Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 2: Darstellungsebenen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

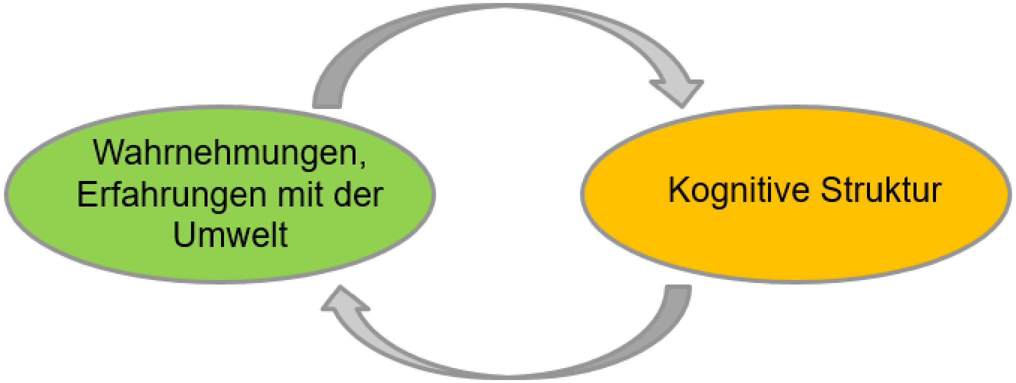
20. November 2020

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

Inhalte dieser Veranstaltung:

	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	12.2.	Klausur

Stadientheorie nach Jean Piaget [07]

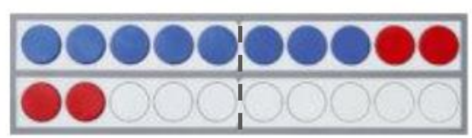


- Lernen beruht nach Jean Piaget auf einer Wechselwirkung zwischen dem Individuum und seiner Umwelt
- Nach Piaget ist die *Art und Weise* des Erwerbs von Wissen und damit die Entwicklung des Denkens altersabhängig und erfolgt in *Stadien*.

Stadien der Denkentwicklung (Piaget)

Senso-motorisches Stadium (ca. 0-2 Jahre)	prä-operatorisches Stadium (ca. 2-7 Jahre)	konkret-operatorisches Stadium (ca. 7-11 Jahre)	formal-operatorisches Stadium (ab ca.12 Jahren)
Sinneswahr-nehmungen und Erfahrungen	Denken an Handlung gebunden	Denken an die Anschauung gebunden	Fähigkeit zum abstrakten Denken

8+4=12

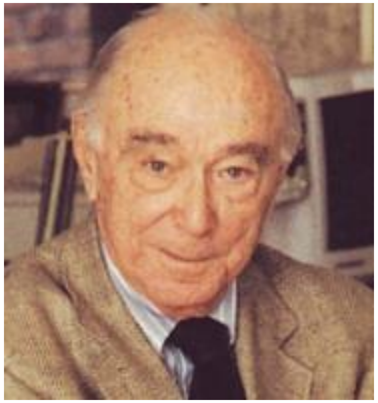


$$(A \Rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Umdeutung der Stadientheorie durch Jérôme Bruner: Darstellungsebenen



- Die Stadien der Denkentwicklung sind nicht nur vom Alter abhängig, sondern auch vom Vorwissen.
- Neue Sachverhalte können auf drei Ebenen (Handlung, bildlich, symbolisch) erschlossen werden.

Diesen drei Ebenen der Aneignung entsprechen drei verschiedene Darstellungsebenen:

- Enaktiv (Handlung)
- Ikonisch (Bild)
- Symbolisch (Formel/Rechnung)

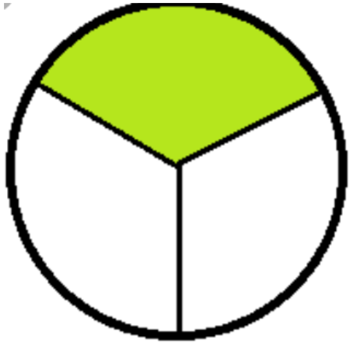
EIS-Prinzip

Beispiel für Darstellungsebenen

Enaktiv

Drei Kinder teilen sich einen Kuchen. Jeder bekommt ein gleich großes Stück.

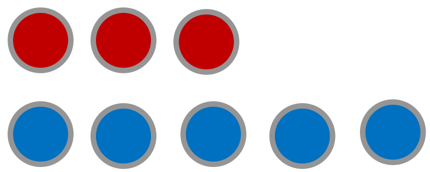
Ikonisch



Symbolisch

$$\frac{1}{3}$$

Beispiel für Darstellungsebenen

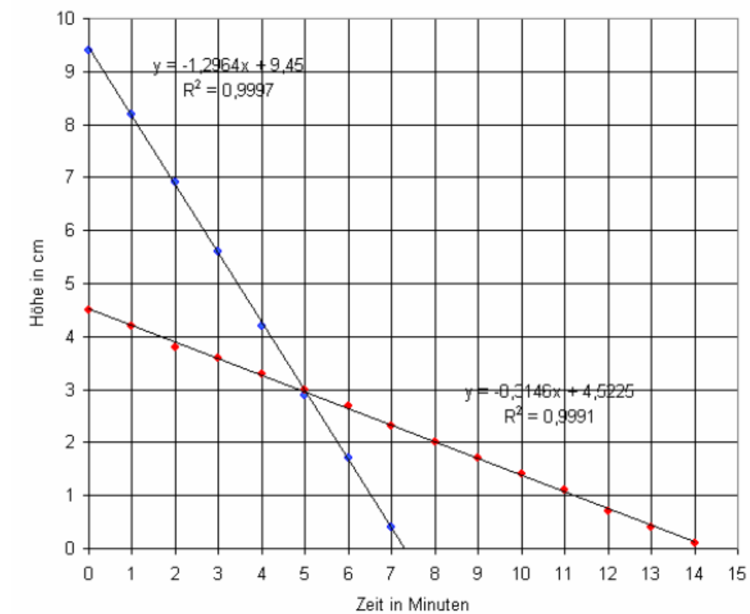
Enaktiv	Ikonisch	Symbolisch
Ich nehme mir drei Plättchen und dann nochmal fünf Plättchen.		$3+5=8$

Beispiel für Darstellungsebenen

Enaktiv

Kerzenrennen:
Wir lassen eine „Spaghettikerze“ und eine Geburtstagskerze abbrennen und messen, wie die Höhe abnimmt.

Ikonisch/graphisch



Symbolisch

$$f(x) = -0{,}3x + 4{,}5$$

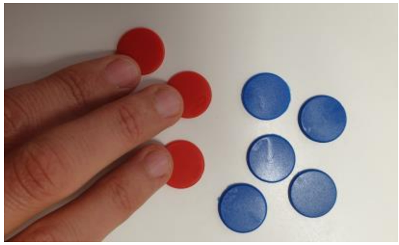
$$g(x) = -1{,}3x + 9{,}45$$

Das EIS-Prinzip

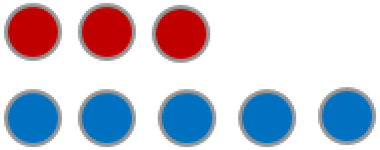
- Bei der Vermittlung eines Sachverhaltes sollten alle drei Darstellungsebenen angesprochen und miteinander verknüpft werden.
- Wichtig ist, dass die mit den verschiedenen Ebenen verknüpften Vorstellungen zusammenpassen und sich gegenseitig unterstützen.
- Dazu sind vielfältige Aktivitäten hilfreich, bei denen bewusst zwischen den Ebenen gewechselt wird („intermodaler Transfer“)

Verknüpfung von Darstellungsebenen

- **„handlungsbegleitend versprachlichen“ (lassen):**
  - „ich füge drei Plättchen hinzu“
  - „ich lege drei Plättchen und fünf Plättchen zusammen“
  - „ich nehme von den 8 Plättchen drei Plättchen weg“
  - … → Grundvorstellungen (VL_3)



- **Farbcodierung nutzen**



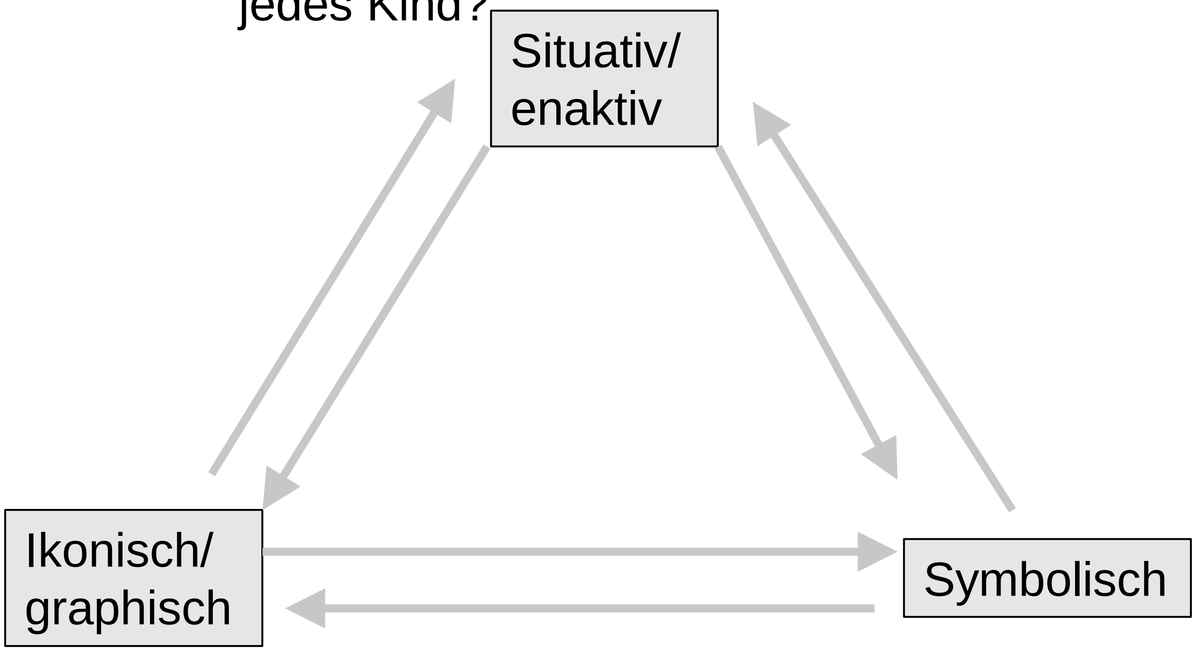
$\cancel{3+5=8}$

$3+5=8$

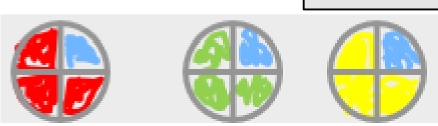
- **Aufgaben mit Darstellungswechsel**

Darstellungswechsel

Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Wieviel Apfel bekommt jedes Kind?



$$3:4 = \frac{3}{4}$$



Es sind 6 verschiedene Darstellungswechsel möglich.

Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	Art des adressierten Darstellungswechsels
	Situativ → Symbolisch
	Situativ → Graphisch
	Symbolisch → Situativ
	Symbolisch → Graphisch
	Graphisch → Situativ
	Graphisch → Symbolisch

Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	Art des adressierten Darstellungswechsels
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Berechne wieviel jeder bekommt.	Situativ → Symbolisch
	Situativ → Graphisch
	Symbolisch → Situativ
	Symbolisch → Graphisch
	Graphisch → Situativ
	Graphisch → Symbolisch

Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	Art des adressierten Darstellungswechsels
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Berechne wieviel jeder bekommt.	Situativ → Symbolisch
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Stelle zeichnerisch dar.	Situativ → Graphisch
	Symbolisch → Situativ
	Symbolisch → Graphisch
	Graphisch → Situativ
	Graphisch → Symbolisch

Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	**Art des adressierten Darstellungswechsels**
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Berechne wieviel jeder bekommt.	Situativ → Symbolisch
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Stelle zeichnerisch dar.	Situativ → Graphisch
Beschreibe eine Situation, die zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Situativ
	Symbolisch → Graphisch
	Graphisch → Situativ
	Graphisch → Symbolisch

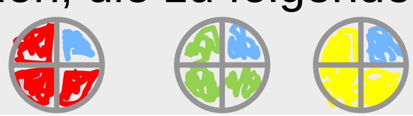
Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	**Art des adressierten Darstellungswechsels**
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Berechne wieviel jeder bekommt.	Situativ → Symbolisch
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Stelle zeichnerisch dar.	Situativ → Graphisch
Beschreibe eine Situation, die zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Situativ
Male ein Bild, das zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Graphisch
	Graphisch → Situativ
	Graphisch → Symbolisch

Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	Art des adressierten Darstellungswechsels
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Berechne wieviel jeder bekommt.	Situativ → Symbolisch
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Stelle zeichnerisch dar.	Situativ → Graphisch
Beschreibe eine Situation, die zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Situativ
Male ein Bild, das zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Graphisch
Beschreibe eine Situation, die zu folgendem Bild passt: 	Graphisch → Situativ
	Graphisch → Symbolisch

Aufgaben mit Darstellungswechsel:

Aufgabe	Art des adressierten Darstellungswechsels
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Berechne wieviel jeder bekommt.	Situativ → Symbolisch
Vier Kinder teilen sich drei Äpfel. Stelle zeichnerisch dar.	Situativ → Graphisch
Beschreibe eine Situation, die zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Situativ
Male ein Bild, das zu folgender Rechnung passt: $3:4=\frac{3}{4}$	Symbolisch → Graphisch
Beschreibe eine Situation, die zu folgendem Bild passt: 	Graphisch → Situativ
Gib eine Rechnung an, die zu folgendem Bild passt: 	Graphisch → Symbolisch

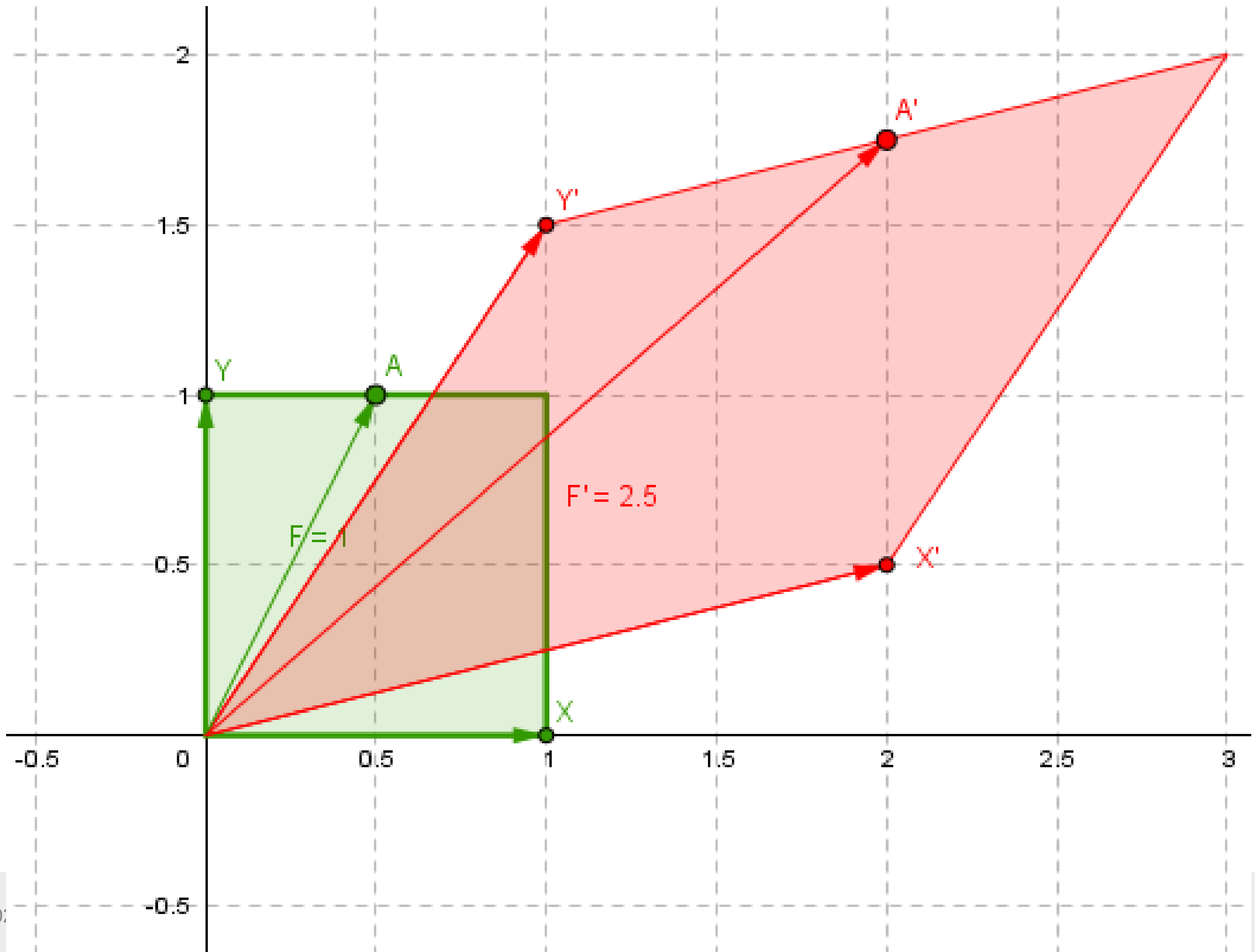
Bsp.: Darstellung lineare Abbildungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0.5 & + & 1\cdot 1 \\ 0.5\cdot 0.5 & + & 1.5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

Symbolische Darstellung

Darstellung linearer Abbildungen:

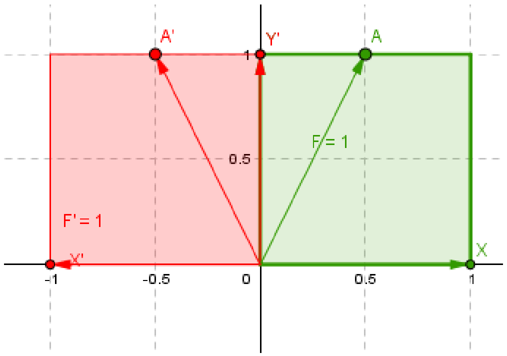
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0.5 & + & 1 \cdot 1 \\ 0.5 \cdot 0.5 & + & 1.5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

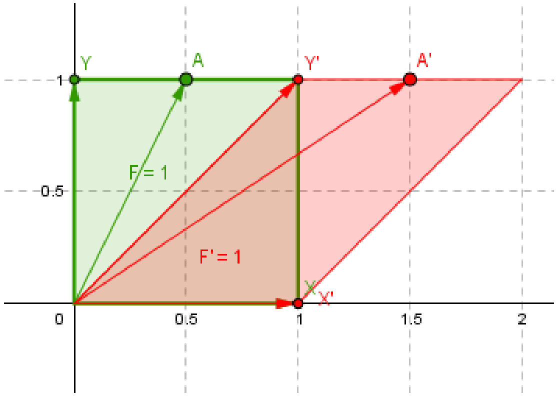


Verknüpfung der Darstellungs-ebenen durch folgende Frage: Welche Elemente der **Graphik** entsprechen welchen Elementen der **Rechnung**?

Fragen, die der Vernetzung von Darstellungsebenen dienen (intermodaler Transfer):

Ikonisch/graphisch





enaktiv

Welche Handlung steckt dahinter?

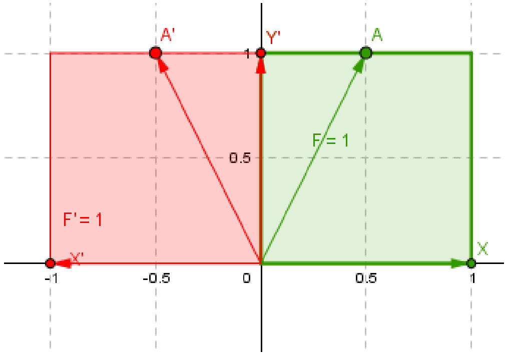
symbolisch

Welche Matrix beschreibt die Abbildung?

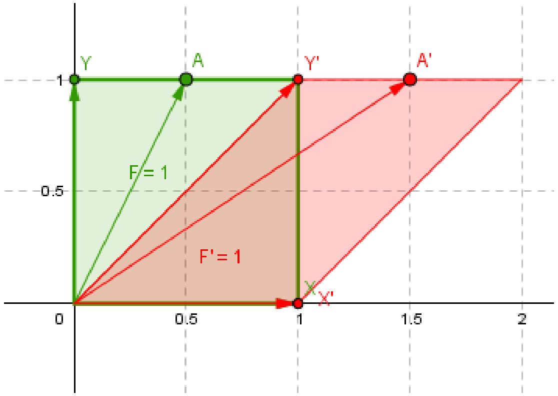
Fragen, die der Vernetzung von Darstellungsebenen dienen (intermodaler Transfer):

Welche Handlung steckt dahinter?

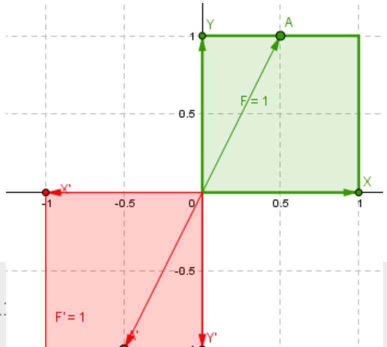
Welche Matrix beschreibt die Abbildung?



Spiegelung



Scherung

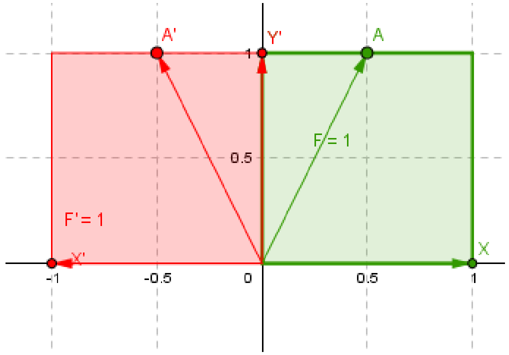


Drehung

Fragen, die der Vernetzung von Darstellungsebenen dienen (intermodaler Transfer):

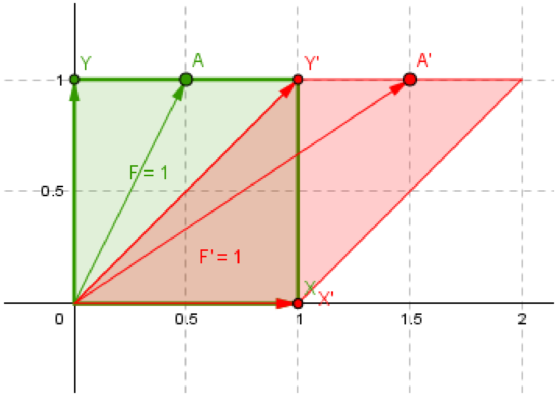
Welche Handlung steckt dahinter?

Welche Matrix beschreibt die Abbildung?



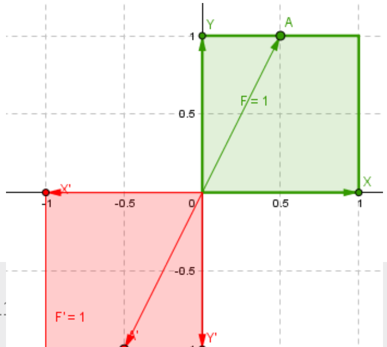
Spiegelung

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Scherung

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Drehung

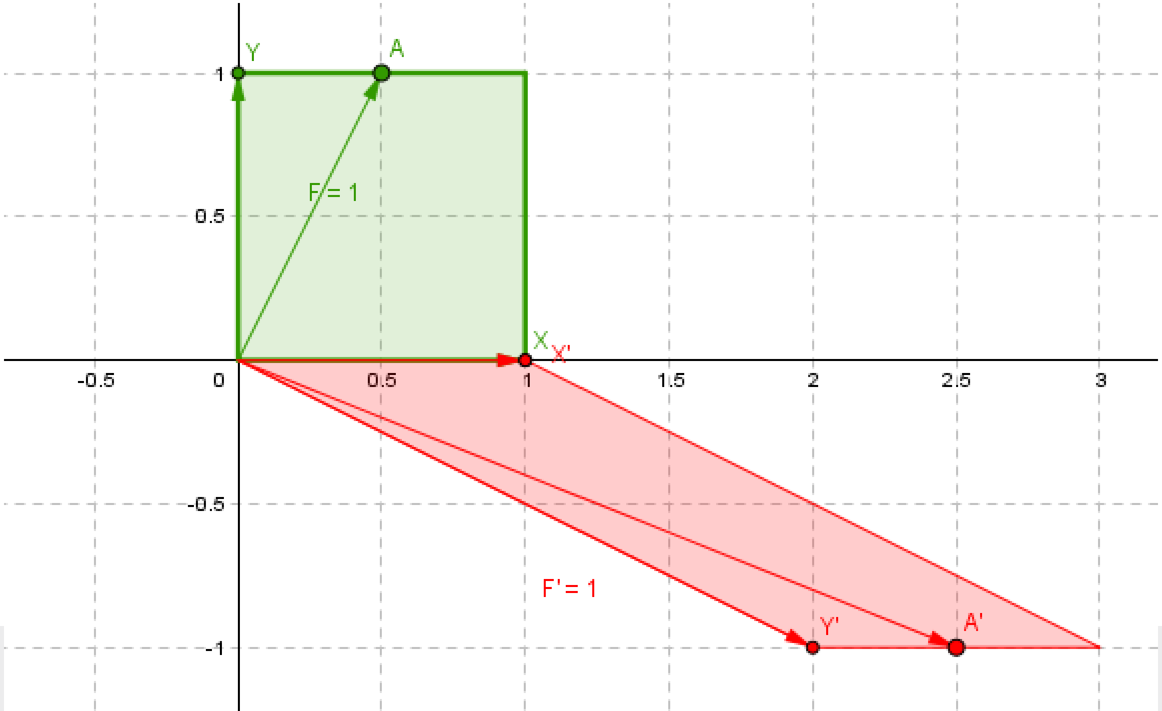
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aktivitäten, um Darstellungsebenen zu vernetzen (intermodaler Transfer):

Skizzieren Sie im Koordinatensystem das Bild des Einheitsquadrates unter der Abbildung $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wie würden Sie die dazugehörige Handlung beschreiben?

Aktivitäten, um Darstellungsebenen zu vernetzen (intermodaler Transfer):

Skizzieren Sie im Koordinatensystem das Bild des Einheitsquadrates unter der Abbildung $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wie würden Sie die dazugehörige Handlung beschreiben?



Scherspiegelung

Das EIS-Prinzip

- Bei der Vermittlung eines Sachverhaltes sollten alle drei Darstellungsebenen angesprochen und miteinander verknüpft werden.
- Wichtig ist, dass die mit den verschiedenen Ebenen verknüpften Vorstellungen zusammenpassen und sich gegenseitig unterstützen.
- Dazu sind vielfältige Aktivitäten hilfreich, bei denen bewusst zwischen den Ebenen gewechselt wird („intermodaler Transfer“)

Das EIS-Prinzip

- Bei der Vermittlung
  sollten alle drei D
  angesprochen u
  werden.
- Wichtig ist, d
  Ebenen verkn
  zusammenpa
  unterstützen.
- Dazu sind vielfältige Akt   täten   , bei
  denen bewusst zwisch   en Ebenen
  gewechselt wird („int   nodaler Transfer“)

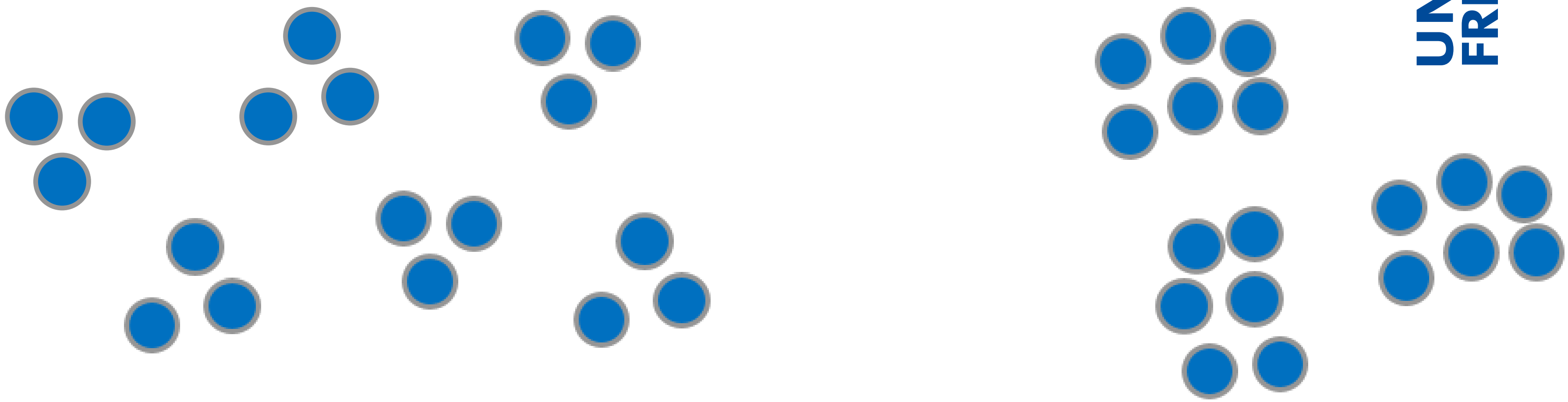
Lehrer als „didactic leader“ (**Kognitivismus**):

- Lehrkraft strukturiert den Lernprozess
- Lehrkraft sorgt bewusst für Verknüpfung des Neuen (z.B. symbolische Darstellung) mit Vorerfahrungen (z.B. Handlungen)

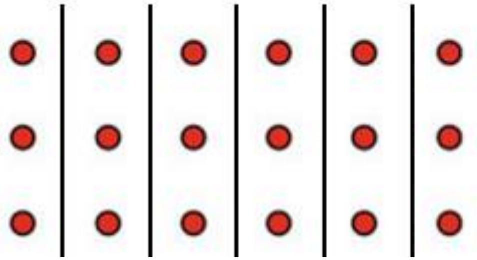
Zur Auswahl geeigneter graphischer Darstellungen:

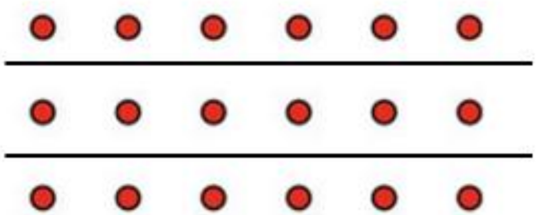
- Graphische Darstellungen spielen eine große Rolle, wenn es um den Aufbau von adäquaten Vorstellungen geht.
- Graphische Darstellungen sind keine bloßen „Illustrationen“, sondern sollten die entsprechenden mathematischen Konzepte möglichst gut widerspiegeln.
- Wir prüfen verschiedene graphische Darstellungen auf ihren „konzeptuellen Gehalt“ …

Beispiel: Kommutativität



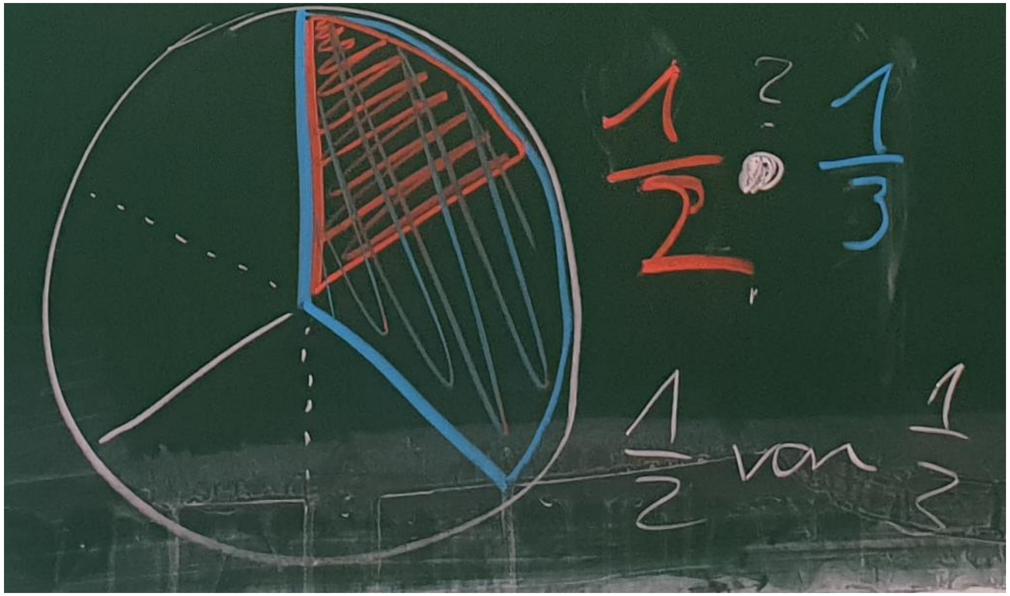
$$6 \cdot 3 \quad = \quad 3 \cdot 6$$

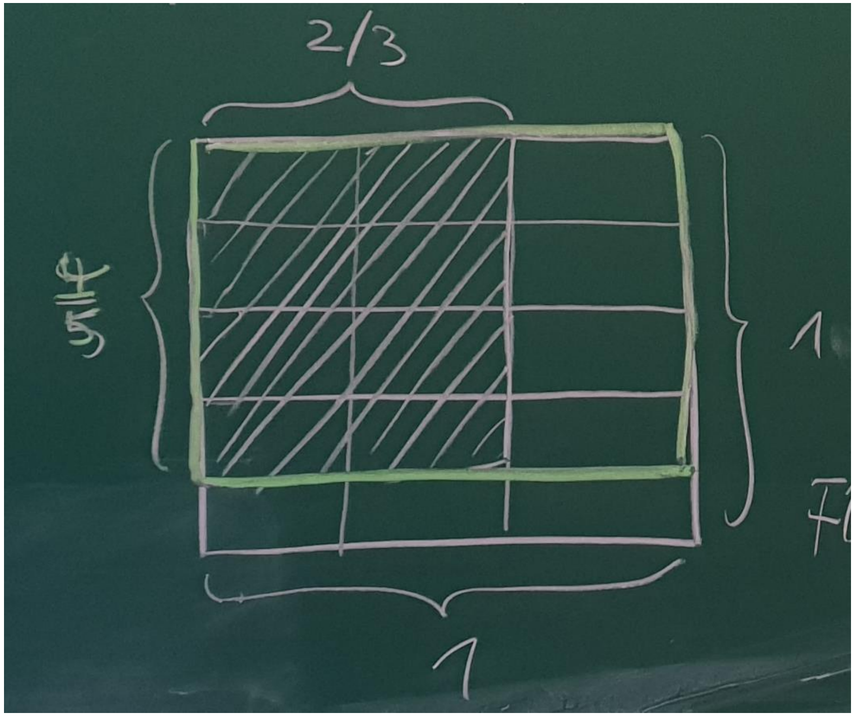




Welche Darstellungsart würden Sie wählen und aus welchen Gründen?

Beispiel: Bruchmultiplikation



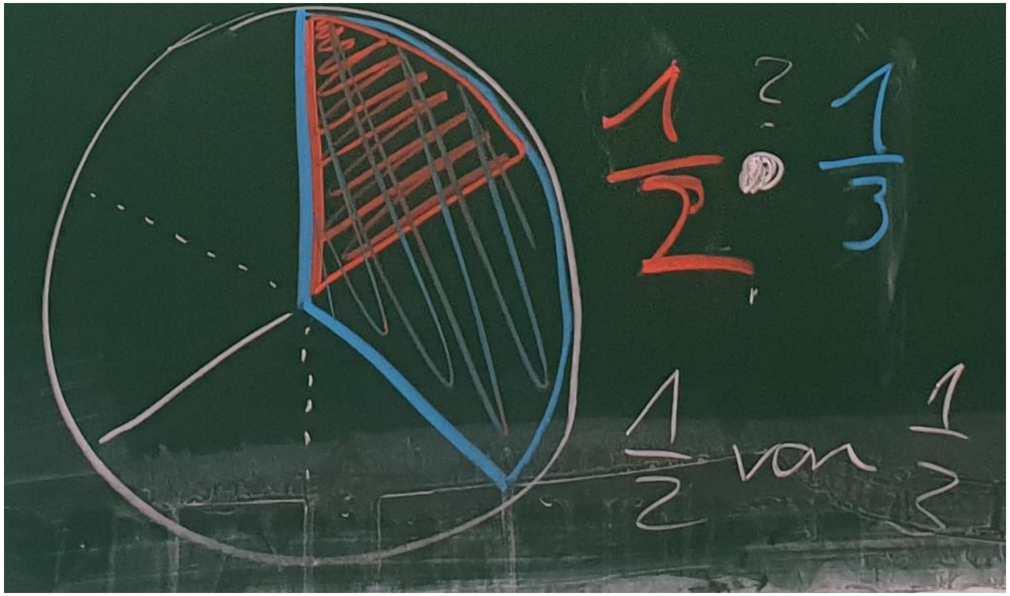


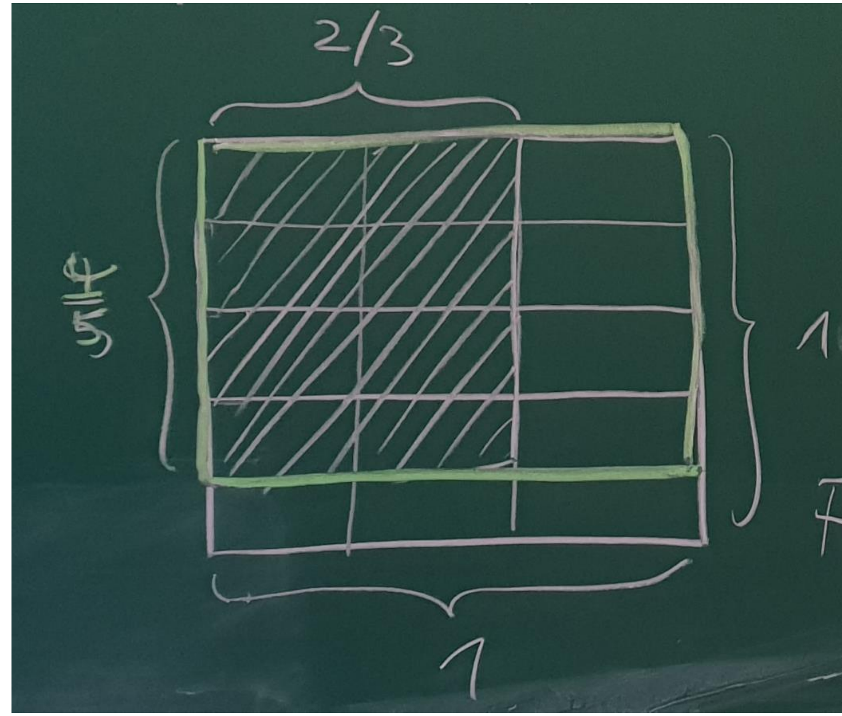
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{von} \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \text{von} \frac{4}{5}$$

Welche Darstellungsart würden Sie wählen und aus welchen Gründen?

Beispiel: Bruchmultiplikation



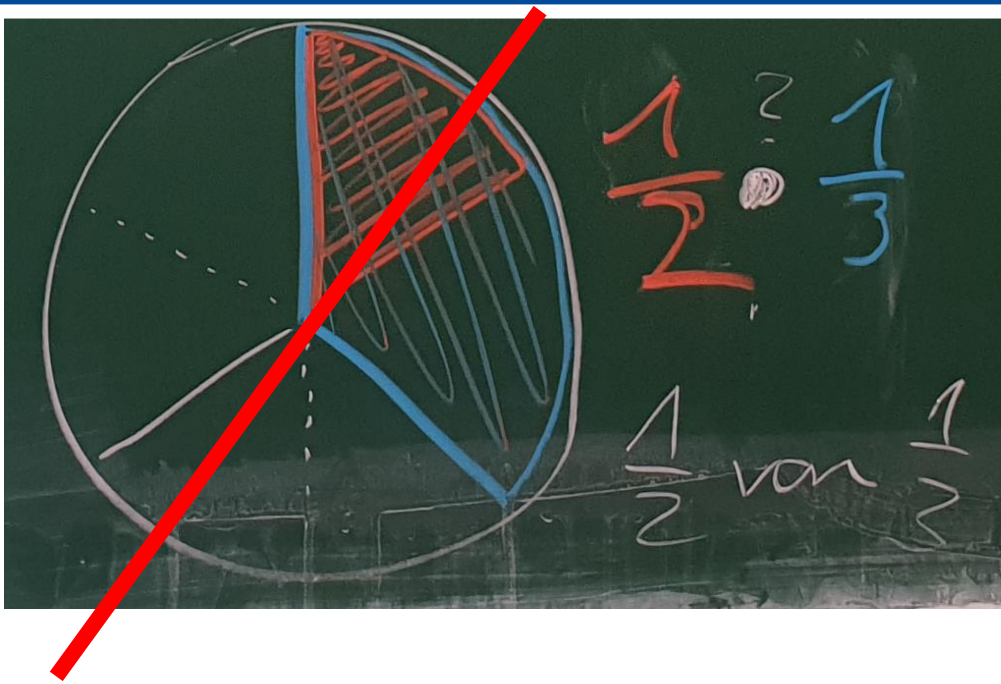


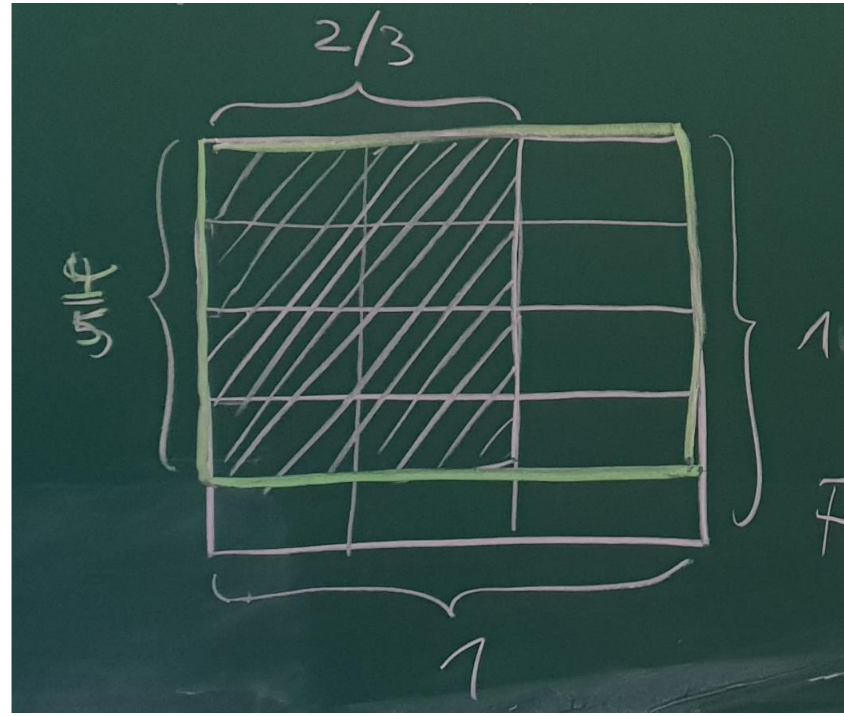
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,\text{von}\,\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{3}\,\text{von}\,\frac{4}{5}$$

Welche Darstellungsart würden Sie wählen und aus welchen Gründen?

Beispiel: Bruchmultiplikation





$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\,\text{von}\,\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\,\text{von}\,\frac{4}{5}$$

Welche Darstellungsart würden Sie wählen und aus welchen Gründen?

Ein weiteres wichtiges didaktisches Prinzip: „Inhaltliches Denken vor Kalkül“

- Kalkül ≈ Rechenregel / Rechengesetz
- Inhaltliches Denken ≈ Verständnis / etwas anschaulich erklären können

„Inhaltliches Denken vor Kalkül“ meint

- Inhaltliches Denken kommt im Lernprozess **zuerst**
- Kalkül ohne inhaltliches Denken ist bedeutungslos

Graphische Darstellungen spielen für das inhaltliche Denken eine große Rolle (als Erinnerungsanker, als Analogisierungsmittel ≈ um sich etwas vorstellen zu können)

Übungsaufgabe dazu auf Blatt 2:

Kalkül: Erweitern von Brüchen

1. Welche **inhaltlichen Vorstellungen** stecken dahinter?
2. Auf welche **graphischen Darstellungen** greifen Sie dabei zurück?

Grundlegende Problematik:

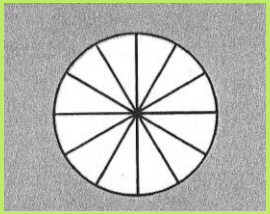
„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. ... Ein solches Vorgehen ist im Grunde sinnlos. Wenn keine intuitiven und anschaulichen Vorstellungen zu Bruchzahlen und zum Rechnen mit Bruchzahlen entwickelt wurden, bleibt das gesamte regelhafte Rechnen nur eine sinnentleerte, auswendig gelernte, aber unverstandene Angelegenheit.“

Günther Malle (2004)

Ergebnisse einer Studie mit 1168 Siebtklässlern (PALMA-Studie):

Test-Aufgabe

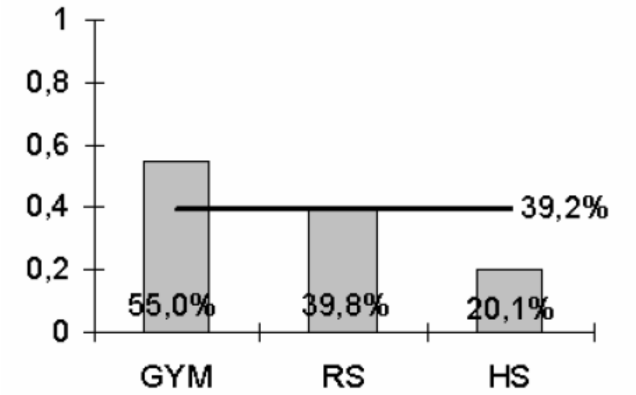
a.) Färbe zuerst 1/4 des Kreises schwarz.
Färbe dann noch 1/6 des Kreises schwarz.
Welchen Bruchteil des Kreises hast
Du insgesamt schwarz gefärbt?



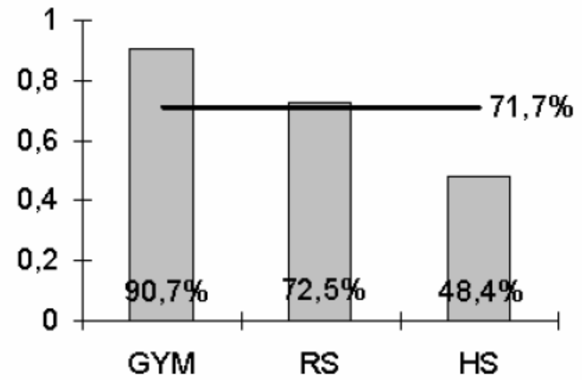
b.) Berechne 1/4 + 1/6.

Lösungshäufigkeiten von Schüler/innen Ende Klasse 7 (aus Palma, n=1168)

a.)



b.)

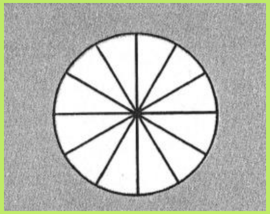


Inhaltliches Denken weniger gut als Formales Rechnen

(Aufgabe Hasemann 1996, Lösungshäufigkeiten aus PALMA, Wartha 2007)

Eine ausgewählte Schülerantwort:

a.) Färbe zuerst 1/4 des Kreises schwarz.
Färbe dann noch 1/6 des Kreises schwarz.
Welchen Bruchteil des Kreises hast
Du insgesamt schwarz gefärbt?



b.) Berechne 1/4 + 1/6.

Ankes Antworten:

zu a.) Ein Zehntel!

zu b.) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$.

Der Interviewer fragte daraufhin nach:

I.: $\frac{5}{12}$. Das haben wir jetzt ausgerechnet, daß da $\frac{5}{12}$ rauskommt... Und bei der Skizze eben, was hast du da rausbekommen?

A.: $\frac{1}{10}$.

I.: Was ist denn nun richtig?

A.: . . . (6 s) . . . Beides.

I.: Warum?

A.: Ja, erstmal $\frac{1}{10}$, das habe ich ja abgezählt, und $\frac{5}{12}$ habe ich ja ausgerechnet.

(aus: Hasemann 1986, S. 16)

Fazit aus der Studie:

- Diskrepanz zwischen inhaltlicher Vorstellung und Kalkülbeherrschung wird beobachtet.
- Inhaltliche Vorstellung und Kalkül erscheinen in der Schülerantwort wie getrennte Denkwelten.
- Ein Kalkül kann nicht auf Sachsituationen angewendet werden, wenn die inhaltliche Bedeutung nicht verstanden wurde.
- Inhaltliches Denken zeigt sich im Umgang und der Deutung graphischer Darstellungen.

Hinweis zum neuen Übungsblatt

Aufgabe 4: Darstellungsebenen

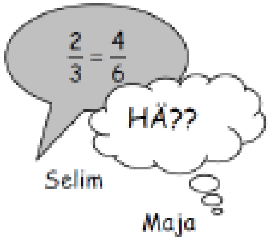
1. Rechnungen und Formeln (zumindest in der Schule) sind symbolische Darstellungen von ursprünglich ganz konkreten Handlungsabläufen. Übersetzen Sie die folgenden Beispiele in konkrete Handlungen und führen Sie diese selbst durch (Zur Dokumentation ihrer Handlung geben Sie bitte jeweils ein Foto ab).
   a) $12:3 = 4$
   b) $\binom{4}{2}$
   c) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2. Stellen Sie die drei Situationen a, b und c jeweils auch ikonisch dar.
3. Finden Sie selbst ein mathematisches Beispiel, das Sie auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene darstellen.

Aufgabe 5: Inhaltliches Denken und Kalkül

Nebenstehend sehen Sie eine verständnisorientierte Aufgabe zum Erweitern und Kürzen von Brüchen (Prediger, 2006).

Selim behauptet, dass $\frac{2}{3}$ genau so groß ist wie $\frac{4}{6}$, aber Maja glaubt ihr das nicht. Kannst Du ein Bild malen oder eine Situation beschreiben, die das erklärt? Kennst Du noch zwei andere Brüche, die denselben Wert haben?



a) Erklären Sie (wie in der Aufgabe verlangt) die Gleichwertigkeit von Brüchen sowohl ikonisch als auch situativ. Welche anschauliche Bedeutung hat dabei das Kürzen und Erweitern?

b) Nehmen Sie zu der folgenden Unterrichtsszene Stellung. (Schüler *S*, Lehrer *L*)
S: Ich verstehe nicht, warum ich 2/3 und 4/6 an derselben Stelle des Zahlenstrahls eintragen muss.
L: Na, dann kürze doch mal. Wie ging das nochmal?
S (unsicher): Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl teilen?
L: (zufrieden): Ja, Genau!

Literatur:

- ~~[05]_Vortrag_Hefendehl_Auf rationale Weise zur Irrationalität (verfügbar auf Ilias)~~

Diese Literatur [05] und [06] fällt dieses Semester weg.

- ~~[06]_Folien_Hefendehl_Freiburg 2019-11-05 (verfügbar auf Ilias)~~

- [07] *Die Entwicklung des mathematischen Denkens*. In: K. Reiss & C. Hammer (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik. Springer, Basel. S. 27-36. *[als e-Book bei der UB-Freiburg]*