Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 9: Modellieren

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

22. Januar 2021

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

Inhalte dieser Veranstaltung:

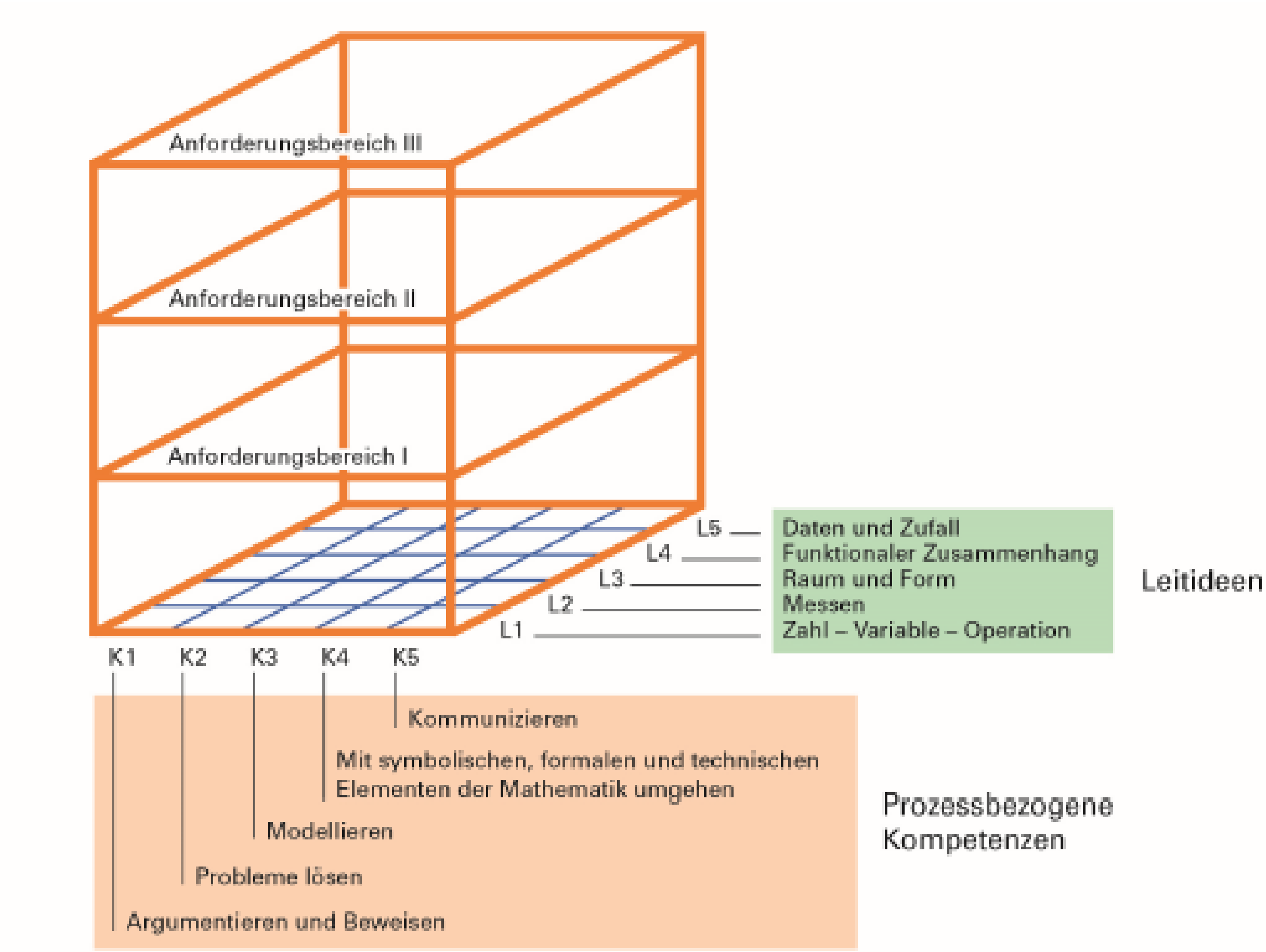
	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	15.2.	Klausur

Übersicht

- Allgemeines zum Modellieren
- Modellierungsformen im Unterricht
  1. Offenes Modellieren
  2. Geschlossenes Modellieren
  3. Modellieren einer realen Situation
  4. Einkleidungsaufgaben (kein Modellieren)

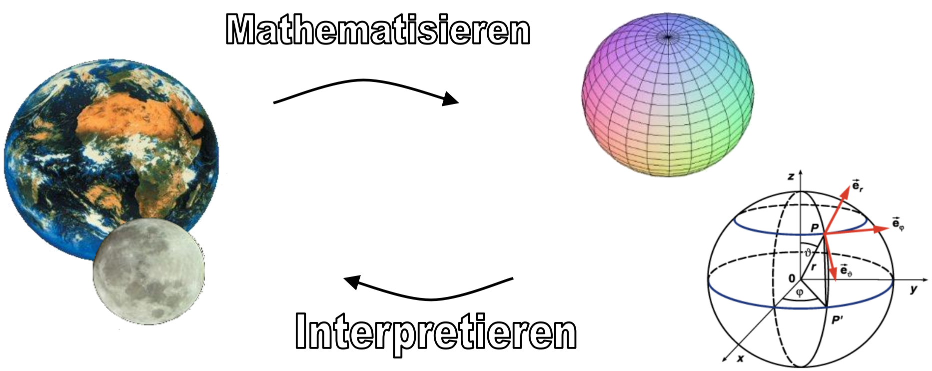
- Modellieren bewerten

„Modellieren“ als eine der 5 prozessbezogenen Kompetenzen



Modellieren …

- … beschreibt das Anwenden von Mathematik auf Probleme der Realität.
- … ist ein gängiger Vorgang, der in der Wissenschaft, Wirtschaft, Technik, Industrie etc. ständig angewendet wird.
- … ist keine „Erfindung“ der Didaktik.



Modellieren …

Mathematisches Modellieren

Mathematische Modelle erlauben es, reale, mitunter komplexe Fragestellungen unter Einsatz von Mathematik anzugehen und wenn möglich zu lösen. Beim mathematischen Modellieren denkt man also mit dem Mittel der Mathematik über die reale Welt nach.

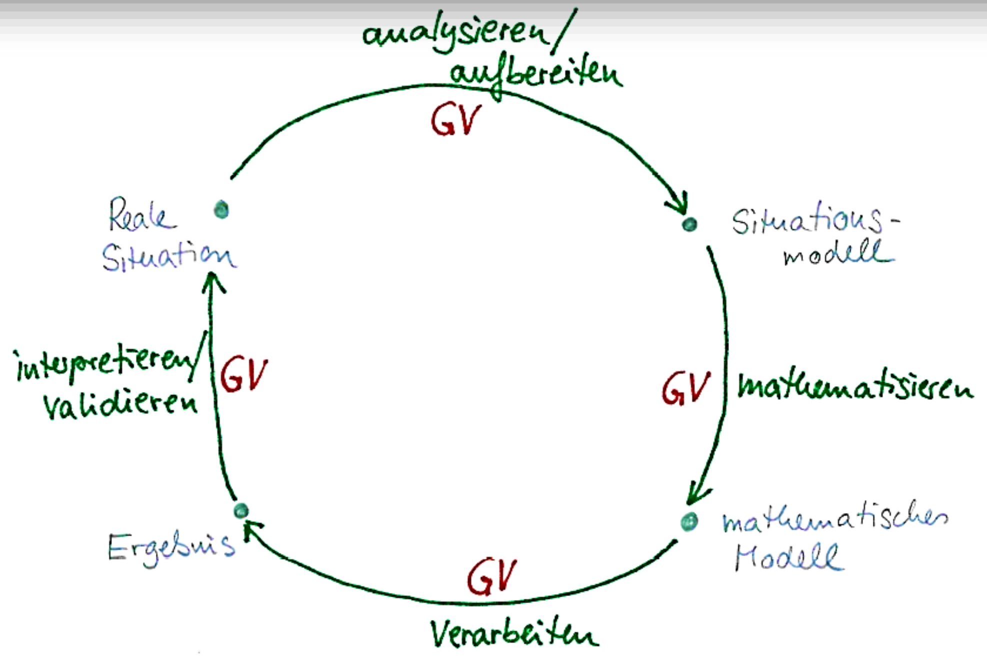
Welches Modell man wählt, hängt davon ab, was man mit der Modellierung bezweckt, also welches Problem man lösen will. Modelle können also sehr einfach aber auch hochkomplex sein, immer jedoch beschreiben sie nur bestimmte Aspekte der realen Situation. Diese „Kunst der Reduktion“ ist aber gerade die Stärke von mathematischen Modellen.

Leuders & Maaß, 2005

Modellieren im Bildungsplan:

2.3 Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten realitätsbezogene Fragestellungen, indem sie deren Struktur analysieren, sie vereinfachen und Annahmen treffen. Sie übersetzen die Situation in ein mathematisches Modell, finden im mathematischen Modell ein Ergebnis und interpretieren es in der Realsituation. Sie überprüfen das Ergebnis im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit. Sie diskutieren die Tragweite von durch Modellierung gewonnenen Prognosen kritisch.

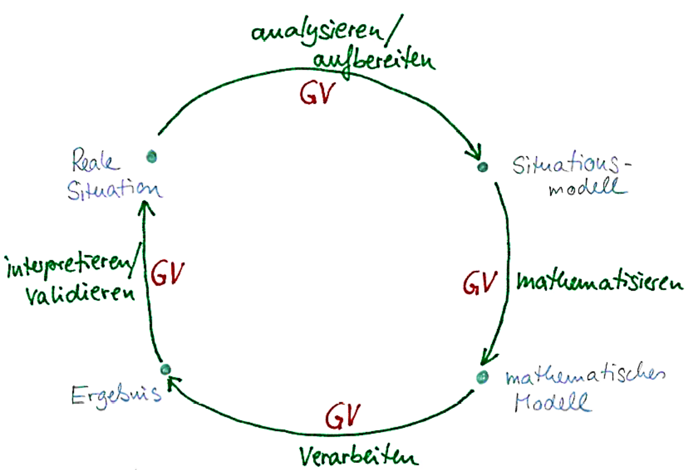


2.3 Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten realitätsbezogene Fragestellungen, indem sie deren Struktur analysieren, sie vereinfachen und Annahmen treffen. Sie übersetzen die Situation in ein mathematisches Modell, finden im mathematischen Modell ein Ergebnis und interpretieren es in der Realsituation. Sie überprüfen das Ergebnis im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit. Sie diskutieren die Tragweite von durch Modellierung gewonnenen Prognosen kritisch.

Die Schülerinnen und Schüler können
Realsituationen analysieren und aufbereiten
1. wesentliche Informationen entnehmen und strukturieren
2. ergänzende Informationen beschaffen und dazu Informationsquellen nutzen
3. Situationen vereinfachen
mathematisieren
4. relevante Größen und ihre Beziehungen identifizieren
5. die Beziehungen zwischen diesen Größen mithilfe von Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Figuren, Diagrammen, Tabellen oder Zufallsversuchen beschreiben
6. Grundvorstellungen zu mathematischen Operationen nutzen und die Eignung mathematischer Verfahren einschätzen
7. zu einer Situation passende mathematische Modelle (zum Beispiel arithmetische Operationen, geometrische Modelle, Terme und Gleichungen, stochastische Modelle) auswählen oder konstruieren
im mathematischen Modell arbeiten
8. Hilfsmittel verwenden
9. rechnen, mathematische Algorithmen oder Konstruktionen ausführen
interpretieren und validieren
10. die Ergebnisse aus einer mathematischen Modellierung in die Realität übersetzen
11. die aus dem mathematischen Modell gewonnene Lösung in der jeweiligen Realsituation überprüfen
12. die aus dem mathematischen Modell gewonnene Lösung bewerten und gegebenenfalls Überlegungen zur Verbesserung der Modellierung anstellen

Modellierungskreislauf



Warum Realitätsbezug?

Aus: Blum (2010), siehe [28]

Wozu sollen überhaupt Realitätsbezüge in den Mathematikunterricht integriert werden? Es gibt mehrere *Gründe* dafür (vgl. Winter 2003, Blum 1996):

- Nur mit Realitätsbezügen kann der Mathematikunterricht zum Umweltverstehen, zur Alltagsbewältigung und zur Berufsvorbereitung beitragen („pragmatische" Gründe).
- Realitätsbezüge sind ein Vehikel zur Kompetenzentwicklung und sind insbesondere für die Förderung der Kompetenz Modellieren unentbehrlich („formale" Gründe).
- Realitätsbezüge helfen Schülern beim Mathematiklernen, sie dienen zum besseren Verstehen und Behalten von mathematischen Inhalten und können diese motivieren („lernpsychologische" Gründe).
- Nur mit Realitätsbezügen lässt sich ein adäquates Mathematikbild bei Schülern aufbauen („kulturbezogene" Gründe).

Modellierungsformen im Unterricht

1. **Offenes Modellieren:** Die Aufgabe zeichnet sich durch vage Voraussetzungen und Zulassen von Alternativen aus. Modellannahmen müssen erst noch getroffen werden (Schätzwerte gehen ein).
2. **Geschlossenes Modellieren:** Die Voraussetzungen der Aufgabe legen ein Situationsmodell nahe, das aber erst noch entwickelt werden muss. Die dafür nötigen Modellannahmen und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis werden reflektiert.
3. **Modellieren einer realen Situation:** Man geht von einer realen Situation/ einem Experiment aus
4. **Einkleidungsaufgaben:** Der Kontext spielt für die Lösung der Aufgabe keine Rolle und könnte auch weggelassen werden. (kein Modellieren!!)

Modellierungsformen im Unterricht

1. **Offenes Modellieren:** Die Aufgabe zeichnet sich durch vage Voraussetzungen und Zulassen von Alternativen aus. Modellannahmen müssen erst noch getroffen werden (Schätzwerte gehen ein).
2. **Geschlossenes Modellieren:** Die Voraussetzungen der Aufgabe legen ein Situationsmodell nahe, das aber erst noch entwickelt werden muss. Die dafür nötigen Modellannahmen und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis werden reflektiert.
3. **Modellieren einer realen Situation:** Man geht von einer realen Situation/ einem Experiment aus
4. **Einkleidungsaufgaben:** Der Kontext spielt für die Lösung der Aufgabe keine Rolle und könnte auch weggelassen werden. (kein Modellieren!!)

1. Beispiel: Offenes Modellieren

Beispielaufgabe aus [31]

Tanken

Herr Stein wohnt in Trier 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Er fährt mit seinem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 0,85 Euro, im Gegensatz zu 1,1 Euro in Trier.

Lohnt sich die Fahrt für Herrn Stein?

Ablauf im Unterricht:

1. Begrüßung und Erläuterung des Stundeninhalts
(Vorstellung der Tanken-Aufgabe)

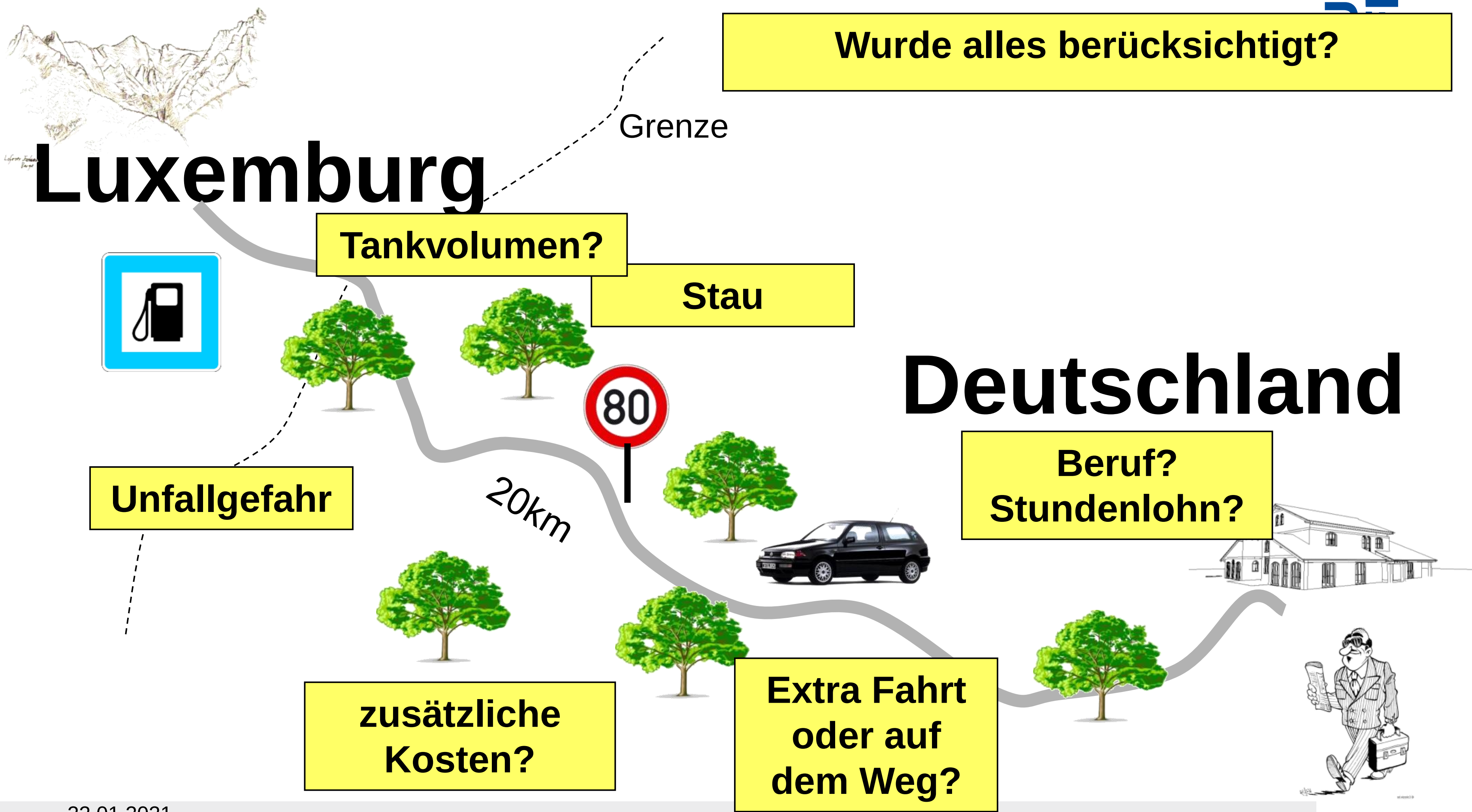
2. Einzelarbeit
(Verstehen der Aufgabenstellung und Erarbeitung individueller Problemaspekte und Lösungsansätze)

3. Partner- und Gruppenarbeit
(Lösen der Aufgabe in der Gruppe und Erstellung einer Präsentation)

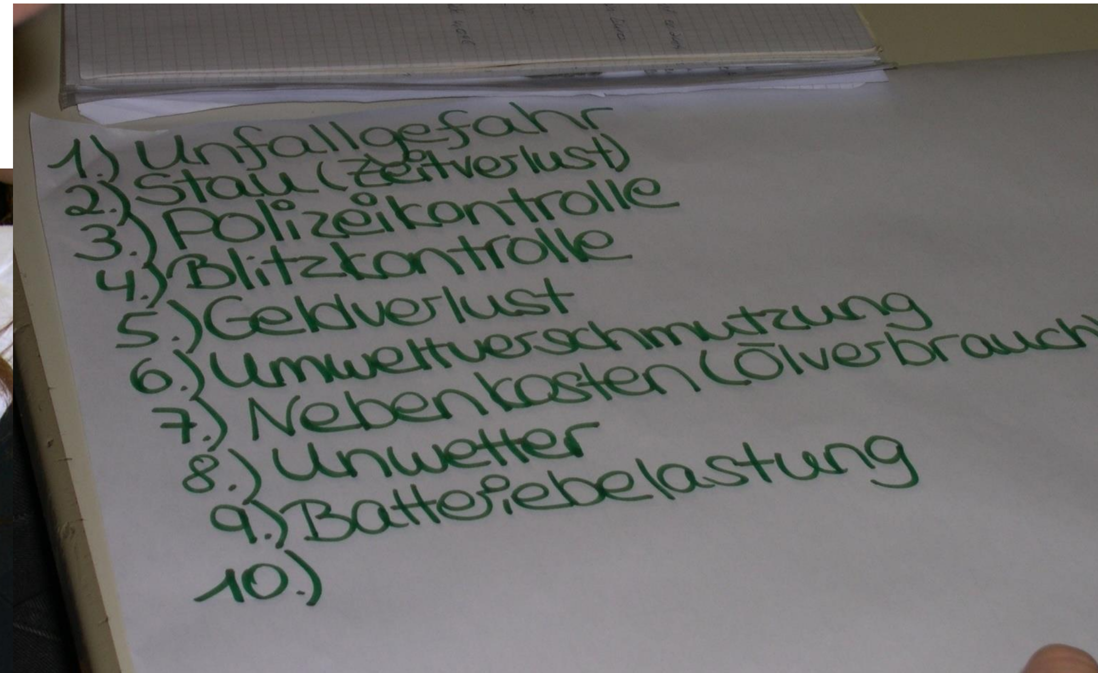
4. Präsentation
(Vorstellung einzelner Gruppenlösungen mit Overhead, Plakaten o. Ä.)

5. Reflexion
(Rückblick auf den Lösungsprozess)

Strukturieren, vereinfachen, Annahmen treffen:



Strukturieren, vereinfachen, Annahmen treffen:



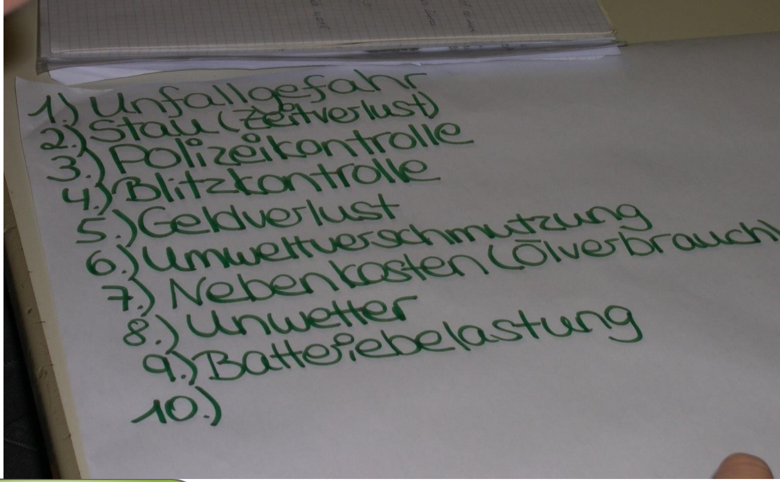
Annahmen, z.B.:

Auto: 50 Liter Tankvolumen
Verbrauch: 8 Liter pro 100 km.

Problem: „Weltwissen“, siehe [31]

Gruppendiskussion mit dem Lehrer

Julia: Wir wissen ja ganz viele Angaben für den Golf nicht, deshalb können wir da auch nicht auf eine Lösung kommen.
L: *Was fehlt Euch denn?*
Bettina: Ja was der braucht und so.
L: *Hm. Verbraucht. Eure Eltern haben ein Auto?*
Bettina: Ja.
Peter: Einen Clio.
L: *Was verbraucht der denn?*
Peter: Wenig.
L: *Was heißt wenig?*
Peter: So und so viel Liter pro hundert Kilometer, aber ich weiß nicht, wie viel.
Regina: Ich glaub so acht oder zehn oder so, oder? Kann das sein, ungefähr?
L: *Das kann schon sein ja. Und was haben Deine Eltern? (Zu Bettina)*
Bettina: Ja, ich weiß überhaupt nicht wie viel.
Regina: Wir haben einen Escort, der ist doch ungefähr wie'n Golf, oder?
L: *Das ist doch eine gute Idee. Dann nehmen wir den Verbrauch des Escorts.*
Regina: Okay. Schätzen wir mal, ich weiß das ja nicht so genau, neun?
Peter: Neun.
L: *Ja das hört sich doch ganz gut an, ja.*
Regina: Neun Liter. Okay.



Reale Situation → vereinfachen → Reales Modell

Reales Modell → mathematisch formulieren → Mathematisches Modell

Mathematisches Modell → mathematisch lösen → Mathematische Lösung

Mathematische Lösung → bewerten → Reale Situation

Schülerlösung aus [28]:

- Wir gehen davon aus, – dass der Golf auf 100km 7L verbraucht
  – dass der Tank 60L fasst

Fahrt: 40 km ⇝ 2,8L

Fahrtkosten (Sprit aus Luxemburg): 2,38 €

Ersparnis durch Tanken in Luxemburg: $(60-2,8) \times \underbrace{(1,1-0,85)}_{\text{Differenz der beiden Literpreise}}$
$= 14,3$ €

– Fahrtkosten 2,38 €

max. Gesamtersparnis = 11,92 €

Rein rechnerisch kann er, bei optimaler ~~maximaler~~ Nutzung (zum Bsp. mit genau 1 L. startend), 11,92 € sparen.

– Wir gehen von einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100km/h aus.

$40 \cdot \frac{60}{100} = 24$ min. Fahrtzeit

Angenommen der Tankvorgang dauert 6 min., beansprucht das Tanken in Luxemburg insgesamt eine halbe Stunde.

=> Angenommen Herr Stein hat viel Zeit, aber relativ wenig Geld, lohnt sich die Fahrt auf jeden Fall, also zum Bsp. als Rentner.

Wenn er wenig Zeit, aber relativ viel Geld hat, lohnt sich die Fahrt nicht, also zum Bsp. als Chefarzt.

Bei manchen Berufen, wie Schüler, hängt es ~~von~~ auch von den (variierenden) Faktoren Zeit und Geld, aber auch von anderen kleineren Faktoren, wie Umwelt bewusstsein, oder Patriotismus ab.

← Annahmen treffen

← Mathematisieren

← Ergebnis

← weitere Annahmen, Reflexion des Ergebnisses im Hinblick auf weitere Annahmen (validieren, bewerten)

Modellierungsformen im Unterricht

1. **Offenes Modellieren:** Die Aufgabe zeichnet sich durch vage Voraussetzungen und Zulassen von Alternativen aus. Modellannahmen müssen erst noch getroffen werden (Schätzwerte gehen ein).
2. **Geschlossenes Modellieren:** Die Voraussetzungen der Aufgabe legen ein Situationsmodell nahe, das aber erst noch entwickelt werden muss. Die dafür nötigen Modellannahmen und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis werden reflektiert.
3. **Modellieren einer realen Situation:** Man geht von einer realen Situation/ einem Experiment aus
4. **Einkleidungsaufgaben:** Der Kontext spielt für die Lösung der Aufgabe keine Rolle und könnte auch weggelassen werden. (kein Modellieren!!)

2. Beispiel: Geschlossenes Modellieren

Feuerwehr

Die Münchner Feuerwehr hat sich im Jahr 2004 ein neues Drehleiter-Fahrzeug angeschafft. Mit diesem kann man über einen am Ende der Leiter angebrachten Korb Personen aus großen Höhen retten. Dabei muss das Feuerwehrauto laut einer Vorschrift 12 m Mindestabstand vom brennenden Haus einhalten.

Die technischen Daten des Fahrzeugs sind:

Fahrzeugtyp:	Daimler Chrysler AG Econic 18/28 LL - Diesel
Baujahr:	2004
Leistung:	205 kw (279 PS)
Hubraum:	6374 cm^3
Maße des Fahrzeugs:	Länge 10 m; Breite 2,5 m; Höhe 3,19 m
Maße der Leiter:	30 m Länge
Leergewicht:	15540 kg
Gesamtgewicht:	18000 kg

Lösen Sie selbst diese Aufgabe (5 min)

Aus welcher maximalen Höhe kann die Münchner Feuerwehr mit diesem Fahrzeug Personen retten?

Abbildung 2: Die Feuerwehr-Aufgabe (Fuchs & Blum 2008; Holzäpfel & Leiss 2014)

Modellierungsprozess:

Feuerwehr

Die Münchner Feuerwehr hat sich im Jahr 2004 ein neues Drehleiter-Fahrzeug angeschafft. Mit diesem kann man über einen am Ende der Leiter angebrachten Korb Personen aus großen Höhen retten. Dabei muss das Feuerwehrauto laut einer Vorschrift 12 m Mindestabstand vom brennenden Haus einhalten.

Die technischen Daten des Fahrzeugs sind:

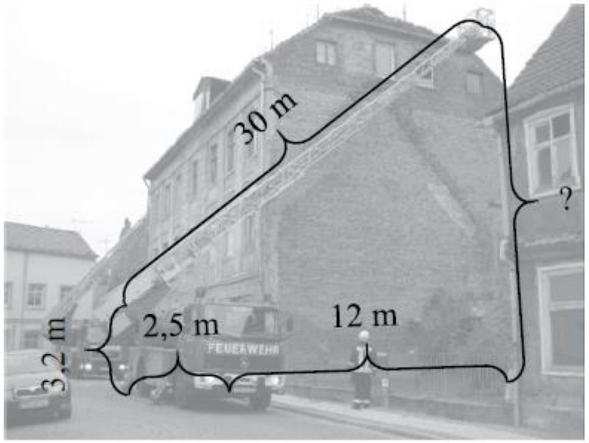
Fahrzeugtyp:	Daimler Chrysler AG Econic 18/28 LL - Diesel
Baujahr:	2004
Leistung:	205 kw (279 PS)
Hubraum:	6374 cm³
Maße des Fahrzeugs:	Länge 10 m; Breite 2,5 m; Höhe 3,19 m
Maße der Leiter:	30 m Länge
Leergewicht:	15540 kg
Gesamtgewicht:	18000 kg

Aus welcher maximalen Höhe kann die Münchner Feuerwehr mit diesem Fahrzeug Personen retten?

Abbildung 2: Die Feuerwehr-Aufgabe (Fuchs & Blum 2008; Holzäpfel & Leiss 2014)

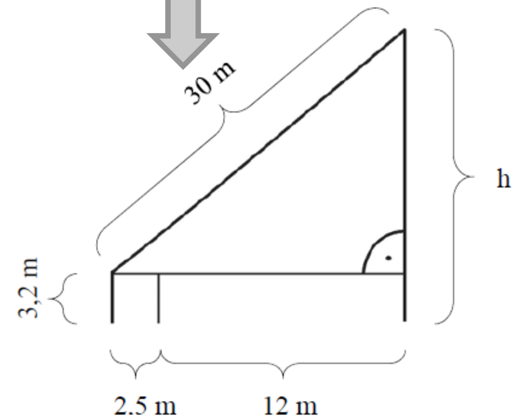
Realsituation

Analysieren, strukturieren, vereinfachen, idealisieren, Annahmen treffen



Situationsmodell

mathematisieren



Mathematisches Modell

$$(h - 3{,}2\,m)^2 + (12\,m + 2{,}5\,m)^2 = (30\,m)^2$$

Mathematisch verarbeiten

$$h \approx \sqrt{(30\text{ m})^2 - (12\text{ m} + 2{,}5\text{ m})^2} + 3{,}2\text{ m}$$
$$\approx 26{,}3\text{ m} + 3{,}2\text{ m}$$
$$\approx 29{,}5\text{ m}$$

Ergebnis

Interpretieren, validieren

Antwort:
Die Münchener Feuerwehr kann mit dem beschriebenen Fahrzeug Personen aus etwa 30 m Höhe retten.

Strukturieren, vereinfachen, Annahmen treffen:

aus: Rellensmann (2019): Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren. Wiesbaden: Springer. S. 15

Strukturieren. Die Schülerinnen und Schüler strukturieren das Modell der Situation, indem sie die (lösungsrelevanten) Objekte und ihre Beziehungen entsprechend der Problembeschreibung präzisieren. Bei der Feuerwehr-Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler beispielsweise die Parkposition des Feuerwehrfahrzeugs präzisieren, um die Beziehungen zwischen der Rettungshöhe, dem Mindestabstand, der Leiter und den Maßen des Fahrzeugs zu bestimmen. Es sind verschiedene Annahmen möglich: Zum Beispiel kann das Fahrzeug vorwärts, rückwärts oder seitwärts zum Rettungsobjekt geparkt werden. Im Folgenden wird der Lösungsprozess bei Annahme einer seitlichen Parkposition des Feuerwehrfahrzeugs dargestellt (Abbildung 3). Darüber hinaus kann

Grundsätzliches zum Modellieren:

- Unterschiedliche Modellannahmen führen zu unterschiedlichen Antworten/Lösungen

- Entscheidend ist die Qualität der Argumentation (warum wurde welche Gegebenheit vernachlässigt/berücksichtigt)

- Herausforderung für den Unterricht: Die Wahl des Modells und die Plausibilität der Antwort muss diskutiert werden. Explizite Rechenwege sind zweitrangig.

Modellierungsaufgaben…

… sind in der Regel…

- offen (lösungswegoffen und ergebnisoffen)
- selbstdifferenzierend (sie lassen unterschiedliche Modellierungen auf unterschiedlichem Niveau zu)
- realitätsbezogen

Riesenschuhe

Florentino poliert in einem Sportzentrum auf den Philippinen das laut Guinness-Buch der Rekorde weltgrößte Paar Schuhe. Ein Schuh ist 2,37 m breit und 5,29 m lang.

Wie groß wäre der Riesenmensch ungefähr, dem dieses Paar Schuhe passen würde?

Beschreibe deinen Lösungsweg.

Modellierungsformen im Unterricht

1. **Offenes Modellieren:** Die Aufgabe zeichnet sich durch vage Voraussetzungen und Zulassen von Alternativen aus. Modellannahmen müssen erst noch getroffen werden (Schätzwerte gehen ein).
2. **Geschlossenes Modellieren:** Die Voraussetzungen der Aufgabe legen ein Situationsmodell nahe, das aber erst noch entwickelt werden muss. Die dafür nötigen Modellannahmen und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis werden reflektiert.
3. **Modellieren einer realen Situation:** Man geht von einer realen Situation/ einem Experiment aus
4. **Einkleidungsaufgaben:** Der Kontext spielt für die Lösung der Aufgabe keine Rolle und könnte auch weggelassen werden. (kein Modellieren!!)

3. Modellieren einer realen Situation

- Unterrichtsvorschlag von Wolfgang Riemer [27]:
- „Kerzenrennen“

Wird die Spaghettikerze die Geburtstagskerze einholen?

Das Abbrennen einer Kerze wird mittels linearer Funktionen modelliert.

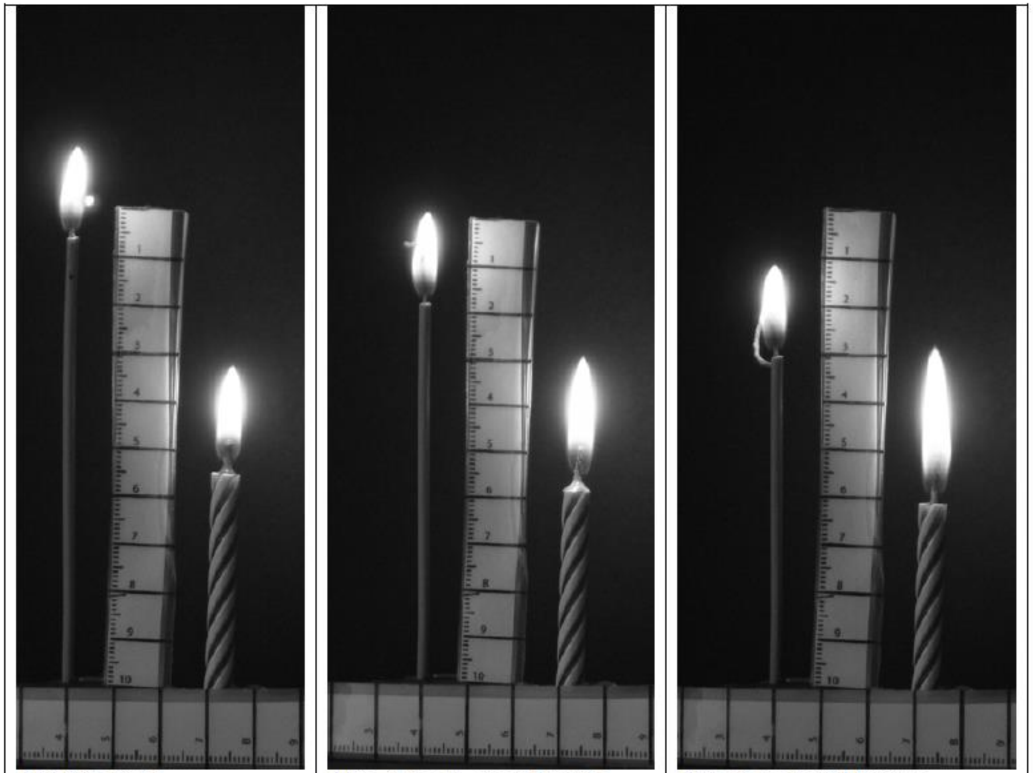


Abb1 0: Start | Abb. 2 nach einer Minute | Abb. 2 nach 2 Minuten

Aufgabenbeispiel:

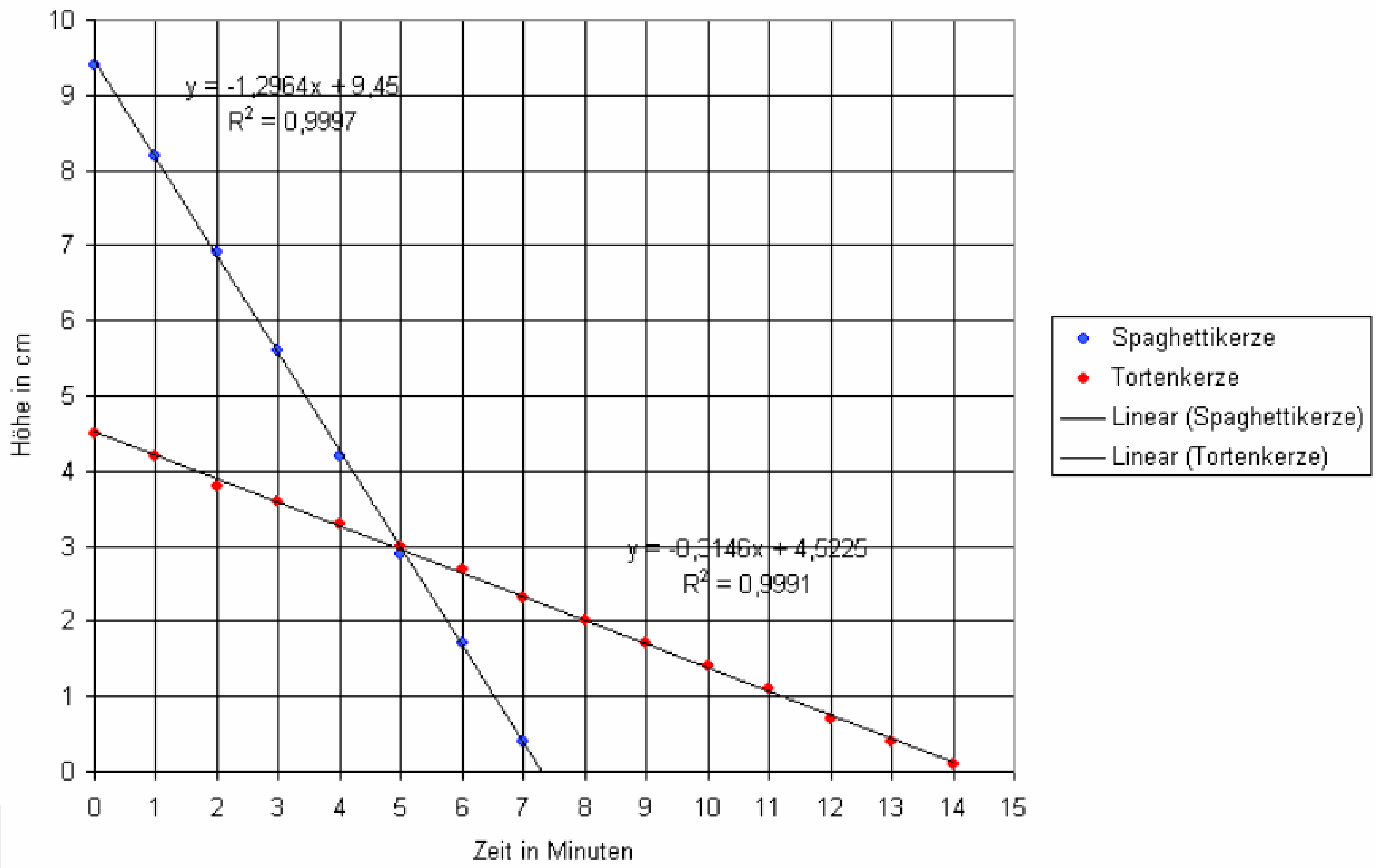
Aufgabe:

a) Experiment 1
Bildet Vierergruppen. Jede Gruppe bekommt eine Spaghettikerze und eine Gebutstagskerze in einem Standfuß aus Knetgummi, die auf ein Startsignal hin angezündet werden. Nach zwei Minuten werden auf ein Stoppsignal hin alle Kerzen ausgepustet. Zwischenzeitlich könnt ihr mit Stoppuhr und Maßstab messen, so viel und so genau ihr wollt.

b) Hochrechnung
Ihr habt 5 Minuten Zeit vorherzusagen
- ob die Spaghettikerze die Geburtstagskerze einholt
- wann die Spaghettikerze abgebrannt sein wird
- wann die Geburtstagskerze abgebrannt sein wird. Die Hochrechnungen werden bei einer Jury abgegeben.

c) Experiment 2
Nach Abgabe der Hochrechnungen werden die Kerzen erneut entzündet. Ihr stoppt die in b) erfragten Zeiten. Gewonnen hat die Gruppe, deren Hochrechnungen am besten waren. Damit nicht geschummelt wird, werden die Kerzen vor der Kontrollmessung in c) unter den Gruppen ausgetauscht- oder die Messungen werden von Jury-Mitgliedern beaufsichtigt

Modell für das Abbrennen der Kerzen aufgrund der Daten:



Modellierungsformen im Unterricht

1. **Offenes Modellieren:** Die Aufgabe zeichnet sich durch vage Voraussetzungen und Zulassen von Alternativen aus. Modellannahmen müssen erst noch getroffen werden (Schätzwerte gehen ein).
2. **Geschlossenes Modellieren:** Die Voraussetzungen der Aufgabe legen ein Situationsmodell nahe, das aber erst noch entwickelt werden muss. Die dafür nötigen Modellannahmen und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis werden reflektiert.
3. **Modellieren einer realen Situation:** Man geht von einer realen Situation/ einem Experiment aus
4. **Einkleidungsaufgaben:** Der Kontext spielt für die Lösung der Aufgabe keine Rolle und könnte auch weggelassen werden. (kein Modellieren!!)

4. Einkleidungsaufgaben

Immer geht man das Risiko ein, dass sich oft auch gut gemeinte Anwendung reduziert auf das, was man früher fairerweise „Einkleidung" nannte. Das sollten Schülerinnen und Schüler wissen (dürfen). Die Frage etwa nach der Masse der Cheopspyramide (vgl. Abb. 1) ist sicherlich nicht wirklich eine anwendende Aufgabe, auch wenn sie von einer real existierenden Pyramide handelt; sie ist nur eine textliche Einkleidung einer mathematischen Struktur: der mathematischen Struktur, die wir gerade abfragen wollen – hier nämlich die Berechnung des Volumens einer mathematisch idealisierten Pyramide. Daneben kann diese Aufgabe auch noch eine Vorstellung von einer großen Steinmasse vermitteln (gewiss ein nicht zu vernachlässigender realitätsbezogener Aspekt).

Lambert, 2006

Realitätsferne:

Offensichtliche Realitätsferne – wi(e)der den gesunden Menschenverstand!

Eine häufig zu findende Aufgabe zur Dreisatzrechnung ist die, die etwa beginnt mit „Zwei Hühner legen an drei Tagen vier Eier. Wie viele …?“.

Meine Schülerinnen und Schüler haben auf diese Aufgabe reagiert mit:

„Hühner legen doch nicht immer gleich viele Eier?!“ (Klar, Recht haben sie: Hier wird implizit statistisch gemittelt, und dies wird nicht weiter reflektiert.)

„Und was ist, wenn ein Huhn einmal krank ist?“ (Klar, Recht haben sie: Die Aufgabe müsste eigentlich beginnen mit: „Angenommen: Ich habe zwei stets gesunde Hühner, die an drei Tagen immer vier Eier legen.“)

Aber so kommen wir nicht weiter, wenn wir Dreisatz üben wollen. Also was tun? Bereits durch einfache Variation der Aufgabe kommt man umhin, Realitätsnähe zu heucheln. Walther Lietzmann hat bereits vor langer Zeit vorgeschlagen, die Aufgabe zu beginnen mit:

$$„1\frac{1}{2}\text{ Hühner legen in }1\frac{1}{2}\text{ Tagen }1\frac{1}{2}\text{ Eier} \ldots “$$

Diese *offensichtliche Realitätsferne* verrät den Lernenden ehrlich, dass wir hier eine mathematische Struktur eingekleidet haben und von ihnen das Entkleiden der Aufgabe fordern. Nicht mehr und nicht weniger.

Lambert, 2006

Wofür sind Einkleidungsaufgaben gut?

Eingekleidete Aufgaben sind im Mathematikunterricht sicherlich notwendig:

- Einerseits lernt man hier das wichtige Übersetzen von (möglichst umgangssprachlichem – auf dieser Ebene ist der Realitätsbezug zu suchen!) Text in mathematische Sprachausdrücke, etwa Formeln oder Zeichnungen.
- Andererseits liefern sie umgekehrt umgangssprachliche Muster, die für mathematische Muster stehen, was das Verständnis dieser mathematischen Muster fördern kann.

Lambert, 2006

Um diese beiden sich invers ergänzenden Ziele zu erreichen, sollten wir Einkleidung erstens bewusst als solche zu erkennen geben und zweitens auch *von den Lernenden selbst* verschiedene Einkleidungen zu vorgegebenen Berechnungen (er)finden lassen.

Übersicht

- Allgemeines zum Modellieren
- Modellierungsformen im Unterricht
  1. Offenes Modellieren
  2. Geschlossenes Modellieren
  3. Modellieren einer realen Situation
  4. Einkleidungsaufgaben (kein Modellieren)

- Modellieren bewerten

Modellieren bewerten:

Ampelschaltung:

An einer etwa 1km langen Baustelle wird der Verkehr einspurig vorbeigeleitet und mithilfe einer Baustellenampel geregelt. Wie sollte die Baustellenampel geschaltet werden, damit der Verkehr gut fließt?

Aus: Greefrath & Schukaljow (2018). *Wie Modellieren gelingt*. Mathematik lehren (207), S. 2.

Schreiben Sie in die geteilten Notizen Annahmen auf, die Sie treffen würden, um die Situation zu modellieren.

Wie soll man mit der Vielfalt der möglichen Lösungen umgehen?

Was sind gute Lösungen?

Welche Anforderungen wird an „gutes Modellieren“ gestellt?

Modellieren bewerten:

„Wir alle kennen die drängende Schülerfrage „Kommt das auch in der Arbeit dran?“. Sagt man hier nein, kann man sich die Behandlung des entsprechenden Themas gleich sparen. Modellierungsaufgaben müssen also auch Gegenstand der Leistungsmessung sein, wenn sie ernst genommen werden sollen. […]

Doch wie macht man das in geeigneter Weise? Ist das bei der Vielfalt der Lösungen überhaupt in fairer Weise möglich? Wie bewerte ich es, wenn jemand eine sehr einfache Lösungsmöglichkeit wählt und alles richtig macht, während ein anderer eine komplexe Möglichkeit wählt und kleine Fehler macht? […]

Neben dem Erstellen eines Erwartungshorizontes sollte man sich also vorab Bewertungskriterien überlegen und diese den Schülerinnen und Schülern transparent machen.“

Aus: [29] Maaß, 2007, S. 39 - 40.

Modellieren bewerten:

- Das Bewertungsschema muss mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden.
- Punktevergabe muss nachvollziehbar sein.
- Es muss klar sein, was und wie bewertet wird.
- Dies kann man z.B. auch über Besprechung von Selbstbewertungen klären.
- In Klassenarbeiten muss auch für die Schüler erkennbar sein, ob es sich um eine Modellierungsaufgabe oder um eine Einkleidungsaufgabe handelt.

Beispiel für ein Bewertungsschema, siehe [29], S. 39.

1	**Bildung des Realmodells:** ▪ Sind die getroffenen Annahmen sinnvoll? ▪ Ist der Grad der Vereinfachung der Problemfrage angemessen?	0 – 10 Punkte
2	**Mathematische Bearbeitung:** ▪ Wurden die relevanten Größen und Beziehungen richtig mathematisiert? ▪ Wurde eine adäquate mathematische Notation gewählt? ▪ Wurden mathematisches Wissen und heuristische Strategien zur Lösung des mathematisierten Problems richtig angewendet? ▪ Ist die Lösung mathematisch korrekt?	0 – 15 Punkte
3	**Interpretation der Lösung:** ▪ Wird die mathematische Lösung bezogen auf die Realität interpretiert? ▪ Ist die Interpretation korrekt?	0 – 5 Punkte
4	**Kritische Reflexion:** ▪ Werden alle nötigen Aspekte berücksichtigt? ▪ Bleibt die Reflexion oberflächlich? ▪ Werden Vergleichswerte hinzugezogen?	0 – 10 Punkte
5	**Dokumentation des Vorgehens:** ▪ Werden die einzelnen Schritte des Vorgehens beschrieben und erläutert?	0 – 15 Punkte
6	**Zielgerichtetes Vorgehen:** ▪ Geht der Lernende zielgerichtet beim Modellieren vor oder verliert er sich in Details, ohne ein Ergebnis zu erreichen?	0 – 5 Punkte
		max. 60 Punkte

Abb. 12: Bewertungsschema

Vgl. auch Aufgabe 15:

Aufgabe 14: Standardaufgaben öffnen

Eine Möglichkeit, wie man aus einer geschlossenen Aufgabe eine offene Aufgabe machen kann, ist die Umkehrung der Denkrichtung. Formulieren Sie ausgehend von den genannten Standardaufgaben jeweils eine neue, ergebnisoffene Aufgabe, indem Sie die Denkrichtung umdrehen:

a) „Berechne den Mittelwert der Zahlen 2, 3, 5, 6, 11, 3."
b) „Berechne die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$."
c) „Berechne 25+75."
d) „Berechne das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a=2cm, b=6cm, c=4cm."
e) Finden Sie selbst eine weitere Standardaufgabe und eine ergebnisoffene Umkehrung davon.

Aufgabe 15: Offene Aufgaben bewerten

Schätze die Fläche der Antarktis, indem Du den Maßstab der Karte benutzt. Schreibe Deine Rechnung auf und erkläre, wie Du zu Deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn Dir das bei Deiner Schätzung hilft).

Hintergrund: Offene Aufgaben mit verschiedenen Lösungsmöglichkeiten sind selbstdifferenzierend und fördern das Problemlösen, das Kommunizieren und Argumentieren und gehören deswegen in jeden Mathematikunterricht. Sie werden jedoch nur ernst genommen, wenn sie auch Bestandteil der Leistungsmessung sind. Hier fair und vergleichbar zu bewerten, ist jedoch nicht einfach. Es müssen Kriterien entwickelt werden, die für die Schülerinnen und Schüler transparent und nachvollziehbar sind.

a) Analysieren Sie die vier Schülerlösungen: Was an den Lösungen würden Sie eher positiv, was negativ bewerten?
b) Erstellen Sie Kriterien für eine „gute Lösung" dieser Aufgabe. Was sollte alles erfüllt sein?
c) Entwerfen Sie ein Bewertungsschema, anhand dessen Sie abschließend nachvollziehbar die vier Schülerlösungen bewerten.

Übungsblatt 7 Einführung in die Mathematikdidaktik (Böcherer-Linder) 8. Januar 2021
Abgabe: Do, 14. Januar 2021

Abb. 2a

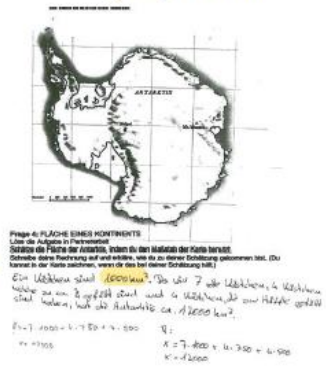


Abb. 2b

Abb. 3a

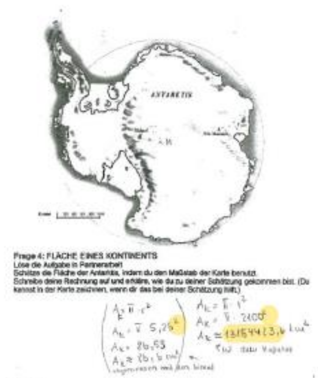


Abb. 3b

Weiteres Beispiel für ein Bewertungsschema, siehe [30]

1. Befolgen der Arbeitsanweisungen (max. 5 Punkte)
   - wurde geschätzt?
   - wurde der gegebene Maßstab verwendet?
   - wurde die Fläche geschätzt?
   - wurde der Rechenweg aufgeschrieben?
   - wurde der Lösungsweg erklärt?
2. Nachvollziehbarkeit (max. 6 Punkte)
   - Verständlichkeit
   - sprachliche Richtigkeit
3. Schlüssigkeit (max. 10 Punkte)
   - Eignung des Lösungskonzepts
   - Vollständigkeit
4. mathematische Richtigkeit (max. 3 Punkte)
   - Auswahl der zum Lösungsweg passenden Formeln
   - Wahl der richtigen Maßeinheit
   - „richtiges Rechnen“
5. Genauigkeit des Ergebnisses in bezug auf den Schätzvorgang (Runden) (max. 2 Punkte)
6. Einschätzung des Ergebnisses bezüglich der Größenordnung (max. 2 Punkte)

Dieses Bewertungsschema wurde vorab festgelegt. Um unerwartete Zugänge der Schülerinnen und Schüler zur Lö
wurde zusätzlich die Kategorie „besondere Leistungen“ eingeführt:

7. besondere Leistungen (max. 3 Punkte)

Kasten 1: Beispiel für ein Bewertungsschema

Literatur:

- [27] Riemer, W. (2010). Modellbildung mit linearen Funktionen. In: Mathematik lehren (136). Verfügbar unter ILIAS.
- [28] Blum, W. (2010). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht. Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: Praxis der Mathematik in der Schule (52), S. 42-48. Verfügbar unter ILIAS.
- [29] Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe 1*. Cornelsen, Berlin. Verfügbar in der Bibliothek der Mathematikdidaktik.
- [30] Perlich, A. (2006). Offene Aufgaben bewerten. In: Praxis der Mathematik in der Schule (10), S. 27-30. Verfügbar unter ILIAS.
- [31] Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der Tanken-Aufgabe. In: Mathematik lehren (128). S. 18-21. Verfügbar unter ILIAS
- [32] Lambert, A. (2006). Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit produktiven Aufgaben. Preprint Nr. 174, Universität des Saarlandes.