# Lineare Algebra I, Blatt 3

Gruppe 4
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Tobias Remde (Matr.-Nr. 5100067)
tobias.remde@gmx.de

29. November 2020

## Aufgabe 1

(a) Wir haben eine lineare Ordnung, d.h. entweder ist $0_R < a$ oder $a < 0_R$.

**Fall 1**: $0_R < a$.
Dann ist $0_R \cdot c < a \cdot c,\ c > 0_R$, da $<$ kompatibel mit $R$ ist. Wähle nun $c := a$, dann ist also $0_R \cdot a = 0_R < a \cdot a = a^2$ und somit $a^2$ positiv.

**Fall 2**: $a < 0_R$.
Dann ist $a+c < 0_R+c,\ c > 0_R$. Wir wählen $c := -a > 0_R$ und erhalten $a - a = 0_R < 0_R - a = -a$.
Damit erhalten wir $0_R \cdot (-a) = 0_R < (-a) \cdot (-a) = -((-a) \cdot a) = -(-(a^2)) = a^2$ und damit $a^2 = (-a)^2$ positiv.

Zusammenfassend folgt, dass $a^2 > 0_R$ für alle $a \in R$.

$\square$

(b) **Behauptung**: Es gibt keine kompatible lineare Ordnung auf dem Körper $\mathbb{C}$.

**Beweis**: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe eine solche kompatible lineare Ordnung. Dann haben wir in Teilaufgabe (a) schon gezeigt, dass Quadrate $\{a^2\}_{a\in\mathbb{C}}$ bezüglich dieser kompatiblen linearen Ordnung positiv sein müssen.
Wir wählen nun $x := 0 + 1i \in \mathbb{C}$. Dann müsste $x^2$ positiv sein. Es ist aber $x^2 = i^2 = -1 < 0$.

Widerspruch! Es folgt, dass es keine solche Ordnung geben kann.

$\square$

(c) **Behauptung**: Wenn $R$ positive Charakteristik hat, besitzt $R$ keine kompatible lineare Ordnung.

**Beweis**: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe eine solche lineare Ordnung $\tilde{<}$. Dann wäre

$$a \mathrel{\tilde{<}} b \Rightarrow \begin{cases} a + c \mathrel{\tilde{<}} b + c & \text{für alle } c \\ ac \mathrel{\tilde{<}} bc & \text{falls } c \mathrel{\tilde{>}} 0_R \end{cases} .$$

Da $\tilde{<}$ linear ist, ist entweder $0_R \mathrel{\tilde{<}} 1_R$ oder $1_R \mathrel{\tilde{<}} 0_R$.

*Fall 1*: $1_R \mathrel{\tilde{<}} 0_R$.
Wähle $c := 1_R + 1_R + \cdots = \sum_{i=0}^{k-1} 1_R$. Dann ist

$$1_R + c = \sum_{i=0}^{k} 1_R = 0_R \mathrel{\tilde{<}} \sum_{i=0}^{k-1} 1_R = 0_R + c.$$

Widerspruch, da $1_R \mathrel{\tilde{<}} 0_R$ war.

*Fall 2*: $0_R \mathrel{\tilde{<}} 1_R$.
Analog zu Fall 1.

Damit kann keine solche Ordnung existieren.

$\square$

# Aufgabe 2

(a) Sei $a^2 = a$ für $a \in R$. Dann ist

$$0_R = (0_R)^2 = (a - a)^2 = a^2 + 2a^2 + (-a)^2 = a + 2a - a = 2a$$

was genau der Fall ist, wenn $0_R = a$.
Wegen $a = aa = a^2$ ist auch $1_R = a$.
Damit muss $\mathrm{char}(R) = 1$ sein.

$\square$

(b) Seien $a, b \in R$. Dann ist nach Definition

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a + 2ab + b.$$

Dies ist äquivalent zu $0 = ab$, was genau dann der Fall ist, wenn $a$ das Inverse (bezüglich der Multiplikation) von $b$ und $b$ das Inverse von $a$ ist, also $a = b^{-1}$ und $b = a^{-1}$.
Dann ist jedoch $ab = aa^{-1} = 0_R = bb^{-1} = ba$ und damit die Multiplikation kommutativ.

$\square$

# Aufgabe 3

Die Abbildung
$$f := (R, +) \to (R, +), x \mapsto x^p$$
mit $\mathrm{char}(R) = p > 0$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn
$$f(a + b) = f(a) + f(b),\ a, b \in R$$
gilt.

Es ist
$$f(a + b) = (a + b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k}b^k = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k}b^k + b^p.$$

Dies lässt sich auch schreiben als
$$a^p + \sum_{k=1}^{p-1} p \cdot \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} a^{p-k}b^k + b^p.$$

$\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} a^{p-k}b^k$ ist jedoch ein Element aus dem Ring, und da $p$ die Charakteristik des Ringes ist, werden alle dieser Summanden 0 (folgt aus *Definition 1.31.* im Skript).

Es bleibt $f(a + b) = (a + b)^p = a^p + b^p = f(a) + f(b)$. Somit ist $f$ ein Gruppenhomomorphismus.

$\square$

# Aufgabe 4

(a) Die Vektoren $v_1 = 3+4i$ und $v_2 = 1-2i$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ existieren, sodass die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ eine Lösung mit $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ hat.
Dies ist genau dann der Fall, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Die Multiplikation eines Vektors $a + bi \in \mathbb{C}$ mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ resultiert in einem Vektor $ac+bci \in \mathbb{C}$. Bei Wahl eines Skalars $c+di \in \mathbb{C}$ entsteht jedoch der Vektor $ac - bd + (ad + bc)i \in \mathbb{C}$.

Die resultierenden Gleichungssysteme sind zwar in $\mathbb{C}$ lösbar, jedoch nicht in $\mathbb{R}$. Somit sind die Vektoren $v_1$ und $v_2$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ linear abhängig, aber linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

(b) Analog zu Teilaufgabe (a) sind die beiden Vektoren $v_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ und $1 + \sqrt{2}$ genau dann linear abhängig, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ gibt, welches die Gleichung $\frac{v_1}{v_2} = \lambda$ löst.

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ existiert ein solches $\lambda$, nämlich $7+5\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{v_2}{v_1}$. In $\mathbb{Q}$ gibt es jedoch kein solches $\lambda$, da $7 + 5\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Somit sind die Vektoren $v_1$ und $v_2$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear unabhängig, und im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear abhängig.