Analysis I Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 20/21

Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (2.5+2.5)**.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

(i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades von f um $x_0 = \pi$.

(ii) Finden Sie ein $A \in \mathbb{R}$, so dass für alle x mit $|x - \pi| \leq 1$

$$|f(x) - T_2(x)| \leq A$$

gilt.

Aufgabe 38. Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

gilt. Hierbei ist $\binom{s}{k} := \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1}$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\binom{s}{0} := 0$.[1]

Hinweis: Es reicht nicht, nur die Taylorreihe auszurechnen, sondern man muss die Konvergenz zur entwickelten Funktion zeigen.

Aufgabe 39 (1+2.5+1.5)**.** Es seien $a, b, \omega \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und es gelte

$$f(x) + \omega^2 f''(x) = 0, \quad f(0) = a, f'(0) = \omega b. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

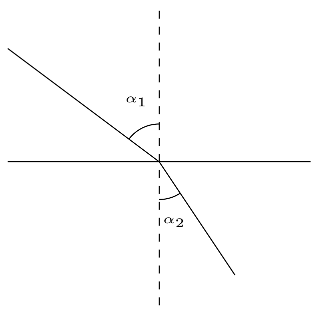
(ii) Sei nun $a = b = 0$. Sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $M > 0$ und ein $A > 0$ mit $|f(x)| \leq M$, $|f'(x)| \leq M$ und $|f^{(n)}(x)| \leq (2A)^n M$ für $n \geq 2$ und für alle $x \in [-T, T]$ gibt. Folgern Sie daraus, dass f gleich seiner Taylorentwicklung um $x = 0$ ist und somit $f(x) = 0$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ es genau ein so ein f gibt, welches (1) erfüllt.

Hinweis: Um zu zeigen, dass es nicht mehr als eine Lösung gibt, benutzen Sie (ii). Um eine Lösung zu finden, machen Sie den Ansatz: $f(x) = c_1 \sin(c_2 x) + c_3 \cos(c_4 x)$.

Aufgabe 40.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$. Für alle Punkte über der x-Achse sei die Lichtgeschwindigkeit c_1 und für alle Punkte unter der x-Achse sei die Lichtgeschwindigkeit c_2 (Bei konstanter Geschwindigkeit ist die benötigte Zeit gleich Weglänge durch Geschwindigkeit). Bestimmen Sie den Weg von $P_1 = (-1, 1)$ zum Punkt $(1, -1)$, für den das Licht die kürzeste Zeit braucht. Benutzen Sie dafür, dass so lange der Weg in einem Abschnitt mit konstanter Lichtgeschwindigkeit zurückgelegt wird, der Weg mit kürzester Zeit immer ein Geradenabschnitt ist. Was gilt dann für $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$?



[1] Für $s \in \mathbb{N}$ stimmt diese Definition mit unserer Standarddefinition von Binomialkoeffizienten überein.

Aufgabe* (1+1+1+1+1)**.** Wie können Taschenrechner eigentlich Sinuswerte ausrechnen? Sie haben in der Vorlesung bereits gelernt, dass

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1!}$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{2i!}$$

(i) Es scheint naheliegend zu sein, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch ihre abgeschnittenen Taylorreihen zu ersetzen, also durch

$$\sin_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1!}$$

$$\cos_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{2i!}$$

für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie in beiden Fällen, dass für alle n, die obigen für Annäherungen für große x sehr ungenau werden. Definieren Sie zunächst mathematisch präzise den Fehler der durch das „Abschneiden" der höheren Terme entsteht.

(ii) Zeigen Sie, dass für $n = 10$ der Fehler im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ beider Funktionen gering ist.

(iii) Der Trick ist nun, dass es ausreicht $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu kennen, um beliebige Sinus- und Kosinus-Werte zu berechnen. Wir definieren gleich die Funktion $\sin_T(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos_T(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Funktionen, die der Taschenrechner verwendet, um Sinus und Kosinus auszurechnen und für alle reellen Zahlen so genau sind wie $\sin_n(x)$ bzw. $\cos_n(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Zunächst definieren $\sin_T(x) = \sin_n(x)$ und $\cos_T(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Berechnen Sie $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ und $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ und setzten Sie $\sin_T(x)$ sowie $\cos_T(x)$ auf das Intervall $[0, \pi]$ fort, ohne an Genauigkeit einzubüßen.

(iv) Setzen Sie $\sin_T(x)$ sowie $\cos_T(x)$ auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ fort, ohne an Genauigkeit einzubüßen.

(v) Setzen Sie im letzten Schritt $\sin_T(x)$ sowie $\cos_T(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort, ohne an Genauigkeit einzubüßen.

Abgabe am Mittwoch 27.01.21 bis 14 Uhr