Analysis I, Blatt 0

Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060), Gruppe 11
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

4. November 2020

Aufgabe 0

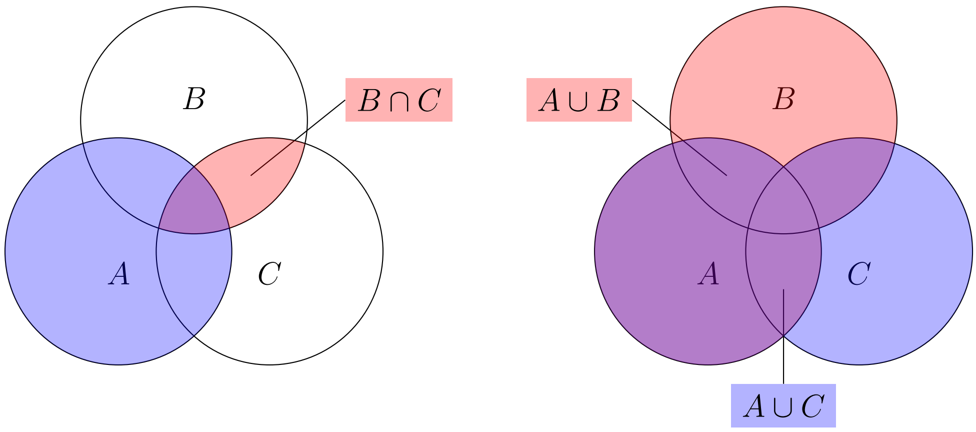

Abbildung 1: $A \cup (B \cap C)$

Aufgabe 1

(i) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ enthält alle Teilmengen der Menge M.

a) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

b) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

c) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(ii) a) falsch

b) wahr

c) falsch

d) falsch

(iii) $X = Y$, wenn $(X \subset Y) \wedge (Y \subset X)$. Die leere Menge ist (lt. Skript) jedoch Teilmenge jeder anderen Menge, somit auch der leeren Menge selbst. Daher gilt $X \subset Y$ und $Y \subset X$ und es folgt $X = Y$.

(iv) Für Teilmengen gilt

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B. \tag{1}$$

Weiterhin gilt $A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ und $A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$. Aufgrund von (1) ist somit $A \cup B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$ (Schnitt analog).

(v) $(X \times Y) \cup (A \times Y) \Leftrightarrow \{(a, b)|a \in X, b \in Y\} \cup \{(c, d)|c \in A, d \in Y\}$
$\Leftrightarrow x \in \{(a, b)|a \in X, b \in Y\} \vee x \in \{(c, d)|c \in A, d \in Y\}$

Aufgabe 2

(i) (a) $\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$: Nein

(b) $\{(a, b), (b, a), (c, c)\}$: Ja, und zwar

$$f : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \end{cases} .$$

(ii) $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \Rightarrow \forall y \in f(A) : y \in f(B) \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

(iii)

(iv)

Aufgabe 3

(i)
- *reflexiv*: Nein, da eine Gerade nicht zu sich selbst orthogonal sein kann (also $g \not\perp g$).
- *symmetrisch*: Ja, denn $g \perp h \Leftrightarrow h \perp g$.
- *antisymmetrisch*: Nein, da (im $\mathbb{R}^2$) $g \perp h \wedge h \perp i \Rightarrow g = i$.
- *transitiv*: Nein, beispielsweise sei $g = i$ und $g \perp h$ sowie $h \perp i$. Dann ist jedoch nicht $g \perp i$, da $g = i$.

(ii) R ist Äquivalenzrelation genau dann, wenn R *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* ist.

- *reflexiv*: Ja, denn $g \parallel g$ (folgt aus Aufgabenstellung)
- *symmetrisch*: Ja, denn $g \parallel h \Rightarrow h \parallel g$
- *transitiv*: Ja, denn $g \parallel h \wedge h \parallel i \Rightarrow g \parallel i$.

Somit handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

(iii) $\sim$ ist Äquivalenzrelation genau dann, wenn $\sim$ *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* ist.

- *reflexiv*: Ja, da $(r_1, r_2) \sim (r_1, r_2) \Leftrightarrow r_1 r_2 = r_1 r_2$.
- *symmetrisch*: Ja: $(r_1, r_2) \sim (s_1, s_2) \Leftrightarrow r_1 s_2 = r_2 s_1 \Leftrightarrow s_2 r_1 = s_1 r_2 \Leftrightarrow s_1 r_2 = s_2 r_1 \Leftrightarrow (s_1, s_2) \sim (r_1, r_2)$.
- *transitiv*:

$$
\begin{aligned}
&(r_1, r_2) \sim (s_1, s_2) \wedge (s_1, s_2) \sim (t_1, t_2) \\
\Leftrightarrow & r_1 s_2 = r_2 s_1 \wedge s_1 t_2 = s_2 t_1 \\
\Leftrightarrow & s_1 = \frac{r_1 s_2}{r_2} \wedge s_1 = \frac{s_2 t_1}{t_2} \\
\Leftrightarrow & \frac{r_1 s_2}{r_2} = \frac{t_1 s_2}{t_2} \\
\Leftrightarrow & r_1 s_2 t_2 = r_2 s_2 t_1 \\
\Leftrightarrow & r_1 t_2 = r_2 t_1 \\
\Leftrightarrow & (r_1, r_2) \sim (t_1, t_2).
\end{aligned}
$$

Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4