Analysis I — Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 20/21

Übungsblatt +

Mit dem Blatt können Sie Integrationsmethoden üben. Es ist **nicht zur regulären Abgabe** gedacht. Falls Sie noch **nicht** 50% der möglichen Punkte erreicht haben (= 110), haben Sie hiermit noch eine Möglichkeit das eventuell zu ändern. Dann können Sie die Lösungen zu den folgenden Integralen (mit Integrationsweg) abgeben (pro Integral 2 Punkte). Fragen Sie im Zweifel Ihren Tutor, ob das für Sie in Frage kommt.

1. $\int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\cos x}_{g} dx = -\cos x \cos x - \int (-\cos x) \sin x \, dx$ (siehe auch Rückseite)

   $\int \sin x \cos \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x$

2. $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\cos(4x)}_{g'} dx = x \frac{1}{4} \sin(4x) - \int \frac{1}{4} \sin(4x) dx = \frac{x}{4} \sin(4x) + \frac{1}{16} \cos(4x)$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int f(g(x)) g'(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{25-x^2} = -\sqrt{25-x^2}$

   Substitution: $g(x) = 25 - x^2$, $g'(x) = -2x$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

4. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = \int \left(-1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\right) dx$

   $= -x + \frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x|$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = 2 \arctan(y) = 2 \arctan \sqrt{x}$

   Substitution: $y(x) = \sqrt{x}$, $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-y^2}{y^2} dy = -\frac{1}{y} - y = -\frac{1}{\sin x} - \sin x$

   Substitution: $y(x) = \sin x$, $y'(x) = \cos x$ $(\cos^2 x = 1 - y^2)$

7. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = \int \frac{y-1}{y+1} \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{y+1} \cdot \frac{1}{y}\right) dy = \int \left(\frac{1}{y} - 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)\right) dy$

   Substitution: $y(x) = e^x$ $\quad = -\ln|y| + 2 \ln|y+1| = -x + 2 \ln(e^x + 1)$

8. $\int \cos(\ln x) dx = \int e^y \cos y \, dy \underset{\text{s.u.}}{=} \frac{1}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \cdot x$

   Subst: $y(x) = \ln x$

9. $\int (\ln x)^2 dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{g} dx = x(\ln x)^2 - \int x \, 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x)^2 - 2 \int 1 \cdot \ln x \, dx$

   $= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$

10. $\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$

    Rückseite $\quad = \ln|x^2+1| + \arctan x - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$

Abgabe am Mittwoch 11.02.21 bis 14 Uhr

zu 8: $\int \underbrace{\cos y}_{f} \underbrace{e^y}_{g'} dy = \cos y \, e^y - \int (-\sin y) e^y dy$

$= \cos y \, e^y + \sin y \, e^y - \int \cos y \, e^y dy$

$\int \cos y \, e^y dy = \frac{1}{2} (\cos y + \sin y) e^y$

Alternative zu 1) $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)$

Vergleich: $-\frac{1}{4}\cos(2x) = -\frac{1}{4}\left[\cos^2 x - \sin^2 x\right]$

$= -\frac{1}{4}\left[2\cos^2 x - 1\right]$

$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}$

(bis auf Konstante gleich $-\frac{1}{2}\cos^2 x$)

---

zu 10: Partialbruchzerlegung

Ansatz:

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

$$4-2x = (ax+b)(x-1)^2 + c(x^2+1)(x-1) + d(x^2+1)$$

$$= ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + cx^3 + cx - cx^2 - c + dx^2 + d$$

Koeff.vergleich: "x^3": $0 = a + c \quad \Rightarrow \quad c = -a$

"x^2": $0 = -2a + b - c + d = -a + b + d \quad (1)$

"x^1": $-2 = a - 2b + c \quad \Rightarrow \quad -2 = -2b$, also $b = 1$

"x^0": $4 = b - c + d = a + b + d \quad (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c = -2$ und $d = 1$