

Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 1: Lerntheorien

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



**UNI
FREIBURG**

6. November 2020

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

Inhalte dieser Veranstaltung:



	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	12.2.	Klausur

Wie lernt man eigentlich?



Beschreiben Sie, in welcher Weise hier gelernt wird.



I. Lerntheorien



Lerntheorien sind Konstrukte, die versuchen, Lernen psychologisch zu erklären.

Der komplexe Vorgang des Lernens wird dabei durch möglichst einfache Prinzipien und Regeln erklärt.

Theorien lassen sich nicht direkt in die Praxis übertragen, sondern dienen als Ideengeber und Leitlinien.

Die drei wichtigsten Theorien aus der Lernpsychologie:

1. **Behaviorismus**
2. **Kognitivismus**
3. **Konstruktivismus**

Wofür Lerntheorien?



UNI
FREIBURG

Unterrichtsmethoden

Ich-Du-Wir

Flipped Classroom

Lernzirkel

Freiarbeit

Referat

Didaktische Prinzipien und Lehr-/Lern-Modelle

Direkte Instruktion

Spiralprinzip

Handlungsorientierung

Produktives Üben

EIS-Prinzip

Entdeckendes Lernen

Genetisches Prinzip

Behaviorismus

Kognitivismus

Konstruktivismus

Neurobiologische Grundlagen

1. Behaviorismus



Eckdaten

Beim Behaviorismus handelt es sich um eine der ältesten lernpsychologischen Strömungen, die ihre Anfänge im 19. Jahrhundert hatte und sich ab etwa 1920 durchsetzte. Die wichtigsten Vertreter dieser Lerntheorie waren I. P. Pawlow (1849-1936), J. Watson (1878-1958), E. Thorndike (1874-1949) und B. F. Skinner (1904-1990).



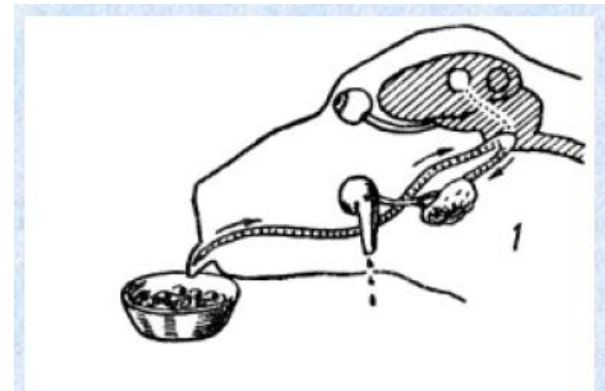
Lernen als Aufbau von Assoziationen



- Beim Lernen werden zwei Wissenseinheiten miteinander verknüpft (eine Assoziation wird aufgebaut)
- Experiment von Pawlow:

Experiment

- Futter → Speichel fließt
- Glocke / Lampe + Futter → Speichel fließt
- mehrere Wiederholungen ...
- Glocke / Lampe **ohne Futter** → Speichel fließt



- Dies nennt man klassisches Konditionieren.
- Ergebnis: Es wurde eine Assoziation zwischen Glocke und Speichelfluss aufgebaut.

Lernen durch Verstärkung

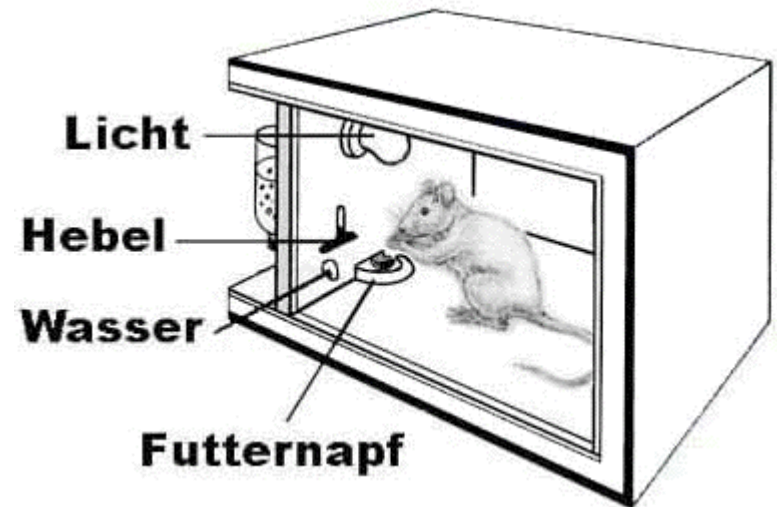


Experiment von Skinner:

Wie lernt eine Ratte einen Hebel zu drücken, wenn eine Lampe aufleuchtet?

Verstärkung des gewünschten Verhaltens durch Belohnung und Bestrafung

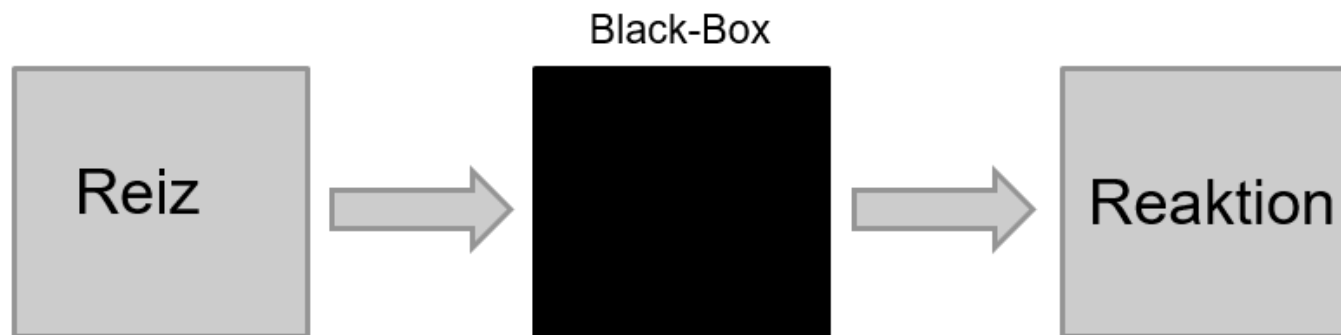
Die Ratte lernt, aufgrund der erwarteten Konsequenz. Dies nennt man operantes Konditionieren.



4 Arten der Verhaltensmanipulation:

- Etwas Gutes erhalten
- Etwas Negatives bleibt erspart
- Etwas Negatives erhalten
- Etwas Gutes wird entzogen

- Der Behaviorismus betrachtet Lernen als **Aufbau von Assoziationen**.
- Dieses Lernen wird durch **Verstärkung** des erwünschten Verhaltens erreicht.
- Der Lernende selbst bleibt eine „**black box**“.
- Nur sein **Verhalten** (=behavior) wird „von außen“ betrachtet und gesteuert.



Selbsterfahrung: Lernen im Sinne des Behaviorismus



- Lernen Sie innerhalb von 2 Minuten die folgende Tabelle auswendig. Fragen Sie sich gegenseitig ab.
- Reflektieren Sie, wie Sie dabei vorgehen.

Vertreter des Behaviorismus	Vertreter des Kognitivismus	Vertreter des Konstruktivismus
Pawlow Watson Thorndike Skinner	Piaget Bandura Bruner	Aebli Glaserfeld Watzlawick

Behaviorismus: Bedeutung für die schulische Praxis



- Lernen durch Verstärkung (Lob/Tadel, Noten, Extraaufgaben, Pluspunkte, Wettbewerbe, ...)
- Reiz-Reaktions-Lernen geeignet für Auswendiglernen, Erwerb von Faktenwissen
- Granularisierung des Wissens
- Didaktisches Prinzip der Wiederholung
- Unterrichtsmethoden:

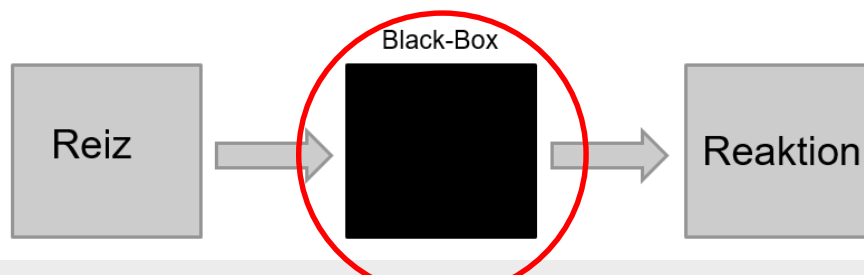
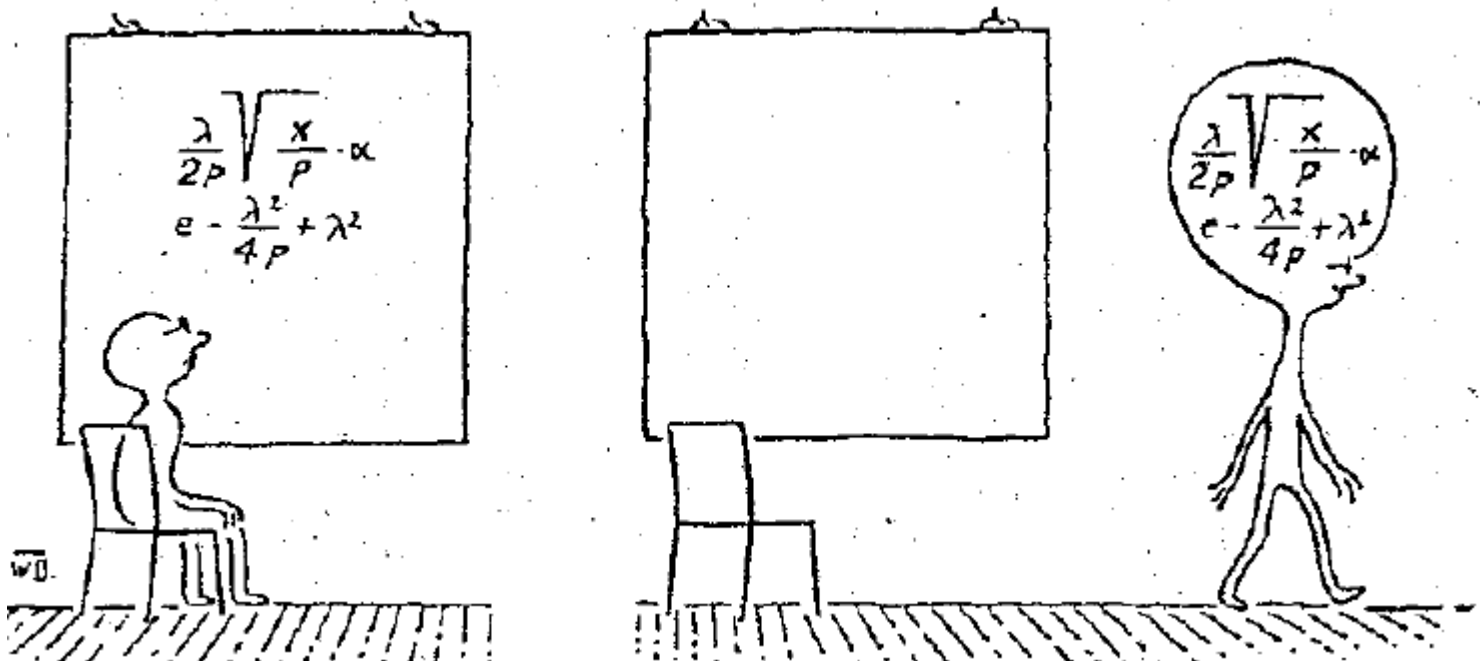


Schritt 1: _____
Schritt 2: _____
Schritt 3: _____

Einmaleins.de
6er-Reihe üben

Behaviorismus: Kritik

- Rezeptives, passives Lernen
- Auf reine Wiedergabe ausgerichtet



2. Kognitivismus

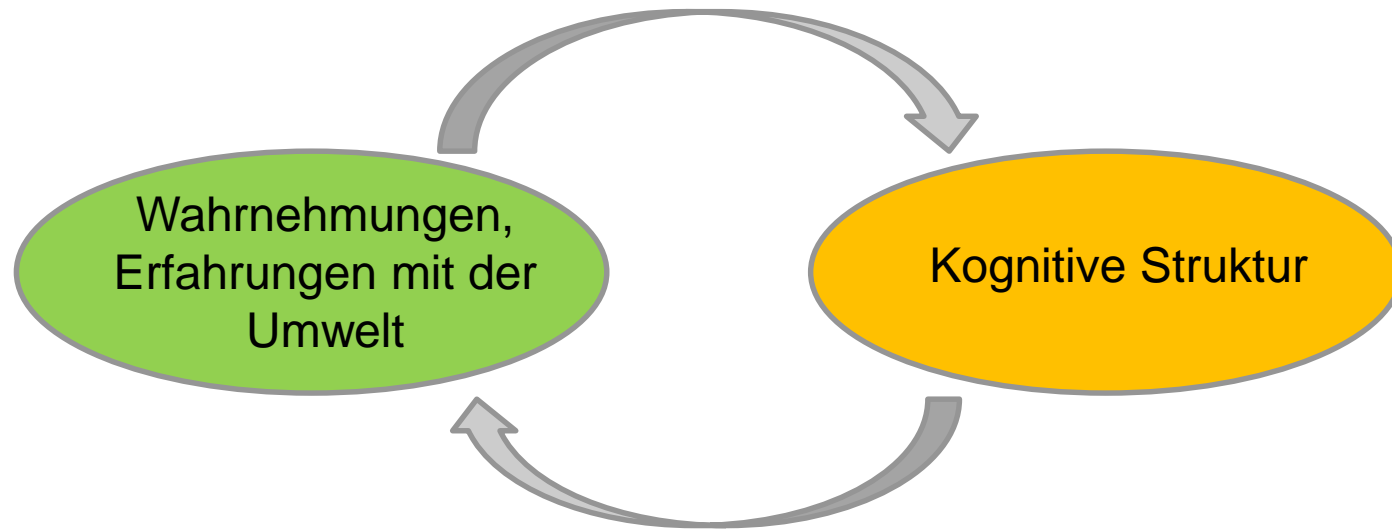


Eckdaten

In den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts kam es zur „kognitiven Wende“ und damit historisch betrachtet zu einer Gegenbewegung zum Behaviorismus. Als die wichtigsten Vertreter dieser Lerntheorie gelten J. Piaget (1896-1980), A. Bandura (* 1925), R. M. Gagné (1887-1967), J. S. Bruner (geb. 1915), A. Ellis (1913-2007) und A. T. Beck (1921).



Lernen als individuelle Informationsverarbeitung

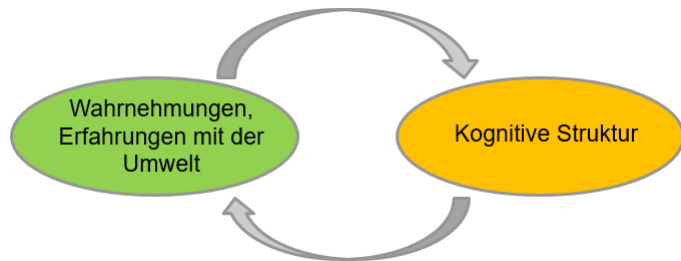


- Lernen geschieht im Austausch mit der Umwelt (Wahrnehmen, Erfahren, ...)
- Neues wird in Bezug zu Vorwissen gesetzt
- Dabei wird im Gehirn eine kognitive Struktur (Schemata, mentale Modelle, ...) aufgebaut

Äquilibrationsmodell von Piaget

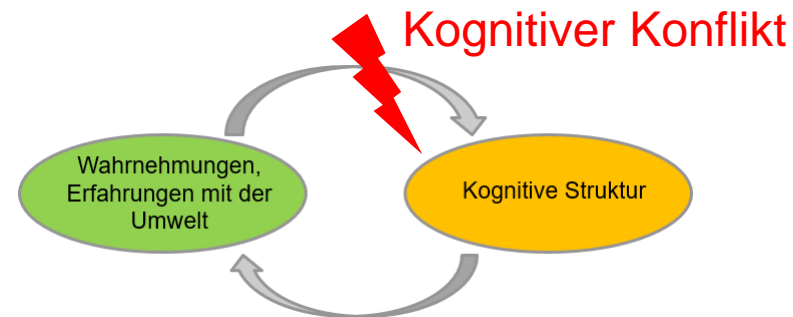


- Wie wird Neue Information verarbeitet?
- **Äquilibrationsprinzip:** Bedürfnis, Gleichgewicht zwischen der wahrgenommenen Umwelt und den eigenen kognitiven Strukturen herzustellen bzw. zu erhalten.



Assimilation:

Neue Erfahrungen werden in ein vorhandenes kognitives Schema eingefügt.



Akkomodation:

Neue Erfahrungen stehen im Konflikt mit vorhandenen Schemata. Es wird ein neues Schema gebildet oder das bestehende Schema angepasst.

- Lernen im Sinne des Kognitivismus bedeutet Lernen durch Einsicht und Erkenntnis
- Dabei wird das Neue in vorhandene Kenntnisse eingebettet.
- Die Lehrkraft strukturiert den Lernprozess und sorgt für eine sinnvolle Sequenzierung des zu erlernenden Wissens.
- Kognitive Konflikte herbeiführen und didaktisch nutzen

Beispiel: Erdumfang



Angenommen, die Erde wäre eine perfekte Kugel.
Um den Äquator (40.000 km) wird ein Band gelegt.
Um wieviel müsste das Band verlängert werden, wenn das Band überall um 1m angehoben werden soll?



Schätzen Sie!

Beispiel: Erdumfang



Angenommen, die Erde wäre eine perfekte Kugel.
Um den Äquator (40.000 km) wird ein Band gelegt.
Um wieviel müsste das Band verlängert werden, wenn das Band überall um 1m angehoben werden soll?



6,3 m Verlängerung reichen!!

Die meisten Menschen denken, dass es viel mehr sein müsste.

(kognitives Schema: „Die Erde ist riesig groß, also braucht man auch sehr viel Band“)

→ kognitiver Konflikt

→ Warum braucht man nur so wenig??

Lernen durch Einsicht und Erkenntnis (Erklärung mittels Visualisierung)

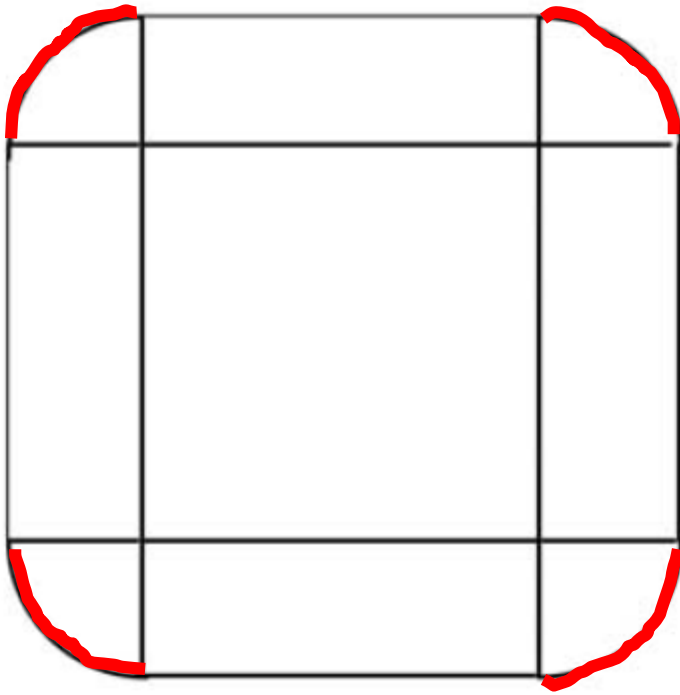


Figure 6. A string around a 'square Earth'.

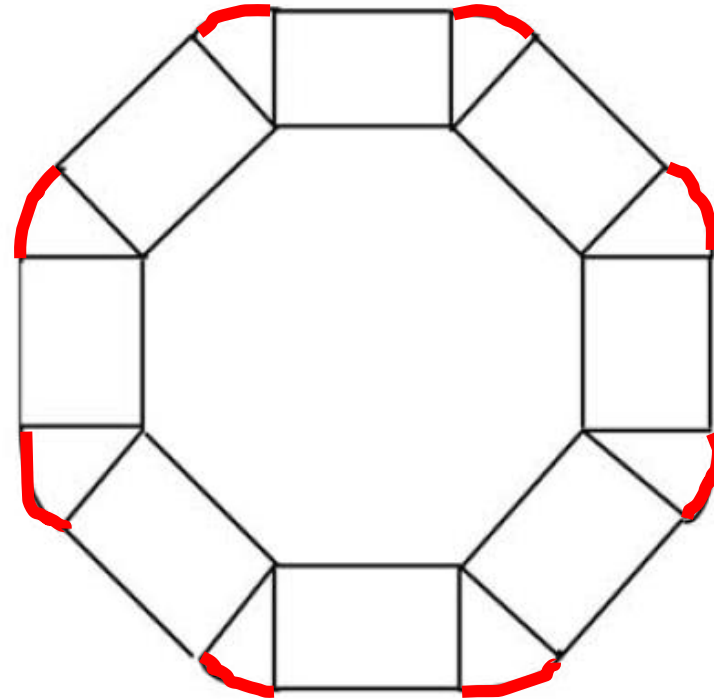
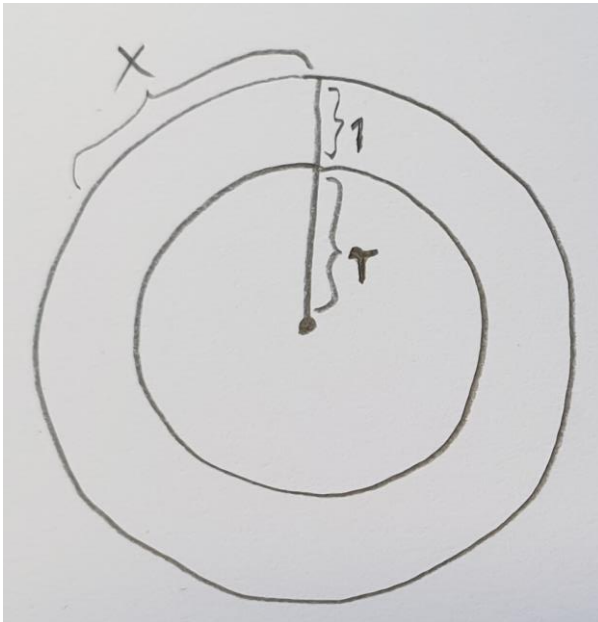


Figure 7. A string around an 'octagonal Earth'.

Man braucht nur 2π Meter mehr
Schnur!! -> Unabhängig vom Radius

Aus [1]: Arcavi, A. (2003):
THE ROLE OF VISUAL REPRESENTATIONS IN
THE LEARNING OF MATHEMATICS

Lernen durch Einsicht und Erkenntnis (Erklärung mittels Rechnung)



$$2\pi(r + 1) = 2\pi r + x$$

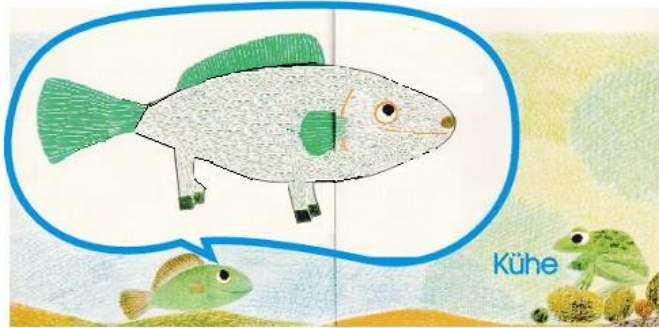
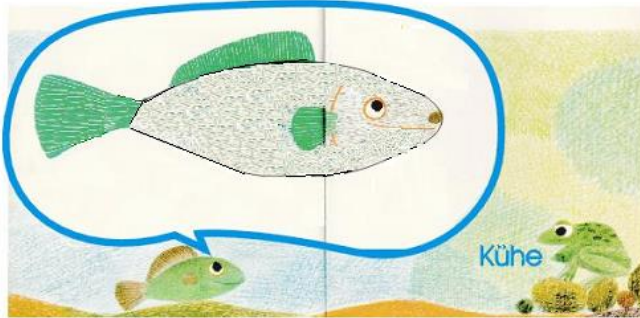
$$2\pi r + 2\pi = 2\pi r + x$$

$$2\pi = x$$

Unabhängig vom Radius!!

Angepasstes Schema: „Die Erde ist zwar riesig groß, aber der Umfang ist proportional zum Radius.“

Grenzen des Kognitivismus



Akkommodation

Jedes Individuum konstruiert sich
seine eigene „Realität“

3. Konstruktivismus



Eckdaten

Ab Mitte des 20. Jahrhunderts gewinnt der Konstruktivismus zunehmend an Bedeutung. Die Theorie geht auf die Arbeiten des Entwicklungspsychologen J. Piaget (1896-1980) und des Schweizer Psychologen und Pädagogen H. Aebli (1923-1990)



zurück. Zu den Klassikern der konstruktivistischen Sicht auf das Lernen zählen J. Dewey (1859-1952; pragmatischer Konstruktivismus), K. Reich (*1948, pragmatischer Konstruktivismus) und L. Vygotsky (1896-1935; sozialer Konstruktivismus). Weitere wichtige Vertreter sind die beiden Mitbegründer des radikalen Konstruktivismus E. von Glasersfeld (*1917) und H. Maturana (*1928), als Vertreter des soziokulturellen Konstruktivismus S. J. Schmidt (*1940). Der spätere gemäßigte Konstruktivismus wird beispielsweise vertreten durch P. Watzlawick (1921-2007).

Radikaler Konstruktivismus (z.B. von Glasersfeld (1981, 1995):

Ausgangs-Einsicht:

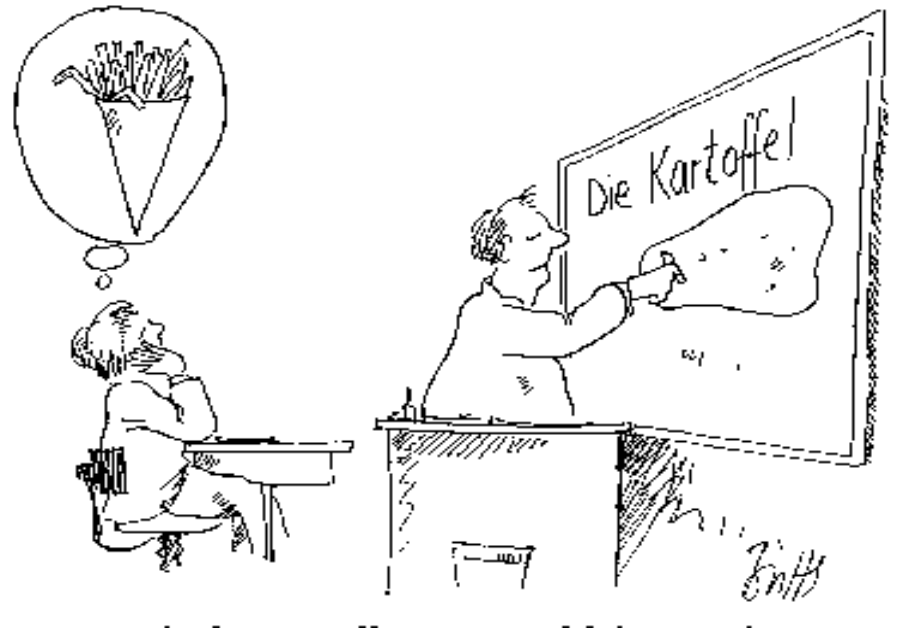
- Objektivität unmöglich
- Jede „Wirklichkeit“ ist die Konstruktion derer, die diese „Wirklichkeit“ zu entdecken und erforschen meinen

Radikalkonstruktivistische Prinzipien:

1. Wissen wird nicht passiv aufgenommen (weder durch Sinnesorgane noch durch Kommunikation), sondern vom denkenden Subjekt aktiv aufgebaut.
2. Die Kognition dient der Organisation der Erfahrungswelt des Subjekts. Es geht nicht um „Wahrheit an sich“, sondern um die Nützlichkeit der Erkenntnis.

Sozialkonstruktivismus:

Der Mensch erfährt nur im sozialen Diskurs Erkenntnis über die Umwelt.
Wissen wird „sozial ausgehandelt“.



Folgerungen für die schulische Praxis:



- Wissen kann nicht einfach vermittelt werden, sondern muss vom Lernenden in einem **aktiven Prozess** konstruiert werden.
- Auf die **Schüleraktivität** kommt es an.
- Dabei ist die **Qualität** dieser Aktivität entscheidend.
- Lehrer muss erfassen, wie die Schüler denken (Prinzip der **Diagnose**)
- Fehler und **Fehlvorstellungen** sind (produktive) Etappen auf dem Lernweg
- Prinzip des **entdeckenden Lernens** (siehe Vorlesung 4)
- **Individuelle Förderung** (siehe Vorlesung 7, Differenzieren)
- **Kooperatives Lernen** (siehe Vorlesung 12, Kommunizieren)
- ...

Selbsterfahrung: Lernen im Sinne des Konstruktivismus



Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe und diskutieren Sie Vor- und Nachteile möglicher Streuungsmaße.

Drei Schüler werfen mit Murmeln und haben vereinbart: Es gewinnt derjenige, dessen fünf

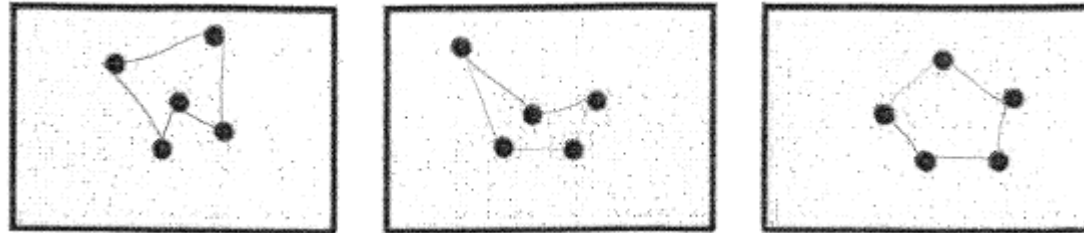


Murmeln am wenigsten weit auseinander liegen bleiben. Immer wieder streiten sie sich darüber, wer gewonnen hat. Wie kann man den Grad, wie stark die Murmeln streuen, messen oder berechnen? Erfinde ein „Maß für die Streuung“.

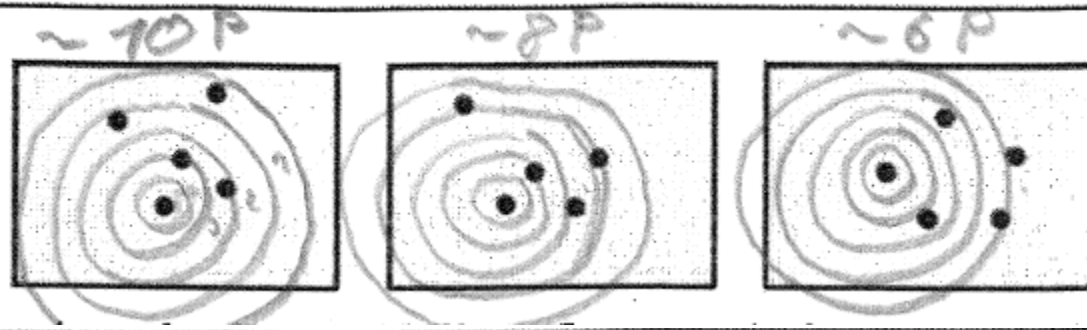
Verschiedene Ideen sind möglich, z.B. :



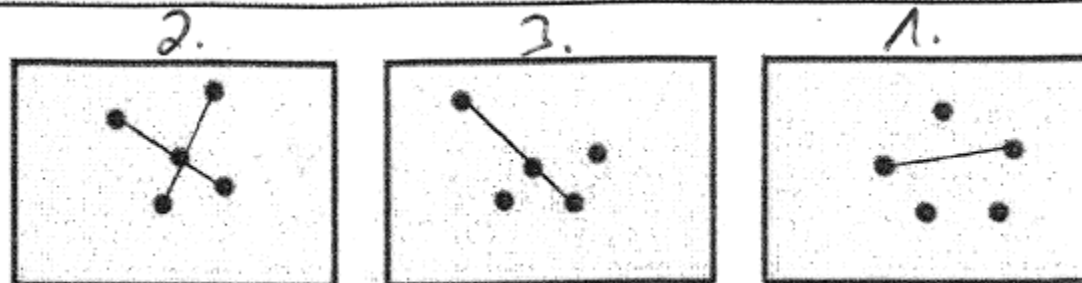
Streuung als „Länge
des Umfangs“



Streuung als „Radius
der Kreisscheibe um
einen Punkt“



Streuung als
„maximaler Abstand“



Bearbeitung von Studierenden aus dem WS 18/19

Die „Streuungsmaßaufgabe“ ist ein Beispiel für eine Lernumgebung. „Lernumgebungen“ sind offene Aufgaben, die verschiedene Lösungswege auf unterschiedlichem Niveau zulassen.

Was zeichnet eine Lernumgebung in der Mathematik aus?

Wenn sich Lernende einem neuen, unbekannten Problem nähern, so versuchen sie es zunächst mit den bisher erworbenen Mitteln zu lösen. Sie aktivieren ihre gesammelten Vorerfahrungen: entwickeln Vorstellungen und greifen auf Kenntnisse zum Vergleichen, zur Bildung von Analogien und zur Konstruktion von Lösungsansätzen zurück. Es finden also Konstruktionsprozesse statt, die neben dem Neulernen oftmals auch ein Umlernen beinhalten. Lernende konstruieren ihr Wissen selbst und zwar in der Auseinandersetzung mit Problemen auf der Grundlage ihrer Vorerfahrungen, ihrer kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Lehren und Lernen im Sinne des Konstruktivismus...



... bedeutet auch, **verschiedene Denkweisen** wertzuschätzen und zu thematisieren: z.B. bei der Addition über den Zehner:

$$7+8=15$$

Wie hast Du gerechnet?

Ich habe überlegt, wie viel ich von der 8 wegnehmen muss, um den Zehner voll zu machen. Also $7+3=10$ und dann noch 5 hinzu.

Strategie: „Zehner voll machen“

Ich weiß, dass $8+8=16$ ist. Also ist $7+8$ eins weniger.

Strategie:
„Nachbaraufgabe nutzen“

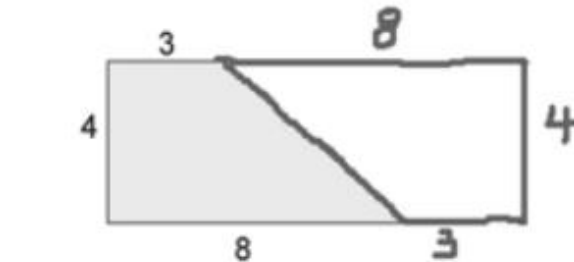
Lehren und Lernen im Sinne des Konstruktivismus...



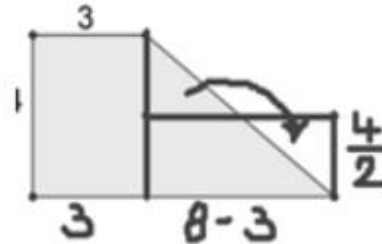
UNI
FREIBURG

... bedeutet auch, **verschiedene Denkweisen** wertzuschätzen und zu thematisieren: z.B. für die Flächenberechnung beim Trapez:

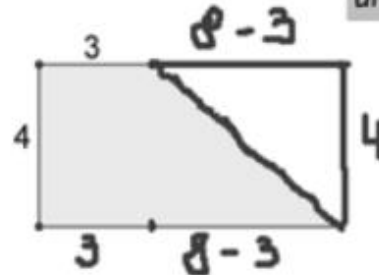
Welche Denkweise gehört zu welcher Figur?



Ich hab ergänzt, das muss ich wieder abziehen.



Ich hab einmal zerlegt und ein Teil bewegt.



Ich hab zweimal zerlegt und ein Teil bewegt.



Ich hab verdoppelt, das muss ich wieder gut machen.



Fazit



- Die „richtige“ Lehrmethode gibt es nicht.
- Die Auswahl des Lehrmodells hängt vom jeweiligen Lernziel ab.
- Letztendlich gestalten wir unseren Unterricht in einem ausgewogenen Verhältnis von Instruktion (Anleitung) und Konstruktion (Schüleraktivität). (siehe auch: *Pädagogisch-didaktische Sichtweisen auf das Lehren und Lernen* [2])

- [1] A. Arcavi (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics 52. S. 215–241. Verfügbar unter ILIAS.
- [2] *Pädagogisch-didaktische Sichtweisen auf das Lehren und Lernen*. In: K. Reiss & C. Hammer (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik. Springer, Basel. S. 23-26. *[als e-Book bei der UB-Freiburg]*
- [3] *Theorien des Lernens – Folgerungen für das Lehren*. Hrsg. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. Verfügbar unter ILIAS.