Analysis II Ksenia Fedosova, Nadine Große

SS 21

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (2.5+2.5) Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine reelle $\ell \times k$-Matrix.

(i) Wir setzen $\|A\| := \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^k a_{ij}^2}$ und . Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$
$$|Ax| \leq \|A\||x|$$
gilt und dass die Ungleichung scharf ist, d.h. es gibt immer ein $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ mit $|Ax| = \|A\||x|$.

(ii) Sei nun $\|A\|_1 := \max_{ij} |a_{ij}|$. Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$ die Ungleichung
$$|Ax| \leq c\|A\|_1|x|$$
gilt. Können Sie ein c finden, so dass die Ungleichung scharf wird?

Aufgabe 2 (2.5+2.5+2*). (i) Zeigen Sie, dass
$$C^1([a,b],\mathbb{R}) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$$
zusammen mit $d_1(f,g) = \sup_{[a,b]} |f' - g'| + \sup_{[a,b]} |f - g|$ ein metrischer Raum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass in $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ jede Cauchyfolge konvergiert. Man sagt $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ ist *vollständig*.

Hinweis: Sei f_n eine Cauchyfolge in $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_1)$. Zeigen Sie zunächst, dass f_n und f_n' jeweils punktweise gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bzw. $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie dann, dass $f_n \to f$ bzgl. d_2 aus (iii) und damit gleichmäßig konvergiert. Gleiches für $f_n' \to g$. Folgern Sie, dass dann $f' = g$ und f stetig differenzierbar ist und $f_n \to f$ in d_1 gilt.

(iii)* $C^1([a,b],\mathbb{R})$ ist auch zusammen mit $d_2(f,g) = \sup_{[a,b]} |f - g|$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_2)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Seien $d_i\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, so dass (X, d_i) jeweils ein metrischer Raum ist. Wir nennen die beiden Abstandsfunktionen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$
$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$$
gilt.[1]

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien d_i^X bzw. d_i^Y Abstandsfunktionen auf X bzw. Y, die X bzw. Y jeweils zu einem metrischen Raum machen. Seien d_1^X und d_2^X äquivalent und auch d_1^Y und d_2^Y äquivalent. Zeigen Sie: $f\colon (X, d_1^X) \to (Y, d_1^Y)$ ist genau dann stetig, wenn auch $f\colon (X, d_2^X) \to (Y, d_2^Y)$ stetig ist.

Diese Aufgabe zusammen mit der letzten von Blatt 0 sagt uns, dass im $\mathbb{R}^2$ die euklidische Abstandsfunktion und die Eisenbahnmetrik nicht äquivalent sein können.[2] *Das Beispiel 1.1.3 aus der Vorlesung zeigt, dass d_1 und d_2 aus Aufgabe 2 auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$ keine äquivalenten Abstandsfunktionen sein können.*[3]

[1] Man kann zeigen, dass dies auf den Abstandsfunktionen von X eine Äquivalenzrelation ergibt.

[2] Auf der anderen Seite kann man zeigen, dass auf einem endlich dimensionalen Vektorraum (also z.B. $\mathbb{R}^n$) alle Abstandsfunktionen, die von einer Norm $\|.\|$ kommt, d.h. $d(f,g) = \|f - g\|$, zueinander äquivalent sind. Die Eisenbahnmetrik kommt allerdings nicht von einer Norm.

[3] Diese beiden Abstandsfunktionen kommen zwar von einer Norm auf dem Vektorraum $C^1([a,b],\mathbb{R})$, aber dieser ist unendlich dimensional.

Warum ist es gut, sich mal mit äquivalenten Abstandsfunktionen auseinanderzusetzen? Betrachten wir folgendes Problem: Sei f Funktion in zwei Variablen, die erst einmal nichts miteinander zu tun haben. Zum Beispiel seien die zwei Variablen die Seitenlängen eines Rechtecks, und f bestimmt den Flächeninhalt. Dann würde man kleine Änderungen in den Seitenlängen vielleicht naheliegender mit der Summe des Betrages der Änderungen in den einzelnen Seitenlängen kodieren, also mit der Summe der euklidischen Abstände für die einzelnen Variablen, statt die beiden Seitenlängen zusammen als Punkt im $\mathbb{R}^2$ aufzufassen und darauf den euklidischen Abstand zu verwenden. In den Definitionen der folgenden Aufgabe wäre der erste Fall das Verwenden der Abstandsfunktion d_2 (für $n_1 = n_2 = 1$) und im zweiten Fall d_1. Wenn wir uns jetzt fragen, ob der Flächeninhalt des Rechtecks stetig von den Seitenlängen abhängt, müssen wir natürlich dazu sagen, bzgl. welcher Abstandsfunktion wir das untersuchen wollen. Dies sollte dem Problem angepasst sein, damit am Ende auch das gemessen wird, was wir wollen. Nach der Diskussion von eben klingt eigentlich d_2 nach der besseren Wahl. Aber ohne die Diskussion würden wir wahrscheinlich alle einfach den euklidischen Abstand nehmen. Macht das einen Unterschied? Hier nicht, da beide Abstandsfunktionen äquivalent sind (Aufgabe 4) und dann nach Aufgabe 3 die Abbildung bzgl. beider Abstandsfunktionen stetig ist. Glück gehabt[4].

Aufgabe 4. Seien $d_i \colon \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_1(x,y) =& |x-y| \\ d_2(x = (a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m), y = (c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m)) =& |a-c| + |b-d|. \end{aligned}$$

(i) Überprüfen Sie, dass d_2 eine Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 äquivalent sind.

Abgabe am Mittwoch 28.04.21 bis 14 Uhr

[4] In Aufgabe 4 kommen die Abstandsfunktionen beide von einer Norm. Damit wären Sie, wenn man die Fußnote der letzten Seite schon gezeigt hätte, automatisch äquivalent. Wir zeigen es hier direkt - geht auch sehr schnell.