1 (i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann konvergiert a_n gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$,

$|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

(ii) $a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}{\frac{1}{\sqrt{n}}-1} \underset{\substack{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \\ \text{und Rechenregeln} \\ \text{für konvergente Folgen}}}{=} \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Mittels Grenzwertdefinition:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 > \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2$ (möglich nach Archimedes Axiom)

Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - (-1)| = \left|\frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}+1\right| = \left|\frac{1+\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}\right| \underset{\substack{n\geq 2 \\ (\text{denn } \sqrt{n}>1)}}{=} \frac{2}{\sqrt{n}-1}$$

$$\underset{\substack{\sqrt{x} \text{ mon. wachsend} \\ \Rightarrow \sqrt{n}\geq\sqrt{n_0}}}{\leq} \frac{2}{\sqrt{n_0}-1} \underset{n_0 > \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2}{<} \varepsilon \qquad \square.$$

2.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2} \qquad a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{a_0}{a_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1+2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+2} = \frac{1}{7}$$

$$\Big\} \quad a_0 > a_1 > a_2$$

$$a_{n+1} = 1 - \frac{2}{a_n+2}$$

(a) Zeige: $0 \leq a_n \leq 1$

Bew per Induktion: $n = 0$ ✓

Induktionschritt: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $0 \leq a_n \leq 1$.

Dann gilt $2 \leq a_n+2 \leq 3$

$$1 \geq \frac{2}{a_n+2} \geq \frac{2}{3}$$

$$0 \leq a_{n+1} = 1 - \frac{2}{a_n+2} \leq \frac{1}{3},$$

also $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ $\square$.

(b) Zeige: a_n monoton fallend

Bew per Induktion: $a_0 > a_1$ siehe oben.

Induktionschritt: Sei $a_{n+1} \geq a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a_{n+1} + 2 \geq a_n + 2$, also (mit $a_n + 2 \geq 0$)

$$\frac{2}{a_{n+1}+2} \leq \frac{2}{a_n+2}$$

und somit

$$a_{n+2} = 1 - \frac{2}{a_{n+1}+2} \geq 1 - \frac{2}{a_n+2} = a_{n+1} \qquad \square.$$

Nach Kriterium für Monotonie und Beschränktheit folgt aus (a) und (b), dass $(a_n)_n$ konvergiert.

Der Grenzwert sei a. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n+2} = \frac{a}{a+2}$$

$$\Rightarrow \quad a = 0.$$

3.(i) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k .$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k+1}{k^2+1} x^k}_{=:a_k} \qquad (*)$$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| \left| \frac{k+2}{(k+1)^2+1} \cdot \frac{k^2+1}{k+1} \right|$$

$$= |x| \left|\frac{k+2}{k+1}\right| \left| \frac{k^2+1}{k^2+2k+1} \right| \xrightarrow[k\to\infty]{} |x|$$

Also ist der Konvergenzradius gleich 1.

D.h. (*) konvergiert absolut für $|x|<1$

(*) divergiert für $|x|>1$

Es bleibt $|x|=1$:

$x=-1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{k+1}{k^2+1}}_{b_k}$

- Es ist $b_k \to 0$ für $k\to\infty$.
- Es ist für alle $k\in\mathbb{N}$:

$$k^3+2k^2+k+2 \leq k^3+3k^2+4k+2$$

$$\Rightarrow (k^2+1)(k+2) \leq (k+1)((k+1)^2+1)$$

$$\Rightarrow b_{k+1} = \frac{k+2}{(k+1)^2+1} \leq \frac{k+1}{k^2+1} = b_k$$

Also ist b_k monoton fallend. Nach (i) konvergiert also die Reihe.

$x = 1$: $$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k+1}{k^2+1}}_{b_k} \qquad (**)$$

Es ist für $k \geq 1$

$$k(k+1) = k^2+k \geq k^2+1$$

$$\Rightarrow \quad b_k = \frac{k+1}{k^2+1} \geq \frac{1}{k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert aber (harmonische Reihe).

Also divergiert auch $(**)$

(und somit konvergiert die Reihe zwar für $x = -1$, dort aber nicht absolut)

4. (i) $f: X \to Y$, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$

Es ist $f(A') = \{ y \in Y \mid \exists x \in X' : f(x) = y \}$

(a) Sei $y \in f(A \cap B)$. Dann gibt es ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$. Wenn $x \in A \cap B$ ist $x \in A$ und $x \in B$ und somit $y = f(x) \in f(A)$ und $y = f(x) \in f(B)$. Also $y \in f(A) \cap f(B)$. Wir haben also $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(b) Sei nun f injektiv. Da (a) immer gilt, muss nur noch $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ gezeigt werden: Sei $y \in f(A) \cap f(B)$. Dann ist $y \in f(A)$ und $y \in f(B)$.

Aus $y \in f(A)$ folgt, dass es ein $x_1 \in A$ mit $f(x_1) = y$ gibt.

Aus $y \in f(B)$ folgt, dass es ein $x_2 \in B$ mit $f(x_2) = y$ gibt.

Also ist $f(x_1) = f(x_2)$ und somit, da f injektiv ist, dann $x_1 = x_2 \in A \cap B$.

Damit ist $y = f(x_1) \in f(A \cap B)$, und wir haben

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B) \quad \square.$$

(ii) $M = (1,2] \cup \underbrace{\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\{\underset{n=0}{1},\ \sqrt{2}-1, \dots\}}$

$$\Rightarrow M = [1,2] \underset{\text{disjunkt}}{\cup} \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

Es ist $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

und $0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \sqrt{2} - 1 < 1$ für $n > 0$

- Menge der Häufungspunkte von M ist $[1,2] \cup \{0\}$. (dass die Menge der Häufungspunkte von $[1,2]$ gleich dem Intervall ist, hatten wir in der Vorlesung)

- M ist beschränkt, da $M \subset B_3(0)$ ist.
- M ist nicht abgeschlossen, da 0 Häufungspunkt ist, aber $0 \notin M$ ist.
- M ist nicht kompakt, da M nicht abgeschlossen ist.

5. $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Für $x \neq 0$ folgt Differenzierbarkeit nach Ableitungsregeln und es gilt

$$f'(x) = 4x^3 \sin \frac{1}{x^2} + x^4 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= 4x^3 \sin \frac{1}{x^2} - 2x \cos \frac{1}{x^2}$$

Für $x_0 = 0$ gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x^3 \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|^3 \underset{\text{für } x \to 0.}{\to} 0,$$

also ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

f' ist stetig: Für $x_0 \neq 0$ folgt, dass, da $f'(x)$ eine Zusammensetzung (Produkt + Hintereinanderausführung) stetiger Funktionen ist.

Für $x_0 = 0$:

$$|f'(x) - f'(0)| \leq 4|x|^3 + 2|x| \underset{x \to 0}{\to} 0.$$

Also ist f stetig differenzierbar.

6. (i) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar sei.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.
$x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$.

Aus $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$ folgt

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. Nach (i) gibt es dann

ein $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi_1) < 0$.

Aus $x_2 < x_3$ und $f(x_2) < f(x_3)$ folgt

$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3 - x_2} > 0$. Nach (i) gibt es $\xi_2 \in (x_2, x_3)$

mit $f'(\xi_2) > 0$. Also ist $\xi_1 < \xi_2$ und

$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} > 0$. Da f zweimal diff'bar

ist, ist f' diff'bar. Nach (i) gibt es also

$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset \mathbb{R}$ mit $f''(\xi) > 0$.

7.

(i) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \underbrace{\frac{1+x}{1-x}}_{=: g(x)}\right)$

$g: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$

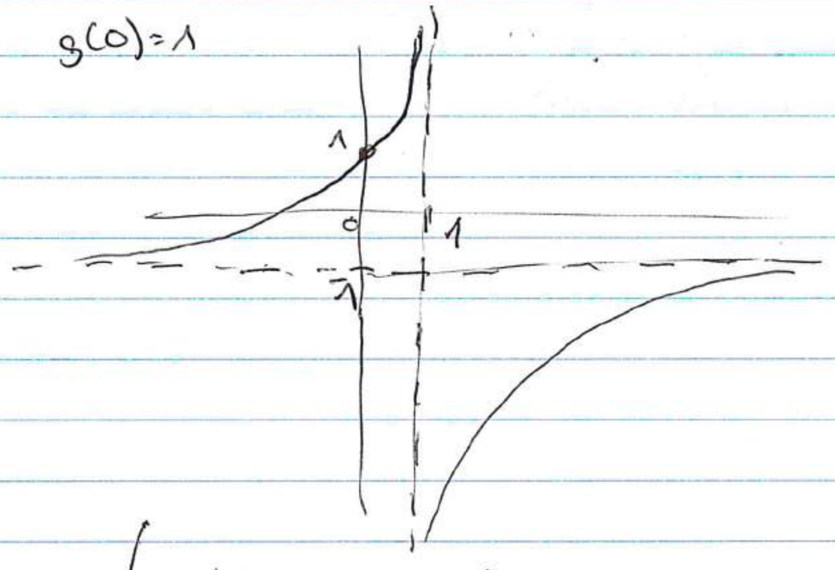
- $g'(x) = \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$

$\Rightarrow$ g ist auf $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ jeweils streng monoton wachsend und es gibt keine Extrema

- $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -1$

$\lim_{x \searrow 1} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \nearrow 1} g(x) = \infty$

$g(0) = 1$



Graph von g.

$\Rightarrow \left(\frac{1+x}{1-x} \in (-1,1) \iff x \in (-\infty, 0) \right)$

Maximaler Definitionsbereich: $(-\infty, 0)$

(ii) $$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

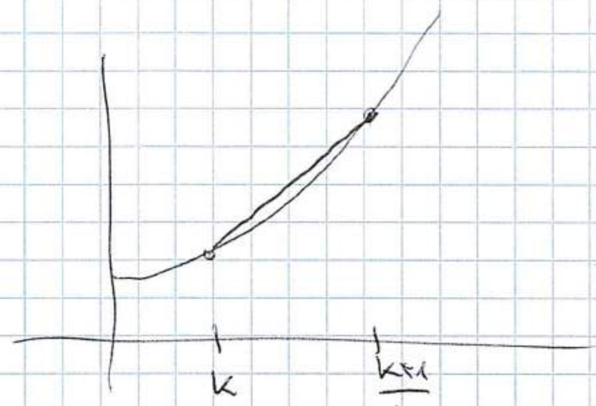
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1+x}{1-x}\right)} \cdot \frac{\pi}{2}\frac{2}{(1-x)^2} > 0$$

Da f auf Intervall definiert, ist f damit streng monoton wachsend.

(iii) $\frac{\pi}{2}\frac{1+x}{1-x} : (-\infty, 0) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist

surjektiv nach (i). ~~Injektiv~~ Da der Tangens surjektiv ist, ist somit f surjektiv. Injektiv folgt aus (ii). Also ist f bijektiv. Damit besitzt f eine Umkehrfunktion.

8. $f(x) = e^x$



(i)
$$f_n(x)\Big|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} = e^{\frac{k}{n}} + \frac{e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right)$$
$$= e^{\frac{k}{n}} + n\left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

(ii) $x \in [0,1]$ Dann $x \in \left[\frac{k(n)}{n}, \frac{k(n)+1}{n}\right]$ für $k(n) \in \{0, \dots, n-1\}$ und $\frac{k(n)}{n} \to x$ für $n \to \infty$.

$$|e^x - f_n(x)| \le \left|e^{\frac{k(n)}{n}} - e^x\right| + n\left|e^{\frac{k(n)+1}{n}} - e^{\frac{k(n)}{n}}\right| \underbrace{\left|x - \frac{k}{n}\right|}_{\le \frac{1}{n}}$$
$$\le \left|e^{\frac{k(n)}{n}} - e^x\right| + e^{\frac{k(n)}{n}}\left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right|$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} |e^x - e^x| + e^x|e^0 - 1| = 0$$

(e^x ist stetig)

(iii)

$$\int_0^1 p_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} p_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[e^{\frac{k}{n}} + n\left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) \right] dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} + n\left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \Big|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} + n e^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \frac{1}{2n^2} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} e^{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \frac{1}{2n} \left(e^{\frac{1}{n}} + 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{1}{2n} \left(e^{\frac{1}{n}} + 1\right) \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

(iv) Es ist $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{x = \frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

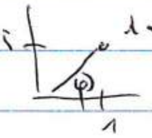
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(x)\,dx = \frac{(e^0 + 1)(e - 1)}{2 \cdot 1} = e - 1 = \int_0^1 e^x\,dx$$

9. (i) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+(i)^2}{2} = i$

(ii) $z^3 = 1+i$

$\hookrightarrow$ Radius $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Winkel $\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$



$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17}{12}\pi}$$

(iii) $$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3} y^3 \cancel{+\text{const}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{3} (\ln x)^3}$$

Substitution
$y = \ln x, \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad (x = e^y)$

partielle Integration

(iv) $$\int_0^1 \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{3x}}_{g'}\,dx = \left[x\,\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}\left[e^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.$$