Lineare Algebra I, Blatt 0

Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060), Gruppe 4
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

3. November 2020

Aufgabe 1

Induktionsbehauptung (IB): $n! > 2^n, n \geq 4$.
Induktionsanfang (IA) $(n = 4)$: $n! = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24 > 16 = 2^4$.
Induktionsschritt (IS):

$$(n+1)! = (n+1) * n! \overset{\text{(IB)}}{>} (n+1) * 2^n \overset{n \geq 4}{>} 2^2 * 2^n = 2^{n+2} > 2^{n+1}.$$

$\square$

Aufgabe 2

Induktionsbehauptung (IB): $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, n > 0$.
Induktionsanfang (IA) $(n = 1)$: $\sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$.
Induktionsschritt (IS):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\overset{\text{(IB)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3

Zunächst wird gezeigt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{1}$$

Beweis zu 1

Induktionsbehauptung (IB): $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$

Induktionsanfang (IA) ($n = 0$): $\sum\limits_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1.$

Induktionsschritt (IS):

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \overset{\text{(IB)}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

$\square$

Beweis zu Aufgabe 3

Induktionsbehauptung (IB): $f(n) \leq 2^{2^n}$.
Induktionsanfang (IA) ($n = 0$): $f(0) = 2 \leq 2 = 2^1 = 2^{2^0}$.
Induktionsschritt (IS):

Nach dem Satz von Euklid existiert eine Primzahl $m := 1 + \prod\limits_{k=0}^{n} f(n)$.

Da nicht garantiert ist, dass dies die nächstgrößere Primzahl ist, gilt zwar keine Gleichheit, jedoch auf jeden Fall

$$f(n+1) \leq 1 + \prod_{k=0}^{n} f(n).$$

Aufgrund (IB) ist

$$f(n+1) \leq 1 + \prod_{k=0}^{n} f(n) \leq 1 + \prod_{k=0}^{n} 2^{2^n}$$

$$= 1 + (2^{2^0} * 2^{2^1} * \cdots * 2^{2^n}) = 1 + 2^{2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n} = 1 + 2^{\sum_{k=0}^{n} 2^k}$$

$$\overset{(1)}{=} 1 + 2^{2^{n+1} - 1} = \frac{2}{2} + \frac{2^{2^{n+1}}}{2} = \frac{2^{2^{n+1}+1}}{2} = 2^{2^{n+1}}.$$

$\square$

Aufgabe 4

(a) Ja, da keine der durch $(0,0)$ und $(0,1)$ gehenden Geraden auch durch $(1,0)$ geht.

(b) Nein, da gegenüberliegende Punkte auf dem Einheitskreis in der selben Äquivalenzklasse liegen. Beispiel: $[(0,1)]_E = [(0,-1)]_E$.