

Wahrheitstafel

- Wahrheitstafel für komplexere Formeln
  - Definieren Sie die Wahrheitstafel für $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$

A	B	C	$(A \vee \neg B)$	$(A \vee B) \rightarrow C$	$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$
f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f
f	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Normalformen

- Konjunktive Normalform KNF
  - Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist
  - Beispiel: $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
- Disjunktive Normalform DNF
  - Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist
  - Beispiel: $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Beispiel
  - Überführen Sie $A \leftrightarrow B$ in die DNF und KNF

Erfüllbar, tautologisch, falsifizierbar

- Definitionen
  - Eine Formel α ist **erfüllbar** genau dann, wenn es eine Belegung gibt, bei der sie true ist
  - Eine Formel α ist **tautologisch** (eine **Tautologie**, **allgemeingültig**) genau dann, wenn sie für jede Belegung true ist
  - Eine Formel α ist **widerspruchsvoll** (**unerfüllbar**) genau dann, wenn sie für jede Belegung false ist
  - Eine Formel α ist **falsifizierbar** genau dann, wenn es eine Belegung gibt, bei der sie false ist
- Aufgaben
  - Geben Sie jeweils ein Beispiel an
  - Was gilt für die Formel aus dem vorherigen Beispiel Folie 11?
  - Ist folgender Satz eine Tautologie?
    Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist

Aussagenlogische Modellbildung

- Aussagenlogik zur Modellierung von statischem Wissen
  - Dynamische Systeme werden normalerweise nicht mit Aussagenlogik modelliert
  - Die Aussage „*Es regnet*“ wird dem Atom R und „*Die Straße ist naß*“ dem Atom S zugeordnet

Es regnet nicht	$\neg R$
Es regnet oder die Straße ist nass	$R \vee S$
Es regnet und die Straße ist nass	$R \wedge S$
Wenn es regnet, ist die Straße nass	$R \rightarrow S$
Genau dann, wenn es regnet, ist die Straße nass	$R \leftrightarrow S$

Aussagenlogische Modellbildung

Die Straße ist nass genau dann, wenn es regnet	$R \leftrightarrow S$
Die Straße ist nass dann und nur dann, wenn es regnet	$R \leftrightarrow S$
Entweder ist die Straße nass oder es regnet	$R \underline{\vee} S$ $(R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$ $(R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)$

- Gegeben ist die Aussage „Wenn es regnet, ist die Strasse naß“
  - Formalisieren Sie diese Aussage
  - Was sagt diese Aussage aus, wenn die Strasse naß ist?
  - Was sagt diese Aussage aus, wenn die Strasse nicht naß ist?
- Formalisieren Sie die Aussage „Bei Nacht sind alle Katzen grau“

Formalisierung umgangssprachlicher Ausdrücke

- Vorsicht bei Implikationen; mit Belegungen prüfen, was gemeint ist

Wenn es regnet, benutze ich den Schirm	regnet $\rightarrow$ schirm
Ich benutze den Schirm, **wenn** es regnet	regnet $\rightarrow$ schirm
Ich benutze den Schirm **nur wenn** es regnet	schirm $\rightarrow$ regnet

- „Oder“ kann fast immer in das $\underline{\vee}$ (xor) übersetzt werden

Hast Du einen Euro **oder** zwei Fünfziger?	euro $\underline{\vee}$ zweiFünfziger
Morgen fahr ich mit dem Auto **oder** dem Zug nach Berlin.	zug $\underline{\vee}$ auto
x ist kleiner y **oder** y ist kleiner x	$x<y \;\underline{\vee}\; y<x$
Der Händler gibt Rabatt **oder** ein kostenloses Radio	rabatt $\underline{\vee}$ radio

Formalisierung umgangssprachlicher Ausdrücke

- Aussagen sind häufig kontext-abhängig

Weil das Wetter schön ist, gehe ich nicht in die Vorlesung	Wetter_schön $\wedge$ $\neg$Vorlesung_besuchen
Weil ich die Matheklausur nicht bestanden habe, nehme ich am zweiten Versuch teil	$\neg$Mathe-bestanden $\wedge$ Mathe-Versuch2

- Klammern sind meist nur aus dem Kontext erkennbar

Sie wollten **nicht** verlieren **oder** unentschieden spielen	$\neg$**(**verlieren $\vee$ unentschieden) *oder* $\neg$verlieren $\vee$ unentschieden

➥ Vorsicht beim Übertragen von Umgangssprache in Formeln, insbesondere bei Klammern und Implikationen

Aufgabe

“Wie hast du es geschafft, eine Eins in der Modellierungsklausur zu schreiben?”
“Das war gar nicht so schwer. Ich habe mich einfach an folgende Grundsätze gehalten:”

- Wenn ich mal nicht in der Übung war, bin ich in die Vorlesung gegangen.
- Immer wenn ich in der Übung und in der Vorlesung war, habe ich nicht ins Modellierungsbuch geschaut.
- Wenn ich ins Modellierungsbuch geschaut habe oder nicht in der Übung war, war ich nicht in der Vorlesung.

1. Formalisieren Sie die drei Aussagen. Verwenden Sie dazu die angegebenen Variablennamen:
   - ue Ich war in der Übung
   - vo Ich war in der Vorlesung
   - bu Ich habe ins Modellierungsbuch geschaut
2. Interpretieren Sie die Formeln für alle Belegungen von *ue*, *vo*, und *bu*. Verwenden Sie dazu eine Wahrheitstafel.
3. Finden Sie mit Hilfe der Wahrheitstafel eine einfache Formulierung für den doch recht konfusen Ratschlag des Modellierungsstudierenden.

Quelle: http://ag-kastens.upb.de

Prädikatenlogik

- Erweiterung um parametrisierte Elementaraussagen
- n-stellige Prädikate sind Operationen P: $T^n \rightarrow$ BOOL
  In Konkretisierung entsprechen ihnen n-stellige Relationen
  - „x ist eine Katze“ als Formel: istKatze(x)
  - „a teilt b“ als Formel: teilt(a, b)
- 0-stellige Prädikate als Konstante
  - istKatze(molly)
  - istKatze(peterle)

Prädikatenlogik

- Quantoren
  - „für alle x gilt α“, in Symbolen: $\forall x\ \alpha$ (Allquantor)
  - „es gibt ein x, so daß α gilt“, in Symbolen: $\exists x\ \alpha$ (Existenzquantor)
  - Wenn α eine Formel darstellt, dann sind auch $\exists x\ \alpha$ und $\forall x\ \alpha$ Formeln
  - Variable sind nur als Operanden in Terme erlaubt, nicht für Funktionen oder Prädikate (Prädikatenlogik erster Stufe)

Prädikatenlogik

- Wirkungsbereich von Quantoren
  - $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists y\,(P(y) \wedge \forall x\,R(y, x))$
- Freie und gebundene Variablen
  - Ein Vorkommen von x in einer Formel α heißt **frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich für x eines Quantors liegt
  - Ein Quantor $\forall$x α bzw. $\exists$x α binden alle x, die frei sind in α. Die Variable x heißt dann **gebunden**
  - Beispiel: Formel $\alpha = (R(y) \wedge \exists y\,(P(y, x) \vee Q(y, z))$
    α hat drei freie Variable x, y, z. y kommt frei und gebunden vor
  - Eine Formel ist eine **Aussage**, genau dann wenn sie keine freie Variablen enthält
  - Gebundene Namen können umbenannt werden

Prädikatenlogik

- Für Formeln gilt
  - $\Im(\exists x\ \alpha)$=w genau dann, wenn es ein $x_u \in$ U gibt mit $\Im[x/x_u](\alpha)$=w
  - $\Im(\forall x\ \alpha)$=w genau dann, wenn für jedes $x_u \in$ U gilt $\Im[x/x_u](\alpha)$=w

- Anwendung in der Modellierung
  - Schon für einfache Aufgaben benötigt man Prädikatenlogik

- Beispiele
  - Hans liebt Gaby
  - liebt(Hans, Gaby)

  Alle lieben Gaby

  🕸x (liebt(x, Gaby))

Prädikatenlogik

- Allquantifizierte Aussagen
  - Aussage: Alle Hunde bellen
  - Formulierung: wenn etwas ein Hund ist, bellt es.
    $\forall x$ Hund(x) $\rightarrow$ bellt(x)
  - Andere Formulierung: es gibt keinen Hund der nicht bellt
    $\neg\exists$x Hund(x) $\wedge$ $\neg$bellt(x)
  - Wie lassen sich die beiden Formeln umformen?

- Weitere Beispiele
  - Alle Tiere im Zoo sind Raubtiere
  - Schalke-Fans hassen Dortmund-Fans

Modellierung von Geschäftsregeln

- Beispiel 1
  - „An alle Kunden, deren Mailadresse verfügbar ist, soll eine Mail geschickt werden“
  - $\forall x$ Kunde(x) $\wedge$ Verfuegbar(mailadresse(x)) $\rightarrow$ MailSchickenAn(x)

- Beispiel 2
  - „Jeder Kunde ist per E-Mail oder Telefon erreichbar“
  - $\forall x$ Kunde(x) $\rightarrow$ Erreichbar(x, telefon) $\vee$ Erreichbar(x, email)

Quelle: U. Hedtstück: Complex Event Processing

Umformungen prädikatenlogischer Formeln

- Negation
  - $\neg \forall x\, \alpha \approx \exists x \neg \alpha$ $\qquad\qquad$ $\neg \exists x\, \alpha \approx \forall x \neg \alpha$
  - Beispiel: Alle haben den Schuss gehört
    Negiert: Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat
    Falsch negiert: Keiner hat den Schuss gehört

- Quantoren vertauschen
  - $\forall x \forall y\, \alpha \approx \forall y \forall x\, \alpha$ $\qquad\qquad$ $\exists x \exists y\, \alpha \approx \exists y \exists\, \alpha$
  - Vorsicht, **nicht** äquivalent:
    $\forall s \exists v$ bestanden(s, v) $\not\approx$ $\exists v \forall s$ bestanden(s, v)
  - Alle haben eine Prüfung bestanden
    Ist nicht das gleiche wie
    Es gibt eine Prüfung die alle bestanden haben

Umformungen prädikatenlogischer Formeln

- Quantoren zusammenfassen
  - $\forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta \;\approx\; \forall x\, \alpha \wedge \beta$ $\qquad \exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta \;\approx\; \exists x\, \alpha \vee \beta$
  - Vorsicht, **nicht** äquivalent:
    $\forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta \;\not\approx\; \forall x\, \alpha \vee \beta$ $\qquad \exists x\, \alpha \wedge \exists x\, \beta \;\not\approx\; \exists x\, \alpha \wedge \beta$

- Beispiel
  - $\forall x$ gerade(x) $\vee$ ungerade(x)
    $\not\approx$ $\forall x$ gerade(x) $\vee$ $\forall x$ ungerade(x)
  - $\exists s$ bestanden(s, Mathe) $\wedge$ $\exists s$ bestanden(s, SYMO)
    $\not\approx$ $\exists s$ bestanden(s, Mathe) $\wedge$ bestanden(s, SYMO)

Modellierung in Prädikatenlogik

- Einheiten der Prädikatenlogik
  - Terme repräsentieren Objekte
  - Prädikatensymbole repräsentieren Eigenschaften oder Relationen
  - Formeln repräsentieren Aussagen
- Beispiel
  - Atomare Terme: M steht München dar, HH Hamburg, d für Deutschland
  - Funktionssymbole: ewz steht für Einwohnerzahl, hs für Hauptstadt
  - Zweistelliges Prädikatensymbole: N steht für „nördlich von“, „>“ für „größer“
  - Komplexere Terme: ewz(hs(d)) > ewz(m)

Übersetzung Deutsch nach Prädikatenlogik

- Beispiele
  - Eine Stadt liegt nördlich von München
  - $\exists$ S N m
  - $\exists x\, (S(x) \wedge N(x, m))$

  - Keine Stadt liegt nördlich von sich selbst
  - $\neg\, \exists$ S N
  - $\neg\, \exists\, x\, S(x) \wedge N(x, x)$

  - Jede Stadt ist groß
  - $\forall$ S G
  - $\forall\, x\, S(x) \rightarrow G(x)$

Formalisierung in Prädikatenlogik

- Modellieren Sie folgende Aussagen
  - Alle Menschen sind sterblich
  - Menschen sind sterblich
  - AIN-Studierende sind schlauer
  - Jeder im Raum spricht deutsch oder englisch
  - „Die dümmsten Bauern haben die dicksten Kartoffeln“ mit den Beziehungen „dümmer“ und „erntet“ und „dicker“

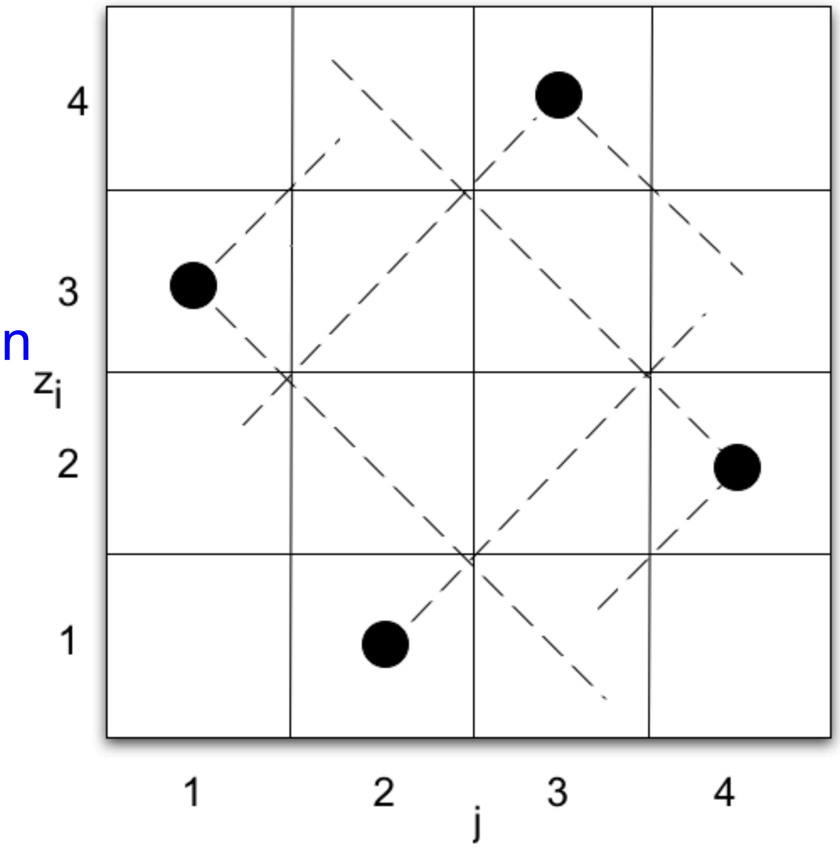
Formalisierung in Prädikatenlogik

- Weitere Beispiele
  - Definieren Sie anhand der Beziehungen Vater und Mutter die Beziehungen Geschwister
  - Definieren Sie anhand der Beziehungen Vater und Mutter die Beziehungen Großvater und Großmutter
  - Definieren Sie anhand der Beziehungen Vater und Mutter die Beziehung Enkel
  - ➢ Einfache Umsetzung in der Sprache Prolog

  - Definition größter gemeinsamer Teiler *g* von *a* und *b*. $a, b \in \mathbb{N}_0$
  - $\text{teilt}(g,a) \wedge \text{teilt}(g,b) \wedge (\forall h(\text{ teilt}(h,a) \wedge \text{teilt}(h,b) \rightarrow h \leq g\ ))$

Spezifikation des n-Damen-Problems

- Beschreibung
  - Gegeben: Kantenlänge $n \in \mathbb{N}_0$ eines n*n Schachbretts
  - Gesucht: Menge P der Platzierungen von jeweils n Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt.
  - Wie lassen sich die Platzierungen beschreiben?
  - Wie werden die zulässigen Platzierungen definiert?



- Index = {1,...,n} $P := \{p \mid p = (z_1,\ldots z_n) \in Index^n \wedge zulässig(p)\}$
- zulässig(p): $\forall i,j \in Index: i \neq j \rightarrow z_i \neq z_j \wedge |z_i - z_j| \neq |i-j|$