LA Blatt 8

Lorenz Bung (lorenz.bung@students.uni-freiburg.de)
(5113060)

Tobias Remde (tobias.remde@gmx.de)
(5100067)

Aufgabe 1

Zu zeigen: Die Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ sind eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

Bew.: Es reicht zu zeigen, dass $\{v_1, \dots, v_4\}$ lin. unabh. sind, da 4 lin. unabh. Vektoren im $\mathbb{R}^4$ immer eine Basis bilden.

Wir erhalten also folgendes LGS, welches wir durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{V_{2,1}/V_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_2(-1),\ M_3(-1),\ A_{4,1}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{4,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{4,3}(7)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\{v_1, \dots, v_4\}$ sind also lin. unabh. und damit eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^4$.

$\blacksquare$

Aufgabe 1 gehört noch zu (1a)

a)

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ -8 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Nach Vor. 2.61. ist eine $n \times n$-Matrix A genau dann regulär, wenn ihr Rang n ist.

Rang n in einer $n \times n$-Matrix bedeutet jedoch, dass alle Spaltenvektoren $\{a_1, \dots, a_n\}$ der Matrix A lin. unabh. sein müssen.

Damit ist A die Übergangsmatrix von der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ zur Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$, denn

$$A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} = a_i .$$

$\blacksquare$

Aufgabe 4 (a)

z.z.: $\langle A\cdot e_i, e_j' \rangle = a_{ji}$.

Bew.:

$$\langle A\cdot e_i, e_j' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-te Zeile} \right\rangle$$

$$= \left\langle \underbrace{a_i}_{\text{ite Spalte von } A}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-te Zeile} \right\rangle = 0\cdot a_{1i} + 0\cdot a_{2i} + \ldots + 1\cdot a_{ji} + \ldots + 0\cdot a_{mi}$$

$$= a_{ji}.$$

$\blacksquare$

(c) **z.z.:** $(A\cdot B)^T = B^T A^T$

Bew.: Seien $A \in M_{l\times m}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Dann ist

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

und insbesondere $(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Wir wissen $(AB)_{ij}^T = (AB)_{ji}$:

$$(AB)_{ij}^T = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}^T A_{kj}^T = (B^T A^T)_{ij}.$$

$\blacksquare$

Aufgabe 3

a) Behauptung

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist Basis von K^n.

Beweis

1.) B ist Erzeugendessystem von K^n.
2.) B ist linear unabhänig.

1) $$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$
$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$$

$$\Rightarrow B = \{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow K^n = \operatorname{span}(B)$$

B ist also Erzeugendessystem von K^n.

2.) Es bleibt nur noch zu zeigen, dass
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhänig ist.
B ist linear unabhänig, wenn gilt

$det(A) \neq 0$ ist.

Da $K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ geben ist, ist die Determinante
von A $det(A) \neq 0$ und somit ist auch
die Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear Unabhänig

Somit ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von K^n. $\square$

c)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = a_{11} D(A_{11}) - a_{12} D(A_{12}) + a_{13} D(A_{13}) \pm \cdots \pm a_{1n} D(A_{1n})$$

$$= a_{11} D \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12} D \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$a_{13} D \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \cdots \pm$$

$$a_{1n} D \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{pmatrix}$$

Somit kann man für jede n-dimensonalen Determinantenfunktion D den Wert $D(A)$ berrechnen.