Analysis I, Blatt 1

Gruppe 11
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Charlotte Rothhaar (Matr.-Nr. 4315016)
charlotte.rothhaar97@gmail.com

11. November 2020

Aufgabe 1

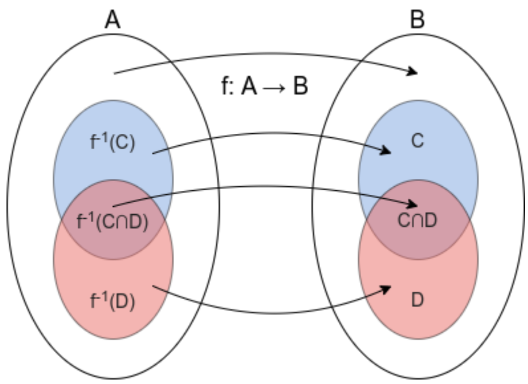
(i) $f^{-1}(C \cap D) = \{x \in A | f(x) \in C \cap D\} = \{x \in A | f(x) \in C \wedge f(x) \in D\} \overset{C,D \subseteq B, f(x) \in B}{=} \{x \in A | f(x) \in C\} \cap \{x \in A | f(x) \in D\} = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(ii) Sei $E := (-\infty; 0]$ und $F := [0; \infty)$, sowie $f : x \mapsto x^2$. Dann ist

$$f(E \cap F) = f(\{0\}) = \{0\}$$

aber

$$f(E) \cap f(F) = f((-\infty; 0]) \cap f([0; \infty)) = [0; \infty).$$



(iii) (a) Angenommen, f ist injektiv und es gibt Teilmengen $E, F \subset B$ mit $f(E \cap F) \subsetneq f(E) \cap f(F)$. Dann gäbe es ein $y \in f(E) \cap f(F)$ mit

$y \notin f(E \cap F)$. Somit: $\exists x_1 \in E, x_2 \in F : f(x_1) = f(x_2) = y$. Nach Injektivität darf jedoch jedes Element aus dem Bild von f nur ein Urbild haben, weswegen $x_1 = x_2$. Widerspruch! $\Rightarrow$ Gleichheit.

(b)

Aufgabe 2

(i)
- *injektiv*: Ja, da keine zwei natürlichen Zahlen denselben Nachfolger haben (folgt direkt aus dem 4. Peanoaxiom). Daher muss ν injektiv sein.
- *surjektiv*: Nein. Nach dem 1. Peanoaxiom ist $0 \in \mathbb{N}$. Das 3. Axiom besagt jedoch, dass $\nexists x \in \mathbb{N} : \nu(x) = 0$. Daher kann ν nicht surjektiv sein.
- *bijektiv*: ν kann nicht bijektiv sein, da die Surjektivität bereits nicht gegeben ist.

(ii) (a) Seien $a, b \in X, a \neq b$. Dann ist aufgrund der Injektivität von f $f(a) \neq f(b)$. Da auch g injektiv ist, folgt $g(f(a)) \neq g(f(b)) \Leftrightarrow (g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(b)$. Die Aussage ist also wahr, weil auch $g \circ f$ injektiv ist.

(b) Falsch. Gegenbeispiel: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f : x \mapsto x + 1$ und $g : \mathbb{N} \to \{1\}$ mit $g : x \mapsto 1$. f ist injektiv, da die Nachfolgerfunktion schon injektiv ist. g ist surjektiv, da auf jedes Element aus $\{1\}$ (nämlich nur die 1 selbst) abgebildet wird (z.B. ist $g(1) = 1$). $g \circ f$ kann jedoch nicht injektiv sein, da $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1 = g(3) = g(f(2)) = (g \circ f)(2)$.

(c) Sei $a \in Z$. Aufgrund der Surjektivität von g gilt: $\exists c \in Y : g(c) = a$. Da auch f surjektiv ist, folgt $\exists b \in X : f(b) = c$. Somit ist $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(c) = a$ und damit ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(d)

Aufgabe 3

(i) (a) Zeige zunächst $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$:

Induktionsbehauptung (IB): $\sum\limits_{k=0}^{n} k * k! = (n + 1)! + 1$.

Induktionsschritt (IS): $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k * k! = \sum\limits_{k=0}^{n} k * k! + (n + 1) * (n + 1)! \overset{\text{(IB)}}{=}$

$(n+1)! + 1 + (n+1) * (n+1)! = (n+1)! * (1 + (n+1)) + 1 = (n+1)! * (n+2) + 1 = (n+2)! + 1.$

Zeige nun $B(n) \Rightarrow B(n+1)$:
Induktionsbehauptung (IB): $\sum_{k=0}^{n} k * k! = (n+1)! - 1.$
Induktionsschritt (IS): $\sum_{k=0}^{n+1} k*k! = (n+1)!-1 = \sum_{k=0}^{n} k*k! + (n+1) * (n+1)! \overset{\text{(IB)}}{=} (n+1)!-1+(n+1)*(n+1)! = (n+1)!*(1+n+1)-1 = (n+1)! * (n+2) - 1 = (n+2)! - 1.$

(b) Zum Beweis der Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ fehlt der jeweilige Induktionsanfang. Es wurde zwar die Implikation gezeigt, jedoch nicht, dass die Aussage überhaupt für das erste Element gilt.
Um zu zeigen, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt nun der Induktionsanfang $(n = 0)$: $\sum_{k=0}^{0} k * k! = 0 * 0! = 0 = 1! - 1 = (0+1)! - 1.$

(ii)
- *Fall 1:* n ist durch m teilbar.
  Dann ist $q = \frac{n}{m} \Leftrightarrow n = q*m$. Setze $r := 0$: $n = q*m+0 = q*m+r$.
- *Fall 2:* n ist nicht durch m teilbar.
  Dann existiert eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ mit $x > n$, die durch m teilbar ist, also $\frac{x}{m} = q \Leftrightarrow x = q * m$.
  Da $x > n$ lässt sich x schreiben als $x = n + (n - n)$ und ferner $n + (x - n) = q * m$.
  Wähle nun $r := -(x-n)$. Dann ist $n+(x-n) = n-r = q*m \Leftrightarrow n = q * m + r$.

$\square$

Aufgabe 4

- *Fall 1:*
  $$a \geq 0 \wedge b \geq 0. \tag{1}$$
  Dann ist $|a| = a$ und $|b| = b$, und somit $|a| + |b| = a + b \geq 0$. Aus (1) folgt $a + b \geq 0$ und daher auch $|a + b| \geq 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass
  $$a + b \leq a + b + |a - b| \Leftrightarrow 0 \leq |a - b|.$$
  Ist $a \geq b$, dann ist $0 \leq a - b$ und somit $|a - b| = a - b$. Dann gilt jedoch bereits $0 \leq |a - b| = a - b$. Ist $a < b$, so ist $a - b < 0$ und damit $|a - b| = -(a - b)$. Dann ist jedoch $|a - b| = -(a - b) > 0$.

- *Fall 2:*
$$a < 0 \wedge b < 0. \tag{2}$$
Dann ist $|a| = -a$ und $|b| = -b$, und somit $|a| + |b| = -a - b$. Aus (2) folgt $a + b < 0$ und somit $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Es bleibt also zu zeigen, dass
$$-a - b \leq -a - b + |a - b| \Leftrightarrow 0 \leq |a - b|.$$
Ist $a < b$, dann ist $a - b < 0$ und damit $|a - b| = -(a - b) > 0$. Ist $a \geq b$, dann ist $a - b \geq 0$ und $|a - b| = a - b \geq 0$.

- *Fall 3:*
$$a \geq 0 \wedge b < 0. \tag{3}$$
Dann ist $|a| = a$ und $|b| = -b$, sowie $b < a$. Weiterhin ist $|a| + |b| = a - b$. Aus (3) folgt $-b > 0$ und damit $a - b > 0$. Daher ist $|a - b| = a - b$. Es bleibt also zu zeigen, dass
$$a - b \leq |a + b| + a - b \Leftrightarrow 0 \leq |a + b|.$$
Ist $a + b \geq 0$, dann ist $|a + b| = a + b \geq 0$. Ist $a + b < 0$, so ist $|a + b| = -(a + b) > 0$.

- *Fall 4:*
$$a < 0 \wedge b \geq 0. \tag{4}$$
Dann ist $|a| = -a$ und $|b| = b$, sowie $|a| + |b| = -a + b$. Aus (4) folgt $-b \leq 0$. Damit ist $a - b < 0$ und $|a - b| = -(a - b) = -a + b$. Es bleibt also zu zeigen, dass
$$-a + b \leq |a + b| - a + b \Leftrightarrow 0 \leq |a + b|.$$
Ist $a + b \geq 0$, dann ist $|a + b| = a + b \geq 0$. Ist $a + b < 0$, so ist $|a + b| = -(a + b) > 0$.

$\square$

Es gilt Gleichheit, wenn $a \leq b \wedge a \geq b \Leftrightarrow a = b$.