Übungsblatt 6

Aufgabe 21. Wir haben den Logarithmus $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ definiert. Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$ haben wir definiert: $a^z = \exp(z \cdot \ln a)$.

Rechnen Sie nach, dass für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r a^s = a^{r+s}, \quad a^r b^r = (ab)^r$$

Aufgabe 22 (3+2)**.** (a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R_a und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R_b. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ für alle x mit $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ absolut konvergiert und dass $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0} a_n x^n + \sum_{n=0} b_n x^n$ gilt.

(b) Der *Kosinus hyperbolicus* ist definiert als

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

und der *Sinus hyperbolicus* als

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Berechnen Sie die Potenzreihe zu $\cosh x$ und $\sinh x$.

Aufgabe 23 (2.5+2.5)**.** Zeigen Sie, jeweils unter Verwendung der Definition der Folgenstetigkeit bzw. der Stetigkeit (also nicht unter Verwendung der Aussage, dass folgenstetig und stetig eigentlich dasselbe sind), dass die folgenden Funktionen folgenstetig und stetig sind.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5(x-3)^2 - 1$

(ii) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

Aufgabe 24 (1.5+3.5)**.** Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$2 \sin x \cos x = \sin(2x) \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie (1) mit Hilfe der Eulerformel.

(ii) Zeigen Sie (1) mit Hilfe des Cauchyprodukts für Reihen.

Hinweis: Bei der Multiplikation der Reihen werden Sie zwischendurch eine endliche Summe von gewissen Binomialkoeffizienten erhalten. Um diese Summe zu bestimmen, nutzen Sie $2^{2k+1} = (1+1)^{2k+1} + (1-1)^{2k+1}$ zusammen mit dem binomischen Satz.

Abgabe am Mittwoch 16.12.20 bis 14 Uhr – bitte nicht vor Dienstag 9 Uhr abgeben