Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 11: Begründen und Beweisen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

5. Februar 2021

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

UNI FREIBURG

Welche Meinung oder Erfahrung haben Sie zum Thema „Beweisen in der Schule“?

Bildungsplan 2016:

2. Prozessbezogene Kompetenzen

2.1 Argumentieren und Beweisen

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Fragestellungen, äußern begründet Vermutungen und entwickeln und überprüfen mathematische Argumentationen. Sie beschreiben und begründen Lösungswege. Dabei nutzen sie einfache Plausibilitätsbetrachtungen, inhaltlich-anschauliche Begründungen und Beweise.

mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln

Was ist ein Beweis?

drei grundlegende Eigenschaften: 1) Ein mathematischer Beweis ist der Nachweis der Richtigkeit eines mathematischen Satzes, wobei die Tätigkeit des Beweisens zentralen Stellenwert besitzt, denn neu gefundene Aussagen werden von anderen Wissenschaftlern erst akzeptiert, wenn ein entsprechender Beweis gefunden wurde. 2) Bei einem mathematischen Beweis sind die Mittel, die benutzt werden können, genau eingegrenzt (logische Schlussweise, Axiome, bereits bewiesene Sätze). 3) Im mathematischen Beweis erfolgt die Begründung deduktiv, d. h. ein Beweis besteht aus einer endlichen Folge von Aussagen, wobei jede dieser Aussagen aus einem Axiom, einem bereits bewiesenen Satz oder einer der vorangehenden Aussagen gefolgert wird.

Man wird sich wohl damit zufrieden geben müssen, dass der Begriff „Beweis“ nur umrissen werden kann und es eine einheitlich anerkannte Definition nicht gibt.

Aus Gerwig (2015): Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Springer.

Zur Funktion von Beweisen:

Beweise haben mehrere Funktionen.

- Beweise, die überzeugen („Stimmt das wirklich ? - Ja, jetzt weiß ich, dass es so ist bzw. so sein muss“) sind erkenntnissichernd.
- Beweise, die erklären bzw. Zusammenhänge herstellen („Warum ist das so? - Ja, jetzt weiß ich, warum das so ist bzw. womit das zusammenhängt“) sind erkenntnisbildend.

Nicht jeder Beweis, der überzeugt, erklärt auch:

Kevin Buzzard (im Mathematischen Kolloquium, April 2019) über einen bestimmten Beweis:
„This proof gives us absolutely no understanding of why the theorem is true“

Unterscheidung der Didaktiker:
Proofs that demonstrate ←→ proofs that explain

Bsp.:

Überzeugen:

Beispiel 2.1 (arithmetische Summe) Wir zeigen die Summenformel

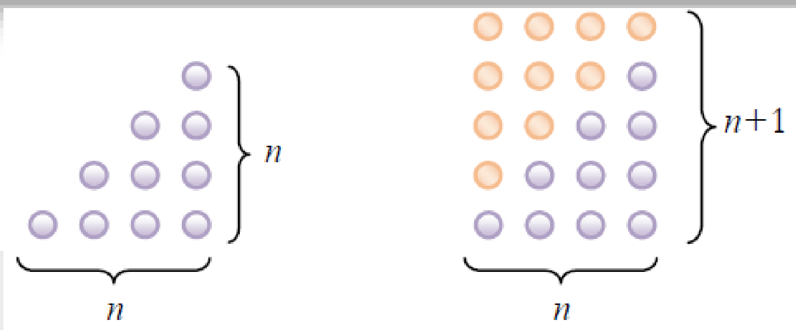
$$A(n): \quad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

BEWEIS: *Induktionsanfang.* Für $n = 1$ ist sowohl die linke als auch die rechte Seite gleich Eins, also gilt der Induktionsanfang.
Induktionsschluß ($n \Rightarrow n+1$). Jetzt berechnen wir unter Verwendung von $A(n)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Damit ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. $\square$

Erklären:



Zur Problematik des „Beweisens“ im Unterricht (siehe auch [33]):

Einerseits…

- … gilt Mathematik als beweisende Disziplin,
- … soll das „Warum“ die wichtigste Frage des Mathematikunterrichtes sein,
- … gilt Argumentieren und Beweisen als wichtige, außermathematische Tätigkeit,

Andererseits…

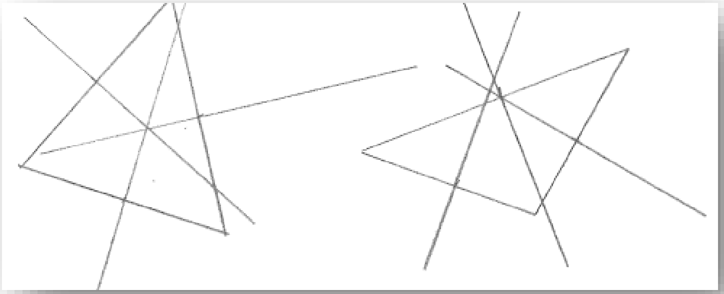
- … spielen Beweise im Schulunterricht eine untergeordnete Rolle.
- … verspüren Lernende oft von sich aus kein Beweisbedürfnis.
- … ist formal-deduktives Schließen sehr spezifisch für Mathematik.

Ausweg: Begründungsbedürfnis wecken und dem Begründen im Unterricht mehr Raum geben. Dabei nicht nur formales Beweisen, sondern auch andere Begründungsformen kultivieren.

Beweisbedürfnis wecken:
Bsp.: Mittelsenkrechten im Dreieck

Erkundung: Mittelsenkrechten im Dreieck

Auf Papier:



Lehrer: „Jetzt müssen wir aber noch beweisen, dass die sich wirklich immer alle schneiden, denn die Zeichnungen sind zu ungenau, um es sicher zu wissen“

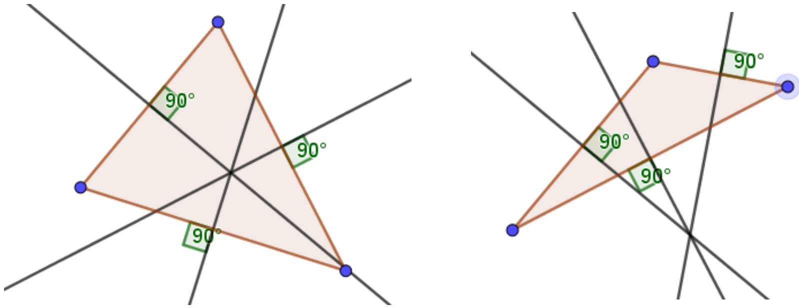
- ➢ Überzeugungsfunktion des Beweises
- ➢ Sehr unbefriedigend
  - Arbeit/Mühe der Schüler abgewertet (zu ungenau)
  - Entweder entsteht der Eindruck „Irgendetwas gilt allgemein, aber in meinem Dreieck nicht“
  - oder der Eindruck „ich hab das doch schon in den Zeichnungen gesehen, dass es so ist, wozu sollte man das dann noch beweisen“

Beweisbedürfnis wecken:
Bsp.: Mittelsenkrechten im Dreieck

Erkundung auf Papier

Lehrer: „Probieren wir doch mal aus, ob die Vermutung noch zutrifft, wenn wir mit dem Computer zeichnen“

Erkundung mit Geogebra:



Lehrer: „Erstaunlich, die Mittelsenkrechten schneiden sich alle in einem Punkt“

- Woran liegt das?
- Womit hängt das zusammen?
- Wie können wir uns das erklären?
- Ist das immer so?
- Gibt es Dreiecke, wo das nicht so ist?
- Was wäre, wenn das nicht so ist?

Beweisbedürfnis wecken

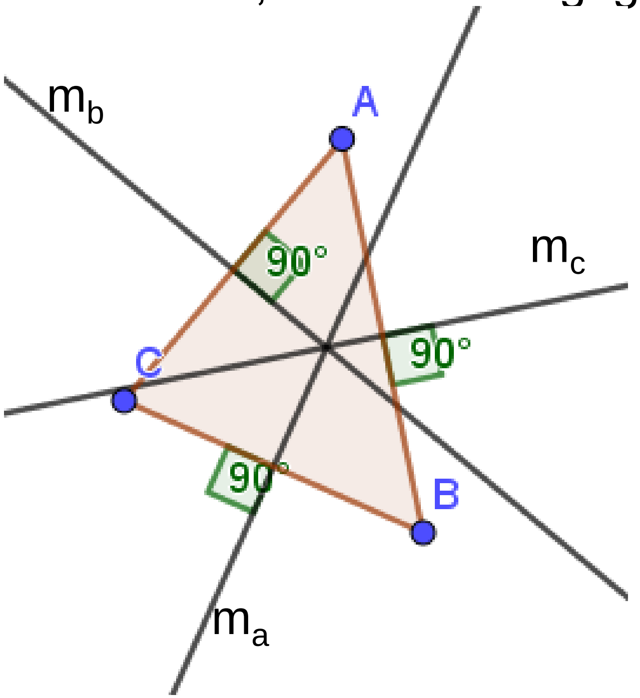
- Erklärfunktion des Beweisens

„Wir schauen uns jetzt an, welche mathematischen Gründe es gibt, wieso das immer so sein muss. Wir beweisen unsere Vermutung.“

Beweisbedürfnis wecken:
Bsp.: Mittelsenkrechten im Dreieck

Zum Beweis:

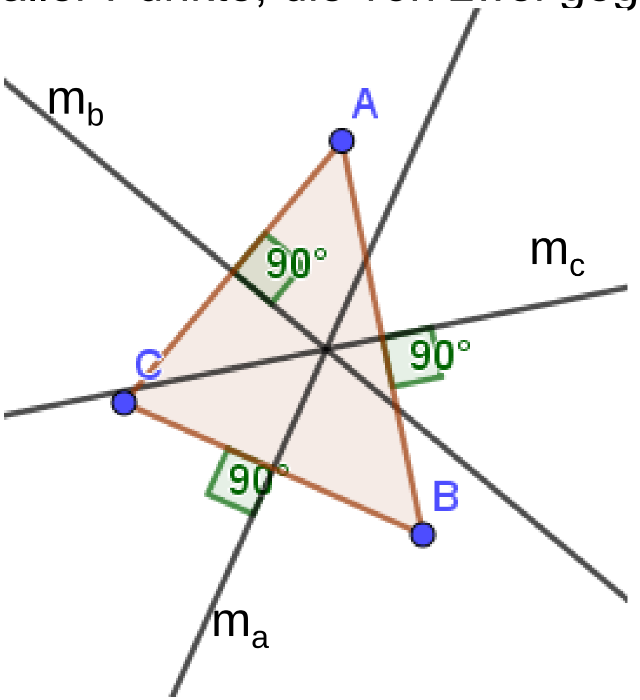
Vorkenntnisse nötig: Die Schülerinnen und Schüler haben Vorkenntnisse zu Mittelsenkrechten. (siehe z.B. VL_Entdeckendes Lernen, VL_Üben). Sie kennen die Konstruktion mit Zirkel und Lineal und die Definition „Eine Mittelsenkrechte ist die Menge aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten jeweils denselben Abstand haben".



Beweisbedürfnis wecken:
Bsp.: Mittelsenkrechten im Dreieck

Zum Beweis:

Vorkenntnisse nötig: Die Schülerinnen und Schüler haben Vorkenntnisse zu Mittelsenkrechten. (siehe z.B. VL_Entdeckendes Lernen, VL_Üben). Sie kennen die Konstruktion mit Zirkel und Lineal und die Definition „Eine Mittelsenkrechte ist die Menge aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten jeweils denselben Abstand haben".



Auf m_b liegen alle Punkte, die von A und C gleichen Abstand haben.
Auf m_a liegen alle Punkte, die von C und B gleichen Abstand haben.

Also hat der Schnittpunkt von m_b und m_a den gleichen Abstand von allen drei Punkten A, B und C. Also liegt dieser Schnittpunkt auch auf m_c . Also schneiden sich alle Mittelsenkrechten in einem Punkt.

Schülerinnen und Schüler erleben, wie ihr zuvor erlerntes Wissen hier erkenntnisbildend wirkt.

Heinrich Winter 1983: „Zur Problematik des Beweisbedürfnisses“ [34]

- fehlendes Beweisbedürfnis von Lernenden nicht abbauen durch Einreden, dass man sich von der Aussage eines Satzes erst überzeugen muss, wenn sie schon überzeugt sind
- nicht „demonstrierende Beweise“ vorführen unter dem Deckmantel des Überzeugens
- statt dessen: Standpunkt der Mathematiker/innen ausweisen: auch bei offensichtlichen Sätzen ist Beweis interessant für:
  - Wovon hängt das ab?
  - Aus welchen Sätzen / Axiomen lässt sich der Satz herleiten?
  - Welche Erklärung gibt es für die Allgemeingültigkeit?
- Für solche Fragen kann man Jugendliche durchaus gewinnen

Heinrich Winter 1983: „Zur Problematik des Beweisbedürfnisses“ [34]

anstehenden Frage Stellung nehmen: "Die Schüler sollen die Notwendigkeit eines Beweises sehen; deshalb ist beim Beweis von Sachverhalten, die für die Schüler unmittelbar einsichtig sind, Zurückhaltung geboten, zumal wenn es sich um technische und wenig übersichtliche Beweise handelt. Es ist weit fruchtbringender, solche Sätze zu beweisen, bei denen der Beweis zum Verständnis des bewiesenen Sachverhaltes beiträgt". [4)]

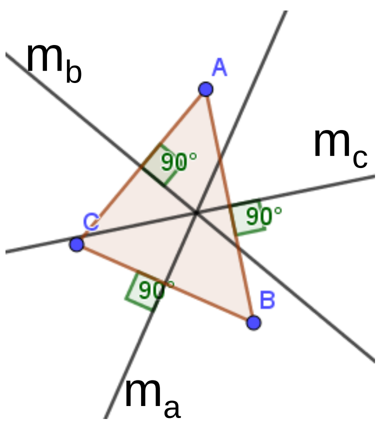
Warum „Beweisen“ in der Schule?

Schülerinnen und Schüler lernen

- logisches Schließen und Argumentieren
- Behauptungen auf Voraussetzungen zurückzuführen
- nach Ursachen und Zusammenhängen zu fragen
- die Kraft des menschlichen Denkens kennen, z.B. beim Beweis des Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt
- dass es unumstößliche Wahrheiten gibt

Unterstützungsmöglichkeiten beim Beweisen:

Ausweg 1: Differenzierung:
- Hilfskarten
- …



Hilfskarte 1:
Führe Bezeich
ein für die Ecke
Dreieck, für die
Mittelsenkrech
für den Schnitt
der Mittelsenkr

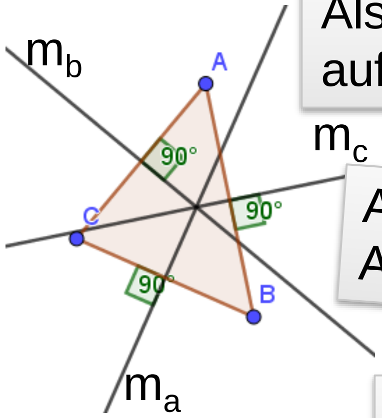
Hilfskarte 2:
Schaue die genaue
Definition der
Mittelsenkrechten nac
Kannst Du damit auch
die Mittelsenkrechten i
Dreieck beschreiben?

Hilfskarte 3:
Zeige zunächst, dass der Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten von allen drei Eckpunkten des Dreiecks denselben Abstand hat. Kannst Du daraus etwas ableiten?

Unterstützungsmöglichkeiten beim Beweisen:

Ausweg 1: Differenzierung:
- Hilfskarten
- Beweis-Puzzle
- …

Bringe die Argumente in die richtige Reihenfolge, so dass ein schlüssiger Beweis entsteht:



Also liegt dieser Schnittpunkt auch auf m_c .

Also hat der Schnittpunkt von m_b und m_a den gleichen Abstand von allen drei Punkten A, B und C.

Auf m_b liegen alle Punkte, die von A und C gleichen Abstand haben.

Auf m_a liegen alle Punkte, die von C und B gleichen Abstand haben.

Also schneiden sich alle Mittelsenkrechten in einem Punkt.

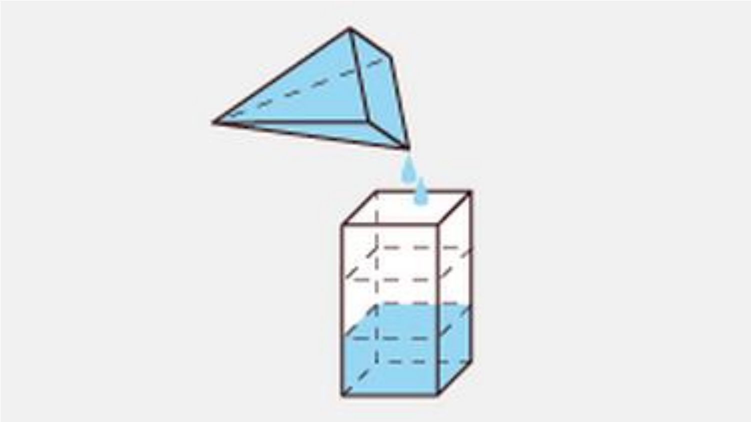
Unterstützungsmöglichkeiten beim Beweisen:

Ausweg 1: Differenzierung:
- Hilfskarten
- Beweis-Puzzle
- …

Ausweg 2: Verschiedene **Begründungsformen** kultivieren:
(1) (Plausibilitätsbetrachtungen)
(2) Verbal-situative Begründung
(3) Generische Beispiele
(4) Ikonische Beweise
(5) Symbolisch-formale Beweise

Plausibilitätsbetrachtungen

Durch einen Umschüttversuch kann ich demonstrieren, dass das Pyramidenvolumen gleich einem Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche ist (ABER nicht zeigen, **warum** das so ist)



Ein spezielles Beispiel ist auch eine Plausibilitätsbetrachtung: z.B. ist die Summe der drei Zahlen 7+8+9 durch drei teilbar (ABER dadurch habe ich noch nicht gezeigt, **warum** die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen **immer** durch drei teilbar ist.

Verbal-situative Begründungen

Zeige, dass die Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar ist:

Kontextbeweis/ Situationsbeweis: Hier wird eine anschauliche Situation herangezogen, in der der Zusammenhang plausibel wird.	Drei Brüder sind jeweils ein Jahr auseinander geboren und feiern zusammen Geburtstag. Steckt man eine Kerze vom Kuchen des ältesten auf den Kuchen des jüngsten, sind die Kerzen auf die drei Kuchen gleich verteilt.

Begründung durch generisches Beispiel:

Vermutung:

Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

$7+8+9 = 7+7+1+7+2 = 7+7+7+1+2 = 3\cdot 7 + 3 = 3\cdot (7+1) = 3\cdot 8$

An diesem Beispiel ist bereits die Allgemeingültigkeit der Argumentation zu erkennen. Deswegen wird es als generisch bezeichnet.

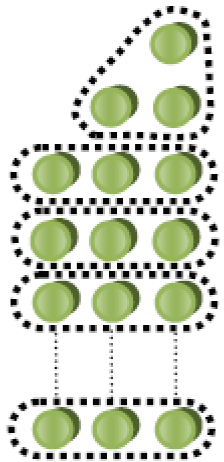
Aus generischen Beispielen lassen sich häufig formal-symbolische Beweise gewinnen:

$n+(n+1)+(n+2) = n+n+n+1+2= 3\cdot n+3 = 3\cdot(n+1)$

Ikonischer Beweis

Vermutung:

Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.



Wir weisen noch einmal darauf hin, dass die Präsentation eines suggestiven Musters als „Beweis ohne Worte" nicht ausreicht. Es muss schon durch einen *erklärenden* Text sichergestellt werden, dass die zur Begründung von Beziehungen angewandten Operationen wirklich allgemein ausführbar sind. (Wittmann und Ziegenbalg 2007, S. 42; Hervorhebung im Original).

Ikonischer Beweis: Mathematik als die „Kunst des Sehens“

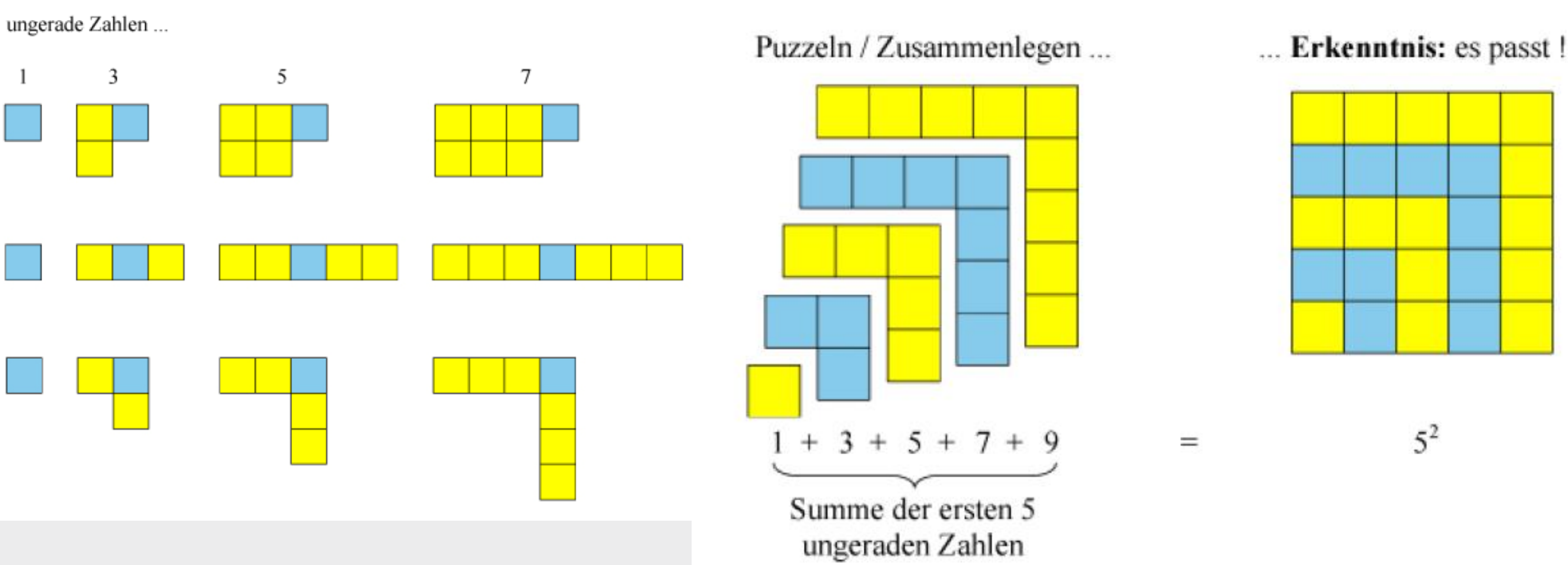
„Jede Quadratzahl ist die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen“

Wie kann ich das (ein-)sehen?

Ikonischer Beweis: Mathematik als die „Kunst des Sehens“

„Jede Quadratzahl ist die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen“

Wie kann ich das (ein-)sehen?



Symbolisch-formaler Beweis

Vermutung:

Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

Symbolischer Beweis: Hier werden mathematische Symbole verwendet, oft sind dies Variablen.	$n+(n+1)+(n+2) = 3\cdot n+3 = 3\cdot(n+1)$

Unterstützungsmöglichkeiten beim Beweisen:

Ausweg 1: Differenzierung:
- Hilfskarten
- Beweis-Puzzle
- …

Ausweg 2: Verschiedene **Begründungsformen** kultivieren:
(1) (Plausibilitätsbetrachtungen)
(2) Verbal-situative Begründung
(3) Generische Beispiele
(4) Ikonische Beweise
(5) Symbolisch-formale Beweise

Ausweg 3: Mathematikdidaktische Beweiskonzepte umsetzen

Didaktische Beweiskonzepte

Im Folgenden werden verschiedene didaktische Beweiskonzepte aus der Mathematikdidaktik vorgestellt. Diese wurden entwickelt, um den Lernenden einen Zugang zum mathematischen Begründen und Beweisen zu öffnen.

- Beweisstufen nach Benchara Branford
- Paradigmatische Beispiele nach Hans Freudenthal
- Präformale Beweise nach Arnold Kirsch und Werner Blum

Siehe auch [35]

Die Stufen des Beweisverfahrens nach Benchara Branford (1913)

Das Grundanliegen Branfords besteht darin, im schulischen Mathematikunterricht zwischen den Methoden der „rein experimentellen Richtung“ und denen der „alten Euklidischen Schule“ zu vermitteln (Branford 1913, S. 99). Mit dieser Zielsetzung werden im Kontext der Geometrie drei Stufen des Beweisverfahrens angeführt, mit dem die „in Rede stehende Wahrheit und die wachsende Erkenntnis derselben dem Schüler am besten übermittelt werden kann“ (ebd., S. 100).

Drei Stufen:

(1) Stufe der experimentellen Ableitung

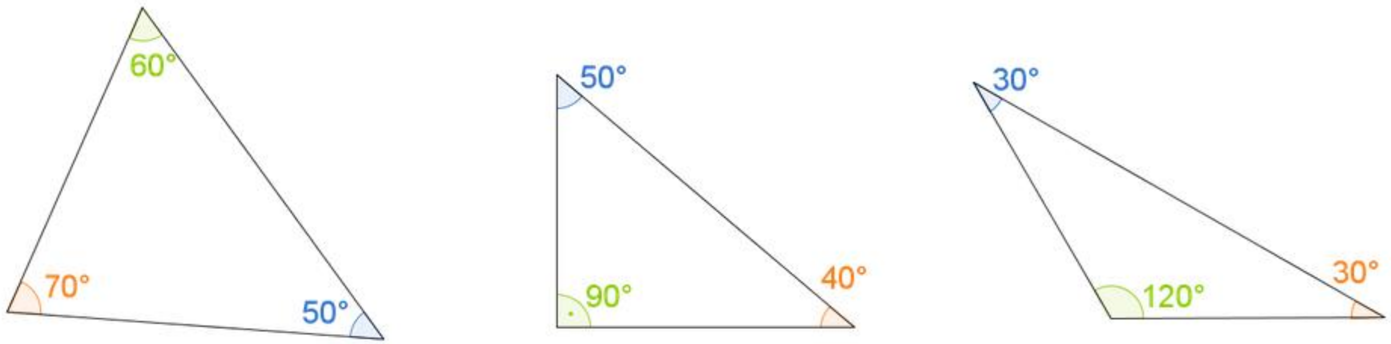
(2) Stufe der intuitiven Ableitung

(3) Der wissenschaftliche Beweis

Im Folgenden gezeigt am Beispiel „Winkelsumme“

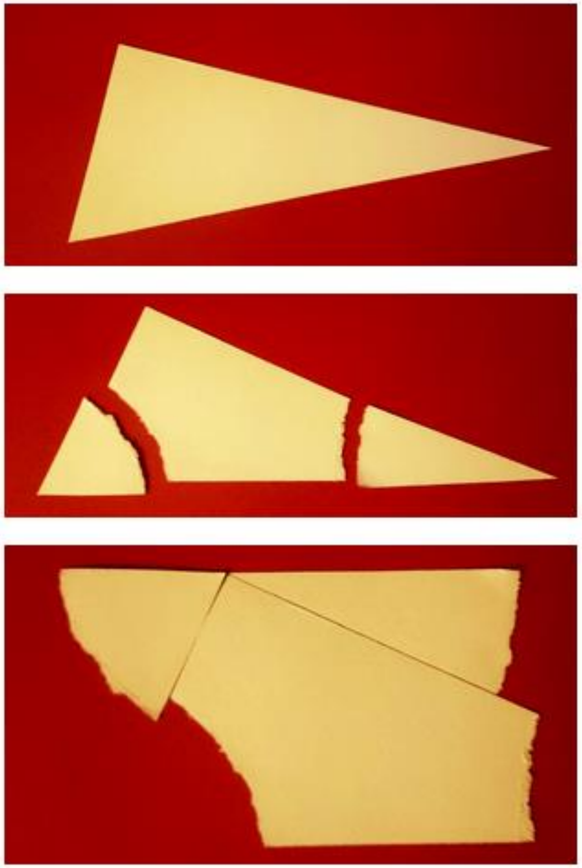
(1) Die Stufe der experimentellen Ableitung. Auf der Stufe der experimentellen Ableitung sollen die Lernenden mit dem Wissensmaterial (Gegenstände, Begriffe etc.) vertraut gemacht werden. Durch die Überprüfung konkreter Fälle kann eine Anregung zur allgemeinen Wahrheit geschehen. Somit entsteht eine erste (experimentelle) Evidenz durch konkrete Sinneswahrnehmung. Branford führt als Beispiel

- Beispiel: Schülerinnen und Schüler messen für verschiedene Dreiecke die Innenwinkelsumme.

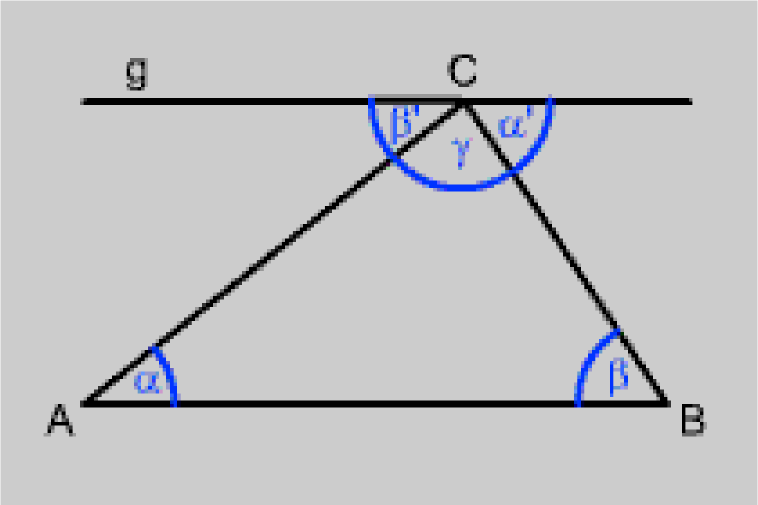


(2) Die Stufe der intuitiven Ableitung. Hier werden „allgemeine und streng gültige Wahrheiten“ aufgestellt, wobei sich aber, falls nötig, auf „Postulate der sinnlichen Erfahrung“ berufen wird (ebd., S. 103). Durch die Vereinigung von Sinneswahrnehmung und begrifflichem Denken wird die Wahrheit auf eine unabhängige eigene Basis gestellt. Mithilfe der Evidenz durch Anschauung können universelle Wahrheiten aufgestellt und Anregungen für den wissenschaftlichen Beweis gegeben werden.

Durch das Abreißen der Ecken bei einem Dreieck und Zusammenlegen der abgerissenen Ecken können wir die Winkelsumme von 180° plausibel machen.
Das Umlegen der Winkel der unteren Ecken kann eine Idee für den nachfolgenden Beweis mit Hilfe der Wechselwinkel gewonnen werden.



(3) Der wissenschaftliche Beweis. Auf der dritten Stufe werden keine Postulate der sinnlichen Wahrnehmung mehr verwendet. Die Axiome werden als vorauszusetzende Grundlage vorangestellt und nur das rein logische Schließen verwendet. Somit geschieht auch eine Systematisierung der bereits entdeckten gültigen Wahrheiten. Die Schüler sollen auf dieser Stufe daran gewöhnt werden, entsprechende Beweise selbst zu finden.



(3) Der wissenschaftliche Beweis. Auf der dritten Stufe werden keine Postulate der sinnlichen Wahrnehmung mehr verwendet. Die Axiome werden als vorauszusetzende Grundlage vorangestellt und nur das rein logische Schließen verwendet. Somit geschieht auch eine Systematisierung der bereits entdeckten gültigen Wahrheiten. Die Schüler sollen auf dieser Stufe daran gewöhnt werden, entsprechende Beweise selbst zu finden.

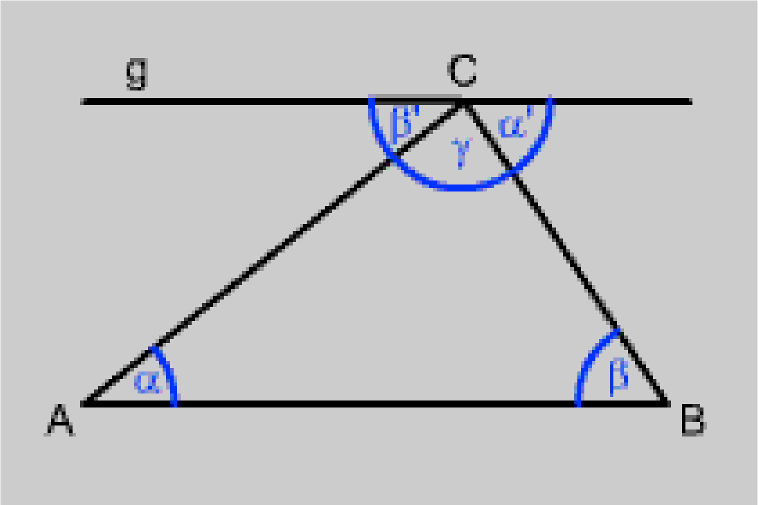
Beweis für die Winkelsumme im Dreick:

Vorwissen (Begründungsbasis): Wechselwinkel an Parallelen sind gleich groß. Der gestreckte Winkel hat eine Größe von 180°.

Sei g durch C parallel zu AB.
Dann gilt (nach dem Wechselwinkelsatz):

$$\alpha = \beta'$$
$$\beta = \alpha'$$

Da $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$ folgt, dass die Innenwinkelsumme ebenfalls 180° beträgt.



Verwandt mit der Theorie von Branford sind die heute in der Mathematikdidaktik verwendeten Exaktheitsstufen:

UNI FREIBURG

Wir unterscheiden beim Begründen im Mathematikunterricht drei Exaktheitsstufen:

1. Plausibilitätsbetrachtung (ist keine Begründung im engeren Sinne, liefert nur einen Hinweis, dass die Behauptung plausibel ist bzw. in einem speziellen Fall funktioniert)
2. Begründung (allgemeingültig oder verallgemeinerbar, kann auch anschaulich oder prä-formal sein)
3. Beweis (lässt sich auch mathematisch formal aufschreiben, die Voraussetzungen und eingehenden Definitionen können explizit gemacht werden)

Paradigmatische Beispiele nach Hans Freudenthal (1978):

Freudenthal (1978, S. 194 f.) geht von der Prämisse aus, dass bloße technische Übung anhand einer Vielzahl von ähnlichen Beispielen die Ursache vieler Misserfolge ist und geradezu das verstehende Lernen blockiert. Eine Möglichkeit der Hinwendung zu sinnstiftendem Unterricht sieht Freudenthal in Beispielen, die er als paradigmatisch bezeichnet: „Statt der Berieselung mit vielen Beispielen, besser das eine das zieht“ (ebd., S. 195).

Das paradigmatische Beispiel bei Freudenthal hat somit ursprünglich seinen Fokus auf dem einsichtigen Erlernen allgemeiner Regeln und nicht auf deren expliziter Formulierung und Begründung, weshalb wir hier auf eine Zusammenfassung hinsichtlich der vier Leitfragen verzichten. Die funktionale Ausrichtung auf Übertragbarkeit von Einsichten auf ‚isomorphe‘ Problemstellungen bildet aber eine theoretische Grundlage für spätere beispielgebundene Beweiskonzepte.

Beispielgebundenes Beweiskonzept:

Beispiel: Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispielgebundenes Beweiskonzept:

Beispiel: Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispielgebundene Begründung (siehe auch „generisches Beispiel"):

$$378 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8$$

$$= 3 \cdot 99 + \color{red}{3} + 7 \cdot 9 + \color{red}{7} + \color{red}{8}$$

$$= \underbrace{3 \cdot 99 + 7 \cdot 9}_{\text{Durch 9 teilbar}} + \underbrace{\color{red}{3 + 7 + 8}}_{\text{Quersumme}}$$

Präformale Beweise nach Arnold Kirsch und Werner Blum:

Es ist eigentlich auch klar, dass sich das Thema „anschauliches Beweisen“ in der Analysis (in der Oberstufe) anders stellt, als bei der elementaren Geometrie und Arithmetik (in der Primarstufe), mit denen sich Wittmann und Müller und Branford vorwiegend beschäftigen. Die Diskussion um Anschaulichkeit und Strenge hat in der Analysis eine lange Tradition (vgl. Kirsch 1996). Auch in der Geschichte der Analysis haben sich zunächst anschaulich geführte Beweise zum Teil später als nicht direkt formalisierbar erwiesen; es wurden neue Voraussetzungen formuliert, unter denen eine Aussage gilt, oder anschauliche Aussagen neu präzisiert. So bedarf es tiefen didaktischen und fachlichen Nachdenkens darüber, was z. B. als ein anschaulicher Beweis des Hauptsatzes der Differentialrechnung auf Schulniveau gelten kann (vgl. Kirsch 1996, 2014).

Präformale Beweise nach Arnold Kirsch und Werner Blum:

z.B.: Vorgehen bei der Einführung des Limes des Differenzenquotienten ist hier noch beispielgebunden, aber im Prinzip formalisierbar:

- **Lokale Änderungsrate** (Momentangeschwindigkeit)
  - Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate) zu einem Zeitpunkt $t_0 = 1\text{s}$?
  - **Idee**
    Mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen betrachten, die $t_0 = 1\text{s}$ als Intervallgrenze besitzen.

Zeitintervall $[t_0, t]$	Mittlere Geschw. $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ im Zeitintervall $[t_0, t]$	Zeitintervall $[t, t_0]$	Mittlere Geschw. $\frac{x(t_0)-x(t)}{t_0-t}$ im Zeitintervall $[t, t_0]$
$[1\text{ s}; 2\text{ s}]$	$\frac{2^2\text{ m} - 1^2\text{ m}}{2\text{ s} - 1\text{ s}} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[0\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{1^2\text{ m} - 0^2\text{ m}}{1\text{ s} - 0\text{ s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1\text{ s}; 1{,}1\text{ s}]$	$\frac{1{,}1^2\text{ m} - 1^2\text{ m}}{1{,}1\text{ s} - 1\text{ s}} = 2{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[0{,}9\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{1^2\text{ m} - 0{,}9^2\text{ m}}{1\text{ s} - 0{,}9\text{ s}} = 1{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1\text{ s}; 1{,}01\text{ s}]$	$\frac{1{,}01^2\text{ m} - 1^2\text{ m}}{1{,}01\text{ s} - 1\text{ s}} = 2{,}01\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[0{,}99\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{1^2\text{ m} - 0{,}99^2\text{ m}}{1\text{ s} - 0{,}99\text{ s}} = 1{,}99\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[1\text{ s}; 1{,}001\text{ s}]$	$\frac{1{,}001^2\text{ m} - 1^2\text{ m}}{1{,}001\text{ s} - 1\text{ s}} = 2{,}001\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[0{,}999\text{ s}; 1\text{ s}]$	$\frac{1^2\text{ m} - 0{,}999^2\text{ m}}{1\text{ s} - 0{,}999\text{ s}} = 1{,}999\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Unterstützungsmöglichkeiten beim Beweisen:

Ausweg 1: Differenzierung:
- Hilfskarten
- Beweis-Puzzle
- …

Ausweg 2: Verschiedene **Begründungsformen** kultivieren:
(1) (Plausibilitätsbetrachtungen)
(2) Verbal-situative Begründung
(3) Generische Beispiele
(4) Ikonische Beweise
(5) Symbolisch-formale Beweise

Ausweg 3: Mathematikdidaktische Beweiskonzepte umsetzen

Wichtig ist, eine Kultur des Begründens zu pflegen!

Kultur des Begründens

Egal, welchen Weg Sie wählen: Wichtig für den Mathematikunterricht ist es, eine Kultur des Begründens zu pflegen:

- Warum ist das so?
- Womit hängt das zusammen?
- Was wäre, wenn es nicht so wäre?
- Kann man es auch noch anders erklären?
- Unter welchen Bedingungen gilt es?
- Ist es immer so? …

Solche Fragen gehören in jeden Mathematikunterricht!!

Literatur:

- [33] Meyer, M. & Prediger, S. (2009). *Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen*. Praxis der Mathematik (30), S. 1-7. Verfügbar unter ILIAS.

- [34] Winter, H. (1983). *Zur Problematik des Beweisbedürfnisses*. JMD (1), S. 59 - 95.Verfügbar unter ILIAS.

- [35] Biehler, R. & Kempen, L. (2016). *Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung*. JMD (37). S. 141-179.