Aufgaben für Dienstag zum Vorkurs Mathematik

für Mathematiker
vor dem WS 2020/21

Timo Enger, Peter Pfaffelhuber
Universität Freiburg

19. Oktober 2020

Aufgaben Dienstag

1.* Seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Begründen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.$$

2.* Was ist $\sum_{i=m}^{n} 1$?

3.* Ein $x \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, falls $2|x$. Ist 0 eine gerade Zahl? Wie folgt das aus der Definition von Teilbarkeit?

4.* Sei $x \in \mathbb{N}$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k$. Zeigen Sie:

$$2|x \iff 2|a_0, \qquad 5|x \iff 5|a_0, \qquad 4|x \iff 4|(10a_1 + a_0).$$

5. Sei $x \in \mathbb{Z}_+$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ und $y = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}$ die Zahl, die entsteht, wenn man die letzte Ziffer von x wegstreicht. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} 7|x \quad &\iff \quad 7|(5a_0 + z). \\ 13|x \quad &\iff \quad 13|(4a_0 + z). \\ 17|x \quad &\iff \quad 17|(5a_0 - z). \\ 19|x \quad &\iff \quad 19|(2a_0 + z). \\ 23|x \quad &\iff \quad 23|(7a_0 + z). \\ 29|x \quad &\iff \quad 29|(3a_0 + z). \end{aligned}$$

6. Drei Primzahlen p, q und r bilden ein Primzahldrilling, wenn der Abstand zwischen p und q bzw. der Abstand zwischen q und r genau 2 beträgt. Zeigen Sie, dass nur $(3, 5, 7)$ ein Primzahldrilling bilden (d.h. es gibt keine weiteren Primzahldrillinge)

7.* Beweisen Sie Lemma 3.3.