

# Analysis I

Universität Freiburg, WS 20/21  
Nadine Große

Skript - Version vom 22. März 2021

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese  
mitteilen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Worum geht es?</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Erste Grundbegriffe</b>	<b>3</b>
2.1	Mengen . . . . .	3
2.2	Funktionen . . . . .	6
2.3	Natürliche Zahlen und Induktion . . . . .	8
2.4	Relationen . . . . .	11
2.5	Körper . . . . .	15
2.6	In Richtung der reellen Zahlen . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Folgen</b>	<b>19</b>
3.1	Konvergenz und erste Eigenschaften . . . . .	19
3.2	Rechenregeln und Eigenschaften für konvergente Folgen . . . . .	24
3.3	Der 'Grenzwert unendlich' - uneigentliche Konvergenz . . . . .	26
3.4	Vergleiche mit konvergenten Folgen . . . . .	27
3.5	Intervallschachtelung . . . . .	28
3.6	Konvergenzkriterium: Monoton und beschränkt . . . . .	30
3.7	Asymptotische Gleichheit . . . . .	35
3.8	Teilfolgen und Häufungspunkte . . . . .	35
3.9	Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
3.9.1	Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
3.9.2	Einführung komplexer Zahlen . . . . .	42
3.10	Einschub: Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit . . . . .	45
3.11	Oft vorkommende Folgen . . . . .	50
3.12	Reihen . . . . .	51
3.12.1	Erste Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	53
3.12.2	Rechenregeln für konvergente Reihen . . . . .	54
3.12.3	Absolute Konvergenz . . . . .	55
3.12.4	Kriterien für absolute Konvergenz . . . . .	58
3.12.5	Potenzreihen . . . . .	60
3.12.6	Die Exponentialfunktion . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Funktionen in einer Variablen</b>	<b>71</b>
4.1	Stetigkeit . . . . .	72
4.1.1	Folgenstetigkeit und Stetigkeit . . . . .	72
4.1.2	Zwischenwertsatz . . . . .	76
4.1.3	Sinus, Kosinus und Pi . . . . .	78
4.1.4	Erste topologische Grundbegriffe . . . . .	81

## Inhaltsverzeichnis

4.1.5	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	86
4.1.6	Einseitige Grenzwerte und Grenzwerte im Unendlichen . . . . .	89
4.1.7	Mehr Beispiele (nicht)stetiger Funktionen . . . . .	90
4.1.8	Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	91
4.1.9	Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz . . . . .	92
4.2	Differenzierbarkeit . . . . .	94
4.2.1	Ableitung und lineare Approximation . . . . .	94
4.2.2	Rechenregeln für Ableitungen . . . . .	96
4.2.3	Mehr Beispiele . . . . .	99
4.2.4	Mittelwertsatz und Extrema . . . . .	102
4.3	Taylor . . . . .	108
4.3.1	Taylorpolynom . . . . .	108
4.3.2	Fehlerabschätzung . . . . .	109
4.3.3	Klein-o-Notation . . . . .	111
4.3.4	Taylorpolynome von Hintereinanderausführungen . . . . .	112
4.3.5	Noch einmal Potenzreihen . . . . .	113
4.3.6	Weitere Beispiele zu Taylorreihen . . . . .	115
4.4	Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .	117
4.4.1	Kurvendiskussion - Extrema . . . . .	117
4.4.2	Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .	119
4.4.3	Ungleichungen . . . . .	121
4.4.4	Anwendungen in der Physik . . . . .	123
4.4.5	Polynomiale Interpolation . . . . .	125
4.4.6	Erste Differentialgleichungen . . . . .	126
4.5	Integration . . . . .	130
4.5.1	Treppen- und Regelfunktionen . . . . .	131
4.5.2	Integration und Differentiation . . . . .	139
4.5.3	Integration rationaler Funktionen und Partialbruchzerlegung . . . . .	144
4.5.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	148
4.5.5	Noch mal Taylor . . . . .	151
4.5.6	Das Riemann-Integral . . . . .	153
4.5.7	Differentiation und Integration vektorwertiger und komplexwertiger Funktionen . . . . .	154
4.6	Stirlingsche Formel und Wallissches Produkt . . . . .	159
4.7	Klassische Fourier-Reihen . . . . .	161

# 1 Worum geht es?

Woche 1

Die Analysis entstand aus einer Vielzahl von Methoden, die versuchen Funktionen, die aus Anwendungen kommen, qualitativ und quantitativ zu verstehen, mit dem Ziel diesen einen theoretischen Unterbau zu geben. Solche Anwendungen kommen z.B. aus Modellen in der Physik, Biologie, Chemie oder Statistik/Stochastik.

Insbesondere geht es bei analytischen Fragen zumeist um Funktionen auf Größen, die kontinuierliche Werte, wie die reellen Zahlen, annehmen können. Wichtige Fragen der Analysis sind dabei Änderungsverhalten von Funktionen, Approximation von Lösungen – insgesamt Grenzprozesse. Warum ist das relevant? In der realen Welt kann man solche kontinuierlichen Größen nicht beliebig genau messen, d.h. schon in den Messwerten hat man eine Näherung/Approximation und dann möchte man nicht nur sicherstellen, dass auch darauf angewendete Funktionen auf den Messwerten Werte nahe der Funktion des 'realen Wertes' annehmen, sondern wir hätten gerne auch quantitative Informationen zur Frage 'wie nah'.

Wir wollen verstehen warum, wie und wann diese Methoden funktionieren. Das 'Warum' gibt die Intuition, das 'Wie' die Methode zum Rechnen. Das 'Wann' erfordert eine Auseinandersetzung mit den Voraussetzungen, unter welchen die Methode funktioniert – wir werden beweisen, dass eine Methode in einem gegebenem Rahmen funktioniert/dass eine Aussage unter gewissen Voraussetzungen richtig ist.

Man kann sich natürlich fragen, wozu beweisen wir eigentlich Sachen? Zum einen zur Bestätigung einer Vermutung, die entweder empirisch gefunden wurde oder aus unserer Intuition resultiert und auch um auszuloten, worin die Grenzen unserer Methode liegen. Idealerweise helfen uns dann Erkenntnisse daraus, neue Zusammenhänge/Aussagen/Methoden zu finden.

In Analysis 1 geht es allerdings fast nur um Analysis in einer Variablen. Aber schon daran werden wir die wichtigsten Konzepte kennenlernen.



## 2 Erste Grundbegriffe

Hier geht es um erste Grundbegriffe, wie Mengen, Funktionen, Relationen, natürliche, ganze und rationale Zahlen. Die meisten dieser Begriffe und ihre Eigenschaften sind aus der Schule bekannt. Aber wir wollen Sie hier aus verschiedenen Gründen noch einmal betrachten: Einmal um Notationen/Schreibweisen festzuhalten. Aber auch, um einmal zu skizzieren, was man sich aus Sicht des Mathematikers eigentlich alles überlegen müsste, um die Begriffe einzuführen und ihre Eigenschaften, mit denen oft täglich arbeiten, wirklich logisch abzuleiten. D.h. nicht, dass wir jeden einzelnen Schritt ausführen werden, um von den natürlichen Zahlen zu den reellen Zahlen zu kommen, und alle Rechenregeln nachprüfen werden. Sondern es geht auch darum, in bekanntem Terrain mal zu sehen, wie man vorgehen und wichtige Grundlagen zu lernen.

### 2.1 Mengen

Als grundlegendes Objekt werden wir *Mengen* betrachten.

Für uns besteht eine Menge aus einer Ansammlung von Elementen.

Heißt die Menge  $X$  und ist  $x$  ein Element aus  $X$ , dann schreiben wir  $x \in X$  (lese:  $x$  ist ein Element von  $X$  bzw. kurz:  $x$  ist in  $X$ ). Insbesondere können wir immer für ein beliebiges  $y$  immer fragen, ob  $y$  ein Element unserer Menge, hier  $X$  ist. Falls ja, ist  $y \in X$ , falls nein, schreiben wir  $y \notin X$ . Die Menge, die keine Elemente enthält, nennen wir *leere Menge* und schreiben dafür  $\emptyset$ . Für die Menge, die nur das Element  $a$  enthält, schreiben wir  $\{a\}$ ; für die, die nur die Elemente  $a, b$  enthält, schreiben wir  $\{a, b\}$ ; usw.

Eine Menge kann auch unendlich viele Elemente enthalten, z.B. kennen wir die Menge der natürlichen Zahlen, die wir mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen.


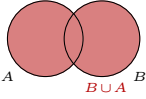
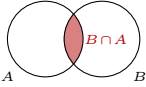
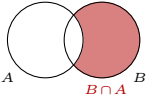
Eine weitere wichtige Schreibweise zur Beschreibung einer Menge lernen wir am Beispiel von  $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$  kennen: Das ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die größer als fünf sind.

Auch  $\{1, a, \{b, c\}\}$  ist zum Beispiel eine Menge. Sie enthält drei Elemente, nämlich 1,  $a$  und  $\{b, c\}$ . Das  $\{b, c\}$  selbst auch eine Menge ist, ist kein Problem, wir haben nie gesagt, dass irgendein Objekt kein Element sein darf.

Sind  $X$  und  $Y$  Mengen. Wir nennen  $X$  eine Teilmenge von  $Y$  (geschrieben:  $X \subset Y$ ), falls jedes Element von  $X$  auch ein Element von  $Y$  ist. Wir können so auch die Gleichheit von Mengen beschreiben. Zwei Mengen  $X, Y$  nennen wir *gleich* (kurz:  $X = Y$ ), wenn  $X \subset Y$  und  $Y \subset X$  gilt.

Es gilt  $X \subset X$  und  $\emptyset \subset X$ .

Im Folgenden listen wir noch ein paar wichtige Operationen mit Mengen auf.

Notation	Name	Definition	Anschauung
$A \subset B$	$A$ ist <i>Teilmenge</i> von $B$	Jedes Element in $A$ ist auch Element in $B$ .	
$A = B$	die Mengen sind <i>gleich</i>	$A = B$ , falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt.	
$A \cup B$	<i>Vereinigung</i> von $A$ und $B$	$x \in A \cup B$ , falls $x \in A$ <u>oder</u> $x \in B$ gilt.	
$A \cap B$	<i>Durchschnitt</i> von $A$ und $B$	$x \in A \cap B$ , falls $x \in A$ <u>und</u> $x \in B$ gilt.	
Falls $A \subset B$ : $B \setminus A$	<i>Komplement</i> von $A$ in $B$	$x \in B \setminus A$ , falls $x \in B$ und $x \notin A$ gilt.	



Auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  und  $B \setminus A$  sind wieder Mengen.

Mit diesen Operationen kann man schon verschiedene Mengengleichheiten finden. Wir schauen uns hier einmal ein solches Beispiel an und sehen wie man eine solche Mengengleichheit beweist.

**Lemma 2.1.1.** Für Mengen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

*Beweis.* Nach Definition der Gleichheit von Mengen müssen wir zeigen, dass sowohl  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$  als auch  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$  gilt.

Wir beginnen mit der ersten Behauptung: Sei dazu  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Dann muss  $x \in A$  und  $x \in B \cup C$  sein. Ist  $x \in B$ , dann ist  $x \in A \cap B$  und somit  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Ist andererseits  $x \notin B$ , so muss wegen  $x \in B \cup C$  dann  $x \in C$  sein. Somit ist in diesem Fall  $x \in A \cap C$  und somit auch  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Wir haben also  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Sei nun  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Dann ist  $x \in A \cap B$  oder  $x \in A \cap C$ . Im Fall  $x \in A \cap B$  muss  $x \in A$  und  $x \in B$  gelten und damit  $x \in B \cup C$  sowie  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Im Fall  $x \notin A \cap B$  folgt  $x \in A \cap C$  und somit  $x \in A$  und  $x \in C$ . Wir haben also  $x \in B \cup C$  und damit  $x \in A \cap (B \cup C)$ .  $\square$

**Beispiel 2.1.2.** (i) Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  einer Menge  $M$  ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

Die leere Menge  $\emptyset$  und die Menge selbst ist Teilmenge jeder Menge  $M$ , also gilt immer  $\emptyset \subset \mathcal{P}(M)$  und  $M \subset \mathcal{P}(M)$ . Sei  $M = \{a, b\}$ . Dann ist  $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ .

- (ii) Seien  $X, Y$  Mengen. Aus  $a \in X$  und  $b \in Y$  bilden wir ein neues Objekt  $(a, b)$ , welches wir *geordnetes Paar* von  $a, b$  nennen. Dabei betrachten wir zwei geordnete Paare  $(a, b)$  und  $(c, d)$  als gleich, falls  $a = c$  und  $b = d$  gilt. Die Menge

$$X \times Y := \{(a, b) \mid a \in X, b \in Y\}$$

nennen wir (*kartesisches*) *Produkt* von  $X$  und  $Y$ .

Ist zum Beispiel  $X = \{a\}$  und  $Y = \{1, 3\}$ , dann ist  $X \times Y = \{(a, 1), (a, 3)\}$ .

**Russelsches Paradox** Wir haben oben gesagt, dass wir von einem 'naiven Mengenbegriff' ausgehen, der von Georg Cantor (1845-1918) eingeführt wurde. Das soll suggerieren, dass das in Wirklichkeit nicht so passt. Was meinen wir damit? Eigentlich sieht es doch nach einer guten Definition aus. Wir nennen eine Ansammlung von Elementen eine Menge und gehen davon aus, dass es auf die Frage, ob ein bestimmtes Element in dieser Menge liegt, es immer eine eindeutige Antwort wahr oder falsch gibt. Klingt eigentlich gut, führt aber zu überraschenden Widersprüchen, sogenannten Antinomien.

## 2 Erste Grundbegriffe

Ein solcher Widerspruch wurde von Bertrand Russel (1872-1970) gefunden: Nach unserer 'Definition' von Menge kann eine Menge sich auch prinzipiell selbst wieder als Element enthalten. Russel definiert nun die Menge  $R$ , die alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten, also  $R := \{A \text{ ist Menge} \mid A \notin A\}$ . Wir fragen nun, ob  $R \in R$  gilt? Falls ja, dann widerspricht es der Definition von  $R$ , da  $R$  ja nur Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Falls nein, dann widerspricht es aber auch der Definition von  $R$ . Das ist das Russellsche Paradox bzw. die Russellsche Antinomie\*.

Es gibt Lösungen: Russell selbst überwand dies durch Einführung einer Typentheorie; in ihr hat eine Klasse ('Ersatz für die allgemeiner Menge') stets einen höheren Typ als ihre Elemente. Dann kann man gar nicht mehr fragen, ob eine Klasse sich selbst enthält gar nicht mehr in dem Rahmen formulieren. Dort wäre  $R$  von oben, dann kein Beispiel einer Menge, sondern es wäre eine Klasse.

Unabhängig davon hat Zermelo die erste axiomatische Mengenlehre eingeführt. Eine Erweiterung davon, die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ist heute die Grundlage auf der wir aufbauen.

Wir können und wollen hier darauf nicht weiter eingehen. Was bedeutet das für uns: Wir bleiben bei unserem naiven Mengebegriff. Generell gilt endliche Mengen sind kein Problem. Erst bei Ansammlungen unendlich vieler Elemente können Probleme auftauchen. Wir gehen ab hier erst einmal immer davon aus, dass wir wissen, ob etwas eine Menge ist.

## 2.2 Funktionen

**Definition 2.2.1.** Seien  $X, Y, W, U$  beliebige Mengen. Eine *Abbildung/Funktion*  $f$  von  $X$  nach  $Y$  ist eine Vorschrift, die jedem Element aus  $X$  genau ein Element aus  $Y$  zuordnet.

Notation:  $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ . Hierbei ist  $f(x)$  das Element aus  $Y$ , was durch  $f$  dem Element  $x \in X$  zugeordnet wird.

Die Menge  $X$  heißt *Definitionsbereich* von  $f$  und wird auch mit  $\text{dom}(f)$ <sup>†</sup> bezeichnet. Die Menge

$$\text{im}(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X: y = f(x)\}$$

ist das *Bild* von  $f$ .

Die Menge

$$\text{graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

heißt *Graph* von  $f$ .

Sei  $A \subset X$ . Wir setzen  $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ . Sei  $B \subset Y$ . Dann ist

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

das *Urbild* von  $B$  unter  $f$ .

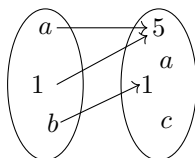
---

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche\\_Antinomie](https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie)

<sup>†</sup>dom - kommt vom englischen Wort *domain*

Zwei Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: W \rightarrow U$  heißen *gleich* (wir schreiben  $f = g$ , falls  $X = W$ ,  $Y = U$  und  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in X$  gilt).

**Beispiel 2.2.2.** (i) Wenn der Definitions- und Wertebereich sehr klein sind, kann man eine Funktion auch wieder mittels Mengendiagrammen visualisieren:



Das ist die Funktion  $f: \{a, 1, b\} \rightarrow \{5, a, 1, c\}$  mit  $f(a) = f(1) = 5$  und  $f(b) = 1$ .

- (ii) Auf jeder Menge  $X$  gibt es die *Identität*  $\text{id}_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$ .
- (iii) Sei  $X \subset Y$ . Dann nennen wir  $\iota: X \rightarrow Y, x \mapsto x$  *Inklusionsabbildung*.
- (iv) Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $a: \mathbb{N} \rightarrow X$  heißt *Folge* in  $X$  und wird zumeist als  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geschrieben, wobei  $a_n := a(n)$  ist.

Zum Beispiel ist für die Folge der Quadratzahlen  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ . Hier ist  $X = \mathbb{N}$  und  $a_n = n^2$ .

- (v) *Hintereinanderausführung/Komposition von Abbildungen*: Haben wir zwei Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$ , wo der Wertebereich von  $f$  gleich dem Definitionsbereich von  $g$  ist, dann können wir durch Hintereinanderausführen eine neue Abbildung  $g \circ f: X \rightarrow Z$  als  $x \mapsto g(f(x))$  definieren.

Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt

**Lemma 2.2.3** (Assoziativität der Hintereinanderausführung). Für  $h: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  und  $f: Z \rightarrow U$  gilt  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

*Beweis.* Nach Definition der Gleichheit von Abbildungen ist zu zeigen, dass die Definitions- und Wertebereiche übereinstimmen und dass  $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$  für alle  $x \in \text{dom } h$  gilt: Beide Funktionen bilden  $X$  nach  $U$  ab. Für die Gleichheit der Bilder lösen wir jeweils die linke und rechte Seite nach Definition der Hintereinanderausführung auf:

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) \\ ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))). \end{aligned} \quad \square$$

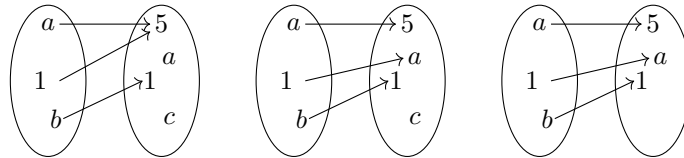
### Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

**Definition 2.2.4.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  *surjektiv*, wenn  $\text{im}(f) = Y$  gilt, und *injektiv*, wenn  $f(x) \neq f(y)$  für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  folgt. Wir nennen  $f$  *bijektiv*, wenn  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

## 2 Erste Grundbegriffe

**Beispiel 2.2.5.** (i) Von einer Zuordnung, die Gästen einer Feier ihren Sitzplatz zuweist (zuordnet), wollen wir normalerweise, dass dies eine injektive Funktion ist, da niemand den Sitzplatz mit jemand anderes teilen will.

(ii)



Die linke Funktion ist weder injektiv noch surjektiv; die mittlere ist injektiv, aber nicht surjektiv; die rechte ist sogar bijektiv.

Die Definitionen kann man umformulieren:

Injektiv bedeutet, dass es zu jedem Element im Bild der Abbildung es höchstens ein Urbild gibt (also höchstens ein Element des Definitionsbereich, was dahin abbildet).

Surjektiv bedeutet, dass es zu jedem Element im Wertebereich mindestens ein Urbild gibt.

Zusammenfassend bedeutet also bijektiv, dass es zu jedem Element im Wertebereich genau ein Urbild gibt. Das heißt, wir können im Falle einer bijektiven Abbildung eine Abbildung konstruieren, die jedem Element im Wertebereich sein Urbild zuordnet. Diese Funktion heißt dann *Umkehrfunktion* und wir konstruieren diese noch einmal ganz explizit im Beweis von folgender Aussage:

**Satz 2.2.6.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  bijektiv. Dann gibt es ein  $g: Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ .

*Beweis.* Wir konstruieren die Funktion  $g$  wie folgt: Sei  $y \in Y$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ . Dieses  $x$  ist sogar eindeutig: Angenommen es gibt ein  $x' \in X$  mit  $x' \neq x$  und  $f(x') = y$ , dann wäre  $f(x') = f(x)$  und  $f$  wäre somit nicht injektiv. Das ist ein Widerspruch, also muss  $x$  eindeutig sein. Wir setzen  $g(y) = x$  und haben somit  $g: Y \rightarrow X$  definiert. Weiterhin gilt:  $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$  und  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ , also  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ .  $\square$

Wir nennen  $g$  *Umkehrfunktion von  $f$*  und schreiben  $g = f^{-1}$ .\*

## 2.3 Natürliche Zahlen und Induktion

Auch wenn wir natürliche Zahlen, deren Eigenschaften und die Rechenregeln darauf schon lange kennen, wollen wir an dieser Stelle uns trotzdem einmal anschauen, wie man mathematisch die natürlichen Zahlen beschreiben kann und welche Eigenschaften man ableiten kann.

\*Auch in der Bezeichnung des Urbild einer Menge unter einer Abbildung  $f$  kommt  $f^{-1}$  vor.

## 2.3 Natürliche Zahlen und Induktion

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}$ . Jetzt müssen wir diese Menge natürlich noch irgendwie (und möglichst eindeutig) beschreiben. Dazu verwenden wir das Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen.

### **Peanosches Axiomensystem der natürlichen Zahlen.**

- (1) Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl, d.h.  $0 \in \mathbb{N}$ .
- (2) Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es eine natürliche Zahl  $\nu(n)$ , die *Nachfolger* von  $n$  genannt wird.
- (3) Die Zahl 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- (4) Aus  $\nu(n) = \nu(m)$  folgt,  $n = m$ .
- (5) Enthält eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  die Zahl 0 und mit jedem  $n \in M$  auch ihren Nachfolger  $\nu(n)$ , so ist  $M = \mathbb{N}$ .

Benennung der natürlichen Zahlen:  $0, 1:=\nu(0), 2:=\nu(1) = \nu(\nu(0)), \dots$

Für uns soll also auch Null eine natürliche Zahl sein. Es ist einfach eine Geschmacksfrage, ob die natürlichen Zahlen bei 0 oder 1 beginnen sollen.

Was man sich immer fragen sollte, ist ob die Definition/die Axiome, das tun, was man eigentlich vorhat. D.h. beschreiben Sie wirklich die natürlichen Zahlen und nur die natürlichen Zahlen? Oder sind die Axiome wirklich widerspruchsfrei? Darum kümmern wir uns hier nicht.

Aus den Peanoschen Axiomen kann man direkt das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ableiten:

**Satz 2.3.1** (Beweisverfahren der vollständigen Induktion). *Gegeben sei eine Folge von Aussagen  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Es möge gelten:*

*1 (Induktionsanfang)  $A(0)$  ist wahr.*

*2 (Induktionsschritt) Falls  $A(n)$  wahr ist, ist auch  $A(n+1)$  wahr.*

*Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.*

*Beweis.* Sei  $M$  die Menge aller natürlichen Zahlen  $n$ , so dass  $A(n)$  wahr ist. Nach dem Induktionsanfang enthält  $M$  die Zahl 0 und nach dem Induktionsschritt mit jedem  $n \in M$  auch ihren Nachfolger  $\nu(n)$ . Damit ist nach dem 5. Peanoschen Axiom  $M = \mathbb{N}$ .  $\square$

Um ein erstes Beispiel der Anwendung von vollständiger Induktion zu sehen, nehmen wir mal kurz wir wissen schon, wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert und welche Rechenregeln da gelten. Wie das geht, kennen Sie natürlich aus der Schule. Aber strenggenommen haben wir es hier noch nicht definiert, das kommt danach.

## 2 Erste Grundbegriffe

**Satz 2.3.2.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt\*

$$2 \sum_{i=0}^n i = n(n+1). \quad (2.1)$$

*Beweis.* Wir wollen diese Aussage mittels vollständiger Induktion beweisen.

Induktionsanfang: Für  $n = 0$  ist die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung gleich 0 und die linke ist  $2 \sum_{i=0}^0 i = 2 \cdot 0 = 0$ .

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass (2.1) für  $n = m$  stimmt und wollen nun die analoge Gleichung für  $n = m + 1$  zeigen:

$$2 \sum_{i=0}^{m+1} i = 2 \left( \sum_{i=0}^m i + m + 1 \right) = m(m+1) + 2(m+1) = (m+1)(m+2) \quad \square$$

Eine weitere wichtige Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion ist die *rekursive Definition* – Als Rekursion (vom Lateinischen *recurrere* ‚zurücklaufen‘) bezeichnet man einen Vorgang, dass Regeln auf ein Objekt, das sie selbst erzeugt haben, von neuem angewandt werden.

Wir können die erstes Beispiel eine Folge rekursiv definieren:  $a_{n+1} = 2a_n$  mit  $a_0 = 1$ . Nach dem Satz zur vollständigen Induktion ist  $a_n$  damit für alle  $n$  definiert ( $A(n)$  wäre hier die Aussage ‚ $a_n$  ist definiert‘). Die Folge hier beschreibt exponentielles Wachstum und man sieht direkt  $a_n = 2^n$ .

Als weiteres Beispiel einer rekursiven Definition definieren wir ausgehend von den Peanoschen Axiomen die arithmetischen Grundoperation  $+$  und  $\cdot$  auf  $\mathbb{N}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n, & n + \nu(m) &:= \nu(n + m) \\ n \cdot 0 &:= 0, & n \cdot \nu(m) &:= n \cdot m + n. \end{aligned}$$

Bei gegebenem  $n \in \mathbb{N}$  sind somit die Ausdrücke  $n + m$  und  $n \cdot m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  rekursiv definiert. Wir schreiben oft bei Verwendung von Variablen das Multiplikationszeichen  $\cdot$  nicht mit, also  $mn := m \cdot n$ .

Da jetzt Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen definiert sind, kann man nun Eigenschaften dieser Operationen finden. Da wir natürlich wissen, wie man mit natürlichen Zahlen operiert, ist uns natürlich klar, was uns hier erwartet - z.B. ‚Summanden kann man vertauschen, die Summe bleibt gleich‘. Wir nehmen ab jetzt einfach ohne Beweis direkt an, dann wir wissen wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert und welche Regeln da gelten (Die Beweise laufen auch über vollständige Induktion).

Es gibt verschiedene Abwandlungen der vollständigen Induktion. Wir wollen hier noch zwei wichtige Versionen. Zum Formulieren braucht man  $\leq$ -Ordnung auf den natürlichen

---

\*Summenzeichen: Für eine Folge  $a_n$  sei  $\sum_{i=k}^n a_i := a_k + a_{k+1} + \dots + a_n$ . In unserem Beispiel ist  $a_i = i$ .

Zahlen, die wir zwar aus dem Leben kennen, aber hier noch nicht definiert haben, weshalb wir die beiden Sätze hier auch noch nicht beweisen können.\*

**Satz 2.3.3** (Beweisverfahren der vollständigen Induktion II). *Gegeben sei eine Folge von Aussagen  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Es möge gelten:*

1 (Induktionsanfang)  $A(0)$  ist wahr.

2 (Induktionsschritt) Falls  $A(k)$  für alle  $0 \leq k \leq n$  wahr ist, ist auch  $A(n+1)$  wahr.

Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

**Satz 2.3.4** (Beweisverfahren der vollständigen Induktion III). *Gegeben sei eine Folge von Aussagen  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Es möge gelten:*

1 (Induktionsanfang)  $A(n_0)$  ist wahr.

2 (Induktionsschritt) Falls  $A(n)$  wahr ist, ist auch  $A(n+1)$  wahr.

Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  wahr.

**Beispiel 2.3.5.** Die *Fibonacci*folge<sup>†</sup> ist rekursiv definiert als  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  und  $a_0 = a_1 = 1$ . Nach dem letzten Satz ist damit  $a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert (als Aussage  $A(n)$  wählen wir die Aussage ' $a_n$  ist definiert'). Die ersten Glieder der Fibonaccifolge sind 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

## 2.4 Relationen

Von den natürlichen Zahlen wollen wir zu den (erst einmal nichtnegative) rationalen Zahlen kommen. Im allgemeinen schreibt man nichtnegative rationale Zahlen als einen Bruch zweier natürlichen Zahlen  $\frac{a}{b}$ , wobei wir natürlich nicht die Null teilen dürfen. Wenn man nicht schon vorher weiß, was rationale Zahlen sind, was sie bedeuten, ist das erst einmal nur eine Schreibweise für ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen  $(a, b) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$  und so wäre zum Beispiel  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{2}{4}$  verschieden. Da wir Pizzastücke vor Augen haben, wollen wir das natürlich nicht. Deshalb definiert man, wann  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  gleich sein sollen, nämlich wenn  $ad = bc$  gilt.

Das führt auf den Begriff der Relation:

**Definition 2.4.1.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Relation*  $R$  ist eine Teilmenge von  $X \times X$ . Für  $(x, y) \in R$  schreibt man auch oft  $x \sim_R y$  bzw. wenn aus dem Kontext klar ist, um welche Relation es sich handelt, auch nur  $x \sim y$ .

Eine Relation heißt

---

\*Gefahr eines Zirkelschluss: Eigentlich versucht man zu vermeiden, Aussagen zu benutzen, bevor man Sie bewiesen hat. Einfach weil man sonst sehr aufpassen muss, dass man für den Beweis einer Aussage  $A$  nicht Aussage  $B$  verwendet, für deren Beweis man schon  $A$  verwendet hat. Das wäre ein Zirkelschluss und sagt nichts, darüber aus, ob Aussage  $A$  richtig ist.

<sup>†</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge>

## 2 Erste Grundbegriffe

- (i) *reflexiv*, falls  $x \sim x$  für alle  $x \in X$  ist.
- (ii) *symmetrisch*, falls aus  $x \sim y$  auch  $y \sim x$  folgt.
- (iii) *antisymmetrisch*, falls aus  $x \sim y$  und  $y \sim x$  folgt, dass  $x = y$  gilt.
- (iv) *transitiv*, falls aus  $x \sim y$  und  $y \sim z$  folgt, dass  $x \sim z$  gilt.
- (v) *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- (vi) *Ordnung* bzw. *Ordnungsrelation*, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. In diesem Fall heißt  $(X, \sim_R)$  eine *geordnete Menge*. Ist weiterhin  $x \sim y$  oder  $y \sim x$  für alle  $x, y \in X$ , dann nennt die Ordnung *total*.

**Beispiel 2.4.2.** Nach Übungsaufgabe 3(ii) gibt es für jede natürliche Zahl  $n$  ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so dass entweder  $n = 2m$  ( $n$  ist *gerade*) oder  $n = 2m + 1$  ( $n$  ist *ungerade*) gilt. Wir definieren auf  $\mathbb{N}$  eine Relation, wie folgt:

$$a \sim b, \text{ falls beide Zahlen gerade oder beide Zahlen ungerade sind.}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation.

**Was können Äquivalenzrelationen?** Die Motivation zur Definition der nichtnegativen rationalen Zahlen gibt eine Relation, die sogar eine Äquivalenzrelation ist (Übungsaufgabe).

Hat man eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  so bezeichnet man für jedes  $x \in M$

$$[x] := \{y \in M \mid x \sim y\}$$

als *Äquivalenzklasse* von  $x$  modulo  $\sim$ . Die Menge der Äquivalenzklassen von  $M$  modulo  $\sim$  bezeichnen wir mit  $M/\sim$  und wir nennen  $x$  *Repräsentant* der Äquivalenzklasse  $[x]$ . Ist z.B.  $x \sim y$ , dann gilt  $[x] = [y]$  (Diese Gleichheit benutzt schon, dass  $\sim$  symmetrisch ist!) und  $x$  und  $y$  sind beides Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse.

Wenn wir für rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  schreiben, meinen wir also in Wirklichkeit die Äquivalenzklasse  $[(a, b)]$ .

Eine *Zerlegung*  $\mathcal{Z}$  einer Menge  $M$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{I}$  der Potenzmenge von  $M$ , also  $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(M)$ , so dass es für jedes Element  $x \in M$  genau ein  $A \in \mathcal{I}$  mit  $x \in A$  gibt.

**Satz 2.4.3.** *Ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ , dann ist  $M/\sim$  eine Zerlegung von  $M$ .*

Bevor wir den Satz beweisen – ein einfaches Beispiel einer Äquivalenzrelation auf der Menge  $M = \{1, 2, 3\}$  wäre:  $a \sim b$  genau dann, wenn  $a = b$  oder  $\{1, 2\} = \{a, b\}$  gilt. Dann ist  $[1] = [2] = \{1, 2\}$  und  $[3] = \{3\}$ ,  $M/\sim = \{[1], [3]\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ .



*Beweis.* Nach Definition ist  $M/\sim$  eine Teilmenge der Potenzmenge von  $M$ . Sei nun  $x \in M$ , dann ist  $x \in [x]$  wegen der Reflexivität von  $\sim$ . Es bleibt zu zeigen, dass aus  $x \in [y]$  auch  $[x] = [y]$  folgt: Da  $x \in [y]$  ist, gilt  $y \sim x$  und wegen der Symmetrie auch  $x \sim y$ . Wir zeigen als erstes, dass  $[x] \subset [y]$  gilt. Dazu sei  $z \in [x]$  und damit  $x \sim z$ . Aus der Transitivität von  $\sim$  folgt  $y \sim z$ . Also ist  $z \in [y]$  und damit  $[x] \subset [y]$ .

Um  $[y] \subset [x]$  zu zeigen, sei  $z \in [y]$ , also  $y \sim z$ . Mit  $x \sim y$  und der Transitivität folgt  $x \sim z$ . Damit ist  $z \in [x]$  und somit  $[y] \subset [x]$ . Insgesamt haben wir also  $[x] = [y]$  gezeigt und somit ist  $M/\sim$  eine Zerlegung von  $M$ .<sup>\*</sup>  $\square$

**Beispiel 2.4.4** (ganze Zahlen). Um auch negative Zahlen einzuführen gibt es verschiedene Möglichkeiten, wir wählen eine Möglichkeit über eine Relation auf der Menge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ : Die Idee hierbei ist, dass  $(a, 0)$  die natürliche Zahl  $a$  darstellen soll und  $(0, a)$  ihr Negatives. Ein  $(a, b)$  soll dann die ganze Zahl ' $a - b$ ' repräsentieren. D.h. wir wollen auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  die folgende Relation:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ auf } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ falls } a + d = c + b \text{ gilt.}$$

Auch hier kann man direkt überprüfen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Wir setzen  $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$  und schreiben  $-a := [(0, a)]$ .

Natürlich wollen wir auch ganze Zahlen addieren und multiplizieren können. Wie definiert man diese Operationen hier in diesem Kontext (selbstverständlich, so dass das sie das tun, was wir gewohnt sind)?

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, ((a, b), [(c, d)]) \mapsto [(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)] \\ \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, ((a, b), [(c, d)]) \mapsto [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(bd + ac, ad + bc)] \end{aligned}$$

Wie kommt man darauf am Beispiel der Addition? Da wir ja Erfahrung mit dem Rechnen von ganzen Zahlen haben, wissen wir was wir erwarten würden:  $[(a, b)] + [(c, d)]$  sollte der Zahl  $a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$  entsprechen und somit gleich  $[(a + c, b + d)]$  sein.

Ist das eine wohldefinierte Abbildung? Dazu erst einmal: wohldefiniert - was heißt das? Wenn wir uns die Definition der Abbildungen oben anschauen, dann fällt auf, dass wir direkt den Repräsentanten der Äquivalenzklasse nutzen. Es könnte also theoretisch passieren, dass für  $[(a, b)] = [(a', b')]$  und  $[(c, d)] = [(c', d')]$  nicht  $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$  gilt. Das wäre nicht schlecht, weil dann die Addition oben, gar nicht auf den Äquivalenzklassen definiert wäre, sondern von der Wahl des Repräsentanten abhängig wäre. Deshalb muss man in solchen Situationen die Wohldefiniertheit überprüfen. Sei

---

<sup>\*</sup>Es ist immer gut am Ende eines Beweises mal zu schauen, ob man eigentlich alle Voraussetzungen/Annahmen der zu beweisenden Aussage verwendet hat (Also hier alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.) Falls nicht, gibt es zwei Möglichkeiten. Vielleicht hat man einen Fehler im Beweis oder man braucht gar nicht alle Annahmen und hat einen Satz gezeigt, der in Wirklichkeit unter allgemeineren Bedingungen gilt. Natürlich muss, nur weil man eine Voraussetzung im Beweis verwendet, diese nicht unbedingt nötig sein – aber es gibt einen Anhaltspunkt. Wenn man wirklich zeigen will, dass eine bestimmte Voraussetzung nötig ist, muss man ein Beispiel finden, wo alle anderen Voraussetzungen der Aussage außer der gerade betrachteten erfüllt sind, aber die Aussage falsch ist.

## 2 Erste Grundbegriffe

also  $[(a, b)] = [(a', b')]$  und  $[(c, d)] = [(c', d')]$ . Dann gilt  $a + b' = a' + b$  und  $c + d' = c' + d$ . Also gilt  $a + c + b' + d' = b + d + a' + c'$  und somit  $[(a + c, b + d)] = [(a + c, b + d)]$ . Analog überlegt man es sich für die Multiplikation.

**Beispiel 2.4.5** (rationale Zahlen). Auf  $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \neq 0\}$  definieren wir, wie oben angedacht, die Relation  $(x, y) \sim (x', y')$  falls  $xy' = x'y$ . Dann kann man überprüfen, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. Wir setzen

$$\mathbb{Q} := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \neq 0\} / \sim$$

mit  $(x, y) \sim (x', y')$  falls  $xy' = x'y$  gilt. Wir schreiben für  $[(x, y)] \in \mathbb{Q}$  auch  $\frac{x}{y}$ .

Wie auch bei ganzen Zahlen, kann man sich wieder überlegen, was die Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen sein sollte. Ab sofort nehmen wir an, dass wir das alles gemacht haben und damit auch rechnen können.

Mehr zu den Eigenschaften der rationalen Zahlen und der Addition/Multiplikation darauf im nächsten Abschnitt.

**Ordnungsrelationen** Nach Definition 2.4.1 ist eine Ordnung eine reflexive, transitive, antisymmetrische Relation  $\sim$  auf einer Menge  $M$ . Falls für zwei Elemente  $x, y \in M$  auch  $x \sim y$  oder  $y \sim x$  gilt, heißt die Ordnung total.

Der Name kommt in Anlehnung an die  $\leq$ -Relation (d.h.  $x \sim y$  falls  $x \leq y$ ) auf den natürlichen, ganzen, rationalen, reellen Zahlen. Die  $<$ -Relation ist in diesem Sinne keine Ordnung, da sie nicht reflexiv ist.

Wie würden wir  $\leq$  auf  $\mathbb{Q}$  definieren? Auf  $\mathbb{Q}$  gibt es eine totale Ordnung: Seien  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Wir setzen  $a \geq b$ , falls es  $c \in \mathbb{Q}$  mit  $c = \frac{m}{n}$  für  $m \in \mathbb{N}$  und  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gibt, so dass  $a + c = b$  gilt. Man überprüft direkt, dass es sich hier um eine totale Ordnung handelt.

Ist  $a \leq 0$ , dann gibt es  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 0$  und  $c = \frac{m}{n}$ , so dass  $a + c = 0$  gilt. Damit ist  $0 + c = -a$  und es folgt  $0 \leq -a$ .

Falls  $a \geq b$  aber  $a \neq b$  ist, schreiben wir auch  $a > b$  bzw.  $b < a$ . Mit dieser Schreibweise kann man dann sehen: Ist  $a < 0$ , also  $a \leq 0$  und  $a \neq 0$ , dann ist  $0 \leq -a$  und  $-a \neq 0$ , also auch  $0 < -a$ .

Aus der Antisymmetrie von  $\leq$  folgt, dass für jede rationale Zahl  $x$  entweder  $x < 0$  (wir nennen  $x$  *negativ*),  $x = 0$  oder  $x > 0$  (wir nennen  $x$  *positiv*) gilt.

**Definition 2.4.6.** Für  $x \in \mathbb{Q}$  definieren wir den *Betrag* von  $x$  durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

**Lemma 2.4.7.** Für  $a, b \in \mathbb{Q}$  gilt

$$a \leq |a| \tag{2.2}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{2.3}$$

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \tag{2.4}$$

*Beweis.* (2.2): Sei  $a \geq 0$ . Dann gilt  $|a| = a$ , also insbesondere auch  $a \leq |a|$ . Sei nun  $a < 0$ . Dann ist  $|a| = -a$  und  $-a > 0$  und damit nach Transitivität  $a < 0 < -a$ , also  $a \leq |a| = -a$ .

(2.3): Übungsaufgabe 4

(2.4): Aus  $|a| = |a + b + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$  folgt  $|a| - |b| \leq |a + b|$ . Ganz analog sieht man  $|b| - |a| \leq |a + b|$ . Da  $||a| - |b||$  gleich  $|a| - |b|$  oder gleich  $|b| - |a|$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.5 Körper

Die Menge der rationalen Zahlen mit der Addition und Multiplikation ist ein Körper:

**Definition 2.5.1.** Ein Menge  $\mathbb{K}$  mit einer Addition  $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(a, b) \mapsto a + b$  und einer Multiplikation  $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(a, b) \mapsto a \cdot b$  heißt *Körper*, falls

- (a) *Assoziativgesetz:*

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
- (b) *Kommutativgesetz:*

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$
- (c) *Neutrales Element:* Es gibt Zahlen  $0 \in \mathbb{K}$  und  $1 \in \mathbb{K}$  mit  $1 \neq 0$ , so dass für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt:
$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$
- (d) *Inverses Element:* Zu jedem  $a \in \mathbb{K}$  gibt es Lösungen  $x, y \in \mathbb{K}$  der Gleichungen
$$a + x = 0$$

$$a \cdot y = 1 \text{ falls } a \neq 0$$
- (e) *Distributivgesetz:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Die ganzen Zahlen bilden z.B. keinen Körper, da 2 bzgl. der Multiplikation kein inverses Element hat. Dazu führt man ja die rationalen Zahlen ein, damit 2 mit  $\frac{1}{2}$  ein solches multiplikatives Inverses hat.

Aber die Menge der rationalen Zahlen ist nicht der einzige Körper. Auch die Menge der reellen Zahlen ist z.B. ein Körper. Ein anderer Körper ist  $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$  mit der Addition und Multiplikation gegeben durch:  $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ ,  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$  und  $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ .

Wegen der Assoziativität kann man  $a + b + c := (a + b) + c = a + (b + c)$  bzw.  $abc := (ab)c = a(bc)$  ohne das man festlegen muss, in welcher Reihenfolge die Operationen ausgeführt werden.

## 2 Erste Grundbegriffe

Für das inverse Element zu  $a \in \mathbb{K}$  bzgl. der Addition schreiben wir  $-a$  und falls  $a \neq 0$  für das bzgl. der Multiplikation  $a^{-1}$ .

Aus den Körperaxiomen leiten sich einige Eigenschaften und Rechenregeln ab, die damit insbesondere auch für rationale Zahlen gelten, da diese ein Körper sind. Hier ein paar Beispiele:

**Lemma 2.5.2.** *In einem Körper  $\mathbb{K}$  gilt für alle  $a, b, c, p, q \in \mathbb{K}$ :*

- (i) *Das neutrale Element der Addition ist eindeutig, d.h. erfüllen  $0_1$  und  $0_2$  (c), dann gilt  $0_1 = 0_2$ .*
- (ii) *Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig.*
- (iii) *Zu einem  $a \in \mathbb{K}$  sind die inversen Elemente zu Addition und Multiplikation eindeutig.*
- (iv)  *$-(-a) = a$*
- (v) *Aus  $a + c = b + c$  folgt  $a = b$  und aus  $pc = qc$  mit  $c \neq 0$  folgt  $p = q$ .*
- (vi)  *$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ , falls  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$*

*Beweis.* (i)  $0_1 \stackrel{(c)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(b)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(c)}{=} 0_2$ .

(ii) analog zu (i)

(iii) Wir überprüfen das hier nur für die Addition, der Fall der Multiplikation geht analog: seien  $a_1$  und  $a_2$  inverse zu  $a$  bzgl. der Addition, d.h. es gilt  $a + a_1 = 0$  und  $a + a_2 = 0$ . Dann gilt.

$$a_1 \stackrel{(c)}{=} a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) \stackrel{(a)}{=} (a_1 + a) + a_2 \stackrel{(b)}{=} (a + a_1) + a_2 = 0 + a_2 \stackrel{(b)}{=} a_2 + 0 \stackrel{(c)}{=} a_2$$

(iv)  $-a$  erfüllte  $a + (-a) = 0$ ,  $-(-a)$  erfüllt  $-a + (-(-a)) = 0$ . Damit ist

$$-(-a) \stackrel{(c)}{=} -(-a) + 0 = -(-a) + (a + (-a)) \stackrel{(a),(b)}{=} a + (-a + (-(-a))) = a + 0 \stackrel{(c)}{=} a.$$

(v) +(vi) zum Selbstprobieren □

**Definition 2.5.3.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper mit einer totalen Ordnung  $\leq$ . Wir schreiben  $a < b$ , falls  $a \leq b$  und  $a \neq b$  gilt. Falls zusätzlich für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt:

$$\text{aus } a < b \text{ folgt } a + c < b + c \text{ und aus } 0 < a \text{ und } 0 < b \text{ folgt } 0 < ab,$$

dann nennen wir  $\mathbb{K}$  einen *angeordneten Körper*. Für einen angeordneten Körper wird der Betrag durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

definiert.

Falls für einen angeordneten Körper zusätzlich gilt, dass es

zu jedem  $x \in \mathbb{K}$  es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq x$  gibt, (Archimedisches Axiom)

nennen wir  $\mathbb{K}$  einen *archimedisches angeordneter Körper*.

Die rationalen Zahlen sind ein archimedisches angeordneter Körper.

## 2.6 In Richtung der reellen Zahlen

Woche 2

Die schrittweise Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den ganzen und dann rationalen Zahlen, kann man auch als Erweiterung sehen, welche Gleichungen dann lösbar werden, z.B.  $2 + x = 1$  (ganze Zahlen),  $2x = 1$  (rationale Zahlen). Nun wollen wir uns  $x^2 = 2$  widmen. Wir sehen als erstes, dass diese Gleichung nicht in den rationalen Zahlen lösbar ist.

**Lemma 2.6.1.** Für kein  $x \in \mathbb{Q}$  gilt  $x^2 = 2$ .

Ist  $n$  gerade, dann auch  $n^2$ , da  $n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2)$  gilt. Analog sieht man, dass für  $n$  ungerade auch  $n^2$  ungerade ist.

*Beweis.* Wir führen hier einen Beweis durch Widerspruch: Sei also  $x = \frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ . Da wenn  $x$  eine Lösung von  $x^2 = 2$  auch  $-x$  die Gleichung  $(-x)^2 = 2$  erfüllt, können wir annehmen, dass  $x$  positiv, also  $p, q \in \mathbb{N}$  ist. Aus  $x^2 = 2$  folgt,  $p^2 = 2q^2$ .

Weiterhin kann man durch wiederholtes Kürzen annehmen, dass wir  $p, q$  so gewählt haben, dass  $p, q$  nicht beide gleichzeitig gerade sind. Wir haben also, dass  $p^2 = 2q^2$  gerade ist und damit auch  $p$  gerade ist. D.h. es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $p = 2m$ . Dann ist  $p^2 = 4m^2$  und somit  $q^2 = 2m^2$ . Nun folgt, aber wie eben, dass dann auch  $p$  gerade ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass  $p$  und  $q$  nicht beide gerade sind.  $\square$

Auf der anderen Seite glaubt man, dass man sich der 'Lösung' von  $x^2 = 2$  zumindest in den rationalen Zahlen 'annähern' kann - wie kommen wir darauf? Haben wir ein Quadrat der Seitenlänge  $a$ , so ist der Flächeninhalt  $a^2$ . Wir nähern uns diesem Quadrat durch Rechtecke mit rationaler Seitenlänge an und Flächeninhalt 2 an: Dazu wählen wir uns eine Startseitenlänge  $x_0 \in \mathbb{Q}$  mit  $x_0 > 0$ . Damit das Rechteck Flächeninhalt 2 hat, muss die zweite Seite Länge  $y_0 = \frac{2}{x_0}$  haben. Da im allgemeinen  $x_0 \neq \frac{2}{x_n}$  ist, bilden wir als nächstes ein Rechteck mit dem Mittelwert  $x_1 := \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{2}{x_n} \right)$  als eine der beiden Seitenlängen. Dann ist die andere Seitenlänge  $y_1 = \frac{2}{x_0}$ . Man kann sich nun überlegen, dass die Differenz der Seitenlängen zum zweiten Rechteck hin kleiner geworden ist. Durch Wiederholen dieser Prozedur erhält man eine Folge  $x_n$  und man glaubt anschaulich (vgl. auch Übungsaufgabe), dass die zugehörige Folge von Rechtecken sich der Seitenlänge des gesuchten Quadrates immer mehr annähert, vgl. Abbildung 2.1. Da wir mit einem rationalen  $x_0$  starten, sind so auch  $x_1, x_2, \dots$  wieder rational. Hier erst einmal die Definition der Folge von  $x_n$  für  $x^2 = c$  mit  $c > 0$ .

## 2 Erste Grundbegriffe

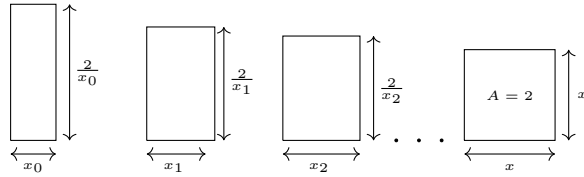


Abbildung 2.1: 'Näherung' eines Quadrates mit Flächeninhalt 2 durch eine Folge von Rechtecken mit rationaler Seitenlänge.

**Definition 2.6.2.** Sei  $c \in \mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ . Zu gegebenem Startwert  $x_0 \in \mathbb{Q}_+$  definieren wir die *Heron-Folge* rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right).$$

Die resultierende Seitenlänge wollen wir dann als Lösung von  $x^2 = c$  betrachten. Natürlich müssen wir dieses 'Annähern' dafür genauer fassen. das führt auf den Begriff der Konvergenz einer Folge im nächsten Abschnitt.

Damit werden wir dann auch die reellen Zahlen formal einführen, nämlich als Zahlen, die durch eine rationale Folge 'angenähert' werden. Wir verraten schon mal, dass auch die reellen Zahlen ein archimedisch angeordneter Körper ist.

# 3 Folgen

## 3.1 Konvergenz und erste Eigenschaften

In Beispiel 2.2.2 hatten wir Folgen in einer Menge  $X$  definiert: Eine Abbildung  $a: \mathbb{N} \rightarrow X$  heißt *Folge* in  $X$  und wird zumeist als  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geschrieben, wobei  $a_n := a(n)$  ist.

Ist  $X = \mathbb{Q}$ , so sagen wir zu einer Folge in  $\mathbb{Q}$  auch *rationale Folge* (Analog für natürliche, ganze, ... Folgen).

Um wirklich zu fassen, was wir meinen, wenn sich eine Folge von Zahlen einer anderen Zahl annähert, führen wir den Begriff der Konvergenz ein. Hier erst einmal nur für rationale Folge, doch die Definition für reelle Folgen ist ganz analog.

**Definition 3.1.1** (Konvergenz von (rationalen) Folgen). Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{Q}$  *konvergiert* für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $a \in \mathbb{Q}$ , falls es zu jedem  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \mathbb{Q}$ , ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_n - a| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Die Zahl  $a$  heißt *Grenzwert* der Folge und die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent*. Wir schreiben kurz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Eine Folge, die gegen Null konvergiert, nennen wir  $(a_n)_n$  *Nullfolge*.

Eine erste naheliegende Frage: Ist es richtig von dem Grenzwert einer Folge zu reden? D.h. falls die Folge konvergiert, gibt es dann wirklich nur einen Grenzwert? Falls ja, sagt man der Grenzwert ist eindeutig; falls nein, dürfte man korrekterweise nicht von 'dem Grenzwert' sondern nur von 'einem Grenzwert' der Folge reden.

Rein von der Anschauung ist es naheliegend, dass der Grenzwert, wenn die Folge überhaupt konvergent ist, auch eindeutig ist. Das versuchen wir im Folgenden zu zeigen:

**Satz 3.1.2** (Eindeutigkeit des Grenzwertes). *Ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, dann ist der Grenzwert eindeutig.*

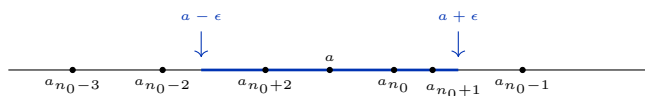


Abbildung 3.1:  $a_n$  konvergiert gegen  $a$ , falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_0$  gibt (welches von  $\epsilon$  abhängen wird), so dass ab  $n_0$  alle Folgenglieder im blauen Intervall von  $a - \epsilon$  bis  $a + \epsilon$  liegen.

### 3 Folgen

*Beweis.* Da die Folge konvergent ist, existiert ein Grenzwert  $a$ . Sei auch  $b$  Grenzwert der Folge. Wir müssen zeigen, dass  $a = b$  ist.

Dazu schätzen wir  $|a - b|$  ab:

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b|.$$

Da nach Grenzwertdefinition es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \epsilon$  und  $|a_n - b| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gibt, folgt  $|a - b| < 2\epsilon$ . Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt  $a = b$ .  $\square$

Bevor wir uns Beispiele anschauen, bemerken wir noch, dass man um die obige Grenzwertdefinition hinzuschreiben ein angeordneter Körper genügen würde, da wir dann die Ordnung  $<$  und den Betrag hätten. D.h. analog konvergiert eine Folge in  $\mathbb{K}$ , für einen angeordneten Körper  $\mathbb{K}$ , falls man in obiger Definition alle  $\mathbb{Q}$  durch  $\mathbb{K}$  ersetzt. So wird dann auch später die Konvergenz reeller Zahlen definiert.

**Beispiel 3.1.3.** (i) Die Folge bestehend aus  $(a_n = \frac{1}{n})_{n>0}$  nennt man *harmonische Folge*. Wir wollen zeigen, dass  $a_n$  eine Nullfolge ist: Sei dazu  $\epsilon > 0$ . Da  $\mathbb{Q}$  ein archimedisch angeordneter Körper ist, gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 \geq \frac{2}{\epsilon}$ . Damit gilt für alle  $n \geq n_0$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

- (ii) Die *konstante Folge*  $a_n = a$  konvergiert gegen  $a$ , da für alle  $\epsilon > 0$  und alle  $n \geq 0$  direkt  $|a_n - a| = 0 < \epsilon$  gilt.
- (iii) (Geometrische Folge) Für  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $|q| < 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  (Übungsaufgabe).
- (iv) Die Folge  $a_n = (-1)^n$ , d.h.  $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots$ , ist nicht konvergent: Wir führen hier einen *Beweis durch Widerspruch*, d.h. wir nehmen an, dass die Aussage nicht gilt und versuchen, dann einen Widerspruch zu kommen. Dann müsste die Aussage also wahr sein.

Dazu nehmen wir an, dass  $a_n$  konvergent ist, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  für ein  $a$  sei. Dann muss es für  $\epsilon = 1 > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq n_0$  geben. Damit haben wir

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2,$$

was ein Widerspruch ist.

Bevor wir zu weiteren Eigenschaften, Beispielen, Anwendungen... von Folgen kommen, bemerken wir, dass um zu überprüfen, ob eine Folge konvergiert wir schon wissen müssen, was der Grenzwert ist. Das ist irgendwie unbefriedigend, weil wir den Grenzwert erst einmal raten müssten. Es wäre gut, wenn wir irgendwie auch so wenigstens rausfinden würden, ob eine Folge überhaupt konvergiert, ohne das Wissen des Grenzwertes zu nutzen.

Dazu werden uns (jedenfalls dann in den reellen Zahlen) Cauchyfolgen helfen:



### 3.1 Konvergenz und erste Eigenschaften

**Definition 3.1.4.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine rationale Folge. Dann ist  $a_n$  eine *Cauchyfolge*, falls für alle  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \mathbb{Q}$  es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_n - a_m| < \epsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$  gilt.

**Satz 3.1.5.** Jede konvergente rationale Folge ist eine Cauchyfolge.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gilt, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit gilt für alle  $n, m \geq n_0$  nach Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

**Beispiel 3.1.6.** Sei  $c \in \mathbb{Q}_+$  und  $x_0 \in \mathbb{Q}_+$ . Die zugehörige Heron-Folge  $x_n$ , vgl. Definition 2.6.2, ist eine Cauchyfolge (Übungsaufgabe).

Wenn man nun schon mal glaubt, dass wenn diese Heron-Folge in  $\mathbb{Q}$  konvergiert, der Grenzwert auch wirklich eine Lösung von  $x^2 = c$  ist, sehen wir, dass zumindest für  $c = 2$  diese Cauchyfolge nicht in  $\mathbb{Q}$  konvergieren kann (da  $x^2 = 2$  keine rationale Lösung hat).

**Beispiel 3.1.7** (Dezimalbruchfolge). Sei  $(b_n)_n$  eine Folge mit  $b_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Wir setzen  $a_n := \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{10^i}$ , also  $a_n = b_0.b_1b_2\dots b_n$  wenn man sich die  $b_i$  als Ziffern der Zahl  $a_n$  vorstellt. Dann ist die Folge  $(a_n)_n$  eine Cauchyfolge:

Für  $n > m$  gilt

$$|a_n - a_m| = \sum_{i=m+1}^n \frac{b_i}{10^i} \leq \sum_{i=m+1}^n \frac{10}{10^i} = 10 \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{10^i}$$

Es gilt allgemein für beliebige  $q \in \mathbb{R}$ , dass  $(1 + q + q^2 + \dots + q^k)(1 - q) = 1 - q^{k+1}$  und damit für  $q \neq 1$ :

$$\sum_{i=m+1}^n q^i = \sum_{i=0}^n q^i - \sum_{i=0}^m q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{q^{m+1} - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bei uns ist  $q = \frac{1}{10}$ . Damit ist  $q^n$  eine geometrische Folge und damit nach Beispiel 3.1.3 eine Nullfolge. Damit gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|q^n| < \frac{(1-q)}{2 \cdot 10} \epsilon$ , und es gilt für alle  $n, m \geq n_0$  mit  $n > m$

$$|a_n - a_m| = 10 \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{10^i} = 10 \frac{q^{m+1} - q^{n+1}}{1 - q} < \frac{1}{1 - q} \left( \frac{1 - q}{2} \epsilon + \frac{1 - q}{2} \epsilon \right) = \epsilon.$$

Der Fall  $n < m$  geht analog und für  $n = m$  ist  $|a_n - a_m| = 0$ .

Als weitere mögliche Eigenschaft einer Folge lernen wir Beschränktheit kennen:

**Definition 3.1.8** (Beschränktheit von Folgen.). Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt *beschränkt*, falls es ein  $C > 0$  mit  $|a_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt. Eine Folge heißt *von oben beschränkt* bzw. *von unten beschränkt*, falls es ein  $C > 0$  mit  $a_n \leq C$  bzw.  $a_n \geq -C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt.

### 3 Folgen

**Lemma 3.1.9.** *Jede konvergente Folge und jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

*Beweis.* Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Dann gibt es für  $\epsilon = 1$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Damit ist nach Dreiecksungleichung  $|a_n| < |a| + 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Wir setzen  $C$  als das Maximum von  $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|$  und  $|a| + 1$ . Dann gilt  $|a_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und die Folge ist beschränkt.

Sei nun  $a_n$  eine Cauchyfolge. Dann gibt es für  $\epsilon = 1$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a_m| < 1$  für alle  $n, m \geq n_0$  gilt. Insbesondere können wir  $m = n_0$  wählen. Der Rest des Beweises geht dann analog wie zum Fall der konvergenten Folge von oben.  $\square$

**Konstruktion reeller Zahlen** Wenn wir an das Beispiel der Heron-Folge zurückdenken, vgl. Definition 2.6.2, welche anschaulich eine Lösung von  $x^2 = 2$  annähert, würden wir gerne diese Folge benutzen, um die positive Lösung von  $x^2 = 2$  zu definieren.

Auch bei unserem Beispiel der Dezimalbruchfolge würden wir uns den Grenzwert gerne als den (potenziell) unendlich Dezimalbruch vorstellen (z.B. wird  $0,1234512345\dots$  angenähert durch die Folge, die diesen Bruch nach der  $n$ -ten Kommastelle abschneidet.)

Das heißt wir wollen 'potenziell neue Zahlen' durch Cauchyfolgen definieren und die rationalen Zahlen, die wir schon kennen, könnten konstanten Folgen entsprechen. Da muss man aber natürlich vorsichtig sein, weil verschiedene Folgen, den gleichen Grenzwert haben können. Deshalb werden wir auf der Menge der rationalen Cauchyfolgen eine Relation einführen, die modellieren soll, dass zwei Cauchyfolgen den gleichen Grenzwert haben (auch wenn dieser Grenzwert, dann selbst vielleicht nicht rational ist):

Sei

$$C := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ rationale Folge} \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge in } \mathbb{Q}\}.$$

Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$ . Dann setzen wir  $(a_n) \sim (b_n)$ , falls die Folge  $(c_n := b_n - a_n)_n$  gegen 0 konvergiert. Man überprüft direkt, dass  $\sim$  auf  $C$  eine Äquivalenzrelation ist. Wir definieren die reellen Zahlen als

$$\mathbb{R} := C / \sim.$$

Die reellen Zahlen sollen ja eigentlich eine Erweiterung der reellen Zahlen sein, d.h.  $\mathbb{Q}$  soll eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  sein. So wie wir das hier eingeführt haben ist, dass erst einmal nicht so. Aber die Abbildung

$$i: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [(x)_n]$$

ist injektiv, und so können wir  $\mathbb{Q}$  mit  $i(\mathbb{Q})$  identifizieren.

Bis jetzt ist  $\mathbb{R}$  erst einmal nur als abstrakte Menge definiert. Wir hatten aber behauptet, dass  $\mathbb{R}$  sogar ein archimedisches angeordneter Körper sein wird. D.h. wir brauchen auf alle Fälle eine Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{R}$ . Diese soll natürlich auf  $\mathbb{Q}$  (wenn identifiziert mit  $i(\mathbb{Q})$ ) der Addition und Multiplikation entsprechen, die wir schon kennen.

### 3.1 Konvergenz und erste Eigenschaften

Wir definieren

$$[(a_n)_n] + [(b_n)_n] := [(a_n + b_n)_n], \quad [(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n] := [(a_n \cdot b_n)_n]$$

Wohldefiniertheit der Abbildungen? Hier ist die Frage, ob die Abbildungen wirklich wieder in  $\mathbb{R}$  abbilden (D.h. sind die Bildfolgen  $(a_n + b_n)_n$  und  $(a_n \cdot b_n)_n$  wirklich wieder Cauchyfolgen.) und ist die Definition unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklasse. Das impliziert dann insbesondere, dass die Addition auf  $i(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$  mit der auf  $\mathbb{Q}$  übereinstimmt. All das kann man direkt nachprüfen, wir beschränken uns hier als Beispiel auf

**Lemma 3.1.10.** *Sind  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  Cauchyfolgen in  $\mathbb{Q}$ , so ist auch  $(a_n b_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{Q}$ .*

*Beweis.* Es gilt

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |(a_n - a_m)b_n + a_m(b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| \cdot |b_n| + |a_m| \cdot |b_n - b_m|.$$

Da  $a_n, b_n$  eine Cauchyfolge ist, sind die Folgen nach Satz 3.1.9 beschränkt. D.h. es gibt  $C_1, C_2 > 0$  mit  $|a_n| < C_1$  und  $|b_n| < C_2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $a_n$  Cauchyfolge ist, gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a_m| < \frac{1}{2C_2}\epsilon$  für alle  $n, m \geq n_1$ . Analog gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n - b_m| < \frac{1}{2C_1}\epsilon$  für alle  $n, m \geq n_2$ . Wir setzen  $n_0$  das Maximum von  $n_1$  und  $n_2$ .

Dann gilt für alle  $n, m \geq n_0$ :

$$|a_n b_n - a_m b_m| \leq |a_n - a_m| \cdot |b_n| + |a_m| \cdot |b_n - b_m| < \frac{1}{2C_2}\epsilon C_2 + \frac{1}{2C_1}\epsilon C_1 = \epsilon \quad \square$$

Nun haben wir eine Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{R}$ . Als Ordnungsrelation definieren wir  $[(a_n)_n] \leq [(b_n)_n]$ , falls  $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$  oder falls es eine Cauchyfolge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $c_n > 0$  und  $a_n + c_n = b_n$  für alle  $n \geq n_0$ .<sup>\*</sup> Man kann direkt überprüfen, dass  $\leq$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathbb{R}$  ist, die auf  $\mathbb{Q}$  unserem Standard- $\leq$  entspricht.

Mit dieser Addition, Multiplikation und einer Ordnungsrelation  $\leq$ , die analog zu der in  $\mathbb{Q}$  definiert ist, kann man Schritt für Schritt nachprüfen, dass  $\mathbb{R}$  wirklich ein archimedisch angeordneter Körper ist. Ab sofort nehmen wir an, dass wir die zugehörigen Rechenregeln kennen.

Die Definition des Grenzwertes einer reellen Folge ist nun ganz analog der rationalen, d.h.: Eine reelle Folge  $(a_n)_n$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_n - a| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gilt.

Alle Eigenschaften von konvergenten Folgen, die wir bis jetzt betrachtet haben, wie z.B. Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 3.1.2), dass jede konvergent Folge eine Cauchyfolge

<sup>\*</sup>Im ersten Moment denkt man vielleicht, dass man auch (äquivalent) definieren könnte:  $[(a_n)_n] \leq [(b_n)_n]$ , falls es eine Cauchyfolge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $c_n \geq 0$  und  $a_n + c_n = b_n$  für alle  $n \geq n_0$ .

Aber da muss aufpassen: Z.B. Sei  $a_n = \frac{1}{n}$  und  $b_n = -\frac{1}{n}$ . Dann ist  $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$  (das wäre die  $0 \in \mathbb{R}$ ), aber es gäbe eine solche Cauchyfolge  $c_n$ , wie eben gefordert, nicht.

### 3 Folgen

ist (Satz 3.1.5) und dass jede konvergente Folge oder Cauchyfolge beschränkt ist (Satz 3.1.9), gilt mit genau den gleichen Beweisen auch für reelle Zahlen.

**Was haben wir durch die Konstruktion der reellen Zahlen auf diese Art und Weise gegenüber den rationalen Zahlen gewonnen?**

*Jede reelle Cauchyfolge konvergiert in den reellen Zahlen.*

Somit konvergiert auch unsere Dezimalbruchfolge aus Beispiel 3.1.7; den Grenzwert notieren wir dann als den unendlichen Dezimalbruch. Und auch unsere Heron-Folge aus Definition 2.6.2 konvergiert. Die (berechtigte) Hoffnung ist natürlich, dass der Grenzwert dann auch wirklich eine Lösung von  $x^2 = 2$  ist. Um das zu überprüfen benötigen wir noch ein paar Rechenregeln für konvergente Folgen.

## 3.2 Rechenregeln und Eigenschaften für konvergente Folgen

**Satz 3.2.1** (Rechnen mit konvergenten Folgen). *Seien zwei konvergente reelle Folgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  gegeben. Sei  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

- (i) *Die Folge  $\mu a_n + \nu b_n$  konvergiert nach  $\mu a + \nu b$ .*
- (ii) *Die Folge  $a_n b_n$  konvergiert nach  $ab$ .*
- (iii) *Für  $b \neq 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{a_n}{b_n}$  für alle  $n \geq n_0$  definiert ist. Diese Folge konvergiert gegen  $\frac{a}{b}$ .*

*Beweis.* (i) Falls  $\nu \neq 0$  und  $\mu \neq 0$  sind, gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|\mu|}$  für alle  $n \geq n_1$  und ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|\nu|}$  für alle  $n \geq n_2$ . Sei nun  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_0$

$$|(\mu a_n + \nu b_n) - (\mu a + \nu b)| = |\mu(a_n - a) + \nu(b_n - b)| \leq |\mu||a_n - a| + |\nu||b_n - b| < \epsilon.$$

Falls ein  $\mu$  oder  $\nu$  gleich Null ist, sieht man die Behauptung ganz analog. (ii) wird sehr ähnlich zu Lemma 3.1.10 gezeigt.

(iii) Wir können erst einmal  $a_n = 1$  annehmen, da der allgemeine Fall dann aus (ii) mit  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$  folgt. Um zu zeigen, dass  $b_n$  ab einem  $n_0$  an nicht mehr Null werden kann, schätzen wir ab:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b|.$$

Da  $b_n$  zu  $b$  konvergiert, gibt es  $\epsilon = \frac{|b|}{2} > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Somit ist  $|b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$  für alle  $n \geq n_0$  und somit  $\frac{1}{b_n}$  definiert.

Es bleibt die Konvergenz von  $\frac{1}{b_n}$  zu zeigen: Wir haben für  $n \geq n_0$ , dass gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|.$$

### 3.2 Rechenregeln und Eigenschaften für konvergente Folgen

Für  $\epsilon > 0$  sei  $n_1 \in \mathbb{N}$  so, dass  $|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$  für alle  $n \geq n_1$  gilt. Dann gilt für alle  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ , dass

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \epsilon$$

ist. □

**Beispiel 3.2.2** (Heron-Folge – Existenz der Quadratwurzel). Für  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ , ist die Folge  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right)$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 > 0$ , konvergent mit Grenzwert  $x \geq x_0$ , vgl. Übungsaufgabe 12. Damit gilt mit den obigen Rechenregeln, dass

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{c}{x} \right)$$

und damit  $x^2 = c$  gilt.

Somit haben wir gesehen, dass  $x^2 = c$  für  $x > 0$  eine positive Lösung hat. Man kann sich überlegen, dass es nur eine positive Lösung gibt. Diese Lösung bezeichnen wir mit  $\sqrt{c}$ .

Für das nächste Beispiel führen wir folgende Begriffe ein:

**Definition 3.2.3.** Ein *Polynom* ist eine Funktion  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + d_1 x + d_0 = \sum_{i=0}^d a_i x^i$$

mit  $d \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ . Falls  $a_d \neq 0$ , dann heißt  $a_d$  *Leitkoeffizient* und  $d$  *Grad* von  $p$ .

Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion  $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  für Polynome  $p, q$  mit  $q \neq 0^*$  und  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ .

**Beispiel 3.2.4.** Sei  $f = \frac{p}{q}: S \rightarrow \mathbb{R}$  eine rationale Funktion wie oben. Sei  $(x_n)_n$  eine konvergente Folge in  $S$  mit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in S$ . Dann folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen direkt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_d x_n^d + \dots + a_1 x_n + a_0) \\ &= a_d \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^d + \dots + a_1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + a_0 = p(x) \end{aligned}$$

und analog  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = \frac{p(x)}{q(x)}$  gilt.

---

\*0 ist hier die Nullfunktion  $0: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 0$ . Damit ist  $q \neq 0$  (Un-)Gleichheit auf Funktionen. D.h.  $q$  könnte zwar für bestimmte  $x$  den Wert Null annehmen, aber nicht für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Der 'Grenzwert unendlich' - uneigentliche Konvergenz

Betrachten wir die Folgen  $a_n = n$  und  $b_n = (-1)^n$ , dann konvergieren beide nicht nach unserer Grenzwertdefinition. Aber Konvergenz geht aus unterschiedlichen Gründen 'schief'. Während  $b_n$  immer zwischen  $-1$  und  $1$  springt, könnte man sagen, dass sich  $a_n$  nach unendlich strebt. Um dies noch zu unterscheiden, führt man den Begriff der uneigentlichen Konvergenz ein.

**Definition 3.3.1** (Uneigentliche Konvergenz). Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert *uneigentlich* gegen  $\pm\infty$ , falls es zu jedem  $K > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\pm a_n > K$  für alle  $n \geq n_0$  gibt.\*

Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$  oder  $a_n \rightarrow \pm\infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beispiel 3.3.2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pm n = \pm\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

Für  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q > 1$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ .

**Lemma 3.3.3.** Sei  $a_n$  eine Folge mit  $a_n > 0$  für alle  $n$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  ist.

*Beweis.* Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $a_n > \frac{1}{\epsilon}$  für alle  $n \geq n_0$ . Somit ist mit  $|\frac{1}{a_n}| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ . Sei nun andererseits  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  und  $K > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|\frac{1}{a_n}| < \frac{1}{K}$  für alle  $n \geq n_0$ . Somit ist  $a_n = |a_n| > K$  für alle  $n \geq n_0$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .  $\square$

Im allgemeinen (also ohne die Positivitätsforderung an  $a_n$ ) folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  aber nur  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ .

Auch andere der Rechenregeln für konvergente Folgen lassen sich auf die uneigentliche Konvergenz übertragen, man muss nur an einigen Stellen vorsichtig sein. Ähnlich wie das letzte Lemma zeigt man direkt:

**Lemma 3.3.4.** Seien  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  und  $b_n, c_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt:

- (i) Die Folgen  $a_n + b_n$ ,  $b_n + c_n$ ,  $b_n c_n$  konvergieren uneigentlich nach unendlich.
- (ii) Falls  $a \neq 0$  ist, konvergiert  $a_n b_n$  uneigentlich gegen unendlich für  $a > 0$  und gegen minus unendlich für  $a < 0$ .

**Beispiel 3.3.5.** Andererseits wissen wir in der Situation von obigen Lemma apriori nichts über die Konvergenz von  $\frac{b_n}{c_n}$  oder von  $a_n b_n$  falls  $a_n$  eine Nullfolge ist:

Seien  $p(x) = \sum_{i=0}^d p_i x^i$  und  $q(x) = \sum_{i=0}^m q_i x^i$  zwei Polynome vom Grad  $d$  bzw.  $m$ . Wir betrachten die Folgen  $b_n = p(n)$  und  $c_n = q(n)$ . Dann haben wir mit den Rechenregeln für (uneigentlich) konvergente Folgen

---

\*Man muss hier  $\pm$  separat lesen, d.h. für Konvergenz gegen unendlich soll  $a_n > K$  und für gegen minus unendlich soll  $-a_n > K$  (also  $a_n < -K$ ) sein.

### 3.4 Vergleiche mit konvergenten Folgen

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{p_d n^d + p_{d-1} n^{d-1} + \dots + p_0}{q_m n^m + q_{m-1} n^{m-1} + \dots + q_0} = n^{d-m} \underbrace{\frac{p_d + \frac{p_{d-1}}{n} + \dots + \frac{p_0}{n^d}}{q_m + \frac{q_{m-1}}{n} + \dots + \frac{q_0}{n^m}}}_{=: a_n}$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt  $a_n \rightarrow \frac{p_d}{q_m}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wohin dann  $\frac{b_n}{c_n}$  (uneigentlich) konvergiert, hängt dann am Verhalten von  $n^{d-m}$ . Falls  $d > m$  ist, geht  $n^{d-m}$  und damit ganz  $\frac{b_n}{c_n}$  gegen unendlich; falls  $d = m$  ist, ist  $\frac{b_n}{c_n} = a_n \rightarrow \frac{p_d}{q_m}$ ; falls  $d < m$  ist, ist  $n^{d-m}$  eine Nullfolge und somit auch  $\frac{b_n}{c_n}$ .

Noch eine Bezeichnung für besondere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ :

**Definition 3.3.6** (Intervalle). Seien  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  ist das offene Intervall von  $a$  bis  $b$
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  ist das abgeschlossene Intervall von  $a$  bis  $b$
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  ist das rechtsoffene Intervall von  $a$  bis  $b$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  ist das linksoffene Intervall von  $a$  bis  $b$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$  ist das offene Intervall von  $a$  bis  $\infty$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$  ist das linksgeschlossene Intervall von  $a$  bis  $\infty$
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$  ist das offene Intervall von  $-\infty$  bis  $b$
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$  ist das rechtsgeschlossene Intervall von  $-\infty$  bis  $b$

### 3.4 Vergleiche mit konvergenten Folgen

**Satz 3.4.1.** Seien  $a_n, b_n, c_n$  reelle Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

- (i) (Vergleichssatz) Gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \geq n_0$ , dann ist  $a \leq b$ .
- (ii) (Einschnürungssatz) Gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für alle  $n \geq n_0$  und gilt  $a = b$ , dann ist  $c_n$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .
- (iii) Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ .

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir: Aus  $a_n < b_n$  im obigen Kontext folgt nicht  $a < b$  sondern auch nur  $a \leq b$ , z.B. ist  $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$  für alle  $n$ , aber beide Folgen sind Nullfolgen.

*Beweis von Satz 3.4.1.* (i) Es ist

$$a - b \leq a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq |b - b_n| + |a_n - a|$$

für alle  $n \geq n_0$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Aus der Konvergenz von  $a_n$  und  $b_n$  folgt, dass ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  und  $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_1$  gilt. Somit gilt für  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$b - a \leq \epsilon.$$

### 3 Folgen

Da dies für alle  $\epsilon > 0$  gilt, folgt  $a \leq b$ .

(ii) Es gilt  $a_n - a \leq c_n - a \leq b_n - a$  für alle  $n_0 \in \mathbb{N}$  und somit  $|c_n - a| \leq \max\{|a_n - a|, |b_n - a|\} < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  mit  $n_1$  wie aus (i). Damit ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

(iii) Aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung Lemma 2.4.7 folgt  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ . Der Rest folgt dann mit der Konvergenz von  $a_n$  ähnlich wie oben.  $\square$

**Beispiel 3.4.2.** Wir wollen mittels des Einschnürungssatzes zeigen, dass  $c_n := \frac{n!}{n^n}$  eine Nullfolge ist. Es ist  $c_n \geq 0$  und

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n}}_{\leq 1 \text{ für } n \geq 2} \leq \frac{1}{n} \text{ für } n \geq 2.$$

Insgesamt also  $0 \leq c_n \leq \frac{1}{n}$  für alle  $n \geq 2$ . Aus dem Einschnürungssatz folgt nun, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

**Beispiel 3.4.3.** Sei nun  $a_n := \sqrt{n^2 + 1} - n$ . Es gilt  $a_n \geq 0$ . Als nächstes zeigen wir  $a_n \leq \frac{1}{2n}$ : Dafür beginnen wir mit  $0 \leq \frac{1}{4n^2}$ . Daraus folgt

$$n^2 + 1 \leq \frac{1}{4n^2} + 1 + n^2 = \left(\frac{1}{2n} + n\right)^2$$

und damit

$$\sqrt{n^2 + 1} \leq \frac{1}{2n} + n,$$

also die Behauptung.

Damit ist  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2n}$ , also  $a_n$  ist zwischen zwei Nullfolgen eingeschnürt und damit selber eine Nullfolge.\*

## 3.5 Intervallschachtelung

**Woche 3** Bis jetzt haben wir Folgen betrachtet, deren Konvergenz, haben Cauchyfolgen eingeführt und damit insbesondere die reellen Zahlen eingeführt. Wir haben die wichtigsten Rechenregeln und Vergleichsätze für konvergente Folgen kennengelernt. In den folgenden Abschnitten werden wir verschiedene oft auftretende weitere Methoden und Begriffe im Umfeld von Folgen kennenlernen.

Wir beginnen mit der Intervallschachtelung:

**Definition 3.5.1** (Intervallschachtelung). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $I_n := [a_n, b_n]$  ein abgeschlossenes Intervall (d.h. insbesondere  $a_n < b_n$ ). Wir nennen  $(I_n)_n$  eine *Intervallschachtelung*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

---

\* Alternative Methode ist dritte binomische Formel, also  $\sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .



- $I_{n+1} \subset I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|I_n| := b_n - a_n < \epsilon$ .

Man kann zeigen, siehe Übungsaufgabe 8, dass es zu jeder Intervallschachtelung  $(I_n)_n$  es genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  gibt. Insbesondere ist dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ .

Als eine Anwendung der Intervallschachtelung zeigen wir die Existenz der  $n$ -ten Wurzel aus einer nichtnegativen reellen Zahl:

**Satz 3.5.2** (Existenz der  $n$ -ten Wurzel). *Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Zu jedem  $a \geq 0$  gibt es genau ein  $x \geq 0$  mit  $x^n = a$ . Diese Lösung bezeichnen wir als  $n$ -te Wurzel aus  $a$  und schreiben  $\sqrt[n]{a}$  bzw.  $a^{\frac{1}{n}}$ .*

*Beweis.* Die Existenz der  $n$ -Wurzel zeigen wir mittels einer Intervallschachtelung, die wir wie folgt rekursiv konstruieren:  $I_0 = [0, \max\{1, a\}]$ . Damit gilt  $0 \leq z^n \leq \max\{1, a^n\}$  für alle  $z \in I_0$  und  $a \in [0, \max\{1, a^n\}]$ . Haben wir  $I_k = [a_k, b_k]$  konstruiert, setzen wir

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_{k+1} := a_k, b_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2}] & \text{falls } a_k^n \leq a \leq \left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)^n \\ [a_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2}, b_{k+1} := b_k] & \text{falls } \left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)^n < a \leq b_k^n \end{cases}$$

Da aus  $c \leq d$  folgt, dass  $c \leq \frac{c+d}{2} \leq d$  ist, haben wir  $I_{k+1} \subset I_k$ . Außerdem ist nach Konstruktion  $|I_{k+1}| = 2^{-1}|I_k| = 2^{-k-1}|I_0|$ . Damit ist  $|I_{k+1}|$  eine Nullfolge, und wir haben die Voraussetzungen einer Intervallschachtelung erfüllt. Damit gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k =: x \geq 0$ . Nach Definition von  $I_k$  gilt  $a_k^n \leq a \leq b_k^n$ . Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Einschnürungssatz ist somit  $x^n = a$ .

Bis jetzt haben wir Existenz gezeigt. Es fehlt noch die Eindeutigkeit: Seien  $x_1$  und  $x_2$  zwei nichtnegative Zahlen mit  $x_1^n = a = x_2^n$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Sei  $x_1 < x_2$ . (Der Fall  $x_2 > x_1$  wird analog funktionieren.) Dann ist

$$a = x_1^n = x_1^{n-1}x_1 < x_1^{n-1}x_2 < x_1^{n-2}x_2^2 < \dots < x_1x_2^{n-1} < x_2^n = a,$$

was den Widerspruch gibt. Also muss  $x_1 = x_2$  und die  $n$ -te Wurzel aus  $a$  somit eindeutig sein.  $\square$

Mit Hilfe der  $n$ -ten Wurzel können wir nun auch, Potenzen mit rationalen Exponenten definieren: Sei  $q = \frac{r}{s}$  mit  $r \in \mathbb{Z}$  und  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Dann setzen wir für  $a = 0$  und  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  immer  $a^q = 0^\dagger$  und für  $a > 0$  setzen wir

$$a^q := (a^r)^{\frac{1}{s}}.$$

Da eine rationale Zahl verschiedene Darstellungen als Bruch hat, müssen wir auch hier wieder überprüfen, dass dies wohldefiniert ist: Sei dazu  $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$ . Dann ist nach den Potenzgesetzen für ganzzahlige Exponenten:

$$((a^{r_1})^{\frac{1}{s_1}})^{s_1 s_2} = (((a^{r_1})^{\frac{1}{s_1}})^{s_1})^{s_2} = (a^{r_1})^{s_2} = a^{r_1 s_2} = a^{r_2 s_1} = \dots = (((a^{r_2})^{\frac{1}{s_2}})^{s_1 s_2})$$

\*  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \dots$ , also: Es ist genau dann  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ , wenn  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

†  $0^0$  ist im Allgemeinen nicht definiert.

### 3 Folgen

und somit nach Eindeutigkeit der  $n$ -ten Wurzel  $(a^{r_1})^{\frac{1}{s_1}} = (a^{r_2})^{\frac{1}{s_2}}$ .

Durch Verwenden der Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten kann man nachrechnen, dass für  $r, s \in \mathbb{Q}$ ,  $a, b > 0$  gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r b^r = (ab)^r.$$

Idee fürs Nachrechnen: Um diese Potenzgesetze nachzurechnen, will man die Gesetze für ganzzahlige Exponenten verwenden. D.h. statt direkt  $a^r a^s = a^{r+s}$  zu überprüfen, rechnet man (falls  $r = \frac{p_1}{q_1}$  und  $s = \frac{p_2}{q_2}$  für  $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ ) nach, dass  $(a^{\frac{p_1}{q_1}} a^{\frac{p_2}{q_2}})^{q_1 q_2} = (a^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}})^{q_1 q_2}$  gilt und benutzt dann die Eindeutigkeit der  $q_1 q_2$ -ten Wurzel. Das ist die Idee, die wir auch bei der Wohldefiniertheit unserer Definition von  $a^q$  verwendet haben.

Als eine weitere Anwendung der Intervallschachtelung kann man sich überlegen, dass jede reelle Zahl eine Darstellung als unendlicher Dezimalbruch hat. Diese Darstellung ist nicht zwingend eindeutig, z.B. ist  $0, \bar{9} := 0,99999 \dots = 1$  und auch  $4,31\bar{9} := 4,139999 \dots = 4,14$ , vgl. Übungsaufgabe 8. Wenn man allerdings keine abbrechenden Dezimalbrüche zulässt, als keine Darstellung, wo nach der einer Nachkommastelle  $b_m \neq 0$  nur noch Nullen folgen, sondern diese Nachkommastelle durch  $b_m - 1$  ersetzt und danach alle Kommastellen auf 9 setzt, ist die Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen eindeutig. Dann besitzt jede reelle Zahl eine eindeutige unendliche (nichtabrechende) Dezimalbruchdarstellung.

## 3.6 Konvergenzkriterium: Monoton und beschränkt

Eine Folge am Beispiel des Zinseszins: Einem Kunden wird eine ein jährlicher Zinssatz von  $p$  (entspricht  $p \cdot 100\%$ ) versprochen. Der Kunde legt 1 Euro an. Nach einem Jahr hat er  $1 + p$  Euro,  $\dots$ , nach  $r$  Jahren hat er  $(1 + p)^r$  Euro.

Woanders wird dem Kunden nun aber ein halbjährlicher Zins von  $\frac{p}{2}$  versprochen. Dann hat der Kunde nach einem halben Jahr  $1 + \frac{p}{2}$  Euro und nach einem ganzen Jahr  $(1 + \frac{p}{2})^2 = 1 + p + \frac{p^2}{4}$  Euro und damit mehr als die  $1 + p$  Euro vom ersten Fall.

Da denkt sich der Kunde wahrscheinlich, vielleicht findet sich jemand der mir nach  $\frac{1}{n}$ .tel eines Jahres einen Zinssatz von  $\frac{p}{n}$  verspricht. Dann hätte er nach einem Jahr  $(1 + \frac{p}{n})^n$  Euro. Vielleicht ist das ja mehr als für  $\frac{1}{n-1}$ .tel eines Jahres und man kann so (wenn man mal ignoriert, dass niemand das Jahr in beliebig kleine Teile aufteilen wird) vielleicht in nur einem Jahr beliebig viel Geld machen?

Das führt auf die Betrachtung der Folge  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Im Kontext des Zinseszins mag die Frage vielleicht noch etwas künstlich erscheinen, weil bei der Verzinsung die Zeitschritte einfach in der Realität nicht beliebig klein gewählt werden. Aber diese Folge kommt noch in zahlreichen Prozessen in der Natur vor – wann immer eine Größe  $u$  sich in jeder hinreichenden kleinen Zeitspanne  $\Delta t$  proportional zu dem vorhandenen  $u$  zur Zeit  $t$  und der Zeitspanne  $\Delta t$  ändert, also

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \alpha u(t) \Delta t,$$

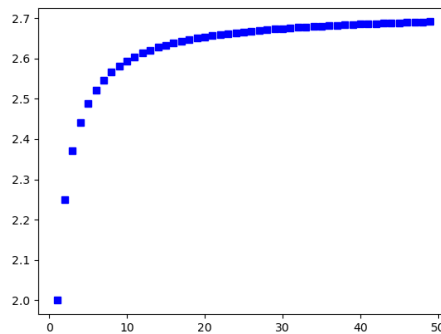
### 3.6 Konvergenzkriterium: Monoton und beschränkt

hierbei ist  $\alpha$  eine Konstante – der Proportionalitätsfaktor. Beispiele für solche Prozesse:

- Entwicklung der Bevölkerungszahl unter der Annahme, dass sich die Population mit einer konstanten Rate (=Geburtsrate-Todesrate) verändert.
- Zerfall radioaktiver Substanzen
- Temperaturdifferenz eines Körpers zur Umgebung, welche auf konstanter Temperatur gehalten wird.

Im Falle des Zinseszins wäre  $\alpha = p$  und  $\Delta t = \frac{1}{n}$ .

Wenn wir uns mal die ersten Folgenglieder anschauen, haben wir den Eindruck, dass die Folge immer wächst, aber nicht beliebig groß wird, sondern sich einem Wert (wahrscheinlich irgendwo nahe 2,7) annähert. Die Anschauung macht uns glauben, dass allgemein eine Folge die kontinuierlich wächst und von oben beschränkt ist einen Grenzwert haben sollte. Das wird auch so sein, wie wir bald zeigen werden.



Zuvor führen wir jedoch erst noch einige Begriffe ein:

**Definition 3.6.1.** Eine Funktion  $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- *monoton wachsend*, wenn für  $x, y \in S$  mit  $x < y$  folgt, dass  $f(x) \leq f(y)$  gilt.
- *streng monoton wachsend*, wenn für  $x, y \in S$  mit  $x < y$  folgt, dass  $f(x) < f(y)$  gilt.
- *monoton fallend*, wenn für  $x, y \in S$  mit  $x < y$  folgt, dass  $f(x) \geq f(y)$  gilt.
- *streng monoton fallend*, wenn für  $x, y \in S$  mit  $x < y$  folgt, dass  $f(x) > f(y)$  gilt.

**Beispiel 3.6.2.** Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sind die Funktionen  $f_n: x \in \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $g_n: x^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  streng monoton steigend:

Sei  $x < y$ . Dann ist  $x, y \geq 0$ . Falls  $x = 0$  ist, ist  $x^n = 0 < y^n$  klar. Für  $x, y > 0$  gilt  $f_n(x) = x^n < x^{n-1}y < x^{n-2}y^2 < \dots < y^n = f_n(y)$ .

Sei  $x < y$ . Um zu zeigen, dass  $g_n$  streng monoton wachsend ist, nehmen wir  $x^{\frac{1}{n}} \geq y^{\frac{1}{n}}$  an. Da alles nichtnegative Zahlen sind, folgt aus der Monotonie von  $f_n$ , dass  $x = (x^{\frac{1}{n}})^n \geq (y^{\frac{1}{n}})^n = y$ , was ein Widerspruch zu  $x < y$  wäre. Damit ist  $g_n$  streng monoton wachsend.

Da eine reelle Folge  $a_n$  einer Funktion  $a: \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ , entspricht, ergibt sich daraus, wann eine reelle Folge monoton wachsend, usw. ist:

### 3 Folgen

**Lemma 3.6.3.** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann monoton wachsend, falls  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Analoge Aussagen gelten für (streng) monoton wachsend/fallend.

*Beweis.* Sei  $a_n$  monoton wachsend. Dann folgt  $a_{n+1} \geq a_n$  aus  $n+1 \geq n$ .

Sei nun  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $n \geq m$ . Dann gibt es ein  $c \in \mathbb{N}$  mit  $n = m + c$  und wir haben  $a_n \geq a_{m+c-1} \geq a_{m+c-2} \geq \dots \geq a_m$ . Also ist  $a_n$  monoton wachsend.  $\square$

**Definition 3.6.4.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$ . Ein  $C \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq C$  für alle  $x \in M$  heißt *obere Schranke* von  $M$ .

Gibt es ein  $K \in \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften

- $K$  ist obere Schranke von  $M$
- Ist  $k < K$ , dann ist  $k$  keine obere Schranke von  $M$ ,

dann nennen wir  $K$  das Supremum von  $M$  und schreiben  $\sup M = K$ . Das Supremum ist also die kleinste obere Schranke von  $M$ .

Ist  $\sup M \in M$ , dann nennen wir  $\sup M$  das Maximum von  $M$  und schreiben  $\max M$ . Analog definieren wir *untere Schranken* und die größte untere Schranke von  $M$  – das *Infimum*  $\inf M$  von  $M$  und im Fall, dass  $\inf M \in M$  gilt, das *Minimum*  $\min M$  von  $M$ .

Sei  $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ . Dann ist  $\sup M = \max M = 1$ ,  $\inf M = 0$  und  $M$  besitzt kein Minimum, da es kein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} = 0$  gibt. Man sagt: Das Infimum von  $M$  wird nicht angenommen.

Dagegen gilt

**Satz 3.6.5.** Jede nicht-leere Menge  $M \subset \mathbb{Z}$ , die nach unten beschränkt ist, besitzt ein Minimum.

*Beweis.* Sei zunächst  $M \subset \mathbb{N}$ . Dann ist 0 eine untere Schranke für  $M$ . Ist  $0 \in M$ , dann ist 0 automatisch das Minimum und wir sind fertig. Ist  $0 \notin M$ , dann ist 1 eine untere Schranke von  $M$ . Ist  $1 \in M$ , so ist 1 das Minimum, wenn nicht ist 2 eine untere Schranke. So fahren wir weiter fort. Dieses Verfahren muss irgendwann abbrechen, da  $M$  nicht-leer ist, und es somit ein  $x \in M \subset \mathbb{N}$  existiert. Spätestens  $x+1$  kann dann keine untere Schranke mehr von  $M$  sein, d.h. irgendwann vorher müssen wir das Minimum von  $M$  gefunden haben.

Sei nun  $M \subset \mathbb{Z}$ . Da  $M$  nach unten beschränkt ist, gibt es eine untere Schranke  $b \in \mathbb{Z}$ . Wir betrachten  $M' := \{n - b \mid n \in M\}$ , Dann ist  $M' \subset \mathbb{N}$ , denn für  $n \in M$  folgt aus  $n \geq b$ , dass  $n - b \geq 0$  gilt. Da  $M'$  nicht-leer ist, folgt aus obigen Überlegungen, dass  $M'$  ein Minimum  $y := \min M'$  besitzt. Dann ist  $y + b = \min M$ .  $\square$

- Existenz einer oberen Schranke ist gleichbedeutend mit die Folge/Menge ist von oben beschränkt
- Gibt es eine obere Schranke für eine nicht-leere Menge  $M$  in  $\mathbb{R}$ , dann gibt es auch eine kleinste obere Schranke, also  $\sup M \in \mathbb{R}$  existiert.

### 3.6 Konvergenzkriterium: Monoton und beschränkt

*Beweis.* Sei  $C$  eine obere Schranke von  $M$  und  $x \in M$ . Wir konstruieren uns die kleinste obere Schranke durch eine Intervallschachtelung ähnlich wie in der Konstruktion der  $n$ -ten Wurzel.

Wir setzen  $a_0 = x$  und  $b_0 = C$ . Ist  $x = C$ , dann ist  $x$  automatisch die kleinste obere Schranke. Sonst definieren wir rekursiv folgende Intervalle: Ist  $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$  eine obere Schranke von  $M$ , so setzen wir  $a_{n+1} = a_n$  und  $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ . Falls nicht, setzen wir  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  und  $b_{n+1} = b_n$ . Dann haben wir eine Intervallschachtelung  $I_n := [a_n, b_n]$ , da nach Konstruktion  $I_{n+1} \subset I_n$  und  $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$  gilt. Somit gibt es ein  $a$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . Da alle  $b_n$  obere Schranken von  $M$  sind und alle  $a_n$  keine oberen Schranken sind, ist  $a$  die kleinste obere Schranke von  $M$ .  $\square$

Damit haben wir gesehen, dass eine von oben beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  immer ein Supremum in  $\mathbb{R}$  besitzt. Analog hat jede von unten beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$  immer ein Infimum. Diese Eigenschaft nennt man *Ordnungsvollständigkeit* der reellen Zahlen. Die rationalen Zahlen sind z.B. nicht ordnungsvollständig, da für eine beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  das Supremum zwar in  $\mathbb{R}$  existiert, aber nicht in  $\mathbb{Q}$  liegen muss.

Nun können wir unsere Vermutung zur Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen beweisen:

**Satz 3.6.6** (Konvergenzkriterium der Monotonie und Beschränktheit). *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Analog ist jede monoton fallend, nach unten beschränkte Folge konvergent.*

*Beweis.* Sei  $a_n$  die monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. D.h. es gibt das Supremum  $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Wir wollen zeigen, dass  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  gilt: Nach Definition des Supremums gilt  $a_n \leq a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$ , denn sonst wäre  $a - \epsilon$  eine obere Schranke von  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Da  $a_n$  monoton wachsend ist, folgt  $a - \epsilon < a_n \leq a$  und damit  $|a - a_n| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Also konvergiert  $a_n$  gegen  $a$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Dieses Kriterium wollen wir gerne auf die Folge  $(1 + \frac{1}{n})^n$  anwenden. D.h. wir müssen für diese Folge zeigen, dass sie monoton wachsend und von oben beschränkt ist. Dazu sammeln wir zuerst noch ein paar Hilfsmittel:

**Satz 3.6.7** (Binomialkoeffizienten und binomischer Satz). *Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}^*$  sind definiert durch<sup>†</sup>*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

*Es gilt*

---

\*Interpretation:  $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der Möglichkeiten  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge auszuwählen.

†Fakultät:  $n!$  ist die Anzahl der Möglichkeiten  $n$  verschiedene Elemente in eine Reihenfolge zu bringen:  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$  für  $n > 0$  und  $0! = 1$ .

### 3 Folgen

$$(i) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(ii) \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

$$(iii) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ für } a, b \in \mathbb{R} \text{ und somit insbesondere } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

$$(iv) \quad 2^{n-1} \leq n! \text{ für } n \geq 1$$

*Beweis.* (i) direkt aus Definition

(ii)+(iii)+(iv) Mittels vollständiger Induktion.  $\square$

**Beispiel 3.6.8.** Die Folge  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  konvergiert:

Wir zeigen, dass  $a_n$  monoton wachsend und beschränkt ist, dann wird die Konvergenz aus Satz 3.6.6 folgen:

*Monoton wachsend:*

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Mit der Bernoulli-Ungleichung  $(1+x)^m \geq 1+mx$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$ , vgl. Übungsaufgabe 7, angewendet für  $m = n+1$  und  $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$  folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

*Von oben beschränkt:*

Nach dem binomischen Satz gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Für  $1 \leq k \leq n$  gilt  $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{k!}$  und damit zusammen mit Satz 3.6.7(iv)

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \stackrel{j=k-1}{=} 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$$

Die rechte Seite ist gleich  $1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$ . Damit ist  $a_n$  durch 3 von oben beschränkt.

Damit wissen wir, dass  $a_n$  konvergiert, den Grenzwert nennen wir *Eulersche Zahl*  $e$ .

Nach dem Vergleichssatz 3.4.1 folgt  $e \leq 3$ . Wir werden später sehen, dass  $e$  eine irrationale Zahl ist.

## 3.7 Asymptotische Gleichheit

Vergleichen wir die uneigentlich konvergenten Folgen  $(n)_n$ ,  $(n+1)_n$  und  $(n^2)_n$ . Alle konvergieren gegen unendlich. Doch beim Blick auf den Graphen würden wir sagen, dass  $n^2$  'schneller gegen unendlich strebt' als die anderen beiden Folgen, wogegen  $n$  und  $n+1$  eher 'gleich schnell' gegen unendlich konvergieren. Diese Intuition wird durch den Begriff der asymptotischen Gleichheit erfasst:

**Definition 3.7.1.** Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  Folgen positiver reeller Zahlen. Dann nennen wir  $(a_n)$  und  $(b_n)$  *asymptotisch gleich* (geschrieben:  $a_n \sim b_n$ ), falls  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Asymptotische Gleichheit bilden eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Folgen positiver reeller Zahlen.

**Beispiel 3.7.2.** (i) Konvergieren  $a_n$  und  $b_n$  gegen den gleichen Grenzwert ungleich Null, so sind sie nach den Rechenregeln für konvergente Folgen automatisch asymptotisch gleich.

(ii)  $n+1$  und  $n$  sind asymptotisch gleich, da  $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(iii)  $n^2$  und  $n$  sind nicht asymptotisch gleich, da  $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(iv) Ist  $p$  ein Polynom vom Grad  $d$  und Leitkoeffizient  $a$ , dann ist  $p(n) \sim an^d$ : Sei  $p(n) = an^d + a_{d-1}n^{d-1} + \dots + a_1n + a_0$ . Dann ist

$$\frac{p(n)}{an^d} = 1 + \frac{a_{d-1}}{an} + \dots + \frac{a_1}{an^{d-1}} + \frac{a_0}{an^d} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Asymptotische Gleichheit wird auch verwendet, um die Laufzeit/Komplexität von Algorithmen in der Informatik zu vergleichen.

Interessant ist der Begriff der asymptotischen Gleichheit vor allem, wenn man Näherungswerte für eine Folge  $a_n$  für große  $n$  haben will, wo die Folgenglieder aber selbst aufwendig/langsam zu berechnen sind. Wenn man dann eine 'leichter/schneller berechenbare' Folge findet, die asymptotisch gleich ist, kann man diese nutzen um Näherungswerte zu erhalten. Ein Beispiel dafür ist die *Stirlingsche Formel*, die eine schnelle approximative Berechnung von  $n!$  für große  $n$  möglich macht:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Diese Formel werden wir jedoch erst später nachrechnen können.

## 3.8 Teilfolgen und Häufungspunkte

**Definition 3.8.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Wir nennen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine *Teilfolge* von  $(a_n)$ , falls es eine Folge  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen mit  $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$  gibt, so dass  $b_n = a_{i_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

### 3 Folgen

Sei  $a_n = (-1)^n$ . Dann sind  $b_n := a_{2n} = 1$ ,  $c_n := a_{2n+1} = -1$ ,  $d_n := a_{n^2} = (-1)^{(n^2)}$  Teilfolgen von  $a_n$ .

In Übungsaufgabe 6 sehen wir:

**Lemma 3.8.2.** *Jede Teilfolge einer (ggf. uneigentlich) konvergenten Folge konvergiert (ggf. uneigentlich) gegen den gleichen Grenzwert.*

Im Beispiel  $(-1)^n$  von oben haben wir gesehen, dass selbst, wenn eine Folge nicht konvergent ist, sie konvergente Teilfolgen besitzen kann:

**Definition 3.8.3.** Ein  $a \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist ein *Häufungspunkt* einer Folge  $(a_n)_n$ , wenn es eine gegen  $a$  (uneigentlich) konvergiierende Teilfolge von  $a_n$  gibt.

Die Folge  $(-1)^n$  war zwar nicht konvergent, aber sie hat zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und  $-1$ .

Um in Zukunft nicht mehr (wenn nicht unbedingt nötig) zwischen Konvergenz und uneigentlicher Konvergenz unterscheiden zu müssen, setzen wir  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  und sagen, dass eine Folge *in  $\mathbb{R}$  konvergiert*, falls sie uneigentlich oder in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

**Lemma 3.8.4.** *Eine Folge ist genau dann von oben (bzw. von unten) nicht beschränkt (man sagt auch unbeschränkt, wenn  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ) ein Häufungspunkt der Folge ist.*

*Beweis.* Sei  $(a_n)_n$  eine Folge. Sei zunächst  $\infty$  ein Häufungspunkt von  $a_n$ . Dann gibt es eine gegen unendlich uneigentlich konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_k$  von  $a_n$ . D.h. insbesondere gibt es für alle  $K > 0$  ein  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_\ell} > K$ . Damit kann kein  $K$  eine obere Schranke von  $a_n$  sein und somit ist  $a_n$  nicht von oben beschränkt.

Sei nun  $(a_n)_n$  nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > 0$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_k} > k$ . Damit ist insbesondere  $a_{n_j} > k$  für alle  $j \geq k$  und  $(a_{n_k})_k$  ist eine nach unendlich konvergiierende Teilfolge.  $\square$

Wir hatten gesehen, dass jede monotone beschränkte Folge konvergiert. Wenn wir das monoton weglassen, muss die Folge im Allgemeinen nicht mehr konvergieren, aber wir haben:

**Satz 3.8.5** (Bolzano-Weierstrass). *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Sei  $a_n$  die beschränkte Folge. Sei  $b_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ . Dann gilt  $b_n \leq b_{n+1}$ .  $b_n$  ist also eine monotone Folge. Da  $a_n$  beschränkt ist, gibt es ein  $C > 0$  mit  $|a_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist auch  $|b_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $b_n$  ist beschränkt. Nach Satz 3.6.6 ist  $b_n$  damit konvergent. Der Grenzwert heiße  $b$ .

Nun wird  $b_n$  im Allgemeinen keine Teilfolge von  $a_n$  sein (das ist nur der Fall, wenn das Infimum in der Definition angenommen wird, also schon ein Minimum ist). Aber selbst wenn  $b_n$  kein Folgenglied von  $(a_m)_m$  ist, wird es nach Definition des Infimums immer Folgenglieder  $a_m$  geben, die beliebig nahe an  $b_n$  sind:

- Sei  $n_1$  derart, dass  $a_{n_1} \leq b_{n_1} + 1$  gilt.



### 3.8 Teilfolgen und Häufungspunkte

- Sei  $n_2 > n_1$  derart, dass  $a_{n_2} \leq b_{n_2} + \frac{1}{2}$  gilt.
- Sei  $n_3 > n_2$  derart, dass  $a_{n_3} \leq b_{n_3} + \frac{1}{3}$  gilt.

Solche  $n_i$  existieren, weil nach der Definition des Infimums  $b_{n_{i-1}+1} + \frac{1}{i}$  keine untere Schranke an die Menge  $\{a_{n_{i-1}+1}, a_{n_{i-1}+2}, \dots\}$  sein darf. Somit ist

$$b_{n_i} \stackrel{\text{Def. von } b_{n_i}}{\leq} a_{n_i} \stackrel{\text{Wahl der } a_{n_i}}{\leq} b_{n_i} + \frac{1}{i}.$$

Nach dem Einschnürungssatz 3.4.1 ist somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_i} = b$ . □

**Folgerung 3.8.6.** Jede reelle Folge hat einen Häufungspunkt in  $\bar{\mathbb{R}}$ .

*Beweis.* Folgt direkt aus Bolzano-Weierstrass zusammen mit Lemma 3.8.4. □

Das  $b$ , welches wir in obigem Beweis vom Bolzano-Weierstrass als Grenzwert von  $b_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$  gefunden haben, ist der kleinste Häufungspunkt von  $a_n$ .

*Beweis.* Sei  $c < b$  auch ein Häufungspunkt von  $a_n$ . Sei  $\epsilon = \frac{b-c}{2} > 0$ . Da  $b_n \rightarrow b$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $b_n > b - \epsilon$  für  $n \geq n_0$ . Wegen  $a_n \geq b_n$  ist somit  $a_n > b - \epsilon = c + \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Somit kann  $c$  kein Häufungspunkt von  $a_n$  sein. □

**Definition 3.8.7.** Sei  $a_n$  eine reelle Folge. Wir definieren den *Limes inferior* von  $a_n$  als den kleinsten Häufungspunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  von  $a_n$  – geschrieben  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Analog wird der *Limes superior* von  $a_n$  als der größte Häufungspunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  von  $a_n$  definiert – geschrieben  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Schauen wir uns einige Beispiele an: Sei  $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$  für  $n > 0$ . Dann sind 0 und 1 alle Häufungspunkte, also  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Zum Vergleich:  $\sup\{a_1, a_2, \dots\} = \frac{3}{2}$  und  $\inf\{a_1, a_2, \dots\} = -1$ .

Als zweites Beispiel sei  $b_n = (-1)^n n$ . Das hat zwei Häufungspunkte:  $\infty$  und  $-\infty$ .

**Lemma 3.8.8.** Sei  $(a_n)_n$  eine Folge und  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Folge  $a_n$  konvergiert in  $\bar{\mathbb{R}}$  gegen  $a$ .
- (ii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .
- (iii)  $a$  ist der einzige Häufungspunkt von  $a_n$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist direkt klar nach Definition. Aus folgt nach Lemma 3.8.2, dass aus (i) aus (iii) folgt. Sei nun  $a$  der einzige Häufungspunkt von  $a_n$ . Wir wollen zeigen, dass  $a$  dann auch der Grenzwert von  $a_n$  ist. Wir betrachten hier nur den Fall, dass  $a \in \mathbb{R}$  ist. Der Fall  $a \in \{\pm\infty\}$  geht ähnlich und den lassen wir zur Übung.

### 3 Folgen

Da  $a \in \mathbb{R}$  der einzige Häufungspunkt ist, ist  $a_n$  nach Lemma 3.8.4 insbesondere beschränkt.

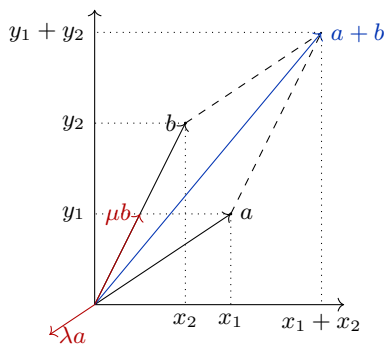
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch: Sei  $a$  nicht Grenzwert von  $a_n$ , dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass es für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $m_n > n$  mit  $|a_{m_n} - a| > \epsilon$  existiert. Die Folge  $(a_{m_n})_n$  ist nun eine Teilfolge von  $a_n$  und noch immer beschränkt. Sie hat also nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge  $b_k$ . Doch für alle diese  $b_k$  gilt  $|b_k - a| > \epsilon$ . Damit kann der Grenzwert von  $b_k$  nicht  $a$  sein und somit ist  $a$  nicht der einzige Häufungspunkt von  $a_n$ , was unser Widerspruch ist.  $\square$

## 3.9 Folgen im $\mathbb{R}^n$

Für die reellen Zahlen haben wir uns die Zahlengerade als Modell vorgestellt, für  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stellen wir uns die Ebene vor, für den  $\mathbb{R}^3$  stellen wir uns den dreidimensionalen Raum vor.

Der  $\mathbb{R}^n$  ist dann die Verallgemeinerung

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$



Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es die Addition

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x, y) \mapsto x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

und die skalare Multiplikation<sup>a</sup>

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Im Fall  $n = 1$  ist die skalare Multiplikation einfach die 'normale' Multiplikation auf  $\mathbb{R}$  mit der  $\mathbb{R}$  sogar ein Körper ist.

Auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir auch eine Verallgemeinerung des Betrages auf  $\mathbb{R}$ :

**Definition 3.9.1.** Die *euklidische Norm* eines  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Der *euklidische Abstand* von  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist  $|x - y|$ . Das *euklidische Skalarprodukt* von  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

<sup>a</sup>Vgl. Lineare Algebra: Mit dieser Addition und skalaren Multiplikation ist  $\mathbb{R}^n$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Wir sammeln ein paar wichtigsten Eigenschaften der euklidischen Norm und des euklidischen Skalarprodukt:

**Lemma 3.9.2.** Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt

- (i) (Positivität)  $\langle x, x \rangle = |x|^2 \geq 0$  und es gilt genau dann Gleichheit, wenn  $x = 0$  ist.
- (ii) (Symmetrie)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (iii) (Bilinearität)  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$  und  $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$
- (iv) (Homogenität)  $|\lambda x| = |\lambda| |x|$
- (v) (Dreiecksungleichung)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  In der Dreiecksungleichung gilt Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  gleichsinnig parallel sind, d.h. es gibt ein  $\lambda \geq 0$  mit  $x = \lambda y$  oder  $y = \lambda x$ .

*Beweis.* (i)  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ , da jedes  $x_i^2 \geq 0$  ist. Für Gleichheit muss  $x_i^2 = 0$  und damit  $x_i = 0$  für alle  $i$  gelten.

(ii) - (iv) können direkt nachgerechnet werden

Den Beweis von (v) stellen wir kurz zurück. Dafür brauchen wir noch folgende oft auftretende Ungleichung.  $\square$

**Lemma 3.9.3** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind. (Die Vektoren  $x$  und  $y$  wären **linear unabhängig**, wenn aus  $\lambda x + \mu y = 0$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  schon folgt, dass  $\lambda = \mu = 0$  ist. \*)

*Beweis.* Sobald  $x$  oder  $y$  gleich  $0 \in \mathbb{R}^n$  ist, ist die Ungleichung wahr und es gilt sogar Gleichheit. Sei nun sowohl  $x$  als auch  $y$  ungleich Null. Dann ist

$$0 \leq \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|^2 = \left\langle \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right\rangle = 2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|}$$

und somit  $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$ . Aus  $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$  für alle  $x, y$ , folgt  $-\langle x, y \rangle = \langle -x, y \rangle \leq |-x| |y| = |x| |y|$  und damit zusammen  $|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$ .

Insgesamt gilt Gleichheit also genau dann, wenn in den auftretenden Ungleichungen Gleichheit gilt, also wenn  $0 = \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|^2$  oder  $0 = \left| \frac{-x}{|-x|} - \frac{y}{|y|} \right|^2$  gilt. Insgesamt also, wenn  $\frac{x}{|x|} = \pm \frac{y}{|y|}$  gilt.  $\square$

---

\* Anders gesagt: Zwei Elemente in  $\mathbb{R}^n$  sind linear unabhängig, wenn keines ein reelles Vielfaches des anderen ist.

<sup>†</sup> Wenn wir  $0 \in \mathbb{R}^n$  schreiben, meinen wir den Nullvektor, also  $0 = (0, \dots, 0)$ .

### 3 Folgen

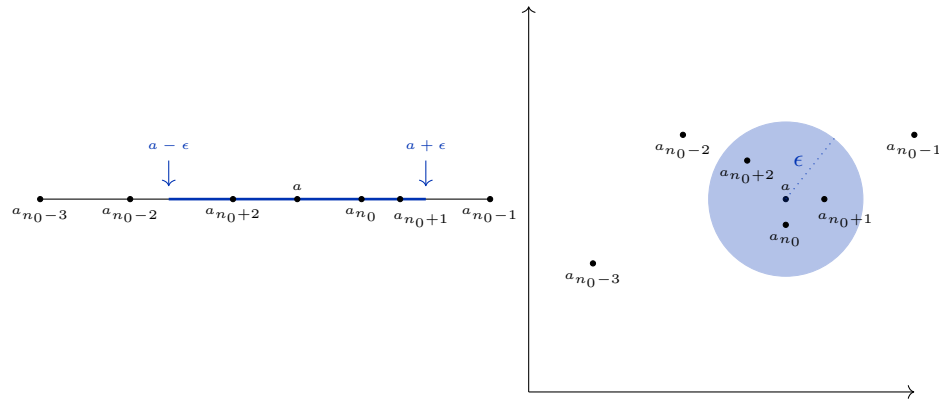


Abbildung 3.2: In  $\mathbb{R}^n$  konvergiert  $a_n$  gegen  $a$ , falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_0$  gibt, so dass ab  $n_0$  alle Folgenglieder im Inneren des blauen Balles um  $a$  mit Radius  $\epsilon$  liegen.

*Beweis der obigen Dreiecksungleichung.* Mit Cauchy-Schwarz haben wir

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

und damit

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$  und Gleichheit in Cauchy-Schwarz gilt, also genau dann wenn es ein  $\lambda$  gibt mit  $x = \lambda y$  oder  $y = \lambda x$  gibt und  $\square$

#### 3.9.1 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

**Definition 3.9.4** (Konvergenz von Folgen im  $\mathbb{R}^n$ ). Eine Folge  $(a_k)_k$  in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}^n$ , falls für alle  $\epsilon > 0$  es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_k - a| < \epsilon$  für alle  $k \geq k_0$  gilt.

Eine Folge  $(a_k)_k$  in  $\mathbb{R}^n$  ist eine *Cauchyfolge*, falls für alle  $\epsilon > 0$  es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_k - a_m| < \epsilon$  für alle  $m, k \geq k_0$  gilt.

Die Definitionen der Konvergenz sind also im  $\mathbb{R}^n$  also für  $n$  gleich. In Abbildung 3.2 ist es für  $n = 1$  und  $n = 2$  veranschaulicht.

Der Ball um  $a$  mit Radius  $\epsilon$ , auch  $\epsilon$ -Umgebung um  $a$  genannt, ist die Menge

$$B_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \epsilon\}.$$

In  $\mathbb{R}$  ist dieser Ball das Intervall  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Wenn man  $a$  aus diesem Intervall herausnimmt, zerfällt das Intervall in einen 'linken' und einen 'rechten' Teil. Das ist aber eine Besonderheit von  $\mathbb{R}$ .

Auch Beschränktheit wird ganz analog eingeführt wie in  $\mathbb{R}$ :

### 3.9 Folgen im $\mathbb{R}^n$

**Definition 3.9.5** (Beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ ). Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $C > 0$  mit  $|x| \leq C$  für alle  $x \in M$  gibt.

Aber es gibt kein 'von oben beschränkt' oder 'von unten beschränkt' im  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$ ! Es gilt mit dem gleichen Beweis wie in  $\mathbb{R}$ , vgl. Lemma 3.1.9 und Satz 3.1.5:

**Lemma 3.9.6.** *Jede konvergente Folge im  $\mathbb{R}^n$  ist beschränkt und eine Cauchyfolge. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Das auch jede Cauchyfolge im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert, folgt direkt aus folgender Charakterisierung der Konvergenz von Folgen im  $\mathbb{R}^n$ :

**Satz 3.9.7.** *Eine Folge  $(a_k)_k$  im  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann konvergent/beschränkt/Cauchyfolge, falls für alle  $i = 1, \dots, n$  die Folgen in  $\mathbb{R}$ , die aus den  $i$ -Koordinaten gebildet werden, also  $((a_k)_i)_k$ , konvergent/beschränkt/Cauchyfolgen sind.*

*Beweis.* Ist  $(a_k)_k$  konvergent/beschränkt/Cauchyfolge, dann folgt die entsprechende Eigenschaft für die Koordinatenfolgen aus  $|x_i| \leq |x| = |(x_1, \dots, x_n)|$  für alle  $i$ .

Sei nun  $((a_k)_i)_k$  für alle  $i = 1, \dots, n$  konvergent mit Grenzwert  $b_i$ . D.h. für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $k_i \in \mathbb{N}$  mit  $|(a_k)_i - b_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$  für alle  $k > k_i$ . Wir setzen  $b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$|a_k - b|^2 = \sum_{i=1}^n ((a_k)_i - b_i)^2 < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^2}{n} = \epsilon^2$$

und somit  $|a_k - b| < \epsilon$  für alle  $k > \max\{k_1, \dots, k_n\}$ .

Das Argument für Cauchyfolgen geht ganz analog.

Sei nun  $((a_k)_i)_k$  für alle  $i = 1, \dots, n$  beschränkt. Dann gibt es für alle  $i = 1, \dots, n$  ein  $C_i > 0$  mit  $|(a_k)_i| \leq C_i$  für alle  $k$ . Somit ist für alle  $k$

$$|a_k|^2 = \sum_{i=1}^n |(a_k)_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n C_i^2 =: C.$$

Also ist  $(a_k)_k$  beschränkt. □

**Folgerung 3.9.8.** *Der  $\mathbb{R}^n$  ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert.*

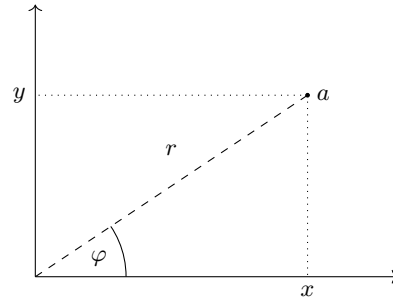
*Beweis.* Nach letztem Satz ist eine Folge  $(a_k)_k$  in  $\mathbb{R}^n$  genau dann eine Cauchyfolge, wenn alle Koordinatenfolgen  $((a_k)_i)_k$  Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}$  sind. In  $\mathbb{R}$  konvergieren aber alle Cauchyfolgen, woraus aus dem letzten Satz wieder folgt, dass schon  $(a_k)_k$  konvergiert. □

### 3.9.2 Einführung komplexer Zahlen

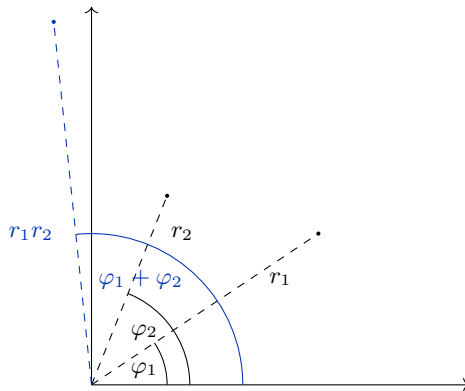
**Woche 4** Im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  haben wir für allgemeines  $n > 1$  der  $\mathbb{R}^n$  keine Multiplikation  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sondern nur eine skalare Multiplikation  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die im Falle von  $n = 1$  genau der Multiplikation reeller Zahlen entspricht.

Es gibt aber einen Sonderfall – der Fall  $n = 2$ . Dort kann man eine Multiplikation definieren. Wir schauen uns hier mal die Idee dazu an:

Eine Zahl  $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  kann man, wenn als Vektor gesehen, eindeutig durch den Radius des Vektors und den Winkel  $\in [0, 2\pi)$  zur positiven Hälfte der  $x$ -Achse charakterisieren. Wenn wir mal kurz an den Sinus und den Kosinus aus der Schule erinnern, auch wenn diese in der Analysis erst noch definiert werden müssen, dann ist  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .



Anschaulich erhält man eine Multiplikation auf  $\mathbb{R}^2$  wie folgt: Das Produkt zweier Vektoren im  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  soll der Vektor sein, dessen Radius dem Produkt der Radien der beiden Faktoren ist und dessen Winkel zur  $x$ -Achse der Summe der Winkel der beiden Faktoren entspricht bzw. wenn diese Summe  $\geq 2\pi$  ist, dann der Summe der Winkel minus  $2\pi$ . Weiterhin soll das Produkt mit dem Nullvektor immer wieder der Nullvektor sein.



Definieren kann man ja viel, die Frage ist natürlich, ob diese Abbildung Eigenschaften hat, die man von einer Multiplikation so erwarten würde (vgl. Körperdefinition).

Und wir sehen direkt an der Definition: Diese Multiplikation ist kommutativ, assoziativ, hat als neutrales Element  $a = (1, 0) = (1 \cos 0, 1 \sin 0)$ . Jede  $a = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  hat ein inverses Element:  $(r^{-1} \cos(-\varphi), r^{-1} \sin \varphi)$ .

Auch das Distributivgesetz kann man nachrechnen. Jedoch sollte man sich vorher überlegen, was die Anschauung eigentlich genau für die Koordinaten des Produkts bedeutet: Sei also  $a = (x_1 = r_1 \cos \varphi_1, y_1 = r_1 \sin \varphi_1)$  und  $b = (x_2 = r_2 \cos \varphi_2, y_2 = r_2 \sin \varphi_2)$ .

Dann ist mit den Additionstheoremen für Kosinus und Sinus

$$\begin{aligned} ab &= (r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2), r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= (r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, r_1 r_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + r_1 r_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Insgesamt kann man nachrechnen, dass  $\mathbb{R}^2$  mit der Standardaddition und dieser Multiplikation wirklich zu einem Körper wird:

**Satz 3.9.9.** Die Menge  $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  mit der Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v), \\ (x, y) \cdot (u, v) &:= (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

bildet einen Körper – den Körper der komplexen Zahlen.

**Notation:**

- Statt  $(x, 0) \in \mathbb{C}$ , schreiben wir einfach  $x$ , und fassen so  $\mathbb{R}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf.
- $i := (0, 1)$  – die *imaginäre Einheit*. Multiplikation mit  $i$  entspricht einer Drehung des Vektors um  $90^\circ$  in mathematisch positive Richtung (=entgegen dem Uhrzeigersinn)
- Wir schreiben  $(x, y) = x + iy$ .
- Für  $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$  nennen wir  $\operatorname{Re} z := x$  den *Realteil* von  $z$  und  $\operatorname{Im} z := y$  den *Imaginärteil* von  $z$ .

Dass man statt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  nun  $x + iy \in \mathbb{C}$  schreibt, ist erst einmal nur eine Konvention mit der man insbesondere verdeutlicht, dass man komplexe Zahlen, also Elemente in  $\mathbb{C}$  nun multiplizieren kann. In dieser Schreibweise für komplexe Zahlen lautet die Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= xu - yv + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $i^2 = -1$ , und das ist auch der Grund, warum man komplexe Zahlen einführt (also warum man auf  $\mathbb{R}^2$  eine Multiplikation einführt): Die Gleichung  $x^2 = -1$  hatte in den reellen Zahlen keine Lösung, aber in den komplexen Zahlen sogar zwei Lösungen:  $i$  und  $-i$ .

Man rechnet mit den komplexen Zahlen im Distributivgesetz im Prinzip wie mit den reellen Zahlen nur unter Verwendung von  $i^2 = -1$ , also

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = xu + iyu + xiv + i^2 yv = xu - yv + i(yu + xv).$$

### 3 Folgen

Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist einfach die euklidische Norm als Vektor im  $\mathbb{R}^2$ , also  $|z = x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , das wäre der Radius des zugehörigen Vektors.

Zwar ist  $\mathbb{C}$  ein Körper, wie auch schon die rationalen und reellen Zahlen, aber er kann nicht angeordnet werden, d.h. es gibt keine Ordnungsrelation  $\leq$  auf  $\mathbb{C}$ , die ihn zu einem angeordneten Körper, vgl. Definition 2.5.3, macht:

*Beweis.* Nehmen wir an, es gäbe eine Ordnungsrelation  $\leq$ , die  $\mathbb{C}$  zu einem angeordneten Körper macht. Wir schreiben wieder  $a < b$ , falls  $a \leq b$  und  $a \neq b$  gilt. Wir überlegen uns zuerst, dass in einem angeordneten Körper immer  $a^2 \geq 0$  gilt: Für  $a = 0$  ist das richtig. Sei nun  $a \neq 0$ . Da die Ordnung total ist, muss dann  $0 < a$  oder  $a < 0$ , also  $0 < -a$ , gelten. Mit der Definition eines angeordneten Körpers folgt dann  $0 = 0 \cdot 0 < aa = a^2$  oder  $0 = 0 \cdot 0 < (-a)(-a) = a^2$ . In allen Fällen ist also  $0 \leq a^2$  und damit auch insbesondere  $0 \leq 1^2 = 1$  und  $0 \leq i^2 = -1$ , was den Widerspruch gibt.  $\square$

Es gibt noch eine weitere wichtige Operation auf  $\mathbb{C}$  – die *komplexe Konjugation*.

**Definition 3.9.10.** Die Abbildung  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy$ , heißt *komplexe Konjugation* und  $\bar{z}$  ist das *komplex Konjugierte* von  $z$ .

Anschaulich ist die komplexe Konjugation die Spiegelung an der  $x$ -Achse und ist nicht zu verwechseln mit  $z \mapsto -z$ , was der Drehung um  $180^\circ$  um den Ursprung entspricht.

Durch einfaches Nachrechnen sieht man direkt:

**Lemma 3.9.11.** Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

- |  |  |
|--|--|
| (i) $\bar{\bar{z}} = z$                              | (ii) $z\bar{z} =  z ^2$                                |
| (iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ | (iv) $ z  =  \bar{z} $                                 |
| (v) $ z \cdot w  =  z  \cdot  w $                    | (vi) $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ |
| (vii) $ z + w  \leq  z  +  w $                       |  |

**Beispiel 3.9.12.** Für  $z \neq 0$  ist  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = |z|^{-2}\bar{z}$ . Gehört zu  $z$  der Vektor mit Radius  $r$  und Winkel  $\varphi$ . Dann ist  $\frac{1}{z}$  der Vektor mit Radius  $r^{-1}$  und Winkel  $2\pi - \varphi$ . Zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

**Folgen komplexer Zahlen** Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert, wenn sie aufgefasst als Folge in  $\mathbb{R}^2$  konvergiert.

Z.B. ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 0$ , da  $\left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Für Folgen in  $\mathbb{R}^2$  hatten wir gesehen, dass eine Folge in  $\mathbb{R}^2$  genau dann konvergiert, wenn sie koordinatenweise konvergiert. In der Sprache für komplexe Zahlen heißt das:

**Lemma 3.9.13.** Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Realteile und die Folge ihrer Imaginärteile konvergiert.



### 3.10 Einschub: Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit

Man kann sich wie in den reellen Zahlen überlegen, dass die Summe zweier konvergenter komplexer Folgen auch wieder konvergiert. Das stimmt auch für Folgen im  $\mathbb{R}^n$ . Da wir allerdings in den komplexen Zahlen auch eine Multiplikation auf  $\mathbb{C}$  haben, können wir komplexe Folgen auch multiplizieren. Es gelten dann (mit gleichem Beweis) die Rechenregeln für konvergente Folgen wie in Satz 3.2.1.

Wir definieren keinen Begriff von uneigentlicher Konvergenz für komplexe Folgen (oder allgemeiner für Folgen in  $\mathbb{R}^n$ ).

**Wozu komplexe Zahlen?** Die erste Anwendung werden Sie wahrscheinlich in lineare Algebra sehen – beim Lösen polynomialer Gleichungen.

Ein *komplexes Polynom* ist analog zu reellen Polynomen definiert, vgl. Definition 3.2.3,  $p(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i$  mit  $a_i \in \mathbb{C}$ . Ist  $a_d \neq 0$ , so heißt  $d$  *Grad* des Polynoms und  $a_d$  *Leitkoeffizient*.

**Satz 3.9.14** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vom Grad  $d$  mit Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{C}$  zerfällt in Linearfaktoren, d.h. es gilt*

$$p(z) = a_d(z - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_k)^{\nu_k}$$

*für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Hierbei sind die  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  die Nullstellen von  $p$  und die  $\nu_i \geq 1$ ,  $\nu_i \in \mathbb{N}$ , die Vielfachheiten dieser Nullstellen mit  $\nu_1 + \dots + \nu_k = n$ .*

Diesen Satz werden wir erst in Analysis II beweisen.

Weitere Anwendungen der komplexen Zahlen:

- Rotationen im  $\mathbb{R}^2$  zu kodieren. Das macht das Rechnen leichter.
- In der Elektrotechnik zur Berechnung von Widerständen in Wechselstromkreisen, zur Berechnung von Wechselstrom.
- In der Quantenmechanik
- Allgemein als Rechenhilfsmittel

## 3.10 Einschub: Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit

Für zwei endliche Mengen, also Mengen mit endlich vielen Elementen, können wir die Anzahl der Elemente zählen und so sagen, wann beide gleich viele Elemente beinhalten. Andererseits haben wir bis jetzt verschiedene unendliche Menge kennengelernt, insbesondere  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ . Unendlich ist klar mehr als endlich. Aber enthalten diese Mengen 'gleich viele' Elemente – ist 'unendlich = unendlich' oder gibt es da 'Qualitätsunterschiede'? Wie kann man das messen?

Denken wir wieder an endliche Mengen: Wie kann man herausfinden, ob zwei Mengen gleich viele Elemente beinhalten, ohne die Anzahl wirklich zu zählen? Vgl. Abbildung 3.3. Diese Idee wollen wir auch für unendliche Mengen verwenden:

### 3 Folgen

**Definition 3.10.1.** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt. Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist. Eine Menge mit unendlich vielen Elementen, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Ist  $M$  abzählbar, dann gibt eine bijektive  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$  insbesondere eine Möglichkeit die Elemente in  $M$  durchnummerieren, also abzuzählen, – also  $f(0)$  als erstes Element,  $f(1)$  als zweites Element, etc.

**Beispiel 3.10.2.** (i) Ist  $A$  eine Menge mit genau  $n$  Elementen und  $B$  gleichmächtig zu  $A$ , dann muss auch  $B$  genau  $n$  Elemente enthalten.

(ii)  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  sind gleichmächtig, da  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $n \mapsto n + 1$ , bijektiv ist.

(iii)  $\mathbb{N}$  und  $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  sind gleichmächtig, da  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $n \mapsto 2n$ , bijektiv ist.

(iv)  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  sind gleichmächtig, da

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{für } n \geq 0 \\ 2(-n) - 1 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

**Satz 3.10.3.** (i) Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

(ii) Sei  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist die Vereinigung

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k := \{x \mid x \in M_\ell \text{ für } \ell \in \mathbb{N}\}$$

wieder abzählbar. Insbesondere ist die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen wieder abzählbar.

Bevor wir diesen Satz beweisen, zeigen wir direkt eine Folgerung:

**Folgerung 3.10.4.**  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar

*Beweis.* Aus Satz 3.10.3(ii) folgt, dass  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist, denn  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \times \{n\}$  ist eine Vereinigung von abzählbaren Mengen. Wir können  $\mathbb{Q}$  wie folgt als Teilmenge von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  auffassen: Für  $q \in \mathbb{Q}$ , sei  $q = \frac{r}{s}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , eine Darstellung von  $q$ , so dass  $|r|$  und  $s$  teilerfremd sind (das kann durch Kürzen immer erreicht werden). Diese Darstellung ist eindeutig und somit ist die Abbildung  $\iota: q \in \mathbb{Q} \mapsto (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$  injektiv und damit bijektiv aufs Bild  $\iota(\mathbb{Q})$ . Andererseits ist  $\mathbb{Q}$  und damit  $\iota(\mathbb{Q})$  aber eine unendliche Menge. Somit ist nach Satz 3.10.3(i)  $\iota(\mathbb{Q})$  und damit  $\mathbb{Q}$  abzählbar.  $\square$

### 3.10 Einschub: Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit

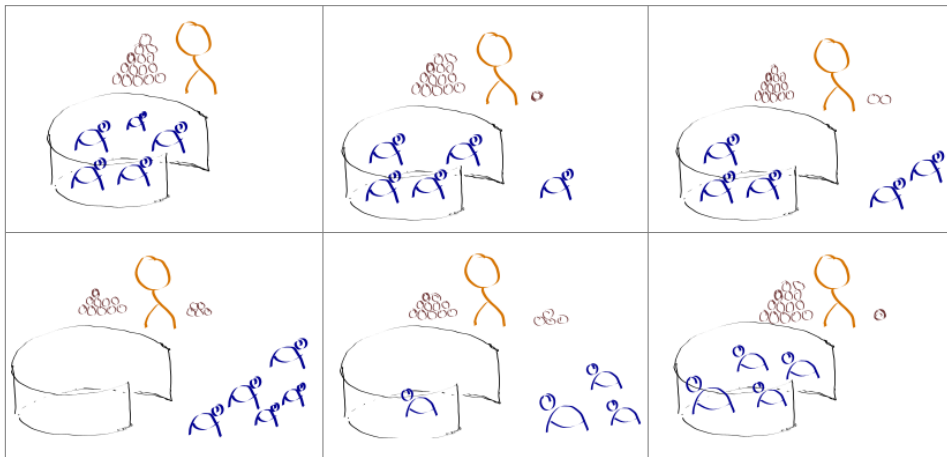


Abbildung 3.3: Wir haben eine Menge von Schafen, die tagsüber den Stall verlassen und abends wiederkommen. Um ohne Zählwörter zu verwenden herauszufinden, ob es abends noch genauso viele Schafe zurückgekommen sind, verwenden wir Steine. Sobald ein Schaf den Stall verlässt, legen wir einen Stein beiseite. Damit haben wir nachdem das letzte Schaf den Stall verlassen hat, genauso viele Steine beiseite gelegt, wie wir Schafe hatten. Wir haben eine Bijektion zwischen der Menge dieser Steine und der Menge der Schafe konstruiert.

### 3 Folgen

*Beweis von Satz 3.10.3.* (i) Sei  $M$  abzählbar und  $A \subset M$  unendliche Teilmenge. Wir nehmen eine Durchnummerierung von  $M = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ . Sei nun  $i_1 \in \mathbb{N}$  das kleinste  $i$  mit  $a_i \in A$ . Sei  $i_2 \in \mathbb{N}$  das kleinste  $i$  mit  $i > i_1$  und  $a_i \in A$ , usw. Dann ist  $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$  eine Durchnummerierung der Elemente von  $A$  und ergibt eine Bijektion  $f: \mathbb{N} \rightarrow A, j \mapsto a_{i_j}$ . Also ist  $A$  abzählbar.

(ii) Für jede Menge  $M_k$  wählen wir eine Durchnummerierung  $M_k = \{a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \dots\}$ . Nun können wir eine Durchnummerierung von  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$  durch folgendes Schema erreichen:

$$\begin{array}{lcl}
 M_1 & = & \{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, \dots \} \\
 M_2 & = & \{ a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, \dots \} \\
 M_3 & = & \{ a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, \dots \} \\
 M_4 & = & \{ a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, a_{46}, \dots \} \\
 M_5 & = & \{ a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{55}, a_{56}, \dots \} \\
 M_6 & = & \{ a_{61}, \dots \}
 \end{array}$$

Hierbei wird jedes Element übersprungen, was in zuvor schon einmal vorkam. Dieses Schema des Abzählens nennt man *Cantorsches Diagonalverfahren*.

Also ist  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$  abzählbar. Da  $M_1 \cup M_2$  eine unendliche Teilmenge von  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$  ist, ist es nach (i) auch abzählbar.  $\square$

Wir haben bis jetzt viele abzählbare Mengen gesehen, aber gibt es auch überabzählbare?

**Satz 3.10.5.** *Die Menge der Folgen in  $\{0, 1\}$  ist überabzählbar.*

*Beweis.* Sei  $M$  die Menge der Folgen in  $\{0, 1\}$ . Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei also  $M$  abzählbar, d.h. wir haben eine Durchnummerierung  $M = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ . Jedes  $a_n$  ist eine Folge in  $\{0, 1\}$  – sei also  $a_n = (b_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $b_{ni} \in \{0, 1\}$ .

Wir konstruieren nun eine Folge in  $\{0, 1\}$ , die nicht in dieser Durchnummerierung vorkommen kann: Sei

$$c_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } b_{ii} = 1 \\ 1 & \text{falls } b_{ii} = 0. \end{cases}$$

Dann kann die Folge  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  keines der Folgen  $a_n = (b_{ni})_i$  sein, da nach Konstruktion  $c_n \neq b_{nn}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir hatten aber angenommen, dass  $M$  durch die  $a_n$  durchnummeriert wird. Das ist der Widerspruch und  $M$  konnte nicht abzählbar sein.  $\square$

**Folgerung 3.10.6.** *Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  der natürlichen Zahlen ist überabzählbar*

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  gleichmächtig zur Menge  $M$  der Folgen in  $\{0, 1\}$  ist. Einem  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , also  $A \subset \mathbb{N}$ , ordnen wir die Folge

$$\left( a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in A \\ 0 & \text{falls } n \notin A \end{cases} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

### 3.10 Einschub: Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit

zu. Dies ist eine bijektive Abbildung  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow M$  und zeigt mit dem letzten Satz, dass  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  überabzählbar ist.  $\square$

**Satz 3.10.7.**  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist überabzählbar

*Beweis.* Wir wollen eine injektive Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  von der Menge  $M$  der Folgen in  $\{0, 1\}$  nach  $\mathbb{R}$  angeben. Dann wäre  $f: M \rightarrow f(M)$  bijektiv und wir hätten nach Satz 3.10.5 ein überabzählbare Teilmenge  $f(M)$  von  $\mathbb{R}$ . Nach Satz 3.10.3(i) kann  $\mathbb{R}$  somit nicht abzählbar sein.

Wir definieren

$$f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{10^n}.$$

In Beispiel 3.1.7 haben wir uns überlegt, dass dann die Folge  $\sum_{n=0}^k \frac{a_n}{10^n}$  eine Cauchyfolge ist und damit der Grenzwert auf der rechten Seite wirklich in  $\mathbb{R}$  existiert. Es bleibt die Injektivität zu überprüfen: Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n \in M$  verschieden. Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  der kleinste Index mit  $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ . Sei o.B.d.A.\*  $a_{n_0} = 0$  und  $b_{n_0} = 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f((a_n)_n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^k \frac{a_n}{10^n}}_{a_0, a_1 \dots a_{n_0-1} 0 a_{n_0+1} \dots} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=n_0+1}^k \frac{1}{10^n} \right)}_{a_0, a_1 \dots a_{n_0-1} 0 1 1 1 \dots} \\ &< \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0}}}_{a_0, a_1 \dots a_{n_0-1} 1 0 0 0 \dots} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^k \frac{b_n}{10^n}}_{a_0, a_1 \dots a_{n_0-1} 1 b_{n_0+1} \dots} = f((b_n)_n) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathbb{R}$  überabzählbar.

Wäre  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  abzählbar, dann wäre, da  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, nach Satz 3.10.3 auch  $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  abzählbar.  $\square$

*Ausblick:* Überabzählbare Mengen sind i.A. nicht gleichmächtig. So sind z.B.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{C}$  sind gleichmächtig, aber nicht gleichmächtig zu  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Man kann nicht nur gleichmächtig definieren, sondern auch: Menge  $A$  ist höchstens gleichmächtig zu einer Menge  $B$ , geschrieben  $|A| \leq |B|$ , falls es eine injektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt. Man kann zeigen, dass das eine Ordnungsrelation ist und falls  $|A| \leq |B|$  und  $|B| \leq |A|$  gilt, die Menge  $A$  und  $B$  wirklich gleichmächtig nach unserer Definition sind. Das ist das Schröder-Bernstein Theorem.  $|A|$  nennt man *Kardinalität* von  $A$ .<sup>†</sup> Im Fall endlicher Mengen  $|A| \in \mathbb{N}$  einfach die Anzahl der Elemente in  $A$ .

\*'o.B.d.A.' bedeutet 'ohne Beschränkung der Allgemeinheit' und wird verwendet, wenn man im Beweis nur einen von mehreren möglichen Fällen betrachtet, weil die anderen Fällen exakt genauso gehen. Z.B. bei Symmetrie der Behauptung. Im obigen Beispiel kann man den zweiten Fall  $a_{n_0} = 1$  und  $b_{n_0} = 0$  einfach durch Umbenennung der Folgen  $a_n \leftrightarrow b_n$  erreichen.

[https://de.wikipedia.org/wiki/Ohne\\_Beschr%C3%A4nkung\\_der\\_Allgemeinheit](https://de.wikipedia.org/wiki/Ohne_Beschr%C3%A4nkung_der_Allgemeinheit)

<sup>†</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Cardinality>

### 3.11 Oft vorkommende Folgen

Wir sammeln in diesem Abschnitt noch einige oft vorkommende Folgen:

**Beispiel 3.11.1.** Für  $r \in \mathbb{Q}^*$ ,  $r > 0$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ :

(Für  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  folgt das z.B. daraus, dass dann  $\frac{1}{n^r}$  eine Teilfolge der Nullfolge  $\frac{1}{n}$  ist oder auch aus dem Einschnürungssatz angewendet auf  $0 \leq \frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n}$ .)

Sei nun  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r > 0$ . Dann ist  $r = \frac{p}{q}$  für  $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Sei  $\epsilon > 0$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \frac{1}{\epsilon^{\frac{q}{r}}}$ . Die Funktionen  $x \mapsto x^p$  und  $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$  sind monoton wachsend nach Beispiel 3.6.2. Damit ist auch  $x \mapsto x^r$  monoton wachsend. Somit gilt für alle  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{n^r} \right| = \frac{1}{n^r} \stackrel{x^r \text{ mon. wachsend}}{\leq} \frac{1}{n_0^r} \stackrel{x^r \text{ mon. wachsend}}{<} \epsilon.$$

**Beispiel 3.11.2.** Für  $p > 0$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p} = 1$ :

Sei zunächst  $p \geq 1$ . Sei  $x_n = \sqrt[p]{p} - 1$ . Dann ist  $x_n \geq 0$  für  $n > 0$ . Nach dem binomischen Satz ist

$$p = (1 + x_n)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x_n^i \stackrel{x_n > 0}{\geq} n x_n.$$

Also ist  $0 < x_n \leq \frac{p}{n}$ . Nach dem Einschnürungssatz folgt  $x_n \rightarrow 0$  und damit  $\sqrt[p]{p} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Für  $0 < p < 1$  benutzen wir obigen Grenzwert für  $\frac{1}{p} > 1$ . Dann ist  $\sqrt[p]{p} \rightarrow 1$  und somit  $\sqrt[p]{p} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beispiel 3.11.3.** Für  $q \in \mathbb{R}$  konvergiert  $q^n$  für  $|q| < 1$  nach Null, vgl. Beispiel 3.1.3. Für  $q = 1$  ist es eine konstante Folge. Für  $q > 1$  konvergiert es uneigentlich nach  $\infty$ :

Nehmen wir es gibt ein  $K > 0$  mit  $q^n \leq K$  für alle  $n$ . Da die  $n$ -te Wurzel monoton wachsend ist, ist  $q \leq \sqrt[n]{K}$ . Mit dem letzten Beispiel folgt  $q \leq 1$ , was ein Widerspruch wäre. Also ist  $q^n$  eine unbeschränkte Folge. Da weiterhin  $q^n$  monoton wachsend ist, da  $q^{n+1} > q^n$  direkt aus  $q > 1$  folgt, konvergiert  $q^n$  uneigentlich nach  $\infty$ .

Für  $q \leq -1$  konvergiert  $q^n$  weder eigentlich noch uneigentlich.

**Beispiel 3.11.4.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ :

Sei  $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$ . Dann ist  $x_n > 0$  für  $n > 0$

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x_n^i \stackrel{x_n > 0}{\geq} \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

und somit  $0 \leq x_n \leq \sqrt{2n} - 1$ . Nach dem Einschnürungssatz folgt  $x_n \rightarrow 0$  und damit  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

---

\*Diese Aussage wird mit genau dem gleichen Beweis auch für  $r \in \mathbb{R}$  gelten, wir haben hier nur noch nicht Potenzen mit irrationalen Exponenten definiert.

**Beispiel 3.11.5.** Für  $r \in \mathbb{Q}^*$  und  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 1$ , gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{s^n} = 0$  ('Polynome wachsen langsamer als Exponentialfunktionen (bei Basis<sup>†</sup> größer 1)'):

Da  $s > 1$ , ist  $s = 1 + p$  für ein  $p > 0$ . Dann ist für  $n > 2k$

$$s^n = (1 + p)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i > \binom{n}{k} p^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

und somit

$$0 \leq \frac{n^r}{s^n} \leq \frac{k! 2^k}{p^k} \frac{1}{n^{k-r}}.$$

Wählen wir  $k$  fest mit  $k > r$  und lassen  $n$  gegen unendlich gehen, dann folgt die Behauptung mit dem Einschnürungssatz und Beispiel 3.11.1.

## 3.12 Reihen

Wir lernen als nächstes eine wichtige spezielle Klasse von Folgen kennen lernen:

**Definition 3.12.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$  eine reelle oder komplexe Folge. Dann ist  $s_k = \sum_{i=n_0}^k a_i$  die  $n$ -te *Partialsumme* von  $a_n$ . Eine Folge von Partialsummen nennen wir *Reihe* und schreiben  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ . Die  $a_i$  heißen *Glieder* der Reihe. Wir sagen, die Reihe konvergiert, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existiert und schreiben für den Grenzwert auch  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ . Eine reelle Reihe *konvergiert uneigentlich* gegen  $\pm\infty$  falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$  ist.

!!  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  hat zwei Bedeutungen je nach Verwendung: Einmal einfach die Folge der Partialsummen  $s_n$ , damit ist dann  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  eine Abbildung  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Weiterhin verwenden wir  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  für den Grenzwert der Folge, falls er existiert. Damit ist dann  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  eine reelle oder komplexe Zahl. !!

Was gemeint ist, wird sich aus dem Kontext ergeben, z.B.:  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  konvergiert, bedeutet die Folge der zugehörigen Partialsumme konvergiert. Wogegen  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = 1$  bedeutet, die Folge konvergiert gegen 1.

**Beispiel 3.12.2.** Eines der wichtigsten Beispiele überhaupt haben wir schon implizit an verschiedenen Stellen kennengelernt – die *geometrische Reihe*  $\sum_{i=0}^{\infty} q^{i\ddagger}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .

Nach Definition ist die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$  die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{i=0}^n q^i$ . Für  $q \neq 1$  haben wir für die Partialsummen den expliziten Ausdruck  $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ , vgl. Beispiel 3.1.7. Aus Beispiel 3.11.3 wissen wir, dass  $q^n$  genau dann konvergiert, falls  $|q| \leq 1$  und  $q \neq -1$  gilt. Damit ist  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$ . Die Reihe konvergiert nicht für  $|q| \geq 1$ .

---

\*Diese Aussage wird mit genau dem gleichen Beweis auch für  $r \in \mathbb{R}$  gelten, wir haben hier nur noch nicht Potenzen mit irrationalen Exponenten definiert.

†Bei  $x \mapsto a^x$  wird  $a$  *Basis* genannt. Solche Funktionen nennt man auch Exponentialfunktionen, da (sehen wir später)  $a^x = e^{x \ln a}$  gilt.

‡Für  $q = 0$  betrachten wir  $0^0$  als Eins. Es soll also für alle  $q$ :  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$  sein.

### 3 Folgen

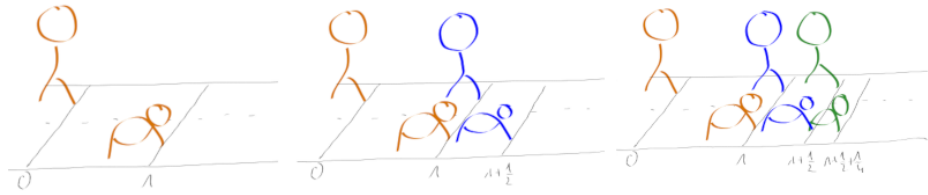


Abbildung 3.4: Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

Die geometrische Reihe ist auch Mittelpunkt des Paradoxon von Achilles und der Schildkröte von Zenon von Elea (5. Jh. v. Chr.), vgl. Abbildung 3.4. Es handelt von einem Wettlauf zwischen Achilles und einer Schildkröte. Beide starten zur selben Zeit, aber die Schildkröte erhält anfangs einen Vorsprung von einem Meter. Achilles ist doppelt so schneller wie die Schildkröte. Zenos argumentiert, dass Achilles die Schildkröte nie erreicht, da er erst den Punkt erreichen muss, an dem die Schildkröte gestartet ist, bis zu diesem Zeitpunkt wird sich die Schildkröte, wenn auch nur um eine kleine Strecke, zu einem anderen Punkt vorwärts bewegt haben; bis Achilles die Strecke zu diesem Punkt zurückgelegt hat, wird die Schildkröte zu einem anderen Punkt gelaufen sein usw. Mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen wir aber schon, dass die einzelnen Zeit- und Wegabschnitte, dass deren Summe konvergiert.

Man kann auch mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen, dass  $0,\bar{9} = 1$  ist:

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Rechnen mit  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  ist wie mit endlichen Summen? Kurz: Es geht vieles, aber nicht alles, z.B.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0 \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - \dots = 1 \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass dieses Problem (nicht beliebig Klammern setzen zu dürfen) nur deswegen auftaucht, weil  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  nicht konvergiert. Aber wir werden später sehen, dass z.B. Kommutativität der Summanden auch für konvergente Reihen schiefgehen kann.

Wir schauen uns aber erst noch mehr Beispiele an:

**Beispiel 3.12.3.** (i) Die Dezimalbruchdarstellung ist eine Darstellung einer reellen Zahl als Reihe  $\pm \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$  mit  $a_0 \in \mathbb{N}$  und  $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$  für  $i > 0$ .

(ii) Die *harmonische Reihe*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  konvergiert uneigentlich nicht: Wir haben für die



$2^k$ .te Partialsumme

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2}k. \end{aligned}$$

Da alle Glieder der Folge positiv sind, ist  $s_n$  monoton wachsend und nach obigen unbeschränkt. Also ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ , vgl. auch Übungsaufgabe 15(iii).

### 3.12.1 Erste Konvergenzkriterien für Reihen

Wir wollen erste Konvergenzkriterien für Reihen sammeln. Zuvor jedoch werden wir erst noch eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe kennenlernen.

**Satz 3.12.4** (Notwendige\* Bedingung für Konvergenz einer Reihe). *Falls  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  konvergiert, dann ist  $a_i$  eine Nullfolge.*

*Beweis.* Seien  $s_n = \sum_{i=0}^n$  die zugehörige Partialsumme. Da die Reihe konvergiert, also  $(s_n)_n$  konvergiert, muss  $(s_n)_n$  eine Cauchyfolge sein. Damit gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|s_n - s_m| < \epsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$ . Das gilt insbesondere für  $m = n + 1$ . Damit ist  $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0 + 1$ . Also ist  $a_n$  eine Nullfolge.  $\square$

Das letzte Beispiel der harmonischen Reihe, zeigt, dass die Umkehrung nicht gilt, also dass Nullfolge zu sein, keine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die zugehörige Reihe konvergiert. Aber wir werden sehen, dass im Fall alternierender Reihen und unter einer Zusatzbedingung es doch eine hinreichende Bedingung ist.

**Definition 3.12.5.** Eine reelle Reihe  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  heißt *alternierend*, falls aufeinanderfolgende Folgenglieder immer verschiedenes Vorzeichen haben.

**Satz 3.12.6** (Leibnizkriterium für alternierende reelle Reihen). *Sei  $(a_n)_n$  eine monoton fallende (und damit insbesondere reelle) Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ .*

*Beweis.* Da es sich um eine monoton fallende Nullfolge handelt, ist insbesondere  $a_n \geq 0$  (damit ist also  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  wirklich eine alternierende Reihe). Aus der Monotonie der Folge folgt  $s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n} \leq 0$  und  $s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend. Außerdem ist  $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n}$  und somit  $s_{2n+1} \geq s_0 = a_0$  und  $s_{2n} \leq s_1 = a_0 - a_1$ . Demnach sind die Folgen  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton und beschränkt und konvergieren also. Konvergiere  $s_{2n} \rightarrow a$  und  $s_{2n+1} \rightarrow b$ . Wenn wir nun zeigen können, dass  $a = b$  ist, folgt mit Übungsaufgabe 6(iii), dass auch schon  $(s_n)_n$  gegen  $a$  konvergiert:

$$a - b = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0. \quad \square$$

---

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Notwendige\\_und\\_hinreichende\\_Bedingung](https://de.wikipedia.org/wiki/Notwendige_und_hinreichende_Bedingung)

### 3 Folgen

**Beispiel 3.12.7.** Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$  konvergieren beide nach dem Leibnizkriterium. Wir können allerdings im Moment noch nicht sagen, wohin diese Reihen konvergieren, aber wir werden später sehen, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} = \sin 1$  ist.

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  heißt *alternierende harmonische Reihe*.

Dass alle Folgen genau dann konvergent sind, wenn sie Cauchyfolgen sind, ergibt angewendet auf Reihen das folgende Konvergenzkriterium:

**Satz 3.12.8** (Cauchy Kriterium). *Die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  ist genau dann konvergent, wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|\sum_{i=m+1}^n a_i| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \epsilon$  für alle  $n > m \geq n_0$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Sei  $s_n$  die  $n$ -te Partialsumme zu  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ . Dann ist  $s_n - s_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$ . Damit ist das Cauchy Kriterium einfach die Aussage: Die Folge  $(s_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn  $(s_n)_n$  eine Cauchyfolge ist.  $\square$

### 3.12.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Aus einigen der Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir direkt auch Rechenregeln für konvergente Reihen:

**Lemma 3.12.9.** *Sei  $a, b \in \mathbb{C}$ . Falls  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ , dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = ca$  für alle  $c \in \mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Seien  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  und  $t_n = \sum_{k=0}^n b_k$ . Dann konvergieren  $s_n \rightarrow a$  und  $s_n \rightarrow b$ . Wir stellen fest, dass die  $n$ -te Partialsumme zu  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$  gleich  $s_n + t_n$  ist und die zu  $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = ca$  gleich  $cs_n$  ist. Damit folgt die Konvergenz aus den Rechenregeln für die konvergenten Folgen  $s_n$  und  $t_n$ .  $\square$

*Assoziativität bei konvergenten Reihen?* Das ist die Frage: Kann man bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  beliebig Klammern setzen oder weglassen ohne, dass sich das Konvergenzverhalten ändert?

Ist die Reihe konvergent, kann man beliebig Klammern setzen und die so entstandene Reihe konvergiert gegen den gleichen Grenzwert: Sei  $0 = n_{-1} < n_1 < n_2 < \dots$  eine Folge natürlicher Zahlen. Dann gilt

$$a_0 + a_1 + \dots = (a_0 + \dots + a_{n_1-1}) + (a_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2-1}) + \dots,$$

also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} a_k \right),$$

da die Folge der Partialsummen zur rechten Reihe eine Teilfolge der Partialsummen  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  der linken Reihe ist, nämlich  $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

Andererseits darf man bei konvergenten Reihen nicht einfach weglassen, z.B. ist  $\sum_{i=1}^{\infty} (1-1) = 0$ , aber beim Weglassen der Klammern ergeben sich Probleme.

*Kommutativität bei konvergenten Reihen?* Das ist die Frage: Kann man bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  beliebig Summanden vertauschen? Nein: Als Beispiel schauen wir auf die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Wir wissen nach dem Leibnizkriterium, dass diese Reihe konvergiert. Schauen wir nun

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

an. Dann gilt für die  $3n$ .te Partialsumme  $t_{3n}$  zu dieser Reihe

$$\begin{aligned} t_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{4n-2}{-} \frac{1}{4n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right), \end{aligned}$$

was der Hälfte der  $2n$ .ten Partialsumme von  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  entspricht. D.h. wenn überhaupt, konvergiert diese Reihe nach  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  (Die Reihe konvergiert wirklich, wie man sich leicht überlegen kann, wenn man  $t_{3n+1}$  und  $t_{3n+2}$  mit  $t_{3n}$  vergleicht.).

### 3.12.3 Absolute Konvergenz

Im letzten Abschnitt haben wir ein Beispiel einer konvergenten Reihe gesehen, bei der nach Vertauschung unendlich vieler Glieder zwar wieder eine konvergente Reihe entsteht, diese aber einen anderen Grenzwert hat. Den Prozess des Vertauschens unendlich vieler Reihenglieder nennt man Umordnung:

**Definition 3.12.10.** Sei  $\sigma: \mathbb{N}_{\geq n_0} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq n_0}$  eine bijektive Abbildung und  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  eine Reihe. Dann heißt  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_{\sigma(i)}$  eine *Umordnung* dieser Reihe.

Es gibt aber eine besondere Klasse von konvergenten Reihen, bei welcher wir nach Herzenslust umordnen dürfen, ohne den Grenzwert zu verändern – die absolut konvergenten Reihen:

**Definition 3.12.11.** Eine reelle/komplexe Reihe  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  heißt *absolut konvergent*, wenn  $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

### 3 Folgen

Die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  ist nicht absolut konvergent.

Als nächstes zeigen wir, dass die absolut konvergenten Reihen wirklich eine Teilmenge der konvergenten Reihen sind:

**Lemma 3.12.12.** *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

*Beweis.* Da  $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i|$  konvergiert, erfüllt diese Reihe das Cauchy Kriterium, Satz 3.12.8. Also gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|\sum_{i=n+1}^m |a_i|| < \epsilon$  für alle  $m > n \geq n_0$ . Nach der Dreiecksungleichung ist somit aber auch

$$\left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| \leq \left| \sum_{i=n+1}^m |a_i| \right| < \epsilon.$$

Somit erfüllt auch  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  das Cauchy Kriterium und konvergiert damit.  $\square$

Nun zu Umordnungen:

**Satz 3.12.13** (Umordnungssatz). *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist wieder absolut konvergent und hat den selben Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe.*

*Beweis.* Sei  $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$  die  $n$ -te Partialsumme der absolut konvergenten Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i =: s$ . Dann gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_0$ . Da die Reihe auch absolut konvergiert gibt es auch ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_1$ . Sei nun  $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ .

Sei nun  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv und  $t_n = \sum_{i=0}^n a_{\sigma(i)}$  die  $n$ -te Partialsumme der zugehörigen Umordnung. Wir wollen zeigen, dass  $t_n$  auch gegen  $s$  konvergiert: Wir wählen  $n_3 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\{0, 1, \dots, n_2\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n_3)\}$  gilt. Das geht immer, da  $\{0, 1, \dots, n_2\}$  und damit auch  $\sigma^{-1}(\{0, 1, \dots, n_2\}) \stackrel{\sigma \text{ bijektiv}}{=} \{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n_2)\}$  endliche Mengen sind.

Für  $n \geq n_3$  besteht  $t_n - s_{n_2}$  nur aus Summanden  $a_i$  mit  $i > n_0$ . Also gilt für  $n \geq n_3$

$$|t_n - s_{n_2}| \leq \sum_{i=n_2+1}^{\infty} |a_i| \stackrel{n_2 \geq n_0}{<} \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und damit}$$

$$|t_n - s| = |t_n - s_{n_2} + s_{n_2} - s| \leq |t_n - s_{n_2}| + |s_{n_2} - s| < \epsilon. \quad \square$$

Für den Umordnungssatz für Reihen ist es wirklich nötig, dass die Reihe absolut konvergent ist. Der nächste Satz zeigt uns das für reelle Reihen:\*

**Satz 3.12.14** (Riemannscher Umordnungssatz). *Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe in  $\mathbb{R}$ , die nicht absolut konvergiert.*

---

\*Für komplexe konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, ist die Menge der Grenzwerte von Umordnungen dieser Reihe entweder eine Gerade in  $\mathbb{C}$  oder schon ganz  $\mathbb{C}$ . Das ist der Steinitzsche Umordnungssatz.

(i) Für jedes  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ , gibt es eine Umordnung der Reihe, die gegen  $\alpha$  (ggf. uneigentlich) konvergiert.

(ii) Es gibt eine Umordnung, die beschränkt und nicht konvergent ist.

*Beweis.* Wir zeigen hier aus Zeitgründen nur (i) und dort nur den Fall  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Ideen sonst sind sehr ähnlich. Wir definieren  $I_+ := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$  und  $I_- := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0\}$ .

- Die Mengen  $I_+$  und  $I_-$  sind unendlich und damit (da Teilmenge von  $\mathbb{N}$ ) abzählbar.

Um zu zeigen, dass  $I_{\pm}$  beide unendlich sind, führen wir einen Beweis durch Widerspruch: Sei o.B.d.A.  $I_-$  endlich. Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass alle Elemente in  $I_-$  kleiner als  $n_0$  sind. Da auch  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  konvergiert und alle Reihenglieder nun positiv sind, muss diese Reihe und damit auch die Ausgangsreihe absolut konvergieren. Dies widerspricht den Voraussetzungen. Also ist  $I_-$  unendlich.

Sei  $f_{\pm}: \mathbb{N} \rightarrow I_{\pm}$  eine Durchnummerierung von  $I_{\pm}$ . Sei  $b_n := a_{f_+(n)}$  und  $c_n := a_{f_-(n)}$ . Die Folgen  $(b_n)_n$  bzw.  $(c_n)_n$  sind nun Teilfolgen von  $(a_n)_n$  mit ausschließlich nichtnegativen bzw. negativen Folgengliedern. Da  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, sind  $a_n$  und somit auch  $b_n$  und  $c_n$  Nullfolgen.

- Beide Reihen  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  und  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  sind unbeschränkt:

Sind die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  beide beschränkt, dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  sogar absolut. Ist nur eine dieser beiden Reihen beschränkt, dann wäre auch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  unbeschränkt.

Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  die kleinste natürliche Zahl mit  $b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0} \geq \alpha$ .

Sei  $m_1 \in \mathbb{N}$  die kleinste natürliche Zahl mit  $\beta_1 := b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \dots + c_{m_1} < \alpha$ .

Dann ist  $b_0 + \dots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \dots + c_{m_1-1} \geq \alpha$  und damit  $|\alpha - \beta_1| \leq |c_{m_1}|$ .

Sei  $n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 > n_0$ , die kleinste natürliche Zahl mit  $\gamma_1 := b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_0+1} + \dots + b_{n_1} \geq \alpha$ . Wie oben sieht man  $|\alpha - \gamma_1| \leq b_{n_1}$ .

Sei  $m_2 \in \mathbb{N}$ ,  $m_2 > m_1$ , die kleinste natürliche Zahl mit  $\beta_2 := b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_0+1} + \dots + b_{n_1} + c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2} < \alpha$ .

So erhalten wir Folgen  $(n_k)_{k>0}$ ,  $(m_k)_{k>0}$ ,  $(\beta_k)_{k>0}$  und  $(\gamma_k)_{k>0}$  mit

$$|\alpha - \beta_k| \leq |c_{m_k}| \quad \text{und} \quad |\alpha - \gamma_k| \leq b_{n_k}.$$

Da  $b_n$  und  $c_n$  Nullfolgen sind, gilt  $\beta_k \rightarrow \alpha$  und  $\gamma_k \rightarrow \alpha$  für  $k \rightarrow \infty$ . Damit konvergiert die Umordnung

$$b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_0+1} + \dots + b_{n_1} + c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2} + b_{n_1+1} + \dots$$

gegen  $\alpha$ . □

### 3.12.4 Kriterien für absolute Konvergenz

Es gibt einige Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen, die dann natürlich automatisch auch Kriterien für Konvergenz von Reihen sind:

**Satz 3.12.15.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine komplexe Reihe. Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, dann ist die Reihe absolut konvergent:

- (i) (Majorantenkriterium) Es gibt eine konvergente reelle Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $|a_n| \leq c_n$  für alle  $n$ .
- (ii) (Quotientenkriterium) Es gibt ein  $q \in [0, 1)$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$  für alle  $n \geq n_0$  ist.
- (iii) (Wurzelkriterium) Es gibt ein  $q \in [0, 1)$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$  für alle  $n \geq n_0$  ist.

Andererseits konvergiert die Reihe nicht absolut, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

- (iv) (Minorantenkriterium) Es gibt eine nicht-konvergente reelle Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $0 \leq c_n \leq |a_n|$  für alle  $n$ .
- (v) Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1, a_n \neq 0 \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

für alle  $n \geq n_0$ .

- !! Es ist wichtig, dass  $q < 1$  ist: Die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  erfüllt  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$  (und auch  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1$ ) für alle  $n$ , ist aber nicht konvergent.
- Die Bedingungen im Quotienten- und im Wurzelkriterium sind äquivalent zu

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Im ersten Fall muss  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$  sein.

*Beweis von Satz 3.12.15.* (i) Die Folge der Partialsummen von  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  ist monoton wachsend und nach oben durch  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  beschränkt. Damit konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  und somit konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.

(iv) Da alle  $c_n$  nichtnegativ sind, muss  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty$  sein, damit die Reihe nicht konvergiert. Wegen  $c_n \leq |a_n|$  für alle  $n$ , ist somit auch die Folge der Partialsummen zu  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  monoton wachsend und unbeschränkt und somit gilt auch hier  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ .

(ii) Es gilt  $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \dots \leq q^{n-n_0}|a_{n_0}|$ . Da für  $q \in [0, 1)$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|q^n$  konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut

konvergiert: Wir wählen  $c_n = |a_n|$  für  $n < n_0$  und  $c_n = q^{n-n_0}|a_{n_0}|$  für  $n \geq n_0$ , dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + \sum_{k=n_0}^{\infty} q^{n-n_0}|a_{n_0}| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + |a_{n_0}| \sum_{i=0}^{\infty} q^i$ .

(iii) Da  $|a_n| \leq q^n$  für  $n \geq n_0$  und  $q \in [0, 1)$  folgt wie in (ii) die absolute Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit dem Majorantenkriterium wie in (ii).

(iv) In beiden Fällen ist  $a_n$  keine Nullfolge und damit kann die Reihe nicht konvergent sein. D.h. hier sieht man sogar, dass die Reihen nicht konvergieren, was mehr als die Behauptung ist, dass sie nicht absolut konvergieren.  $\square$

**Beispiel 3.12.16.** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Im Beweis haben wir gesehen, dass das Wurzel- und Quotientenkriterium ein Spezialfall des Majorantenkriterium ist, in dem man mit der geometrischen Reihe vergleicht. Das Wurzelkriterium ist außerdem stärker als das Quotientenkriterium, denn es gilt:

**Lemma 3.12.17.** Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

*Beweis.* Für  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \infty$  ist die Behauptung erfüllt, sein nun  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = q \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq q$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Somit gilt für alle  $n \geq n_0$

$$c_n \leq q c_{n-1} \leq q^2 c_{n-2} \leq \dots q^{n-n_0} c_{n_0}$$

und damit für  $q \neq 0$

$$\sqrt[n]{c_n} \leq q \sqrt[n]{q^{-n_0} c_{n_0}} \rightarrow q \text{ nach Beispiel 3.11.2,}$$

und  $\sqrt[n]{c_n} \rightarrow 0$  für  $q = 0$ , was  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq q$  impliziert.  $\square$

Ist das Quotientenkriterium für eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  erfüllt, dann ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ . Mit dem letzten Lemma ist dann  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  und somit ist das Wurzelkriterium erfüllt. Allerdings hat es trotzdem Sinn beide Kriterien zu haben, da es manchmal schwierig ist den  $\limsup$  von  $\sqrt[n]{|a_n|}$  wirklich zu bestimmen.

**Beispiel 3.12.18.** Betrachten wir die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit

$$a_n := \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} & \text{für ungerade } n \\ 3^{-\frac{n}{2}} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

Hier hilft das Quotientenkriterium nicht, da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{-\frac{n+1}{2}}} & \text{für ungerade } n \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{-\frac{n}{2}}}{3^{-\frac{n}{2}}} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

### 3 Folgen

und somit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$  gilt. Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir dagegen für  $n \geq 1$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2^{n/2}} & \text{für ungerade } n \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

und damit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ . Also konvergiert die Reihe.

**Beispiel 3.12.19.** Es gibt absolut konvergente Reihen, deren Konvergenz nicht mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium gezeigt werden können: Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergiert absolut.

Das Quotienten- und Wurzelkriterium können wir nicht anwenden, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$  ist.

Aber wir können direkt zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert: Für  $n < 2^m$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{i=0}^m \left( \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{k^2} \right) \leq \sum_{i=0}^m \left( \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{2^{2i}} \right) = \sum_{i=0}^m 2^i 2^{-2i} = \sum_{i=0}^m 2^{-i} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2. \end{aligned}$$

Also konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ .

Mit der gleichen Methode kann man auch zeigen, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  für alle  $s > 1$  konvergiert.

#### 3.12.5 Potenzreihen

Als einen Spezialfall von Reihen betrachten wir nun Potenzreihen, die man als Verallgemeinerung von Polynomen auffassen kann:

**Definition 3.12.20.** Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{C}$ , wobei hier für  $x = 0$  immer  $0^0 = 1$  gesetzt wird, also ist die Reihe  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ .

Setzen wir dom  $f := \{x \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}$ , dann ist

$$f: \text{dom } f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Funktion.

**Beispiel 3.12.21.** (i) Jedes Polynom ist eine Potenzreihe mit  $a_n = 0$  für alle  $n \geq n_0$  bei geeignetem  $n_0 \in \mathbb{N}$ .



(ii) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  konvergiert nach dem Quotientenkriterium für alle  $x \in \mathbb{C}$ :

$$\frac{\left| \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \right|}{\left| \frac{1}{k!} x^k \right|} = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Also erhalten wir eine Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  – die *Exponentialfunktion*

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

**Lemma 3.12.22.** Falls die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  für  $x = x_0$  konvergiert, so konvergiert sie auch für alle  $x$  mit  $|x| < |x_0|$  und die Konvergenz ist sogar absolut.

Dies ist nicht unbedingt wahr für  $|x| = |x_0|$ : Die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$  konvergiert für  $x_0 = 1$  (nach dem Leibnizkriterium) und damit nach letztem Lemma für alle  $x$  mit  $|x| < 1$ . Aber sie konvergiert nicht für  $x = -1$  (dort ist sie die harmonische Reihe).

*Beweis von Lemma 3.12.22.* Für  $x_0 = 0$  ist nichts zu zeigen. Sei nun  $x_0 \neq 0$ . Dann gilt

$$\sum_{n=0}^k |a_n x^n| = \sum_{n=0}^k |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Wir wollen das Majorantenkriterium nutzen, um die Konvergenz dieser Reihe für  $|x| \leq |x_0|$  zu nutzen. Es ist  $\left| \frac{x}{x_0} \right| =: q < 1$ . D.h. wenn zeigen können, dass  $|a_n x_0^n|$  beschränkt ist, dann folgt die Konvergenz aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Da jedoch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  ist  $(a_n x_0^n)_n$  eine Nullfolge und damit beschränkt.  $\square$

**Definition 3.12.23.** Der *Konvergenzradius* einer Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  ist

$$R := \sup \left\{ r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{C} : |x| = r \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} |c_i x^i| \text{ konvergiert} \right\}$$

**Satz 3.12.24.** Sei  $R$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Dann konvergiert die Reihe für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < R$  absolut. Für alle  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| > R$  konvergiert die Reihe nicht.

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < R$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < |x_0| \leq R$ , so dass die Potenzreihe für  $x_0$  konvergiert. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.12.22. Sei nun  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| > R$ . Falls die Potenzreihe für  $x$  konvergiert, dann konvergiert sie nach Lemma 3.12.22 absolut für  $\frac{|x|+R}{2} \in (R, |x|)$ . Das widerspricht der Definition des Konvergenzradius, die Potenzreihe kann also für  $x$  nicht konvergieren.  $\square$

Aus dem Wurzelkriterium für die Konvergenz von Reihen, ergibt sich:

### 3 Folgen

**Satz 3.12.25.** Für den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  gilt

$$R = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1},$$

wobei wir  $\frac{1}{0} = \infty$  und  $\frac{1}{\infty} = 0$  setzen.

*Beweis.* Ist  $|x| < \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ , dann folgt die Konvergenz der Reihe mit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  und dem Quotientenkriterium. Sei nun  $|x| > R$ , also  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ . Damit gibt es eine Teilfolge mit  $|a_{n_j} x^{n_j}| > 1$  für alle  $j \geq j_0$  und somit kann  $(a_n x^n)_n$  keine Nullfolge sein und die Reihe kann nicht konvergieren.  $\square$

Wie auch das Wurzelkriterium ist diese explizite Formel nicht immer nützlich, da es schwer sein kann, den  $\limsup$  von  $\sqrt[n]{|a_n|}$  zu berechnen.

Da man Potenzreihen als verallgemeinerte Polynome betrachten kann, können wir uns analog wie bei Polynomen überlegen, was die Werte der Reihe machen für  $x_n \rightarrow x$ :

**Satz 3.12.26.** Sei  $R$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Sei  $x_n$  eine komplexe Folge und Grenzwert  $\hat{x}$ , so dass  $|\hat{x}| < R$  und  $|x_n| < R$  für alle  $n$ . Dann gilt  $p(x_n) \rightarrow p(\hat{x})$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Sei  $r = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist  $|\hat{x}| \leq r < R$ .

Da für  $|x| < R$  die Potenzreihe absolut konvergiert, also auch für  $x = r$ , gibt es für  $\epsilon > 0$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{n=k}^{\infty} |a_k| r^n < \frac{\epsilon}{4}$  für alle  $k \geq k_0$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} |p(x_n) - p(\hat{x})| &\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{k_0} a_k x_n^k - \sum_{k=0}^{k_0} a_k \hat{x}^k \right|}_{=: q(x_n)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k x_n^k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k \hat{x}^k| \\ &\leq |q(x_n) - q(x)| + 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k| r^k \\ &\leq |q(x_n) - q(x)| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Aus Beispiel 3.2.4 wissen wir, dass aus  $x_n \rightarrow \hat{x}$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt für Polynome  $q(x_n) \rightarrow q(\hat{x})$  für  $n \rightarrow \infty$ . D.h. für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |p(x_n) - p(\hat{x})| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Da dies für alle  $\epsilon > 0$  gilt, folgt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |p(x_n) - p(\hat{x})| = 0$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = p(\hat{x})$ .  $\square$

### 3.12.6 Die Exponentialfunktion

Wir hatten gesehen, dass

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

eine Funktion, die Exponentialfunktion, auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert, da der Konvergenzradius dieser Potenzreihe unendlich ist. Um zu sehen, wo der Name Exponentialfunktion herkommt, überlegen wir uns zunächst:

**Lemma 3.12.27.**  $\exp(1) = e$

*Beweis.* Die Eulersche Zahl ist definiert als  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Mit dem binomischen Satz haben wir somit  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ .

Sei  $\epsilon > 0$ . Da die Reihe  $\exp(1)$  konvergiert, gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!}| < \frac{\epsilon}{4}$  für alle  $k \geq k_0$ .

Es ist

$$\left| \exp(1) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=k_0+1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Es gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \frac{1}{k!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

und insbesondere gilt  $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \rightarrow \frac{1}{k!}$ . D.h. für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0(k) \geq k$  mit

$$\left| \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{2^k}$$

für alle  $n \geq n_0(k)$ . Zusammen ergibt sich für alle  $n \geq \max\{k_0, n_0(0), n_0(1), \dots, n_0(k_0)\}$

$$\begin{aligned} \left| \exp(1) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{k_0} \left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{2^k} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 3.12.28.**  $e$  ist irrational.

### 3 Folgen

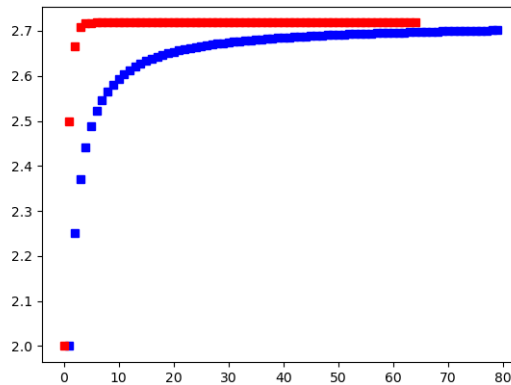


Abbildung 3.5: Die Exponentialreihe approximiert  $e$  wesentlich schneller als die Folge vom Zinseszins: Rot –  $n \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ , Blau –  $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$   
 $e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093 \dots$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{2}{(n+1)!} \end{aligned}$$

und damit

$$0 < n!e - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} < \frac{2}{n+1}.$$

Wäre  $e$  rational, also der Form  $e = \frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$ , dann wäre insbesondere  $n!e \in \mathbb{N}$  für alle  $n \geq q$ . Dann wäre  $n!e - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$  eine natürliche Zahl größer als Null und kleiner als  $\frac{2}{n+1}$ . Das ist ein Widerspruch, also kann  $e$  nicht rational sein.  $\square$

Wir wollen als nächstes sehen, dass  $\exp(x) = e^x$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$  ist und dann  $\exp(x)$  nutzen, um  $e^x$  für  $x \in \mathbb{R}$  zu definieren.

Falls das stimmt erwarten wir insbesondere, dass  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$  gilt. Um das nachzurechnen, müssen wir Reihen multiplizieren können:

---

\*<https://oeis.org/A001113>

**Satz 3.12.29** (Cauchy-Produkt). Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  zwei absolut konvergente Reihen. Sei  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i \right)$$

*Beweis.* Sei  $s_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$ ,  $t_n = \sum_{k=0}^n |b_k|$ . Wir überlegen uns zuerst, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  absolut konvergent ist:\*

$$\sum_{k=0}^n |c_n| \leq \sum_{i+j \leq n} |a_i| |b_j| \leq \sum_{i,j \leq n} |a_i| |b_j| = s_n t_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$$

Um zu zeigen, dass der Grenzwert der gesuchte ist, schätzen wir ab (vgl. auch Abbildung 3.6):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n c_k - \sum_{j=0}^n a_j \sum_{i=0}^n b_i \right| &= \left| \sum_{i+j \leq n} a_i b_j - \sum_{i,j \leq n} a_i b_j \right| \leq \sum_{i,j \leq n; i+j > n} |a_i| |b_j| \\ &\leq \sum_{i,j \leq n} |a_i| |b_j| - \sum_{i,j \leq \frac{n}{2}} |a_i| |b_j| \leq s_n t_n - s_m t_m, \end{aligned}$$

wobei  $m = \frac{n}{2}$  für  $n$  gerade und  $m = \frac{n-1}{2}$  für  $n$  ungerade ist. Da  $s_n t_n$  konvergiert, ist es Cauchyfolge. D.h. gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|s_n t_n - s_m t_m| < \epsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$ . Mit der Abschätzung von oben, folgt somit die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.12.30.** (i) Es gilt  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{C}$ .

(ii) Für alle  $x \in \mathbb{Q}$  und  $y \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x \cdot y) = (\exp(y))^x$ . Insbesondere ist damit  $\exp(x) = e^x$  für  $x \in \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* (i) Mit dem Cauchyprodukt aus dem letzten Satz folgt

$$\begin{aligned} \exp(x)\exp(y) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y). \end{aligned}$$

(ii) Für  $x \in \mathbb{N}$  folgt die Aussage aus (i) mittels Induktion: Für  $x = 1$  ist es klar. Stimmt die Aussage für  $x = n$ . Dann folgt

$$\exp((n+1)y) = \exp(ny+y) = \exp(ny)\exp(y) = (\exp(y))^n \exp(y) = (\exp(y))^{n+1}.$$

---

\* $\sum_{i+j \leq n}$  bedeutet: Summe über alle  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i+j \leq n$ . Da es sich dann um eine endliche Summe handelt, ist die Reihenfolge der Summanden egal und man kann deshalb diese Kurzschreibweise nutzen.

### 3 Folgen

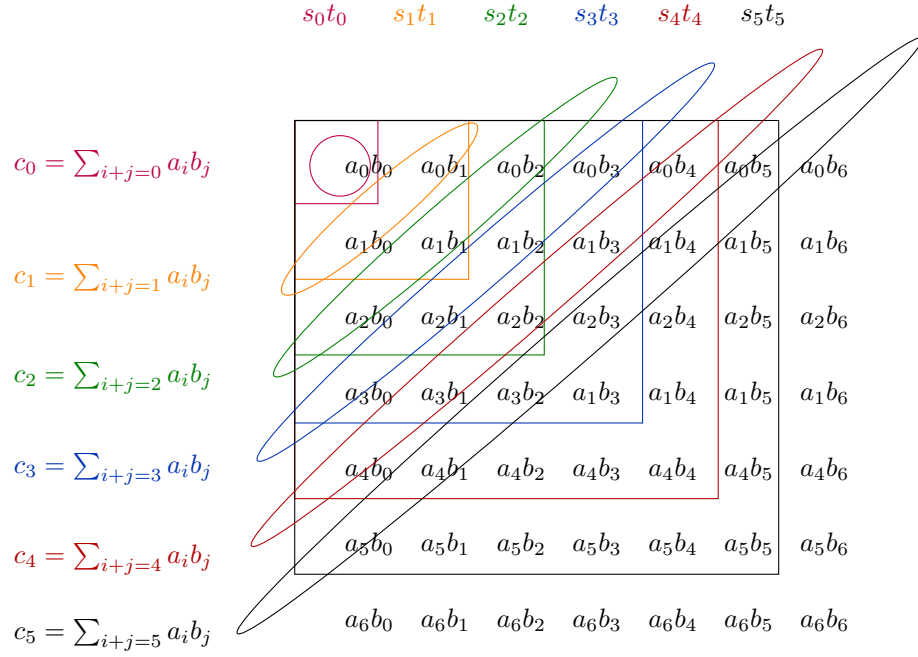


Abbildung 3.6: Anschauung zum Cauchy-Produkt zweier absolut konvergender Reihen:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  mit  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ . D.h.  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  ist die Summe über die Summen der Diagonalen. Die Rechtecke den Produkten der Partialsummen  $s_n t_n$  für  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  und  $t_n = \sum_{k=0}^n b_k$  entsprechen.

Sei nun  $x = \frac{m}{n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ . Dann ist

$$(\exp(y))^m = \exp(my) = \exp\left(n \frac{m}{n} y\right) = \left(\exp\left(\frac{m}{n} y\right)\right)^n$$

und somit  $\exp\left(\frac{m}{n} y\right) = (\exp(y))^{\frac{m}{n}}$ .

Es bleiben noch die negativen rationalen  $x$ : Dann ist  $-x$  eine positive rational Zahl und wir haben

$$1 = \exp(0) = \exp(xy + (-x)y) = \exp(xy)\exp((-x)y) = (\exp(xy))(\exp(y))^{-x}$$

und somit haben wir  $\exp(x \cdot y) = \exp(y)^x$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{Q}$ . □

Damit können wir  $e^z := \exp(z)$  für  $z \in \mathbb{C}$  definieren und sind kompatibel mit der Definition von  $e^x$  für  $x \in \mathbb{Q}$ , die wir zuvor hatten.

**Satz 3.12.31** (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion). *Für die reelle Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt*

- (i)  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\exp$  ist streng monoton wachsend
- (iii) Für jede reelle Folge  $x_n \rightarrow \infty$  gilt  $\exp(x_n) \rightarrow \infty$ .
- (iv) Für jede reelle Folge  $x_n \rightarrow -\infty$  gilt  $\exp(x_n) \rightarrow 0$ .
- (v)  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv.

*Beweis.* (i)  $\exp(0) = 1$  ist klar. Für  $x > 0$  folgt  $\exp(x) > 0$  direkt, da alle Folgenglieder nichtnegativ sind und das erste immer gleich eins ist. Sei nun  $x < 0$ , dann ist  $-x > 0$  und  $\exp(x) = (\exp(-x))^{-1} > 0$ .

(ii) Für  $x > 0$  ist  $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots > 1$ . Sei  $x > y$ . Dann ist

$$\exp(x) = \exp(y) \underbrace{\exp(x-y)}_{>0} > \exp(y).$$

- (iii) Für  $x > 0$  ist  $\exp(x) > 1 + x$ . Damit folgt aus  $x_n \rightarrow \infty$ , dass  $\exp(x_n) \rightarrow \infty$  gilt.
- (iv) Für  $x < 0$  folgt aus  $0 < \exp(x) = \exp(-x)^{-1} < (1+x)^{-1}$ , dass  $\exp(x) \rightarrow 0$  für  $x_n \rightarrow -\infty$ .
- (v) Aus (ii)-(iv) folgt  $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ . Injektivität folgt aus streng monoton wachsend. Es bleibt die Surjektivität. Das kann man aus Satz 3.12.26 mittels einer Intervallschachtelung wie bei der Existenz der  $n$ -ten Wurzel beweisen. Solch ein Argument werden wir bald im allgemeineren Rahmen führen, deswegen führen wir es hier nicht aus. □

Da die Exponentialfunktion von  $\mathbb{R}$  nach  $(0, \infty)$  bijektiv ist, können wir die Umkehrfunktion definieren:

**Definition 3.12.32.** Der *Logarithmus*  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ .

### 3 Folgen

Aus den Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion lesen sich direkt folgende Eigenschaften des Logarithmus ab:

**Satz 3.12.33.** Für  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$(i) \ln(1) = 0$$

$$(ii) \text{ Aus } x_n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ folgt } \ln x_n \rightarrow \infty.$$

$$(iii) \text{ Aus } x_n \rightarrow 0, x_n > 0, \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ folgt } \ln x_n \rightarrow -\infty.$$

$$(iv) \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Mit Hilfe des Logarithmus führen wir nun reelle Potenzen von reellen positiven Zahlen ein:

**Definition 3.12.34.** Für  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{C}$  sei

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a).$$

Das diese Definition konsistent ist mit unserer Definition von Seite 29 für Potenzen mit rationalen Exponenten folgt aus

$$\exp(x \cdot \ln a) \stackrel{\text{Satz 3.12.30(ii)}}{=} (\exp(\ln a))^x = a^x.$$

Mit dieser Definition, der Funktionalgleichung für  $\exp$  aus Satz 3.12.30(ii) und den Eigenschaften des Logarithmus lassen sich dann die Potenzgesetze, so wie wir sie von rationalen Exponenten kennen, auch allgemein nachrechnen:

**Lemma 3.12.35.** Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ ,  $r, s \in \mathbb{C}$  gilt

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r a^s = a^{r+s}, \quad a^r b^r = (ab)^r$$

*Beweis.* Übungsaufgabe

□

*Alternative Definition von  $a^x$  für  $x \in \mathbb{R}$ :* Man kann  $a^x$  für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , und  $x \in \mathbb{R}$  auch wie folgt definieren: Sei  $x_n$  eine Folge rationaler Zahlen mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da wir Potenzen mit rationalen Exponenten schon früher definiert haben, existiert  $a^{x_n}$ . Wir setzen

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}.$$

Bei dieser Definition müsste man einiges Überprüfen: Existenz des Grenzwerts und Wohldefiniertheit, d.h. Unabhängigkeit von der gewählten Folge. Wenn man das hat, stimmt es wenigstens direkt automatisch mit der Definition von  $a^x$  für  $x \in \mathbb{Q}$  überein, da man dort immer die konstante Folge nehmen kann. Es bleibt dann noch mit dieser Definition die Potenzgesetze zu überprüfen und zu zeigen, dass es äquivalent zur obigen Definition ist. Machen wir hier alles erst mal nicht.



**Sinus und Kosinus** Betrachten wir nun  $\exp(ix)$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist die zugehörige Reihe eine komplexe absolut konvergente Reihe. Diese konvergiert, wenn die Reihe ihrer Real- und Imaginärteile absolut konvergent. Dies gibt uns also automatisch die Konvergenz zweier weiterer Reihen:

Da  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$  und  $i^4 = 1$  ist, haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} x^k}{k!} + i \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} x^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{und} \quad \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Beide Reihen haben Konvergenzradius  $\infty$ .

Also ist

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{Eulersche Formel})$$

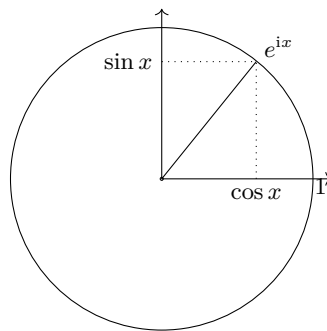
Was man hier sofort für  $x = 0$  ablesen kann:  $\cos 0 = 1$  und  $\sin 0 = 0$ . Außerdem sieht man sofort an den Potenzreihen:  $\sin(-x) = -\sin x$  und  $\cos(-x) = \cos x$  und damit gilt für  $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x = \cos(-x) + i \sin(-x) = e^{i(-x)} = e^{-ix}.$$

**Geometrische Anschauung.** Es ist

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1,$$

damit liegen die komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis:



Was wir noch nicht wissen (kommt später in Satz 4.1.18), dass alle Punkte auf dem Einheitskreis die Form  $e^{ix}$  für  $x \in \mathbb{R}$  haben.

### 3 Folgen

**Lemma 3.12.36** (Trigonometrischer Pythagoras). *Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt\**

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

*Beweis.* Wir benutzen die Eulerformel:

$$\begin{aligned} 1 = |e^{i\alpha}|^2 &= e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha + \underbrace{i \sin(-\alpha)}_{=-\sin \alpha}) \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 3.12.37** (Additionstheoreme für Sinus und Kosinus). *Es gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir benutzen wieder Satz 3.12.30.(i) und die Eulerformel:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Andererseits ist  $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)$ . Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Additionstheoreme.  $\square$

Mehr zu Eigenschaften von Sinus und Kosinus kommt später.

---

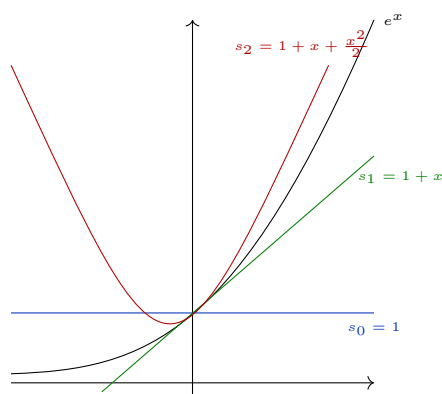
\* $\cos^2 \alpha := (\cos \alpha)^2$  und analog für den Sinus.

## 4 Funktionen in einer Variablen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Funktionen mit einer Variablen beschäftigen und dabei wird es zumeist um die Approximation von Funktionen durch 'leichtere Funktionen' wie Polynome gehen.

Wenn wir an die Exponentialfunktion denken, dann hatten wir diese über die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  definiert. Diese Reihe war für alle  $x \in \mathbb{R}$  (absolut) konvergent. D.h. für jedes  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $s_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  gegen  $e^x$ . Man kann das so verstehen, dass die Polynome  $s_n(x)$  die Exponentialfunktion annähern. Besonders gut bzw. schnell in der Nähe von 0. (Wenn man nahe  $x_0 \neq 0$  approximieren wollte, würde man eher auf eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  gehen.)

Die Frage, die uns nun ausgiebig beschäftigen wird, ist, ob sowas immer geht/wahr ist. Die Antwort ist jein – kommt darauf an, was man mit 'sowas' meint. Nicht jede Funktion wird eine konvergente Potenzreihe sein - auch wenn es eine große Klasse von Funktionen gibt, die das sind. Für eine noch größere Klasse werden sich allerdings Polynome finden lassen, die eine gegebene Funktion  $f$  in der Umgebung eines Punktes  $(x_0, f(x_0))$  gut approximieren und die Approximation wird dann i.A. besser je höher der Grad des Polynoms ist. Was heißt hier besser? Dass die Differenz 'Funktion - Polynom' wenn  $x$  sich  $x_0$  annähert, schneller gegen Null geht. Das mindeste sollte aber sein, dass diese Differenz überhaupt gegen Null geht.



Bei der Exponentialfunktion approximiert z.B.  $s_0(x) = 1$  Funktionswerte  $e^x$  nahe  $x = 0$ , aber  $s_1(x) = 1 + x$  ist für  $x$  die nahe genug eine bessere Approximation von  $e^x$ . Man sieht am Graphen, dass  $|e^x - s_1(x)|$  für  $x$  nahe 0 kleiner als  $|e^x - s_0(x)|$  ist.

Andererseits sehen wir am Beispiel, wo  $x \leq 0$  auf 0 abgebildet wird und  $x > 0$  auf 1, dass schon die 'nullte Approximation' mit konstanten Funktionen (hier  $x \mapsto 0$ ) i.A. nicht Funktionswerte nahe  $(x_0, f(x_0))$  approximieren müssen (Egal wie klein  $x > 0$  ist, ist der Funktionswert 1 und damit weit weg von 0).

Wir werden verschiedene Klassen von Funktionen kennenlernen, wo diese Approximationen (jeweils bis zu einem bestimmten Grad des Polynoms) funktionieren und beginnen werden wir mit der nullten Approximation, der Approximation durch kon-

stante Funktionen nahe einer gegebenen Stelle – das wird der Begriff der Stetigkeit sein.

## 4.1 Stetigkeit

### 4.1.1 Folgenstetigkeit und Stetigkeit

Wir wollen als erste Approximation den Stetigkeitsbegriff kennenlernen:

**Definition 4.1.1.** Eine Funktion  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in  $x_0 \in A$  *folgenstetig*, wenn es für alle Folgen  $(x_n)_n$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ist. Die Funktion  $f$  heißt *folgenstetig*, wenn  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  in allen  $x \in A$  folgenstetig ist.

**Beispiel 4.1.2.** • Für einige Funktionen haben wir die Folgenstetigkeit schon überprüft ohne das so zu benennen: Polynome und rationale Funktionen sind folgenstetig nach Beispiel 3.2.4, Potenzreihen sind stetig für alle  $x \in (-R, R)$  mit  $R$  der Konvergenzradius nach Satz 3.12.26 Konvergenzradius.

Damit sind exp, sin und cos auf ganz  $\mathbb{R}$  folgenstetig.

- Die *Heaviside Funktion*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist folgenstetig in allen  $x \neq 0$ : Sei o.B.d.A.  $x > 0$  (Der Fall  $x < 0$  geht analog). Sei  $x_n$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow x$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$  und somit  $f(x_n) = 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit konvergiert  $f(x_n) \rightarrow 1 = f(x)$  und  $f$  ist folgenstetig in  $x > 0$ .

Aber  $f$  ist nicht folgenstetig in  $x = 0$ : Wähle  $x_n = \frac{1}{n}$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow 0$ , aber  $f(x_n) = 1$  konvergiert nicht gegen  $0 = f(0)$ .

Folgenstetigkeit bedeutet, dass man den Funktionswert an einer Stelle, approximativ durch Funktionswerte nahe dieser Stelle bestimmen kann. Man kann auch anders herum fragen, wann kann man mit dem Funktionswert an einer Stelle die Funktionswerte nahe der Stelle approximieren. Das leistet der Begriff der Stetigkeit:

**Definition 4.1.3** (Stetigkeit –  $\epsilon$  –  $\delta$ -Kriterium). Eine Funktion  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in  $x_0 \in A$  *stetig*, wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

gilt. Die Funktion  $f$  heißt *stetig*, wenn  $f$  in allen  $x \in A$  stetig ist.

Die Stetigkeitsdefinition mit Quantoren geschrieben:

Eine Funktion  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $x_0 \in A$ , falls:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

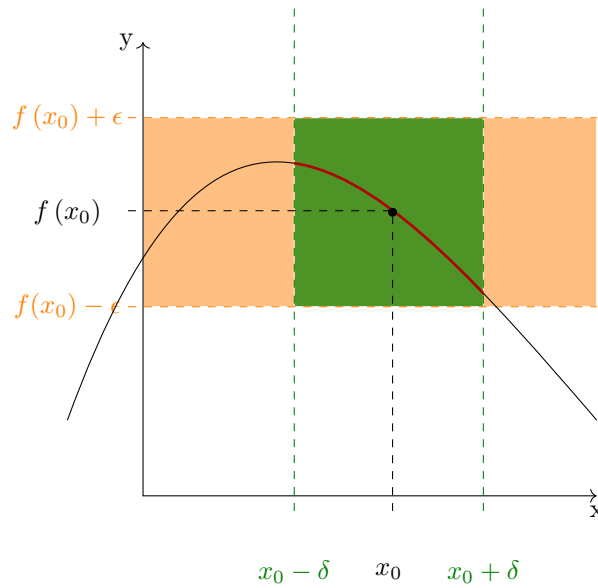


Abbildung 4.1: Für jedes  $\epsilon > 0$  muss das  $\delta > 0$  so gewählt werden, dass der rote Abschnitt der Kurve, also  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = f(B_\delta(x_0))$ , vollständig im grünen Bereich liegt.

**Beispiel 4.1.4.** (i) Die *konstante Funktion* mit Wert  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto a$ , ist stetig:

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Wir müssen zeigen, dass  $f$  in  $x_0$  stetig ist. Dazu sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $\delta = 1$  (jedes  $\delta > 0$  funktioniert hier). Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , dass  $|f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \epsilon$  ist.

(ii)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2x$ , ist stetig: Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Sei  $\epsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \delta$ :

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0| < 2\delta = \epsilon.$$

(iii)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ , ist stetig in allen  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

Sei  $\epsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2|x_0|+1}\}$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \delta$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq \delta(|x| + |x_0|) \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \delta(2|x_0| + |x - x_0|) \leq \delta(2|x_0| + \delta) \stackrel{\delta < 1}{\leq} \delta(2|x_0| + 1) \end{aligned}$$

— Das  $\delta$  darf (und wird im Allgemeinen) von  $x_0$  und  $\epsilon$  abhängen. —

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Bemerkung 4.1.5** (Negation – nicht stetig in  $x_0$ ). Eine Funktion  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht in  $x_0 \in A$  stetig, wenn

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| > \epsilon.$$

In Worten: ... wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gibt, so dass  $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$  ist.

**Beispiel 4.1.6.** Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig  $x_0 = 0$ :

Wir zeigen nun, dass  $f$  nicht in  $x_0 = 0$  stetig ist: Wähle  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Sei  $\delta > 0$ . Dann gilt für  $x = \frac{\delta}{2}$ , dass  $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \epsilon$  ist.

**Lemma 4.1.7** (Stetigkeit = Folgenstetigkeit für Funktionen in  $\mathbb{R}$ ). Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in A$ . Dann ist die Funktion  $f$  genau dann in  $x_0$  stetig, wenn sie in  $x_0$  folgenstetig ist.

*Beweis.* Sei  $f$  zunächst in  $x_0$  stetig, und sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Wir wollen zeigen, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ :

Sei  $\epsilon > 0$ . Aus der Stetigkeit folgt, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt.

Aus  $x_n \rightarrow x_0$  folgt, dass es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| < \delta$  für alle  $n \geq n_0$  gibt. Zusammen gilt also  $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  und somit  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei nun  $f$  folgenstetig in  $x_0$ . Wir zeigen durch Beweis durch Widerspruch, dass  $f$  in  $x_0$  stetig ist: Ist  $f$  in  $x_0$  nicht stetig, dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  und  $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$  gibt. Für  $\delta = \frac{1}{n}$  heiße ein solches  $x$   $x_n$ . Dann gilt  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  und somit geht  $x_n \rightarrow x_0$  für  $n \rightarrow \infty$  während  $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$  gilt. Aber aus der Folgenstetigkeit folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ , was den Widerspruch gibt.  $\square$

Nach letztem Lemma wissen wir also direkt, dass Polynome und rationale Funktionen stetig sind und dass alle Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius  $R$  (also für alle  $x \in (-R, R)$ ) stetig sind.

Als nächstes sehen wir Stetigkeit eine *lokale Bedingung*, d.h.

**Lemma 4.1.8.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R}$ . Sei  $r > 0$  und  $x_0 \in A$ . Dann ist die Einschränkung  $f: A \cap B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann stetig in  $x_0 \in A$ , wenn  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in A$  ist.

*Beweis.* Sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ . Sei nun  $x_n$  eine Folge in  $A \cap B_r(x_0)$ , die gegen  $x_0$  konvergiert. Dann ist das automatisch eine Folge in  $A$  und damit konvergiert  $f(x_n)$  gegen  $f(x_0)$ .

Sei  $f: A \cap B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  folgenstetig in  $x_0$ . Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$ , die gegen  $x_0$  konvergiert. Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x_0| < r$ , also  $x_n \in B_r(x_0)$ , für

alle  $n \geq n_0$ . Also ist  $(x_n)_{n \geq n_0}$  eine Folge in  $A \cap B_r(x_0)$  und somit konvergiert  $f(x_n)$  gegen  $f(x_0)$ .  $\square$

**Lemma 4.1.9.** (i) Sind  $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , dann sind auch  $f + g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$ , und  $fg: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$  stetig in  $x_0$ . Falls zusätzlich  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$  ist, ist auch  $\frac{f}{g}: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ , stetig in  $x_0$ .

(ii) Seien  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(A) \subset B$ . Ist  $f$  stetig in  $x_0 \in A$  und  $g$  stetig in  $f(x_0)$ , dann ist  $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Wir überprüfen die Aussagen, in dem wir jeweils die Folgenstetigkeit in  $x_0$  überprüfen:

(i) Sei  $x_n$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Da  $f$  und  $g$  stetig in  $x_0$  sind, folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  und  $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt  $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$  sowie  $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(x_0)g(x_0) = (fg)(x_0)$ . Für  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$  folgt auch  $\frac{f}{g}(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0)$ .

(ii) Sei  $x_n$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann folgt, da  $f$  in  $x_0$  stetig ist, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $(f(x_n))_n$  nun eine Folge in  $B$  ist, die gegen  $f(x_0)$  konvergiert und  $g$  dort stetig ist, folgt,  $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Beispiel 4.1.10.** Mit dem letzten Lemma und dem Wissen, dass Polynome, die Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus auf  $\mathbb{R}$  stetig sind, erhalten wir sofort, dass z.B. die folgenden Funktionen stetig sind:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x + \cos x$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \sin x$
- $f: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{x+\sin x}$

**Lemma 4.1.11.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass es ein  $L > 0$  gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle  $x, y \in A$ . Dann ist  $f$  stetig.

Eine solche Funktion nennt man *Lipschitz-stetig*.

*Beweis.* Sei  $x_0 \in A$  und sei  $\epsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta = \frac{\epsilon}{L} > 0$ . Dann gilt für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \epsilon$$

ist. Also ist  $f$  stetig.  $\square$

Z.B. ist jede Kontraktion (vgl. Übungsaufgabe 11) Lipschitz-stetig (mit  $L \in (0, 1)$ ) und damit stetig.

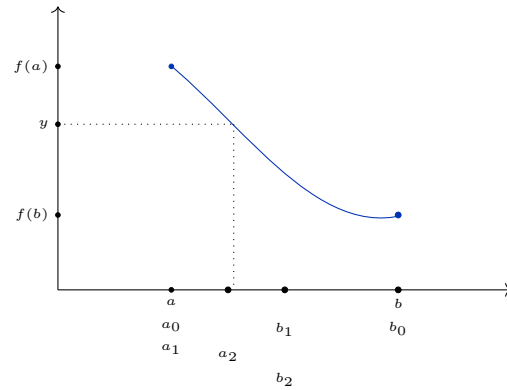


Abbildung 4.2: Intervallschachtelung für den Zwischenwertsatz

### 4.1.2 Zwischenwertsatz

**Satz 4.1.12.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Sei  $y \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(a) \leq y \leq f(b)$  oder  $f(b) \leq y \leq f(a)$  ist. Dann gibt es ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

*Beweis.* Wir werden das  $x$  mit Hilfe einer Intervallschachtelung konstruieren, vgl. Abbildung 4.2: Sei  $a_0 = a$  und  $b_0 = b$  und  $I_0 = [a_0, b_0]$ . O.B.d.A. sei  $f(b) \leq y \leq f(a)$  (also wie im Bild, der andere Fall geht analog. Haben wir schon  $I_n = [a_n, b_n]$  so konstruiert, dass  $f(b_n) \leq y \leq f(a_n)$  gilt, dass setzen wir

$$I_{n+1} = \begin{cases} [a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n] & f(b_n) \leq y \leq f(\frac{a_n+b_n}{2}) \\ [a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt auch  $f(b_{n+1}) \leq y \leq f(a_{n+1})$ . So erhalten wir eine Folge von Intervallen  $(I_n)_n$  mit  $I_{n+1} \subset I_n$  und  $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$  für alle  $n$ . Wir haben also eine Intervallschachtelung konstruiert. Also gibt es ein  $x \in [a, b]$  mit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . (Bis hierhin wurde noch nicht verwendet, dass  $f$  stetig ist.) Da  $f$  stetig ist, folgt  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ . Da aber nach Konstruktion  $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$  für alle  $n$  gilt, ist nach dem Einschnürungssatz  $y = f(x)$ .  $\square$

**Folgerung 4.1.13.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I)$  auch ein Intervall in  $\mathbb{R}$ .

Achtung: Auch wenn  $f(I)$  wieder ein Intervall ist, muss es nicht die 'gleiche Art' von Intervall sein, d.h. offene Intervalle werden i.A. nicht auf offene Intervalle abgebildet, z.B. Für  $f(x) = x^2$  ist  $f((-1, 3)) = [0, 9]$ .

Ist  $f$  allerdings streng monoton, dann kann man sich überlegen, dass die 'Art des Intervalls' (offen, geschlossen, halboffen) erhalten bleibt (nur wird bei streng monoton fallend aus einem linksoffenen Intervall ein rechtsoffenes und umgekehrt).

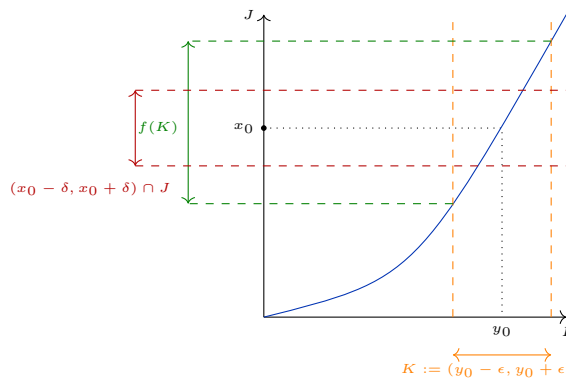


## 4.1 Stetigkeit

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $f(I)$  ein Intervall ist, müssen wir zeigen, dass für alle  $a, b \in I$  mit  $f(a) < f(b)$ ,  $[f(a), f(b)] \subset f(I)$  gilt: Sei  $y \in [f(a), f(b)]$ , also  $f(a) \leq y \leq f(b)$ . Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ . Also ist  $y \in f(I)$  und somit  $[f(a), f(b)] \subset f(I)$ .  $\square$

**Satz 4.1.14.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng monotone stetige Funktion. Sei  $J = f(I)$ . Dann ist  $f: I \rightarrow J$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $f^{-1}: J \rightarrow I$  ist stetig.

*Beweis.* Surjektivität von  $f: I \rightarrow J$  ist klar, da  $J = f(I)$  ist. Injektivität folgt direkt aus der strengen Monotonie: O.B.d.A. sei  $f$  streng monoton wachsend und  $x < y$ , dann ist  $f(x) < f(y)$ . Also ist  $f$  bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass  $f^{-1}: J \rightarrow I$  stetig ist:



Sei  $x_0 \in J$ . Setze  $y_0 = f^{-1}(x_0)$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Es ist zu zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $|f^{-1}(x) - y_0| \leq \epsilon$  für alle  $x \in J$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt.

Die Menge  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I$  wieder ein Intervall und, da  $f$  stetig ist,

ist  $K := f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I) = f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)) \cap J$  somit ein Intervall mit  $y_0 = f(x_0) \in K$ .

1.Fall: Es existiert ein  $\delta > 0$  mit  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J \subset K$ . D.h. für alle  $y \in I$  mit  $|y - y_0|$  ist  $f^{-1}(y) \in K$ , also  $|f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$ .

2.Fall:  $x_0$  ist eine Intervallgrenze von  $K^*$ . Da bei streng monoton stetigen Funktionen die Art des Intervalls erhalten bleibt, muss auch  $y_0$  eine Grenze des Intervalls  $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \cap I$  und damit eine Grenze von  $I$  sein. Dann ist aber  $x_0$  eine Grenze des Intervalls  $J$  und somit existiert doch ein  $\delta > 0$  mit  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J \subset K$  und wir sind doch im ersten Fall.  $\square$

**Beispiel 4.1.15.** Die  $n$ .te Potenz auf nichtnegativen Zahlen  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist stetig, streng monoton wachsend und surjektiv. Also ist die  $n$ .te Wurzel  $\sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  stetig.

Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv, also ist der Logarithmus  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Satz 4.1.16.** Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>also  $K$  hat die Form  $[x_0, \cdot)$ ,  $[x_0, \cdot]$ ,  $(\cdot, x_0]$  oder  $(\cdot, x_0]$

<sup>†</sup>Für Polynome geraden Grades gilt das i.A. nicht, z.B.  $x \mapsto x^2 + 1$ .

#### 4 Funktionen in einer Variablen

*Beweis.* Sei  $p(x) = a_d x^d + \dots + a_0$  mit  $d$  ungerade. O.B.d.A. sei  $a_d > 0$  (ansonsten betrachte  $-p(x)$ ). Sei  $x_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow \pm\infty^*$  für  $n \rightarrow \infty$ . Insbesondere ist dann  $x_n \neq 0$  für alle  $n$  groß genug. Dann haben wir für  $n \rightarrow \infty$

$$p(x_n) = \underbrace{a_d x_n^d}_{\rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left( 1 + \underbrace{\frac{a_{d-1}}{a_d x_n} + \dots + \frac{a_0}{a_d x_n^d}}_{\rightarrow 0} \right)}_{\rightarrow \pm\infty \text{ nach Lemma 3.3.4}}.$$

Also gibt es  $x_{\pm} \in \mathbb{R}$  mit  $p(x_+) > 0$  und  $p(x_-) < 0$ . Da Polynome stetig sind, muss es nach dem Zwischenwertsatz ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $p(x) = 0$  geben.  $\square$

#### 4.1.3 Sinus, Kosinus und Pi

Wir hatten den Kosinus bzw. Sinus als Real- und Imaginärteil von  $e^{ix}$ , für  $x \in \mathbb{R}$ , definiert und gesehen, dass somit

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

ist. Beide Potenzreihen haben Konvergenzradius unendlich und definieren somit stetige Funktionen

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir wollen uns nun überlegen, dass der Kosinus Nullstellen besitzt. Dazu schätzen wir zuerst  $\cos 2$  ab:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \underbrace{\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}}_{<0} - \underbrace{\frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}}_{<0} + \dots,$$

da für  $n \geq 1$  immer  $\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$  gilt (da  $(n+1)(n+2) > 4$ ). Also ist

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Außerdem ist  $\cos 0 = 1$ . Da der Kosinus stetig ist, ergibt sich aus dem Zwischenwertsatz, dass der Kosinus auf  $[0, 2]$  eine Nullstelle besitzen muss.

Wir wollen die kleinste dieser Nullstellen auf dem Intervall  $[0, 2]$  benutzen, um  $\pi$  zu definieren. Dazu müssen wir uns jedoch erst einmal überlegen, dass es eine solche kleinste

---

\*Wir betrachten hier gleichzeitig, die beiden Fälle  $x_n \rightarrow \infty$  und  $x_n \rightarrow -\infty$ .

Nullstelle in  $[0, 2]$  gibt. Dazu definieren wir uns die Menge  $M := \{x \in [0, 2] \mid \cos x = 0\}$  und setzen  $a := \inf M$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $a$  in Wirklichkeit das Minimum von  $M$  ist (das Infimum also angenommen wird) und damit diese kleinste Nullstelle ist:

Es gibt eine Folge in  $x_n$  in  $M$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Aus der Stetigkeit (=Folgenstetigkeit) des Kosinus folgt  $0 = \cos x_n \rightarrow \cos a$ , also  $\cos a = 0$  und somit  $a \in M$ . Es ist klar, dass  $a \in (0, 2)$  liegt.

**Definition 4.1.17.** Die Zahl  $\pi$  ist definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle vom Kosinus.

Also ist das  $a$  von oben gleich  $\frac{\pi}{2}$  und damit ist  $\pi \in (0, 4)$ .

**Satz 4.1.18.** (i)  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(ii)  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$  und  $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

(iii) Die Funktionen  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \cos x$  und  $x \mapsto e^{ix}$  sind  $2\pi$ -periodisch und  $\pi$ -antiperiodisch. (Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $a$ -periodisch bzw.  $a$ -antiperiodisch, falls  $f(x) = f(x + a)$  bzw.  $f(x) = -f(x + a)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.)

(iv) Aus  $e^{ix} = 1$  folgt  $x = 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

(v) Die Abbildung  $[0, 2\pi) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ,  $x \mapsto e^{ix}$ , ist bijektiv.

*Beweis.* (i) Aus dem trigonometrischen Pythagoras folgt  $1 = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2}$ . Wenn wir jetzt noch wüssten, dass  $\sin \frac{\pi}{2} > 0$  ist, folgt die Behauptung: Dazu schätzen wir mit dem gleichen Argument wie bei  $\cos 2$  von oben ab:

Für  $a = \frac{\pi}{2} \in [0, 2]$  und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  gilt  $\frac{a^n}{n!} > \frac{a^{n+2}}{n+2!}$ , da  $(n+1)(n+2) \geq 6 > 4 \geq \frac{\pi^2}{4}$ . Somit ist

$$\begin{aligned} \sin a &= a - \frac{a^3}{3!} + \underbrace{\frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!}}_{>0} + \dots \\ &\underset{a=\frac{\pi}{2}}{>} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{4 \cdot 6}\right) \underset{0 < \pi < 4}{>} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{4}{6}\right) > 0. \end{aligned}$$

(ii) Es ist  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i1 = i$ . Damit ist  $e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = e^{ix} e^{i\frac{\pi}{2}} = ie^{ix} = i \cos x - \sin x$ . Vergleich mit  $e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = \cos(x + \frac{\pi}{2}) + i \sin(x + \frac{\pi}{2})$  liefert die Behauptung.

(iii) Es ist  $e^{i\pi} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = i^2 = -1$  und damit

$$e^{i(x+\pi)} = e^{i\pi} e^{ix} = -e^{ix}.$$

Also ist  $e^{ix}$  und damit auch der Real- und Imaginärteil  $\pi$ -antiperiodisch und somit  $2\pi$ -periodisch.

(iv) Es ist wirklich  $e^{i2\pi k} = (e^{i2\pi})^k = 1^k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Was wir wirklich zeigen müssen ist, dass es nicht mehr Lösungen gibt: Sei  $x \in \mathbb{R}$  eine Lösung von  $e^{ix} = 1$ . Dann ist wegen (iii) auch  $e^{i(x+2\pi k)} = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Wir wählen  $k \in \mathbb{Z}$  derart, dass  $y := x + 2\pi k \in [-\pi, \pi)$  ist. Dann ist  $\sin y = 0$  und  $\cos y = 1$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $y = 0$  sein muss:

Setzen wir  $u := y + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . Dann ist  $\cos u = \cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y = 0$  und  $\sin u = \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y = 1$ . Wir wissen, dass der Kosinus keine Nullstelle in  $(0, \frac{\pi}{2})$  hat und wegen  $\cos x = \cos(-x)$  damit auch keine in  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ . Zusammen mit  $\cos 0 = 1$  und der  $\pi$ -Antiperiodizität hat der Kosinus in  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  nur die Nullstellen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$ . Wegen  $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$  muss  $u = \frac{\pi}{2}$  und damit  $y = 0$  sein.

(v) Injektivität: Sei  $s, t \in [0, 2\pi)$ . Aus  $e^{is} = e^{it}$ , folgt  $e^{i(s-t)} = 1$  und somit  $s - t = 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Da  $s - t \in (-2\pi, 2\pi)$  ist, folgt  $k = 0$  und somit  $s = t$ .

Surjektivität: Dass  $\cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$  gilt, folgt direkt aus dem trigonometrischen Pythagoras. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Dies folgt aber direkt aus dem Zwischenwertsatz, da der Kosinus stetig ist und  $\cos 0 = 1$  und  $\cos \pi = -\cos 0 = -1$  gilt.

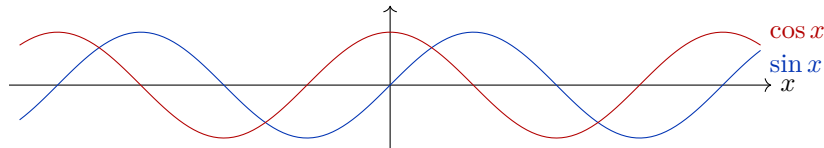
Sei  $z = x + iy$  mit  $|z| = 1$ . Wegen  $1 = |z|^2 = x^2 + y^2$  ist somit  $|x| \leq 1$  und es gibt ein  $t \in [0, \pi]$  mit  $\cos t = x$ . Wegen des trigonometrischen Pythagoras ist dann  $\sin t$  gleich  $y$  oder  $-y$ . Falls es gleich  $y$  ist, ist  $e^{it} = z$  und sonst  $e^{-it} = e^{i(2\pi-t)} = z$ . In beiden Fällen haben wir also ein  $s \in [0, 2\pi)$  mit  $e^{is} = z$ . Also folgt die Surjektivität.  $\square$

Insbesondere haben wir in dem Beweis in (iv) alle Nullstellen des Kosinus in  $[0, 2\pi)$  und damit wegen der  $2\pi$ -Periodizität alle Nullstellen des Kosinus gefunden:

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zusammen mit (ii) ist dann

$$\sin x = 0 \iff x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



**Woche 7 Satz 4.1.19.** Jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  hat eine Darstellung  $z = re^{i\varphi}$  mit  $r > 0$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Hierbei ist  $r = |z|$  und  $\varphi$  ist bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt.

Man nennt dann  $(r, \varphi)$  die Polardarstellung von  $z$ .

*Beweis.* Setzen wir  $r = |z|$ . Dann ist  $r > 0$ . Wir definieren  $w = \frac{z}{|z|}$ . Dann ist  $|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ . Nach Satz 4.1.18.v gibt es ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$  mit  $w = e^{i\varphi}$  und somit  $z = re^{i\varphi}$ . Wir haben bis hierhin gezeigt, dass jedes  $z \neq 0$  eine Darstellung der Form  $re^{i\varphi}$  mit  $r > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Sei nun auch  $z = r_1 e^{i\varphi_1}$ . Dann folgt  $r_1 = |z| = r$  und  $e^{i(\varphi-\varphi_1)} = 1$ . Nach Satz 4.1.18.iv gibt es somit ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $\varphi_1 = \varphi + 2\pi k$ .  $\square$

Ist  $z = re^{i\varphi}$  und  $w = se^{i\psi}$ , dann ist  $zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$ . Das ist genau die Gleichung, die wir als Motivation bei der Einführung der komplexen Zahlen verwendet haben.

Wir haben also gesehen, dass Multiplikation von komplexen Zahlen in der Polarstellung besonders einfach ist. Wohingegen Addition leichter in der Darstellung  $a+ib$  funktioniert. Auch fürs 'Wurzelziehen' eignet sich die Polardarstellung sehr gut:

**Satz 4.1.20.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$ ,  $z = re^{i\varphi}$ , und  $n \in \mathbb{N}_{>1}$ . Dann hat die Gleichung  $w^n = z$  genau die Lösungen

$$\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}, \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}, \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+4\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+(n-1)2\pi}{n}}.$$

*Beweis.* Dass dies alles Lösungen sind, ergibt sich direkt aus  $\left(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+k2\pi}{n}}\right)^n = re^{i(\varphi+2\pi k)} = re^{i\varphi} = z$ . Die Lösungen sind auch alle verschieden, da  $e^{i\frac{2\pi k}{n}} \neq 1$  ist für  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  (vgl. Satz 4.1.18.iv). Da ein Polynom vom Grad  $n$  nur  $n$  komplexe Nullstellen haben kann, sind das alle Lösungen.  $\square$

#### 4.1.4 Erste topologische Grundbegriffe

Wir werden in diesem Abschnitt erste wichtige topologische Grundbegriffe kennenlernen. Das wichtigste Beispiel, was wir aus Sicht der Analysis I immer im Kopf haben sollten, ist  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  mit dem euklidischen Abstand. Aber es lohnt sich hier schon mal auch ein paar andere Beispiele gesehen zu haben:

**Definition 4.1.21.** Eine Menge  $X$  zusammen mit einer Funktion  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *metrischer Raum*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) (Definitheit)  $d(p, q) \geq 0$  für alle  $p, q \in X$  und falls  $d(p, q) = 0$  genau dann gilt, wenn  $p = q$  ist.
- (ii) (Symmetrie)  $d(p, q) = d(q, p)$  für alle  $p, q \in X$
- (iii) (Dreiecksungleichung)  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$  für alle  $p, q, r \in X$ .

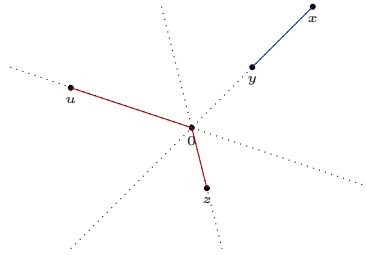
Wir schreiben dann  $(X, d)$  für den metrischen Raum und nennen  $d$  eine *Abstandsfunktion* auf  $X$ .

**Beispiel 4.1.22.** (Beispiele metrischer Räume)

- (i)  $\mathbb{R}^n$  mit  $d(x, y) = |x - y|$
- (ii)  $\mathbb{R}$  mit  $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$  (Übungsaufgabe)
- (iii) (französische Eisenbahnmetrik)  $\mathbb{R}^2$  mit

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{falls } x, y \text{ auf einer Ursprungsgeraden liegen} \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen



- (iv) (Hammingabstand) Sei  $\Sigma$  eine endliche Menge. Dann ist der Hammingabstand auf  $\Sigma^n := \underbrace{\Sigma \times \dots \times \Sigma}_{n\text{-mal}}$  gegeben durch:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \neq y_i\}$$

Hier ist  $\#M$  die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $M$ . Der Hammingabstand macht  $(\Sigma^n, d)$  zu einem metrischen Raum. Er spielt z.B. in der Kodierungstheorie eine Rolle.\* In diesem Kontext wird die Menge  $\Sigma$  dann Alphabet genannt.

- (v) Viele Funktionenräume (Mengen von Funktionen mit gewissen Eigenschaften) werden metrische Räume sein. Wir geben hier ein Beispiel:

Sei  $X = C^0([a, b], \mathbb{R})$  die Menge der stetigen Funktionen  $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiere  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$d(f, g) := \sup\{|(f - g)(x)| \mid x \in [a, b]\} (=:\sup_{[a, b]} |f - g|).$$

Dann muss man sich erst einmal überlegen, dass  $d(f, g)$  immer endlich ist. Das liegt daran, dass  $[a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall ist. Kommt bald im Satz über Maximum.

Wenn wir das aber annehmen, können wir nachrechnen, dass  $(X, d)$  so ein metrischer Raum wird:

Definitheit:  $d(f, g) \geq 0$  klar. Ist  $d(f, g) = 0$ , dann muss  $(f - g)(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$  und damit  $f = g$  sein.

Symmetrie: klar, da  $|(f - g)(x)| = |(g - f)(x)|$  ist.

Fehlt die Dreiecksungleichung: Seien  $f, g, h \in X$ . Dann gilt mit der Dreiecksungleichung für Beträge:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup\{|(f - g)(x)| \mid x \in [a, b]\} \leq \sup\{|(f - h)(x)| + |(h - g)(x)| \mid x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|(f - h)(x)| \mid x \in [a, b]\} + \sup\{|(h - g)(x)| \mid x \in [a, b]\} \\ &\leq d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

---

\*<https://de.wikipedia.org/wiki/Hamming-Abstand>

**Definition 4.1.23.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Sei  $E \subset X$ .

- (i) Für  $r > 0$ ,  $p \in X$ , heißt

$$B_r(p) := \{q \in X \mid d(q, p) < r\}$$

$r$ -Umgebung um  $p$  oder  $r$ -Ball um  $p$ .

- (ii) Der Punkt  $p \in E$  heißt *innerer Punkt von  $E$* , wenn es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $B_r(p) \subset E$  gilt.
- (iii) Die Teilmenge  $E$  heißt *offen*, wenn jeder Punkt von  $E$  ein innerer Punkt ist.
- (iv) Die Teilmenge  $E$  heißt *abgeschlossen* in  $X$ , wenn  $X \setminus E$  offen ist.
- (v) Die Teilmengen  $E$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $q \in X$  und ein  $r > 0$  mit  $E \subset B_r(q)$  gibt.
- (vi) Ein Punkt  $p \in X$  heißt *Häufungspunkt von  $E$* , wenn es für jedes  $r > 0$  ein  $q \in E$  mit  $q \neq p$  und  $q \in B_r(p)$  gibt.

**Beispiel 4.1.24.** (i)  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  ist beschränkt, da  $(0, 1) \subset B_1(0)$ . Jedes  $q \in (0, 1)$  ist ein innerer Punkt, da  $B_r(q) \subset (0, 1)$  für  $r = \min\{q, 1 - q\}$  ist. Damit ist  $(0, 1)$  auch offen. Die Menge der Häufungspunkte ist  $[0, 1]$ . Die Menge  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist abgeschlossen und beschränkt.

- (ii) Jede endliche Menge in einem metrischen Raum ist beschränkt, abgeschlossen und besitzt keinen Häufungspunkt:

Sei  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  die endliche Menge und sei  $r = \max\{d(e_1, e_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Dann ist  $E \subset B_{2r}(e_1)$  und die Menge ist beschränkt.

Sei  $p \in X \setminus E$  und  $s = \min\{d(e_i, p) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Dann ist  $s > 0$ , da  $E$  endlich ist, und somit  $B_s(p) \subset X \setminus E$ . Also ist  $X \setminus E$  offen und damit  $E$  abgeschlossen.

Für einen Häufungspunkt  $p$  von  $E$  brauchen wir für alle  $r > 0$  ein  $q \in E$  mit  $q \neq p$  und  $q \in B_r(p)$ . Da aber für das obige  $s$  gilt  $B_s(p) \subset X \setminus E$ , falls  $p \in X \setminus E$ , bzw.  $B_s(p) \cap E = \{p\}$  für  $p \in E$ , kann es für  $r \leq s$  kein solches  $q$  geben und somit kann  $E$  Häufungspunkte haben.

- (iii) Für  $(X, d)$  metrischen Raum,  $p \in X$  und  $r > 0$  ist  $B_r(p)$  offen:

Sei  $q \in B_r(p)$ . Wir müssen zeigen, dass  $q$  ein innerer Punkt von  $B_r(p)$  ist. Dazu sei  $\delta = r - d(p, q)$ . Dann ist  $\delta > 0$ , da  $q \in B_r(p)$ . So gilt für alle  $z \in B_\delta(q)$ , dass

$$d(z, p) \leq d(z, q) + d(p, q) < \delta + d(p, q) = r$$

und somit  $z \in B_r(p)$ . Also ist  $B_\delta(q) \subset B_r(p)$  und damit  $q$  innerer Punkt von  $B_r(p)$ .

- (iv) Die Menge  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + 2|y| < 2\}$  ist

#### 4 Funktionen in einer Variablen

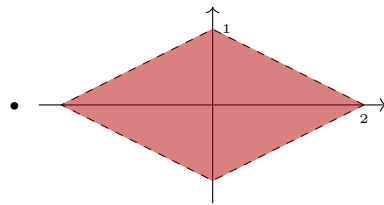
- beschränkt, da für alle  $(x, y) \in M$

$$d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y| \leq |x| + 2|y| < 2$$

und somit  $M \subset B_2((0, 0))$ .

- offen: Sei  $(x, y) \in M$  und  $q = |x| + 2|y|$ . Dann ist insbesondere  $q < 2$ . Wähle  $\delta = \frac{2-q}{4}$ . Dann gilt für alle  $(\hat{x}, \hat{y}) \in B_\delta((x, y))$ , dass (wir benutzen  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ )

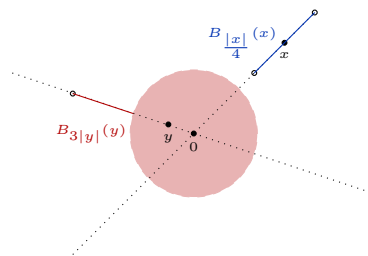
$$\begin{aligned} |\hat{x}| + 2|\hat{y}| &= |x + (\hat{x} - x)| + 2|y + (\hat{y} - y)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x| + 2|y| + 2(|\hat{x} - x| + |\hat{y} - y|) \\ &\leq q + 2\sqrt{2}\sqrt{|\hat{x} - x|^2 + |\hat{y} - y|^2} < q + 2\delta = 2. \end{aligned}$$



Z.B. ist  $(2, 0)$  ein Häufungspunkt von  $M$ , da  $(2-s, 0) \in M$  für alle  $s < 2$  gilt und somit für alle  $r > 0$  gilt:  $(2-s, 0) \in B_r((2, 0))$  für  $s = \min\{s, \frac{r}{2}\}$ .

Die Menge  $M$  ist das Innere dieses roten Gebietes und man kann sich überlegen, dass das ganze rote Gebiet und alle Punkte auf dem Rand Häufungspunkte von  $M$  sind.

(v) Eisenbahnmetrik:



Die Endpunkte von der Geradenabschnitte (mit Kreisen gekennzeichnet) gehören nicht zu den Bällen. Auch der Rand des roten Kreises (das ist der euklidische Kreis mit Radius  $2|w|$ ) außer dem Randpunkt des roten Geradenabschnitts gehört nicht zur Menge  $B_{3|y|}(y)$ .

Die Menge  $S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  hat keine Häufungspunkte bzgl. der Eisenbahnmetrik, da für  $u, v \in S^1$ ,  $u \neq v$ , der Abstand in der Eisenbahnmetrik immer gleich 2 ist. (aber natürlich sind alle Punkte in  $S^1$  Häufungspunkte bzgl. der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ .)

**Achtung:** Häufungspunkt einer Menge und einer Folge sind erst einmal verschiedene Sachen. Die Folge  $a_n = (-1)^n$  hat die Häufungspunkte 1 und -1, aber die Menge  $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{+1, -1\}$  ist endlich und hat keine Häufungspunkte.

Ein Punkt  $p \in X$  ist genau dann Häufungspunkt einer Teilmenge  $E \subset X$ , wenn es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $E$  mit  $x_n \neq p$  gibt, so dass  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(p)$  gilt. (Für  $r > 0$ , wähle  $x_n$  mit  $n > \frac{1}{r}$ . Dann ist  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \subset B_r(p)$ .)



**Lemma 4.1.25.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $E \subset X$ . Dann ist  $E$  genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von  $E$  schon in  $E$  liegt.

*Beweis.* Sei zunächst jeder Häufungspunkt von  $E$  schon in  $E$ . Wir wollen zeigen, dass  $X \setminus E$  offen ist. Dazu sei  $q \in X \setminus E$ . Wir beweisen durch Widerspruch, dass  $q$  ein innerer Punkt von  $X \setminus E$  sein muss: Ist  $q$  kein innerer Punkt, dann gibt es für alle  $r > 0$  ein  $x_r \in E$  mit  $x_r \in B_r(q)$ . Wegen  $q \in X \setminus E$  sind diese  $x_r$  von  $q$  verschieden. Also ist  $q$  Häufungspunkt von  $E$  und muss damit in  $E$  liegen, was der gesuchte Widerspruch ist.

Sei nun  $E$  abgeschlossen, also  $X \setminus E$  offen. Sei  $q$  ein Häufungspunkt von  $E$ . Angenommen,  $q \notin E$ , also  $q \in X \setminus E$ . Da  $X \setminus E$  offen ist, ist  $q$  ein innerer Punkt von  $X \setminus E$  und somit gibt es ein  $r > 0$  mit  $B_r(q) \subset X \setminus E$ . Dann kann aber  $q$  kein Häufungspunkt von  $E$  sein. Also muss schon  $q \in E$  gelten.  $\square$

**Definition 4.1.26.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $E \subset X$  liegt *dicht* in  $X$ , wenn jedes  $p \in X \setminus E$  ein Häufungspunkt von  $E$  ist.

**Beispiel 4.1.27.** (i) Im  $\mathbb{R}^n$  mit euklidischem Abstand gilt: Die Menge der Häufungspunkte von  $B_r(p)$  ist

$$\overline{B_r(p)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| \leq r\} :$$

Ist  $x_n$  eine Folge in  $B_r(p)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann gilt  $|p - x_0| \leq |p - x_n| + |x_n - x_0| < r + |x_n - x_0| \rightarrow r$ . Also ist  $d(p, x_0) = |p - x_0| \leq r$  und damit  $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p) \leq r\}$ . Andererseits ist jedes  $q \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p) \leq r\}$  auch in  $\overline{B_r(p)}$ , denn es ist entweder schon in  $B_r(p)$  oder wenn  $d(q, p) = r$  ist, ist  $q$  Häufungspunkt, da  $(1 - \frac{1}{n})q \in B_r(p)$  für alle  $n$  und  $(1 - \frac{1}{n})q \rightarrow q$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

Also liegt  $B_r(p)$  dicht in  $\overline{B_r(p)}$ .

(ii)  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ , da jede reelle Zahl Grenzwert einer rationalen Folge ist. Auch  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}^2$ .

(iii)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist auch dicht in  $\mathbb{R}$ : Sei  $x \in \mathbb{Q}$ . Dann ist  $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$  eine Folge in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x$ .

**Definition 4.1.28.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  *konvergiert* gegen  $x_0 \in X$ , falls es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $x_n \in B_\epsilon(x_0)$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. (Gleiche Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  bzw.  $x_n \rightarrow x_0$  für  $n \rightarrow \infty$ ).

Eine Menge  $E \subset X$  nennen wir *kompakt*, falls jede Folge in  $E$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $E$  (also einen Häufungspunkt in  $E$ ) besitzt.

**Beispiel 4.1.29.**  $[a, b]$  ist kompakt in  $\mathbb{R}$ .  $(a, b)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  sind nicht kompakt in  $\mathbb{R}$ , da  $b - \frac{1}{n}$  (ab  $n$  groß genug) eine Folge in  $(a, b)$  mit Grenzwert  $b$  ist, analog für  $[a, b)$ , und da  $n$  für  $n \geq a$  eine Folge in  $[a, \infty)$  ist, die gar keine konvergente Teilfolge besitzt.

**Lemma 4.1.30.** Jede kompakte Menge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

*Beweis.* Sei  $(X, d)$  der metrische Raum und sei  $E \subset X$  kompakt.

Angenommen  $E$  ist nicht beschränkt. Sei  $q \in E$ . Dann gibt es für alle  $r = n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein  $p_n \in E$  mit  $p_n \notin B_n(q)$ , also  $d(p_n, q) \geq n$ . Die Folge  $p_n$  kann keine konvergente Teilfolge besitzen: Für alle  $p \in X$  gilt

$$d(p, p_n) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} d(q, p_n) - d(p, q) = n - d(p, q) \rightarrow \infty$$

also kann  $p$  kein Grenzwert einer Teilfolge von  $p_n$  sein. Das gibt den Widerspruch.

Angenommen  $E$  ist nicht abgeschlossen. Dann muss es nach Lemma 4.1.25 einen Häufungspunkt  $p \in X \setminus E$  von  $E$  und damit eine Folge  $x_n$  in  $E$  mit  $x_n \rightarrow p$  geben. Das ist auch ein Widerspruch zur Kompaktheit von  $E$ .  $\square$

Für Teilmengen des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^{n*}$  gilt auch die Umkehrung:

**Satz 4.1.31** (Satz von Heine-Borel). *Eine Teilmenge  $E$  des euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn  $E$  beschränkt und abgeschlossen ist.*

Das gilt auch für  $E$  Teilmengen von  $\mathbb{C}$ , da wir in  $\mathbb{C}$  auch den euklidischen Abstand von  $\mathbb{R}^2$  verwenden.

*Beweis.* Die eine Richtung folgt aus dem letzten Lemma. Sei nun  $E \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass es für jede Folge  $p_n \in E$  eine konvergente Teilfolge gibt, dessen Grenzwert in  $E$  liegt:  $E$  ist abgeschlossen. Damit folgt sobald die Teilfolge konvergent ist, dass der Grenzwert als Häufungspunkt von  $E$  schon in  $E$  liegt. Es bleibt also, zu zeigen, dass  $p_n$  eine konvergente Teilfolge besitzt: Da  $E$  eine beschränkte Menge ist, ist  $p_n$  eine beschränkte Folge und somit auch jede der Koordinatenfolgen von  $p_n$  beschränkt. Dann folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge direkt aus Bolzano-Weierstrass Satz 3.8.5 und Satz 3.9.7.  $\square$

#### 4.1.5 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 4.1.32.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Dann schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  bzw.  $f(x) \rightarrow y$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$|f(x) - y| \leq \epsilon$$

für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta^\dagger$

Achtung:  $x_0$  ist i.A. nicht in  $A$ .

Ist  $x_0 \in A$ , dann ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  äquivalent zur Aussage:  $f$  ist stetig in  $x_0$  und  $y = f(x_0)$ .<sup>‡</sup>

\*euklidischer Raum =  $\mathbb{R}^n$  mit dem euklidischen Abstand

<sup>†</sup>Je nach Literatur wird  $\lim_{x \rightarrow x_0} f$  auch oft so definiert, dass  $0 < |x - x_0| < \delta$  gelten muss, also  $x$  nicht gleich  $x_0$  sein darf. Das machen wir nicht so. Würden wir das doch mal meinen, würden wir das durch  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f$  klar machen. Das hat nicht so wirklich Auswirkungen, weil wir das oft sowieso bei Funktionen verwenden werden, die erst einmal nicht in  $x_0$  definiert sind.

<sup>‡</sup>Das wäre für falsch für  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} = y$  falsch.

Mit dem gleichen Beweis wie in Satz 4.1.7 (Stetigkeit=Folgenstetigkeit) sieht man direkt:

**Lemma 4.1.33.** *Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Dann gilt genau dann  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ , wenn für alle Folgen  $(x_n)_n$  in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$  ist.\**

Existiert aber der Grenzwert für einen Häufungspunkt außerhalb des Definitionsbereichs, dann können wir den Definitionsbereich dahin erweitern, und die neue Funktion wird in diesem Häufungspunkt stetig sein. Genauer:

**Lemma 4.1.34.** *Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ . Dann ist die Funktion  $\tilde{f}: A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

*in  $x_0$  stetig.*

Wir sagen:  $\tilde{f}$  setzt  $f$  stetig in  $x_0$  fort.

*Beweis.* Folgt direkt aus der Stetigkeitsdefinition und der Definition von  $\lim_{x \rightarrow x_0}$ : Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| = \begin{cases} |f(x) - y| & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0 \end{cases} \leq \epsilon$$

für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$ . □

**Beispiel 4.1.35.** (i) Die Funktion  $f(x): \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

ist stetig, aber kann in 1 nicht stetig fortgesetzt werden: Für  $x_n = 2 + \frac{1}{n}$  ist  $x_n \rightarrow 1$  und  $f(x_n) = 2 \rightarrow 2$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$  gilt  $x_n \rightarrow 1$  und  $f(x_n) = 1 \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wäre aber  $f$  in 1 stetig fortsetzbar, müsste für alle Folgen  $x_n \rightarrow 1$ ,  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , die Folgen der Funktionswerte  $f(x_n)$  die gleichen Grenzwerte haben. Das ist hier nicht der Fall.

- (ii) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig, da es eine rationale Funktion ist. Aber es gibt keine stetige Fortsetzung auf  $x = 0$ , da sonst insbesondere für jede Folge  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ , die Funktionswerte konvergieren müssen. Aber für  $x_n = \frac{1}{n}$  konvergiert  $f(x_n) = n$  nicht (sondern konvergiert uneigentlich gegen unendlich).

---

\*Für die alternative mit  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x)$  müssten hier nun die Folgen  $(x_n)_n$  aus  $A$  mit  $x_n \neq x_0$  für alle  $n$  stehen.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Am letzten Beispiel sehen wir, dass es auch ganz nützlich wäre auch für Funktion einen Begriff des 'Gegen-Unendlich-Konvergierens' zu haben. Für Folgen in  $\mathbb{R}$  haben wir auch uneigentliche Konvergenz definiert. D.h. wir können setzen

**Definition 4.1.36.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $x_0$  eine Häufungspunkt von  $A$ . Wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  bzw.  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls für alle Folgen  $(x_n)_n$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow \pm\infty$  folgt.

Hier haben wir im Gegensatz zur Definition 4.1.32 die Variante über Folgen gewählt, weil wir uneigentliche Konvergenz schon hatten. Aber auch hier gibt es ein Analogon zur  $\epsilon - \delta$ -Bedingung aus Definition 4.1.32:

**Lemma 4.1.37.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $x_0$  eine Häufungspunkt von  $A$ . Dann ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  genau dann, wenn für alle  $K > 0$  es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f(x) > K$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt.

*Beweis.* Der Beweis läuft sehr analog ab zum Beweis (Stetigkeit=Folgenstetigkeit) – also ruhig selber probieren.

Es gelte: Für alle  $K > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass  $f(x) > K$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt. Um zu zeigen, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  gilt, sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und sei  $K > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| < \delta$  für alle  $n \geq n_0$ . Hierbei sei  $\delta$ , das  $\delta$  aus der Definition von  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  für das gewählte  $K$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_0$ , dass  $f(x_n) > K$ . Also konvergiert  $f(x_n)$  uneigentlich gegen unendlich für  $n \rightarrow \infty$ .

Gelte nun: Für alle Folgen  $(x_n)_n$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  konvergiert  $f(x_n)$  uneigentlich gegen unendlich. Nehmen wir an, dass die Behauptung des Lemmas nicht gilt. Dann gibt es ein  $K > 0$ , so dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$  und  $f(x) \leq K$ . Für  $\delta = \frac{1}{n}$  nennen wir das zugehörige  $x$  dann  $x_n$ . Somit haben wir eine Folge  $(x_n)_n$  in  $A$  mit  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  und  $f(x_n) \leq K$ . Also konvergiert  $x_n$  gegen  $x_0$  aber die Folge der Funktionswerte  $(f(x_n))_n$  ist beschränkt, was uns den Widerspruch gibt.  $\square$

Die Rechenregeln für konvergenten Folgen übersetzen sich auf Grenzwerte von Folgen.

**Lemma 4.1.38.** Seien  $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Existieren die Limiten  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  in  $\mathbb{R}$ , dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{aligned}$$

und, falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$  ist,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Ähnlich übersetzen sich auch die Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz, z.B. aus  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R} \cap \{\infty\}$  folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$$

usw. Man kann nur wieder i.A. keine Aussage über  $\infty \cdot 0$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  treffen.

### 4.1.6 Einseitige Grenzwerte und Grenzwerte im Unendlichen

**Definition 4.1.39.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $A$ , so dass es ein  $r > 0$  mit  $(x_0 - r, x_0) \subset A$  gibt. Der *linkseitige Grenzwert* von  $f$  gegen  $x_0$  existiert und ist gleich  $y$ , falls für alle Folgen  $(x_n)_n$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und  $x_n < x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir schreiben dann:  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y$ .

Analog wird der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$  definiert.

Falls  $(L, \infty) \subset A$  für ein  $L > 0$  ist, wird so auch der uneigentliche Grenzwert gegen  $\infty$ , also  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  definiert, also:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \in \bar{\mathbb{R}}$ , falls für alle Folgen  $x_n$  aus  $A$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  folgt  $f(x_n) \rightarrow y$ .

Analog für  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Lemma 4.1.40.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $x_0$  ein innerer Punkt von  $A$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $x_0$  stetig, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

gilt.

*Beweis.* Ist  $f$  stetig in  $x_0$ , dann konvergieren für alle Folgen  $x_n \rightarrow x_0$  die Funktionswerte  $f(x_n)$  gegen  $f(x_0)$ , also insbesondere auch alle solchen Folgen mit  $x_n > x_0$ , was  $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$  impliziert, und alle solchen Folgen mit  $x_n < x_0$ , was  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$  impliziert.

Sei nun  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ . Wir wollen zeigen, dass  $f$  in  $x_0$  stetig ist. Sei dazu  $x_n$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Wir zerlegen  $x_n$  in Teilfolgen:

Annahme: Es gibt unendlich viele  $x_n$  mit  $x_n > x_0$ , unendlich viele mit  $x_n = x_0$  und unendlich viele mit  $x_n < x_0$ . (Die anderen Fälle gehen ähnlich.) Dann seien  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  die zugehörigen Teilfolgen. Wegen  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$  folgt  $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ ,  $f(b_n) = f(x_0)$  und  $f(c_n) \rightarrow f(x_0)$ . Damit auch  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also ist  $f$  stetig in  $x_0$ .  $\square$

**Beispiel 4.1.41.** Sei  $f$  eine rationale Funktion. Dann hat  $f(x)$  die Form  $\frac{p(x)}{q(x)}$  mit Polynomen  $p, q$ . Der Definitionsbereich von  $f$  ist  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ . Sei  $x_0$  eine Nullstelle von  $q$ . Wann kann  $f$  in  $x_0$  stetig fortgesetzt werden? Welche Fälle können auftreten?

Sei  $x_0$  eine Nullstelle von  $q$  der Vielfachheit  $\nu$ , d.h.  $q(x) = (x - x_0)^\nu r(x)$  für ein Polynom  $r$  mit  $r(x_0) \neq 0$ . Sei  $p(x) = (x - x_0)^\mu s(x)$  für ein Polynom  $s$  mit  $s(x_0) \neq 0$  und ein  $\mu \in \mathbb{N}$  (ggf. ist  $\mu$  halt gleich Null, wenn  $x_0$  keine Nullstelle hat).

- (Hebbare Singularität) Falls  $\mu \geq \nu$  ist, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^{\mu - \nu} s(x)}{r(x)} = \begin{cases} \frac{s(x_0)}{r(x_0)} & \text{falls } \mu = \nu \\ 0 & \text{falls } \mu > \nu \end{cases}$$

Also ist in diesem Fall  $f$  auf  $x_0$  stetig fortsetzbar.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

- Falls  $\mu < \nu$  ist, dann gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x)}{(x - x_0)^{\nu - \mu} r(x)}$$

und das geht im Betrag immer gegen unendlich. Sei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s(x)}{r(x)} > 0$ . Dann gilt: Ist  $\nu - \mu$  gerade, dann ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$ . Ist  $\nu - \mu$  ungerade, dann ist  $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$  und  $\lim_{x \searrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$ . Für  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s(x)}{r(x)} < 0$  kehren sich die Vorzeichen um.

Die Grenzwerte gegen  $\pm\infty$  lassen sich mit den Rechenregeln für Grenzwerte und Ausklammern der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner bestimmen, z.B.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 0.$$

#### 4.1.7 Mehr Beispiele (nicht)stetiger Funktionen

**Woche 8** Wir sammeln noch eine paar mehr oder weniger pathologische\* Beispiele, um ein bisschen zu zeigen, was so passieren kann:

**Beispiel 4.1.42.** (i) Die *Dirichlet-Funktion*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Dirichlet-Funktion ist in allen  $x$  unstetig: Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann gibt es nach Konstruktion der reellen Zahlen eine rationale Folge  $x_n$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Doch dann konvergiert  $f(x_n) = 0$  nicht gegen  $1 = f(x)$ ;  $f$  kann also nicht in  $x$  stetig sein.

Sei nun  $x \in \mathbb{Q}$ . Dann gibt es immer eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen  $x$  konvergiert (die irrationalen Zahlen liegen dicht in  $\mathbb{R}$ , vgl. Beispiel 4.1.27.ii), und analog wie zuvor sehen wir, dass  $f$  auch hier nicht in  $x$  stetig.

(ii) Die Funktion  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

ist stetig: Sei  $x \in \mathbb{Q}$  und sei  $x_n \rightarrow x$  eine rationale Folge. Da  $x \neq \sqrt{2}$  sein muss, da  $\sqrt{2}$  irrational ist, gibt es entweder ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n > x$  für alle  $n \geq n_0$  oder ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n < x$  für alle  $n \geq n_0$ . In beiden Fällen gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

---

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Pathologisches\\_Beispiel](https://de.wikipedia.org/wiki/Pathologisches_Beispiel)

(iii) Die *Thomaesche-Funktion*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_{>0}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in alle rationalen Zahlen **unstetig** (analoges Argument wie bei der Dirichletfunktion), aber in allen irrationalen Zahlen **stetig**. Um das letztere zu zeigen, muss man sich überlegen, dass für jede Folge, die gegen  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  konvergiert, auch die Funktionswerte konvergieren. Für eine irrationale Folge ist das klar. Sei nun  $x_n = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}_{>0}, p_n$  und  $q_n$  teilerfremd. Wir zeigen, dass dann  $q_n \rightarrow \infty$  gilt: Würde  $q_n$  nicht gegen  $\infty$  gehen, hätte  $q_n$  eine beschränkte Teilfolge, die wiederum eine konvergente Teilfolge  $q_{n_j}$  hätte. Also  $q_{n_j} \rightarrow \hat{q}$  für  $j \rightarrow \infty$ . Da alle  $q_n \in \mathbb{N}$  sind, muss auch  $\hat{q} \in \mathbb{N}$  gelten. Damit  $\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} \rightarrow x$  für  $j \rightarrow \infty$  folgt muss auch  $p_{n_j}$  selbst konvergieren  $p_{n_j} \rightarrow \hat{p} \in \mathbb{Z}$ . Doch dann wäre  $\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} \rightarrow x = \frac{\hat{p}}{\hat{q}} \in \mathbb{Q}$ , was den Widerspruch gibt. Also geht  $q_n \rightarrow \infty$  und damit  $f(x_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Für eine beliebige Folge muss man dann nur zur rationalen bzw. irrationalen Teilfolge übergehen und erhält die Stetigkeit in  $x$ .

#### 4.1.8 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir sammeln hier noch zwei Sätze zu stetigen Funktionen, die oft verwendet werden und anschaulich auch sehr intuitiv sind.

**Satz 4.1.43** (Satz vom Maximum und Minimum). *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es ein  $m, M \in [a, b]$ , so dass*

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M)$$

für alle  $x \in [a, b]$  gilt.

Dann ist  $f(m) = \min\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$  und wird *Minimum von  $f$*  genannt. Analog nennt man  $f(M)$  das *Maximum von  $f$* .

Es ist wichtig, dass  $f$  auf einem geschlossenen Intervall stetig ist: Z.B. ist  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$  stetig aber besitzt kein Maximum.

*Beweis.* Sei  $s := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$ , falls das Supremum existiert, sonst  $s := \infty$ . Dann gilt in jedem Fall  $f(x) \leq s$  für alle  $x \in [a, b]$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $s$  wirklich das Supremum ist und angenommen wird.

Sei  $x_n \in [a, b]$  eine Folge mit  $f(x_n) \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ . Eine solche Folge muss es geben, da  $s$  sonst nicht das Supremum von  $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$  wäre. Da  $[a, b]$  beschränkt ist, gibt es nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_j})_j$ . Der Grenzwert sei  $M$ . Dann ist  $M \in [a, b]$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt dann  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(M)$ . Also ist  $s = f(M)$ .

Für das Minimum geht es analog. □

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Folgerung 4.1.44.** Eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt.

**Lemma 4.1.45.** Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und stetig und sei  $x_0 \in (a, b)$ . Dann gilt\*

$$\sup_{a < x < x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \inf_{x_0 < x < b} f(x).$$

*Beweis.* Es gibt eine Folge  $s_n$  mit  $s_n < \sup_{a < x < x_0} f(x)$  und  $s_n \rightarrow \sup_{a < x < x_0} f(x)$ . Dann gibt es für alle  $n$  ein  $x_n \in (a, x_0)$  mit  $s_n \leq f(x_n)$ . Sei nun  $x \in [x_n, x_0)$ . Dann gilt, da  $f$  monoton wachsend ist,

$$s_n \leq f(x_n) \leq f(x) \leq \sup_{a < x < x_0} f(x)$$

und somit für  $x \nearrow x_0$ :

$$s_n \leq \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \leq \sup_{a < x < x_0} f(x).$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt das erste Gleichheitszeichen der Behauptung. Das zweite folgt direkt aus der Stetigkeit von  $f$ . Die anderen gehen analog.  $\square$

#### 4.1.9 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Wenn man eine Folge stetiger Funktionen  $f_n: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  hat, so dass für alle  $x \in A$  gilt:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

ist dann  $f$  stetig?

Im allgemeinen ist das falsch, z.B. seien  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Alle  $f_n$  sind stetig. Es ist  $f_n(0) = 1 = f(0)$  und  $f_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$  für  $x > 0$ . Aber  $f$  ist unstetig.

**Definition 4.1.46.** Seien  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Funktionen. Die Funktionenfolge  $f_n$  konvergiert punktweise gegen  $f$ , falls für jedes  $x \in A$  gilt

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Funktionenfolge  $f_n$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ , falls gilt

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

---

\*Kurzschreibweise:  $\sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}$ .



**Bemerkung 4.1.47** (Mit Quantoren). Schreibt man diese Definition mit Quantoren, dann sieht man, dass sich diese nur in der Folge der Quantoren unterscheidet.

Punktweise Konvergenz:  $\forall x \in A \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

Gleichmäßige Konvergenz:  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

D.h. bei punktweiser Konvergenz darf  $n_0$  sowohl von  $x$  als auch von  $\epsilon$  abhängen, wogegen bei gleichmäßiger Konvergenz das  $n_0$  zwar von  $\epsilon$  abhängen darf, aber nicht von  $x$ .

Insbesondere folgt aus gleichmäßiger Konvergenz punktweise Konvergenz.

Wir haben oben gesehen, dass punktweise Konvergenz einer Funktionfolge nicht ausreicht, um Stetigkeit der Grenzwertfunktion zu folgern. Gleichmäßige Konvergenz reicht hingegen schon:

**Satz 4.1.48.** *Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Seien  $f, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Falls alle  $f_n$  stetig sind und die Funktionenfolge  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, dann ist  $f$  stetig.*

*Beweis.* Sei  $x_0 \in A$  und sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $x \in A$  und alle  $n \geq n_0$  dann  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$  gilt. Da  $f_{n_0}$  stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ , so dass  $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ . Dann gilt für alle  $x \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$ :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon. \quad \square$$

**Satz 4.1.49.** *Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Sei  $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Sei  $s \in (0, R)$ . Dann konvergiert  $f_n : [-s, s] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f : [-s, s] \rightarrow \mathbb{R}$  und die Funktion  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.*

Stetigkeit (oder genauer Folgenstetigkeit) innerhalb des Konvergenzradius haben wir für Potenzreihen zu Fuß in Satz 3.12.26 nachgerechnet. Wenn man da jetzt noch mal reinschaut, wird man sehen, dass wir dort in Wirklichkeit den Beweis für gleichmäßige Konvergenz schon imitiert haben.

*Beweis.* Sei  $s \in (0, R)$ . Wähle  $r$  mit  $s < r < R$ . Da  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$  konvergiert, gibt es ein  $C > 0$  mit  $|a_k r^k| \leq C$  für alle  $k$ . Dann gilt für alle  $x \in [-s, s]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |s|^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \left| \frac{s}{r} \right|^k \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{s}{r} \right|^k.$$

Da  $\frac{s}{r} \in (0, 1)$  folge, damit  $\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und wir haben die gleichmäßige Konvergenz auf  $[-s, s]$  gezeigt.

Nach letztem Satz ist somit  $f : [-s, s] \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $s \in (0, R)$  stetig, also ist  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  $\square$

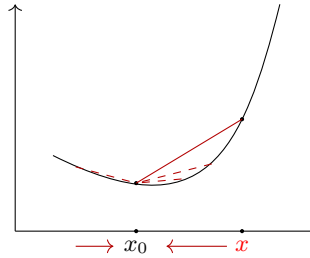


Abbildung 4.3: Die rote Gerade hat Anstieg  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ .

## 4.2 Differenzierbarkeit

Während man Stetigkeit interpretieren kann, dass es möglich ist, die Funktion in der Nähe eines gegebenen Punktes durch eine konstante Funktion zu approximieren, wollen wir natürlich schauen, ob es ggf. möglich ist mit Polynomen höherer Ordnung zu approximieren. Der nächste Schritt wären also lineare Funktionen, was auf den Begriff der Ableitung führt.

### 4.2.1 Ableitung und lineare Approximation

**Definition 4.2.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  in  $x_0 \in I$  *differenzierbar*, falls es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

gibt. Wir nennen dann  $a$  die *Ableitung* von  $f$  in  $x_0$  (Schreibweise:  $f'(x_0) = a$ .)

Wir nennen  $f$  *differenzierbar*, wenn  $f$  in allen  $x_0$  differenzierbar ist und nennen die Funktion

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

*Ableitung von  $f$ .*

Setzt man  $h := x - x_0$ , dann ist  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ .

Den Quotienten  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  nennt man auch *Differenzenquotient* von  $f$  in  $x_0$ .

**Beispiel 4.2.2.** (i) Die konstante Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c \in \mathbb{R}$ , ist differenzierbar in  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit Ableitung  $f'(x_0) = 0$ , da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

(ii) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  ist differenzierbar in  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit Ableitung  $f'(x_0) = 1$ , da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

- (iii) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  ist differenzierbar in  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit Ableitung  $f'(x_0) = 2x_0$ , da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \rightarrow 2x_0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

- (iv) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  ist in 0 nicht differenzierbar, da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und somit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  nicht existiert.

- (v) Wir überlegen uns als nächstes, dass die Exponentialfunktion in  $x = 0$  differenzierbar ist – d.h. die Frage ist, ob der Grenzwert von  $\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$  existiert. Der Grenzwert ist 1. Das kann man zeigen wie in Übungsaufgabe 28 – mehr dazu noch einmal später.

Um die Ableitung von  $e^x$  für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  zu bestimmen verwenden wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die Ableitung in 0:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

- (vi) Für die Ableitung des Sinus und Kosinus benutzen wir die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \frac{\sin\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= \frac{2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \cos \frac{x+x_0}{2} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \end{aligned}$$

Zusammen mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (vgl. Übungsaufgabe 28) und der Stetigkeit des Kosinus und Sinus folgt:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \rightarrow \cos x_0.$$

Also ist  $(\sin x)' = \cos x$ . Analog sieht man  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**Satz 4.2.3** (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit). Sei  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Für  $x \neq x_0$  gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \rightarrow f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

Also ist  $f$  in  $x_0$  stetig. □

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Funktionen, die in  $x_0$  nicht stetig sind, sind also insbesondere dort auch nicht differenzierbar.

Was hat die Existenz einer Ableitung einer Funktion  $f$  in  $x_0$  nun damit zu tun, dass die Funktion  $f$  nahe  $x_0$  durch eine lineare Funktion approximiert werden kann:

**Satz 4.2.4.** [Linear Approximation] Sei  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $x_0$  differenzierbar, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ , welche in  $x_0$  stetig ist, gibt mit  $r(x_0) = 0$  und

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

Insbesondere ist dann  $a = f'(x_0)$ .

Der Satz sagt insbesondere, dass die Tangente  $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  die lineare Funktion durch  $(x_0, f(x_0))$  ist, die  $f(x)$  nahe  $x_0$  am besten approximiert. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Beweis von Satz 4.2.4. Existiert  $r$  wie beschrieben, dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + r(x) \rightarrow a \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Sei nun  $f$  in  $x_0$  differenzierbar. Wir müssen die Funktion  $r$  und die Zahl  $a$  definieren: Wir setzen  $a = f'(x_0)$  und

$$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Dann erfüllt  $r$  die gewünschte Beziehung und es gilt  $r(x_0) = 0$ . Weiterhin gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \rightarrow f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

für  $x \rightarrow x_0$ , also ist  $r$  in 0 stetig.  $\square$

#### 4.2.2 Rechenregeln für Ableitungen

**Satz 4.2.5.** Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen  $\alpha f \pm g$ ,  $fg$  und, falls zusätzlich  $g(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha f \pm g)'(x_0) &= \alpha f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) && (\text{Produktregel}) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} && (\text{Quotientenregel}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung existieren  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ . Nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen erhalten wir somit für die Summe

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f(x) \pm g(x)) - (\alpha f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} &= \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow \alpha f'(x_0) \pm g'(x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, \end{aligned}$$

für das Produkt

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Hier wurde bei der Grenzwertbildung benutzt, dass aus  $g$  in  $x_0$  differenzierbar auch  $g$  in  $x_0$  stetig folgt.

Für den Quotienten (da  $g(x_0)$  nicht Null ist und  $g$  stetig ist, ist  $g$  auch in einer Umgebung um  $x_0$  nicht Null)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - (g(x) - g(x_0))f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &\rightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 4.2.6.** (i) Mittels vollständiger Induktion und Produktregel sieht man  $(x^n)' = nx^{n-1}$ : Den Induktionsanfang für  $n = 1$  haben wir schon gesehen. Wissen wir nun schon für ein  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $(x^n)' = nx^{n-1}$  ist, dann folgt mit der Produktregel:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = nx^{n-1}x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

(ii)

$$\begin{aligned} ((x^2 + 3x + 1)e^x \cos x)' &\stackrel{\text{Prod.}}{=} ((x^2 + 3x + 1)e^x)' \cos x + (x^2 + 3x + 1)e^x (\cos x)' \\ &\stackrel{\text{Prod.}}{=} (x^2 + 3x + 1)' e^x + (x^2 + 3x + 1)(e^x)' \cos x + (x^2 + 3x + 1)e^x (\cos x)' \\ &= e^x \cos x (2x + 3 + x^3 + 3x + 1) - e^x \sin x (x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

**Satz 4.2.7** (Kettenregel). Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen und sei  $x_0 \in I$  und  $f(I) \subset J$ . Sei  $f$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g$  in  $f(x_0)$  differenzierbar. Dann ist auch  $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Erste Idee (die nicht immer funktioniert):

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Das geht nur, wenn man nicht durch Null dividiert, also  $f(x) \neq f(x_0)$  in einer (kleinen) Umgebung um  $x_0$  ist.

Wie umgehen wir dieses Problem? Man kann den Fall  $f$  konstant nahe Null einfach separat betrachten. Wir wollen hier aber mal einen anderen Beweis mit Hilfe der Charakterisierung der Differenzierbarkeit mittels lineare Approximation, s. Satz 4.2.4, führen.

*Beweis.* Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, gibt es eine in  $x_0$  stetige Funktion  $r: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $r(x_0) = 0$  und  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ . Da  $g$  in  $f(x_0)$  differenzierbar ist, gibt es eine in  $f(x_0)$  stetige Funktion  $s: J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $s(f(x_0)) = 0$  und  $g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + s(y)(x - x_0)$ . Dann gilt für  $y = f(x)$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + s(f(x))(x - x_0) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)) + s(f(x))(x - x_0) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{(g'(f(x_0))r(x) + s(f(x)))}_{=:h(x)}(x - x_0). \end{aligned}$$

Somit haben wir eine Funktion  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert mit  $h(x_0) = 0$ . Da  $r$  und  $f$  in  $x_0$  stetig ist und  $s$  in  $f(x_0)$  stetig ist, ist  $h$  in  $x_0$  stetig. Damit ist  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $g'(f(x_0))f'(x_0)$ .  $\square$

**Satz 4.2.8.** Sei  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  bijektiv und differenzierbar. Sei  $x_0 \in I$  und  $f'(x_0) \neq 0$  und sei die Umkehrfunktion stetig in  $f(x_0)$ . Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}: J \rightarrow I$  in  $f(x_0)$  differenzierbar und die Ableitung ist gegeben durch

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Beweis.* Da  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$  ist, gilt  $f(f^{-1}(x)) = x$  für alle  $x \in J$ . Sei  $y_0 = f(x_0)$ . Dann gibt es für jede Folge  $y_n$  in  $J$  mit Urbilder  $x_n = f^{-1}(y_n)$ . Sei nun  $y_n \rightarrow y_0$ , dann folgt wegen Stetigkeit von  $f^{-1}$ , dass  $x_n \rightarrow x_0$ . Damit gilt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

Wenn man schon weiß, dass  $f^{-1}$  differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel auch direkt

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

**Beispiel 4.2.9.** (i) Die  $n$ .te Wurzel ist die Umkehrfunktion von  $x \in (0, \infty) \rightarrow x^n \in (0, \infty)$ , was differenzierbar ist. Die  $n$ .te Wurzel selbst ist stetig. Somit können wir den letzten Satz anwenden und erhalten

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

(ii) Der Logarithmus  $\ln$  ist stetig und die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ , die differenzierbar ist. Damit ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(iii) Der Kosinus  $\cos: (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$  ist differenzierbar, bijektiv (vgl. Beweis von Satz 4.1.18) und streng monoton fallend (kommt später). Dann ist nach Satz 4.1.14 Die Umkehrfunktion nennt man *Arkuskosinus*  $\arccos: (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$ . Dann gilt

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin \arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

hierbei folgt die letzte Gleichheit aus  $\sin y \in (0, 1]$  für  $y \in (0, \pi)$  und somit mittels des trigonometrischen Pythagoras

$$\sin \arccos x = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

### 4.2.3 Mehr Beispiele

Woche 9

(i) Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , wollen wir die Potenzfunktion  $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in \mathbb{R}$  ableiten:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = \ln a e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

(ii) Für  $x > 0$  haben wir

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + x \frac{1}{x}) = e^{x \ln x} (1 + \ln x)$$

(iii)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ist mittels  $f(0) = 0$  stetig fortsetzbar, vgl. Übungsaufgabe 26, so dass  $f$  als stetige Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  auffassen können. In  $x \neq 0$  ist  $f(x)$  differenzierbar mit Ableitung

$$(x \sin \frac{1}{x})' = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

$f$  ist nicht differenzierbar in  $x = 0$ : Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

konvergiert für  $x \rightarrow 0$  nicht, vgl. Übungsaufgabe 26.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

- (iv)  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  ist mittels  $f(0) = 0$  stetig fortsetzbar. Analog zum letzten Beispiel betrachten wir nun  $f$  als stetige Funktion mit ganz  $\mathbb{R}$  als Definitionsbereich. Für  $x \neq 0$  ist  $f(x)$  differenzierbar:

$$\begin{aligned} (x^2 \sin \frac{1}{x})' &= (x \cdot x \sin \frac{1}{x})' = (x)' x \sin \frac{1}{x} + x (\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} x \cos \frac{1}{x}) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Auch in  $x = 0$  ist  $f$  differenzierbar:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

Also ist  $f$  differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Wir halten schon mal fest, dass die Ableitung in Null unstetig ist (Argument wie in Übungsaufgabe 26).

- (v) Es gibt Funktionen auf  $\mathbb{R}$  die überall stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar ist. Beispiele dafür sind *Weierstrass-Funktionen*, wie z.B.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cos(33^k x).$$

Es gibt verschiedene Sachen, die man sich hier überlegen muss:

- (a) Die Reihe konvergiert überhaupt, d.h. wir haben wirklich eine Funktion auf  $\mathbb{R}$  definiert.
- (b)  $f$  ist stetig. Das folgt aus Satz 4.1.48, wenn wir gezeigt haben, dass die zur Reihe gehörige Funktionenfolge  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \cos(33^k x)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Im Gegensatz zu Potenzreihen, folgt für Funktionen, die aus allgemeinen Reihen aus absoluter Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$  nicht automatisch gleichmäßige Konvergenz auf abgeschlossenen Intervallen, vgl. ÜA 36. Deshalb muss das hier extra gezeigt werden.

- (c)  $f$  ist nirgends differenzierbar.

Zu (a) und (b):

$$\left| \frac{1}{3^k} \cos(33^k x) \right| \leq \frac{1}{3^k}$$



Also ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$  eine konvergente Majorante und damit konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle  $x$  absolut. Das zeigt in Wirklichkeit schon die gleichmäßige Konvergenz, da die Abschätzung nicht von  $x$  abhängt – hier noch mal explizit: Sei  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \cos(3^k x)$ . Dann ist

$$\sup_x |f(x) - f_n(x)| = \sup_x \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cos(3^k x) \right| \leq \sup_x \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Also ist nach Satz 4.1.48  $f$  stetig.

Zu (c): Wir wollen nun zeigen, dass  $f$  in keinem  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar ist. Das kann man sehen, in dem man direkt in den Differenzenquotient geht und durch geeignete Abschätzung herausfindet, dass dieser für  $x \rightarrow x_0$  nicht konvergieren kann. Das ist ein bisschen aufwändig, aber wir wollen das wenigstens einmal sehen:

Seien  $\alpha_m \in \mathbb{Z}$  so gewählt, dass  $x_m := 3^m x_0 - \alpha_m \pi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  gilt. Wir betrachten die Folge  $y_m := 3^{-m} \alpha_m \pi$ . Für diese Folge gilt  $y_m \rightarrow x_0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Wir werden zeigen, dass aber der Differenzquotient  $\frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0}$  nicht konvergiert und somit  $f$  nicht in  $x_0$  differenzierbar sein kann.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(y_m) - f(x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cos(3^k y_m) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cos(3^k x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{3^k} (\cos(3^k y_m) - \cos(3^k x_0)) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+m}} (\cos(3^{k+m} y_m) - \cos(3^{k+m} x_0)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{3^k} (\cos(3^k y_m) - \cos(3^k x_0)) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+m}} \left( \underbrace{\cos(\alpha_m \pi)}_{(-1)^{\alpha_m}} - \cos(3^{k+m} x_0) \right) \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen folgt

$$\cos(3^{k+m} x_0) = \cos(3^k (-x_m + \alpha_m \pi)) = (-1)^{\alpha_m} \cos(3^k x_m)$$

und

$$\cos(3^k y_m) - \cos(3^k x_0) = 2 \sin \frac{3^k (y_m + x_0)}{2} \sin \frac{3^k (y_m - x_0)}{2}$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Mit  $33^m(y_m - x_0) = x_m$  erhalten wir für den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{33^k}{3^k} \underbrace{\sin \frac{33^k(y_m - x_0)}{2} \sin \frac{33^k(y_m - x_0)}{2}}_{|\dots| \leq 1} \\ &\leq \frac{1 - 33^m 3^{-m}}{1 - 33 \cdot 3^{-1}} \\ &+ (-1)^{\alpha_m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{33^{k+m}}{3^{k+m}} \underbrace{\frac{1 - \cos(33^k x_m)}{33^k x_m}}_{\geq 0} \\ &\geq \frac{33^m}{3^m} \frac{1 - \cos x_m}{x_m} \geq \frac{2 \cdot 33^m}{3\pi \cdot 3^m} \end{aligned}$$

Also ist

$$\left| \frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} \right| \geq \frac{2 \cdot 33^m}{3\pi \cdot 3^m} - \frac{1 - 33^m 3^{-m}}{1 - 33 \cdot 3^{-1}} > \frac{33^m}{3^m} \left( \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{33 \cdot 3^{-1} - 1} \right) \rightarrow \infty$$

für  $m \rightarrow \infty$ . Damit ist  $f$  in  $x_0$  nicht differenzierbar.

**Definition 4.2.10.** Sei  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Ist die Ableitung  $f': A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, nennt man  $f$  *stetig differenzierbar*. Ist die Ableitung sogar differenzierbar, so nennt man  $f$  *zweimal differenzierbar* und nennt  $f'' := (f')'$  die *zweite Ableitung* von  $f$ . Ist  $f''$  wieder stetig, so nennt man  $f$  *zweimal stetig differenzierbar*, usw. Ist die Funktion  $f$   $n$ -mal differenzierbar, so bezeichnen wir die  $n$ .te Ableitung mit  $f^{(n)}$ . Also  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ ,  $\dots$ . Wir setzen  $f^{(0)} = f$ .

Ist eine Funktion zweimal stetig differenzierbar, dann ist sie insbesondere auch (einmal) stetig differenzierbar.

$$\begin{aligned} n\text{-mal stetig diff'bar} &\implies n\text{-mal diff'bar} \implies n-1\text{-mal stetig diff'bar} \dots \\ &\dots \implies \text{diff'bar} \implies \text{stetig} \end{aligned}$$

Existieren für  $f$  die  $n$ .ten Ableitungen für alle  $n \in \mathbb{N}$ , nennen wir  $f$  *unendlich oft differenzierbar*.

#### 4.2.4 Mittelwertsatz und Extrema

**Definition 4.2.11.** Ein Funktion  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt in  $x_0 \in A$  ein *lokales Maximum*, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in B_\epsilon(x_0) \cap A$  gilt. Gilt sogar  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in A$ , dann hat  $f$  in  $x_0$  ein *globales Maximum*. Analog wird *lokales und globales Minimum* definiert.

**Lemma 4.2.12.** Sei  $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $x_0 \in (a, b)$  ein *lokales Minimum oder Maximum* und sei  $f$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann gilt  $f'(x_0) = 0$ .

Es ist wichtig, dass  $f$  'links und rechts' von  $x_0$  hier definiert ist: Die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$ , hat zum Beispiel

*Beweis.* Ist  $x_0$  lokales Maximum, dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A$ . Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, existiert  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Dafür muss insbesondere der links- und rechtsseitige Limes übereinstimmen. Für  $x < x_0$  ist dann  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  und somit  $f'(x_0) \geq 0$ . Für  $x > x_0$  ist hingegen  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  und somit  $f'(x_0) \leq 0$ . Also muss  $f'(x_0) = 0$ . Der Fall des lokalen Minimums geht analog.  $\square$

Die Umkehrung gilt nicht z.B. gilt  $f'(0) = 0$  für  $f(x) = x^3$ , aber  $x = 0$  ist kein lokales Maximum oder Minimum. Ein solches  $x$  nennen wir *Sattelpunkt* und alle  $x$  für die  $f'(x) = 0$  ist, nennen wir *lokale Extremstellen*.

Um noch mehr über Extrema von differenzierbaren Funktionen sagen zu können, schauen wir uns zunächst den Mittelwertsatz an.

**Satz 4.2.13** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Den Spezialfall  $f(a) = f(b)$  nennt man Satz von Rolle.*

*Beweis.* Wir beweisen zuerst den Spezialfall  $f(a) = f(b)$ : Falls  $f$  konstant ist, dann ist überall  $f'(x) = 0$ . Sei nun  $f$  nicht konstant. Da  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, nimmt  $f$  nach Satz 4.1.43 auf  $[a, b]$  sein Maximum  $f(M)$  und sein Minimum  $f(m)$  an mit  $m, M \in [a, b]$ . Da  $f$  nicht konstant ist, muss mindestens einer der Werte  $f(M)$  und  $f(m)$  ungleich  $f(a) = f(b)$  sein. O.B.d.A. sei  $f(M) \neq f(a)$ . Dann ist  $M \in (a, b)$ . Da dann  $f$  in  $M$  differenzierbar ist, folgt  $f'(M) = 0$ .

Den allgemeinen Fall wollen wir auf diesen Spezialfall zurückführen, in dem wir auf  $f$  eine geeignete lineare Funktion addieren:

$$\varphi(x) := f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a)$$

Dann ist  $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$ ,  $\varphi$  ist stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Also existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$ .  $\square$

**Folgerung 4.2.14.** *Seien  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f' = g'$ . Dann gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f = g + c$ , d.h.  $f(x) = g(x) + c$  für alle  $x \in (a, b)$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion  $h := f - g$ . Dann ist  $h$  differenzierbar mit  $h' = 0$ . Wir müssen zeigen, dass dann  $h$  konstant ist, denn dann folgt die Behauptung:

Sei  $x_0, x_1 \in (a, b)$  mit  $x_0 < x_1$ . Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi \in (x_0, x_1)$  mit  $h(x_1) - h(x_0) = h'(\xi)(x_1 - x_0) = 0$ . Also gilt  $h(x_0) = h(x_1)$ . Da  $x_0, x_1$  beliebig in  $(a, b)$  gewählt sind, muss  $h$  konstant sein.  $\square$

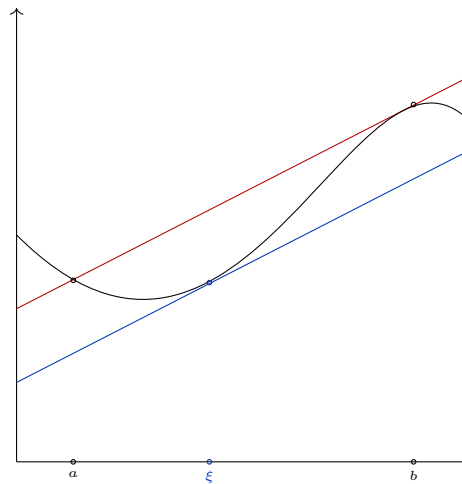


Abbildung 4.4: Für den Graph einer differenzierbaren Funktion  $f$  gibt es für jede Sekante einen Punkt auf dem Graphen zwischen den beiden Schnittpunkten der Sekante mit dem Graphen für den die Tangente den gleichen Anstieg hat.

Beschreibt der Graph z.B. den Ort eines Autos über die Zeit, dann entspricht die erste Ableitung der Funktion der Geschwindigkeit des Autos. Wird nun zwischen den zwei Orten  $f(b)$  und  $f(a)$  die Zeitdifferenz gemessen, die das Auto brauchte, also  $b - a$ . Dann entspricht die durchschnittliche Geschwindigkeit, dem Anstieg der Sekante. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt nun, dass es mindestens einen Zeitpunkt  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  gab, in dem die aktuelle Geschwindigkeit diese durchschnittliche Geschwindigkeit ist.

**Folgerung 4.2.15.** Sei  $I$  ein Intervall. Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Ist  $f'$  auf  $I$  beschränkt, dann ist  $f$  Lipschitz-stetig. Insbesondere sind stetig differenzierbare Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig.

*Beweis.* Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für alle  $x, y \in I$  ein  $\xi_{x,y} \in I$  mit  $f(x) - f(y) = f'(\xi_{x,y})(x - y)$ . Ist  $f$  sogar stetig differenzierbar auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$ , ist damit  $f'$  als stetige Funktion auf  $[a, b]$  beschränkt, also  $|f'(x)| \leq C$  für ein  $C > 0$  und alle  $x \in [a, b]$ . Damit folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi_{x,y})| |x - y| \leq C|x - y|.$$

Also ist  $f$  Lipschitz-stetig.  $\square$

**Folgerung 4.2.16** (Charakterisierung der Monotonie für differenzierbare Funktionen). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann ist  $f$  genau dann

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ wenn } f'(x) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \\ > \\ < \end{array} \right\} 0 \text{ für alle } x \in I \text{ ist.}$$

Es ist hierbei wichtig, dass  $I$  ein Intervall ist:  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}$ , erfüllt überall  $f' < 0$  ist aber nicht global monoton fallend.

*Beweis.* Folgt direkt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.  $\square$

**Definition 4.2.17.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, falls für alle  $x_1, x_2 \in I$  und alle  $\lambda \in [0, 1]$  gilt

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

vgl. Abbildung 4.5. Die Funktion heißt *streng konvex*, falls für alle  $x_1 \neq x_2$  und  $\lambda \in (0, 1)$  die Ungleichung strikt ist.

Ist  $-f$  (streng) konvex, nennen wir  $f$  (streng) *konkav*.

Zum Beispiel ist die Funktion  $f(x) = x^2$  konvex.

**Lemma 4.2.18.** Sei  $I$  ein Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar. Sei  $f'' \geq 0$ , also  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ . Dann ist  $f$  konvex. Aus  $f''(x) > 0$  für alle  $x \in I$  folgt, dass  $f$  strikt konvex ist.

Andererseits folgt aus  $f$  konvex und  $f$  zweimal differenzierbar, dass  $f'' \geq 0$  ist.\*

*Beweis.* Seien  $x_1, x_2 \in I$  und  $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$  für  $\lambda \in [0, 1]$ . O.B.d.A. sei  $x_1 \leq x_2$ . Dann ist  $x \in [x_1, x_2]$ . Wir wollen zeigen, dass

$$(1 - \lambda)(f(x) - f(x_1)) \leq \lambda(f(x_2) - f(x))$$

---

\*Aus  $f$  streng konvex und  $f$  zweimal differenzierbar folgt nicht, dass  $f'' > 0$  ist. Gegenbeispiel  $f(x) = x^4$ .

#### 4 Funktionen in einer Variablen

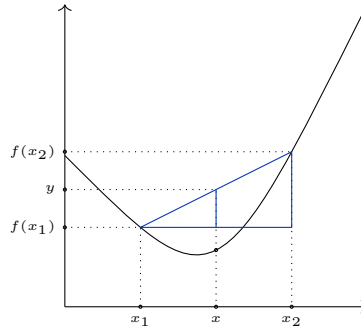


Abbildung 4.5: Konvexe Funktion: Der Funktionswert von  $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$  für  $\lambda \in [0, 1]$  muss kleiner gleich  $y = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$  sein.

nach Umstellen ergibt sich dann die Konvexität.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es  $\xi_1 \in [x_1, x]$  und  $\xi_2 \in [x, x_2]$  mit  $f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1)$  und  $f(x_2) - f(x) = f'(\xi_2)(x_2 - x)$ .

Der Fall der strengen Konvexität geht analog.

Aus  $f'' \geq 0$  folgt nach Folgerung 4.2.16, dass  $f'$  monoton wächst. Wegen  $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$  folgt  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ . Damit erhalten wir zusammen

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(f(x) - f(x_1)) &= (1 - \lambda)(x - x_1)f'(\xi_1) = \underbrace{\lambda(x_2 - x)}_{\geq 0} f'(\xi_1) \\ &\leq \lambda(x_2 - x)f'(\xi_2) = \lambda(f(x_2) - f(x)). \end{aligned}$$

□

**Satz 4.2.19.** Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Sei  $x_0 \in (a, b)$ .

- (i) Ist  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$ , dann besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.
- (ii) Ist  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$ , dann besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (iii) Besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum, dann gilt  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \leq 0$ .
- (iv) Besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum, dann gilt  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \geq 0$ .

*Beweis.* (i) Da  $f''(x_0) < 0$  und  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, ist  $f''$  negativ in einer Umgebung  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  von  $x_0$ . Nach Folgerung 4.2.16 ist damit  $f'$  auf dieser Umgebung von  $x_0$  streng monoton fallend. Da  $f'(x_0) = 0$  ist, ist somit  $f'(x) > 0$  für  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  und damit  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ . Analog sieht man  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ . Also hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum. (ii) geht analog.

(iii) Besitzt  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum, dann folgt  $f'(x_0) = 0$  nach Lemma 4.2.12. Wäre  $f''(x_0) > 0$ , wäre  $x_0$  nach (ii) ein lokales Minimum. Das ist noch nicht direkt ein

Widerspruch, weil  $x_0$  sowohl lokales Minimum als auch Maximum sein kann. Aber das ist nur der Fall, wenn  $f$  nahe  $x_0$  konstant ist. Doch dann wäre  $f''(x_0) = 0$ , was den Widerspruch gibt. Also muss  $f''(x_0) \leq 0$  sein. (iv) geht analog  $\square$

Das ist der Standardsatz, den man bei Kurvendiskussionen für genügend oft differenzierbare Funktionen verwendet. Ist die Funktion mal irgendwo nicht differenzierbar, muss man zur Bestimmung lokaler Maxima und Minima direkt in die Definition gehen, denn auch solche Punkte können lokale Extrema sein. Z.B. hat  $f(x) = |x|$  ist  $x = 0$  ein lokales (und sogar globales) Minimum, aber  $f$  ist dort nicht differenzierbar.

Als vorläufig letzte Anwendung des Mittelwertsatzes wollen wir noch die Regel von l'Hopital kennenlernen:

**Satz 4.2.20** (Regel von l'Hopital). *Sei  $I$  ein Intervall. Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Sei  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ein Häufungspunkt von  $I$  und es existiere der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  oder  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  ist, folgt*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Beweis.* Der Fall  $a \in \mathbb{R}$  benutzt eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes, siehe Übungsaufgabe 35.

Sei nun  $a = \infty$ . Diesen Fall kann man durch die Substitution  $y = \frac{1}{x}$  auf den Fall  $a = 0$  zurückführen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'(\frac{1}{y})}{-\frac{1}{y^2} g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

Achtung: Wenn der Limes  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  nicht existiert, folgt daraus nicht, dass der Limes  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  nicht existiert, z.B.

Gilt für  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  und  $g(x) = \sin x$ ,  $f(0) = g(0) = 0$  und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

aber der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

existiert nicht.

---

\*Die Aussage, dass der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  bedeutet insbesondere, dass  $g'(x)$  nahe  $x = a$  nicht Null werden soll.

## 4 Funktionen in einer Variablen

**Beispiel 4.2.21.** (i) Für  $p, q \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{pa^{p-1}}{qa^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{p-q}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} \stackrel{\text{stetig}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} \stackrel{\text{ÜA 35}}{=} e^0 = 1$$

## 4.3 Taylor

### 4.3.1 Taylorpolynom

**Definition 4.3.1.** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion. Dann nennen wir

$$T_n(f; x_0)(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

das *Taylorpolynom  $n$ -ten Grades von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0$* . Ist  $f$  unendlich oft differenzierbar, dann nennen wir

$$T_\infty(f; x_0)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0$* .

Das Taylorpolynom  $n$ -ten Grades ist ein Polynom vom Grad  $\leq n$  (da die Ableitungen in  $x_0$  verschwinden können), welches mit  $f$  in  $x_0$  übereinstimmt und dessen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  mit denen von  $f$  in  $x_0$  übereinstimmen.

Das Taylorpolynom 1. Grades ist die Tangente von  $f$  in  $x_0$ .

**Beispiel 4.3.2.** (i) Ist  $f$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, dann ist  $T_m(f; x_0) = f$  für alle  $m \geq n$  und alle  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

(ii) Tayloreihe für Exponentialfunktion um  $x = 0$  ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  und stimmt mit der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion überein.

Um den Entwicklungspunkt  $x_0$  ist die Taylorreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} e^{x_0}$  und konvergiert auch für alle  $x$  gegen  $e^x$ .

Das Beispiel der Exponentialreihe gibt hier den falschen Eindruck: Die Taylorreihe konvergiert immer in  $x = x_0$  und stimmt dort mit  $f$  überein. In allen anderen Punkten muss sie nicht konvergieren und selbst wenn sie konvergiert, muss sie nicht mit  $f$  übereinstimmen.



**Beispiel 4.3.3.** (i)  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$  für  $n > 0$ .

Taylorpolynom  $n$ -ten Grades um den Entwicklungspunkt  $x_0$ :

$$\ln x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k x_0^k} (x - x_0)^k$$

Nach Quotientenkriterium konvergiert diese Reihe absolut für alle  $x \in (0, 2x_0)$ . Sie divergiert für  $x = 0$  (dort ist sie harmonische Reihe) und konvergiert noch für  $x = x_0$  (dort ist sie die alternierende Reihe). Wir werden bald noch sehen, dass die Reihe für alle  $x \in (0, 2x_0)$  wirklich den Wert  $\ln x$  annimmt.

(ii) Wir betrachten die Funktion  $e^{-\frac{1}{x^2}}$ . Die  $n$ -te Ableitung hat die Form ( $n > 0$ )

$$(e^{-\frac{1}{x^2}})^{(n)} = P_{3n} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

für ein Polynom  $P_{3n}$  vom Grad  $3n$ . Das rechnet sich direkt mit vollständiger Induktion nach: Es ist

$$\left( P_{3n} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = \underbrace{\left( \underbrace{P'_{3n}}_{\text{Grad } 3n-1} \left( \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) + P_{3n} \left( \frac{1}{x} \right) \frac{2}{x^3} \right)}_{\text{Grad } 3n \text{ in } \frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{und } (e^{-\frac{1}{x^2}})' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} \rightarrow 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, ist

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $T_\infty(f, 0)(x) = 0$  und die Taylorreihe in 0 ist also insbesondere konvergent für alle  $x$ , aber von  $f(x)$  für alle  $x \neq 0$  verschieden.

Die letzten Beispielspiele zeigen, dass die Taylorreihe nicht immer das geeignete Konzept ist. I.A. ist es auch gar nicht relevant, ob diese konvergiert, sondern die wichtige Frage ist: In wie weit nähert das  $n$ -te Taylorpolynom  $f$  nahe dem Entwicklungspunkt an?

### 4.3.2 Fehlerabschätzung

Ziel ist die Fehlerabschätzung  $f(x) - T_n(f; x_0)(x)$ . O.B.d.A. sei  $x_0 \leq x$ .

Wir beginnen mit  $n = 0$ : Für  $n = 0$  und  $f$  differenzierbar in  $[x_0, x]$  ist  $f(x) - T_0(f; x_0)(x) = f(x) - f(x_0)$  mittels des Mittelwertsatz der Differentialrechnung gegeben durch  $f(x) - T_0(f; x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$  für ein  $\xi \in (x_0, x)$ . Ist nun  $f'$  noch beschränkt

#### 4 Funktionen in einer Variablen

auf  $[x_0, x]$  durch ein  $C > 0$ . Dann ist  $|f(x) - T_0(f; x_0)| \leq C|x - x_0|$ . D.h der Fehler nimmt mindestens linear für  $x \rightarrow x_0$  ab.

Für  $n = 1$  ist nun die Hoffnung, dass der Fehler  $f(x) - T_1(f; x_0)(x)$  mindestens quadratisch für  $x \rightarrow x_0$  abnimmt, bzw. für allgemeines  $n$ , dass der Fehler  $f(x) - T_n(f; x_0)(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  mindestens zur Potenz  $(x - x_0)^{n+1}$  abnimmt:

Wir machen also den Ansatz

$$f(x) - T_n(f; x_0)(x) = M(x - x_0)^{n+1}.$$

Hierbei hängt  $M$  i.A. von  $x$  und  $x_0$  ab. Wir nehmen an, dass  $f$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar ist.

Um zu bestimmen, was  $M$  ist, setzen wir

$$g(y) = f(y) - T_n(f; x_0)(y) - M(y - x_0)^{n+1}$$

und erhalten  $g^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - (n + 1)!M$ . Wir zeigen als nächstes, dass es ein  $\xi \in (x_0, x)$  mit  $g^{(n+1)}(\xi) = 0$  gibt:

Es gilt für alle  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , dass  $g^{(k)}(x_0) = 0$ . Außerdem gilt nach Wahl von  $M$ , dass  $g(x) = 0$  ist. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es also ein  $\xi_0 \in (x_0, x)$  mit  $g'(\xi_0) = 0$ . Da  $g'$  auch selbst wieder differenzierbar ist, gibt es wieder nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein  $\xi_1 \in (\xi_0, x)$  mit  $g''(\xi_1) = 0$ . Usw. ergibt sich ein  $\xi \in (x_0, x)$  mit  $g^{(n+1)}(\xi) = 0$  und damit  $M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ . Insgesamt haben wir damit folgendes gezeigt:

**Satz 4.3.4** (Satz von Taylor). *Sei  $f: I = [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n + 1$ -mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein  $\theta \in (0, 1)$  mit*

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Wir nennen  $R_n(f; x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  Lagrangesches Restglied von  $f$ .

Die analoge Aussage gilt für  $I = [x, x_0]$ .

**Beispiel 4.3.5.** Wir betrachten  $f(x) = \sqrt{1+x}$  und berechnen das Taylorpolynom ersten Grades um den Entwicklungspunkt  $x = 0$  mit Lagrangeschem Restglieds:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ . Dann ist

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}x^2$$

für ein  $\xi \in [0, x]$  falls  $x > 0$  bzw. ein  $\xi \in [x, 0] \cap (-1, 0)$

Damit können wir auch den Fehler  $f(x) - T_1(f, 0)(x)$  abschätzen:

$$|f(x) - 1 - \frac{1}{2}x| \leq x^2 \max\left\{\frac{1}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{8}\right\}$$

Für  $|x| < \frac{1}{2}$  ist damit zum Beispiel

$$|f(x) - 1 - \frac{1}{2}x| \leq x^2 \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Es gilt: Sei  $I$  ein Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar. Seien  $x, x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  bei  $x$  genau dann gleich seiner Tayloreihe  $T_\infty(f, x_0)$ , wenn  $f(x) - T_n(f; x_0)(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

### 4.3.3 Klein-o-Notation

**Definition 4.3.6.** Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Sei  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  ein Häufungspunkt von  $I$ . Dann schreiben wir  $f = o(g)$  für  $x \rightarrow a$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

gilt.

Es ist z.B.  $2x^2 = o(x)$  für  $x \rightarrow 0$ .

Eigentlich wäre  $f \in o(g)$  eine besserer Notation als  $f = o(g)$ , da:

!!Man muss hier mit dem Gleichheitszeichen aufpassen, aus  $f(x) = o(x^2)$  und  $g(x) = o(x^2)$  folgt nicht  $f(x) = g(x)$ !!

Aber da mit der  $o$ -Notation auf gerechnet wird, wird oft das Gleichheitszeichen verwendet. Es gilt z.B. für  $x \rightarrow 0$

$$x^3 + o(x^2) + xo(x) = o(x^2),$$

oder z.B. gilt auch

**Lemma 4.3.7.** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion mit  $0 \in I$  und  $k \geq 1$ . Gilt  $f(x) = o(x^k)$  für  $x \rightarrow 0$ , dann folgt  $f'(x) = o(x^{k-1})$  für  $x \rightarrow 0$  und  $f^{(\ell)}(0) = 0$  für alle  $\ell \leq k$ .

*Beweis.* Beweis über vollständige Induktion: Für  $k = 1$  haben wir  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  und somit

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

also  $f'(x) = o(1)$ .

Sei die Behauptung nun für  $k \in \mathbb{N}$  wahr. Wir wollen sie nun für  $k + 1$  zeigen. Da  $f$   $k + 1$ -mal stetig differenzierbar ist, existiert  $f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x}$ . Da aus

#### 4 Funktionen in einer Variablen

$f(x) = o(x^{k+1})$  insbesondere auch  $f(x) = o(x^k)$  folgt, gilt  $f^{(\ell)}(0) = 0$  für alle  $\ell \leq k$ . Also ist  $f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x}$  und mit der Regel von l'Hopital folgt

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x)}{x^2} = \dots = k! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^k} = (k+1)! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{k+1}} = 0$$

und damit insbesondere  $f'(x) = o(x^k)$ .  $\square$

**Beispiel 4.3.8.** (i) Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x_0 \in I$  ist genau dann in  $x_0$  differenzierbar, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h = o(h)$$

gibt.

(ii) Es gilt  $f(x) = T_n(f; x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$ .

(iii)  $e^{-\frac{1}{h}} = o(h^n)$  für  $h \rightarrow 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ , da  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$  ist.

#### 4.3.4 Taylorpolynome von Hintereinanderausführungen

Wir wollen als Beispiel das Taylorpolynom 2. Grades von  $e^{\sqrt{1+x}}$  um  $x_0 = 0$  bestimmen. Da kann man natürlich direkt in die Formel der Taylorpolynome gehen und mittels Kettenregel die Ableitungen ausrechnen. Um so höher die Ordnung der Ableitung ist, um so höher ist der Aufwand. Stattdessen ist der kürzere Weg: Das Taylorpolynom von  $\sqrt{1+x}$  um  $x_0 = 0$ , also  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ , einsetzen in das Taylorpolynom von  $e^y$  um  $y_0 = \sqrt{1+0} = 1$ , also

$$e^y = e + e(y-1) + \frac{e}{2}(y-1)^2 + o((y-1)^2),$$

ergibt

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1+x}} &= e + e \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) + \frac{e}{2} \left( \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \right)^2 + O \left( \left( \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \right)^3 \right) \\ &= e + e \frac{x}{2} + e \left( -\frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} \right) + o(x^2) = e + e \frac{x}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom 2. Grades von  $e^{\sqrt{1+x}}$  um  $x_0 = 0$  ist dann  $e + e \frac{x}{2}$  (also in Wirklichkeit ersten Grades).

Die Frage ist natürlich nun, warum gibt uns die obige Rechnung das richtige Resultat? Dazu müssen wir zeigen:

**Lemma 4.3.9.** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion und sei  $x_0 \in I$ . Seien  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , so dass gilt

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

für  $x \rightarrow x_0$ . Dann ist  $T_n(f; x_0)(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ .

*Beweis.* Nach Lemma 4.3.7 gilt für  $x \rightarrow x_0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) \\ f''(x) &= 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + o((x - x_0)^{n-2}) \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= n!a_n + o(1) \end{aligned}$$

und somit  $f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \dots, f'(x_0) = a_1$  und  $f(x_0) = a_0$ .  $\square$

### 4.3.5 Noch einmal Potenzreihen

Woche 10

Die Taylorreihe einer Funktion  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0$  die Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ . Auch Reihen dieser Form nennen wir Potenzreihen - eine Potenzreihe um  $x_0$ . Es entspricht unseren alten Potenzreihen (die waren um den Entwicklungspunkt 0. Alles was wir damals über Potenzreihen gelernt haben, gilt auch für allgemeines  $x_0$ , in dem man einfach eine Substitution  $y = x - x_0$  durchführt, z.B.

Der Konvergenzradius einer Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  ist

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{C} \text{ mit } |x - x_0| < r \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ konvergiert absolut} \right\}.$$

Dann konvergiert wieder die Potenzreihe für alle  $x$  mit  $|x - x_0|$  absolut. Ähnlich übertragen sich andere Aussagen.

Wir wollen uns als nächstes überlegen wie wir Potenzreihen ableiten können. Wenn wir eine Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  haben, wäre unser Tipp für die Ableitung von  $f$  in  $x \in B_R(x_0)$  einfach die Summe der Ableitung der einzelnen Summanden, also  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}$ . Wären es nur endlich viele Summanden, wäre klar, dass das stimmt, so müssen wir uns erst noch einiges überlegen:

- (i) Das die gliedweise abgeleitete Reihe wirklich auch für das  $x$  konvergiert.
- (ii) Das dies wirklich die Ableitung ist.

Zu (i):

**Lemma 4.3.10.** Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann hat die formal abgeleitete Reihe  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}$  den gleichen Konvergenzradius.

*Beweis.* Das  $g(x)$  keinen größeren Konvergenzradius als  $R$  haben kann, folgt aus: Für  $k \geq 1$  ist  $|a_k(x - x_0)^k| \leq |k a_k(x - x_0)^{k-1}| \cdot |x - x_0|$ . Konvergiert also  $g(x)$  für ein  $x$  absolut, dann auch  $f(x)$  nach dem Majorantenkriterium.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Sei nun  $r \in (0, R)$ . Da  $f(r)$  dann absolut konvergiert, gibt es ein  $M > 0$  mit  $|a_k|r^k \leq M$ . Dann gilt für alle  $x \in B_r(x_0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |ka_k(x - x_0)^{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} kMr \frac{|x - x_0|^{k-1}}{r^{k-1}}.$$

Die rechte Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da  $\frac{|x-x_0|}{r} < 1$  ist. Also konvergiert  $g(x)$  absolut für alle  $x \in B_r(x_0)$  und da  $r \in (0, R)$  beliebig ist, konvergiert  $g(x)$  absolut für alle  $x \in B_R(x_0)$ . Der Konvergenzradius von  $g$  ist mindestens  $R$ .  $\square$

Um nun zu (ii) zu kommen, untersuchen wir erst einmal inwieweit Ableitungen mit dem Grenzwert vertauschen:

**Satz 4.3.11** (Vertauschen von Grenzwert und Ableitung). *Seien  $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen, die punktweise gegen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren. Die Funktionenfolge der Ableitungen  $f'_n$  konvergiere gleichmäßig gegen ein  $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  auch stetig differenzierbar mit  $f' = g$ .*

*Beweis.* Aus Satz 4.1.48 folgt, dass  $g$  stetig ist. Es bleibt also zu zeigen, dass  $f' = g$  gilt, also dass  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_1)$  für  $x \rightarrow x_0 \in (a, b)$  gegen Null konvergiert. Dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_1) \right| &\leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &\quad + \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f'_n(x_0) \right| + |f'_n(x_0) - g(x_0)| \end{aligned}$$

Um den ersten Summanden abzuschätzen betrachten wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_\ell(x) - f_\ell(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| &\leq \left| \frac{(f_\ell - f_n)(x) - (f_\ell - f_n)(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &\stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{=} (f_\ell - f_n)'(\xi) \leq \sup |(f_\ell - f_n)'| \leq \sup |f'_n - g| + \sup |f'_\ell - g|. \end{aligned}$$

Für  $\ell \rightarrow \infty$  folgt mit der gleichmäßigen Konvergenz  $f'_\ell \rightarrow g$  damit

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \sup |f'_n - g|.$$

Insgesamt ist damit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_1) \right| \leq 2 \sup |f'_n - g|$$

Da die rechte Seite gegen Null geht, muss der Limes gleich Null sein.  $\square$

**Folgerung 4.3.12.** Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $f: (x_0-R, x_0+R) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit Ableitung  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ .

*Beweis.* Sei  $r \in (0, R)$ . Nach Satz 4.1.49 konvergiert  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$  dann gleichmäßig gegen  $f$ . Nach Lemma 4.3.10 konvergiert dann  $f'_n(x)$  gleichmäßig gegen  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$  für  $x \in [x_0-r, x_0+r]$ . Nach letztem Satz ist damit  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ . Da  $r \in (0, R)$  beliebig ist, gilt das für alle  $x \in B_R(x_0)$ .  $\square$

**Beispiel 4.3.13.** Mit dem Ableiten der Potenzreihen hätten wir also auch die Ableitungen von  $e^x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$  finden können, z.B.

$$(e^x)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

**Folgerung 4.3.14.** Ist  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  insbesondere die Taylorreihe von  $f(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0$  ist.

*Beweis.*  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(x-x_0)^k$ . Da die Reihe konvergiert, ist  $|\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(x-x_0)^k| < C$  und somit  $(x-x_0)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(x-x_0)^k = o((x-x_0)^n)$ . Somit hat  $f$  für alle  $n$  die Form aus Lemma 4.3.9 und die Reihe ist gleich der Taylorreihe von  $f$ .  $\square$

**Folgerung 4.3.15** (Identitätssatz für Potenzreihen). Seien  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius  $R_f$  bzw.  $R_g$ . Sei  $r > 0$  mit  $r \leq \min\{R_f, R_g\}$ . Dann gilt  $f(x) = g(x)$  für alle  $x$  mit  $|x-x_0| < r$  genau dann, wenn  $a_k = b_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

*Beweis.* Folgt direkt aus der letzten Folgerung, da  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$  sein muss.  $\square$

### 4.3.6 Weitere Beispiele zu Taylorreihen

**Beispiel 4.3.16.** Wir hatten schon einmal die Taylorreihe von  $\ln x$  um einen Entwicklungspunkt  $x_0 \in (0, \infty)$  ausgerechnet:

$$\ln x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k x_0^k} (x-x_0)^k$$

Diese konvergiert für  $x \in (0, 2x_0)$ . Wir wollen nun zeigen, dass zumindest für  $x \in (x_0, 2x_0]$  die Taylorreihe wirklich gegen  $\ln x$  konvergiert ( $x \in (0, x_0)$  betrachten wir später). Dazu betrachten wir den Fehler mittels der Lagrangeschen Restglieddarstellung aus Satz 4.3.4

#### 4 Funktionen in einer Variablen

$$\begin{aligned}\ln x - T_n(f; x_0)(x) &= R_n(f; x_0)(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)(x_0 + \theta(x - x_0))^{n+1}} (x - x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

für ein  $\theta \in (0, 1)$  (das  $\theta$  hängt von  $n$  ab). Wir schätzen ab für  $x \in [x_0, 2x_0]$  ist

$$|R_n(f; x_0)(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Also konvergiert die Taylorreihe für  $x \in [x_0, 2x_0]$  gegen  $\ln x$ .

Für  $x \in (0, x_0)$  hilft uns das Langrangesche Restglied nicht weiter, weil wir nichts über  $\theta$  in Abhängigkeit von  $n$  wissen. Es gibt andere Darstellungen des Restglieds\*, die uns hier zum Ziel führen würden. Doch wir werden später, wenn wir Potenzreihen integrieren können, einen leichteren Weg sehen.

Am meisten tritt die Taylreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$$

auf (Die erhält man aus der obigen für  $x_0 = 1$  und dann der Substitution  $x - 1$  geht auf  $x$ ).

**Beispiel 4.3.17.** (i) Die Taylorreihe von  $\frac{1}{1-x}$  ist  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ . Wie wir in Beispiel 4.3.3 gesehen haben, konvergiert diese für  $|x| < 1$  und dort auch wirklich gegen  $\frac{1}{1-x}$ .

Durch Ableiten erhalten wir z.B.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ \frac{1}{(1-x)^3} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2} x^{k-2}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.10 haben beide Reihen auch den Konvergenzradius 1.

(ii) Für alle  $s \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

---

\*z.B. die Cauchysche, siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Weitere\\_Darstellung](https://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Weitere_Darstellung)



gilt, Übungsaufgabe 38. Hierbei ist  $\binom{s}{k} := \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \dots \cdot (s-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}$  für  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $\binom{s}{0} := 1$ .<sup>\*</sup> Für  $s \in \mathbb{N}$  ist  $\binom{s}{k} = 0$  für  $k > s$  und dann ist diese Reihe die endliche Summe aus dem binomischen Satz. (Teil (i) dieses Beispiels wäre der Spezialfall für  $\frac{1}{s} \in \mathbb{N}_{>0}$ )

## 4.4 Anwendungen der Differentialrechnung

### 4.4.1 Kurvendiskussion - Extrema

Zum einen ist Differentialrechnung im Allgemeinen hilfreich, um das allgemeine Verhalten von Funktionen zu analysieren (sofern diese oft genug differenzierbar sind). Insbesondere wird diese oft bei Maximierungs- bzw. Minimierungsprobleme angewandt:

**Extrema unter 'einfachen Nebenbedingungen'** Wenn man Maximierungs- oder Minimierungsprobleme von Funktionen mehrerer Variablen unter Nebenbedingungen lösen will, hat man manchmal Glück und Einsetzen der Nebenbedingung reduziert die Frage auf ein Extremwertproblem in einer Variablen.

Wir geben zwei Standardbeispiele:

- (i) Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt:

Sei  $L$  der Umfang. Hat das Rechteck, die Seitenlängen  $a, b$  ist  $L = 2(a+b)$  und der Flächeninhalt  $A = ab = a \left( \frac{L}{2} - a \right)$ . Dann können wir von  $A = A(a)$  die Extrema bestimmen:  $0 = A'(a) = \frac{L}{2} - 2a$ , also  $a = \frac{L}{4} = b$ , also ein Quadrat. Da  $A''(a) = -2$  ist, ist das ein lokales Maximum. Da es nicht mehr Extrema gibt, ist es sogar das globale Maximum.

- (ii) Eine Konservendose (Radius  $r$ , Höhe  $H$ ) soll maximales Volumen  $V$  bei gegebener Oberfläche  $O$  fassen:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi r^2 + 2\pi hr \\ V &= \pi r^2 h = r \left( \frac{O}{2} - \pi r^2 \right) \end{aligned}$$

Dann ist  $0 = V'(r) = \frac{O}{2} - 3\pi r^2$  für  $r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$  erfüllt. Wegen  $V''(r) = -6\pi r$  ist das ein lokales Maximum (und weil es das einzige lokale Extrema ist, auch globales Maximum).

---

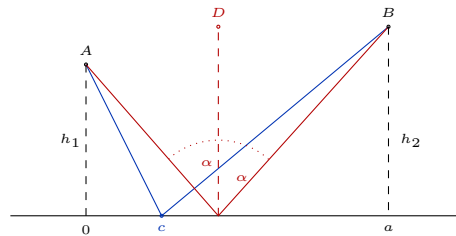
<sup>\*</sup>Für  $s \in \mathbb{N}$  stimmt diese Definition mit unserer Standarddefinition von Binomialkoeffizienten überein.

### Reflexionsgesetz

Die  $x$ -Achse sei ein Spiegel. Eine Lampe im Punkt  $A = (0, h_1)$ . Wir stehen im Punkt  $B = (a, h_2)$  und schauen auf den Spiegel. In welchem Winkel müssen wir auf den Spiegel schauen, um die Lampe zu sehen? Die Antwort gibt uns das Reflexionsgesetz, doch woher kommt dieses – als Extremalproblem aus dem Fermatschen Prinzip:

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass das Licht zwischen zwei Punkten immer den Weg (unter Einhaltung von gegebenen Bedingungen) wählt, für welchen es eine extremale Zeit benötigt. 'Einhaltung von gegebenen Bedingungen' wäre im obigen Fall, die Bedingung, dass der Weg des Lichtes über den Spiegel gehen soll.

So lange keine Nebenbedingung zu erfüllen sind und die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, ist die Verbindung zwischen zwei Punkten im  $\mathbb{R}^n$ , für welche das Licht eine extremale Zeit benötigt, immer die beide Punkte verbindende Strecke. Soll der Lichtstrahl nun von  $A$  nach  $B$  auch auf den Spiegel treffen, ist der Ansatz für die benötigte Weglänge:



Ist  $C = (c, 0)$  der Punkt auf dem Spiegel, dann ist

$$L(c) = |A - C| + |B - C| = \sqrt{c^2 + h_1^2} + \sqrt{(a - c)^2 + h_2^2}$$

die zurückgelegte Strecke. Ist die Lichtgeschwindigkeit konstant, ist die dafür benötigte Zeit genau dann extremal, wenn  $L(c)$  extremal ist (Zeit = Weg/Geschwindigkeit).

Bestimmung der Extrema:

$$L'(x) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h_1^2}} + \frac{-(a - c)}{\sqrt{(a - c)^2 + h_2^2}}$$

Es ist  $L'(x) = 0$  genau dann, wenn  $\frac{c}{|A-C|} = \frac{a-c}{|B-C|}$  gilt. Also sind die zugehörigen Dreiecke ähnlich und wir erhalten das Reflexionsgesetz:

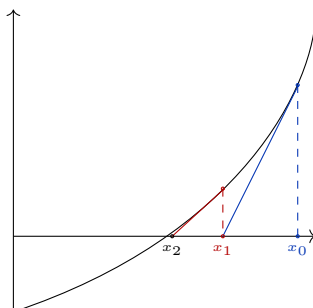
$$\text{Einfallswinkel } (\sphericalangle ACD) = \text{Ausfallswinkel } (\sphericalangle DCB)$$

Ähnlich lässt sich auch das Brechungsgesetz herleiten, vgl. Übungsaufgabe 40.

### 4.4.2 Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und streng monoton. Außerdem soll es eine Nullstelle  $\xi \in (a, b)$  von  $f$  geben.

Ziel ist nun die Nullstelle näherungsweise zu bestimmen: Die Idee ist wie folgt:



Die Tangente an  $f$  durch  $(x_0, f(x_0))$  ist gegeben durch

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Da  $f$  streng monoton ist, hat  $f'$  keine Nullstelle und somit hat diese lineare Funktion eine Nullstelle bei

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nun benutzen wir  $x_1$  als neuen Anfangswert, also als neues ' $x_0$ ', und erhalten so eine rekursive Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.1)$$

Das Bild suggeriert, dass diese Folge  $x_{n+1}$  gegen eine Nullstelle konvergiert. Die Frage ist nun, ob bzw. wann das wirklich der Fall ist.

**Lemma 4.4.1.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und streng monoton. Außerdem habe  $f$  eine Nullstelle  $\xi \in (a, b)$ .

- (i) Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass die Folge (4.1) für  $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \cap (a, b)$  gegen  $\xi$  konvergiert.
- (ii) Gilt zusätzlich, dass  $f$  konvex ist, dann konvergiert die Folge (4.1) für alle  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) > 0$  gegen  $\xi$ .

*Beweis.* Wir entwickeln  $f$ . Dann ist

$$0 = f(\xi) = f(x) + f'(\xi)(\xi - x) + \frac{f''(x + \theta(\xi - x))}{2}(\xi - x)^2$$

für ein  $\theta \in (0, 1)$ . Umstellen liefert

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \xi = \frac{f''(x + \theta(\xi - x))}{2f'(x)}(\xi - x)^2$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Da  $f$  streng monoton ist, ist  $f' \neq 0$  auf ganz  $[a, b]$ . Da  $f$  zweimal differenzierbar auf  $[a, b]$  ist, nimmt sowohl  $f'$  als auch  $f''$  sein Minimum und Maximum an. Also gibt es  $M_1, M_2 > 0$  mit  $|f'| \geq M_1$  und  $|f''| \leq M_2$  auf  $[a, b]$ . Damit haben wir

$$\left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \xi \right| \leq \underbrace{\frac{M_2}{2M_1}}_{=: C^2 > 0} |\xi - x|^2$$

Wenden wir das iterativ auf die Folge  $(x_n)_n$  aus (4.1) an, erhalten wir

$$|x_{n+1} - \xi| \leq (C|x_0 - \xi|)^{2^n}$$

Ist  $C|x_0 - \xi| < 1$ , konvergiert also  $x_n$  gegen die Nullstelle  $\xi$ . Wählt man  $\delta = \frac{1}{2C}$ , haben wir (i) gezeigt.

Zu (ii) Das Bild suggeriert, dass für konvexe Funktionen der Funktionsgraph immer über jeder Tangente an die Funktion liegt. Das ist auch so: Ist  $f$  konvex, dann folgt aus  $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{f''(x+\theta(y-x))}{2}(y - x)^2$ , dass

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$$

für alle  $x, y \in [a, b]$  gilt.

Da  $f$  streng monoton ist, wechselt  $f'$  das Vorzeichen nicht. O.B.d.A. sei  $f' > 0$  (der Fall  $f' < 0$  folgt analog). Wir zeigen per Induktion, dass  $x_n$  monoton fallend und  $f(x_n) \geq 0$  ist:  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$ . Damit ist wegen Konvexität

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

Aus  $f(x_n) \geq 0$  folgt analog  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$  und wegen der Konvexität wieder

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Also ist  $(x_n)_n$  eine monoton fallende von unten beschränkte Folge und hat somit nach Satz 3.6.6 einen Grenzwert. Dieser sei  $y$ . Aus (4.1) und der Stetigkeit von  $f$  und  $f'$  folgt  $y = y - \frac{f(y)}{f'(y)}$ , also  $f(y) = 0$ . Die Folge  $(x_n)_n$  konvergiert also gegen eine Nullstelle. Da  $f$  monoton ist, muss  $y = \xi$  gelten.  $\square$

Die Voraussetzung  $f(x_0) > 0$  in (ii) braucht man nicht wirklich: Ist  $f(x_0) < 0$ , dann ist wegen  $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$  diese Voraussetzung ab  $n = 1$  erfüllt. Allerdings wird die Folge  $x_n$  dann erst ab  $n = 1$  monoton.

**Beispiel 4.4.2.** Die  $n$ .te Wurzel einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , kann näherungsweise über das Newton-Verfahren bestimmt werden. Dazu sei  $f(x) = x^n - a$ . Diese Funktion ist auf  $x \in (0, \infty)$  streng monoton und konvex. Nach letztem Lemma konvergiert für  $x_0 \in (0, \infty)$  die Folge

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_k + \frac{a}{nx_k^{n-1}}$$

gegen  $\sqrt[n]{a}$ . Für  $n = 2$  ist das genau die Heron-Folge aus Definition 2.6.2.

### 4.4.3 Ungleichungen

**Lemma 4.4.3** (Jensensche Ungleichung). *Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion auf einem Intervall  $I$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $x_i \in I$  und alle  $\lambda_i \in [0, 1]$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

*Ist  $f$  streng konvex und alle  $\lambda_i \in (0, 1)$ , dann gilt genau dann Gleichheit, wenn alle  $x_i$  übereinstimmen.*

*Beweis.* vollständige Induktion über  $n$ .  $n = 1$  trivial,  $n = 2$  ist die Definition von konvex bzw. streng konvex.  $\square$

Durch Anwenden der Jensenschen Ungleichung lassen sich verschiedene bekannte Ungleichung leicht ableiten.

**Folgerung 4.4.4** (Youngsche Ungleichung). *Für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $p_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$  gilt*

$$a_1 \dots a_n \leq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \frac{a_2^{p_2}}{p_2} + \dots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}.$$

*Es gilt genau dann Gleichheit, wenn  $a_1^{p_1} = \dots = a_n^{p_n}$  gilt.*

*Beweis.* Jensen für  $x \mapsto e^x$  ergibt

$$e^{\sum_i \lambda_i x_i} \leq \sum_i \lambda_i e^{x_i}.$$

Wählen wir  $\lambda_i = 1/p_i$  und  $x_i = p_i \ln a_i$  erhalten wir die gesuchte Ungleichung.  $\square$

**Folgerung 4.4.5** (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel). *Für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

*Beweis.* Jensensche Ungleichung für  $f(x) = -\ln x$  ( $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ ) und dann exponieren. Alternativ: Aus der Youngschen Ungleichung mit  $p_i = n$  und  $x_i = a_i^n$ .  $\square$

Für  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $p \geq 1$  sei

$$\|a\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

die  $L^p$ -Norm von  $a$ . Im Spezialfall  $p = 2$  ist das einfach wieder die euklidische Norm.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Satz 4.4.6** (Hölder-Ungleichung im  $\mathbb{R}^n$ ). Für  $p \geq 1$  und  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\|_p \|b\|_q,$$

wobei  $q$  der zu  $p$  konjugierte Exponent ist, d.h.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Für  $p = 2$  ist  $q = 2$  und die Hölder-Ungleichung ist gleich der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

*Beweis.* Für  $a = 0$  oder  $b = 0$  steht auf beiden Seiten Null und wir haben sogar Gleichheit. Sei nun  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$ . Dann gilt nach der Young-Ungleichung

$$\frac{|a_j|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_j|}{\|b\|_q} \leq \frac{1}{p} \left( \frac{|a_j|}{\|a\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{|b_j|}{\|b\|_q} \right)^q$$

Summation über  $j$  liefert

$$\frac{\sum_{j=1}^n |a_j b_j|}{\|a\|_p \|b\|_q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mit  $|\langle a, b \rangle| = \left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j b_j|$  erhalten wir damit die Hölder-Ungleichung.  $\square$

**Satz 4.4.7** (Minkowskische Ungleichung im  $\mathbb{R}^n$ ). Für  $p \geq 1$  und  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

*Beweis.* Wir berechnen

$$\begin{aligned} \|a + b\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p = \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{p-1} |a_j + b_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{p-1} |a_j| + \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{p-1} |b_j|. \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt, da  $p - 1 \geq 0$  ist und somit keine Gefahr besteht, dass wir hier durch Null teilen. Nun wollen wir auf die beiden Summenzeichen der rechten Seite Hölder anwenden, also  $\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ . Für die erste Summe verwenden wir dafür  $x = a$  und  $y$  mit  $y_j = |a_j + b_j|^{p-1}$ . Dann folgt mit  $q = \frac{p-1}{p}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{p-1} |a_j| &\leq \|a\|_p \left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|a\|_p \left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|a\|_p \|a + b\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Analog für die zweite Summe und wir haben somit

$$\|a + b\|_p^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p) \|a + b\|_p^{p-1}$$

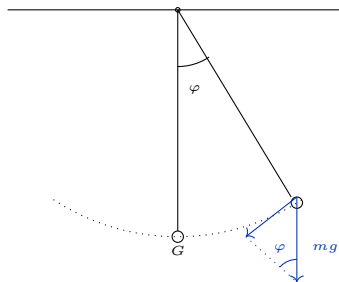
Für  $a + b \neq 0$  erhalten wir somit die Minkowskische Ungleichung mittels Division durch  $\|a + b\|_p^{p-1}$ . Für  $a + b = 0$  stimmt die Minkowskische Ungleichung, da die rechte Seite immer nichtnegativ ist.  $\square$

#### 4.4.4 Anwendungen in der Physik

Ableitungen sind Änderungsraten, z.B. Geschwindigkeit ist die Änderung des Weges über die Zeit, also die Ableitung des Weges als Funktion der Zeit; Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit über die Zeit, also die Ableitung der Geschwindigkeit und damit die zweite Ableitung des Weges. Hat man z.B. eine Energie als Funktion des Ortes, dann ist die Ableitung die zugehörige Kraft.

Oft verwendet man in der Physik Näherungen, dabei oft Entwicklungen um einen Gleichgewichtspunkt z.B.:

**Fadenpendel** Wir betrachten ein Fadenpendel der Länge  $\ell$ . Daran hängt eine Masse  $m$ . Wir wollen die Bewegungsgleichung aufstellen. Ist die Auslenkung  $\varphi = \varphi(t)$  (eine Funktion der Zeit), so legt die Masse die Bogenlänge  $\ell\varphi$  zurück. Die Beschleunigung (zweite Ableitung des Weges) ist dann  $\ell\ddot{\varphi}$  ( $\ddot{\varphi} := \varphi''$  - in der Physik schreibt man für Ableitungen nach der Zeit oft einen Punkt statt des Ableitungsstriches).



Für ein Kräftegleichgewicht muss die beschleunigende Kraft gleich dem Anteil der Gravitationsrichtung in Bewegungsrichtung sein, also:

$$m\ell\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

Für kleine  $\varphi$ , also  $\varphi$  nahe am Gleichgewichtspunkt  $\varphi = 0$ , entwickelt man  $\sin \varphi = \varphi + o(\varphi)$  und nähert  $\sin \varphi$  durch  $\varphi$  an und erhält die Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0.$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Das ist die Schwingungsdifferentialgleichung, die wir z.B. in Übungsaufgabe 39 anschauen.

Viele physikalischen Effekte sind durch Näherungen bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in der Entwicklung beschreibbar:

**Kinetische Energie – Einstein versus Newton** In Einsteins spezieller Relativitätstheorie ist die kinetische Energie eines Objekts mit Ruhemasse  $m_0$  und Geschwindigkeit  $v$  gegeben durch ( $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)

$$E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

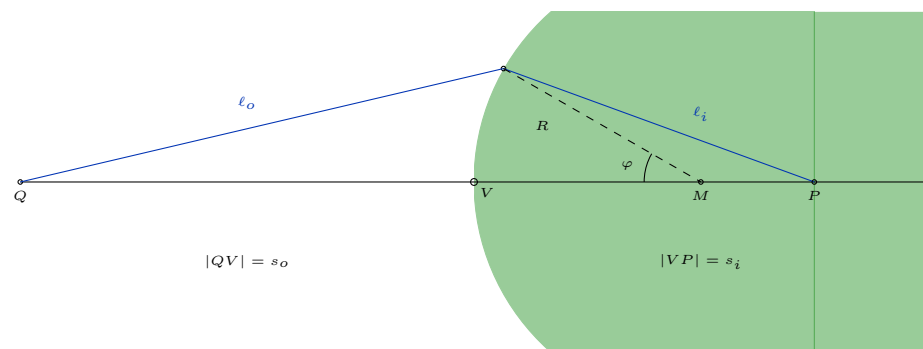
In der klassischen (Newtonschen) Theorie ist die kinetische Energie als  $\frac{1}{2}m_0 v^2$  angegeben. Wie passt das zusammen? Die Newtonsche Theorie ist die Näherung für  $v \ll c$  ( $v$  wesentlich kleiner als  $c$ ) – es ist bei Entwicklung um  $x = 0$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 = \frac{1}{2}x + o(x)$$

(da  $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$  oder man benutzt direkt Beispiel 4.3.17.ii) Also ist

$$E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{1}{2}m_0 v^2 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right).$$

**Sphärische Linse** Wir betrachten eine sphärische Linse mit Brechungsindex  $n_2$  (das bedeutet, dass die Lichtgeschwindigkeit in der Linse gleich Vakuumlichtgeschwindigkeit durch Brechungsindex ist). Die Umgebung habe Brechungsindex  $n_1$ . Licht wird in  $S$  emittiert, an der sphärischen Linsenoberfläche (Radius  $R$ ) gebrochen und der gebrochene Lichtstrahl treffe in  $P$  ein.





Wenn man ähnlich wie beim Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz, das Fermatsche Prinzip verwendet, kann man folgende Gleichung herleiten:

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o} \right)$$

Das ist allerdings nicht die Gleichung, die man findet. Es sind ja erst einmal auch nur  $s_o$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  und  $R$  bekannt und normalerweise suchen wir  $s_i$ . Meistens findet man eine Näherung für achsennahe Strahlen (also für  $\varphi$  nahe Null):

Man kann  $\ell_i$  und  $\ell_o$  mittels  $\varphi$  darstellen (Kosinussatz):

$$\begin{aligned}\ell_o^2 &= R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R) \cos \varphi \\ \ell_i^2 &= R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R) \cos \varphi\end{aligned}$$

Für  $\varphi$  nahe 0 ist  $\cos \varphi = 1 + o(1)$  und damit

$$\ell_o = s_o + o(1) \quad \ell_i = s_i + o(1)$$

also in erster Ordnung (Gauß'sche Optik bzw. erste Ordnungsoptik)

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

(Ist man nicht mehr achsennah, muss man mehr als nur die erste Ordnung mitnehmen. Dann benutzt man z.B. als zusätzlichen Parameter, die Höhe über der  $x$ -Achse bei der der Lichtsstrahl auf die Linse trifft – 3.Ordnungsoptik (ist spätestens bei Abberation/Linsensystemen relevant)).

#### 4.4.5 Polynomiale Interpolation

Wir betrachten eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Angenommen wir kennen die Werte von  $f$  an den Stellen  $x_i$  mit  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m \leq b$ , also an  $m+1$  Stellen. Dann gibt es ein eindeutiges Polynom  $p_m$  vom Grad  $m$  mit  $p_m(x_i) = f(x_i)$  für  $i = 0, \dots, m$  (eine Gerade, also ein Polynom ersten Grades ist z.B. durch zwei Punkte eindeutig bestimmt):

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \dots \cdot \widehat{\frac{x - x_i}{x_i - x_i}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_m}{x_i - x_m}$$

Hier bedeutet  $\hat{\phantom{x}}$ , dass dieser Faktor nicht vorkommt, also z.B.

$$p_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Das Polynom  $p_m$  ist so gebaut, dass jeder Summand in  $p_m(x_i)$  bis auf den  $i$ -ten Summanden verschwindet und der  $i$ -te Summand gleich  $f(x_i)$  ist.

Wir nennen  $p_m$  *polynomiale Interpolation von  $f$  durch die Stützstellen  $x_i$* .

Wir wollen nun schauen, wie nah diese Polynom an der ursprünglichen Funktion  $f$  ist.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Lemma 4.4.8.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar. Seien  $x_i \in [a, b]$  und  $p_m$  wie eben definiert. Dann gibt es ein  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  mit

$$f(x) - p_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi) \prod_{j=0}^m (x - x_j).$$

*Beweis.* Für  $x = x_j$  für ein  $0 \leq j \leq m$  stimmt die Aussage, da beide Seiten der Gleichung dort Null sind. Sei nun  $x \neq x_j$  für  $0 \leq j \leq m$ . Wir setzen

$$g(x) := \frac{f(x) - p_m(x)}{\prod_{j=0}^m (x - x_j)}$$

und  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(t) := f(t) - p_m(t) - g(x) \prod_{j=0}^m (t - x_j).$$

Dann gilt  $\varphi(x_j) = 0$  für alle  $0 \leq j \leq m$  und  $\varphi(x) = 0$ . Wenden wir jeweils Satz von Rolle auf  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $\varphi^{(m)}$  an (analog wie im Beweis von Satz von Taylor) erhalten wir am Ende ein  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $\varphi^{(m+1)}(\xi) = 0$ . Mit

$$\varphi^{(m+1)}(t) = f^{(m+1)}(t) - (m+1)!g(x)$$

folgt dann die Behauptung. □

#### 4.4.6 Erste Differentialgleichungen

**Woche 11** Als wir uns auf Seite 123 für ein Fadenpendel angeschaut haben, wie man die Auslenkung des Pendels als Funktion  $\varphi(t)$  der Zeit beschreibt, hat das (für kleine Auslenkungen) auf die Schwingungsgleichung

$$\varphi'' + \frac{g}{\ell} \varphi = 0$$

geführt ( $g$  - Erdbeschleunigung,  $\ell$  - Länge des Pendels). Hat man diese Gleichung muss man natürlich noch Lösungen finden, vgl. Übungsaufgabe 39.

Die Schwingungsgleichung ist ein sehr wichtiges Beispiel einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung – eine Gleichung in der gesuchten Funktionen und ihren Ableitungen. Die höchstevorkommende Ableitung nennt man Ordnung der Differentialgleichung – die Schwingungsgleichung hat also Ordnung 2.

Die einfachsten Differentialgleichungen sind *lineare homogene Differentialgleichungen*, d.h. sie haben die Form

$$a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)f'(x) + a_0(x) = 0$$

für gegebene Funktionen  $a_i(x)$  und ein  $n \in \mathbb{N}$ . Das besondere an linearen Differentialgleichungen ist es dass, die Menge aller Lösungen, also die Menge aller Funktionen, die diese

Differentialgleichung erfüllen, einen Vektorraum bilden (bzgl. der Standardaddition und skalaren Multiplikation von Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Wir werden gewöhnliche Differentialgleichungen systematischer in Analysis II betrachten. Aber wir wollen hier wenigstens ein paar wichtige Beispiele sehen:

**Beispiel 4.4.9** (Exponentielle Prozesse). Hat man eine zeitabhängige Größe  $u(t)$ , die sich über kleine Zeitänderungen immer proportional zum momentan Wert ändert (mit einem zeitunabhängigen Proportionalitätsfaktor  $\alpha$ ), dann gilt

$$u'(t) = \alpha u(t).$$

Das tritt z.B. auf bei

- Zerfallsprozessen (z.B. radioaktiver Zerfall), Abkühlungsprozesse,
- Wachstumsprozessen
- Absorption von Energie in homogenen Medien (dort ist dann  $t$  nicht die Zeit, sondern die Weglänge im Medium)

Eine Lösung dieser linearen homogenen Differentialgleichung  $u' = \alpha u$  ist z.B.  $u(t) = e^{\alpha t}$  aber auch  $u(t) = -e^{\alpha t+2}$ . Man sieht also schon, dass die Lösung nicht eindeutig ist. Legt man allerdings  $u$  zu einer bestimmten Zeit  $t_0$  fest – man sagt, man wählt einen *Anfangswert*, dann hat

$$u'(t) = \alpha u(t), \quad u(t_0) = u_0 \tag{4.2}$$

eine eindeutige Lösung:

Eine Lösung wäre  $u(t) = u_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ . Das dies auch wirklich die einzige ist, sieht man wie folgt: Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen von (4.2), dann ist  $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$  eine Lösung von  $u'(t) = \alpha u(t)$  mit  $u(t_0) = 0$ . Dann folgt aber mit Übungsaufgabe 42, dass  $u(t) = 0$  und somit  $u_1 = u_2$  ist.

Die Differentialgleichung  $f' = f$  mit  $f(0) = 1$  ist eine Möglichkeit die Exponentialfunktion zu definieren. Eindeutigkeit folgt, dann wie oben. Aber für die Existenz muss man sich extra Mühe geben. Hier ist es noch recht einfach:

Eine Lösung ist automatisch unendlich oft differenzierbar (folgt aus mehrfachen Differenzieren der Differentialgleichung). Man kann sich dann immer erst einmal fragen, kann ich denn die Taylorpolynome um den Entwicklungspunkt bestimmen, in dem ich den Anfangswert gegeben habe (also hier  $x_0 = 0$ ). Sei also  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$  für  $x \rightarrow 0$ . Jetzt hilft uns, dass wir mit der  $o$ -Notation rechnen können:

$$a_1 + \dots + na_n x^{n-1} + o(x^{n-1}) = f'(x) = f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n),$$

also

$$0 = a_0 - a_1 + (a_1 - 2a_2)x + \dots + (a_{n-1} - na_n)x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

und somit muss  $a_0 = a_1$ ,  $a_1 = 2a_2$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1} = na_n$  sein. Da wir als Entwicklungspunkt die Stelle des Anfangswerts gewählt haben, kennen wir hier automatisch  $a_0 = f(0) = 1$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

und können so rekursiv, die anderen  $a_i$  bestimmen. Hier haben wir Glück und es lässt sich leicht direkt eine explizite Formel für die  $a_i$  hinschreiben:  $a_i = \frac{1}{i!}$ . Das heißt wir kennen die Taylorreihe, die  $f$  besitzen müsste:

$$T_\infty(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} =: g(x)$$

Das Verfahren des Bestimmens der Taylorreihe nennt man *Potenzreihenansatz* zum Lösen der Differentialgleichung. Sagt natürlich keiner, dass die konvergieren muss.

Hier kann man jetzt überprüfen, dass diese Potenzreihe für alle  $x$  konvergiert und somit eine Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Dann folgt mit Lemma 4.3.10  $g'(x) = g(x)$ . Also ist das  $g$  eine (und damit die eindeutige) Lösung von  $f' = f$ ,  $f(0) = 1$ .

Einen recht allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz werden wir in Analysis II kennenlernen.

**Beispiel 4.4.10** (Exponentielle Prozesse mit konstanter Zufuhr von außen/konstantem Abfluss nach außen). Hat man wieder eine zeitabhängige Größe  $u(t)$ , die sich über kleine Zeitänderungen immer proportional zum momentan Wert ändert (mit einem zeitunabhängigen Proportionalitätsfaktor  $\alpha \neq 0$ ) plus einem konstanten Zufuhr  $\beta \in \mathbb{R}$  von außen – ist  $\beta$  negativ, handelt es sich in Wirklichkeit um einen konstanten Abfluss

$$u'(t) = \alpha u(t) + \beta.$$

Eine solche Gleichung tritt z.B. auf beim

- Abbau von Glukose während der Patient noch Lösung über einen Tropf erhält
- Abbau von Alkohol bei konstantem Nachschub

Eine Lösung wäre hier  $u_1(t) = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Angenommen man hat noch zweite Lösung  $u_2(t)$ , dann erfüllt  $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$  die Gleichung  $w' = \alpha w$  aus dem letzten Beispiel. Von dieser kennen wir aber schon alle möglichen Lösungen  $w(t) = ce^{\alpha t}$  für  $c \in \mathbb{R}$ . Damit gilt  $u(t) = -\frac{\beta}{\alpha} + ce^{\alpha t}$  für  $c \in \mathbb{R}$  (man sagt eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung (also irgendeine Lösung, die man irgendwie gefunden hat – hier  $-\frac{\beta}{\alpha}$  – plus die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung – hier  $w(t)$ ). Hier wird  $c$  dadurch eindeutig bestimmt, dass man wieder einen Anfangswert  $u(t_0) = u_0$  festlegt. Dann ist  $c = \left(u_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t_0}$ .

**Beispiel 4.4.11** (Autokatalytische Prozesse). Bei autokatalytischen Reaktionen in der Chemie wirkt der Teil der Substanz, der bereits umgewandelt wurde, katalytisch, beschleunigt also den Reaktionsverlauf. Sei  $u(t)$  der Prozentsatz (Konzentration) der umzuwandelnden Substanz an einer gegebenen Mischung. Die Ausgangskonstratation sei  $A$ . Dann ist die Änderung der Konzentration proportional zur Konzentration der noch umzuwandelnde Menge, also  $u(t)$ , und proportional zur Konzentration der schon umgewandelten Menge, also  $A - u(t)$ . Also haben wir

$$\dot{u} = \alpha u(A - u) = \alpha Au - \alpha u^2$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, aber keine lineare ( $u$  kommt auch quadratisch vor). Hier haben wir aber Glück und die Gleichung lässt sich leicht auf eine lineare zurückführen. Dazu setzen wir  $v = \frac{1}{u}$  und haben damit

$$v' = -\frac{u'}{u^2} = \frac{-\alpha Au + \alpha u^2}{u^2} = \alpha - \alpha Av.$$

Dafür kennen wir nach dem letztem Beispiel die Lösungen

$$v(t) = -\frac{1}{A} + ce^{-\alpha At}$$

für  $c \in \mathbb{R}$  und damit kennen wir  $u(t)$ . Die Konstante  $c$  wird wieder durch einen Anfangswert eindeutig bestimmt.

**Beispiel 4.4.12** (Schwingungsgleichung). Die Schwingungsgleichung

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

beschreibt z.B. die Auslenkung eines Fadenpendels (für kleine Auslenkungen) als Funktion der Zeit (dann ist  $\omega^2 = \frac{\text{Erdbeschleunigung}}{\text{Fadenlänge}}$ ) oder die Auslenkung der Schwingung einer Feder im elastischen Bereich (dort ist  $\omega^2 = \frac{\text{Federkonstante}}{\text{Masse an der Feder}}$ ).

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Menge aller Lösungen bilden also einen Vektorraum. Um hier Eindeutigkeit der Lösung zu erreichen, muss man als Anfangswerte eine Anfangsauslenkung  $u(t_0) = u_0$  und eine Anfangsauslenkungsgeschwindigkeit  $u'(t_0) = v_0$  vorgeben, vgl. Übungsaufgabe 39. Die Lösung ist dann eine Linearkombination auf  $\sin(\omega t)$  und  $\cos(\omega t)$ , wobei die Konstanten der Linearkombination durch die Anfangswerte bestimmt werden.

Wenn wir auch hier mal wieder annehmen, dass wir den Sinus und den Kosinus noch nicht kennen, können wir auch hier wie bei der Exponentialfunktion einen Potenzreihenansatz machen, um diese einzuführen:

Sei  $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$ . Dann ist  $u''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k (t - t_0)^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} (t - t_0)^k$  und somit

$$0 = u''(t) + \omega^2 u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} + \omega^2 a_k) (t - t_0)^k$$

So erhalten wir die Rekursionsvorschrift  $a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+2)(k+1)}a_k$  und die Anfangswerte der Rekursion erhalten wir aus den Anfangswerten der Differentialgleichung –  $a_0 = u_0$  und  $a_1 = v_0$  (Hier sieht man schön, dass man auch zwei Anfangswerte braucht, sonst wäre die Lösung der Rekursion nicht eindeutig.). Im Spezialfall  $\omega = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$  und  $v_0 = 1$  kann man sehr leicht eine explizite Lösung der Rekursion hinschreiben

## 4 Funktionen in einer Variablen

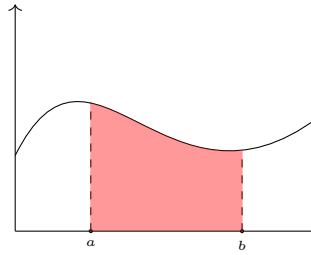


Abbildung 4.6: Der Flächeninhalt, den eine nichtnegative Funktion mit der  $x$ -Achse einschliesst für  $x \in [a, b]$ .

und erhält so die Potenzreihe der Sinusfunktion (analog die der Kosinusfunktion im Spezialfall  $\omega = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $u_0 = 1$  und  $v_0 = 0$ ).

Würde man statt der Schwingungsgleichung die recht ähnliche Differentialgleichung

$$u''(t) - \omega^2 u(t) = 0$$

betrachten, dann sind hier die Lösungen Linearkombinationen aus  $\sinh(\omega t)$  und  $\cosh(\omega t)$  (Die Koeffizienten werden wieder durch Anfangswerte festgelegt).

## 4.5 Integration

Es gibt zwei Motivationen um Integration einzuführen:

- (i) Um Flächeninhalte zu berechnen ('bestimmte Integrale').
- (ii) Als 'Inverses' von Differentiation ('unbestimmte Integrale').

Man kann beide Wege wählen, um Integration einzuführen. Wir wählen den über Flächeninhalt. Für eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  suchen wir den Flächeninhalt, den die Funktion mit der  $x$ -Achse einschliesst mit  $\int_a^b f(x) dx$ , vgl. Abbildung 4.6.

Was soll der Flächeninhalt sein? Davon haben wir eine gewisse anschauliche Vorstellung:

- Der Flächeninhalt eines Rechtecks sollte das Produkt der Seitenlänge sein.
- Der Flächeninhalt sollte monoton sein: Ist  $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ , dann sollte der Flächeninhalt von  $A$  kleiner gleich dem von  $B$  sein.\*
- Der Flächeninhalt sollte additiv sein: Sind  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  disjunkte<sup>†</sup> Teilmengen, dann sollte der Flächeninhalt von  $A \cup B$  die Summe der einzelnen Flächeninhalte sein.

---

\*Nicht allen Teilmengen werden wir einen Flächeninhalt zuordnen können.

<sup>†</sup>Zwei Mengen heißen *disjunkt*, wenn sie kein Element gemeinsam haben (also ihr Schnitt leer ist).

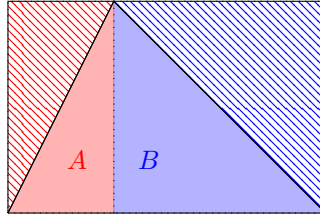


Abbildung 4.7: Der Flächendreieck des Dreiecks ist die Summe aus A (dem Flächeninhalt des roten Dreiecks) und aus B (dem Flächeninhalt des blauen Dreiecks). Das benutzt, dass der Flächeninhalt einer Menge, die aus zwei disjunkten Teilen besteht die Summe der Einzelflächeninhalte ist. A und B sind aber gar nicht disjunkt, sondern teilen sich eine Seite. Diese kann man aber als Rechteck mit einer Seitenlänge gleich Null betrachten und die hat somit Flächeninhalt Null. Es ist also egal, ob man beim Berechnen des Flächeninhalts von Dreiecken, den Rand dazu nimmt oder nicht.

Das rote Dreieck und das rot getrichelte Dreieck gehen aber durch Drehung auseinander hervor (analog für die blauen Dreiecke) und haben somit den gleichen Flächeninhalt. Also hat das Rechtecks den doppelten Flächeninhalt wie das Dreieck (A+B). Also ist der Flächeninhalt des Dreiecks einhalb mal Grundseite mal Höhe.

- Flächeninhalt sollte unabhängig von Verschiebungen, Spiegelung und Rotationen (und damit von Hintereinanderausführungen davon\* sein.

Wenn man das mal als 'Regeln' akzeptiert, kann man als simples Beispiel direkt Dreiecken schon mal einen Flächeninhalt zuordnen, s. Abbildung 4.7. Oder als zweites Beispiel kann man noch einmal auf Übungsaufgabe 9 schauen, vgl. Abbildung 4.8.

### 4.5.1 Treppen- und Regelfunktionen

Wir wollen zunächst eine Klasse von Funktionen definieren, so dass der Flächeninhalt unter der Kurve eine endliche Vereinigung von Rechtecken ist und wir somit wissen, welches Wert der Flächeninhalt haben sollte:

**Definition 4.5.1.** Sei  $I = [a, b]$  und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Wir nennen  $\mathcal{Z} := (x_0, \dots, x_n)$  eine *Zerlegung* von  $I$ , wenn  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  ist. Eine Zerlegung  $\mathcal{Z} := (x_0, \dots, x_n)$  heißt *äquidistant*, falls  $x_k - x_{k-1} = \frac{x_n - x_0}{n}$  für alle  $k = 1, \dots, n$  ist.

Seien  $\mathcal{Z}_1 := (x_0, \dots, x_n)$  und  $\mathcal{Z}_2 := (y_0, \dots, y_m)$  zwei Zerlegungen von  $I$ . Dann nennen wir  $\mathcal{Z}_2$  eine *Verfeinerung* von  $\mathcal{Z}_1$ , falls für alle  $k = 0, \dots, n$  es ein  $\ell$  mit  $y_\ell = x_k$  gibt.

---

\*Im  $\mathbb{R}^n$  bilden Verschiebungen, Spiegelung und Rotationen und ihre Hintereinanderausführungen eine Gruppe – die Gruppe der Isometrien des  $\mathbb{R}^n$  (Isometrie  $\sim$  längenerhaltene Abbildung)

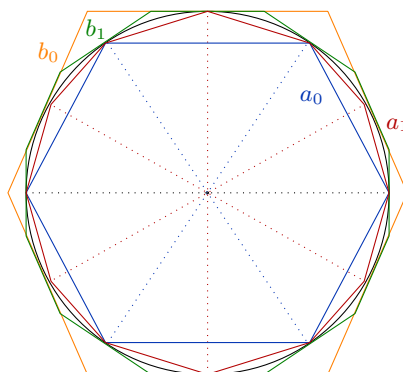


Abbildung 4.8: In Übungsaufgabe 9 hatten wir den Kreis durch einbeschriebene regelmäßige  $3 \cdot 2^n$ -Ecke  $A_n$  angenähert und gesehen, dass die Folge der Flächeninhalte von  $A_n$  konvergieren. Es liegt nahe zu sagen, dass der Grenzwert der Flächeninhalt des Kreises ist, da jedenfalls anschaulich die Vielecke zur Kreisfläche immer weniger Fehler hat. Das können wir aber offiziell so noch gar nicht sagen, da wir noch gar nicht wissen, was der Kreis als Flächeninhalt hat bzw. ob er überhaupt einen hat. Dazu nehmen wir noch eine zweite Folge  $B_n$  von umschreibenden regelmäßigen Vielecken. Hier kann man analog wie für  $A_n$  zeigen, dass die Folge der Flächeninhalte konvergiert und man sogar direkt zeigen, dass die Differenz der Flächeninhalte von  $B_n$  und  $A_n$  wirklich gegen Null konvergiert, beide Folgen also den gleichen Grenzwert haben. Deshalb macht es Sinn diesen Grenzwert als Flächeninhalt des Kreises zu betrachten.



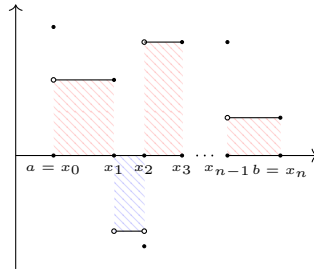


Abbildung 4.9: Beispiel einer Treppenfunktion mit den Rechtecken, die die einzelne Treppe jeweils mit der  $x$ -Achse einschließt. Wir werden dann für das Integral die Rechtecke unter der  $x$ -Achse mit negativem Vorzeichen zählen. Man sieht auch an den Rechtecken ganz gut, dass für den Flächeninhalt egal ist, welche Funktionswerte  $f$  an den Stellen  $x_i$  der Zerlegung annimmt. Deshalb wird an die  $f(x_i)$  auch keine Bedingung gestellt.

Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Zerlegung  $\mathcal{Z} := (x_0, \dots, x_n)$  von  $I$  und reelle Zahlen  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit

$$f(x) = \alpha_i \text{ für } x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n$$

gibt.

Keine Aussage über  $f(x_i)$ , vgl. Abbildung 4.9.

Ist  $f$  Treppenfunktion bzgl. einer Zerlegung, dann auch bzgl. jeder Verfeinerung dieser Zerlegung.

**Definition 4.5.2** (Integral einer Treppenfunktion). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion bzgl. einer Zerlegung  $\mathcal{Z} := (x_0, \dots, x_n)$ . Sei  $\alpha_i = f(\frac{x_{i-1} + x_i}{2})$ . Dann sei

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{i-1})$$

das *Integral von  $f$* .

Da für eine Treppenfunktion, die Zerlegung nicht eindeutig ist, z.B. kann man immer zu einer Verfeinerung übergehen, ist erst einmal nicht klar, dass das Integral nicht von dieser gewählten Zerlegung abhängt. Anschaulich ist doch schon klar, da  $|\alpha_i|(x_i - x_{i-1})$  immer der Flächeninhalt ist, denn eine Treppe mit der  $x$ -Achse einschließt mal dem Vorzeichen von  $\alpha_i$ , vgl. Abbildung 4.9.

Man überprüft jedoch auch formal leicht die Unabhängigkeit:

**Lemma 4.5.3.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Dann ist  $\int_a^b f(x) dx$  unabhängig davon, bzgl. welcher Zerlegung man  $f$  als Treppenfunktion ansieht.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

*Beweis.* Man sieht direkt, dass das Integral der Treppenfunktion zu einer Zerlegung gleich dem zu einer Verfeinerung dieser Zerlegung ist. Hat man zwei Zerlegungen zur gegebenen Treppenfunktion, geht man zu einer gemeinsamen Verfeinerung dieser beiden Zerlegungen (Also einer Zerlegung, die alle Stellen der beiden Zerlegungen enthält) über und dann folgt die Behauptung direkt.  $\square$

**Lemma 4.5.4.** Die Menge  $\mathcal{T}_a^b := \{\text{Treppenfunktionen } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  bilden (mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen) einen Vektorraum.\* Die Abbildung

$$\int_a^b : \{\text{Treppenfunktionen } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

ist

(i) linear<sup>†</sup>, d.h. sind  $f, g \in \mathcal{T}_a^b$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\int_a^b (\alpha f + g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) monoton, d.h. sind  $f, g \in \mathcal{T}_a^b$  mit  $f \leq g$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(iii) beschränkt, d.h.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| (b - a)$$

*Beweis.* Vektorraum, (i) und (ii) sieht man direkt. Wir machen hier nur (iii): Dazu sei  $f(x) = \alpha_k$  für  $x \in [x_{k-1}, x_k]$  für  $k = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - x_{k-1}) \right| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sup_k |\alpha_k| \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| (b - a). \end{aligned} \quad \square$$

**Idee** Annähern einer allgemeinen Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  durch eine Funktionenfolge  $f_n$  von Treppenfunktion.

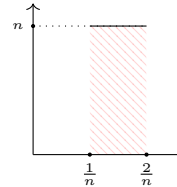
\*genauer: ein Untervektorraum des Vektorraumes der Funktionen  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>†</sup>Das ist genau der Begriff der linearen Abbildung zwischen Vektorräumen aus der linearen Algebra.

**Hoffnung**  $\int_a^b f_n(x)dx$  konvergiert gegen den Flächeninhalt, den  $f$  mit der  $x$ -Achse einschliesst — das ist im Allgemeinen ein bißchen zu viel gehofft.

Was können wir schon mal sagen? Punktweise Konvergenz der  $f_n$  reicht nicht — einfaches Beispiel:

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} n & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Dann konvergiert  $f_n$  punktweise gegen  $f = 0$  (was sogar selbst wieder eine Treppenfunktion ist). Aber wir haben  $\int_0^1 f_n(x)dx = n \frac{1}{n} = 1$  und  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ . Wir werden jedoch bald sehen, dass gleichmäßige Konvergenz reichen wird. Dazu zuerst noch eine Definition:

**Definition 4.5.5.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Regelfunktion*\* falls es eine Folge  $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R})_n$  von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

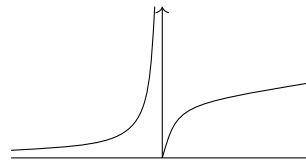
**Beispiel 4.5.6.** Sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ . Wir definieren eine Folge von Treppenfunktionen  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. der äquidistanten Zerlegung von  $[0, 1]$  der Länge  $\frac{1}{n}$ , also  $\mathcal{Z}_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n})$ . Es sei  $f_n(x) = \frac{k}{n}$  für  $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, k = 0, \dots, n-1$ . Dann ist

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

also konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ . Damit ist  $f$  eine Regelfunktion.

Man kann sich relativ leicht direkt überlegen, dass Regelfunktionen beschränkt sein müssen. Damit ist z.B. das folgende keine Regelfunktion:

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$



Der folgende Satz zeigt uns, dass die gleichmäßige Konvergenz (im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz) ausreicht, um den Integralbegriff auszuweiten:

**Satz 4.5.7.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion und  $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R})_n$  eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann konvergiert die Folge  $\int_a^b f_n(x)dx$  und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folge der Treppenfunktionen.

Wir definieren das Integral von  $f$  als  $\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$ .

\*Je nach Literatur wird hierfür auch der Begriff *sprungstetige Funktion* verwendet. Dieser Name kommt daher, dass man zeigen kann, dass eine  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann eine Regelfunktion ist, wenn für alle  $x \in I$ , sowohl der rechtsseitige als auch der linksseitige Limes existiert. Zeigen wir hier nicht.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

In letzten Beispiel wäre

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\frac{1}{n}} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \stackrel{\text{Satz 2.3.2}}{=} \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2}$$

und damit

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\int_a^b f_n(x) dx$  überhaupt konvergiert. Dazu zeigen wir, dass dies eine Cauchyfolge ist: Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gilt für alle  $n, m \geq n_0$  mit der Dreiecksungleichung

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f_m(x) - f(x)| \leq 2\epsilon.$$

Damit gilt für alle  $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_m(x) dx \right| &\stackrel{\text{linear}}{=} \left| \int_a^b (f_n - f_m)(x) dx \right| \\ &\stackrel{\text{Lem. 4.5.4}}{\leq} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| (b-a) \leq 2\epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Also ist  $\int_a^b f_n(x) dx$  eine Cauchyfolge.

Es bleibt noch die Unabhängigkeit der gewählten Folge von Treppenfunktionen zu zeigen: Seien  $f_n, g_n$  Treppenfunktionen, so dass sowohl  $f_n$  als auch  $g_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren. Dann ist auch  $(h_n)_n$  mit  $h_{2n} = g_n$  und  $h_{2n+1} = f_n$  eine Folge von Treppenfunktionen, die auch gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und somit existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(x) dx$ . Da jede Teilfolge aber dann den gleichen Limes hat folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$   $\square$

Auch für Regelfunktionen gilt das Lemma 4.5.4, was wir dort erst nur für Treppenfunktionen formulieren konnten:

**Satz 4.5.8.** Die Menge  $\mathcal{R}_a^b := \{\text{Regelfunktionen } [a,b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  bilden (mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen) einen Vektorraum. Die Abbildung

$$\int_a^b : \{\text{Regelfunktionen } [a,b] \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

ist linear, monoton und beschränkt.

*Beweis.* Direkt aus Lemma 4.5.4 und den Rechenregeln für konvergente Folgen.  $\square$

Welche Funktionen sind denn nun Regelfunktionen? Welche Funktionen können wir also mit diesem Integralbegriff integrieren? Bis jetzt wissen wir das explizit nur von Treppenfunktionen und von  $x \mapsto x$ .

**Satz 4.5.9.** *Stetige Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind Regelfunktionen.*

Hätten wir gezeigt (vgl. Fußnote zu Definition 4.5.5), dass eine  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann eine Regelfunktion ist, wenn für alle  $x \in I$ , sowohl der rechtsseitige als auch der linksseitige Limes existiert, dann wäre das hier direkt klar. Dann wäre auch direkt klar, dass monotone Funktionen Regelfunktionen sind. Auch die Thomaesche Funktion aus Beispiel 4.1.42.iii ist damit eine Regelfunktion.

Wir wollen es hier jedoch für stetige Funktionen direkt zeigen. Dazu zeigen wir vorher noch:

**Satz 4.5.10.** *Für jede stetige Funktion  $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (4.3)$$

!! Das ist nicht die Stetigkeitsdefinition (Reihenfolge der Quantoren!)!! Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , die (4.3) erfüllt, nennt man *gleichmäßig stetig*. Der letzte Satz sagt aus, dass stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen automatisch gleichmäßig stetig sind. Für stetige Funktionen auf beliebigen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  stimmt das nicht: Für  $f(x) = x^2$  wähle  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Sei  $\delta > 0$ . Wähle  $x = \frac{1}{\delta}$  und  $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ . Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x + y| \cdot |x - y| > \frac{2}{\delta} \frac{\delta}{2} = 1 > \frac{1}{2}.$$

*Beweis von Satz 4.5.10.* Angenommen  $f$  wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $x, y \in I$  mit  $|x - y| < \delta$  und  $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$  gibt. Für  $\delta = \frac{1}{n}$  nennen wir die zugehörigen  $x, y$  dann  $x_n$  und  $y_n$ . Da  $x_n \in [a, b]$  ist, besitzt nach Bolzano-Weierstrass  $(x_n)_n$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{j_n})_n$ . Dann besitzt auch  $(y_{j_n})_n$  eine konvergente Teilfolge  $(y_{j_{k_n}})_n$ . Da  $|x_k - y_k| \leq \frac{1}{n}$  konvergiert  $(y_{j_{k_n}})_n$  und  $(x_{j_{k_n}})_n$  gegen das gleiche Element  $c \in [a, b]$ . Doch dann gilt wegen Stetigkeit von  $f$

$$\epsilon \leq |f(x_{j_{k_n}}) - f(y_{j_{k_n}})| \rightarrow |f(c) - f(c)| = 0,$$

was den Widerspruch gibt. □

*Beweis von 4.5.9.* Wir müssen also eine Folge von Treppenfunktionen  $f_n$  konstruieren, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren:

Für  $n \in \mathbb{N}$  benutzen wir eine äquidistante Zerlegung von  $[a, b]$ , d.h.  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$  und setzen  $f_n(x) = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f$  für  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  und  $f_n(b) = f(b)$ . Dann ist  $f_n$  eine Treppenfunktion. Da  $f$  stetig ist, gibt es ein  $a_k \in [x_k, x_{k+1}]$  mit  $f(a_k) = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f$  für alle  $k = 0, \dots, n-1$ . Es ist  $|a_k - x_k| \leq \frac{b-a}{n}$ .

Zeigen wir nun, dass  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert: Da  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, ist es nach letztem Satz schon gleichmäßig stetig. Damit gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so

#### 4 Funktionen in einer Variablen

dass für alle  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  nun, so dass  $\delta > \frac{b-a}{n}$  ist. Dann gilt für alle  $x \in [x_k, x_{k+1})$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(a_k) - f(x)| < \epsilon.$$

Somit ist  $\sup |f_n - f| < \epsilon$  für  $n > \frac{1}{\delta}$ . Damit konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ .  $\square$

Die Treppenfunktion, die wir in diesem Beweis konstruiert hat, liefert als Integral etwas, was man Untersumme der Funktion nennt (hier genauer eine Untersumme zu einer äquidistanten Zerlegung):

**Definition 4.5.11** (Ober- und Untersumme). Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann nennen wir das Integral zu einer Treppenfunktion  $g$  bzgl. einer Zerlegung  $(a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$  eine *Untersumme*, falls  $g|_{(x_{i-1}, x_i)} = \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x)$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt, bzw. *Obersumme*, falls  $g|_{(x_{i-1}, x_i)} = \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x)$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt.

Der Name 'Untersumme' kommt daher, dass nach Konstruktion  $g \leq f$  ist und damit, falls  $f$  Regelfunktion ist, damit  $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$  folgt.

**Definition 4.5.12.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stückweise stetig*, falls es eine Zerlegung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  gibt, so dass die Einschränkung  $f|_{(x_{k-1}, x_k)}$  für alle  $k = 1, \dots, n$  stetig ist und einseitigen Limiten  $\lim_{x \nearrow x_{k-1}} f(x)$  und  $\lim_{x \searrow x_k} f(x)$  existieren.

**Folgerung 4.5.13.** *Stückweise stetige Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind Regelfunktionen.*

Diese Folgerung folgt direkt aus Satz 4.5.9 und folgendem Satz

**Satz 4.5.14.** *Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Sei  $a < c < b$  für  $a, b, c \in I$ . Dann gilt*

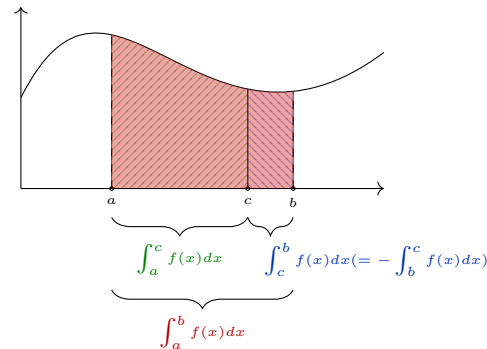
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Das ist anschaulich direkt klar und folgt formal direkt für Treppenfunktionen und dann mittels den Regeln für konvergente Folgen.

**Notation:** Es ist bequem auch folgende Notationen einzuführen: Für  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Regelfunktion sei

$$\int_a^a f(x)dx := 0, \quad \int_a^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx.$$

Mit dieser Notation gilt der letzte Satz z.B. für eine Regelfunktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und beliebige  $a, b, c \in I$ :



Als nächstes sehen wir, dass das Integral von Regelfunktionen mit gleichmäßiger Konvergenz vertauscht:

**Satz 4.5.15** (Vertauschen von Integral mit gleichmäßiger Konvergenz). *Sei  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  eine Regelfunktion und es gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

*Beweis.* Ist  $f$  eine Regelfunktion, dann können wir das Integral bilden und es gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| (b - a)$$

Da  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, geht die rechte Seite für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null und die Behauptung folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  wirklich eine Regelfunktion ist: Sei  $\epsilon > 0$ . Da jedes  $f_n$  eine Regelfunktion ist, gibt es für alle  $\epsilon > 0$  eine Treppenfunktion  $g_n$  mit  $\sup |f_n - g_n| < \frac{\epsilon}{2}$ . Da die  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sup |f - f_n| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_0$  gilt.

Also gilt für alle  $n \geq n_0$

$$\sup |f - g_n| \leq \sup |f - f_n| + \sup |f_n - g_n| < \epsilon.$$

Damit konvergiert die Folge der Treppenfunktionen  $g_n$  gleichmäßig gegen  $f$ .  $\square$

## 4.5.2 Integration und Differentiation

Wir wollen nun zum Zusammenhang von Differentiation und Integration kommen:

**Woche 12**

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Satz 4.5.16** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(s) ds.$$

Dann ist  $F$  differenzierbar mit  $F' = f$  und es gilt  $\int_c^d f(x) dx = F(x)|_c^d = F(d) - F(c)$  für  $a \leq c \leq d \leq b$ .

*Beweis.* Aus der Stetigkeit von  $f$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  folgt, dass  $f$  eine Regelfunktion und somit integrierbar ist. Also existiert  $F$ . Wir wollen nun nachrechnen, dass  $F$  differenzierbar ist: Sei  $x \in [a, b]$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(s) ds - \int_a^x f(s) ds \right) - f(x) \right| \\ &\stackrel{\text{Satz 4.5.14}}{=} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) ds - f(x) \right| \stackrel{\text{linear}}{=} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(s) - f(x)) ds \right| \\ &\stackrel{\text{beschränkt}}{\leq} \sup_{s \in [x, x+h] \text{ oder } s \in [x-h, x]} |f(s) - f(x)| \cdot \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} ds \right| \\ &= \sup_{s \text{ zwischen } x \text{ und } x+h} |f(s) - f(x)|. \end{aligned}$$

Da  $f$  stetig ist, folgt  $\sup_{s \text{ zwischen } x \text{ und } x+h} |f(s) - f(x)| \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  und somit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ .

Weiterhin ist dann  $\int_c^d f(x) dx = \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = F(d) - F(c)$ .  $\square$

**Definition 4.5.17.** Sei  $I$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Stammfunktion* von  $f$ , falls  $F$  differenzierbar mit Ableitung  $f$  ist. Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  nennen wir *unbestimmtes Integral* und bezeichnen wir mit  $\int f(x) dx$ .

Mit Folgerung 4.2.14 erhalten wir dann: Kennt man eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ , dann ist die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  gleich  $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ . Rein nach der Definition wäre also z.B.  $\int x dx = \{\frac{1}{2}x^2 + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ , aber so schreibt das keiner. Wir werden einfach  $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$  schreiben (manche schreiben auch  $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$  für eine beliebige Konstante  $c \in \mathbb{R}$ ). Man muss nur beim Rechnen mit den Gleichheitszeichen ein bisschen aufpassen: Zwar stimmt die Rechnung

$$x + 1 = \int 1 dx = x$$

aber das sind Gleichheiten im Sinne der obigen Mengen. Daraus folgt nicht  $x + 1 = x$  als Funktionen (Ein ähnliches Problem hatten wir auch schon bei der  $\mathcal{o}$ -Notation).

Da wir schon einige Ableitungen von Funktionen kennen, gibt uns das also direkt einige Stammfunktionen, siehe auch Tabelle in Abbildung 4.10:



$f$	$f'$	$f^{-1}$	$(f^{-1})'$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x: (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{x^2+1}$

Abbildung 4.10: Ableitung von trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen. Die Ableitung von  $\arccos$  haben wir in Beispiel 4.2.9 ausgerechnet. Die Ableitung von  $\arctan$ ,  $\arcsin$  berechnet man ganz analog. Also ist die 1. bzw. 3. Spalte jeweils eine Stammfunktion der 2. bzw. 4. Spalte.

**Beispiel 4.5.18.** Es ist  $\int x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$  für  $s \neq -1$  und  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$ . Hier hätte man vielleicht im ersten Moment nur  $\ln x$  erwartet. Das stimmt auch für  $x > 0$  - aber nur dort ist  $\ln x$  definiert. Aber  $\frac{1}{x}$  hat auch auf  $(-\infty, 0)$  eine Stammfunktion, nämlich  $\ln(-x)$ , denn  $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ .

Insbesondere erlaubt uns der Hauptsatz aus Rechenregeln für Ableitungen, welche für Integrationen abzuleiten. Beginnen wir mit der Produktregel:

Nach Lemma 4.2.5 gilt für differenzierbare Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(fg)' = f'g + gf'.$$

Nun würden wir das ganze gerne integrieren und den Hauptsatz verwenden, dazu müssen die beiden Seiten insbesondere integrierbar sein. Das ist wie folgt erreichbar:

**Lemma 4.5.19** (Partielle Integration). *Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $h$  eine Stammfunktion von  $f'g$ . Dann ist  $fg - h$  eine Stammfunktion von  $f'g$ . Es gilt:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'(x)f(x)dx.$$

*Beweis.* Man kann die Produktregel integrieren, da aus  $f, g$  stetig differenzierbar, folgt, dass alle Summanden stetig auf  $[a, b]$  und damit integrierbar sind. Der Rest folgt dann mit dem Hauptsatz.  $\square$

**Beispiel 4.5.20.** (i)  $\int x e^x dx = \int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x e^x}_{fg} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g dx = x e^x - e^x$

Bei Ableitungen war klar, wenn eine Funktion als Produkt vorliegt, sollte man Produktregel verwenden. Integrale sind dahingehend schwieriger, nur weil wir ein Produkt haben, heißt es nicht, dass partielle Integration uns da weiter hilft.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Wir brauchen, dass das Integral, was dann auf der rechten Seite auftaucht dann 'leichter' ist. Das muss nicht so sein. Hätten wir im obigen Integral die Rollen von  $f$  und  $g$  vertauscht, dann stünde auf der rechten Seite  $\int \frac{1}{2}x^2 e^x dx$ , was nicht einfacher zu berechnen ist.

$$(ii) \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \stackrel{(i)}{=} x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)$$

D.h. hier haben wir sogar zweimal die partielle Integration angewandt.

$$(iii) \int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x$$

(iv)

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \cos x \cdot \cos x dx = \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) dx \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx \end{aligned}$$

und damit  $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$ . Man könnte nach der partiellen Integration hier versuchen auf  $\int \sin^2 x dx$  noch einmal partielle Integration anzuwenden. Doch dann hebt sich alles weg.

Ähnlich kann man aus der Kettenregel eine Integrationsregel bauen:

**Lemma 4.5.21** (Substitutionsregel). *Sei  $g: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und sei  $f: g(I) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann ist  $F(g(x))$  eine Stammfunktion von  $f(g(x))g'(x)$ . Insbesondere gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

*Beweis.* Nach Kettenregel gilt  $(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x)$ . Damit folgt, dass  $F \circ g$  eine Stammfunktion von  $f(g(x))g'(x)$  ist. Mit dem Hauptsatz erhalten wir so

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du. \quad \square$$

**Beispiel 4.5.22.** (i) Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann gilt  $\int f(x+c) \stackrel{g(x)=x+c}{=} F(x+c)$  für  $c \in \mathbb{R}$

$$(ii) \int c f(cx) dx \stackrel{g(x)=cx}{=} F(cx) \text{ für } c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

$$(iii) \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \stackrel{f(x)=\frac{1}{x}}{=} \ln |g(x)|$$

Als konkreteres Beispiel:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx \stackrel{g(x)=x^3+1}{=} \frac{1}{3} \ln |x^3+1|.$$

$$(iv) \int x \sin(x^2) dx \stackrel{g(x)=x^2}{=} \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} (-\cos x^2).$$

Oft schreibt man auch:  $\int x \sin(x^2) dx \stackrel{y=g(x)=x^2}{=} \frac{1}{2} \int \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y = -\frac{1}{2} \cos x^2$   
 Das kann insbesondere wenn man (verschiedene) Regeln mehrfach anwenden will, übersichtlicher sein.

- (v) Um den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius  $r$  zu bestimmen, bestimmen wir den Flächeninhalt eines zugehörigen Halbkreises. Dessen Rand können wir als Funktion darstellen: Aus der Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  und  $y \geq 0$  folgt  $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ . Damit ist Flächeninhalt des Halbkreises  $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ . Um dieses Integral zu berechnen setzen wir  $\varphi = \varphi(x)$  bestimmt durch  $x = r \sin \varphi^*$  (da  $\sin: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$  bijektiv ist, bestimmt dies die Funktion  $\varphi(x)$  eindeutig). Wir wollen  $\varphi(x)$  als  $g(x)$  in der Substitutionsregel verwenden. Es ist  $\varphi(x) = \arcsin \frac{x}{r}$  und damit  $\varphi'(x) = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \varphi'(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi \stackrel{\text{Bsp. 4.5.20}}{=} \frac{r^2}{2} (x + \sin x \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \pi r^2. \end{aligned}$$

Damit ist der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius  $r$  gleich  $\pi r^2$ .

Oft verwendet man im Spezialfall  $g$  invertierbar die Substitutionsregel in die 'andere Richtung' folgt:

$$\int_c^d f(u) du = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x)) g'(x) dx.$$

Für das letzte Beispiel würde so der Beginn der Rechnung etwas natürlicher aussehen

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{x=r \sin \varphi}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \underbrace{r \cos \varphi}_{x'(\varphi)} d\varphi = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Kommen wir nun noch zu Integration von Potenzreihen:

**Satz 4.5.23.** Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann hat das formale Integral  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$  auch  $R$  als Konvergenzradius und es gilt  $g(x) = \int f(x) dx$ .

*Beweis.* Da  $f$  die formale Ableitung von  $g$  ist, müssen beide Reihen nach Lemma 4.3.10 den gleichen Konvergenzradius besitzen und es gilt  $g' = f$ . Also ist  $g$  Stammfunktion von  $f$ .  $\square$

---

\* $\varphi(x)$  ist der Winkel von  $(x, y(x))$  in Polarkoordinaten.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Beispiel 4.5.24.** Damit können wir nun endlich zeigen, dass  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$  für alle  $x \in (-1, 1)$  gilt (für  $x \in [0, 1]$  hatten wir das schon in Beispiel 4.3.16 mit der Abschätzung des Lagrangeschen Restglieds gezeigt):

Für  $|x| < 1$  gilt

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

und damit gilt nach letztem Satz für alle  $x$  mit  $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

### 4.5.3 Integration rationaler Funktionen und Partialbruchzerlegung

Wir wollen in diesem  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$  für Polynome  $p$  und  $q$ .

Wir diskutieren die folgenden Fälle ganz explizit: Grad von  $q$  ist eins oder zwei ist. Das wird uns schon einen guten Überblick darüber geben, was so passieren kann: Wir beginnen mit Grad von  $q$  gleich eins.

**Beispiel 4.5.25.** (i)  $\int_a^b \frac{1}{x+c} dx = \ln|x+c| \Big|_a^b = \ln \left| \frac{b+c}{a+c} \right|$  für  $-c \notin [a, b]$ . Dann ist  $\frac{1}{x+c}$  auf  $[a, b]$  stetig. Um uns über den Definitionsbereich und die Integrationsgrenzen nicht noch extra Gedanken machen zu müssen, betrachten wir nur die unbestimmten Integrale.

(ii) Wir suchen nun  $\int \frac{p(x)}{x+c} dx$  mit Grad von  $p$  größer als 1. Dann gibt es ein Polynom  $q(x)$  (einen Grad kleiner als der von  $p$ ) und ein  $d \in \mathbb{R}$  mit  $p(x) = (x+c)q(x) + d$  – das ist Polynomdivision. (vgl. Übungsaufgabe 19, Um direkt die Übungsaufgabe anzuwenden, muss man erst für  $d = p(-c)$  das Polynom  $p(x) - d$  betrachten und dann gibt die Übungsaufgabe das  $q$ . Siehe auch das nächste Lemma.)

Konkretes Beispiel für Polynomdivision zu Fuß:  $p(x) = x^2 + 3x + 1$  und  $c = 1$  dann ist

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 3x + 1 = x(x+c) - cx + 3x + 1 \\ &= x(x+c) + (3-c)(x+c) - c(3-c) + 1 \\ &= (x+c) \underbrace{(x+3-c)}_{q(x)} + \underbrace{1-c(3-c)}_d. \end{aligned}$$

Was bringt diese Zerlegung?

$$\int \frac{p(x)}{x+c} dx = \int \frac{q(x)(x+c) + d}{x+c} dx = \int q(x) dx + d \int \frac{1}{x+c} dx.$$

Der erste Summand ist einfach das Integral eines Polynoms und den zweiten Summanden haben wir in (i) behandelt.

**Lemma 4.5.26** (Polynomdivision). *Seien  $p$  und  $q$  Polynome vom Grad\*  $n$  bzw.  $m$ . Sei  $n \geq m$ . Dann gibt es eindeutige Polynome  $s(x)$  und  $r(x)$  mit  $\deg r < \deg q$  und*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

*Beweis.* Spezialfall  $q(x) = x + c$  in Übungsaufgabe 19. Der Rest mittels vollständiger Induktion.  $\square$

Das gibt uns insbesondere, dass wir in der Situation dieses Lemmas das Integral  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$  immer als  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int s(x) dx + \int \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} dx$  schreiben kann. Es reicht also sich, wie in (ii) vom letzten Beispiel, auf den Fall  $\deg p \leq \deg q$  zu beschränken.

Kommen wir nun zu  $\deg q = 2$  und suchen das unbestimmte Integral von  $\frac{ex+f}{x^2+cx+d}$ . Das wird einiges an Fallunterscheidung verlangen, was am Ende darauf zurückzuführen ist, dass  $\frac{1}{x^2+1}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x^2-1}$  andere Stammfunktionen haben ( $\arctan x$ ,  $-\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$  – wo die letzte Stammfunktion herkommt, sehen wir gleich):

**Beispiel 4.5.27.** (i) Um  $\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d} dx$  zu berechnen machen wir die Substitution  $u = g(x) = x^2 + cx + d$ . Dann ist  $g'(x) = 2x + c$  und

$$\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d} dx = \ln |x^2 + cx + d|$$

(ii) Es gilt  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$ . Damit lassen sich Integrale der Form  $\int \frac{1}{x^2+cx+d} dx$  behandeln, wenn das Polynom im Nenner keine reellen Nullstellen besitzt (also  $d > \frac{c^2}{4}$  ist):

$$\int \frac{1}{x^2+cx+d} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + d - \frac{c^2}{4}} dx = \frac{1}{d - \frac{c^2}{4}} \int \frac{1}{\frac{1}{d - \frac{c^2}{4}} \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + 1} dx$$

Um das rechte Integral nun auf die Form  $\int \frac{1}{x^2+1} dx$  zurückzuführen, substituieren wir  $g(x) = \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{c}{2}\right)$ . Dann ist  $g'(x) = \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+cx+d} dx &= \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{g(x)^2 + 1} g'(x) dx = \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \arctan g(x) \\ &= \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \arctan \left( \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{c}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Für bestimmte Integrale muss man die Integrationsgrenzen noch einsetzen.

(iii) Was ist nun mit  $\int \frac{1}{x^2+cx+d} dx$ , wenn das Polynom eine (und damit zwei) reelle Nullstellen hat? Diese Nullstellen seien  $x_1, x_2$ . Das heißt wir interessieren uns für  $\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$ .

---

\*Den Grad von  $p$  schreiben wir kurz als  $\deg p$  – 'deg' kommt vom englischen Wort degree

#### 4 Funktionen in einer Variablen

1.Fall:  $x_1 = x_2$ : Dann ist  $\int \frac{1}{(x-x_1)^2} dx = -\frac{1}{x-x_1}$ .

2.Fall:  $x_1 \neq x_2$ : Wir können den Integrand\*  $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$  mit dem folgenden Ansatz zerlegen:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

Multiplikation mit  $(x-x_1)(x-x_2)$  ergibt

$$1 = Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1$$

Koeffizientenvergleich (= Spezialfall von Folgerung 4.3.15 für Polynome) ergibt  $1 = -Ax_2 - Bx_1$  und  $A + B = 0$ . Also  $A = -B$  und damit  $A = \frac{1}{x_1-x_2}$ . Also ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} &= \frac{1}{x_1-x_2} \int \left( \frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) \\ &= \frac{1}{x_1-x_2} (\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|) = \frac{1}{x_1-x_2} \ln \left| \frac{x-x_1}{x-x_2} \right|. \end{aligned}$$

(Für  $\frac{1}{x^2-1}$  ist  $x_1 = -x_2 = 1$  und wir erhalten als Stammfunktion  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ .)

(iv) Bringen wir für den allgemeinen Fall  $\int \frac{ex+f}{x^2+cx+d}$  alles zusammen:

$$\begin{aligned} \int \frac{ex+f}{x^2+cx+d} dx &= \int \frac{\frac{e}{2}(2x+c) - \frac{e}{2}c + f}{x^2+cx+d} dx \\ &= \underbrace{\frac{e}{2} \int \frac{2x+c}{x^2+cx+d} dx}_{(i)} + \left(f - \frac{e}{2}\right) \underbrace{\int \frac{1}{x^2+cx+d} dx}_{(ii) \text{ oder } (iii)}. \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall – allgemeine Partialbruchzerlegung:

**Satz 4.5.28.** Sei  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eine rationale Funktion, gebildet aus komplexen Polynom  $p, q$ . Dann gibt es  $z_i, a_{ij} \in \mathbb{C}$  und  $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$  und ein Polynom  $u(x)$ , so dass

$$r(x) = u(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{a_{ij}}{(x-z_i)^j}.$$

Hierbei sind  $z_i$  die Nullstellen von  $q(x)$ ,  $\alpha_i$  die Vielfachheit der Nullstelle  $z_i$ .

Sind  $p, q$  reelle Polynome und sind die Nullstellen von  $p$  und  $q$  alle reell, dann sind auch die  $a_{ij}$  in dieser Darstellung alle reell und auch  $u(x)$  ein reelles Polynom.

---

\*Integrand=die Funktion, die integriert werden soll.

Sind  $p, q$  reelle Polynome, aber nicht alle Nullstellen von  $q$  sind reell, dann gibt es  $x_i, a_{ij}, b_r, c_r, d_{rj}, e_{rj} \in \mathbb{R}$  und  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_{>0}$  und ein reelles Polynom  $u(x)$ , so dass

$$r(x) = u(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_j} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\beta_j} \frac{d_{rj}x + e_{rj}}{(x^2 + b_r x + c_r)^j} \quad (4.4)$$

und die Polynome  $x^2 + b_r x + c_r$  keine reellen Nullstellen haben.

Hier ohne Beweis.

Wenn man einmal eine Zerlegung einer rationalen Funktion wie in (4.4) gefunden hat, kann man das Integral der einzelnen Summanden bilden: Die Terme  $u(x)$  und  $\frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j}$  zu integrieren ist direkt möglich. Einen Term der Form  $\frac{d_{rj}x + e_{rj}}{(x^2 + b_r x + c_r)^j}$  zerlegen wir als

$$\frac{d_{rj}x + e_{rj}}{(x^2 + b_r x + c_r)^j} = \frac{d_{rj}}{2} \frac{2x + b_r}{(x^2 + b_r x + c_r)^j} + \left( e_{rj} - b_r \frac{d_{rj}}{2} \right) \frac{1}{(x^2 + b_r x + c_r)^j}$$

Der erste Summand auf der linken Seite ist mittels Substitution  $y = x^2 + b_r x + c_r$  auf das Integral von  $\frac{1}{y^j}$  zurückföhrbar (Spezialfall  $j = 1$  haben wir in Beispiel 4.5.27.(iii)) gemacht. Es bleibt also das Integral von  $\frac{1}{(x^2 + b_r x + c_r)^j}$  - das kann man auf das Integral von  $\frac{1}{(x^2 + b_r x + c_r)^{j-1}}$  und damit durch Rekursion auf das für  $j = 1$  zurückföhren: Aus

$$\begin{aligned} \left( \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^j} \right)' &= \frac{2}{(x^2 + bx + c)^j} - \frac{j(2x + b)^2}{(x^2 + bx + c)^{j+1}} \\ &= \frac{2}{(x^2 + bx + c)^j} - \frac{4j(x^2 + bx + c) - 4jc + jb^2}{(x^2 + bx + c)^{j+1}} \\ &= \frac{2 - 4j}{(x^2 + bx + c)^j} - \frac{j(b^2 - 4c)}{(x^2 + bx + c)^{j+1}} \end{aligned}$$

folgt ( $b^2 - 4c \neq 0$ , da  $x^2 + bx + c$  keine reellen Nullstellen haben soll)

$$\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{j+1}} dx = \frac{1}{j(b^2 - 4c)} \left( \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^j} + \int \frac{2 - 4j}{(x^2 + bx + c)^j} dx \right).$$

Aber man sieht schon, dass möchte man langsam nicht mehr per Hand ausrechnen (gerade, wenn  $n$  größer wird), doch prinzipiell föhrt das zum Ziel. In der praktischen Anwendung wird die größte Hürde, dass finden der Nullstellen bzw. der Zerlegung von  $q(x)$  in Linearfaktoren und quadratischen Faktoren ohne reelle Nullstellen legen. Dann kennt man die Nenner in der Partialbruchzerlegung (4.4) aus Satz 4.5.28 und kann mit diesem Ansatz dort die Zähler durch Multiplikation mit  $q(x)$  und Koeffizientenvergleich berechnen. Wir rechnen mal konkret ein Beispiel:

#### 4 Funktionen in einer Variablen

**Beispiel 4.5.29.** Wir suchen  $\int \frac{x^4+1}{x^3+x} dx$ . Dazu zerlegen wir zunächst:

$$x^4 + 1 = x(x^3 + x) - x^2 + 1.$$

Also ist

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 + x} = x + \frac{-x^2 + 1}{x^3 + x}.$$

Das Polynom  $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + 1)$  hat als eine reelle Nullstelle  $x = 0$  während  $x^2 + 1$  keine reelle Nullstelle hat. Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

Auf den Hauptnenner bringen impliziert:

$$-x^2 + 1 = ax^2 + a + bx^2 + cx.$$

Koeffizientenvergleich liefert  $-1 = a + b$ ,  $c = 0$  und  $a = 1$ , also  $b = -2$ . Somit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x} dx &= \int x dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - \ln|x^2 + 1|. \end{aligned}$$

#### 4.5.4 Uneigentliche Integrale

Bis jetzt können wir Funktionen integrieren, die (stückweise) stetig auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  sind (bzw. minimal allgemeiner, die Regelfunktionen sind). Aber zum Beispiel können wir noch nicht sagen, ob sich sinnvoll der Fläche unter  $\frac{1}{x^s}$  auf dem Intervall  $(0, 1)$  oder auf dem Intervall  $(1, \infty)$  ( $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ) ein endlicher Wert zuordnen lässt. Das führt auf den Begriff des uneigentlichen Integrals:

**Definition 4.5.30.** Sei  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann sagen wir das *uneigentliche Integral*  $\int_a^b f(x) dx$  existiert, falls für ein  $c \in (a, b)$  die Grenzwerte  $\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x) dx$  und  $\lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x) dx$  existieren. In diesem Fall setzen wir  $\int_a^b f(x) dx$  als die Summe der beiden Grenzwerte.

- Die Definition ist unabhängig vom  $c$ . Das folgt direkt aus Satz 4.5.14.
- Ist  $a \in \mathbb{R}$  und  $f$  in  $a$  stetig fortsetzbar, dann ist  $\int_a^c f(x) dx = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x) dx$  (wobei die linke Seite jetzt als bestimmtes Integral für die stetige Funktion  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  zu verstehen ist): Das folgt, da wegen der Stetigkeit gilt:

$$\left| \int_\alpha^c f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| = \left| \int_a^\alpha f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, \alpha]} |f(x)| \cdot (\alpha - a) \rightarrow |f(a)| \cdot 0 = 0$$

für  $\alpha \rightarrow a$ .



**Beispiel 4.5.31.** (i) Sei  $s \in \mathbb{R}$ . Existiert  $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^s} dx$ ?

Für  $s = 1$  ist  $\int_1^\beta \frac{1}{x} dx = \ln \beta - \ln 1 = \ln \beta \rightarrow \infty$  für  $\beta \rightarrow \infty$ . Das uneigentliche Integral konvergiert hier also nicht.

Für  $s \neq 1$  ist  $\int_1^\beta \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_1^\beta = \frac{1}{1-s} (\beta^{1-s} - 1)$ . Das konvergiert für  $\beta \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $s > 1$ .

Analog sieht man, dass  $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$  genau dann konvergiert, wenn  $s < 1$  ist. Insbesondere konvergiert somit  $\int_0^\infty \frac{1}{x^s} dx$  für kein  $s \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^\beta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (1 - e^{-\beta}) = 1$ .

Einige Eigenschaften uneigentlicher Integrale ähneln denen von Reihen. Z.B. haben wir ein Majorantenkriterium:

**Satz 4.5.32** (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale). *Seien  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und seien  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in (a, b)$  und das uneigentliche Integral  $\int_a^b g(x) dx$  konvergiere. Dann konvergiert auch  $\int_a^b f(x) dx$  und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Insbesondere: Konvergiert  $\int_a^b |f(x)| dx$ , dann auch  $\int_a^b f(x) dx$ .*

Der Beweis ist ähnlich wie bei Reihen.

Gerade die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

wird oft verwendet.

Das Kriterium insgesamt angewendet, wenn man Integrale nicht explizit berechnen kann, aber trotzdem gerne wissen will, ob sie konvergieren.

**Beispiel 4.5.33.** Um zu sehen, dass  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$  können wir das Majorantenkriterium mit der Majorante  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  anwenden und erhalten

$$\left| \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \Big|_1^\beta = 1.$$

Auf  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  hingegen können wir erst einmal nicht das Majorantenkriterium anwenden, da der Kandidat für die Majorante  $\frac{1}{x}$  wäre für den aber  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  nicht endlich ist. Trotzdem konvergiert  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ , was man z.B. mittels partieller Integration sehen kann:

#### 4 Funktionen in einer Variablen

$$\begin{aligned}\int_1^\beta \sin x \frac{1}{x} dx &= -\cos x \frac{1}{x} \Big|_1^\beta - \int_1^\beta (-\cos x) \frac{-1}{x^2} dx \\ &= -\underbrace{\frac{\cos \beta}{\beta}}_{\rightarrow 0 \text{ für } \beta \rightarrow \infty} + \cos 1 - \underbrace{\int_1^\beta \cos x \frac{1}{x^2} dx}_{\text{konvergiert für } \beta \rightarrow \infty \text{ (s.o.)}}.\end{aligned}$$

Man kann unter Umständen von der (Nicht-)Existenz eines uneigentlichen Integrals auch Rückschlüsse auf die (Nicht-)Konvergenz einer zugehörigen Reihe schließen:

**Satz 4.5.34.** Sei  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, monoton fallend und nicht-negativ. Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  genau dann, wenn  $\int_1^\infty f(x) dx$  konvergiert. Ist  $f(1) = 0$ , dann gilt sogar  $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \int_1^\infty f(x) dx$ .

*Beweis.* Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $f$  monoton fallend und nichtnegativ ist, ist  $\sum_{n=1}^k f(n)$  eine Obersumme von  $\int_1^{k+1} f(x) dx$  zur Zerlegung  $(1, 2, \dots, k+1)$  und  $\sum_{n=2}^{k+1} f(n)$  eine Untersumme von  $\int_1^{k+1} f(x) dx$  zur gleichen Zerlegung. Also gilt

$$\sum_{n=1}^k f(n) \geq \int_1^{k+1} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{k+1} f(n) - f(1).$$

Existiert  $\int_1^\infty f(x) dx$ , dann ist  $\sum_{n=1}^k f(n)$  beschränkt. Da  $f$  nichtnegativ ist, folgt somit die Konvergenz der Reihe. Existiert die Reihe, dann liefert Grenzwertbildung in der obigen Ungleichung die Existenz von  $\int_1^\infty f(x) dx$ .

Genauer ist dann

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \geq \int_1^\infty f(x) dx \geq \sum_{n=1}^\infty f(n) - f(1).$$

□

**Beispiel 4.5.35.** (i) Die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$  für  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  konvergiert nach letztem Kriterium genau dann, wenn  $s > 1$  ist: Da  $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$  genau für  $s > 1$  konvergiert und  $\frac{1}{x^s}$  monoton fallend und nichtnegativ ist.

(ii)  $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$  divergiert: Sei  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  für  $x \geq 2$ . Dann ist  $f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$ , also  $f$  monoton fallend. Damit folgt aus

$$\int_2^a \frac{1}{x \ln x} dx \stackrel{\text{Subst. } y = \ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{1}{y} dy = \ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln a} = \ln \ln a - \ln \ln 2 \rightarrow \infty \quad \text{für } a \rightarrow \infty$$

dass  $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$  und damit auch  $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$  nicht konvergiert.

### 4.5.5 Noch mal Taylor

Wir lernen nun noch eine andere Restglieddarstellung im Satz von Taylor 4.3.4 kennen:

Woche 13

**Satz 4.5.36** (Satz von Taylor mit Restglied in Integraldarstellung). Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(k+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(x) = T_k(f; x_0)(x) + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-u)^k f^{(k+1)}(u) du.$$

*Beweis.* Der Beweis geht mittels Induktion über  $n$  bis zur  $k$ -ten Ableitung. Für  $k=0$  gilt  $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(u) du$  dank des Hauptsatzes der Analysis.

Gelte nun  $f(x) = T_n(f; x_0)(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du$  für ein  $n < k$ . Dann folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f; x_0)(x) \\ &+ \frac{1}{n!} \left( -\frac{1}{n+1} (x-u)^{n+1} f^{(n+1)}(u) \Big|_{u=x_0}^{u=x} + \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^x (x-u)^{n+1} f^{(n+2)}(u) du \right) \\ &= T_n(f; x_0)(x) + \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-u)^{n+1} f^{(n+2)}(u) du \\ &= T_{n+1}(f; x_0)(x) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-u)^{n+1} f^{(n+2)}(u) du \quad \square \end{aligned}$$

Vergleich zur Lagrangeschen Restglieddarstellung: Wir brauchen für die Integraldarstellung leicht stärkere Voraussetzungen ( $k+1$  mal stetig differenzierbar statt nur  $k+1$  mal differenzierbar in Satz 4.3.4.) Allerdings werden wir sehen, dass man im Fall  $f$   $k+1$ -mal stetig differenzierbar die Lagrangesche Restglieddarstellung aus der Integraldarstellung wieder ableiten kann. Das legt nahe, dass man mit der Integraldarstellung unter Umständen ein bisschen mehr zeigen kann:

**Beispiel 4.5.37** (Binomische Reihe). Für  $f(x) = (1+x)^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , ist  $T_\infty(f; 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$  (Konvergenzradius 1, vgl. Übungsaufgabe 38, damit ist insbesondere  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \binom{s}{k} \right| |x|^k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und  $|x| < 1$ ) und  $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) = \binom{s}{n+1} (1+x)^{s-n-1}$ . Damit erhalten wir mit der Integraldarstellung

$$|f(x) - T_n(f; 0)(x)| = \left| \int_0^x (n+1) \binom{s}{n+1} (x-u)^n (1+u)^{s-n-1} du \right|$$

Für  $x \in [0, 1]$  gilt mit  $C := \max\{1, (1+x)^s\}$

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(f; 0)(x)| &\leq (n+1) \left| \binom{s}{n+1} \right| C \int_0^x |x-u|^n dx \\ &= \left| \binom{s}{n+1} \right| C x^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Diese Abschätzung hätten wir auch mit der Lagrangeschen Restglieddarstellung erhalten.

Für  $x \in (-1, 0)$  haben wir (mit der Substitution  $u$  geht auf  $-u$ ):

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(f; 0)(x)| &= (n+1) \left| \binom{s}{n+1} \right| \int_0^{|x|} (|x| - u)^n (1-u)^{s-n-1} du \\ &\leq (n+1) \left| \binom{s}{n+1} \right| \int_0^{|x|} (|x| - u|x|)^n (1-u)^{s-n-1} du \\ &= |s| \left| \binom{s-1}{n} \right| |x|^n \underbrace{\int_0^{|x|} (1-u)^{s-1} du}_{\text{hängt nicht von } n \text{ ab}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . (Die Lagrangesche Restglieddarstellung ist für  $x \in (-1, 0)$  nicht gut genug, da wir dafür Kontrolle über die Zwischenstelle  $\xi$  darin in Abhängigkeit von  $n$  bräuchten.)

Damit haben wir gezeigt, dass für  $|x| < 1$

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

gilt.

Um zu sehen, dass man von der Integraldarstellung des Restglieds zur Lagrangeschen Restglieddarstellung kommt, brauchen wir noch:

**Satz 4.5.38** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien  $f, \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $\varphi \geq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit*

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

*Beweis.* (vgl. auch Abbildung 4.11) Da  $f$  stetig auf einem abgeschlossenen Intervall, nimmt es sein Minimum und Maximum ist. Sei  $m = \min f$  und  $M = \max f$ . Dann gilt  $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$  wegen  $\varphi \geq 0$  und somit nach der Monotonie des Integrals (Satz 4.5.8)

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Also gibt es ein  $c \in [m, M]$  mit  $\int_a^b f(x) dx = c \int_a^b \varphi(x) dx$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt somit die Existenz eines  $\xi \in [a, b]$  mit  $c = f(\xi)$ .  $\square$

Hat man diesen Mittelwertsatz, dann kann man aus der Integraldarstellung des Restglieds die Lagrangesche Restglieddarstellung folgern:

$$\frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-u)^k f^{(k+1)}(u) du = \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-u)^k du = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) (x-x_0)^{k+1}$$

für ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ . Die erste Gleichheit benutzt den Mittelwertsatz für  $\varphi(u) = \pm(x-u)^n$  ( $\pm$  je nachdem, ob  $x_0 < x$  oder umgekehrt).

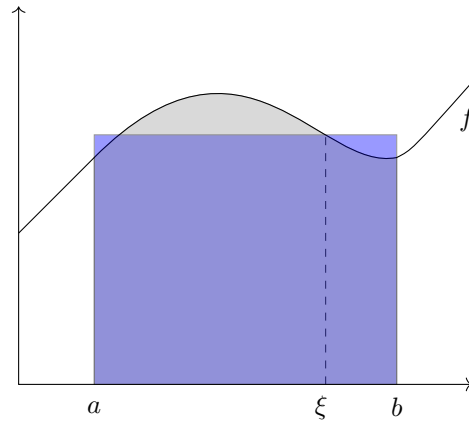


Abbildung 4.11: Mittelwertsatz der Integralrechnung im Spezialfall  $\varphi = 1$ :  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

### 4.5.6 Das Riemann-Integral

Auch wenn das Integral von Regelfunktionen für unseren Zweck i.A. reicht, kann man etwas allgemeiner das Riemann-Integral definieren. Wir führen die Konstruktion hier mal durch, weil sie auch öfter auftaucht, auch wenn, die überwältigende Mehrheit von Funktionen, die wir integrieren, sowieso schon stückweise stetig und damit Regelfunktionen sind:

**Definition 4.5.39.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Riemann-integrierbar*, falls

- das *Oberintegral*  $\inf_{\mathcal{Z}} \text{Zerlegung von } [a, b] O(f, \mathcal{Z})$  existiert. Hierbei ist  $O(\mathcal{Z}, f)$  die Obersumme von  $f$  bzgl  $\mathcal{Z}$ , vgl. Definition 4.5.11.
- das *Unterintegral*  $\sup_{\mathcal{Z}} \text{Zerlegung von } [a, b] U(f, \mathcal{Z})$  existiert. Hierbei ist  $U(\mathcal{Z}, f)$  die Untersumme von  $f$  bzgl  $\mathcal{Z}$ , vgl. Definition 4.5.11.
- das Oberintegral gleich dem Unterintegral ist.

In dem Fall nennt man  $\int_a^b f(x)dx = \inf_{\mathcal{Z}} \text{Zerlegung von } [a, b] O(\mathcal{Z}, f)$  das *(Riemann)Integral* von  $f$ .

Natürlich ist es unpraktisch, um zu überprüfen, ob eine Funktion Riemann-integrierbar ist, über alle Zerlegungen zu gehen. Das ganze wird durch folgendes Kriterium vereinfacht:

**Satz 4.5.40** (Riemannsches Integrationskriterium). *Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für alle  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung gibt, so dass*

$$O(\mathcal{Z}, f) - U(\mathcal{Z}, f) < \epsilon$$

*ist.*

#### 4 Funktionen in einer Variablen

*Beweis.* Sei  $f$  Riemann-integrierbar mit  $\int_a^b f(x)dx = A$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es Zerlegungen  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$  von  $[a, b]$  mit  $|A - O(\mathcal{Z}_1, f)| < \frac{\epsilon}{2}$  und  $|A - U(\mathcal{Z}_2, f)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Sei nun  $\mathcal{Z}$  eine gemeinsame Verfeinerung von  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$ . Dann gilt

$$O(\mathcal{Z}, f) - U(\mathcal{Z}, f) \leq O(\mathcal{Z}_1, f) - U(\mathcal{Z}_2, f) \leq |A - O(\mathcal{Z}_1, f)| + |A - U(\mathcal{Z}_2, f)| < \epsilon.$$

Die Rückrichtung folgt sofort wegen

$$O(\mathcal{Z}, f) - U(\mathcal{Z}, f) \geq \inf_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b]} O(f, \mathcal{Z}) - \sup_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b]} U(f, \mathcal{Z}). \quad \square$$

**Lemma 4.5.41.** *Jede Regelfunktion ist Riemann-integrierbar.*

*Beweis.* Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es eine Folge  $f_n$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\sup_x |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ . Damit gilt  $f_n + 2\epsilon \geq f \geq f_n - 2\epsilon$ . Sei  $\mathcal{Z}$  die Zerlegung von  $[a, b]$  zu  $f_n$ . Damit gilt

$$\int_a^b f_n(x)dx + 2\epsilon(b-a) \geq O(\mathcal{Z}, f) \geq U(\mathcal{Z}, f) \geq \int_a^b f_n(x)dx - 2\epsilon(b-a)$$

und somit

$$O(\mathcal{Z}, f) - U(f, \mathcal{Z}) \leq 4\epsilon(b-a).$$

Nach dem Riemannschen Integrationskriterium ist  $f$  somit Riemann-integrierbar.  $\square$

Andererseits gibt es Funktionen, die Riemann-integrierbar sind, aber keine Regelfunktionen sind.

#### 4.5.7 Differentiation und Integration vektorwertiger und komplexwertiger Funktionen

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Funktion,  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Dann kann  $f$  als Vektor von  $k$  reellwertigen Funktionen  $f_j: I \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen,  $i = 1, \dots, k$ :

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^k, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$$

Die  $f_i$  heißen *Komponentenfunktionen*. Ist  $k = 2$ , wollen wir manchmal die Funktion  $f$  als *komplexwertig* auffassen, also  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definition 4.5.42.** Wir nennen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k)^T$ , *differenzierbar* in  $x_0 \in [a, b]$ , wenn alle  $f_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar sind. Dann ist die Ableitung  $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_k(x_0))$ .

Analog nennen wir  $f$  *integrierbar*, wenn alle Komponentenfunktionen integrierbar sind. Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx = \left( \int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, \dots, \int_a^b f_k(x)dx \right)^T.$$

!Auch wenn  $f$  jetzt vektorwertig sein darf, ist es immer noch eine Funktion in einer Variablen! (Funktionen in mehreren Variablen kommen in Analysis II.)

**Beispiel 4.5.43.** Sei  $f(t) = e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt)$ . Dann ist  $f'(t) = -n \sin(nt) + i n \cos(nt) = i n e^{int}$ .

Der Mittelwertsatz und auch die Regel von l'Hopital (die wir über eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes hergeleitet haben) gilt nicht für komplexwertige Funktionen.

**Beispiel 4.5.44** (Kein Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen). Sei  $f(x) = e^{ix}$ . Dann gilt  $f(0) = f(2\pi) = 1$ , also  $f(2\pi) - f(0) = 0$ . Andererseits ist  $f'(x) = i e^{ix}$  und hat für alle  $x$  den Betrag 1.

**Beispiel 4.5.45** (Kein l'Hopital für komplexwertige Funktionen).  $f(x) = x g(x) = x + x^2 e^{\frac{i}{x^2}}$ . Es gilt wegen  $|e^{it}| = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + x^2 e^{\frac{i}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x e^{\frac{i}{x^2}}} = 1.$$

Wenn man nicht direkt kürzt, hat man einen Grenzwert der Form  $0/0$ . Für reelle Funktionen könnte man nun die Regel von l'Hopital versuchen. Hier gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 2x e^{ix} + i \frac{-2}{x} e^{\frac{i}{x^2}} \\ |g'(x)| &\geq \frac{2}{x} - 2x - 1 \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= 0. \end{aligned}$$

Also kann l'Hopital für komplexwertige Funktionen nicht gelten.\*

Damit gilt der Mittelwertsatz natürlich auch nicht für Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$  (Die Regel von l'Hopital macht für vektorwertige Funktionen keinen Sinn, da wir durch Vektoren nicht dividieren können).

Was aber gilt und auch häufiger verwendet wird ist:

**Lemma 4.5.46.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x \in (a, b)$  mit

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(x)| \cdot (b - a).$$

---

\*Man fragt sich jetzt hier vielleicht (und zu recht), warum denn dann  $f(x) = x$  und  $g(x) = x + x^2 \cos \frac{1}{x^2}$  nicht auch ein Gegenbeispiel für den 'normalen' l'Hopital liefert: Dort ist  $g'(x) = 1 + 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ . Das Problem ist hier, dass  $g'(x)$  nahe  $x = 0$  unendlich viele Nullstellen haben wird. Wenn man diese ignorieren dürfte, würde  $g'(x)$  im Betrag noch immer gegen  $\infty$  gehen. Darf man aber nicht, wenn man die Existenz von  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  bestimmen möchte. D.h. hier wäre die Voraussetzung von l'Hopital nicht erfüllt und es wäre somit auch kein Gegenbeispiel. Im komplexen Beispiel von oben, werden diese Nullstellen durch den Übergang von  $\cos \frac{1}{x^2}$  zu  $e^{\frac{i}{x^2}}$  aber umgangen.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

*Beweis.* Sei  $\varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t) \rangle$ . Dann ist  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Damit können wir auf  $\varphi$  den Mittelwertsatz anwenden und erhalten ein  $x \in (a, b)$  mit

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(x) \cdot (b - a) = \langle f(b) - f(a), f'(x) \rangle \cdot (b - a).$$

Mittels Cauchy-Schwarz folgt somit

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq |f(b) - f(a)| \cdot |f'(x)| \cdot |b - a|.$$

Zusammen mit

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = |f(b) - f(a)|^2$$

folgt die Behauptung.  $\square$

Für die Integration gilt noch immer der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – jetzt in der vektorwertigen Version:

**Satz 4.5.47.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine stetige Funktion. Sei  $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ . Dann ist  $F$  differenzierbar mit  $F' = f$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Beweis.* genau wie für  $k = 1$ .  $\square$

**Lemma 4.5.48.** Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Funktion, so dass  $|f|$  integrierbar ist. Dann ist auch  $f$  integrierbar mit

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Das rechte Integral ist das einer reellen Funktion  $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , während das linke, dass eine vektorwertigen Funktion ist.

*Beweis.* Sei  $f = (f_1, \dots, f_k)^T$ . Dann gilt mittels Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 &= \sum_{i=1}^k \left| \int_a^b f_i(x) dx \right|^2 = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^k \left( \int_a^b f_i(x) dx \right) f_i(x) \right) dx \\ &\leq \int_a^b \left( \sum_{i=1}^k \left( \int_a^b f_i(x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^k |f_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

$\square$



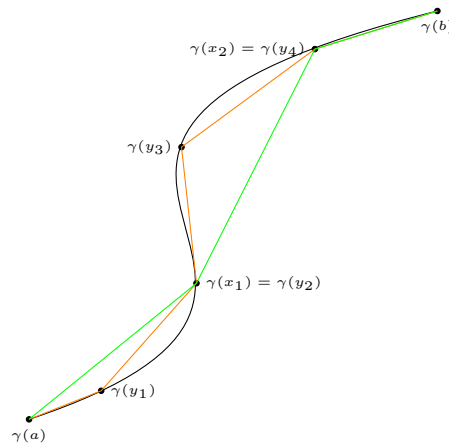


Abbildung 4.12: Der Polygonzug zu  $\gamma$  bzgl. einer Zerlegung  $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$  und einer Verfeinerung  $(y_0 = a, y_1, y_2, \dots, y_n = b)$  davon.

### Längen von Kurven

**Definition 4.5.49.** Sei  $I$  ein Intervall. Eine stetige Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt (*parametrisierte*) *Kurve*. Das Bild  $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^k$  nennt man *Spur der Kurve*.

Interpretation: Die Funktion  $\gamma$  beschreibe den Ort eines Objekts/Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit. Dann kann man die Spur der Kurve als Foto der Bewegung unter Langzeitbelichtung verstehen.

Wir würden nun gerne (wenn möglich) eine Länge zuordnen. Idee: Sei  $I = [a, b]$  und sei  $\mathcal{Z} = (x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Wir nähern  $\gamma$  durch den mittels  $\gamma(x_i)$  gebildeten Polygonzug an. Dieser hat die Länge

$$L(\mathcal{Z}, \gamma) := \sum_{j=1}^n |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|.$$

Ist  $\tilde{\mathcal{Z}}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{Z}$ , dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$L(\tilde{\mathcal{Z}}, \gamma) \geq L(\mathcal{Z}, \gamma).$$

**Definition 4.5.50.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine parametrisierte Kurve. Falls das Supremum von  $L(\mathcal{Z}, \gamma)$  über alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  endlich ist, nennen wir  $\gamma$  *rektifizierbar* und nennen

$$L(\gamma) := \sup_{\mathcal{Z}} L(\mathcal{Z}, \gamma)$$

die *Länge von  $\gamma$* .

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Man kann zeigen, dass die Länge von  $\gamma$  nicht von der Parametrisierung abhängt, also nicht davon mit welcher Geschwindigkeit die Kurve durchlaufen wird. Das ist ja auch das, was man von einer Länge erwarten würde.

Aber nicht alle Kurven müssen eine endliche Länge haben. Wir hatten z.B. in Übungsaufgabe 16 gesehen, dass der Flächeninhalt der Schneeflockenkurve zwar endlich ist, ihre Länge jedoch unendlich.

**Lemma 4.5.51.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Dann ist  $\gamma$  rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

*Beweis.* Aus dem Hauptsatz 4.5.47 und Lemma 4.5.48 haben wir

$$|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| = \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\gamma'(t)| dt$$

und somit direkt

$$L(\mathcal{Z}, \gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Da  $\gamma$  stetig differenzierbar ist, existiert  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$  und somit ist  $\sup_{\mathcal{Z}} L(\mathcal{Z}, \gamma)$  endlich,  $\gamma$  rektifizierbar und  $L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen: Da  $\gamma'$  auf  $[a, b]$  stetig ist, ist es nach Satz 4.5.10 sogar gleichmäßig stetig. D.h. für  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \epsilon$$

für alle  $s, t \in [a, b]$  mit  $|s - t| < \delta$  ist. Sei nun  $\mathcal{Z}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit  $x_j - x_{j-1} < \delta$  für alle  $j$ . Dann gilt für  $t \in [x_{j-1}, x_j]$

$$|\gamma'(t)| \leq |\gamma'(t) - \gamma'(x_j)| + |\gamma'(x_j)| \leq |\gamma'(x_j)| + \epsilon$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \sum_{j=1}^n (|\gamma'(x_j)| + \epsilon)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\gamma'(x_j) - \gamma'(t) + \gamma'(t)) dt \right| + \epsilon(b - a) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\gamma'(t) - \gamma'(x_j)| dt + \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \gamma'(t) dt \right| \right) + \epsilon(b - a) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (\epsilon(x_j - x_{j-1}) + |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|) + \epsilon(b - a) \\ &\leq 2\epsilon(b - a) + L(\mathcal{Z}, \gamma) \leq 2\epsilon(b - a) + L(\gamma). \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung. □

**Beispiel 4.5.52.** Die Kurve  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)^T$ , parametrisiert einen Kreis vom Radius  $R$  (Dem Parameter  $t$  entspricht hier anschaulich dem Winkel von  $\gamma(t)$  mit der positiven  $x$ -Achse). Es gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |(-R \sin t, R \cos t)^T| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

## 4.6 Stirlingsche Formel und Wallissches Produkt

Als eine Anwendung wollen wir die Stirlingsche Formel

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

aus Beispiel 3.7.2 beweisen.

Dazu zeigen wir als erstes, dass die Folge  $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$  überhaupt konvergiert:

*Beweis.* Es ist  $\ln(n!) = \sum_{j=1}^n \ln j$ . Da der Logarithmus streng monoton wachsend ist, gilt für  $j \geq 1$

$$\int_{j-1}^j \ln x dx < \ln j < \int_j^{j+1} \ln x dx.$$

Summation über  $j$  liefert

$$\int_0^n \ln x dx < \ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x dx.$$

Hierbei ist die linke Seite ein uneigentliches Integral, welches aber konvergiert, da für die Stammfunktion  $x \ln x - x$  der Limes  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x - x) = 0$  existiert. Also ist

$$n \ln n - n < \ln(n!) < (n+1) \ln(n+1) - n.$$

Damit liegt es nahe die Folge

$$a_n := \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$$

zu betrachten. Wir werden zeigen, dass diese Folge konvergiert. Dann konvergiert auch  $e^{a_n}$  für  $n \rightarrow \infty$ , was der Behauptung entspricht:

Es gilt

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \ln((n+1)!) + \left(n+1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - 1 \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - \ln(n+1) + \left(n+1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Mit  $\frac{n+1}{n} = \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}$  und

$$\begin{aligned}\ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \stackrel{|x|<1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{2j+1} x^{2j+1}\end{aligned}$$

für  $|x| < 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned}a_n - a_{n+1} &= \frac{2n+1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{2j+1} \frac{1}{(2n+1)^{2j+1}} - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \frac{1}{(2n+1)^{2j}} \\ &< \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2j}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} - 1 \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).\end{aligned}$$

Zusammen mit  $a_n - a_{n+1} > 0$  sehen wir also, dass  $(a_n)$  eine monoton fallende und  $a_n - \frac{1}{12n}$  eine monoton wachsende Folge ist. Da  $\frac{1}{12n}$  eine Nullfolge ist, muss also  $a_n$  konvergieren.  $\square$

Um die Stirlingsche Formel zu beweisen, bleibt es also noch den Grenzwert zu finden. dazu benötigen wir als Hilfsmittel noch das Wallis'sche Produkt:

**Beispiel 4.6.1** (Wallissches Produkt). Wir wollen  $A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ . Wir sehen sofort, dass  $A_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $A_1 = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ . Um  $A_n$  für größere  $n$  zu berechnen, leiten wir mittels partieller Integration eine Rekursionsformel her:

$$\begin{aligned}A_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^n x dx = (-\cos x) \sin^n x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) n \sin^{n-1} x \cos x dx \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-1} x dx = n A_{n-1} - n A_{n+1},\end{aligned}$$

also  $A_{n+1} = \frac{n}{n+1} A_{n-1}$  für  $n \geq 1$ . Zusammen mit  $A_0$  und  $A_1$  gilt demnach

$$\begin{aligned}A_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} A_0 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \\ A_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} A_1 = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir somit

$$\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2}.$$

Wegen  $\sin[0, \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$  ist jedoch  $A_{n+1} \leq A_n$  und damit

$$1 \leq \frac{A_n}{A_{n+1}} \leq \frac{A_{n-1}}{A_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Zusammen erhalten wir das Wallis'sche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Das Wallissche Produkt gibt also eine Darstellung der Zahl  $\pi$  mittels eines unendlichen Produkts. Das ist jetzt aber nicht gerade der beste Weg um eine Approximation von  $\pi$  auszurechnen, weil sie sehr langsam konvergiert.

Aus diesem Produkt folgt

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}}.$$

Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ . Dann haben wir

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} a^2 e^{-2n} n^{2n+1}}{a e^{-2n} (2n)^{2n} \sqrt{2n} \sqrt{2n}} = \frac{a}{2}$$

und damit ist  $a = \sqrt{2\pi}$  und wir haben somit die Stirlingsche Formel bewiesen.

## 4.7 Klassische Fourier-Reihen

Wir haben bis jetzt Funktionen durch Polynome approximiert ( $\nearrow$  Taylorpolynom). Es gibt aber auch andere oft verwendete Approximationen - eine davon ist die Approximation von periodischen Funktionen durch *trigonometrische Polynome* - also Funktionen der Form

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Warum ist das relevant? Überlagerungen elektrischer Signale oder Wellen im Allgemeinen haben diese Form. Wenn man Periodizitäten in einem Signal bestimmen will, kann man versuchen, das Signal als trigonometrisches Polynom anzunähern.

Sei  $C(S^1; \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}$  gleich  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , die Menge der stetigen Funktionen  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(-\pi) = f(\pi)$  (also der  $2\pi$ -periodischen Funktionen).\*

Oft schreibt man  $p(x)$  auch mittels der komplexen Exponentialfunktion, in dem man  $2 \cos(x) = e^{ix} - e^{-ix}$  und  $2i \sin(x) = e^{ix} - e^{-ix}$  verwendet, und erhält  $p(x) = a_0 + \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  für geeignete  $c_k \in \mathbb{C}$ .

---

\*Eigentlich möchte man allgemeinere Perioden  $T$  zulassen, aber das kann man durch Reskalieren der folgenden Formeln immer erreichen.

#### 4 Funktionen in einer Variablen

Nehmen wir an, wir haben eine Funktion von der wir wissen, dass sie ein trigonometrisches Polynom ist. Wie können wir die Koeffizienten  $a_k, b_k$  bzw.  $c_k$  erhalten?

Dazu definieren wir: Die Funktionen  $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $\varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ ,  $\varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sind Elemente in  $C(S^1, \mathbb{R})$ , für die gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Wir nennen  $\varphi_n(x)$  ein Orthonormalsystem von  $C(S^1, \mathbb{R})$ .

Analog sei im Fall der komplexen trigonometrischen Polynome  $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sind Elemente in  $C(S^1, \mathbb{C})$  mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Wir nennen diese  $\varphi_n(x)$  ein Orthonormalsystem von  $C(S^1, \mathbb{C})$ .

Ist nun  $p(x)$  ein (komplexes) trigonometrisches Polynom, dann erhalten wir deshalb die Koeffizienten  $a_{n=2k+1}, b_{n=2k}$  (bzw.  $c_n$ ) als  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$ .

**Definition 4.7.1.** Sei  $f \in C(S^1, \mathbb{K})$  und sei  $\varphi_n$  wie oben, je nachdem ob  $\mathbb{K}$  gleich  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist. Dann nennen wir

$$c_n := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$$

den  $n$ -ten Fourierkoeffizienten von  $f$  und

$$\sum_k c_k \varphi_k(x)$$

die *Fourierreihe von  $f$  bzgl.  $\varphi_n$* . (Für komplexe Fourierreihe geht die Summe über  $k \in \mathbb{Z}$  sonst über  $k \in \mathbb{N}$ .)

Wir interessieren uns ähnlich wie bei der Taylorreihe nun natürlich dafür, ob die Partialsummen der Fourierreihe unsere Ausgangsfunktion irgendwie gut approximieren. Dafür gucken wir uns erst einmal Beispiele an. Zuvor sehen wir aber schon einen wesentlichen Unterschied zur Approximation durch Taylorpolynome: Die Taylorreihe hängt nur von der Funktion in der Nähe des Entwicklungspunktes ab. Für die Fourierreihe bestimmen wir die Koeffizienten mittels Integration und damit hängen diese von der gesamten Funktion ab.

**Beispiel 4.7.2** (Reelle Fourierreihen). (i) Die Funktion

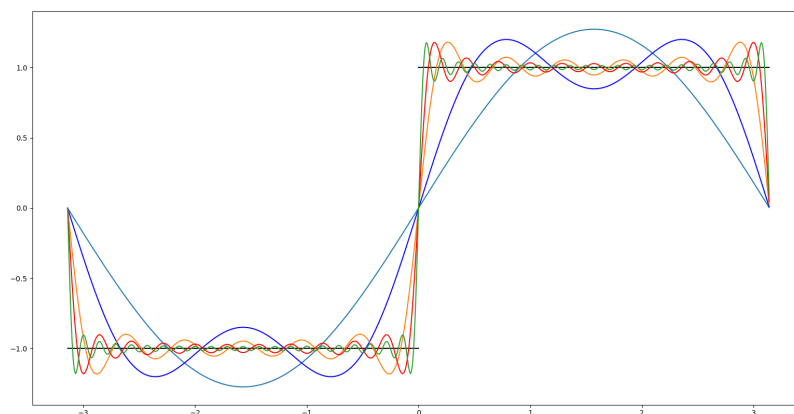
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in \{0, \pi, -\pi\} \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

## 4.7 Klassische Fourier-Reihen

hat als Fourierreihe  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$  (Da  $f$  eine ungerade Funktion ist, d.h.  $f(x) = -f(-x)$ , sind die Koeffizienten für die Kosinusfunktionen alle Null, da dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \stackrel{x \rightarrow -x}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \cos(-kx) dx = - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

ist (im ersten Schritt haben wir  $x$  zu  $-x$  substituiert.)



Das Bild zeigt die Funktion  $f$  in schwarz und Approximationen der Fourierreihe (Die Partialsummen für  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 5$ ,  $n = 10$  und  $n = 20$ ). Die Graphen suggerieren, dass die Fourierreihe punktweise gegen  $f$  konvergiert (aber nicht gleichmäßig) – das stimmt auch, kann man nachrechnen.

Angenommen wir hätten  $f(0)$  (und analog  $f(\pi)$  und  $f(-\pi)$ ) nicht als Null definiert), dann hätte sich die Fourierreihe nicht geändert (da die Koeffizienten als Integral berechnet werden). D.h. für die punktweise Konvergenz der Fourierreihe es hier wichtig, dass  $f(0) = f(\pi) = f(-\pi) = 0$  ist.

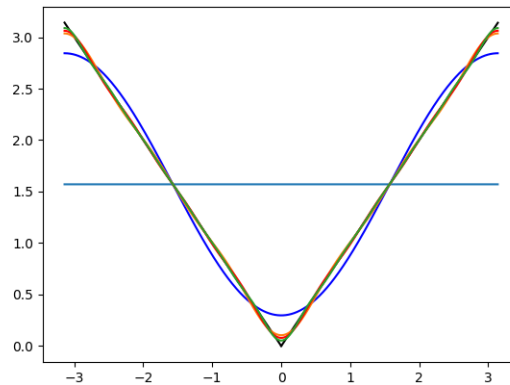
(ii) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi] \\ -x & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

hat als Fourierreihe  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$ .

(Da  $f$  eine gerade Funktion ist, d.h.  $f(x) = f(-x)$ , sind dieses Mal die Koeffizienten für die Sinusfunktionen alle Null – analoge Rechnung wie in (i)).

#### 4 Funktionen in einer Variablen



Die gezeichneten Partialsummen suggerieren, dass die Fourierreihe gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert (stimmt auch).

In wie weit approximieren nun die Partialsummen der Fourierreihe die ursprüngliche Funktion?

**Lemma 4.7.3.** Sei  $s_n(x) := \sum_k c_k \varphi_k(x)$  die  $n$ -Partialsumme der Fourierreihe einer Funktion  $f$ . (Hier und im folgenden sei  $\sum_k = \sum_{k=1}^n$  für reelle Fourierreihen und  $\sum_k = \sum_{k=-n}^n$  für komplexe Fourierreihen.) Sei  $t_n(x) := \sum_{k=1}^n \gamma_k \varphi_k(x)$  für  $\gamma_k \in \mathbb{C}$ . Dann approximiert  $s_n(x)$  unter allen Funktionen der Form  $t_n(x)$  die Funktion  $f$  im quadratischen Mittel am besten, d.h. es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - t_n(x)|^2 dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\gamma_k = c_k$  für alle  $k$  ist.

*Beweis.* Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{t_n(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_k \overline{\gamma_k \varphi_k(x)} dx = \sum_k \overline{\gamma_k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \sum_k \overline{\gamma_k} c_k$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_k \gamma_k \varphi_k(x) \right) \overline{\left( \sum_{\ell} \gamma_{\ell} \varphi_{\ell}(x) \right)} dx \\ &= \sum_k \sum_{\ell} \gamma_k \overline{\gamma_{\ell}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) \overline{\varphi_{\ell}(x)} dx = \sum_k \gamma_k \overline{\gamma_k} = \sum_k |\gamma_k|^2. \end{aligned}$$



Damit haben wir

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - t_n(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{t_n(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} t_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_k \overline{\gamma_k} c_k - \sum_k \gamma_k \overline{c_k} + \sum_{k=1} |\gamma_k|^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \sum_k |\gamma_k - c_k|^2 - \sum_k |c_k|^2
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist genau dann minimal, wenn  $c_k = \gamma_k$  ist und das gibt den Wert von  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx$ .  $\square$

Ein Beispiel für ein Konvergenzresultat für Fourierreihen (hier ohne Beweis) ist:

**Satz 4.7.4.** *Sei  $f \in C(S^1)$  stückweise stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .*

## DIE GRIECHISCHEN BUCHSTABEN

Kleinbuchstaben	Großbuchstaben	Name	Latein
$\alpha$	$A$	alpha	A
$\beta$	$B$	beta	B
$\gamma$	$\Gamma$	gamma	G
$\delta$	$\Delta$	delta	D
$\epsilon, \varepsilon$	$E$	epsilon	E
$\zeta$	$Z$	zeta	Z
$\eta$	$H$	eta	H
$\vartheta, \theta$	$\Theta$	theta	
$\iota$	$I$	iota	I
$\kappa$	$K$	kappa	K
$\lambda$	$\Lambda$	lambda	L
$\mu$	$M$	my	M
$\nu$	$N$	ny	N
$\xi$	$\Xi$	xi	X
$o$	$O$	omikron	O
$\pi$	$\Pi$	pi	P
$\rho$	$P$	rho	R
$\sigma$	$\Sigma$	sigma	S
$\tau$	$T$	tau	T
$v$	$\Upsilon$	ypsilon	Y
$\phi, \varphi$	$\Phi$	phi	
$\chi$	$X$	chi	
$\psi$	$\Psi$	psi	
$\omega$	$\Omega$	omega	

