Übungsblatt 2

! Es werden nur Abgaben gewertet, die die Vorgaben an Dateiname und Format erfüllen (siehe README_allgemein.pdf im Ordner mit den Kursmaterialien)!

Abgabe am Mittwoch 18.11.20 bis 14 Uhr. Bitte nicht vor Dienstag 17.11. 9 Uhr abgeben!

Hinweis: Teilaufgaben haben oft (wenn auch nicht immer) etwas miteinander zu tun. Sie können für eine spätere (Teil-)Aufgabe alle (Teil-)Aufgaben davor als gelöst annehmen.

Aufgabe 5 (1.5+1.5+2)**.** Berechnen Sie genügend Folgenglieder dieser Folgen, um eine Idee zu bekommen, ob und wohin diese konvergieren könnten. Benutzen Sie die Grenzwertdefinition (nicht schon abgeleitete Konvergenzkriterien oder Rechenregeln mit konvergenten Folgen), um ihre Beobachtung zu beweisen:

(a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>0}$ (b) $\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)_{n>0}$ (c) $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n>0}$

Aufgabe 6 (1+1.5+2.5)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir nennen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n), falls es eine Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $i_0 < i_1 < i_2 < \ldots$ gibt, so dass $b_n = a_{i_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(i) Ist $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n>0}$ für $p \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge der harmonischen Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$?[1] Begründen Sie. Geben Sie eine (ggf. weitere) Teilfolge der harmonischen Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert. Gegen welchen Grenzwert?

(iii) Seien $(a_{i_n})_n$ und $(a_{j_n})_n$ zwei Teilfolgen von $(a_n)_n$. Wir nehmen an, dass jedes Folgenglied von $(a_n)_n$ zu einer der beiden Teilfolgen gehört. Weiterhin gelte $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = \lim_{n\to\infty} a_{j_n} = a$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist.

Aufgabe 7 (2+1.5+1.5)**.** (i) (Bernoullische Ungleichung) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. (Hinweis: vollständige Induktion)

(ii) (Geometrische Folge) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt.

(iii) (Geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass $a_n = \sum_{i=0}^n q^i$ eine konvergente Folge ist. Was ist der Grenzwert?

[1] Für $p > 0$ ist $n^p := \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{p-\text{mal}}$. Für $p = 0$ sei $n^0 := 1$.

Aufgabe 8 (2+2+1)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a_n < b_n$. Wir nennen $(I_n)_n$ eine *Intervallschachtelung*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := b_n - a_n < \epsilon$.

(i) Zeigen Sie, dass es zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_n$ es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$[2]

(ii) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung $(I_n = [a_n, b_n])$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ und $\{x\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ gibt.

(iii) Sei $x = 0,\bar{9} := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i}$. Zeigen Sie, dass $x = 1$ gilt. Benutzen Sie dafür eine geeignete Intervallschachtelung.

Zusatzaufgabe - Brücke zur Schulmathematik (0.5+1.5)**.** Angelehnt an eine Aufgabe aus einem Schulbuch der Klasse 9 (mathwerkstatt):

(i) Warum hat $(*, **9)^2$ genau sechs Nachkommastellen und was ist die letzte Nachkommastelle? Was wäre, wenn die Ziffer 9 durch eine andere Ziffer ersetzt wird?

(ii) Nutzen Sie (i), um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen sein kann.

Abgabe am Mittwoch 18.11.20 bis 14 Uhr. Bitte nicht vor Dienstag um 9 Uhr abgeben!

[2] $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \ldots$, also: Es ist genau dann $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, wenn $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.