Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2+1+(1+1)). [1] Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Seien C, D Teilmengen von B, sowie E, F Teilmengen von A.

(i) Zeigen Sie
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$
und veranschaulichen Sie diese Gleichheit in einer Abbildung.

(ii) Geben Sie ein Gegenbeipiel an, um zu zeigen, dass im Allgemeinen nicht
$$f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$$
gilt.

(iii) Nehmen wir nun zusätzlich an, dass f (a) injektiv bzw. (b) surjektiv ist. Gilt nun $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$? Begründen Sie.

Aufgabe 2 (1+(1+1+1+1)). (i) Ist die Nachfolgerfunktion $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Aus welchem Peanoschen Axiom folgt jeweils ihre Antwort?

(ii) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeipiel für jede der folgenden Aussagen:
   (a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
   (b) Ist f injektiv und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
   (c) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
   (d) Ist f injektiv und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 3 ((2+1)+2). (i) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

$A(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! + 1$
$B(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Es kann höchstens eine der beiden Aussagen wahr sein.
   (a) Zeigen Sie, falls für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. Zeigen Sie die analoge Aussage für $B(n)$.
   (b) Warum folgt aus (a) nicht schon, dass doch beide Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr sind? Welche der Aussagen $A(n)$ bzw. $B(n)$ stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie.

(ii) (Division mit Rest) Sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$. Zeigen Sie, dass es immer $q, r \in \mathbb{N}$ mit $n = qm + r$ und $0 \le r < m$ gibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass
$$|a| + |b| \le |a+b| + |a-b|$$
für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Wann gilt Gleichheit?[2]

Abgabe am Mittwoch 11.11.20 bis 14 Uhr

[1] Die Zahlen in Klammern geben die Punkteverteilung auf die jeweiligen Teilaufgaben an.
[2] D.h. man muss alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ finden, so dass Gleichheit in der Ungleichung gilt.