

Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 7: Differenzieren

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

8. Januar 2021

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de



**UNI
FREIBURG**

Inhalte dieser Veranstaltung:



	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	15.2.	Klausur

Übersicht:



- Heterogenität
- Differenzierung
 - Äußere
 - Innere
 - Mittels Aufgaben
 - Mittels Sozialform
- Diagnose und fokussierte Förderung

Heterogenität:



UNI
FREIBURG

Viele
Eigenschaften,
bezüglich
derer sich
Schülerinnen
und Schüler
unterscheiden
und die für den
Mathematik-
unterricht
relevant sind.



Heterogenität:



Wie soll man mit der Vielfalt umgehen?

Wie kann man ihr gerecht werden?

Wie kann man Vielfalt als Chance nutzen?

Worin kann diese Chance bestehen?

Zwei Möglichkeiten mit Heterogenität umzugehen:

- Äußere Differenzierung
- Innere Differenzierung

Äußere Differenzierung:



Die äußere Differenzierung ist institutionell geregelt durch

- Schulformen (Werkrealschule, Gymnasium, ...)
- Jahrgangsklassen
- Sitzen bleiben, überspringen,
- ...

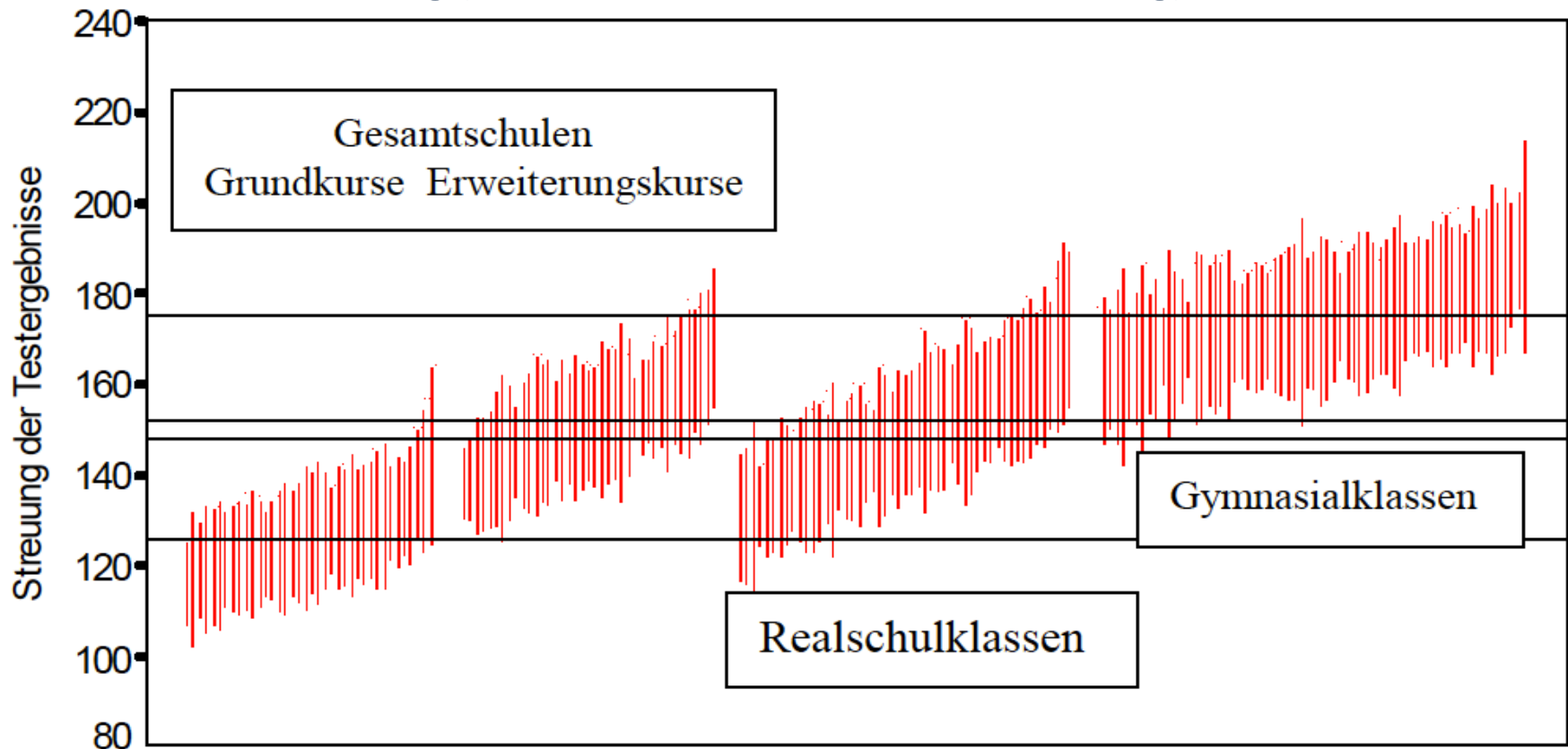
Ziel der äußeren Differenzierung ist es, möglichst homogene Lerngruppen herzustellen.

Wie gut gelingt das?

Heterogenität in jeder Schulform



Streuung der Mathematikleistungen innerhalb von deutschen Klassen 9
QuaSUM, Brandenburg (Mittelwert \pm 1 Standardabweichung)



Klassen/Kurse nach Schul-/Kursform und durchschnittlichem Testergebnis

Äußere Differenzierung: Fazit



Das Ziel der äußeren Differenzierung
(nämlich Homogenisierung der Lerngruppen)
gelingt kaum/nicht.

Dies kann eigentlich gar nicht gelingen, da
die Leistungsfähigkeit viele Facetten hat
(nach welchem Kriterium soll man sortieren?)

Leistungsfähigkeit hat viele Facetten:



Und viele weitere Ebenen:

- Interessen
- Selbstkonzept
- Organisiertheit
- Konzentrationsvermögen
- Kulturelle Hintergründe
- Sprachkompetenzen
- sozioökonomischer Hintergrund
-



Die Aufgabe ist für
alle gleich: Klettert
auf den Baum!

Aufgabe

Traxler

Individualisierung des Unterrichts ist didaktisch notwendig:



Meine persönliche Schätzung: 80% der Unterrichtsstörungen haben ihren Ursprung in Unterforderung bzw. Überforderung.

Langeweile entsteht nicht nur bei **Unterforderung**:

- „ich hab's schon lange kapiert, es passiert nichts neues“

sondern auch bei **Überforderung**:

- „ich verstehe nicht, worüber die anderen reden, und kann nicht mitreden“

Innere Differenzierung (= „Binnendifferenzierung“)



Differenzierung **innerhalb** einer Lerngruppe

- Differenzierung im Unterricht/Klassenraum
- Ziel innerer Differenzierung ist nicht das Erreichen gleicher Bildungsziele für alle, sondern das optimale Fördern eines jeden Kindes auf seinem Niveau
- Das ist nicht neu:
 - Alte „Dorfschule“



Motivation durch Differenzierung:



- Schwache Schüler können motiviert werden, wenn sie eine Chance sehen (jeder möchte gerne verstehen und etwas können) und ihre Anstrengungen wertgeschätzt werden. Differenzierungsmaßnahmen sollten ausreichend Hilfen anbieten und Anstrengungen honorieren.
- Starke Schüler können motiviert werden, wenn sie Herausforderungen bekommen, die bewältigbar sind, aber schwierig genug, um Stärken zeigen zu können

Möglichkeiten der Differenzierung



- Differenzieren mittels Aufgaben
- Differenzieren mittels Sozialform
- Diagnose und fokussierte Förderung

Differenzieren mittels Aufgaben, siehe auch [21]



- Paralleldifferenzierende Aufgaben
- Stufendifferenzierende Aufgaben
- Aufgaben mit gestuften Hilfen
- Selbstdifferenzierende Aufgaben

- Verschiedene Schüler arbeiten an verschiedenen Aufgaben
- Aufgaben auf unterschiedlichem Niveau, aber zu demselben Thema
- Offen paralleldifferenzierend: Schüler wählen selbst aus.
 - Voraussetzung: genügend viele Aufgaben, längere Übungsphase
 - Niveaustufen erkennbar
 - Sowohl die Bearbeitung vieler leichter, als auch weniger schwerer Aufgaben muss attraktiv sein (Vorschlag: Sternchensystem)
- Geschlossen differenzierend: Lehrer teilt Aufgaben zu
 - Beweggründe und Ziele müssen für die Schüler transparent sein

- Alle Schüler bearbeiten dieselbe Aufgabe.
- Die Aufgabe hat Teilaufgaben mit ansteigendem Niveau. Dabei hilft eine Stufe, die nächste zu bearbeiten.
- Beispiele:

Wie viele Diagonalen hat

- Ein 5-Eck?
- Ein 7-Eck?
- Ein 10-Eck?
- Ein 20-Eck?
- Ein 100-Eck?

Aufgaben mit folgender Struktur:

- Finde eine Möglichkeit
- Finde mehrere Möglichkeiten
- Finde alle Möglichkeiten
- Begründe, dass das alle Möglichkeiten sind.

Hier hast Du 48 Holzwürfel. Welche Quader kannst Du damit bauen?

Finde eine Möglichkeit.

Finde mehrere Möglichkeiten.

Finde alle Möglichkeiten.

Woher weißt Du, dass Du alle Möglichkeiten gefunden hast?



Aufgaben mit gestuften Hilfen

- Alle Schüler bearbeiten dieselbe Aufgabe, aber können Hilfen in Anspruch nehmen (idealerweise Hilfen zur Selbsthilfe), zum Beispiel:
 - das Problem in eigenen Worten wiedergeben
 - eine Skizze erstellen
- Strategiekarten
 - ein ähnliches Problem nutzen
 - auf etwas Bekanntes zurückführen
 - Gegebenes und Gesuchtes aufschreiben
 - einfachere Fragen stellen
 - eine Vermutung formulieren und überprüfen
 - eine andere Darstellung suchen
 - Beispiele aufschreiben und ordnen
 - eine grafische Darstellung nutzen
- Zwischenlösungen
- Wissenskarten

Erinnere Dich:
Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich groß
- Ort/Zugang zu den Hilfen sollte je nach Klasse strategisch gewählt werden (z.B. Lehrerpult, Raumecken, Flur, ...)

Selbstdifferenzierende Aufgaben



- Alle Schüler bearbeiten dieselbe Aufgabe.
- Die Aufgabe lässt verschiedene Lösungen/ Lösungswege auf unterschiedlichem Niveau zu.
- Die Aufgabe ermöglicht verschiedene Zugangsweisen (zeichnerisch, rechnerisch, ausprobieren, systematisches Vorgehen, ...)
- Materialgestützte, **offene** Aufgaben sind meistens auch selbstdifferenzierend.

*Erkundungsaufgabe: Hier habt Ihr 24 Holzwürfel.
Welche Quader könnt ihr damit bauen?
Notiert, welche ihr schon gefunden habt.
Wie viele findet ihr?*

Übungsaufgabe zur
Vorbereitung der
Volumenformel,
siehe auch [22]

Erste Quader finden

Die ersten Quader finden die Kinder ganz unterschiedlich: Einige starten mit zu kleinen Quadern und bauen an, bis es passt. Saskia und Julian dagegen wissen sofort, dass man Rechtecke durch Multiplizieren erhält und suchen multiplikative Zerlegungen der 24. Kai legt Quader hin, und findet den nächsten durch Umbauen des ersten.

Vicky (und ebenso Gina, vollständig):

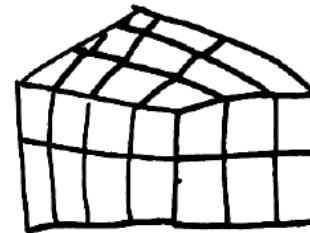
3 Senkrecht
4 Wagerrecht
2 Stockwerk hoch

8 Senkrecht
3 Wagerrecht
1 Stockwerk hoch

4 Senkrecht
6 Wagerrecht
1 Stockwerk hoch

2 Senkrechte
12 Wagerrecht
1 Stockwerk hoch

Michael (Beginn):

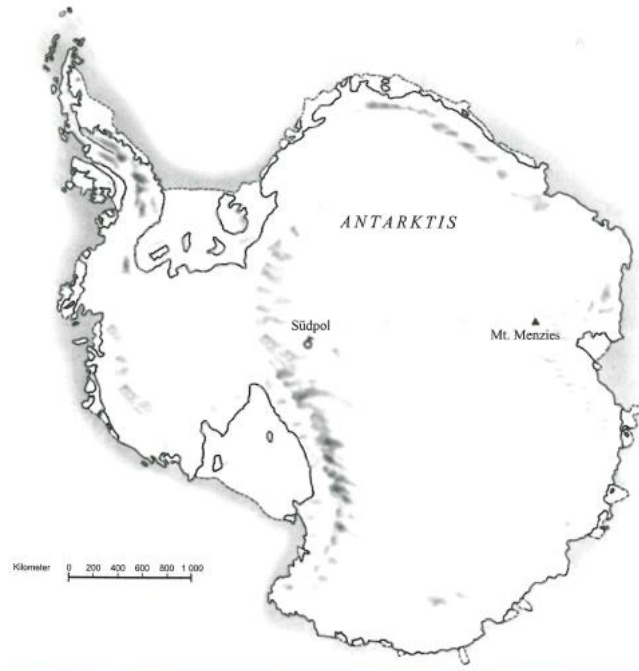


Zoltan (Beginn):



$$\begin{aligned} 2 \cdot 12 &= 24 \\ 4 \cdot 6 &= 24 \\ 2 \cdot 6 \cdot 2 &= 24 \\ 2 \cdot 4 \cdot 3 &= 24 \\ (2 \cdot 3 \cdot 4) &= 24 \\ 3 \cdot 8 &= 24 \\ 1 \cdot 24 &= 24 \end{aligned}$$

Weitere Beispiele für selbstdifferenzierende Aufgabe



Schätze die Fläche der Antarktis, indem Du den Maßstab der Karte benutzt. Schreibe Deine Rechnung auf und erkläre, wie Du zu Deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn Dir das bei Deiner Schätzung hilft).

Weitere Beispiele für selbstdifferenzierende Aufgabe



Verschiedene Lösungsansätze sind möglich:



Weitere Beispiele für selbstdifferenzierende Aufgabe



... eine Aufgabe aus unseren Übungsgruppen:

„Spielen Sie sich gegenseitig Bewegungsabläufe vor und stellen Sie sie graphisch dar (variieren Sie die Situation: Höhe der Hand, Abstand zwischen zwei Fingern, zwei „Bewegungsobjekte“, ...)“

- Bevor man an die Gestaltung von differenzierenden Aufgaben geht, müssen die möglichen Aufgabenschwierigkeiten analysiert werden.
- Einzelne Niveaustufen werden dann in Bezug auf die Aufgabenschwierigkeiten gestaltet
- Beispiel: **siehe Übung (Analyse von Aufgabenschwierigkeiten und Gestaltung differenzierender Aufgaben)**

Differenzierung mittels Sozialform:



- Leistungshomogene oder leistungsheterogene Gruppen
- Helfersystem
- Stamm-/Expertengruppen

Beispiel: leistungshomogene Gruppen:



- Ähnlich zu den paralleldifferenzierenden Aufgaben (nur jetzt für Gruppenarbeit)
- Gruppe 1: leicht, Gruppe 2: mittel, Gruppe 3: schwer...
- z.B. Klasse 9/10, Auszug Bildungsplan:

(5) die Wirkung von *Parametern* in Funktionstermen von *Potenz-, Exponential- und Wurzelfunktion* auf deren *Graphen* abbildungsgeometrisch als *Streckung, Spiegelung, Verschiebungen* deuten

Die Gruppen untersuchen die Wirkung von Parametern an unterschiedlichen Funktionen. Zum Abschluss der Gruppenarbeit werden die Gemeinsamkeiten herausgearbeitet.

- Gruppe 1: $f(x) = (x - a)^2 + b$
- Gruppe 2: $g(x) = (x - a)^3 + b$
- Gruppe 3: $h(x) = \exp(x - a) + b$
- Gruppe 4: $i(x) = \sin(x - a) + b$

Beispiel: leistungsheterogene Gruppen



Bei der Verbesserung einer Klassenarbeit werden Lernpartner leistungsheterogen zugeordnet. Schülerinnen und Schüler helfen sich gegenseitig.

Beispiel: Helfersystem



- In einer Übungsphase werden die Namen der Schülerinnen und Schüler, die bereits die Aufgaben erledigt haben, an die Tafel geschrieben und dürfen dann als Helferinnen und Helfer andere Mitschülerinnen und Mitschülern unterstützen.
- o.ä.

Mögliche Phänomene bei Gruppenarbeit (negative wechselseitige Abhängigkeit):



URG

„Was-sollen-wir-denn-jetzt-tun“-Phänomen

„Der-Hans-der-machts-dann-eh“-Phänomen

„Da-mach-ichs-doch-gleich-lieber-selbst“-Phänomen

„Ja-bin-ich-denn-der-Depp“-Phänomen

„Kann-und-mag-ich-nicht-mach-du“-Phänomen

„Ich-habe-meinen-Teil-erledigt“-Phänomen

„Gruppenarbeit-nein-danke“-Phänomen

Diese
Phänomene
wirken sich
negativ auf die
Qualität der
Kommunikation
aus.

Gruppenarbeit ist nicht automatisch „kooperatives Lernen“. Entscheidend ist nach Norm Green vor allem die **positive wechselseitige Abhängigkeit**.

Beispiel für positive wechselseitige Abhängigkeit:

Das Gruppen-Puzzle:

In 5 Expertengruppen werden gemeinsam (im geschützten Rahmen) jeweils die 5 Potenzgesetze erarbeitet. Dabei motiviert auch das Wissen um die eigene Verantwortung („nachher muss ich den anderen das erklären“)

In den Stammgruppen erklären sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig die Potenzgesetze und lösen gemeinsam weiterführende Aufgaben.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- Grundsätzlich gilt für den Mathematikunterricht:
 - Wer Grundlagen nicht beherrscht, kann nicht sinnvoll weiterlernen (Bsp. Stellenwertsystem)
 - Teufelskreis von Misserfolg und Vermeidung, Festhalten an „Rezepten“
- Einziger Ausweg: Aufarbeitung der Verstehensbasis
- **Diagnose:** Feststellen, wo genau die Defizite liegen
- **Fokussierte Förderung:** gezielte Aufarbeitung der individuellen Defizite

- Ohne Hilfe, bzw. passendes **Material** als normale Lehrkraft kaum umsetzbar
- Wo gibt es gutes Material?
 - Manche Schulbücher, z.B. Mathewerkstatt
 - „Mathe sicher können“ vom DZLM
 - WADI
 - ...
- Verfahren muss für Schüler/Eltern transparent sein, dann fördert es eigenverantwortliches Lernen
- Hinführung, Einarbeitung wichtig. Reden über den Sinn der Methode



Grundidee:



Bei der Bearbeitung einer Aufgabe wird genau analysiert, welcher Fehler gemacht wurde. Passend dazu werden dann Übungsaufgaben gestellt, die helfen sollen, die Fehlvorstellung zu korrigieren.

Ein Beispiel für die Umsetzung dieser Idee findet sich in der Konzeption des Schulbuches „Die Mathewerkstatt“:

Beispiel für Material zur Diagnose und Förderung: Schulbuch Mathewerkstatt



Ordnen A Darstellen und Rechnen in der Stellentafel

1 So gut kann ich Zahlen in der Stellentafel ablesen und darstellen

a)

Wie habe ich die Aufgabe gelöst?							Wie geht es weiter?																								
<input type="checkbox"/>	<table><tr><th></th><th>ZT</th><th>T</th><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>(1)</td><td>3</td><td>6</td><td>0</td><td>7</td><td>5</td></tr><tr><td>(2)</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>(3)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>						ZT	T	H	Z	E	(1)	3	6	0	7	5	(2)	1	2	0	5	2	(3)	0	1	2	5	0	✓	► zwei Aufgaben aus Nr. 23–25 (S. 10)
	ZT	T	H	Z	E																										
(1)	3	6	0	7	5																										
(2)	1	2	0	5	2																										
(3)	0	1	2	5	0																										
<input type="checkbox"/>	Ich habe die gleichen Ziffern, aber in anderer Reihenfolge.						► Nr. 5, 6 (S. 5) ► zusätzlich Nr. 7 (S. 5)																								
<input type="checkbox"/>	Mit den Nullen stimmt etwas bei mir nicht.						► Nr. 3, 4 (S. 4)																								
<input type="checkbox"/>	Ich habe mehrere Ziffern in ein Feld eingetragen.						► Nr. 6, 7 (S. 5)																								
<input type="checkbox"/>	Ich bin mir nicht sicher, wie das geht.						► Nr. 1, 2 (S. 4), Nr. 5, 8 (S. 5)																								

← Alles richtig?
→ Vertiefungsaufgaben

Diagnose

Fokussierte Förderung

- [21] Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik* (17). S. 1-8. Verfügbar unter ILIAS.
- [22] Prediger, S. (2009). Kinder auf dem Weg zur Volumenformel. *MNU-Primar* (1), S. 8-12. Verfügbar unter ILIAS.