HTWG Konstanz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. J. Garloff

KLAUSUREN IN MATHEMATIK 1 (Prüfungsnr. 11000) und MATHEMATK 1 UND KONSOLIDIERUNG (Prüfungsnr. 20110) SS 2015

Aufgabe 1:

Stellen Sie die komplexen Zahlen z_1, z_2,

$$z_1 := 1 - j, z_2 := -1 - j,$$

in der Polarform dar, berechnen Sie $z_1^7 \cdot z_2^9$ und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form an. (ca. 6 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegen sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mit der Darstellungsmatrix (bezüglich der Basis gebildet aus den Standardeinheitsvektoren des $\mathbf{R}^3$)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Kern von φ. Welche Dimension besitzt $\varphi(\mathbf{R}^3)$, das Bild des $\mathbf{R}^3$ unter der Abbildung φ? Begründen Sie Ihre Aussage!

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und –vektoren von φ. Lässt sich eine Basis des $\mathbf{R}^3$ aus Eigenvektoren von φ bilden? Begründen Sie Ihre Aussage!

c) Die Potenzen einer Matrix $B \in \mathbf{R}^{n,n}$ werden rekursiv erklärt durch:

$$B^1 := B,$$
$$B^{n+1} := B^n \cdot B, n = 1,2,\ldots .$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für die oben angegebene Matrix A gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 1-n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}.$$

(ca. 9 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + 7x + 2}\right)$. (ca. 4 Punkte)

Aufgabe 4:

Für welche reellen Zahlen α hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -1 \\ 2 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha-2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) genau eine Lösung,

b) unendlich viele Lösungen,

c) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) jeweils die Lösungsmenge an.

(ca. 13 Punkte)