Lineare Algebra I, Blatt 2

Gruppe 4
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Tobias Remde (Matr.-Nr. 5100067)
tobias.remde@gmx.de

22. November 2020

Aufgabe 1

(a) **Behauptung**: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in G(hg_1h^{-1} = g_2)$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn $\sim$ *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* ist.

Reflexivität.
z.z.: $g_1 \sim g_1$.
Bew.: $g_1 \sim g_1 \Leftrightarrow \exists h \in G(hg_1h^{-1} = g_1)$. Sei h das neutrale Element von G. Dann ist $hg_1h^{-1} = eg_1e^{-1} = eg_1e = g_1$.

Symmetrie.
z.z.: $g_1 \sim g_2 = g_2 \sim g_1$.
Bew.: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in G(hg_1h^{-1} = g_2)$. Existiere also ein solches $h \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned} hg_1h^{-1} &= g_2 \\ hg_1 &= g_2h \\ g_1 &= h^{-1}g_2h. \end{aligned}$$

Wähle nun $i := h^{-1}$: Dann existiert ein $i \in G(ig_2i^{-1} = g_1)$ und somit $g_2 \sim g_1$.

Transitivität.
z.z.: $g_1 \sim g_2 \wedge g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 \sim g_3$.
Bew: $g_1 \sim g_2 \wedge g_2 \sim g_3 \Leftrightarrow \exists h, i \in G : hg_1h^{-1} = g_2 \wedge ig_2i^{-1} = g_3$. Dann ist $ig_2i^{-1} = ihg_1h^{-1}i^{-1}$. Da $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist (und somit abgeschlossen), ist auch $(i \cdot h) \in G$ und damit auch $(i \cdot h)^{-1} \in G$. Sei nun $l := i \cdot h$. Dann ist $g_1 \sim g_3 \Leftrightarrow \exists l \in G(lg_1l^{-1} = g_3)$.

Somit ist $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv und damit eine Äquivalenzrelation.

$\square$

(b) **Behauptung**: $[e] = \{e\}$.

Beweis: $e \sim x \Leftrightarrow \exists h \in G : heh^{-1} = x$. Dann ist $heh^{-1} = (he)h^{-1} = hh^{-1} = e$. Also muss $x = e$ sein und damit $[e] = \{e\}$.

$\square$

(c) **Behauptung**: $(hgh^{-1})^{-1}$ liegt in der Äquivalenzklasse von g^{-1}.

Beweis: Aufgrund von *Bemerkung 1.21* im Skript ist $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. Somit ist $(hgh^{-1})^{-1} = (gh^{-1})^{-1}h^{-1} = (h^{-1})^{-1}g^{-1}h^{-1} = hg^{-1}h^{-1}$, was nach Definition in der Äquivalenzklasse von g^{-1} liegt.

$\square$

Behauptung: $(hgh^{-1})^n$ liegt in der Äquivalenzklasse von g^{-n}.

Beweis: $(hgh^{-1})^n = \prod_{k=0}^{n} hgh^{-1} = hgh^{-1} * \cdots * hgh^{-1}$.

Da $hgh^{-1} \in [g^{-1}]_\sim$, liegt jeder Faktor des Produkts in der Äquivalenzklasse von g^{-1}. Somit liegt das Gesamtprodukt in der Äquivalenzklasse von $g^{-1} * g^{-1} * \cdots * g^{-1}$, also in $[g^{-n}]$.

$\square$

(d) **Behauptung**: Sei $r \in \mathbb{R}^*$ und $z \in \mathbb{Z}$. Dann ist $[r] = \{r\}$ und $[z] = \{z\}$.

Beweis: Seien $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^*$. Dann ist $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}^* : hg_1h^{-1} = g_2$. Da $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abelsch ist, ist jedoch $g_2 = hg_1h^{-1} = hh^{-1}g_1 = eg_1 = g_1$. Somit ist $[g_1] = \{g_1\}$.

Beweis für $(\mathbb{Z}, +)$ ist analog (abelsche Gruppe).

$\square$

Aufgabe 2

Behauptung: Jede injektive Abbildung $f : X \to X$ ist auch surjektiv.

Beweis: Wir führen den Beweis induktiv über die Kardinalität $\#X$.

Induktionsanfang ($\#X = 0$): trivial, da in diesem Fall $X = \emptyset$.

Induktionsvoraussetzung: Sei nun $f : X \to X$ injektiv und surjektiv für $\#X = n$.

Induktionsschritt ($n \Rightarrow n + 1$): Sei $\#X = n + 1$. Da f für eine Menge mit n Elementen sowohl injektiv als auch surjektiv ist, kann jedes Element im Definitionsbereich nur auf exakt ein Element im Wertebereich abgebildet werden. Hat X nun ein Element mehr, bleibt für dieses Element im Definitionsbereich nur noch ein Element im Wertebereich übrig, da f für $\#X = n$ ja bereits bijektiv ist. Somit ist f auch für $\#X = n + 1$ bijektiv.

$\square$

Aufgabe 3

Behauptung: Die Äquivalenzklasse von $(1\ 2\ 3)$ ist die folgende Menge: $[(1\ 2\ 3)] = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

Beweis: Ein Element g ist in der Äquivalenzklasse von $(1\ 2\ 3)$, falls gilt:

$\exists h \in S_4 : h \cdot (1\ 2\ 3) \cdot h^{-1} = g$.

Es muss also einen Zyklus $(a_1\ \dots\ a_n) \in S_4$ geben, sodass

$$(a_1\ \dots\ a_n)(1\ 2\ 3)(a_n\ \dots\ a_1) = (1\ 2\ 3).$$

Für die abzählbar vielen Elemente in S_4 kann nun einzeln geprüft werden, ob dies der Fall ist. Es ergibt sich, dass nur die Elemente id, $(1\ 2\ 3)$ und $(1\ 3\ 2)$ in $[(1\ 2\ 3)]$ liegen.

$\square$

Aufgabe 4

(a) **Behauptung**: $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ ist ein nicht-kommutativer Ring.

Beweis: Es handelt sich um einen Ring, wenn:

- $(R,+)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0_R ist
- $(R,\cdot)$ ein Monoid mit neutralem Element 1_R ist
- die Distributivgesetze $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ und $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ gelten.

Assoziativität von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R),+)$.
Beh.: $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R),+)$ ist assoziativ.
Bew.: Seien $a,\ldots,l \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Kommutativität von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R),+)$.
Beh.: $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R),+)$ ist kommutativ.
Bew.: Seien $a,\ldots,h \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Neutrales von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), +)$.
Beh.: Die Matrix $0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(R)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), +)$.
Bew.: Seien $a, \dots, d \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inverses von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), +)$.
Beh.: Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ mit $a, \dots, d \in R$ hat das Inverse $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.
Bew.: Seien also $a, \dots, d \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_R. \end{aligned}$$

Assoziativität von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), \cdot)$.
Beh.: $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), \cdot)$ ist assoziativ.
Bew.: Seien $a, \dots, l \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Neutrales von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), \cdot)$.

Beh.: Die Matrix $1_{\mathcal{M}_{2\times 2}(R)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element von $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), \cdot)$.

Bew.: Seien $a, \dots, d \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 1a + 0b & 0a + 1b \\ 1c + 0d & 0c + 1d \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit handelt es sich um einen Ring.

Die Kommutativität des Monoids $(\mathcal{M}_{2\times 2}(R), \cdot)$ (und damit auch des Ringes) ist jedoch nicht erfüllt: Seien $a, \dots, h \in R$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \\ \neq&\begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

(b) **Behauptung**: Wenn R positive Charakteristik $k > 0$ hat, ist die Charakteristik *char* $\mathcal{M}_{2\times 2}(R) = k$.
Beweis:

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(R)} &= \begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k} 1_R & 0_R \\ 0_R & \sum_{i=0}^{k} 1_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k} 1_R & \sum_{i=0}^{k} 0_R \\ \sum_{i=0}^{k} 0_R & \sum_{i=0}^{k} 1_R \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 1_R & 0_R \\ 0_R & 1_R \end{pmatrix} = (1_{\mathcal{M}_{2\times 2}(R)})^k. \end{aligned}$$

$\square$