

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 9

- 1) Gegeben sind die Basen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ des \mathbb{R}^3 und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ des \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $\varphi(x, y, z) = (x + y, 2z)$, die Darstellungsmatrix bezüglich dieser beiden Basen.

- 2) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei (bzgl. der Basen gebildet aus den Standardeinheitsvektoren $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ des \mathbb{R}^3) festgelegt durch

$$\begin{aligned}\varphi(e^{(1)}) &= 4e^{(1)} - e^{(2)} + 3e^{(3)} \\ \varphi(e^{(2)}) &= e^{(1)} + e^{(2)} + 2e^{(3)} \\ \varphi(e^{(3)}) &= -2e^{(1)} + 3e^{(2)} + e^{(3)}\end{aligned}$$

- (a) Geben Sie eine Matrix A an, für die gilt $A \cdot x = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Ermitteln Sie den Rang der Abbildung φ .
- (c) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung φ .
- (d) Ermitteln Sie das Bild $\varphi(\mathbb{R}^3)$ der Abbildung φ .

- 3) Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- 4) Welchen Rang haben die folgenden Matrizen A für $a, b, c \in \mathbb{R}$?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 - a \\ 1 & b & b & 1 - b \\ 1 & a & a & 1 - a \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2c & 3a & c & 2a \\ c^2 & 0 & c^3 & a^2 \\ c & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 0 \end{pmatrix}$