Analysis I, Blatt 2

Gruppe 11
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Charlotte Rothhaar (Matr.-Nr. 4315016)
charlotte.rothhaar97@gmail.com

18. November 2020

Aufgabe 5

(a) Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>0} = 0$.
Zu zeigen: $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : |a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_0$.
Sei also $\varepsilon > 0$. Dann ist $|a_n - a| = |a_n - 0| = |a_n| \overset{n^2 \geq 0}{=} a_n$. Wähle nun $n_0 = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$. Somit ist $a_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{{n_0}^2} = \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}})^2} = \frac{1}{\frac{4}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Damit ist $a = 0$ Grenzwert der Folge a_n.

$\square$

(b) Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)_{n>0} = 1$.
Zu zeigen: $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : |b_n - b| < \varepsilon, n \geq n_0$.
Sei also $\varepsilon > 0$. Dann ist $|b_n - b| = |\frac{n^2+1}{n^2+n} - 1|$. Da $n > 0$ ist, folgt $\frac{n^2+1}{n^2+n} \leq 1$ und somit $|\frac{n^2+1}{n^2+n} - 1| = -(\frac{n^2+1}{n^2+n} - 1) = 1 - \frac{n^2+1}{n^2+n}$.
Wähle nun $n_0 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Dann ist
$|b_n - b| = |\frac{n^2+1}{n^2+n} - 1| = 1 - \frac{n^2+1}{n^2+n} = \frac{n^2+n}{n^2+n} - \frac{n^2+1}{n^2+n} = \frac{n-1}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}-1+1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Also ist $b = 1$ Grenzwert der Folge b_n.

$\square$

(c) Angenommen, c_n wäre konvergent gegen den Grenzwert c. Dann gäbe es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|c_n - c| < \varepsilon, n \geq n_0$.
Es gäbe also auch ein solches n_0 für $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann wäre
$|(-1)^n + \frac{1}{n} - c| \leq |(-1)^n| + |\frac{1}{n} + c| = 1 + |\frac{1}{n} + c| < \frac{1}{2}$

oder auch $|\frac{1}{n} + c| < -\frac{1}{2}$.
Widerspruch, da $|x| \geq 0$. $\Rightarrow$ Divergenz.

$\square$

Aufgabe 6

(i) $(\frac{1}{n^p})_{n>0}, p \in \mathbb{N}$ ist Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n>0}$, wenn $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ existiert, sodass $(\frac{1}{n^p})_{n>0} = (\frac{1}{i_n})_{i_n>0}$.
Diese gesuchte Folge $(i_n)_n$ existiert, nämlich $i_n = n^p$. Somit handelt es sich um eine Teilfolge.
Um eine weitere Teilfolge der harmonischen Folge zu erhalten, muss einfach eine entsprechende Folge $(i_n)_n$ gewählt werden, beispielsweise $j_n = 2n$. Somit erhält man die Teilfolge $c_n = (\frac{1}{2n})_{n>0}$.

(ii) zu zeigen: Die Teilfolge b_n von a_n konvergiert gegen den Grenzwert a.
Beweis:
b_n konvergiert genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon, n \geq n_0$.
Da b_n Teilfolge von a_n ist, gilt $b_n = a_{i_n}$.
Über a_n wissen wir bereits, dass für alle $\varepsilon' > 0$ ein entsprechendes n_1 gefunden werden kann. Wir finden also auch ein n_1 für $\varepsilon' = -|a - b|$.
Somit ist $|b_n - b| = |a_{i_n} - a + a - b| \leq |a_{i_n} - a| + |a - b| < \varepsilon' + |a - b| = -|a - b| + |a - b| = 0 < \varepsilon$.
Damit ist der Grenzwert von a_n auch der Grenzwert von b_n.

$\square$

(iii)

Aufgabe 7

(i) Induktionsbehauptung (IB): $(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, x \geq -1$.
Induktionsanfang (IA) $(n = 0)$: $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0x$.
Induktionsschritt (IS) $(n \Rightarrow n + 1)$: $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n * (1 + x) \overset{\text{(IB)}}{\geq} (1+nx)*(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = nx^2+(n+1)x+1 \overset{x^2 \geq 0}{\geq} 1+(n+1)x$.

$\square$

(ii) zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad q \in \mathbb{R}, |q| < 1$.
Da $|q| < 1$, lässt sich auch schreiben $q = \frac{1}{s}, |s| > 1$. Somit ist zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{s})^n = 0$.
Das ist genau dann der Fall, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |g_n - g| < \varepsilon, n \geq n_0$.

Mit $g = 0$ erhält man $|g_n - 0| = |g_n| = |(\frac{1}{s})^n| = \frac{1}{|s|^n} \overset{|s|>1}{=} \frac{1}{(1+r)^n}$.

Wähle nun $n_0 = \frac{1}{\varepsilon * x}$: Dann ist $\frac{1}{(1+r)^n} \overset{\text{(i)}}{\leq} \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \frac{1}{\frac{x}{\varepsilon * x}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

$\square$

(iii) Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = 0, \quad q \in \mathbb{R}, |q| < 1$.

Beweis:
Formen wir a_n zunächst einmal um:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + \cdots + q^n \\
q * a_n &= q + q^2 + \cdots + q^{n+1} \\
a_n - q * a_n &= (1 + q + \cdots + q^n) - (q + q^2 + \cdots + q^{n+1}) \\
a_n(1-q) &= 1 - q^{n+1} \\
a_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aus $|q| < 1$ folgt $q^{n+1} < q$. Damit ist $0 < \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < 1$ und daher $|\frac{1-q^{n+1}}{1-q}| = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Wähle nun $n_0 = \log_q \frac{\varepsilon}{2q}$. Dann ist
$|a_n - a| = |\frac{1-q^{n+1}}{1-q}| = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{-q^{n+1}}{1-q} < \frac{-q^{n+1}}{1} \leq q^{n+1} = q^n * q$.
Weiterhin $q^n * q \leq q^{n_0} * q = q^{\log_q \frac{\varepsilon}{2q}} * q = \frac{\varepsilon}{2q} * q = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Damit ist 0 der Grenzwert der Folge a_n.

$\square$

Aufgabe 8

(i) Annahme: x ist der Grenzwert von a_n und b_n. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Wähle a_n und b_n mit $a_n < b_n$ so, dass a_n eine monoton wachsende Folge ist und b_n eine monoton fallende Folge ist.
Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Damit sind beide Folgen konvergent und sie müssen denselben Grenzwert haben. Wenn es einen Grenzwert x gibt, ist $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Jedes $x \in \mathbb{R}$ besitzt eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$, deren Grenzwert x ist.
Annahme: Jede Folge a_n besitzt eine "Umkehrfolge" b_n, welche sich

aus entgegengesetzter Richtung dem Grenzwert x nähert, wobei das 0-Element ($\frac{1}{n}$) von n in b_n negativ ist. Deshalb gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung.

(iii) $a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = 1$

$b_n = 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = 1$

Beide Folgen a_n und b_n konvergieren zum Grenzwert $x = 1$, sodass diese eine Intervallschachtelung $I_n := [a_n; b_n] = \{x \in \mathbb{R} | a_n \leq x \leq b_n\}$ bilden.

Zusatzaufgabe

(i) Die Zahl $(a, bc9)^2$ mit $a, b, c \in \{0, \dots, 9\}$ lässt sich auch darstellen als
$(a * 10^0 + b * 10^{-1} + c * 10^{-2} + 9 * 10^{-3})^2$
$= (a * 10^0)^2 + (b * 10^{-1})^2 + (c * 10^{-2})^2 + (9 * 10^{-3})^2$
$= a^2 * 10^0 + b^2 * 10^{-2} + c^2 * 10^{-4} + 81 * 10^{-6}$. Die Zahl hat also aufgrund des Summanden $81 * 10^{-6}$ in jedem Fall 6 Nachkommastellen mit der letzten Ziffer 1. Tauscht man die 9 gegen eine andere Ziffer i, endet das Quadrat der Zahl auf die letzte Ziffer von i^2.

(ii) Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen. Dann wäre $\sqrt{2}$ darstellbar als

$a_0 * 10^0 + a_1 * 10^{-1} + \cdots + a_n * 10^{-n} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i * 10^{-i}$.

Die Zahl $2 = (\sqrt{2})^2$ wäre dann darstellbar als

$2 = {a_0}^2 * 10^0 + {a_1}^2 * 10^{-2} + \cdots + {a_n}^2 * 10^{-2n} = \sum\limits_{i=0}^{n} {a_i}^2 * 10^{-2i}$.

Da die 2 keine Nachkommastellen ungleich 0 hat, müssen die entsprechenden Summanden 0 sein und damit $2 = {a_0}^2$.
Diese (abzählbaren) Fälle können manuell überprüft werden.

$\square$