Willkommen zur Konsolidierung Mathematik

Inhalt

Vorbemerkungen

- Termine
- Abschlusstest
- Literatur
- Online-Material
- Software

Vorbemerkungen

Termine: Gruppe 1

Freitag,	07.10.16	09:45 – 13:00	Rechentechniken
Samstag,	08.10.16	14:00 – 17:15	Gleichungen und Ungleichungen
Freitag,	14.10.16	09:45 – 13:00	Fallunterscheidung, LGS
Samstag,	15.10.16	14:00 – 17:15	Summen, Produkte, Fakultät, …
Freitag,	21.10.16	fällt aus	
Samstag,	22.10.16	14:00 – 17:15	Wichtige Funktionen (1)
Freitag,	28.10.16	08:00 – 13:00	Wichtige Funktionen (2)
Samstag,	29.10.16	14:00 – 17:15	Differenzialrechnung
Samstag,	05.11.16	09:45 – 11:15	Abschlusstestat

Vorbemerkungen

Termine: Gruppe 2

Freitag,	07.10.16	14:00 - 17:15	Rechentechniken
Samstag,	08.10.16	09:45 - 13:00	Gleichungen und Ungleichungen
Freitag,	14.10.16	14:00 - 17:15	Fallunterscheidung, LGS
Samstag,	15.10.16	09:45 - 13:00	Summen, Produkte, Fakultät,
Montag,	17.10.16	14:00 – 15:30	Wichtige Funktionen (1)
Freitag,	21.10.16	fällt aus	
Samstag,	22.10.16	09:45 – 13:00	Wichtige Funktionen (2)
Freitag,	28.10.16	14:00 – 17:15	Wichtige Funktionen (3)
Samstag,	29.10.16	09:45 – 13:00	Differenzialrechnung
Samstag,	05.11.16	09:45 – 11:15	Abschlusstestat

Raum F-023

Vorbemerkungen

Abschlusstestat

	Max.
• Anwesenheit	7
• Präsentation	13
• Abschlusstest	50
Sie bestehen mit	35

Vorbemerkungen

Abschlusstestat

- Spickzettel
  - ein DIN A4-Blatt (beidseitig)
  - handschriftlich, keine Kopie
  - selbst angefertigt
- Taschenrechner
  - einfach, ohne Solver
  - kein GTR
  - kein CAS

Vorbemerkungen

Literatur

- COSH: Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern
  www.hochschuldidaktik.net/documents_public/MindestanfordKatalog_Mathe_20140724_2_0.pdf
- Prof. Dr. Thomas Birkhölzer, HTWG Konstanz Mathematik-Vorkurs
  www.htwg-konstanz.de/fileadmin/pub/fk_ei/fuer_bewerber/mathematik-vorkurs/pdfs/2013_VorkursSkript.pdf
- Holhloch, Kümmerer, Gilg: Brücken zur Mathematik Grundlagen, Band 1, Cornelsen-Verlag Berlin ISBN 978-3-06-455805-2
- Deutsch, Ott: Schnittstelle Mathematik, Vorkurs für Studienanfänger, Merkur Verlag Rinteln ISBN 978-3-8120-0604-0

Vorbemerkungen

Online-Material

- Skript und Aufgaben zum Kurs
  http://moodle.htwg-konstanz.de
- Onlinevorkurs des VE&MINT-Projekts der Universität Karlsruhe
  http://mintlx3.scc.kit.edu/veundmintkurs/mpl/3.1.html
  Kapitel 1 - 7
- Online Mathematik Brückenkurs OMB+
  http://www.ombplus.de/
  Kapitel 1 - 7

Vorbemerkungen

Software

GeoGebra: www.geogebra.org

- Dynamische Mathematiksoftware

Download	Online GeoGebra	GeoGebraTube
GeoGebra Programm für (fast) alle Geräte	Online etwas selbst erstellen oder verändern	Online Materialsammlung zum suchen, einbinden und verändern
Jetzt herunterladen	Starte GeoGebra	Materialien durchsuchen
		
www.geogebra.org/download	web.geogebra.org	tube.geogebra.org

Vorbemerkungen

Software

GeoGebra: www.geogebra.org

- Dynamische Mathematiksoftware
- Anleitungen und Hilfe

Anleitungen	Forum	GeoGebra Handbuch
		Abc
Schritt-für-Schritt Anleitungen, sowohl für Anfänger als auch für Fortgeschrittene	Im Benutzer Forum bekommen Sie Antworten auf all Ihre Fragen	Das Handbuch beschreibt alle Befehle und Werkzeuge
wiki.geogebra.org/de/Anleitungen	www.geogebra.org/forum	wiki.geogebra.org/de/Handbuch wiki.geogebra.org/de/Kategorie:Befehle wiki.geogebra.org/de/Kategorie:Werkzeuge

Rechentechniken

Übersicht

- Brüche
- Potenzen und Wurzeln
- Quadratische Binome
- Linearfaktorzerlegung

Rechentechniken

Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Rechentechniken

Potenzen und Wurzeln

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{R}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad n \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{R}^*$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad n \in \mathbb{Q}^*,\ a \in \mathbb{R}_+^*$

$1^n = 1$
$a^0 = 1$
0^0 ist nicht definiert.

Rechentechniken

Potenzen und Wurzeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Rechentechniken

Potenzen und Wurzeln

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Rechentechniken

Quadratische Binome

$(a + b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Rechentechniken

Faktorisieren

- $a\,x - b = a \cdot (x - \frac{b}{a})$
- $a\,x^2 - b = a \cdot \left(x - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$
- $a\,x^2 - 2ab\,x + ab^2 = a \cdot (x - b)^2$
- $a\,x^2 + b\,x + c$?

Gleichungen

Faktorisieren

François Viète oder Franciscus Vieta (1540 - 1603), französischer Advokat und Mathematiker

Satz von Vieta: $x^2 + b\,x + c = (x + u)(x + v)$,
wenn $b = u + v$ und $c = u \cdot v$

Rechentechniken

Linearfaktorzerlegung

Ein Polynom

$$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

kann in Faktoren zerlegt werden in der Form

$$a_n\, \underbrace{(x - x_1)\,(x - x_2)\,\ldots\,(x - x_r)}_{\text{Nullstellen des Polynoms}}\, \underbrace{(x^{n-r} + b_{n-r-1}\, x^{n-r-1} + \ldots + b_0)}_{\text{Restpolynom}}$$

Rechentechniken

Horner-Schema

Beispiel $2\,x^4 - 2\,x^3 - 10\,x^2 + 6\,x + 12$

1. Nullstelle: $x_1 = 2$

Horner-Schema

2	-2	-10	6	12
	4	4	-12	-12
2	2	-6	-6	0

Zerlegung: $(x - 2)\,(2\,x^3 + 2\,x^2 - 6\,x - 6)$

Rechentechniken

Horner-Schema

Beispiel $2x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 6x + 12$

Zerlegung $(x - 2)(2x^3 + 2x^2 - 6x - 6)$

2. Nullstelle: $x_2 = -1$

Horner-Schema

2	2	-6	-6
	-2	0	6
2	0	-6	0

Zerlegung: $(x - 2)(x + 1)(2x^2 - 6)$

$= 2(x - 2)(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

Ende des ersten Kapitels

Gleichungen und Ungleichungen

- Exakte Lösungsverfahren
- Besonderheiten bei Ungleichungen
- Fallunterscheidungen
- Grafische Lösungsverfahren
- Lineare Gleichungssysteme

Gleichungen

Exakte Lösungsverfahren

Äquivalenzumformungen

- Die Seiten einer Gleichung dürfen vertauscht werden.
- Auf beiden Seiten einer Gleichung dürfen dieselben umkehrbaren Rechenoperation (*) durchführt werden.
- Zwei Gleichungen dürfen addiert werden, indem man jeweils ihre linken und ihre rechten Seiten addiert.
- Man darf in einer Gleichung einen beliebigen Ausdruck durch einen anderen gleichwertigen ersetzen.

Gleichungen

Eindeutig umkehrbare Rechenoperationen

- Addition/ Subtraktion eines Ausdrucks
- Multiplikation/ Division mit einem Ausdruck $\neq 0$
- Den Kehrwert nehmen
- Potenzieren mit einem ungeraden Exponent
- Eine ungerade Wurzel ziehen
- In den Exponenten einer Zahl erheben
- Logarithmieren

Gleichungen

Nicht eindeutig umkehrbar

- Potenzen mit geraden Exponenten
- Speziell: Quadratische Terme
- Geradzahlige Wurzeln
- Trigonometrische Terme
- Beträge
- …

Gleichungen

Lösungsformel

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Gleichungen

Faktorisieren

„Satz vom Nullprodukt"

Ein Produkt hat genau dann den Wert Null,
wenn mindestens ein Faktor den Wert Null hat.

Gleichungen

Substitution

Komplizierte Gleichungen können vereinfacht werden, wenn man
komplizierte gleichartige Terme durch einfachere ersetzt.

Gleichungen

Welche Gleichungen sind exakt lösbar?

- $2x^3 - x = 1$
- $e^{2x} - e^x = 2$
- $e^{2x} = 1$
- $x^6 + 2x^3 = 3$
- $\sqrt{x+1} = 0$
- $\sqrt{x} + 1 = 0$
- $x \cdot \ln(x + 1) = 0$
- $x^{2014} - 3x = 0$
- $x^{2014} - 3x = 1$
- …

Gleichungen

Die Variable kommt nur ein Mal vor

- $2x^3 - x = 1$
- $e^{2x} - e^x = 2$
- $e^{2x} = 1$
- $x^6 + 2x^3 = 3$
- $\sqrt{x+1} = 0$
- $\sqrt{x} + 1 = 0$
- $x \cdot \ln(x + 1) = 0$
- $x^{2014} - 3x = 0$
- $x^{2014} - 3x = 1$
- …

Gleichungen

Man kann faktorisieren

- $2x^3 - x = 1$
- $e^{2x} - e^x = 2$
- $e^{2x} = 1$
- $x^6 + 2x^3 = 3$
- $\sqrt{x+1} = 0$
- $\sqrt{x} + 1 = 0$
- $x \cdot \ln(x + 1) = 0$
- $x^{2014} - 3x = 0$
- $x^{2014} - 3x = 1$
- …

Gleichungen

Man kann substituieren

- $2x^3 - x = 1$
- $e^{2x} - e^x = 2$
- $e^{2x} = 1$
- $x^6 + 2x^3 = 3$
- $\sqrt{x+1} = 0$
- $\sqrt{x} + 1 = 0$
- $x \cdot \ln(x + 1) = 0$
- $x^{2014} - 3x = 0$
- $x^{2014} - 3x = 1$
- …

Gleichungen

… und alle anderen Gleichungen?

- $2x^3 - x = 1$ Lösungsformel für kubische Gleichungen
- $e^{2x} - e^x = 2$
- $e^{2x} = 1$
- $x^6 + 2x^3 = 3$
- $\sqrt{x+1} = 0$
- $\sqrt{x} + 1 = 0$
- $x \cdot \ln(x + 1) = 0$
- $x^{2014} - 3x = 0$
- $x^{2014} - 3x = 1$ nur näherungsweise lösbar
- …

Gleichungen und Ungleichungen

- Exakte Lösungsverfahren
- Besonderheiten bei Ungleichungen
- Fallunterscheidungen
- Grafische Lösungsverfahren
- Lineare Gleichungssysteme

Besonderheiten bei Ungleichungen

Ungleichungen

… sind Ausdrücke, die eines der Zeichen <, ≤, > oder ≥ enthalten.

Es gilt:

$a < b \Leftrightarrow b > a$ und $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$

$a < b \Leftrightarrow -a > -b$ und $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$

Besonderheiten bei Ungleichungen

Umgang mit Ungleichungen

- Die Seiten einer Ungleichung dürfen nicht vertauscht werden.
- Wenn man auf beiden Seiten einer Ungleichung denselben Ausdruck addiert/subtrahiert oder mit demselben positiven Ausdruck multipliziert, bleibt die Ungleichung erhalten.
- Wenn man auf beiden Seiten einer Ungleichung denselben Ausdruck negativen Ausdruck multipliziert, kehrt sich die Ungleichung um.
- Man kann zwei Ungleichungen mit demselben Relationszeichen wie Gleichungen addieren.
- Man darf in einer Ungleichung einen beliebigen Ausdruck durch einen anderen gleichwertigen ersetzen.

Gleichungen und Ungleichungen

- Exakte Lösungsverfahren
- Besonderheiten bei Ungleichungen
- **Fallunterscheidungen**
- Grafische Lösungsverfahren
- Lineare Gleichungssysteme

Fallunterscheidungen

Gleichungen und Ungleichungen mit Betrag

Der (absolute) Betrag einer Zahl ist der positive Wert der Zahl, wenn man ihr Vorzeichen nicht beachtet. Auf der Zahlengeraden bedeutet der Betrag den Abstand der Zahl von Null.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Gleichungen und Ungleichungen

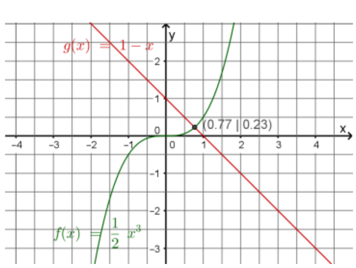
- Exakte Lösungsverfahren
- Besonderheiten bei Ungleichungen
- Fallunterscheidungen
- Grafische Lösungsverfahren
- Lineare Gleichungssysteme

Grafische Lösungsverfahren

1. Beispiel: Polynomgleichung

$\frac{1}{2}x^3 = 1 - x$

$x \approx 0{,}77$

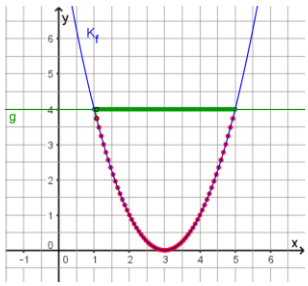


Grafische Lösungsverfahren

2. Beispiel: Quadratische Ungleichung

$(x - 3)^2 < 4$

L =]1; 5[



Gleichungen und Ungleichungen

- Exakte Lösungsverfahren
- Besonderheiten bei Ungleichungen
- Fallunterscheidungen
- Grafische Lösungsverfahren
- Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS), bestehend aus m Gleichungen mit n Unbekannten, hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die reellen Zahlen $a_{i,j}$ heißen Koeffizienten, die reellen Zahlen b_j heißen absolute Glieder des Gleichungssystems.

Ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reeller Zahlen, das jede der m Gleichungen erfüllt, ist eine Lösung des Linearen Gleichungssystems.

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Gesucht ist eine Lösung des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Carl-Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Gauß-Algorithmus

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 10x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 14x_2 + 4x_3 &= 13 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 3 & 10 \\ 0 & 14 & 4 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 7 \\ \cdot (-5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 10x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Gesucht ist eine Lösung des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 10x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \cdot (-3) \quad \cdot (-2)$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 &= -6 \\ 10x_2 &= -5 \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot (-0{,}6) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -0{,}5 \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -0{,}5 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Umgang mit Gleichungssystemen

- Zwei Zeilen des LGS dürfen vertauscht werden.
- Man darf eine Zeile mit einer Zahl ≠ 0 multiplizieren.
- Man kann zwei Zeilen addieren, indem man sie elementweise addiert.

Ende des zweiten Kapitels

Endliche Summen und Produkte

Übersicht

- Endliche Summen
- Das Produktsymbol
- Nützliche Formeln
- Fakultät und Binomialkoeffizient

Endliche Summen und Produkte

Endliche Summen

- 1 + 2 + 3 + 4 + … + 1000
- 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + … + 0,00000000001
- 1 + 8 + 27 + 64 + … + 1000
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}$
- …

Endliche Summen und Produkte

Endliche Summen

$$\underbrace{1}_{\text{Startwert}} + 8 + 27 + 64 + \underbrace{\ldots}_{\text{Was?}} + \underbrace{1000}_{\text{Endwert}}$$

Summensymbol $\sum_{\text{Start}}^{\text{Ende}} \text{was}$

Endliche Summen und Produkte

Endliche Summen

$$\underbrace{1}_{i = 1} + 8 + 27 + 64 + \underbrace{\ldots}_{i^3} + \underbrace{1000}_{i = 10}$$

Summensymbol $\sum_{i=1}^{10} i^3$

Endliche Summen und Produkte

Endliche Produkte

- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1000$
- $1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}001 \cdot \ldots \cdot 0{,}00000000001$
- $1 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 64 \cdot \ldots \cdot 1000$
- $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2015}$
- …

Produktsymbol $\prod_{\text{Start}}^{\text{Ende}} \text{was}$

Endliche Summen und Produkte

Nützliche Formeln

- $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Endliche Summen und Produkte

Fakultät und Binomialkoeffizient

Die Fakultät von n ist $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot(n-1)$

Der Binomialkoeffizient „n über k“ oder „k aus n“ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots}{1\cdot 2\cdot\ldots} \quad \frac{+1)}{} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Endliche Summen und Produkte

Anwendungen

- n! ist die Zahl der Möglichkeiten n Objekte in einer Reihe anzuordnen.
- $\binom{n}{k}$ ist die Zahl der Möglichkeiten aus n Objekten k auszuwählen.

Ende des dritten Kapitels

Wichtige Funktionen

- Potenzfunktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen
- Arkusfunktionen

Wichtige Funktionen

Potenzfunktion

Eine Funktion vom Typ f mit

$$f(x) = b \cdot x^a$$

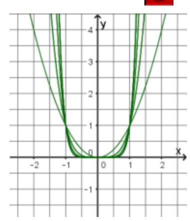
heißt Potenzfunktion.

Potenzfunktionen

… mit natürlichen Exponenten

Gerade Exponenten: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6$, …

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
  Wertemenge $W = \mathbb{R}_+$
- Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
- Eigenschaften der Schaubilder:
  - Alle enthalten die Punkte (0|0),(1|1) und (-1|1).
  - Alle sind symmetrisch zur y-Achse.

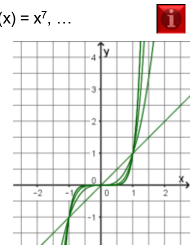


Potenzfunktionen

… mit natürlichen Exponenten

Ungerade Exponenten: $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$, $f(x) = x^7$, …

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
  Wertemenge $W = \mathbb{R}$
- Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$
  und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
- Eigenschaften der Schaubilder:
  - Alle enthalten die Punkte (0|0), (1|1) und (-1|-1).
  - Alle sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

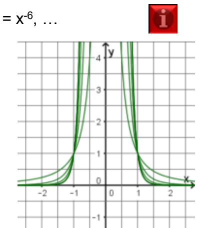


Potenzfunktionen

… mit negativ ganzen Exponenten

Gerade Exponenten: $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{-4}$, $f(x) = x^{-6}$, …

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^*$
  Wertemenge $W = \mathbb{R}_+^*$
- Für $x \to 0$ gilt $f(x) \to \infty$.
- Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to 0$.
- Eigenschaften der Schaubilder:
  - Alle enthalten die Punkte (1|1) und (-1|1).
  - Alle sind symmetrisch zur y-Achse.

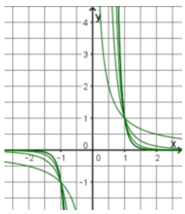


Potenzfunktionen

… mit negativ ganzen Exponenten

Ungerade Exponenten: $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = x^{-3}$, $f(x) = x^{-5}$, …

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^*$
  Wertemenge $W = \mathbb{R}^*$
- Für $x \to 0$ von rechts gilt $f(x) \to \infty$
  und für $x \to 0$ von links gilt $f(x) \to -\infty$.
- Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to 0$.
- Eigenschaften der Schaubilder:
  - Alle enthalten die Punkte (1|1) und (-1|-1).
  - Alle sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



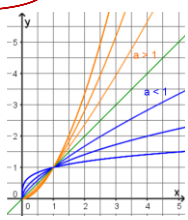
Potenzfunktionen

… mit gebrochenen Exponenten

Positive Exponenten, z.B. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, …

Auch die ungeraden Wurzeln

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_+$
  Wertemenge $W = \mathbb{R}_+$
- Für $x \to \infty$ gilt f(x) $f(x) \to \infty$.
- Eigenschaften der Schaubilder:
  - Alle enthalten die Punkte (0|0) und (1|1).



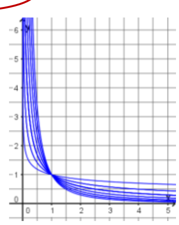
Potenzfunktionen

… mit gebrochenen Exponenten

Negative Exponenten, z.B. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$, …

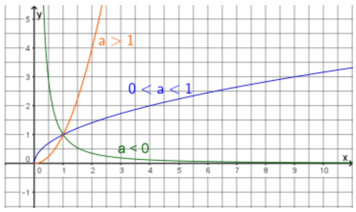
Auch die ungeraden Wurzeln

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_+^*$
  Wertemenge $W = \mathbb{R}_+^*$
- Für $x \to 0$ gilt $f(x) \to \infty$.
- Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to 0$.
- Eigenschaften der Schaubilder:
  - Alle enthalten den Punkt (1|1).



Potenzfunktionen

Übersicht



Wichtige Funktionen

- Potenzfunktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen
- Arkusfunktionen

Wichtige Funktionen

Exponentialfunktion

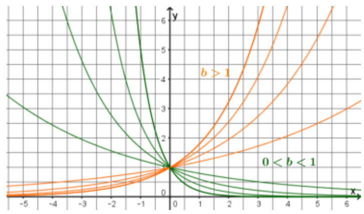
Eine Funktion vom Typ f mit

$$f(x) = a \cdot b^x \quad \text{mit } b > 0$$

heißt Exponentialfunktion.

Exponentialfunktion

Übersicht



Exponentialfunktion

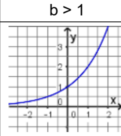
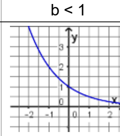
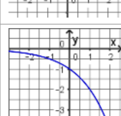
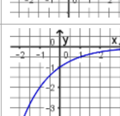
Eigenschaften

- Definitionsmenge D = $\mathbb{R}$
- Charakteristische Punkte (0|a) und (1|a·b).

		b > 1	b < 1
a > 0	Wertemenge	$W = \mathbb{R}_+^*$	$W = \mathbb{R}_+^*$
	Für $x \to \infty$ geht f(x) gegen	∞	0
	Für $x \to -\infty$ geht f(x) gegen	0	∞
a < 0	Wertemenge	$W = \mathbb{R}_-^*$	$W = \mathbb{R}_-^*$
	Für $x \to \infty$ geht f(x) gegen	$-\infty$	0
	Für $x \to -\infty$ geht f(x) gegen	0	$-\infty$

Exponentialfunktion

Eigenschaften

	b > 1	b < 1
a > 0		
a < 0		

Exponentialfunktion

Natürliche Exponentialfunktion

Exponentialfunktion mit der Basis e

$f(x) = a \cdot e^x$

Dabei ist e = 2,71828… die Eulersche Zahl.

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Exponentialfunktion

Anwendungen

- Sparguthaben bei gleichbleibender Verzinsung p in %:
  $K(x) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$
- Konzentration eines Wirkstoffs im Blut bei konstanter Abnahmerate c:
  $f(x) = a \cdot (1 - c)^x$
- Exponentielles Wachstum mit der Wachstumskonstanten k > 0:
  $B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$
- Radioaktiver Zerfall mit der Zerfallskonstanten λ:
  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Wichtige Funktionen

- Potenzfunktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen
- Arkusfunktionen

Logarithmusfunktion

Was ist ein Logarithmus?

Beispiel

$2^x = 10$?

- $\left.\begin{array}{l}2^3 = 8\\ 2^4 = 16\end{array}\right\} \rightarrow 3 < x < 4$
- $\left.\begin{array}{l}2^3 = 8\\ 2^{3,5} = 8 \cdot \sqrt{2} \approx 11,3\end{array}\right\} \rightarrow 3 < x < 3,5$
- $\left.\begin{array}{l}2^{3,25} = 8 \cdot \sqrt[4]{2} \approx 9,5\\ 2^{3,5} \approx 11,3\end{array}\right\} \rightarrow 3,25 < x < 3,5$
- …

Definition $x = \log_2(10) \approx 3,3$

Wichtige Funktionen

Definition

Der Logarithmus einer Zahl x zur Basis a ist die Antwort auf die Frage „a hoch was ist x?“.

$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a(x)$

Logarithmusfunktion

Logarithmenregeln

- $\log_a(a) = 1$ $\quad a^1 = a$
- $\log_a(1) = 0$ $\quad a^0 = 1$
- $\log_a(a^c) = c$ $\quad a^c = a^c$
- $a^{\log_a(c)} = c$ $\quad a^x = c \Leftrightarrow x = \log_a(c)$

Logarithmusfunktion

Logarithmenregeln

	Beispiele
• $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\lg(20) = \lg(10) + \lg(2) = 1 + \lg(2)$
• $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$\lg(0{,}5) = \lg(1) - \lg(2) = -\lg(2)$
• $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$	$\lg(100) = \lg(10^2) = 2$

Logarithmusfunktion

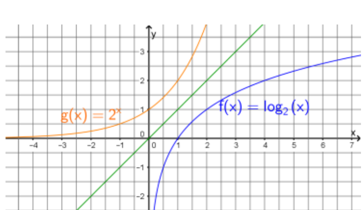
Die Logarithmusfunktion zur Basis a ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a

$f(x) = \log_a(x)$ mit $a > 0$ und $x > 0$

$f^{-1}(x) = a^x$ mit $a > 0$

Logarithmusfunktion

Schaubild



Logarithmusfunktion

Eigenschaften

	$f(x) = \log_a(x)$	$f^{-1}(x) = a^x$
	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_+^*$ Wertemenge $W = \mathbb{R}$ Gemeinsamer Punkt (1|0)	Wertemenge $W = \mathbb{R}_+^*$ Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ Gemeinsamer Punkt (0|1)
a > 1	Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to \infty$ Für $x \to 0$ gilt: $f(x) \to -\infty$	Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to \infty$ Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0$
a < 1	Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$ Für $x \to 0$ gilt: $f(x) \to \infty$	Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to \infty$ Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to 0$

Logarithmusfunktion

1. Umrechnung

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$$
$$\Leftrightarrow \log_b(a^y) = \log_b(x)$$
$$\Leftrightarrow y \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Logarithmusfunktion

2. Umrechnung

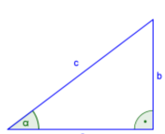
$$y = a^x \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(a^x)$$
$$\Leftrightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(a)$$
$$\Leftrightarrow y = e^{x \cdot \ln(a)}$$
$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Wichtige Funktionen

- Potenzfunktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen
- Arkusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

am rechtwinkligen Dreieck



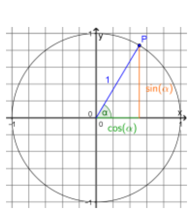
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a}$$

Trigonometrische Funktionen

am Einheitskreis



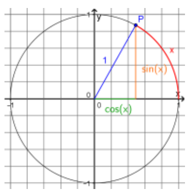
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{1} = y_P$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{1} = x_P$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Trigonometrische Funktionen

im Bogenmaß



$$\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180°} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$$

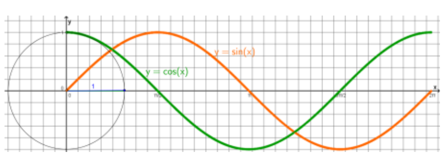
$\sin(x) = y_P$

$\cos(x) = x_P$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Trigonometrische Funktionen

Schaubilder



Trigonometrische Funktionen

Wichtige Werte

α	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan(x)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Trigonometrische Funktionen

Eigenschaften

	sin(x)	cos(x)	tan(x)
Definitionsbereich	D = $\mathbb{R}$	D = $\mathbb{R}$	D = $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$
Wertebereich	W = [–1; 1]	W = [–1; 1]	W = $\mathbb{R}$
Symmetrie	zum Ursprung	zur y-Achse	zum Ursprung
Periode	2π	2π	π
Nullstellen	$\{0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots\}$	$\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	$\{0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots\}$

Wichtige Funktionen

- Potenzfunktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktionen
- Arkusfunktionen

Arkusfunktionen

Definition

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktionen, d.h.

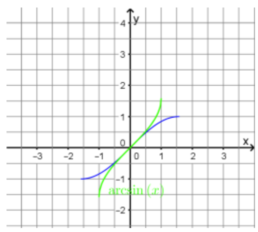
y = arcsin(x) $\Leftrightarrow$ sin(y) = x mit $-1 \leq x \leq 1$ und $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

y = arccos(x) $\Leftrightarrow$ cos(y) = x mit $-1 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq \pi$

y = arctan(x) $\Leftrightarrow$ tan(y) = x mit $x \in \mathbb{R}$ und $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

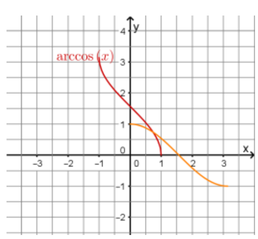
Arkusfunktionen

Arkus-Sinus



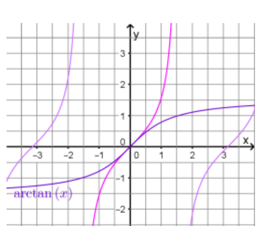
Arkusfunktionen

Arkus-Kosinus



Arkusfunktionen

Arkus-Tangens



Arkusfunktionen

Eigenschaften

	arcsin(x)	arccos(x)	arctan(x)
Definitionsbereich	D = [–1; 1]	D = [–1; 1]	D = $\mathbb{R}$
Wertebereich	$W=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$W=[0;\pi]$	$W=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
Monotonie	steigend	fallend	steigend
Nullstellen	x = 0	x = 1	x = 0

Ende des vierten Kapitels

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient und Ableitung
- Ableitungen der wichtigen Funktionen
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
- Grafische Anwendungen
- Optimierungsprobleme

Differenzenquotient und Ableitung

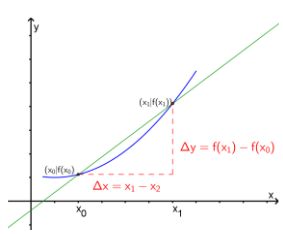
Definition

Der Differenzenquotient einer Funktion f im Intervall $[x_0; x_1]$ ist die durchschnittliche Änderungsrate

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Differenzenquotient und Ableitung

Durchschnittliche Änderungsrate



Differenzenquotient und Ableitung

Definition

Eine Funktion heißt differenzierbar an der Stelle x_0, wenn die momentane Änderungsrate einen eindeutigen Wert besitzt, d.h. wenn der Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

existiert.

In diesem Fall nennt man den Grenzwert die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 und bezeichnet sie mit $f'(x_0)$.

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient und Ableitung
- Ableitungen der wichtigen Funktionen
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
- Grafische Anwendungen
- Optimierungsprobleme

Ableitungen der wichtigen Funktionen

Funktion	Ableitung
• $f(x) = a \cdot x^n$; $n \in \mathbb{Q}$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$
speziell: $f(x) = \frac{a}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{x^{n+1}}$
$f(x) = a \cdot \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$
• $f(x) = b \cdot a^x$; $a > 0$	$f'(x) = b \ln(a) \cdot a^x$
speziell: $f(x) = a \cdot e^x$	$f'(x) = a \cdot e^x$
• $f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
speziell: $f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
• $f(x) = a \sin(x)$	$f'(x) = a \cdot \cos(x)$
$f(x) = a \cos(x)$	$f'(x) = -a \cdot \sin(x)$

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient und Ableitung
- Ableitungen der wichtigen Funktionen
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
- Grafische Anwendungen
- Optimierungsprobleme

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Produktregel

Eine Funktion f, die das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen u und v ist, also

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

besitzt die Ableitung $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Quotientenregel

Eine Funktion f, die der Quotient zweier differenzierbarer Funktionen u und v mit $v(x) \neq 0$ ist, also

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

besitzt die Ableitung $f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Kettenregel

Eine Funktion f, die die Verkettung einer äußeren Funktion f und einer inneren Funktion g ist,

$$x \rightarrow g(x) = z \rightarrow f(z)$$

besitzt die Ableitung $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient und Ableitung
- Ableitungen der wichtigen Funktionen
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
- Grafische Anwendungen
- Optimierungsprobleme

Grafische Anwendungen

Monotonie

Eine differenzierbare Funktion f ist im Intervall]a; b[

- monoton wachsend $\leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a; b[$
- monoton fallend $\leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a; b[$.
- streng monoton wachsend $\leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a; b[$ und in keinem Teilintervall ist $f'(x) \equiv 0$.
- streng monoton wachsend $\leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a; b[$ und in keinem Teilintervall ist $f'(x) \equiv 0$.

Grafische Anwendungen

Lokale Extrema

Eine differenzierbare Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein

- lokales Minimum $\leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ und f' ändert in x_0 das Vorzeichen von – nach +.
- lokales Maximum $\leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ und f' ändert in x_0 das Vorzeichen von + nach –.

Grafische Anwendungen

Lokale Extrema

Eine zweimal differenzierbare Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein
- lokales Minimum ↔ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.
- lokales Maximum ↔ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

Grafische Anwendungen

Krümmung

Eine zweimal differenzierbare Funktion f ist im Intervall]a; b[
- linksgekrümmt ↔ $f''(x) > 0$ für alle $x \in$]a; b[
- rechtsgekrümmt ↔ $f''(x) < 0$ für alle $x \in$]a; b[

f hat an der Stelle x_0 eine Wendestelle
↔ $f''(x_0) = 0$ und f'' ändert in x_0 das Vorzeichen.

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient und Ableitung
- Ableitungen der wichtigen Funktionen
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
- Grafische Anwendungen
- Optimierungsprobleme

Optimierungsprobleme

Beispiel

Bei einem Orientierungslauf will eine Läuferin möglichst schnell vom Punkt A zum Punkt B gelangen. Der Startpunkt A liegt auf einer geradlinig verlaufenden Straße, der erste Stationspunkt B nach 4 km rechtwinklig um 1 km links der Straße.

Die Läuferin kann auf der Straße mit 12 km/h und im Gelände mit 6 km/h laufen.

Optimierungsprobleme

Zusammenfassung

1. Schritt: Sich ein Bild machen
2. Schritt: Zielfunktion aufstellen
   Was soll maximal/ minimal werden?
   Von welcher (einzigen) Variablen hängt dies ab?
3. Schritt: Lokales Extremum bestimmen
4. Schritt: Mit den Randwerten vergleichen
   Absolutes Extremum bestimmen

Ende des fünften Kapitels