Gliederung der Vorlesung

Einführung

- Aufgabe
  - Ziehe drei Karten aus einem Kartenspiel. Bestimme die höchste der drei Karten

- Fragen
  - Was sind die Wertebereiche für Karten?
  - Welche Karte ist „höher“ als eine andere?

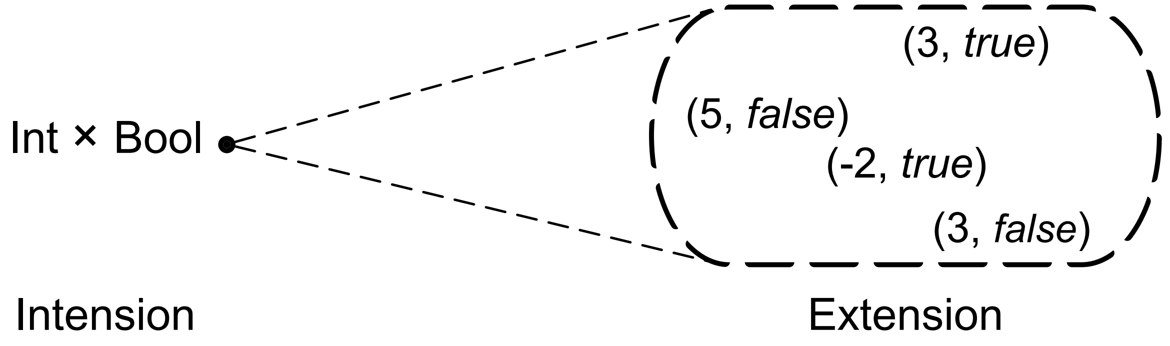
- Lösung
  - Definition des Wertebereichs eines Kartenspiels
  - Definition einer Relation „höher“ für das Kartenspiel

Definition Menge und Wertebereich

- Wertebereich
  - Ein Wertebereich ist eine Menge von Werten, die im Sinne eines Modells als gleichartig angesehen werden
  - Wo ein Wert eines Wertebereichs W gefordert wird, kann prinzipiell jedes Element aus W diese Rolle übernehmen
- Menge
  - Mengen zur Modellierung von Wertebereichen
  - Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge.
  - a ist ein Element der Menge M
  - Notation: $a \in M$
  - Die Elemente in einer Menge sind nicht geordnet

Definition von Typen

- Intensionale Sicht
  - Typ als „Ding“
- Extensionale Sicht
  - Definition als Auflistung von Elementen
- Angabe von Mengen
  - Intensional, durch Angabe einer Definition:
    Int×Bool oder $\{a \in \mathbb{N},\ a \text{ ist Quadratzahl und } a < 30\}$
  - Extensional, durch Aufzählen: {1, 4, 9, 16, 25}



Quelle: P. Pepper: Funktionale Programmierung

Mengenoperationen

- Mengenoperationen

Bezeichnung	**Notation**	**Bedeutung**
Ist Teilmenge	$M \subseteq N$	Aus $a \in M$ folgt $a \in N$
Ist echte Teilmenge	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$\{x \mid x \in M$ oder $x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$\{x \mid x \in M$ und $x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$\{x \mid x \in M$ und $x \notin N\}$

- Definitionen
  - Zwei Mengen M und N sind **disjunkt**, wenn gilt: $M \cap N = \emptyset$
  - Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt ihre **Kardinalität**, notiert als $|M|$

Potenzmenge

- Definition Potenzmenge
  - Die Potenzmenge einer Grundmenge *U* ist die Menge aller Teilmenge von *U*, geschrieben *Pow*(*U*) oder $\mathbb{P}$(U)
  - Als Formel: $\mathbb{P}(U) = \{M \mid M \subseteq U\}$

- Beispiel
  - Beigaben = $\mathbb{P}$(BeigabenArten)
    BeigabenArten = {Milch, Zucker}
  - Sprachen = {Deutsch, Französisch, Spanisch, Englisch}
    Von welchem Typ ist die Muttersprache einer Person?
    Von welchem Typ ist gesprochene Sprache einer Person?

Kartesisches Produkt

- Definition kartesisches Produkt oder geordnetes Paar oder Kreuzprodukt
  - Ein geordnetes Paar (x, y) besteht aus zwei Werten x und y, wobei x die erste und y die zweite Komponente ist.
  - Das kartesische Produkt $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus M und zweiter Komponente aus N
  - In Formeln: $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$

- Wie lassen sich die Spielkarten definieren???

Kartesisches Produkt am Beispiel Spielkarten

- Definition Spielkarten
  - Kartenspiel = KartenArten × KartenSymbole
  - KartenArten = {Kreuz, Pik, Herz, Karo}
    KartenSymbole = {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

- Was ist der Vorteil an dieser Darstellung gegenüber einer einfachen Aufzählung aller Karten?
- Wie viele Karten gibt es?
- Wie lassen sich rote und schwarze Karten unterscheiden?

Verallgemeinerung kartesisches Produkt

- Definition kartesisches Produkt mit n > 1 Mengen, als Menge von geordneten n-Tupeln
  - $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i$ und $i \in I\}$ mit Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ und nichtleeren M_i.
- Wenn alle Komponenten aus dem selben Wertebereich kommen:
  - $M^n = M \times M \times \ldots \times M$

Beispiele kartesisches Produkt

- Beispiele und Aufgaben
  - KalenderDaten = Tag × Monat × Jahr
    Wie sind Tag, Monat, Jahr definiert???
  - Adresse = Name × Strasse × Ort
    Name = Vorname × Zuname
    Strasse = Strassenname × Hausnummer
    Ort = Postleitzahl × Ortsname
  - Wie sieht ein Element von Adresse aus?
  - Wurf = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
    Wie sieht das Ergebnis eines dreimaligen Würfelns aus?
  - Wie lassen sich die Maße eines Schranks definieren?

Vereinigung

- Definition Vereinigung
  - Seien W_1, ..., W_n beliebige Mengen und n>1.
    Dann ist der vereinigte Wertebereich wie folgt definiert:

$$V = W_1 \cup \cdots \cup W_n = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

- Beispiele und Aufgaben
  - KartenSymbole = Bilder ∪ ZahlWerte
    Bilder = {Bube, Dame, König, Ass}
    Zahlwerte = {7, 8, 9, 10}
  - Kunde = {Siemens, VW, Bosch}
    Lieferant = {Siemens, Metabo}
    Geschäftspartner = Kunde ∪ Lieferant

Endliche Folgen

- Folge von Elementen können eine unterschiedliche Länge haben
- Definition endliche Folge
  - Ein n-Tupel aus A^n mit $n>1$ Komponenten aus der Menge A heißt Folge der Länge n über A
  - (a), mit $a \in A$ ist eine Folge der Länge 1 über A
  - () oder ε steht für die leere Folge
  - Definition Wertebereich der endlichen nicht-leeren Folgen über A als $A^+ = \{(a) \mid a \in A\} \cup \{x \mid x \in A^i \text{ und } i > 1\}$
  - Definition Wertebereich der endlichen Folgen über A:
    $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$

Endliche Folge

- Beispiel
  - WürfelWerte = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
    WürfelFolge = WürfelWerte^*
  - Welche Werte kann der Wertebereich WürfelFolge haben?

2 Algebraische Spezifikation

Relationen – Einführung

- Relationen setzen Elemente aus unterschiedlichen Wertebereichen zueinander in Beziehung
- Beispiel 1
  - Personen = {Peter, Gaby, Jens, Inge}
    Vorlesung= {Mathe1, Mathe2, SWmod, Prog1}
  - Wie lässt sich die Beziehung modellieren, wer welche Vorlesung besucht?
  - Wie kann diese Beziehung mathematisch in der Mengennotation dargestellt werden?
- Beispiel 2
  - Peter ist älter als Gaby, Gaby ist älter als Jens, Jens ist älter als Inge.
  - Wie kann dieser Sachverhalt dargestellt werden?

Relationen – Definition

- Definition
  - Eine *n*-stellige Relation *R* ist eine Menge von *n*-Tupel, wobei jedes davon aus dem Wertebereich $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ mit $n>1$ stammt
  - d.h. $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$
  - *R* stammt aus dem Wertebereich $\mathbb{P}(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)$
  - Eine einstellige Relation über der Menge *M* ist eine Teilmenge von *M*
- Beispiel
  - $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$
  - Wie ist $A \times B$ definiert, wie ist $\mathbb{P}$ von $A \times B$ definiert, wie viele Elemente hat diese Potenzmenge?

Relationen − Beispiel

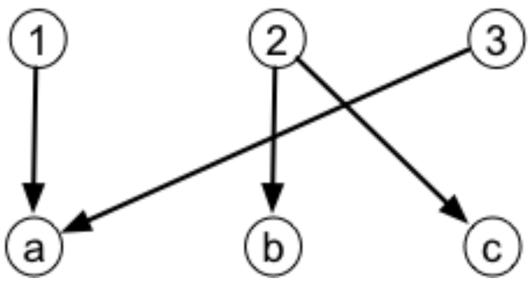
- Beispiel
  - Personen = {Peter, Gaby, Jens}
    Sprachen = {Deutsch, Englisch, Spanisch}
    spricht = {(Peter, Englisch), (Gaby, Spanisch), (Gaby, Deutsch),
    (Jens, Deutsch)}
  - Wie sieht die Potenzmenge von Personen x Sprachen aus?
  - Wie ist die Kardinalität der Potenzmenge?
  - Was sagt diese Zahl überhaupt aus?
- Andere Notation für zweistellige Relationen
  - $x \; R \; y$ statt $(x, y) \in R$
  - Hier: Peter spricht Englisch, Gaby spricht Spanisch, etc.
  - Beispiel mit Operationzeichen: $a>1$, $b<c$

Relationen − Darstellungsmöglichkeiten

- Beispielrelation
  - A = {1, 2, 3} B = {a, b, c} R ⊆ A×B
  - R = {(1, a), (2, b), (2, c), (3, a)}
- Darstellung als Matrix

	a	b	c
1	×		
2		×	×
3	×		

- Darstellung als Graph



Zweistellige Relationen - Eigenschaften

- Eigenschaften

reflexiv	Wenn für alle $x \in M$ gilt: $x\ R\ x$
irreflexiv	Wenn für alle $x \in M$ gilt: $x\ R\ x$ gilt nicht
symmetrisch	Wenn für alle $x,y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt $y\ R\ x$
antisymmetrisch	Wenn für alle $x,y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ folgt $x = y$
asymmetrisch	Wenn für alle $x,y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt $y\ R\ x$ gilt nicht
transitiv	Wenn für alle $x,y,z \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ z$ folgt $x\ R\ z$

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

- Definition Äquivalenzrelation
  - Eine zweistellige Relation $R \in \mathbb{P}(M \times M)$ ist eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist
- Definition Ordnungsrelation
  - Eine zweistellige Relation $R \in \mathbb{P}(M \times M)$ ist eine **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist
  - eine **strenge Ordnung** oder **strenge Halbordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist

Funktionen

- Definition Funktion
  - Eine **Funktion** f ist eine 2-stellige Relation $f \in \mathbb{P}(D \times B)$ für die gilt: aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y=z$
  - Einem Wert aus D ist also höchstens ein Wert aus B zugeordnet
  - Die Menge D heißt **Definitionsbereich**, die Menge B **Bildbereich** oder **Wertebereich** der Funktion f
  - Schreibweisen: $(x, y) \in f$ oder $y=f(x)$
  - Signatur einer Funktion: f: $D \rightarrow B$
- Beispiel 1
  - Funktion, die Nationen auf Ihre Einwohnerzahlen in Millionen abbildet:
    EinwohnerMio = {(Deutschland, 82), (Frankreich, 58), (Österreich, 8), (Spanien, 39)}

Funktionen

- Beispiel 2
  - Wie ist Definition- und Wertebereich für Multiplikation definiert?
- Beispiel 3
  - EuroMünzen = {1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200}
  - MeinGeldBeutel = {(1, 3), (2, 0), (5,0), (10,2), (20,0), (50,1), (100, 4), (200,2)}
  - Wie ist Definition- und Wertebereich für MeinGeldBeutel definiert?
- Beispiel 4
  - Personen = {Peter, Gaby, Jens}
    Sprachen = {Deutsch, Englisch}
  - Wie müssen Definitions- und Wertebereich für die Funktion „spricht" gewählt werden?

Funktionen – Eigenschaften

- Sei Funktion $f \in D \rightarrow B$

total	Wenn es für jedes $x \in D$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt
surjektiv	Wenn es zu jedem $y \in B$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt
injektiv	Wenn für zu jedem $y \in B$ höchstens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt
bijektiv	Wenn f zugleich surjektiv und injektiv ist

- Beispiele
  - Welche Eigenschaften haben die Funktionen „not“, „EinwohnerMio“
  - Welche Funktion ist nicht surjektiv?
  - Welche Funktion ist nicht injektiv?

Modellierung mit Wertebereichen

- Hinweise
  - Erst Grundmengen festlegen, dann Strukturen darüber bilden
  - Typische Elemente eines Wertebereichs angeben
  - Wertebereiche ausdruckskräftige Namen geben
  - Zusammengesetzte Wertebereiche schrittweise aufbauen
  - Nur gleichartige Elemente in einem Wertebereich
  - Mengen, Tupel und Folgen beliebiger Länge nicht verwechseln
  - Alle Klammern haben Bedeutung – zusätzliche verändern das Modell
  - Häufige Funktionen für Mengen
    - Zählen $\rightarrow \mathbb{N}_0$
    - Messen $\rightarrow \mathbb{R}$
    - Entscheiden $\rightarrow$ {true, false}

Modellierung mit Wertebereichen − Beispiele

- Beispiel Delegierte
  - Nationen = {Deutschland, Frankreich, Österreich, Schweiz}
  - Sprache = {Deutsch, Französisch, Spanisch}
  - Jedes Land hat drei Delegierte:
    Delegierte = Nationen × DelegiertenIndex
    DelegiertenIndex = {1, 2, 3}
  - Definition eines Arbeitskreises:
    Arbeitskreis = $\mathbb{P}$(Delegierte)
  - Definition eines ArbeitskreisIndex:
    Arbeitskreis = {A1, A2, A3}
  - Zuordnung Delegierte – Arbeitskreis durch Funktionen:
    AkBesetzungen: Arbeitskreis $\rightarrow$ $\mathbb{P}$(Delegierte)
    AkTeilnahme: Delegierte $\rightarrow$ $\mathbb{P}$(Arbeitskreis)

Modellierung mit Wertebereichen − Beispiele

- Beispiel Getränkeautomat
  - Getränke = GetränkeArten × Beigaben × Größe
  - GetränkeArten = {Kaffee, Tee, Kakao}
  - Beigaben = $\mathbb{P}$(BeigabenArten)
  - BeigabeArten = {Milch, Zucker}
  - Größe = {groß, klein}
  - Definition der Funktion Preis?

2 Algebraische Spezifikation

Terme, Sorten und Signaturen

- Term
  - Ausdruck in der Mathematik, der Variablen, Zahlen, Verknüpfungen, Klammern beinhalten kann
- Operatorbeschreibungen
  - $+$: Zahl × Zahl → Zahl
    $<$: Zahl × Zahl → Bool
    $\wedge$: Bool × Bool → Bool
    true: → Bool
    1: → Zahl
- Sorte
  - Disjunkte Teilmenge der Terme, die durch Operatoren gebildet wird
- Definition Stelligkeit
  - Eine Operator ist n-stellig mit $n \geq 0$, wenn er n Operanden hat.
  - 0-stellige Operatoren sind Konstanten

Notation für Terme

- Funktionsform
  - $f(t_1, t_2, ..., t_n)$
- Präfixform
  - $f\ t_1\ t_2\ ...\ t_n$
- Postfixform
  - $t_1\ t_2\ ...\ t_n\ f$
- Infixform
  - Zweistellige Operatoren: $t_1\ f\ t_2$
  - Mehrstellige Operatoren: $t_1\ f\ t_2\ ...\ t_1\ f\ t_n$

Algebren

- Definition Signatur
  - Eine Signatur $\Sigma = (S, F)$ beschreibt eine Menge von Sorten und eine Menge von Strukturbeschreibungen F
  - op: $s_1 \times \ldots \times s_n \rightarrow s_o$ mit $s_i \in S$
- Abstrakte Algebra
  - Eine abstrakte Algebra A = (τ, Σ, Q) ist definiert durch die Signatur Σ, die Menge der korrekten Terme τ zu Σ und eine Menge von Axiomen (Gesetze) Q.
  - Ein Axiom hat die Form $t_1 \rightarrow t_2$, wobei t_1 und t_2 korrekte Terme gleicher Sorte sind und Variablen enthalten können.
- Konkrete Algebra
  - Zuordnung konkreter Wertebereiche

Abstrakte boolsche Algebra

- Signatur
  - Signatur $\Sigma = (S, F)$, $S = \{\text{BOOL}\}$ Operationen F:

true:		$\rightarrow$	BOOL
false:		$\rightarrow$	BOOL
$\neg$:	BOOL	$\rightarrow$	BOOL
$\wedge$:	BOOL× BOOL	$\rightarrow$	BOOL
$\vee$:	BOOL× BOOL	$\rightarrow$	BOOL

  - Konstante true und false als „Grenzfall“ von Funktionen
- Axiome Q: für alle x, y der Sorte BOOL gilt:

Q1:	$\neg$ true	$\rightarrow$	false
Q2:	$\neg$ false	$\rightarrow$	true
Q3:	true $\wedge$ x	$\rightarrow$	x
Q4:	false $\wedge$ x	$\rightarrow$	false
Q5:	$x \wedge y$	$\rightarrow$	$\neg(\neg x \vee \neg y)$

Algebraische Spezifikation von Datenstrukturen

- Datenstruktur Stack (Keller)
  - Datenstruktur zum Einfügen und Entfernen von Elementen
  - Last-In-First-Out Prinzip
  - Anwendung z.B. bei Implementierung von Programmiersprachen

- Operationen
  - createStack: liefert einen leeren Stack
    push: fügt ein Element in den Stack ein
    pop: entfernt das zuletzt eingefügte Element
    top: liefert das zuletzt eingefügte, nicht gelöschte Element
    empty: gibt an, ob Stack leer ist

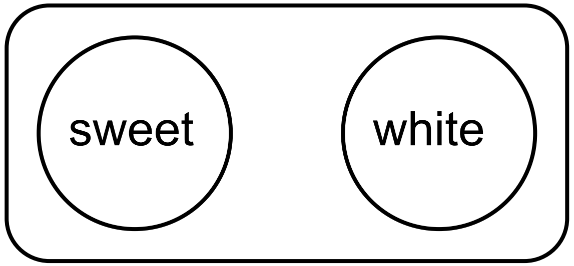
- Beispiele
  - push(push(push (createStack, 1), 2), 3)
  - push(pop(push(push(createStack, 1), 2)), 3)

Spezifikation Stack

- Definition
  - Signatur $\Sigma = (S, F)$
  - Sorten *S*: {Stack, Element, BOOL}
  - Welche Strukturbeschreibung haben die Operationen *F*?
  - Welche Axiome gelten?
  - createStack: $\rightarrow$ Stack
    push: Stack × Element $\rightarrow$ Stack
    pop: Stack $\rightarrow$ Stack
    top: Stack $\rightarrow$ Element
    empty: Stack $\rightarrow$ BOOL
  - K1: empty (createStack) $\rightarrow$ true
    K2: empty (push(k, t)) $\rightarrow$ false
    K3: pop(push(k, t))$\rightarrow$ k
    K4: top(push(k, t)) $\rightarrow$ t

Spezifikation Getränkeautomat

- Beschreibung Getränkeautomat
  - Zwei Knöpfe *sweet* und *white*, zur Auswahl von Zucker oder Milch oder beides
  - Eine bereits getroffene Auswahl kann durch nochmaliges drücken zurückgenommen werden
  - Die Reihenfolge der Knöpfe ist gleichgültig



Spezifikation Getränkeautomat

- Algebraische Spezifikation Getränkeautomat
  - Sorten s = {Add, Choice}
  - Operationen:

    sweet: $\rightarrow$ Add
    white: $\rightarrow$ Add
    noChoice: $\rightarrow$ Choice
    press: Add × Choice $\rightarrow$ Choice

  - Ein Term beschreibt eine Folge von Tastendrücken
    press (sweet, press (white, press (sweet, noChoice)))

  - Axiome:
    Q1: press (a, press(a, c)) $\rightarrow$ c
    Q2: press (sweet, press(white, c)) $\rightarrow$ press (white, press(sweet, c))
  -

Spezifikation Getränkeautomat

- Terme in Normalform
  - noChoice
  - press (white, noChoice)
  - press (sweet, noChoice)
  - press (white, press (sweet, noChoice))

  - Alle anderen Terme können in diese vier Terme umgeformt werden