Lineare Algebra I

Ein Kurzskript

A. Martin-Pizarro

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Akademisches Jahr 20/21

pizarro@math.uni-freiburg.de

29. Oktober 2020

Anmerkungen.

Dieses Kurzskript ist während der im Akademischen Jahr an der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg gehaltenen Vorlesungen „Lineare Algebra I & II" entstanden und stark geprägt von den Skripten meiner Kollegen Martin Ziegler und Tobias Kaiser.

Zu meinem eigenen Beitrag gehören sicherlich die zahlreichen Fehler, welche es im Skript definitiv geben wird. Ich bin sehr dankbar über die Mitteilung solcher Fehler und Ungenauigkeiten.

Insbesondere bedanke ich mich bei Herrn Michael Lösch für das aufmerksame Korrekturlesen aber vor allem für die Geduld.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektorräume

1.1 Gauß-Eliminationsmethode

Definition 1.1. Sei n in $\mathbb{N}$. Eine *lineare Gleichung* über $\mathbb{R}$ in n Variablen ist eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ und b in $\mathbb{R}$ liegen. Der Wert a_i ist der *Koeffizient* der Variablen x_i.

Ein Tupel $(c_1, \ldots, c_n)$ aus $\mathbb{R}^n$ ist eine *Lösung* dieser Gleichung, falls $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n = b$, oder im Kurzform gefasst,

$$\sum_{i=1}^{n} a_ic_i = b.$$

Beispiel 1.2. Der Ausdruck $3x_1 + \pi x_2 = \sqrt{3}$ ist eine lineare Gleichung in 2 Variablen, aber $x_1x_2 + 5x_3 = 10$ ist keine lineare Gleichung.

Definition 1.3. Ein *lineares Gleichungssystem* in n Variablen über $\mathbb{R}$ ist eine endliche Kollektion linearer Gleichungen

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

für ein m aus $\mathbb{N}$. Eine *Lösung* des Gleichungssystems ist ein Tupel $(c_1, \ldots, c_n)$, welches Lösung jeder einzelnen Gleichung ist, d. h.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq m.$$

Bezüglich dem obigen Gleichungssystem definieren wir die $m \times n$-*Matrix* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$, als rechteckiges Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Zahl m ist die Anzahl der *Zeilen* der Matrix A und n die Anzahl der *Spalten*. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ wird mit $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Eine $m \times n$-Matrix ist *quadratisch*, falls $m = n$.

Ein Gleichungssystem ist *homogen*, falls alle Einträge b_i gleich Null sind.

Mit Hilfe der Matrix A können wir das obige Gleichungssystem in kurzer Form $Ax = b$ darstellen, wobei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \& \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

jeweils das n-Tupel der Variablen und das m-Tupel aus $\mathbb{R}^m$ sind. Die *erweiterte Koeffizientenmatrix* des Systems $Ax = b$ ist die $m \times (n+1)$-Matrix

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Beachte, dass jedes Gleichungssystem eine eindeutige erweiterte Koeffizientenmatrix besitzt und dass jede erweiterte Koeffizientenmatrix ein Gleichungssystem eindeutig bestimmt.

Definition 1.4. Gegeben eine $m \times n$-Matrix A, betrachten wir folgende *elementare Zeilenumformungen* auf A:

Vertauschung Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile aus A. Wir bezeichnen diese Operation mit V_{ij}.

Multiplikation Wir multiplizieren die i-te Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ aus (*dem Körper*) $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen diese Operation mit $M_i(\lambda)$.

Addition Wir addieren das μ-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, für eine reelle Zahl μ aus (*dem Körper*) $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen diese Operation mit $S_{ij}(\mu)$.

Beachte, dass wir die Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile gewinnen, in dem wir folgende Operationen anwenden: Zuerst $S_{ji}(1)$, dann $S_{ij}(-1)$ und anschließend $S_{ji}(1)$ und $M_i(-1)$ (oder als Komposition $M_i(-1) \circ S_{ji}(1) \circ S_{ij}(-1) \circ S_{ji}(1)$ von Operation, siehe Beispiel 1.15), denn

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} \vdots \\ i\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ j\text{-te Zeile} \\ \vdots \end{pmatrix} \arrow[r, "S_{ji}(1)"] \arrow[dd, "\textbf{Vertauschung } V_{ij}"'] & \begin{pmatrix} \vdots \\ i\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ j\text{-te Zeile} + i\text{-te Zeile} \\ \vdots \end{pmatrix} \arrow[dr, "S_{ij}(-1)"] & \\
 & & \begin{pmatrix} \vdots \\ -(j\text{-te Zeile}) \\ \vdots \\ j\text{-te Zeile} + i\text{-te Zeile} \\ \vdots \end{pmatrix} \arrow[dl, "S_{ji}(1)"] \\
\begin{pmatrix} \vdots \\ j\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ i\text{-te Zeile} \\ \vdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ -(j\text{-te Zeile}) \\ \vdots \\ i\text{-te Zeile} \\ \vdots \end{pmatrix} \arrow[l, "M_i(-1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Die elementaren Zeilenumformungen sind umkehrbar: z. B. ist $M_i(1/\lambda)$ die Umkehrung von $M_i(\lambda)$, und $S_{ij}(-\mu)$ die Umkehrung von $S_{ij}(\mu)$.

Lemma 1.5. *Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems bleibt unter Anwendung elementarer Zeilenumformungen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten.*

Beweis. Wegen der vorigen Bemerkung genügt es lediglich die Zeilenumformungen **Multiplikation** und **Addition** zu betrachten. Klarerweise gilt für $\lambda \neq 0$, dass

$$a_{i1}c_1 + \ldots + a_{in}c_n = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda a_{i1}c_1 + \ldots + \lambda a_{in}c_n = \lambda b_i,$$

und somit ändert die Operation **Multiplikation** $M_i(\lambda)$ die Lösungsmenge nicht.

Für die Operation **Addition** $S_{ij}(\mu)$ folgt auch, dass

$$\begin{array}{rcl} a_{i1}c_1 + \ldots + a_{in}c_n & = & b_i \\ a_{j1}c_1 + \ldots + a_{jn}c_n & = & b_j \end{array}$$

genau dann, wenn

$$\begin{array}{rcl} (a_{i1} + \mu a_{j1})c_1 + \ldots + (a_{in} + \mu a_{jn})c_n & = & b_i + \mu b_j \\ a_{j1} + c_1 + \ldots + a_{jn}c_n & = & b_j \end{array},$$

wie gewünscht. $\square$

Definition 1.6. Eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist in *Zeilenstufenform*, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

(a) Nullzeilen, welche nur aus dem Eintrag 0 bestehen, kommen ganz unten nach nicht-trivialen Zeilen vor, in welchen (mindestens) ein Eintrag nicht Null ist. Der erste nicht-Null Eintrag einer nicht-trivialen Zeile heißt *Führungskoeffizient* oder *Pivot* der Zeile. Allerdings sind die Pivots einer erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ nur Einträge aus der Teilmatrix A, und nicht aus der erweiterten Spalte.

(b) Der Pivot einer (nicht-trivialen) Zeile kommt immer rechts von den Pivots der vorigen Zeilen vor.

Die Anzahl der Zeilen mit einem (nicht-Null) Pivot heißt *Anzahl der Stufen* oder *Rang* der Matrix. Die Matriz ist in *normierter Zeilenstufenform*, falls jeder Pivot den Wert 1 hat.

Beispiel 1.7. Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

ist in normierter Zeilenstufenform.

Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform?

Proposition 1.8. (*Gauß-Eliminationsmethode (schwache Version)*) *Jedes Gleichungssystem $Ax = b$ lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in Zeilenstufenform bringen.*

Der Beweis ist explizit und liefert den Algorithmus für die Eliminationsmethode, wobei es schneller gehen kann, wenn wir uns die Matrix im Voraus anschauen.

Beweis. Wir beweisen es induktiv (siehe Prinzip A.2 im Appendix A) über die Zahl $k = \min(m, n)$, wobei m die Anzahl der Zeilen der erweiterten Koeffizienten Matrix (A, b) und n die Anzahl der Variablen ist. Wenn $k = 0$, müssen wir nichts machen, denn es gibt überhaupt keine lineare Gleichung.

Wir nehmen nun $k > 0$ an und dass die Behauptung für alle Gleichungssysteme mit entsprechender Zahl echt kleiner als k gilt. Falls alle Einträge in der ersten Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix Null sind, spielt die Variable x_1 keine Rolle in unserem Gleichungssystem und wir können es als Gleichungssystem $A'x = b$ auffassen, wobei

$$x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ein Tupel von $n-1$ Variablen ist und $A' = (a_{ij})_{1\le i\le m, 2\le j\le n}$. Induktiv lässt sich das Gleichungssystem $A'x = b$ in Zeilenstufenform mit entsprechender Matrix C bringen. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{pmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform und entspricht dem ursprünglichen Gleichungssystem $Ax = b$.

Wir nehmen nun an, dass es eine Zeile gibt, in welcher der erste Eintrag nicht Null ist. Mit Hilfe einer **Vertauschung** können wir annehmen, dass der Eintrag $a_{11} \neq 0$. Für jede weitere Zeile i setze $\mu_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ und wende die Zeilenumformung $S_{i1}(-\mu_i)$ an, so dass alle Einträge in der ersten Spalte Null sind, außer dem Pivot a_{11}. Schreibe die neu entstandene Koeffizientenmatrix als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \\ 0 & D \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

für eine $m\times(n-1)$-Matrix $D = (d_{ij})_{1\le i\le m, 2\le j\le n+1}$. Die Teilkoeffizientenmatrix $(d_{ij})_{2\le i\le m, 2\le j\le n+1}$ induziert ein Gleichungssystem in den $n-1$ Variablen $x_2, \ldots, x_n$ mit $m-1$ Gleichungen. Wegen der Induktionsannahme lässt sich das induzierte Gleichungssystem, und somit auch das ursprüngliche Gleichungssystem, in Zeilenstufenform bringen, wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 1.9. Sei $Ax = b$ ein Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform und von Rang r. Für jedes $1 \le i \le r$ sei $a_{ij(i)}$ der Pivot der i-ten Zeile. Mit Hilfe der Zeilenumformungen $M_i(a_{ij(i)}^{-1})$ können wir annehmen, dass das Gleichungssystem in normierter Zeilenstufenform ist.

Beispiel 1.10. Betrachte das Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

Wir vertauschen zuerst die Zeilen 1 und 2 und erhalten die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

Die Addition des (-2)-fachen der ersten Zeile zur dritten Zeile und des (-3)-fachen der ersten Zeile zur vierten Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -10 \end{array}\right).$$

Wende nun die Operationen $S_{32}(1)$ und $S_{42}(3)$ an und erhalte die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Wenn wir die dritte und vierte Zeilen vertauschen und die erste Zeile mit 1/3 multiplizieren, ist die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4/3 & 5/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

in normierter Zeilenstufenform. Beachte, dass das Gleichungssystem Rang 2 besitzt, da die Matrix 2 Stufen hat (die Einträge in der erweiterten Spalte sind keine Pivots).

Folgende Proposition lässt sich leicht durch sukzessives Einsetzen der Werte (von unten nach oben) zeigen.

Proposition 1.11. *Sei A eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform mit r Stufen und b ein n-Tupel mit Koordinaten aus $\mathbb{R}$.*

(a) Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$.

(b) Wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, lässt sich der Lösungsraum $\mathcal{S}$ folgendermaßen parametrisieren*:*

$$\mathcal{S} = \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \mid c_{j(i)} = \frac{1}{a_{ij(i)}}\big(b_i - \sum_{j=j(i)+1}^{n} a_{ij}c_j\big),\ \textit{für } 1 \leq i \leq r\},$$

wobei $a_{ij(i)}$ der Pivot der i-ten Zeile ist. Insbesondere können wir die Elemente c_j, mit $j \neq j(i)$ für $1 \leq i \leq r$, frei wählen. Alle anderen Einträge sind eindeutig bestimmt.

Wegen Lemma 1.5 bleibt der Lösungsraum eines beliebigen Gleichungssystems erhalten, wenn wir das System in Zeilenstufenform bringen. Mit Hilfe der Gauß-Eliminationsmethode 1.8 können wir explizit bestimmt, ob ein beliebiges Gleichungssystem lösbar ist, und dementsprechend, den Lösungsraum beschreiben.

Wenn der Rang der Matrix A gleich n ist, gibt es höchstens eine Lösung für jedes Gleichungssystem $Ax = b$. Wenn der Rang der Matrix A gleich m ist, gibt es zumindest eine Lösung (aber möglicherweise ist der Lösungsraum unendlich).

Beachte, dass ein homogenes Gleichungssystem immer lösbar ist, wegen der trivialen Lösung $(0, \dots, 0)$.

Korollar 1.12. *Ein homogenes Gleichungssystem von m Gleichungen in n Variablen hat eine nicht-triviale Lösung, falls $n - m > 0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Gleichungssystem in Zeilenstufenform gegeben wird, denn das Gleichungssystem bleibt homogen bei Anwendungen der Zeilenumformungen.

Wenn die Matrix in Zeilenstufenform mit Pivots $a_{1j(1)}, \dots, a_{rj(r)}$ gegeben wird, wobei r der Rang der Matrix ist, gilt $j(1) < j(2) < \dots < j(r)$. Insbesondere gibt es mindestens einen Index j_0 verschieden von den Werten $\{j(i)\}_{1 \leq i \leq r}$, weil $n - r \geq n - m > 0$, da $r \leq m$. Somit können wir eine nicht-triviale Lösung finden (mit $c_{j_0} \neq 0$ beliebig). □

Wir wollen nun die Struktur des Lösungsraumes eines nicht-homogenen Gleichungssystems besser verstehen. Dafür definieren wir folgendermaßen eine Addition sowie eine *Skalarmultiplikation* auf $\mathbb{R}^n$:

Addition $(x_1 \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ für λ aus $\mathbb{R}$.

Wir bezeichnen mit $0_{\mathbb{R}^n}$ das Tupel $(0, \dots, 0)$ aus $\mathbb{R}^n$. Wenn $\mathcal{S}$ der Lösungsraum eines homogenen Gleichungssystems in n Variablen ist, lässt sich folgendes leicht zeigen:

- $0_{\mathbb{R}^n}$ liegt in $\mathcal{S}$.
- Wenn $c = (c_1, \dots, c_n)$ und $d = (d_1, \dots, d_n)$ in $\mathcal{S}$ liegen, so auch $c + d$.
- Wenn c in $\mathcal{S}$ liegt, so auch $\lambda \cdot c$ für alle λ aus (dem Körper) $\mathbb{R}$.

Wir werden im Abschnitt 1.4, Definition 1.40, sehen, dass $\mathcal{S}$ ein *Unterraum* des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ ist.

Proposition 1.13. *Sei $Ax = b$ ein lösbares Gleichungssystem in n Variablen mit Lösungsraum $\mathcal{S}$ und bezeichne $\mathcal{S}_H$ den Lösungsraum des von $Ax = b$ induzierten homogenen Gleichungssystems $Ax = 0_{\mathbb{R}^n}$. Dann ist*

$$\mathcal{S} = c + \mathcal{S}_H,$$

wobei $c + \mathcal{S}_H = \{c + m \mid m \in \mathcal{S}_H\}$ mit einer (beliebigen) Lösung c des Gleichungssystems $Ax = b$.

Beweis. Wir müssen einerseits zeigen, dass jedes Element aus $c + \mathcal{S}_H$ eine Lösung von $Ax = b$ ist und andererseits, dass sich jede Lösung in $\mathcal{S}$ als Summe $c + d$, mit d in $\mathcal{S}_H$, schreiben lässt.

Sei also d eine Lösung von $Ax = 0_{\mathbb{R}^n}$ und schreibe $A = (a_{ij})$. Insbesondere gilt

$$\begin{array}{rcl} a_{i1}c_1 + \ldots + a_{in}c_n & = & b_i \\ a_{i1}d_1 + \ldots + a_{in}d_n & = & 0 \end{array}.$$

Die Summe $c + d$ erfüllt klarerweise $Ax = b$. Gegeben nun eine Lösung c' von $Ax = b$ haben wir

$$\begin{array}{rcl} a_{i1}c'_1 + \ldots + a_{in}c'_n & = & b_i \\ a_{i1}c_1 + \ldots + a_{in}c_n & = & b_i \end{array}$$

und die Differenz $d = c' - c$ erfüllt jede Gleichung

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0.$$

Somit liegt $c' = c + d$ in $c + \mathcal{S}_H$, wie gewünscht. □

1.2 Gruppen und Verknüpfungen

Notation. Eine *Verknüpfung* $*$ auf einer Menge S ist eine binäre Operation $* : S \times S \to S$. Wir schreiben $a * b$ für das Element $*(a, b)$, das heißt, das Bild in S vom Paar (a, b) aus $S \times S$ unter der Verknüpfung $*$.

Definition 1.14. Eine *Halbgruppe* $(S, *)$ besteht aus einer (nicht-leeren) Menge S zusammen mit einer Verknüpfung $*$, welche das *Assoziativgesetz* erfüllt:

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \text{ für alle } a, b \text{ und } c \text{ aus } S.$$

Die Halbgruppe ist *kommutativ* (oder *abelsch*), falls

$$a * b = b * a, \text{ für alle } a \text{ und } b \text{ aus } S.$$

In einer Halbgruppe müssen wir also nicht mehr auf die Klammerung langer Produkte achten und schreiben daher $a * b * c$ anstatt $a * (b * c)$, usw.

Beispiel 1.15. Die Summe und das Produkt auf $\mathbb{R}$ sind assoziative und kommutative Verknüpfungen.

Gegeben Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, definiere die Komposition

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Die Kollektion X^X aller Abbildungen $X \to X$ bildet eine Halbgruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen. Ist die Halbgruppe X^X kommutativ?

Beispiel 1.16. Gegeben zwei $m \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ über $\mathbb{R}$, definiere die *Summe*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Diese Verknüpfung definiert eine kommutative Halbgruppe auf $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Für eine $n \times \ell$-Matrix $C = (c_{jk})$ definiere das *Produkt* $A \cdot C = (d_{ik})$ als die $m \times \ell$-Matrix, deren Eintrag an der (i,k)-Stelle das Element

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$$

ist. Die Menge $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist eine Halbgruppe. Ist sie kommutativ?

Definition 1.17. Ein Element e der Halbgruppe $(S, *)$ ist *links-neutral*, falls

$$e * a = a \text{ für alle } a \text{ aus } S.$$

Ein Element f in S ist *rechts-neutral*, falls

$$a = a * f \text{ für alle } a \text{ aus } S.$$

Aufgabe. Gegeben eine Menge X, definiere folgende Verknüpfung

$$\begin{array}{rccc} *: & X \times X & \to & X \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array}.$$

Besitzt $(X, *)$ ein links-neutrales Element? Und ein rechts-neutrales Element?

Bemerkung 1.18. Wenn die Halbgruppe $(S, *)$ sowohl ein links-neutrales Element e als auch ein rechts-neutrales Element f besitzt, dann stimmen e und f überein.

Insbesondere reden wir über das *neutrale* Element der Halbgruppe für das einzige Element, welches sowohl links-neutral als auch rechts-neutral ist, wenn ein solches Element existiert.

Beweis. Beachte, dass $e = e * f = f$. □

Aufgabe. Besitzt X^X ein neutrales Element?

Definition 1.19. Ein *Monoid* ist eine Halbgruppe mit einem neutralen Element.

Sei $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element e. Wenn

$$a * b = e,$$

ist a ein *links-Inverses* von b und b ist ein *rechts-Inverses* von a.

Wenn des Element a des Monoides $(M, *)$ sowohl ein links-Inverses b als auch ein rechts-Inverses c besitzt, dann ist $b = c$, weil

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c.$$

In diesem Fall reden wir über das *Inverse* von a und bezeichnen es mit a^{-1}, weil es eindeutig ist, wenn es existiert. Wenn das Monoid additiv geschrieben wird (nur wenn M abelsch ist!), schreiben wir das Inverse von a als $-a$.

Definition 1.20. Eine *Gruppe* ist ein Monoid, in welchem jedes Element ein Inverses hat.

Bemerkung 1.21. Aus der Eindeutigkeit des Inverses folgt, dass in einer Gruppe G

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1},$$

denn

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e.$$

Ferner ist $(a^{-1})^{-1} = a$.

Allgemein definiere für n aus $\mathbb{Z}$

$$a^n = \begin{cases} e, \text{ für } n = 0 \\ \underbrace{a * \cdots * a}_{n}, \text{ für } n > 0 \\ (a^{-n})^{-1}, \text{ für } n < 0. \end{cases}$$

Lemma 1.22. *Eine Halbgruppe $(S, *)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn für alle a und b aus S die Gleichungen $a * x = b$ und $y * a = b$ eindeutig lösbar sind.*

Beweis. Wenn $(S, *)$ eine Gruppe ist, dann ist $a^{-1} * b$ die einzige Lösung von $a * x = b$ und $b * a^{-1}$ die einzige Lösung von $y * a = b$.

Angenommen nun, dass in der Halbgruppe $(S, *)$ die obigen Gleichungen immer eindeutig lösbar sind, zeigen wir zuerst, dass S ein links-neutrales Element besitzt: Sei a_0 aus S fest und sei e die eindeutige Lösung der Gleichung $e * a_0 = a_0$ (für $a = b = a_0$ in $y * a = b$). Wir müssen zeigen, dass $e * a = a$ für alle a aus S ist: Sei a aus S und wähle c mit $a_0 * c = a$. Dann ist

$$e * a = e * (a_0 * c) = (e * a_0) * c = a_0 * c = a,$$

wie gewünscht.

Analog finden wir ein rechts-Inverses Element f. Somit ist $(S, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e = f$. Wir müssen nur noch zeigen, dass jedes Element a ein Inverses besitzt: Wir finden mit der Gleichung $y * a = e$ ein links-Inverses zu a und die Gleichung $a * x = e$ liefert ein rechts-Inverses. Also ist $(S, *)$ eine Gruppe. □

Beispiel 1.23. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist *injektiv*, falls für alle x_1 und x_2 in X aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$. Die Notation $X \xhookrightarrow{f} Y$ bedeutet, dass f eine Injektion von X nach Y ist.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist *surjektiv*, falls jedes y aus Y im Bildbereich von f liegt, das heißt, es gibt ein x aus X mit $f(x) = y$. Die Notation $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$ bedeutet, dass f eine Surjektion von X nach Y ist.

Eine *Bijektion* von X nach Y ist eine surjektive injektive Abbildung, oder äquivalent dazu, eine Abbildung $f : X \to Y$ derart, dass es eine Abbildung $g : X \to Y$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ gibt. Beachte, dass die Abbildung g auch eine Bijektion ist. Wenn $X = Y$, sagen wir, dass f eine *Permutation* von X ist.

Da die Komposition bijektiver Abbildungen wiederum bijektiv ist, bildet die Menge $\mathrm{Sym}(X)$ aller Permutationen $X \to X$ eine Gruppe, genannt die *symmetrische Gruppe* von X. Die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ wird mit S_n bezeichnet.

Aufgabe. Was ist das neutrale Element von $\mathrm{Sym}(X)$?

Wie viele Elemente besitzt S_2? Und S_3? Gibt es eine Formel für die Kardinalität (oder Mächtigkeit) von S_n?

Zeige, dass S_n genau dann kommutativ ist, wenn $n \leq 1$.

Aufgabe. Zeige induktiv über die Kardinalität der endlichen Menge X, dass eine Abbildung $f : X \to X$ genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

Definition 1.24. Eine Teilmenge U einer Gruppe G ist eine *Untergruppe*, falls folgende Bedingungen gelten:

- Das neutrale Element e von G liegt in U.
- Die Menge U ist unter der Verknüpfung $*$ sowie der Inversenabbildung $x \mapsto x^{-1}$ abgeschlossen, oder äquivalent dazu, für alle x und y aus U liegt $x * y^{-1}$ in U.

Beispiel 1.25. Die Menge $\{e\}$ ist eine Untergruppe der Gruppe G, genannt die *triviale* Untergruppe.

Gegeben ein Element a aus der Gruppe G, bildet die Menge $a^{\mathbb{Z}} = \{a^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (siehe Bemerkung 1.21) eine Untergruppe. In der Kollektion der Untergruppen von G, welche a enthalten, ist $a^{\mathbb{Z}}$ die kleinste Untergruppe bezüglich Inklusion, und somit heißt $a^{\mathbb{Z}}$ die von a *erzeugte Untergruppe.*

Aufgabe. Ist $\mathbb{N}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$?

Definition 1.26. Ein *Gruppenhomomorphismus* von der Gruppe G nach der Gruppe H ist eine Abbildung $f : G \to H$ derart, dass für alle a und b aus G

$$f(a * b) = f(a) * f(b),$$

wobei $a * b$ das Produkt in G und $f(a) * f(b)$ das Produkt in H ist.

Beispiel 1.27. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (R^{\neq 0}, \cdot) \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Ist diese Abbildung surjektiv?

Aufgabe. Wenn $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus ist, was ist das Bild des neutralen Elementes e von G? Und welches Element in H ist $f(a^{-1})$?

Zeige, dass das Bild $f(G)$ eine Untergruppe von H ist.

1.3 Ringe und Körper

Definition 1.28. Ein Ring R (mit Eins) besteht aus einer Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ derart, dass:

- $(R, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0_R ist.
- $(R, \cdot)$ ein Monoid mit neutralem Element 1_R, genannt die *Eins* von R, ist.

- Die Distributivitätsgesetze für alle a, b und c aus R gelten:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ und } (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Ein Ring ist *kommutativ*, falls das Monoid $(R, \cdot)$ kommutativ ist. In diesem Fall sind beide Distributivitätsgesetze äquivalent!

Der *triviale* Ring ist der Ring, welcher nur aus dem Element 0 besteht.

Notation. In einem Ring benutzen wir die additive Notation für die Summe und die multiplikative Notation für das Produkt: Insbesondere ist $-a$ das Inverse des Elements a bezüglich der Verknüpfung $+$, wobei a^{-1} das Inverse (falls es existiert) des Elements a bezüglich der Verknüpfung $\cdot$ bezeichnet.

Die multiplikative Verknüpfung $\cdot$ wird häufig aus dem Kontext implizit so verwendet, dass wir ab anstatt $a \cdot b$ schreiben.

Bemerkung 1.29. In jedem Ring R gelten folgende Identitäten für alle Elemente a und b aus R :

- $a \cdot 0_R = 0_R = 0_R \cdot a.$
- $a(-b) = -ab.$

Beispiel 1.30. Der Quotientenraum $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Kongruenzenklassen modulo $n \geq 1$ (siehe Beispiel B.6) ist ein kommutativer Ring mit der Klasse von 1 modulo n als Eins: Betrachte die Äquivalenzrelation E auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$(x_1, x_2)E(y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \equiv y_i \mod n \text{ für } i = 1, 2.$$

Die Äquivalenzklasse des Paares (x, y) lässt sich mit dem Paar $(\bar{x}, \bar{y})$ aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ identifizieren, wobei $\bar{x}$ die Kongruenzklasse von x in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & (x, y) & \mapsto & \overline{x+y} \end{array}$$

ist klarerweise E-kompatibel und induziert nach dem Lemma B.8 eine Verknüpfung

$$+ : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

welche eine abelsche Gruppe auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$ mit neutralem Element $\bar{0}$ definiert. Ferner ist das additive Inverse von $\bar{k}$, für $0 \leq k \leq n-1$, das Element $\overline{n-k}$.

Weil die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & (x, y) & \mapsto & \overline{x \cdot y} \end{array}$$

auch E-kompatibel ist, definiert die Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

ein kommutatives Monoid auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$ mit neutralem Element $\bar{1}$.

Aufgabe. Besitzt die Kongruenzklasse $\bar{2}$ ein multiplikatives Inverse in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? Und $\bar{5}$?

Was ist $\bar{2} \cdot \bar{2}$ in $\mathbb{Z}/3Z$?

Definition 1.31. Die *Charakterisitik* eines nicht-trivialen kommutativen Rings mit Eins ist die kleinste Zahl natürliche Zahl k so, dass

$$\underbrace{1_R + \ldots + 1_R}_{k} = 0_R,$$

falls eine solche natürliche Zahl existiert. Ansonsten sagen wir, dass der Ring *der Charakteristik* 0 *ist.*

Beachte, dass die Ringe $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ der Charakteristik 0 sind, aber $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Charakteristik n ist. Wenn R der Charakteristik k ist, dann ist für alle x aus R

$$\underbrace{x + \ldots + x}_{k} = 0_R,$$

wegen des Distributivitätsgesetzes.

Definition 1.32. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Das Element a ist eine *Einheit*, falls a ein multiplikatives Inverses a^{-1} in R besitzt.

Das Element b ist ein *Nullteiler*, falls $b \neq 0_R$ aber $b \cdot c = 0_R$ für ein $c \neq 0$ aus R.

Der kommutative Ring ist ein *Integritätsbereich*, falls er nullteilerfrei ist: Wenn $a \cdot b = 0_R$, dann muss $a = 0_R$ oder $b = 0_R$ sein.

Aufgabe. Zeige, dass $a \cdot b$ genau dann eine Einheit ist, wenn a und b Einheiten sind.

Lemma 1.33. *Ein kommutativer Ring ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn für alle a, b und c aus R*

$$ab = ac \Longleftrightarrow a = 0_R \text{ oder } b = c.$$

Beweis. Beachte, dass $ab = ac$, falls $a = 0_R$ oder $b = c$, also nur die andere Richtung geprüft werden muss. Angenommen, dass R ein Integritätsbereich ist und $ab = ac$, dann ist $a(b-c) = 0_R$. Es folgt, dass $a = 0_R$ oder $b - c = 0_R$, das heißt, $b = c$, wie gewünscht.

Wir zeigen nun, dass R nullteilerfrei ist, wenn die Bedingung links gilt. Angenommen es gibt a und b im Ring mit $a \cdot b = 0_R = a \cdot 0_R$, dann folgt aus der Bedingung, dass $a = 0_R$ oder $b = 0_R$, und somit ist R nullteilerfrei, wie gewünscht. □

Aufgabe. Zeige, dass die Charakteristik eines Integritätsbereiches entweder 0 oder eine Primzahl ist.

Definition 1.34. Ein *Körper* $\mathbb{K}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, derart, dass $1_\mathbb{K} \neq 0_\mathbb{K}$ und jedes Element $a \neq 0_\mathbb{K}$ ein Inverses a^{-1} besitzt, oder äquivalent dazu, wenn $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$ eine Gruppe ist.

Die Bedingung, dass $0_\mathbb{K}$ und $1_\mathbb{K}$ verschieden sein müssen, schließt den trivialen Ring aus,.

Satz 1.35. (*Der Satz von Wedderburn (schwache Version)*) *Jeder kommutative endliche nicht-triviale Integritätsbereich ist ein Körper.*

Beweis. Wegen des Lemmas 1.33 ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \lambda_a : & R & \to & R \\ & b & \mapsto & a \cdot b \end{array}$$

genau dann injektiv, wenn $a \neq 0_R$. Eine injektive Abbildung auf einer endlichen Mengen ist immer surjektiv, also liegt 1_R im Bildbereich von λ_a für $a \neq 0_R$. Das heißt, dass das Element a ein Inverses a^{-1} besitzt. □

Aufgabe. Für welche Werte n ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich? Und ein Körper?

Beispiel 1.36. Eine *komplexe Zahl* ist ein Paar (a, b) mit a und b aus $\mathbb{R}$. Wir nennen a den *Realteil* und b den *Imaginärteil.* Wir identifizieren jede reelle Zahl r mit der komplexen Zahl $(r, 0)$.

Auf der Mengen der komplexen Zahlen definieren wir folgende Operationen:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, b + d) \text{ und } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Insbesondere erfüllt das Element $i = (0, 1)$ folgende Gleichung:

$$i^2 = (0 - 1, 0) = -(1, 0) = -1.$$

Daher schreiben wir die komplexe Zahl (a, b) als $a + bi$. Mit den obigen Operationen ist die Menge der komplexen Zahlen ein Körper, bezeichnet mit $\mathbb{C}$, denn für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2},$$

wobei das Element $\bar{z} = a - bi$ das *komplex Konjugierte* von $z = a + bi$ ist.

Aufgabe. Können wir eine lineare Anordnung auf $\mathbb{C}$ definieren, welche mit den Ringoperationen kompatibel ist? Das heißt,

$$a \leq b \Longrightarrow \begin{cases} a + c \leq b + c, \text{ und} \\ ac \leq bc, \text{ falls } c \geq 0_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

1.4 Vektorräume und Unterräume

In diesem Abschnitt ist $\mathbb{K}$ ein Körper.

Definition 1.37. Ein *Vektorraum* über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ mit neutralem Element 0_V zusammen mit einer Abbildung $K \times V \to V$, genannt *Skalarmultiplikation*, so dass folgende Identitäten für alle λ und μ aus $\mathbb{K}$, sowie v und w aus W gelten:

- $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$,
- $\lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$,
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

Die Elemente aus K heißen *Skalare.* Die Elemente aus V heißen *Vektoren.*

Wenn der Körper $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$, beziehungsweise $\mathbb{C}$ ist, so reden wir von *reellen*, beziehungsweise *komplexen*, Vektorräumen.

Notation. Wir schreiben die Operation auf V additiv, das bedeutet, dass das neutrale Element 0_V von V der *Nullvektor* ist. Das Inverse des Vektors v ist der Vektor $-v = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot v$. Wir werden häufig die Skalarmultiplikation verkürzen und schreiben λv anstatt $\lambda \cdot v$.

Es folgt aus den obigen Distributivengesetzen, dass

$$0_{\mathbb{K}} v = 0_V \text{ und } \lambda 0_V = 0_V \text{ für } v \text{ aus } V \text{ und } \lambda \text{ aus } \mathbb{K}.$$

Ferner ist $-\lambda v = (-\lambda)v = \lambda(-v)$ und somit $(\lambda - \mu)v = \lambda v - \mu v$.

Bemerkung 1.38. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für λ aus $\mathbb{K}$ und v aus V folgt aus $\lambda v = 0_V$, dass $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ oder $v = 0_V$.

Beispiel 1.39. Sei $n \geq 1$. Das kartesische Produkt $\mathbb{K}^n$ mit der koordinatenweisen Summe sowie folgender Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ \big(\lambda, (x_1, \ldots, x_n)\big) & \mapsto & (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{array}$$

ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}^1$ der Körper $\mathbb{K}$ selbst ist. Insbesondere ist $\mathbb{C}$ sowohl ein $\mathbb{R}$-Vektorraum als auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Aber diese Vektorraumstrukturen auf $\mathbb{C}$ sind sehr unterschiedlich!

Des Weiteren können wir analog zur Definition 1.3 Matrizen über $\mathbb{K}$ betrachten, das heißt, dass jeder Eintrag in der Matrix aus $\mathbb{K}$ kommt. Die Menge $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & \big((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}, , (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}\big) & \mapsto & (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & \big(\lambda, (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}\big) & \mapsto & (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \end{array}$$

Definition 1.40. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Der Vektor w ist eine *Linearkombination* der Familie $(v_i)_{i\in I}$, falls eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus $\mathbb{K}$ so existieren, dass

$$w = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_n v_{i_n} \text{ oder in kurzer Form } w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j},$$

für Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ aus $(v_i)_{i\in I}$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$ die Kollektion aller Vektoren aus V, welche sich als eine Linearkombination der Familie $(v_i)_{i\in I}$ schreiben lassen.

Gegeben eine beliebige Teilmenge X von V, sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Aufzählung der Teilmenge X und setze $\mathrm{Lin}(X) = \mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$, wobei $\mathrm{Lin}(\emptyset) = \{0_V\}$ als Konvention. Es lässt sich leicht zeigen, dass $\mathrm{Lin}(X) \subset \mathrm{Lin}(Y)$, falls jeder Vektor v aus X in $\mathrm{Lin}(Y)$ liegt.

Eine Teilmenge U des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist ein *Unterraum*, falls U den Nullvektor 0_V enthält und unter Summe und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, oder äquivalent dazu, dass für alle u_1 und u_2 aus U, sowie λ und μ aus $\mathbb{K}$, der Vektor $\lambda u_1 + \mu u_2$ in U liegt.

Beachte, dass der Unterraum U wiederum ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, wenn wir die Einschränkung der Operationen auf U betrachten.

Aufgabe. Für welche Werte a aus $\mathbb{K}$ ist die Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = a\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$?

Lemma 1.41. *Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Unterräumen des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Die Menge*

$$\bigcap_I U_i = \{v \in V \mid v \in U_i \text{ für alle } i \in I\}$$

ist ein Unterraum. Es ist der größte Unterraum (bezüglich Inklusion), welcher in jedem U_i enthalten ist.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass $\bigcap_I U_i$ ein Unterraum ist, weil die zweite Behauptung klarerweise folgt. Da 0_V in jedem Unterraum U_i liegt, folgt, dass $\bigcap_I U_i$ den Nullvektor 0_V enthält.

Wir nehmen nun an, dass v_1 und v_2 in $\bigcap_I U_i$ liegen, und wählen λ und μ aus $\mathbb{K}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $\lambda v_1 + \mu v_2$ in $\bigcap_I U_i$ liegt, das heißt, dass $\lambda v_1 + \mu v_2$ in U_i für jedes i aus I liegt. Da v_1 und v_2 in jedem U_i liegen, liegt $\lambda v_1 + \mu v_2$ in jedem U_i, wie gewünscht. $\square$

Proposition 1.42. *Sei X eine Teilmenge des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Die Menge* $\mathrm{Lin}(X)$ *ist ein Unterraum mit*

$$\mathrm{Lin}(X) = \bigcap_{\substack{X \subset U \\ U \text{ Unterraum von } V}} U.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Lin}(X)$ *der kleinste Unterraum von V, welcher X enthält.*

Wir sagen, dass $\mathrm{Lin}(X)$ *der von X erzeugte Unterraum* ist. Beachte, dass der obige Durchschnitt nicht-leer ist, weil V ein Unterraum von V ist und X enthält.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Lin}(X)$ ein Unterraum ist, welcher X enthält. Da jedes Element v aus X eine Linearkombination von X ist (nämlich $v = 1_{\mathbb{K}} v$), müssen wir nur zeigen, dass $\mathrm{Lin}(X)$ ein Unterraum ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $X \neq \emptyset$. Weil $0_V = 0_{\mathbb{K}} v$ für jeden Vektor v aus X, enthält $\mathrm{Lin}(X)$ den Nullvektor. Seien nun λ und μ aus $\mathbb{K}$ beliebig, sowie v_1 und v_2 in $\mathrm{Lin}(X)$. Schreibe

$$v_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_{i_j} \text{ und } v_2 = \sum_{k=1}^{m} \mu_k w_{j_k}$$

für geeignete Vektoren $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}, w_{j_1}, \ldots, w_{j_m}$ aus X. Dann liegt

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda \lambda_j u_{i_j} + \sum_{k=1}^{m} \mu \mu_k w_{j_k}$$

klarerweise in $\mathrm{Lin}(X)$, wie gewünscht.

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Lin}(X)$ der kleinste Unterraum von V ist, welcher X enthält. Wir nehmen an, dass U ein Unterraum ist, welcher die Menge X enthält. Da U unter Summe und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, enthält U insbesondere jede Linearkombination von Vektoren aus X, also gilt $\mathrm{Lin}(X) \subset U$ und somit ist

$$\mathrm{Lin}(X) \subset \bigcap_{\substack{X \subset U \\ U \text{Unterraum von } V}} U \subset \mathrm{Lin}(X).$$

Es folgt, dass beide Mengen gleich sind, wie gewünscht. □

Aufgabe. Beschreibe den vom Nullvektor erzeugten Unterraum.

Definition 1.43. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Wir bezeichnen mit $\sum_I U_i$ den von der Menge $\bigcup_{i\in I} U_i$ erzeugten Unterraum.

Falls die Indexmenge I endlich ist, schreiben wir auch $U_1 + \ldots + U_n$ für $\sum_{1\leq i\leq n} U_i$.

Bemerkung 1.44. Ein Element v liegt genau dann in $\sum_I U_i$, wenn $v = u_1 + \ldots + u_n$ für Vektoren u_j aus U_{i_j}, wobei die Indizes $i_1, \ldots, i_n$ paarweise verschieden sind.

Insbesondere ist $\sum_I U_i$ der kleinste Unterraum, welcher jeden U_i enthält.

Beweis. Klarerweise liegen solche Linearkombinationen $v = u_1 + \ldots + u_n$ in $\sum_I U_i$. Sei nun v in $\sum_I U_i = \mathrm{Lin}((U_i)_{i\in I})$. Wir können v schreiben als eine Linearkombination $v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m$, wobei die Vektoren w_i aus $\bigcup_I U_I$ kommen. Jeder Vektor w_j liegt in einem Unterraum U_{l_j} für ein l_j aus I. Insbesondere kommen nur endlich viele Indizes l_j vor. Sei $\{i_1, \ldots, i_n\}$ eine Aufzählung aller möglichen Indizes. Setze nun

$$I_j = \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid l_k = i_j\}$$

und beachte, dass der Vektor

$$u_j = \sum_{k\in I_j} \lambda_k w_{l_k}$$

in U_{i_j} liegt. Nun ist $w = u_1 + \cdots + u_n$, wie gewünscht.

Für die letzte Behauptung, ist es offensichtlich, dass der Unterraum $\sum_I U_i$ jeden U_i enthält. Sei nun W ein Unterraum von V, welcher jeden U_i enthält. Insbesondere ist $\bigcup_I U_i \subset W$ und somit $\sum_I U_i = \mathrm{Lin}(\bigcup_I U_i) \subset W$, wie gewünscht. □

Bemerkung 1.45. Der Leser soll nun überprüfen, dass die Gauß-Eliminationsmethode im Abschnitt 1.1 allgemein für Vektorräume V über einem Körper $\mathbb{K}$ gilt, wenn für den Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

die Variablen Werte in V annehmen und die Koeffizienten a_{ij}, b_i aus $\mathbb{K}$ kommen.

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

2.1 Dimension und Basen

Definition 2.1. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Die Familie ist *linear unabhängig*, falls die einzige Möglichkeit den Nullvektor als Linearkombination von Vektoren der Familie zu schreiben die triviale Darstellung ist, das heißt, für jede natürliche Zahl n und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$0_V = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j},$$

muss $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Ansonsten ist die Familie *linear abhängig*.

Bemerkung 2.2. Wenn einer der Vektoren v_i in der Familie der Nullvektor ist, dann ist die Familie linear abhängig, weil $0_V = 1_{\mathbb{K}} 0_V$.

Des Weiteren ist die Familie linear abhängig, wenn zwei Vektoren v_i und v_j gleich sind, für $i \neq j$, weil $0_V = 1_{\mathbb{K}} v_i - 1_{\mathbb{K}} v_j$.

In $\mathbb{R}^3$ bilden die Vektoren $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$ und $v_3 = (0,0,1)$ eine linear unabhängige Familie. Wir sagen, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

Aufgabe. Sind die Vektoren $(1,1)$, $(2,1)$ und $(1,3)$ in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

Proposition 2.3. *Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist genau dann linear unabhängig, wenn für jedes i aus I der Vektor v_i nicht in $\mathrm{Lin}((v_j)_{j\in I\setminus\{i\}})$ liegt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Familie linear unabhängig ist. Sei nun i aus I so gegeben, dass v_i eine Linearkombination von $(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ ist. Dies bedeutet, dass

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}$$

für eine natürliche Zahl n, Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und Vektoren $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ mit $v_{i_j} \neq v_i$. Insbesondere ist

$$0_V = -v_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j},$$

was der linearen Unabhängigkeit der Familie $(v_i)_{i\in I}$ widerspricht.

Für die Rückrichtung nehmen wir nun an, dass die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig wäre und schreiben

$$0_V = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}$$

mit Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, welche nicht alle Null sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind die Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ paarweise verschieden (sonst können wir die Summe mit Hilfe der Distributivgesetze umschreiben). Des Weiteren können wir annehmen, dass $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$, also

$$v_{j_1} = \sum_{j=2}^{n} -\frac{\lambda_j}{\lambda_1} v_{i_j}.$$

Insbesondere ist der Vektor v_{i_1} eine Linearkombination der Vektoren $v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$, wie gewünscht. $\square$

Lemma 2.4. *Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie im $\mathbb{K}$-Vektorraum V und v ein neues Element aus V. Wenn v keine Linearkombination der Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist, dann ist die Familie $(v_i)_{i\in I} \cup \{v\}$ wiederum linear unabhängig.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $(v_i)_{i\in I} \cup \{v\}$ linear abhängig ist und schreiben

$$0_V = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j,$$

mit Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, welche nicht alle Null sind, und Vektoren w_j aus der Menge $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$. Wenn kein $w_j = v$ wäre, dann wäre die Familie $(v_i)_{i\in I}$ bereits linear abhängig, was unserer Annahme widerspricht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $w_1 = v$ und aus dem selben Grund muss $\lambda_1 \neq 0_K$ sein, also

$$v = \sum_{j=2}^{n} -\frac{\lambda_j}{\lambda_1} w_j,$$

mit w_j aus der Familie $(v_i)_{i\in I}$. Es folgt, dass v in $\mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$ liegt. $\square$

Definition 2.5. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist ein *Erzeugendensystem*, falls jeder Vektor aus V eine Linearkombination der Familie ist, das heißt, dass $V = \mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$.

Eine *Basis* des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beispiel 2.6. Betrachte $\mathbb{K}^n$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei e_i, für $1 \leq i \leq n$, der Vektor, dessen i-Koordinate den Wert $1_{\mathbb{K}}$ hat und alle anderen Koordinaten Null sind.

$$e_i = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, \ldots, 0)$$

Mit Hilfe der Gauß-Eliminationsmethode lässt sich leicht zeigen, dass die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden.

Der triviale Vektorraum ist der Vektorraum, welcher nur aus dem Nullvektor besteht. Besitzt dieser Vektorraum eine Basis?

Aufgabe. Wann genau bilden zwei Vektoren v und w eine Basis von $\mathbb{K}^2$?

Mit Hilfe des Lemmas 2.4 können wir nun weitere Charakterisierungen von Basen zeigen, welche wir für deren Existenz brauchen werden.

Proposition 2.7. *Folgende Aussagen sind äquivalent für eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V:*

(a) Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis.

(b) Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist ein Erzeugendensystem und minimal (bezüglich Inklusion) mit dieser Eigenschaft: für jedes i aus I ist die Familie $(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ kein Erzeugendensystem.

(c) Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig und maximal (bezüglich Inklusion) mit dieser Eigenschaft: für jeden Vektor v aus V ist die Familie $(v_i)_{i\in I} \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis. $(a) \implies (b)$: Aus der Definition einer Basis folgt, dass die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist. Wenn sie nicht minimal wäre, so gäbe es einen Index i aus I mit $V = \mathrm{Lin}((v_j)_{j\in I\setminus\{i\}})$. Insbesondere lässt sich der Vektor v_i aus V als Linearkombination der Teilfamilie $(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ schreiben, was wegen der Präposition 2.3 der linearen Unabhängigkeit von $(v_i)_{i\in I}$ widerspricht.

$(b) \implies (c)$: Wenn $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig wäre, fänden wir wegen der Proposition 2.3 einen Index i aus I derart, dass sich der Vektor v_i als Linearkombination der Teilfamilie $(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ schreiben lässt:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_{i_j},$$

mit Skalaren $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und Vektoren $v_{i_j} \neq v_i$ aus $(v_i)_{i\in I}$. Es genügt zu zeigen, dass in diesem Fall $V = \mathrm{Lin}((v_j)_{j\in I\setminus\{i\}})$, was der Minimalität des Erzeugendensystems $(v_i)_{i\in I}$ widerspricht: Sei w aus V beliebig. Da die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist, können wir w schreiben als

$$w = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k w_k,$$

mit Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und Vektoren w_k aus der Menge $\{v_i\}_{i\in I}$. Wenn kein w_k dem Vektor v_i entspricht, sind wir fertig. Ansonsten können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $w_1 = v_i$, aber $w_j \neq v_i$ für $2 \leq j \leq n$, also

$$w = \lambda_1 w_1 + \sum_{k=}^{m} \lambda_k w_k = \lambda_1\Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_j v_{i_j}\Big) + \sum_{k=2}^{m} \lambda_k w_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_1 \mu_j v_{i_j} + \sum_{k=2}^{m} \lambda_k w_k$$

und somit liegt w in $\mathrm{Lin}((v_j)_{j\in I\setminus\{i\}})$, wie gewünscht.

Wir zeigen nun, die Maximalität der linear unabhängigen Familie $(v_i)_{i\in I}$. Beachte, dass wegen der Proposition 2.3 für keinen Vektor v in $V = \mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$ die Familie $(v_i)_{i\in I} \cup \{v\}$ linear unabhängig sein kann. Insbesondere ist $(v_i)_{i\in I}$ eine maximale linear unabhängige Familie.

$(c) \implies (a)$: Da die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist, müssen wir nur noch zeigen, dass sie ein Erzeugendensystem bildet. Sei nun v aus V beliebig. Angenommen v wäre nicht in $\mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$, dann wäre die Familie $(v_i)_{i\in I} \cup \{v\}$ linear unabhängig wegen des Lemmas 2.4, was der Maximalität widerspricht. Also $V = \mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$, wie gewünscht. □

Korollar 2.8. *Sei $V \neq \{0_V\}$ ein nicht-trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V bildet genau dann eine Basis von V, wenn sich jeder Vektor v eindeutig als Linearkombination der Familie $(v_i)_{i\in I}$ schreiben lässt. Das heißt, dass $V = \mathrm{Lin}((v_i)_{i\in I})$ und für jeden Vektor v aus V folgt aus*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_{i_j},$$

dass $\mu_j = \lambda_j$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Da wir jede Linearkombination mit Hilfe von trivialen Skalaren $0_\mathbb{K}$ um endlich viele Summanden erweitern können, hängt die endliche Menge der v_{i_j}, welche in der Darstellung von v nicht-trivial vorkommen, eindeutig von v ab. Insbesondere folgt aus

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j} = \sum_{k=1}^{m} \mu_k v_{i'_k},$$

dass $m = n$ und dass die Mengen $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\} = \{v_{i'_1}, \ldots, v_{i'_n}\}$, wenn alle Skalare λ_j und μ_k nicht Null sind.

Beachte, dass der triviale Vektorraum keine Basis besitzt, daher müssen wir $V \neq \{0_V\}$ annehmen.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis ist und dass der Vektor v zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination hätte:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_{i_j}$$

für eine passende natürliche Zahl n. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\mu_1 \neq \lambda_1$ und somit

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) v_{i_j} = 0_V$$

eine nicht-triviale lineare Abhängigkeit, welche widerspricht, dass $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis ist.

Für die andere Richtung müssen wir wegen der Proposition 2.7 (b) nur die Minimalität des Erzeugendensystems $(v_i)_{i\in I}$ zeigen. Angenommen, dass die Familie $(v_i)_{i\in I}$ kein minimales Erzeugendensystem wäre, gäbe es einen Index i aus I so, dass $V = \mathrm{Lin}((v_j)_{j\in I\setminus\{i\}})$. Insbesondere muss sich v_i als Linerkombination

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}$$

schreiben lassen, mit $v_{i_j} \neq v_i$ für $1 \leq j \leq n$. Die verschiedenen Darstellungen

$$v_i = 1_\mathbb{K} v_i + \sum_{j=1}^{n} 0_\mathbb{K} v_{i_j} = 0_\mathbb{K} v_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j},$$

widersprechen der Eindeutigkeit der Darstellung des Vektors v_i. Somit haben wir gezeigt, dass $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis ist. □

Definition 2.9. Wenn der $\mathbb{K}$-Vektorraum V eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ besitzt, dann bezeichnet für jeden Vektor $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ das Tupel aus $\mathbb{K}^n$, welches aus den Skalaren $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ besteht, die *Koordinaten* von v bezüglich der Basis B.

Wegen des obigen Korollars 2.8 hängen die Koordinaten eines Vektors v nur vom Vektor v selbst sowie von der Aufzählung der Basis B ab.

Korollar 2.10. *(Basisergänzungssatz und Existenz von Basen) Jede linear unabhängige Familie von Vektoren des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.*

Insbesondere besitzt jeder nicht-triviale $\mathbb{K}$-Vektorraum eine Basis.

Beweis. In einem nicht-trivialen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet jeder Vektor $v \neq 0_V$ eine linear unabhängige Familie. Daher folgt die zweite Behauptung aus der ersten.

Sei L eine linear unabhängige Familie von Vektoren. Wir betrachten die Kollektion $\mathcal{S}$ aller linear unabhängigen Teilmengen von V, welche die Familie L ergänzen, mit der partiellen Ordnung gegeben durch die mengentheoretische Inklusion. Wegen des Zorn'schen Lemmas C.3, siehe Appendix C, müssen wir nur zeigen, dass $\mathcal{S}$ eine induktive partiell geordnete Menge ist. Jedes maximale Element $M = (v_i)_{i \in I}$ erfüllt die Bedingung (c) der Proposition 2.7 und ist somit eine Basis, welche L ergänzt.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{S}$ induktiv ist, wähle eine Kette Γ aus $\mathcal{S}$. Wir müssen zeigen, dass Γ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ besitzt. Wenn Γ die leere Kette ist, dann ist jedes Element aus $\mathcal{S}$ eine obere Schranke, zum Beispiel die Familie L selbst (welche zu $\mathcal{S}$ gehört). Ansonsten ist $\Gamma = \{M_\gamma\}_{\gamma \in F}$ nicht leer und somit ist die Kollektion

$$M = \{v \in V \mid v \in M_\gamma \text{ für ein } \gamma \in F\}$$

eine wohldefinierte Teilmenge von V. Beachte, dass $M_\gamma \subset M$ für jedes γ in F, und somit L eine Teilmenge von M ist. Wenn wir zeigen, dass M eine linear unabhängige Familie ist, haben wir gezeigt, dass M in $\mathcal{S}$ ist und haben somit eine obere Schranke für die Kette Γ gefunden.

Wir nehmen also an, dass

$$0_V = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_{i_j},$$

für Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus $\mathbb{K}$ und Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ aus M. Für jedes $1 \leq j \leq n$ gibt es ein γ_j aus F mit v_{i_j} in M_{γ_j}. Weil die mengentheoretische Inklusion die Kette Γ total anordnet, ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit M_{γ_1} das größte Element aus $M_{\gamma_1}, \ldots, M_{\gamma_n}$. Dies bedeutet, dass alle Vektoren v_{i_j} aus der linear unabhängigen Familie M_{γ_1} kommen, also $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$, wie gewünscht. □

Korollar 2.11. *(Basisauswahlsatz) Sei M ein Erzeugendensystem des nicht-trivialen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Es gibt eine Basis von V, welche in M als Teilmenge enthalten ist.*

Beweis. Sei nun $\mathcal{S}$ die Kollektion aller linear unabhängigen Teilmengen von M. Wir betrachten $\mathcal{S}$ als durch die mengentheoretische Inklusion angeordnete Menge. Analog zum Beweis des Korollars 2.10 lässt sich leicht zeigen, dass $\mathcal{S}$ ein maximales Element B besitzt. Dann ist B eine Teilmenge von M und linear unabhängig.

Wir wollen zeigen, dass B eine Basis von V ist. Da $V = \mathrm{Lin}(M)$, genügt es zu zeigen, dass jedes Element v von M in $\mathrm{Lin}(B)$ liegt, um zu schließen, dass $V = \mathrm{Lin}(B)$. Wir beweisen es durch Widerspruch: Angenommen, dass v aus M nicht in $\mathrm{Lin}(B)$ liegt, dann ist die Teilmenge

$B \cup \{v\}$ von M immer noch linear unabhängig, wegen des Lemmas 2.4. Weil $B \subsetneq B \cup \{v\}$ (sonst wäre v in B und somit in $\mathrm{Lin}(B)$!) ist die Menge B nicht maximal in $\mathcal{S}$. Dies liefert den gewünschten Widerspruch und somit haben wir gezeigt, dass B eine Basis von V ist. □

Satz 2.12. *(Austauschprinzip von Steinitz) Sei B eine Basis des nicht-trivialen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V und C eine endliche linear unabhängige Teilmenge von V. Es gibt eine endliche Teilmenge B' von B derselben Mächtigkeit wie C derart, dass die Teilmenge $C \cup (B \setminus B')$ eine Basis von V bildet.*

Insbesondere sind C und $B \setminus B'$ disjunkt.

Beweis. Wir beweisen die Aussage induktiv über die Mächtigkeit $n = |C|$ von C. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial, denn $C = \emptyset$, also wähle $B' = \emptyset$.

Wir nehmen nun an, dass das Austauschprinzip für alle linear unabhängigen Teilmengen der Mächtigkeit kleiner gleich n gilt und dass $C = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist. Für die linear unabhängige Teilmenge $\{v_!, \ldots, v_n\}$ finden wir induktiv eine Teilmenge $B_1 \subset B$ der Kardinalität n derart, dass $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup (B \setminus B_1)$ eine Basis von V bildet. Beachte, dass die Menge $B \setminus B_1$ disjunkt von $\{v_!, \ldots, v_n\}$ sein muss. Weil $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup (B \setminus B_1)$ ein Erzeugendensystem von V ist, lässt sich der Vektor v_{n+1} eindeutig als Linearkombination davon darstellen. Schreibe

$$v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j,$$

für Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ aus $\mathbb{K}$ und Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ aus $B \setminus B_1$. Wenn alle $\mu_j = 0_{\mathbb{K}}$ wären, läge v_{n+1} in $\mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_n\})$, was wegen der Proposition 2.3 der linearen Unabhängigkeit von C widerspricht.

Dies bedeutet, dass ein $\mu_j \neq 0_{\mathbb{K}}$ für ein $1 \leq j \leq m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\mu_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$, also

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) v_i + 1_{\mathbb{K}} v_{n+1} + \sum_{j=2}^{m} (-\mu_j) w_j.$$

Setze nun $B' = B_1 \cup \{w_1\}$ und beachte, dass $|B'| = n + 1 = |C|$, weil w_1 nicht in B_1 liegt. Wir müssen nun zeigen, dass die Teilmenge $C \cup (B \setminus B')$ von V eine Basis ist. Da jedes Element aus dem Erzeugendensystem $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup B \setminus B_1$ bereits in $C \cup (B \setminus B')$ liegt oder sich als Linearkombination von Elementen davon schreiben lässt, ist $C \cup (B \setminus B')$ auch ein Erzeugendensystem. Weil

$$C \cup (B \setminus B') = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup (B \setminus B') \cup \{v_{n+1}\},$$

genügt es nun wegen des Lemmas 2.4 zu zeigen, dass v_{n+1} nicht in $\mathrm{Lin}\big(\{v_1, \ldots, v_n\} \cup (B \setminus B')\big)$ liegt, um zu folgern, dass $C \cup (B \setminus B')$ eine Basis ist. Wenn v_{n+1} eine Linearkombination von $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup (B \setminus B')$ wäre, so wäre auch w_1 in $\mathrm{Lin}\big(\{v_1, \ldots, v_n\} \cup (B \setminus B')\big)$, was der Proposition 2.3 widerspricht. □

Korollar 2.13. *In einem nicht-trivialen $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist entweder jede Basis unendlich (wir sagen, dass der Vektorraum unendlich-dimensional ist) oder alle Basen von V sind endlich und je zwei Basen haben dieselbe Kardinalität (wir sagen, dass V endlich-dimensional ist).*

Wenn V endlich-dimensional ist, bezeichnen wir mit $\dim_{\mathbb{K}} V$ die *Dimension* von V, das heißt, die Anzahl der Elemente einer (und somit jeder) Basis. Sonst schreiben wir $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$, wenn V unendlich-dimensional ist und $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$, wenn $V = \{0_V\}$ der triviale Vektorraum ist.

Beweis. Ansonsten gäbe es einen nicht-trivialen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Basen B und C derart, dass C endlich ist und B mehr als $|C|$ Elemente besitzt (entweder weil B unendlich ist, oder weil B endlich ist mit $|B| > |C|$). Aus dem Austauschprinzip 2.12 folgt, dass für eine Teilmenge B' von B der Kardinalität $|C|$ die Menge $C \cup (B \setminus B')$ eine Basis ist. Insbesondere ist $B \setminus B' \neq \emptyset$ und somit gilt $C \subsetneq C \cup (B \setminus B')$, was der Maximalität der Basis C in der Proposition 2.7 (c) widerspricht. $\square$

Aufgabe. Zeige, dass ein nicht-trivialer Vektorraum V endlich-dimensional sein muss, falls V ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Wie groß kann $\dim_{\mathbb{K}} V$ sein?

Wie groß kann eine beliebige linear abhängige Teilmenge in einem endlich-dimensionalen Vektorraum sein?

Aufgabe. Ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[T]$ aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ (siehe Appendix D) endlich-dimensional?

Bemerkung 2.14. Beachte, dass $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ genau dann, wenn V der triviale $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Die Dimension des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}^n$ ist n, weil die Vektoren $\{e_1, \ldots, e_n\}$ im Beispiel 2.6 eine Basis bilden.

Proposition 2.15. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Dann ist U auch endlich-dimensional und* $\dim_{\mathbb{K}} U \leq \dim_{\mathbb{K}} V$. *Ferner gilt* $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$ *genau dann, wenn $U = V$.*

Insbesondere ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum unendlich-dimensional, sobald er einen unendlich-dimensionalen Unterraum besitzt.

Beweis. Wähle eine Basis B' von U. Die Vektoren aus B' (als Elemente von V betrachtet) bilden eine linear unabhängige Familie und wir finden mit dem Korollar 2.10 eine Basis B von V, welche B' ergänzt. Die Menge B is endlich, da V endlich-dimensional ist. Also ist auch B', als Teilmenge von B, endlich und somit U endlich-dimensional. Insbesondere ist $|B'| \leq |B|$, also $\dim_{\mathbb{K}} U \leq \dim_{\mathbb{K}} V$.

Wenn $U = V$, gilt klarerweise $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$. Angenommen nun, dass $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$, bedeutet es, dass die obige Teilmenge B' gleich B sein muss, also $U = \mathrm{Lin}(B') = \mathrm{Lin}(B) = V$. $\square$

Satz 2.16. (*Dimensionssatz*) *Seien U und W endlich-dimensionale Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Die Summe $U + V$ (siehe Definition 1.43) ist endlich-dimensional und*

$$\dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}}(U + V) + \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W)$$

Beachte, dass $U \cap W$ wegen der Proposition 2.15 als Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes U endlich-dimensional ist. Insbesondere ist der obige Ausdruck sinnvoll, als Summe natürlicher Zahlen.

Beweis. Sei $B_{U\cap W}$ eine Basis von $U \cap W$. Mit dem Korollar 2.10 können wir die Familie der Vektoren aus $B_{U\cap W}$ sowohl zu einer Basis B_U von U als auch zu zu einer Basis B_W von W ergänzen.

Wir zeigen zuerst, dass $B_U \cap B_W = B_{U\cap W}$. Eine Inklusion ist trivial. Für die andere wähle einen Vektor v in $B_U \cap B_W$. Insbesondere liegt v in $U \cap W$, weil $U = \mathrm{Lin}(B_U)$ und $W = \mathrm{Lin}(B_W)$.

Da $B_{U\cap W}\cup\{v\}$ linear unabhängig ist (weil es eine Teilmenge der linear unabhängige Menge B_U ist), muss unbedingt v in $B_{U\cap W}$ liegen (sonst hätte $U\cap W$ Dimension echt größer als $|B_{U\cap W}|$).

Um beide Behauptungen des Satzes zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die endliche Menge $B_U\cup B_W$ eine Basis von $U+W$ ist. Wir zeigen zuerst, dass die Vektoren aus $B_U\cup B_W$ linear unabhängig sind. Betrachte eine Linearkombination

$$\sum_{v\in B_U\cup B_W}\lambda_v v = 0_V,$$

oder äquivalent dazu

$$u=\sum_{v\in B_U}\lambda_v v=\sum_{w\in B_W\setminus B_U}(-\lambda_w)w.$$

Wir müssen zeigen, dass alle Skalare trivial sind. Aus $U=\operatorname{Lin}(B_U)$ folgt, dass der Vektor u in U, und dementsprechend auch in W, liegt. Mit dem Korollar 2.8 folgt weiter, dass sich u eindeutig als Linearkombination der Vektoren aus $B_{U\cap W}$ schreiben lässt. Daraus folgt, dass $\lambda_w=0$ für alle w in $B_W\setminus B_{U\cap W}$. Insbesondere ist die Summe

$$\sum_{w\in B_W\setminus B_U}(-\lambda_w)w=0_V,$$

und somit $u=0$. Also $\lambda_v=0$ für alle v aus B_U, weil B_U linear unabhängig ist. Somit ist die Familie der Vektoren aus $B_U\cup B_W$ linear unabhängig.

Wir müssen nur noch zeigen, dass $U+W=\operatorname{Lin}(B_U\cup B_W)$. Da sich jedes Element in $\operatorname{Lin}(B_U\cup B_W)$ als eine Summe von einem Vektor aus U und von einem Vektor aus W schreiben lässt, müssen wir nur zeigen, dass $U+W\subset\operatorname{Lin}(B_U\cup B_W)$. Sei also v in $U+W$. Wegen der Bemerkung 1.44 können wir $v=u+w$ schreiben, wobei u in $U=\operatorname{Lin}(B_U)$ liegt und w aus $W=\operatorname{Lin}(B_W)$ kommt. Also

$$u=\sum_{b\in B_U}\lambda_b b \text{ und } w=\sum_{b'\in B_W}\lambda_{b'}b'.$$

Insbesondere ist v eine Linearkombination der Vektoren aus $B_U\cup B_W$, wie gewünscht. □

Definition 2.17. Zwei Unterräume U und W eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V liegen *transversal* zueinander, falls $U\cap W=\{0_V\}$. Wenn U und W transversal liegen, schreiben wir $U\oplus W$ für den Unterraum $U+V$ und bezeichnen es als die *direkte Summe* von U und W.

Ein *Komplementärraum* des Unterraumes U ist ein Unterraum W mit $V=U\oplus W$.

Aufgabe. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die kanonische Basis $\{e_1,e_2\}$. Besitzt der von e_1 erzeugte Unterraum $\operatorname{Lin}(\{e_1\})$ einen Komplementärraum? Ist der Komplementärraum eindeutig oder gibt es mehrere Möglichkeiten?

Proposition 2.18. *Sei U ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Es gibt einen Komplementärraum W zu U, also $V=U\oplus W$.*

Insbesondere lässt sich jeder Vektor v aus V eindeutig als Summe $v=u+w$, mit u aus U und w aus W, schreiben.

Beweis. Wähle eine Basis B_U von U und ergänze sie mit Hilfe des Korollars 2.10 zu einer Basis B von V. Setze $W = \operatorname{Lin}(B \setminus B_U)$ und beachte, dass $B \setminus B_U$ eine Basis von W ist, weil die Vektoren aus $B \setminus B_U$ linear unabhängig sind. Wir müssen nur zeigen, dass $U \cap W = \{0_V\}$, weil der Beweis des Dimensionssatzes 2.16 liefert (sogar im Falle, dass die Vektorräume unendlich-dimensional sind), dass $B_U \cup (B \setminus B_U) = B$ eine Basis der Summe $U + W$ ist und somit $V = U + W$ wegen der Proposition 2.15.

Sei also v ein Vektor aus $V \cap W$. Der Vektor v lässt sich eindeutig als Linearkombination von den Vektoren aus B_U, sowie von den Vektoren aus $B \setminus B_U$ schreiben. Da die Vektoren aus B linear unabhängig sind, ist dies nur möglich, wenn v der Nullvektor ist. Somit ist $U \cap W = \{0_V\}$, wie gewünscht.

Für die letzte Behauptung nehmen wir an, dass sich ein Vektor v auf zwei Weisen als Summe in $U + V$ schreiben lässt:

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

Dann liegt $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ sowohl in U als auch in W, also $u_1 - u_2 = 0_V$ (und somit $u_1 = u_2$), weil $U \cap W = \{0_V\}$. □

Aus dem Beweis des Dimensionssatzes 2.16 folgt, dass eine Basis der direkten Summe eine Vereinigung von Basen der Unterräume ist.

Korollar 2.19. *Wenn $V = U \oplus W$, gibt es eine Basis von V, welche die Vereinigung zweier Basen von U und W ist.*

2.2 Morphismen

Definition 2.20. Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $F : V \to W$ ist *linear* oder ein *Homomorphismus*, falls

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w),$$

für alle Skalare λ und μ aus $\mathbb{K}$ sowie Vektoren v und w aus V. Beachte, dass die Summe und die Skalarmultiplikation auf der linken Seite im $\mathbb{K}$-Vektorraum V stattfinden, wobei die Summe und die Skalarmultiplikation rechts im Vektorraum W zu verstehen sind.

Beispiel 2.21. Die *Nullabbildung* $\begin{aligned}\mathbf{0} : V &\to W \\ v &\mapsto 0_W\end{aligned}$ ist immer linear.

Für jedes λ aus $\mathbb{K}$ ist die Abbildung $\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} : V &\to V \\ v &\mapsto \lambda v\end{aligned}$ linear.

Die *Projektion auf die i-te Koordinate* $\begin{aligned}\pi_n^i : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto x_i\end{aligned}$ ist linear.

Bemerkung 2.22. Für jeden Homomorphismus $F : V \to W$ gilt $F(0_V) = 0_W$ und $F(-v) = -F(v)$. Allgemein lässt sich induktiv über n zeigen, dass

$$F(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(v_i).$$

Also $F(\mathrm{Lin}(X)) = \mathrm{Lin}(F(X))$, wobei $F(X)$ die Menge der Bilder der Vektoren aus X unter F ist.

Beispiel 2.23. Gegeben eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$, ist die induzierte Abbildung

$$\begin{array}{cccccc} F_A : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m & & \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

linear. Beachte, dass der Homomorphismus F_A von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ geht!

Des Weiteren ist jede lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to K^m$ durch eine $m \times n$-Matrix gegeben: Sei A die Matrix mit Spalten $F(e_i)$, wobei e_i der i-te Vektor der kanonischen Basis von $\mathbb{K}^n$ ist. Dann ist $F(e_i) = F_A(e_i)$ und somit gilt für jeden Vektor $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, dass

$$F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i F(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_A(e_i) = F_A(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = F_A(v).$$

Lemma 2.24. *Gegeben einen Homomorphismus $F : V \to W$ und einen Unterraum W_1 von W, ist*

$$F^{-1}(W_1) = \{v \in V \mid F(v) \in W_1\}$$

ein Unterraum von V. Des Weiteren ist für jeden Unterraum U von V die Menge

$$F(U) = \{F(u)\}_{u\in U}$$

ein Unterraum von W mit $\dim_{\mathbb{K}} F(U) \le \dim_{\mathbb{K}} U$ (mit der Konvention $\infty \le \infty$).

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $F^{-1}(W_1)$ ein Unterraum ist. Seien v_1 und v_2 aus $F^{-1}(W_1)$ sowie λ und μ Skalare aus $\mathbb{K}$. Da $F(v_1)$ und $F(v_2)$ im Unterraum W_1 liegen, ist auch

$$\lambda F(v_1) + \mu F(v_2) = F(\lambda v_1 + \mu v_2)$$

in W_1. Somit liegt der Vektor $\lambda v_1 + \mu v_2$ in $F^{-1}(W_1)$, wie gewünscht.

Analog lässt sich wegen der Linearität von F (und des Unterraums U) zeigen, dass $F(U)$ ein Unterraum von W ist. Wir müssen nur noch zeigen, dass die Dimension von $F(U)$ durch die Dimension von U nach oben beschränkt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist hierfür U endlich-dimensional. Sei B_U eine Basis von U, also $U = \mathrm{Lin}(B_U)$. Wegen der obigen Bemerkung ist $F(U) = \mathrm{Lin}(F(B_U))$ und somit die Menge $F(B_U)$ ein Erzeugendensystem von $F(U)$. Aus dem Korollar 2.11 folgt, dass $\dim_{\mathbb{K}} F(U) \le |F(B_U)| \le |B_U| = \dim_{\mathbb{K}} U$, wie gewünscht.

□

Satz 2.25. *Sei V ein nicht-trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B. Jede beliebige Abbildung $f : B \to W$ induziert eine lineare Abbildung $F : V \to W$, welche von f eindeutig bestimmt wird.*

Insbesondere sind zwei lineare Abbildungen, welche auf den Basisvektoren dieselben Werte annehmen, gleich.

Beweis. Sei $f : B \to W$ beliebig. Wir definieren den Homomorphismus F folgendermaßen: Jeder Vektor v lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben:

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b,$$

wobei fast alle $\lambda_b = 0_{\mathbb{K}}$, das heißt $\lambda_b \neq 0_{\mathbb{K}}$ für nur endlich viele b's aus B. Setze

$$F(v) = \sum_{b \in B} \lambda_b f(b).$$

Wir müssen zeigen, dass F linear ist: Gegeben Skalare μ_1 und μ_2, sowei Vektoren v_1 und v_2, schreibe

$$v_i = \sum_{b \in B} \lambda(i)_b b \text{ für } i = 1, 2.$$

Die eindeutige Darstellung von $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ als Linearkombination der Basisvektoren ist dann

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \sum_{b \in B} (\mu_1 \lambda(1)_b + \mu_2 \lambda(2)_b) b.$$

Beachte, dass $\mu_1 \lambda(1)_b + \mu_2 \lambda(2)_b = 0_{\mathbb{K}}$ außer für endlich viele b's. Ferner ist

$$F(v_1 + v_2) = \sum_{b \in B} (\mu_1 \lambda(1)_b + \mu_2 \lambda(2)_b) f(b) = \mu_1 F(v_1) + \mu_2 F(v_2)$$

und somit F ein Homomorphismus.

Da die Abbildung F durch die Werte $F(b) = f(b)$ bestimmt ist, wird F von f eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 2.26. Für jeden Unterraum U von V ist die *Inklusionsabbildung*

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{i}_U : & U & \to & V \\ & u & \mapsto & u \end{array}$$

linear. Des Weiteren ist die Komposition $G \circ F : V \to W'$ linearer Abbildungen $F : V \to W$ und $G : W \to W'$ wiederum linear. Insbesondere ist für jeden Homomorphismus $F : V \to W$ die *Einschränkung* $F_{\restriction U}$ auf den Unterraum U von V, definiert als

$$\begin{array}{rccc} F_{\restriction U} : & U & \to & W \\ & u & \mapsto & F(u) \end{array}$$

linear, weil $F_{\restriction U} = F \circ \boldsymbol{i}_U$.

Die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ aller Homomorphismen $F : U \to W$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum bezüglich der Summe linearer Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} F + G : & V & \to & W \\ & v & \mapsto & F(v) + G(v) \end{array}$$

und der Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rccc} \lambda F : & V & \to & W \\ & v & \mapsto & \lambda F(v) \end{array}.$$

Der Nullvektor in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist die Nullabbildung $\mathbf{0}$ (Siehe Beispiel 2.23).

Der *Dualraum* zu V ist der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, K)$ und wird mit V^* bezeichnet.

2.3 Isomorphismen und Quotienten

Definition 2.27. Ein Homomorphismus $F : V \to W$ ist ein *Monomorphismus*, schreibe $F : V \hookrightarrow W$, falls F als Abbildung injektiv ist. Der Homomorphismus F ist ein *Epimorphismus*, falls F surjektiv ist.

Die Vektorräume U und W sind *isomorph*, schreibe $U \simeq W$, falls es einen *Isomorphismus* von V nach W gibt, das heißt, einen bijektiven Homomorphismus $F : V \to W$. Ein *Endomorphismus* ist ein Homomorphismus $F : V \to V$. Ein *Automorphismus* ist ein bijektiver Endomorphismus.

Bemerkung 2.28. Aus dem Lemma 2.24 folgt, dass der *Kern*

$$\mathrm{Ker}(F) = F^{-1}(0_W)$$

des Homomorphismus $F : V \to W$, sowie auch das *Bild* $F(V)$, Unterräume von V beziehungsweise von W sind.

Wenn W endlich-dimensional ist, bezeichen wir mit dem *Rang* $\mathrm{Rg}(F)$ von F die Dimension des Unterraums $F(V)$.

Proposition 2.29. *Folgende Aussagen sind für einen Homomorphismus $F : V \to W$ äquivalent:*

(a) F ist ein Monomorphismus.

(b) Der Kern von F besteht nur aus dem Nullvektor.

(c) Für jede Basis B von V ist die Einschränkung $f = F_{\restriction B}$ injektiv und die Menge $F(B)$ besteht aus linear unabhängigen Vektoren.

Beweis. $(a) \Longrightarrow (b)$: Wenn F ein Monomorphismus ist, dann ist der Kern trivial, denn wenn v im Kern liegt, gilt

$$F(v) = 0_W = F(0_V)$$

und somit $v = 0_V$.

$(b) \Longrightarrow (c)$: Wir zeigen zuerst, dass $f = F_{\restriction B}$ injektiv ist: Angenommen $f(b_1) = f(b_2)$, ist $F(b_1 - b - 2) = 0_W$, also liegt $b_1 - b_2$ in $\mathrm{Ker}(F) = \{0_V\}$ und somit folgt, dass $b_1 = b_2$. Für die lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus $F(B)$ nehmen wir an, dass

$$\sum_{b \in B} \lambda_b F(b) = 0_W$$

für Skalare λ_b aus K, wobei für alle bis auf endlich viele b's aus B gilt, dass $\lambda_b = 0_{\mathbb{K}}$ (wenn die Basis B unendlich ist). Insbesondere liegt der Vektor

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$$

in $\mathrm{Ker}(F) = \{0_V\}$ und somit sind alle $\lambda_b = 0_{\mathbb{K}}$, weil B eine linear unabhängige Familie ist.

$(c) \Longrightarrow (a)$: Wir nehmen $F(v_1) = F(v_2)$ für zwei Vektoren v_1 und v_2 aus V an und müssen $v_1 = v_2$ zeigen. Die Vektoren v_1 und v_2 aus V lassen sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren aus B darstellen:

$$v_i = \sum_{b \in B} \lambda(i)_b b \text{ für } i = 1, 2,$$

wobei $\lambda(i)_b = 0$ für alle bis auf endlich viele b's, falls die Basis B unendlich ist.

Insbesondere liegt

$$\sum_{b \in B} \lambda(1)_b F(b) = F(v_1) = F(v_2) = \sum_{b \in B} \lambda(2)_b F(b)$$

im Unterraum $\mathrm{Lin}(F(B))$ von W. Der Unterraum $\mathrm{Lin}(F(B))$ hat als Erzeugendensystem die Familie der Vektoren aus $F(B)$, welche nach unserer Annahme linear unabhängig ist. Die Menge $F(B)$ ist also eine Basis von $\mathrm{Lin}(F(B))$ und somit muss $\lambda(1)_b = \lambda(2)_b$ für alle b's aus B. Das heißt, dass wegen der Eindeutigkeit der Darstellung die beiden Vektoren v_1 und v_2 gleich sind. Die Abbildung F ist somit injektiv, wie gewünscht. □

Proposition 2.30. *Folgende Aussagen sind für einen Homomorphismus $F : V \to W$ äquivalent:*

(a) F ist ein Epimorphismus.

(b) Für jede Basis B von V ist die Menge $F(B)$ ein Erzeugendensystem.

Ferner, wenn W endlich-dimensional ist, sind obige Aussagen äquivalent zu:

(c) Der Rang $\mathrm{Rg}(F)$ ist genau $\dim_{\mathbb{K}} W$.

Beweis. $(a) \Longrightarrow (b)$: Wenn F surjektiv und B eine Basis von V ist, liefert die Gleichung

$$W = F(V) = F(\mathrm{Lin}(B)) \overset{2.22}{=} \mathrm{Lin}(F(B)),$$

dass $F(B)$ ein Erzeugendensystem ist.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Wähle eine Basis B von V. Aufgrund unserer Annahme ist $F(B)$ ein Erzeugendensystem von W. Aus der Bemerkung 2.22 folgt, dass $W = \mathrm{Lin}(F(B)) = F(\mathrm{Lin}(B)) = F(V)$ und somit ist F surjektiv.

Wir nehmen nun an, dass W endlich-dimensional ist. Wenn F surjektiv ist, dann haben wir $F(V) = W$ und somit $\mathrm{Rg}(F) = \dim_{\mathbb{K}} F(V) = \dim_{\mathbb{K}} W$. Dies zeigt die Richtung $(a) \Longrightarrow (c)$.

Die andere Richtung $(c) \Longrightarrow (a)$ folgt unmittelbar aus der Proposition 2.15. □

Satz 2.31. *Gegeben einen Homomorphismus $F : V \to W$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, ist*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Rg}(F).$$

Insbesondere ist ein Endomorphismus bijektiv, wenn er injektiv oder surjektiv ist.

Beweis. Mit Hilfe der Proposition 2.18, schreibe $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus V_1$, wobei V_1 ein Komplementärraum von $\mathrm{Ker}(F)$ in V ist. Da $\mathrm{Ker}(F)$ und V_1 transversal liegen, folgt

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(F) + \dim_{\mathbb{K}} V_1$$

aus dem Satz 2.16.

Wir zeigen zuerst, dass die Einschränkung $F_{\restriction V_1}$ ein Monomorphismus ist: Hierfür müssen wir wegen der Proposition 2.29 nur den Kern der Einschränkung $F_{\restriction V_1}$ betrachten. Wenn der Vektor v aus V_1 in $\mathrm{Ker}(F_{\restriction V_1})$ liegt, dann ist $F(v) = 0_W$ und somit liegt v in $\mathrm{Ker}(F)$. Da V_1 und $\mathrm{Ker}(F)$ transversal liegen, folgt $v = 0_V$. Also ist die lineare Abbildung $F_{\restriction V_1}$ injektiv.

Insbesondere ist $F_{\restriction V_1}(B_1)$ linear unabhängig für jede Basis B_1 von V_1. Weil $F_{\restriction V_1}$ den Raum V_1 surjektiv auf $F(V_1)$ abbildet, folgt aus der Proposition 2.30, dass

$$\dim_{\mathbb{K}} F(V_1) = |F(B_1)| = |B_1| = \dim_{\mathbb{K}} V_1.$$

Es genügt also $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \operatorname{Rg}(F) = \dim_{\mathbb{K}} F(V)$ zu zeigen. Sei w ein Element aus $F(V)$ und schreibe $w = F(v)$ für ein v aus V. Weil V die direkte Summe von $\operatorname{Ker}(F)$ und V_1 ist, lässt sich v eindeutig als $v = u + v'$, mit u aus $\operatorname{Ker}(F)$ und v' aus V_1, schreiben. Insbesondere ist $F(u) = 0_W$ und somit liegt $w = F(v) = F(u) + F(v') = F(v')$ in $F(V_1)$. Das bedeutet, dass $F(V) = F(V_1)$ und es folgt $\operatorname{Rg}(F) = \dim_{\mathbb{K}} F(V) = \dim_{\mathbb{K}} F(V_1) = \dim_{\mathbb{K}} V_1$, wie gewünscht.

Für die letzte Behauptung genügt es in der obigen Gleichung festzustellen, dass die Gleichheit $\dim_{\mathbb{K}} V = \operatorname{Rg}(F)$ genau dann gilt, wenn $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(F) = 0$. □

Korollar 2.32. *Folgende Aussagen sind für einen Homomorphismus $F : V \to W$ äquivalent:*

(a) F ist ein Isomorphismus.

(b) Für jede Basis B von V ist die Einschränkung $f = F_{\restriction B}$ injektiv und die Menge $F(B)$ eine Basis von W.

Ferner, wenn V und W endlich-dimensional sind, so sind obige Aussagen äquivalent zu:

(c) $\dim_{\mathbb{K}} V = \operatorname{Rg}(F) = \dim_{\mathbb{K}} W$.

Insbesondere sind zwei endlich-dimensionale Vektorräume genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt direkt aus den Propositionen 2.29 und 2.30. Wenn V und W endlich-dimensional sind, folgt die dritte Äquivalenz aus der Proposition 2.30 und aus dem Satz 2.31. □

Korollar 2.33. *Jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum V der Dimension n ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph.*

Beachte allerdings, dass der obige Isomorphismus von der Wahl einer Basis abhängt. Insbesondere ist er nicht kanonisch.

Korollar 2.34. *Ein Homomorphismus $F : V \to W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es einen Homomorphismus $G : W \to V$ gibt mit*

$$G \circ F = \operatorname{Id}_V \text{ und } F \circ G = \operatorname{Id}_W .$$

Beweis. Eine Richtung folgt sofort aus dem Beispiel 1.23. Wir nehmen nun an, dass F ein Isomorphismus und B eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist. Aus dem Korollar 2.32 folgt, dass $f = F_{\restriction B}$ eine Bijektion zwischen B und der Basis $F(B)$ von W definiert. Sei $g : F(B) \to B$ die eindeutige Abbildung mit

$$g \circ f = \operatorname{Id}_B \text{ und } f \circ g = \operatorname{Id}_{F(B)} .$$

Wegen des Satzes 2.25 induziert g eine lineare Abbildung $G : W \to V$ und die Eindeutigkeit im Satz 2.25 bedeutet, dass $G \circ F = Id_V$, weil die Abbildung auf B die Identität ist. Dementsprechend ist $F \circ G = \operatorname{Id}_W$, wie gewünscht. □

Bemerkung 2.35. Weil die Komposition zweier bijektiver Abbildungen wiederum bijektiv ist und Linearität unter Komposition erhalten bleibt, folgt, dass die Isomorphismusrelation $\simeq$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen eine Äquivalenzrelation (siehe Definition B.1 im Appendix B) ist:

- $V \simeq V$.
- $V \simeq W \Longrightarrow W \simeq V$.
- $U \simeq V$ und $V \simeq W \Longrightarrow U \simeq W$.

Die *lineare Gruppe* $\mathrm{GL}(V)$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes ist die Menge aller Automorphismen $F : V \to V$. Die Menge $\mathrm{GL}(V)$ bildet eine Gruppe bezüglich der Komposition.

Aufgabe. Auf der Menge $\mathrm{End}(V)$ aller Endomorphismen $F : V \to V$ betrachte die Summe linearer Abbildungen (siehe Bemerkung 2.26) und die Komposition als Produkt. Zeige, dass $\mathrm{End}(V)$ mit diesen Operationen einen Ring mit Eins bildet. Ist dieser Ring kommutativ?

Bemerkung 2.36. Wir haben in der Proposition 2.18 gesehen, dass jeder Unterraum U des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V einen Komplementärraum W besitzt. Insbesondere ist $V = U \oplus W$. Es kann verschiedene Komplementärräume geben, jedoch sind je zwei zu U komplementäre Räume kanonisch isomorph: Wir nehmen an, dass $V = U \oplus W = U \oplus W'$ und wollen $W \simeq W'$ zeigen (ohne Dimensionsrechnungen!). Gegeben w in $W \subset V = U \oplus W'$ stelle w eindeutig als $w = u + w'$ dar, mit u aus U und w' aus W'. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & W & \to & W' \\ & w & \mapsto & w' \end{array}$$

ist wohldefiniert, weil die Darstellung $w = u + w'$ eindeutig ist, das heißt, der Vektor $F(w)$ ist das einzige Element von W' mit $w - F(w)$ in U. Es lässt sich leicht zeigen, dass F linear ist, da U, W und W' Unterräume sind.

Aus der letzten Bemerkung folgt, dass die Abbildung F bijektiv ist mit inverser Abbildung

$$\begin{array}{rccc} G: & W & \to & W' \\ & w' & \mapsto & w \end{array}$$

wobei $G(w')$ das einzige Element von W ist mit $w' - G(w')$ in U. Alternativ könnten wir die Bijektivität von F leicht zeigen, indem wenn wir $\mathrm{Ker}(F)$ und $F(W)$ beschreiben.

Der Grund, warum alle Komplementärräume zueinander isomorph sind, liegt darin, dass jeder (und daher alle) Komplementärraum zum Quotientenraum isomorph ist, welchen wir nun am Ende dieses Abschnittes einführen.

Bemerkung 2.37. Gegeben einen Unterraum U eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, definiert die Relation

$$v \sim_U v' \Longleftrightarrow v - v' \in U$$

eine Äquivalenzrelation auf V (siehe Appendix B). In der Tat:

- Es gilt $v \sim_U v$, weil $v - v = 0_V$ in U liegt.
- Wenn $v \sim_U v'$, so ist $v' \sim_U v$, denn $v' - v = -(v - v')$ liegt auch in U.

- Wenn $v \sim_U v'$ und $v' \sim_U w$, so ist $v \sim_U w$, denn $v - w = (v - v') + (v' - w)$ liegt im Unterraum U, wenn $(v - v')$ und $(v' - w)$ aus U kommen.

Die Äquivalenzklasse von v modulo der Äquivalenzrelation $\sim_U$ heißt *Nebenklasse* von v modulo U und wird mit $v + U$ bezeichnet. Des Weiteren heißt die Menge aller Nebenklassen

$$V/U = \{v + U\}_{v \in V}$$

der *Quotientenraum* von V nach U.

Beachte, dass jedes Element u aus U in der Nebenklasse $0_V + U$ liegt.

Proposition 2.38. *Der Quotientenraum V/U ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und die kanonische Projektion*

$$\begin{array}{rccc} \pi_U : & V & \to & V/U \\ & v & \mapsto & v + U \end{array}$$

ist ein Epimorphismus mit $\mathrm{Ker}(\pi) = U$.

Beweis. Analog zu der Bemerkung 1.30 ist leicht zu zeigen, dass die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V/U \\ (v_1, v_2) & \mapsto & (v_1 + v_2) + U \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V/U \\ v & \mapsto & (\lambda v) + U \end{array}$$

kompatibel mit der Äquivalenzrelation $\sim_U$ von der Bemerkung 2.37 sind. Aus dem Lemma B.8 folgt, dass V/U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Nebenklasse $0 + U$ als neutrales Element ist.

Die Linearität der Projektion π_U folgt trivial aus der Definition der Vektorraumstruktur auf V/U. Klarerweise ist π_U surjektiv, weil V/U aus Äquivalenzklassen von Elementen aus V besteht.

Wir zeigen nun, dass der Kern von π_U gerade der Unterraum U ist: Eine Richtung ist trivial, weil $u + U = 0_V + U$. Angenommen, dass v in $\mathrm{Ker}(\pi)$ liegt, so ist $\pi_U(v) = v + U = 0_V + U$, das heißt, das Element $v = v - 0_V$ liegt in U, wie gewünscht. $\square$

Aus dem Satz 2.31 folgt sofort folgendes Resultat.

Korollar 2.39. *Wenn V endlich-dimensional ist, so ist*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} V/U.$$

Korollar 2.40. *Jeder zu U komplementäre Raum W ist zu V/U isomorph.*

Wenn V endlich-dimensional ist, so gilt

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W.$$

Beweis. Wegen $U \cap W = \{0_V\}$ ist die Einschränkung $\pi_{U \restriction W}$ der kanonischen Projektion $\pi_U : V \to V/U$ auf W injektiv. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\pi_{u \restriction W}$ surjektiv ist: Gegeben eine Nebenklasse $v + U$, mit v aus V, schreibe $v = u + w$ mit u aus U und w aus W. Insbesondere ist $v \sim w$, weil $v - w = u$ in U liegt. Also $\pi_{U \restriction W}(w) = \pi_U(w) = w + U = v + U$, wie gewünscht.

Die letzte Gleichung folgt sofort aus dem Korollar 2.32. $\square$

Definition 2.41. Die *Kodimension* eines Unterraumes des endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist $\dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(U)$. Die Kodimension von U in V entspricht der Dimension des Quotientenraumes V/U.

Satz 2.42. *Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum Homomorphismus $F : V \to W$ und jeden Unterraum U von V mit $U \subset \mathrm{Ker}(F)$, gibt es eine eindeutige* von F induzierte *Abbildung $\overline{F} : V/U \to W$ so, dass $\overline{F} \circ \pi_U = F$, das heißt, das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_U"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\square"] & & W \\
& V/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert (wir kennzeichnen dies mit dem Zeichen $\square$). Ferner gilt $F(V) = \overline{F}(V/U)$ und so ist F genau dann surjektiv, wenn $\overline{F}$ es ist.

Des Weiteren ist $\overline{F}$ genau dann injektiv, wenn $U = \mathrm{Ker}(F)$.

Beweis. Die Abbildung F ist klarerweise kompatibel mit der Äquivalenzrelation $\sim_U$ des Quotientenraumes V/U: Wenn $v_1 \sim_U v_2$, so liegt $v_1 - v_2$ in U. Insbesondere ist

$$F(v_1) = F(v_2 + (v_1 - v_2)) = F(v_2) + F(v_1 - v_2) = F(v_2) + 0_W = F(v_2),$$

weil $U \subset \mathrm{Ker}(F)$. Aus dem Lemma B.8 folgt die Existenz der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \overline{F}: & V/U & \to & W \\ & v+U & \mapsto & F(v) \end{array}$$

Insbesondere gilt $\overline{F} \circ \pi_U = F$ und der Bildbereich von F ist gleich dem Bildbereich von $\overline{F}$, weil π_U surjektiv ist.

Wir zeigen zuerst, dass $\overline{F}$ linear ist: Gegeben λ und μ in $\mathbb{K}$ sowie Nebenklassen $v_1 + U$ und $v_2 + U$, gilt:

$$\begin{aligned} \overline{F}(\lambda(v_1 + U) + \mu(v_2 + U)) = \overline{F}\big((\lambda v_1 + \mu v_2) + U\big) = F(\lambda v_1 + \mu v_2) = \\ = \lambda F(v_1)\mu F(v_2) = \lambda\overline{F}(v_1) + \mu\overline{F}(v_2). \end{aligned}$$

Ferner ist die Eindeutigkeit des Homomorphismus $\overline{F}$ offensichtlich: Angenommen $\overline{F}_1$ erfüllt, dass $\overline{F}_1 \circ \pi_U = F$, dann ist

$$\overline{F}_1(v + U) = \overline{F}_1 \circ \pi_U(v) = F(v) = \overline{F}(v + U),$$

für alle Nebenklassen $v + U$ aus V/U, und somit $\overline{F} = \overline{F}_1$, wie gewünscht.

Wir nehmen nun $U = \mathrm{Ker}(F)$ an und zeigen, dass $\overline{F}$ injektiv ist: Wegen der Proposition 2.29 müssen wir nur zeigen, dass $\mathrm{Ker}(\overline{F}) = \{0_V + U\}$. Wenn die Nebenklasse $v + U$ in $\mathrm{Ker}(\overline{F})$ liegt, ist $\overline{F}(v + U) = F(v) = 0_W$ Also liegt v in $\mathrm{Ker}(F) = U$ und somit ist $v + U = 0_V + U$. Die andere Richtung, dass $U = \mathrm{Ker}(F)$ aus der Injektivität von F folgt, lässt sich analog zeigen. $\square$

Da jeder Homomorphismus eine Surjektion auf seinem Bildbereich induziert, folgt folgender Satz:

Korollar 2.43. (*Noetherscher Isomorphiesatz*) *Jeder Homomorphimus $F : V \to W$ induziert einen Isomorphimus $\overline{F} : V/\mathrm{Ker}(F) \to F(V)$.*

Insbesondere gilt

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Rg}(F),$$

wenn V endlich-dimensional ist.

2.4 Matrizen und Morphismen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. In diesem Abschnitt sind alle $\mathbb{K}$-Vektorräume endlich-dimensional.

Bemerkung 2.44. Wenn V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n ist, bestimmt wegen des Satzes 2.25 jede Wahl einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V einen (nicht-kanonischen) Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^n \to V$, welcher eindeutig durch $\varphi(e_i) = v_i$ gegeben wird, wobei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ ist. Analog gibt es zu einem m-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum W einen Isomorphismus $\psi : \mathbb{K}^m \to W$ bezüglich der kanonischen Basis $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ von $\mathbb{K}^m$ und der Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von W.

Gegeben eine lineare Abbildung $F : V \to W$ sowie Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von W, betrachte nun folgendes kommutative Diagram:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "F"] & & W \\
& \square & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\circ F\circ\varphi"] & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Aus dem Beispiel 2.23 folgt, dass die lineare Abbildung $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ gegeben wird, also $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi = F_A$ mit $F_A(e_i) = Ae_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} e'_j$. Beachte, dass $\psi \circ F_A = F \circ \varphi$.

Gegeben nun einen Vektor v aus V, dessen Koordinaten bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ durch das Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gegeben sind, gilt

$$\begin{aligned}
F(v) = F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (F \circ \varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\psi \circ F_A(e_i)) = \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi\big(\sum_{j=1}^m a_{ji} e'_j\big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \big(\sum_{j=1}^m a_{ji} \psi(e'_j)\big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \big(\sum_{j=1}^m a_{ji} w_j\big) = \sum_{j=1}^m \big(\sum_{i=1}^n a_{ji} \lambda_i\big) w_j.
\end{aligned}$$

Insbesondere sind die Koordinaten des Bildvektors $F(v)$ bezüglich der Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von W gegeben durch das Tupel

$$\big(\sum_{i=1}^m a_{1i} \lambda_i, \ldots, \sum_{i=1}^m a_{mi} \lambda_i\big),$$

oder in symbolischer Notation

$$F(v_i) = (w_1, \ldots, w_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

wobei dies ein Produkt zweier Matrizen ist (siehe Beispiel 1.16).

$$F(v) = F\Big((v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\Big) = (w_1, \dots, w_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definition 2.45. Gegeben eine lineare Abbildung $F : V \to W$, ist die obige Matrix A die *Darstellungsmatrix* von F bezüglich der Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \dots, w_m\}$ von W.

Definition 2.46. Der *Zeilenraum* einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist der von den Zeilenvektoren $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{K}^n$. Der *Zeilenrang* der Matrix A ist die Dimension des *Zeilenraumes*. Analog definieren wir den *Spaltenrang* als die Dimension des von den Spaltenvektoren $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ erzeugten *Spaltenraums*.

Bemerkung 2.47. Der Zeilenrang einer Matrix A in Zeilenstufenform (siehe Definition 1.6) entspricht gerade dem Rang der Matrix A, das heißt, der Anzahl der Stufen: Es ist offensichtlich, dass die Pivotzeilenvektoren eine Basis des Zeilenraumes bilden, weil sich die Nullvektoren trivialerweise als Linearkombination schreiben lassen. Ferner sind die Pivotzeilenvektoren linear unabhängig, weil die Pivots an verschiedenen Stellen liegen.

Mit Hilfe des Isomorphismus ψ folgt sofort, dass die Vektoren $F(v_1), \dots, F(v_k)$ genau dann linear unabhängig sind, wenn die Zeilenvektoren $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ linear unabhängig sind. Aus dem Basisauswahlsatz 2.11 schließen wir, dass der Rang der linearen Abbildung F gleich dem Zeilenrang der Darstellungsmatrix ist, welcher wiederum dem Zeilenrang jeder durch Zeilenumformungen entstandenen Umformung der Darstellungsmatrix entspricht, da der Zeilenraum bei Zeilenumformungen erhalten bleibt, das heißt, unter ihnen invariant ist.

Beispiel 2.48. Analog zu den Zeilenumformungen in der Definition 1.4 können wir die Spaltenumformungen Vertauschung, Multiplikation und Addition (von Spaltenvektoren) definieren. Es ist offensichtlich, dass der Spaltenraum (und somit der Spaltenrang) unter Spaltenumformungen invariant ist. Allerdings bleibt der Zeilenraum unter Spaltenumformungen nicht immer erhalten, z. B. lässt sich die 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Spaltenvertauschung zu folgender Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umformen. Jedoch hat sich der Zeilenraum geändert (wir werden im Folgenden sehen, dass der Zeilenrang erhalten bleibt).

Satz 2.49. *Der Zeilenrang bleibt unter Spaltenumformungen erhalten. Der Spaltenrang bleibt unter Zeilenumformungen erhalten.*

Insbesondere stimmen Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix überein (und wir bezeichnen ihn nur als den Rang $\mathrm{Rg}(A)$ *von* A*).*

Beweis. Weil sich beide Behauptung ähnlich beweisen lassen, werden wir nur zeigen, dass der Zeilenrang unter Spaltenumformungen erhalten bleibt. Hierfür reicht es eine einzige beliebige Spaltenumformung zu betrachten. Weiter genügt es die Operationen **Spaltenmultiplikation** und **Spaltenaddition** zu betrachten, da sich jede Spaltenvertauschung als Komposition von Spaltenmultiplikation und -addition schreiben lässt (siehe das Diagramm nach der Definition D:Zeilop). Sei nun $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{ij})$ die durch die Spaltenumformung entstandene Matrix. Im Folgenden bezeichnen wir mit a_i, bzw. b_i, den i-ten Zeilenvektor der Matrix A, bzw. B.
Spaltenmultiplikation: Wir nehmen an, dass die Matrix B aus A entsteht durch Multiplikation der k-ten Spalte mit dem Skalar $\mu \neq 0_{\mathbb{K}}$, also

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{falls } j \neq k \\ \mu a_{ik}, & \text{für } j = k \end{cases}$$

Gegeben nun Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aus $\mathbb{K}$, gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \\ &\overset{\mu \neq 0_{\mathbb{K}}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \text{ für } j \neq k \text{ und } \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \cdot \mu) a_{ik} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_{ij} = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0 \end{aligned}$$

Somit bleibt der Zeilenrang in diesem Fall erhalten, wie gewünscht.
Spaltenaddition: Wir nehmen nun an, dass die Matrix B aus A entsteht durch Addition des μ-Fachen der ℓ-ten Spalte zur k-ten Spalte (mit $k \neq \ell$), also

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{falls } j \neq k \\ a_{ik} + \mu a_{i\ell}, & \text{für } j = k \end{cases}$$

Gegeben nun Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aus $\mathbb{K}$, gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \text{ für } j \neq k \text{ und } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_{ik} + \mu a_{i\ell}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_{ij} = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0 \end{aligned},$$

und somit bleibt der Zeilenrang auch in diesem Fall erhalten. □

Korollar 2.50. (*Gauß-Jordan-Eliminationsmethode*) *Jede Matrix über dem Körper K lässt sich durch Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen in* Hermitische Normalform *bringen, das heißt, in die Form:*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & \cdots & c_{rr} & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

wobei r der Rang der Matrix ist, die Elemente c_{ii} nicht Null sind, und die Zeichen $*$, bzw. $\mathbf{0}$, für eine beliebige Matrix, bzw. die Nullmatrix, in der entsprechenden Größe stehen. Wir können sogar annehmen, dass $c_{ii} = 1_{\mathbb{K}}$, für $1 \leq i \leq r$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir mit Hilfe der Gauß-Eliminationsmethode 1.8 annehmen, dass die Matrix A in Zeilenstufenform mit Pivots $a_{1j(1)}, \ldots, a_{rj(r)}$ ist. Durch sukzessive Anwendungen der Zeilenoperation **Addition** können wir die Matrix so umformen, dass alle Einträge in der $j(i)$-ten Spalte oberhalb des Pivotes $a_{ij(i)}$ Null sind. Es genügt jetzt die erste mit der $j(1)$-ten Spalte, sowie die zweite mit der $j(2)$-ten Spalte usw. zu **vertauschen**, um die Matrix in Hermitische Normalform zu bringen. Mit Hilfe der **Multiplikation** können wir annehmen, dass alle Pivots gleich $1_{\mathbb{K}}$ sind. □

Aus der Dimensionsformel 2.31 für lineare Abbildungen folgt nun folgendes Resultat.

Korollar 2.51. *Sei A eine $m \times n$-Matrix über K und $\mathcal{S}_H$ die Lösungsmenge in $\mathbb{K}^n$ des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.*

Die Menge $\mathcal{S}_H$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$ mit

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_H = n - \mathrm{Rg}(A).$$

Beweis. Beachte, dass ein Vektor v aus $\mathbb{K}^n$ genau dann in $\mathcal{S}_H$ liegt, wenn $F_A(v) = 0$, das heißt, wenn v im Kern von F_A ist. Aus der Bemerkung 2.47 folgt, dass $\mathrm{Rg}(F_A) = \mathrm{Rg}(A)$. □

2.5 Basiswechsel

In der Bemerkung 2.44 haben wir gesehen, dass es eine Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen $F : V \to W$ der endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W, und $m \times n$-Matrizen, mit $m = \dim_{\mathbb{K}} W$ und $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ gibt, in dem wir Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von W auswählen. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass diese Korrespondenz mit der Verknüpfung linearer Abbildungen einerseits und mit der Matrixmultiplikation (siehe Beispiel 1.16) andererseits kompatibel ist.

Proposition 2.52. *Seien U, V und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit gewählten Basen $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von U, sowie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ von W. Gegeben zwei lineare Abbildungen $F : V \to U$ und $G : U \to W$ mit Darstellungsmatrix A für F bezüglich der Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von U, sowie Darstellungsmatrix B für G bezüglich der Basen $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von U und $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ von W, ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbidldung $G \circ F : V \to W$ bezüglich der Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ von W die Produktmatrix $B \cdot A$.*

Beachte, dass $B \cdot A$ als Produkt der $\ell \times m$-Matrix B und der $m \times n$-Matrix A eine $\ell \times n$-Matrix ist.

Beweis. Schreibe $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ki})$, sowie $B \cdot A = (e_{kj})$ mit

$$e_{kj} = \sum_{1 \le i \le m} b_{ki} a_{ij}.$$

Die Darstellungsmatrix wird eindeutig bestimmt, wenn wir die Koordinaten jedes Bildvektors bezüglich der entsprechenden Basis berechnen. Also müssen wir nur zeigen, dass $G \circ F(v_j)$ durch die Matrix $B \cdot A$ in der Basis $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ gegeben wird. Nun ist

$$\begin{aligned} G \circ F(v_j) = G(F(v_j)) = G\Big(\sum_{1 \le i \le m} a_{ij} u_i\Big) &= \sum_{1 \le i \le m} a_{ij} G(u_i) = \sum_{1 \le i \le m} a_{ij} \Big(\sum_{1 \le k \le \ell} b_{ki} w_k \Big) = \\ &= \sum_{1 \le i \le m} \sum_{1 \le k \le \ell} a_{ij} b_{ki} w_k = \sum_{1 \le k \le \ell} \Big(\sum_{1 \le i \le m} b_{ki} a_{ij} \Big) w_k = \sum_{1 \le k \le \ell} e_{kj} w_k \end{aligned}$$

und somit hat $G \circ F$ die Darstellungsmatrix $B \cdot A$ bezüglich der Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ von W, wie gewünscht. $\square$

Korollar 2.53. *Für A in $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ und B in $\mathcal{M}_{\ell \times m}(\mathbb{K})$ ist $F_B \circ F_A = F_{B \cdot A}$.*

Korollar 2.54. *Das Matrixprodukt definiert auf der Menge der quadratischen Matrizen $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ der Größe n ein nicht-kommutatives Monoid (Definition 1.19), dessen neutrales Element die* $n \times n$-Einheitsmatrix

$$\mathbf{Id}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ Zeilen}$$

ist.

Definition 2.55. Eine Matrix A in $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ist *regulär* (oder *invertierbar*), falls A ein multiplikatives Inverses in $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ besitzt, das heißt, falls es eine Matrix B gibt, mit

$$A \cdot B = \mathbf{Id}_n = B \cdot A.$$

In diesem Fall wird die obige Matrix B von A eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen die inverse Matrix von A mit A^{-1}.

Eine $n \times n$-Matrix A, welche nicht regulär ist, heißt *singulär.*

Das Produkt invertierbarer Matrizen ist wiederum invertierbar. Insbesondere haben wir folgendes Korollar:

Korollar 2.56. *Die Teilmenge aller regulärer Matrizen aus $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ bildet eine nicht-kommutative Gruppe, genannt die* lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *(vom Grad n).*

Weil der einzige Isorphismus auf $\mathbb{K}^n$ mit Darstellungsmatrix $\mathbf{Id}_n$ die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ ist, bekommen wir folgendes Resultät:

Korollar 2.57. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) \\ & A & \mapsto & F_A \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, wobei $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ *die lineare Gruppe des* $\mathbb{K}$*-Vektorraumes* $\mathbb{K}^n$ *ist (siehe Bemerkung 2.35).*

Insbesondere ist wegen des Korollars 2.32 und der Bemerkung 2.47 eine $n \times n$*-Matrix genau dann regulär, wenn ihr Rang* n *ist.*

Definition 2.58. Seien $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ Basen des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Die *Übergangsmatrix* S von B nach B' ist die Darstellungsmatrix in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ des eindeutigen Automorphismus $F : V \to V$, welcher für $1 \leq i \leq n$ den Basisvektor v_i auf den Basisvektor v_i' abbildet (siehe Satz 2.25 und Korollar 2.32), bezüglich der Basis B von V (sowohl im Definitions- als auch im Bildbereich). Die Übergangsmatrix $S = (s_{ij})$ ist durch

$$v_i' = \sum_{1\leq j\leq n} s_{ji} v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n$$

eindeutig bestimmt.

Bemerkung 2.59. Die Übergangsmatrix S von B nach B' ist regulär und die Inverse S^{-1} entspricht der Übergangsmatrix von B' nach B, weil F^{-1} genau der Automorphismus von V ist, welcher v_i auf v_i' abbildet.

Mit Hilfe der Übergangsmatrix können wir leicht die Koordinaten eines beliebigen Vektors v bezüglich der Basis B aus den Koordinaten von v bezüglich B' berechnen:

$$v = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i v_i,$$

mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad v = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i' v_i',$$

wegen der Bemerkung 2.44.

Korollar 2.60. *Seien* V *und* W *endlich-dimensionale* $\mathbb{K}$*-Vektorräume und* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *und* $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ *ausgewählte Basen von* V*, sowie* $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *und* $C' = \{w_1', \ldots, w_m'\}$ *ausgewählte Basen von* W*. Sei* S *die Übergangsmatrix von* B *nach* B' *in* V *und* T *die Übergangsmatrix von* C *nach* C' *in* W*.*

Wenn die lineare Abbildung $F : V \to W$ *bezüglich der Basen* B *von* V *und* C *von* W *die Darstellungsmatrix* A *besitzt, hat* F *bezüglich der Basen* B' *von* V *und* C' *von* W *die Darstellungsmatrix*

$$T^{-1}AS.$$

Beweis. Sei α, bzw. β, der Automorphismus von V, bzw. W, welcher die Basis B auf B', bzw. C auf C', abbildet. Die Darstellungsmatrix von β^{-1} bezüglich der Basen C' und C' ist wegen der Bemerkung 2.59 gegeben durch $T^{-1} = (t_{jk})$. Dementsprechend hat α die Darstellungsmatrix $S = (s_{hi})$ bezüglich der Basen B und B.

Wegen der Bemerkung 2.44 müssen wir nur die Koordinaten des Vektors $F(v_i')$ bezüglich der Basis C' berechnen. Schreibe $A = (a_{ij})$. Nun gilt

$$F(v_i') = F\big(\sum_{1\le h\le n} s_{hi} v_h\big) = \sum_{1\le h\le n} s_{hi} F(v_h) = \sum_{1\le h\le n} s_{hi} \sum_{1\le j\le m} a_{jh} w_j = \sum_{1\le j\le m} \big(\sum_{1\le h\le n} a_{jh} s_{hi}\big) w_j.$$

Aus $w_j = \sum\limits_{1\le k\le m} t_{kj} w_k'$ folgt, dass

$$\begin{aligned} F(v_i') = \sum_{1\le j\le m} \big(\sum_{1\le h\le n} a_{jh} s_{hi}\big) w_j = \sum_{1\le j\le m} \big(\sum_{1\le h\le n} a_{jh} s_{hi}\big)\big(\sum_{1\le k\le m} t_{kj} w_k'\big) = \\ = \sum_{1\le k\le m} \Big(\sum_{1\le j\le m} t_{kj} \cdot \big(\sum_{1\le h\le n} a_{jh} s_{hi}\big)\Big) w_k'. \end{aligned}$$

Somit ist die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basen B' von V und C' von W durch das Produktmatrix $T^{-1} \cdot A \cdot S$ gegeben, wie gewünscht. □

Definition 2.61. Zwei Matrizen A und A' in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ sind *äquivalent*, falls es reguläre Matrizen S in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ und T in $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ derart gibt, dass $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$.

Bemerkung 2.62. Der obige Begriff bestimmt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Eine Matrix A in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat genau dann Rang r, wenn A zur folgenden Matrix

$$H_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Id}_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

äquivalent ist, wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix in der passenden Größe bezeichnet: Eine Richtung ist klar, da äquivalente Matrizen denselben Rang haben, weil sie dieselbe lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bestimmen (bezüglich verschiedener Basen!). Wir nehmen also an, dass A Rang k hat und $F_A : \mathbb{K}^n \to K^m$ die von A bestimmte lineare Abbildung ist, wobei wir die kanonischen Basen B von $\mathbb{K}^n$ und C von $\mathbb{K}^m$ gewählt haben. Wegen des Korollars 2.60 müssen wir nur zeigen, dass es Basen B' von $\mathbb{K}^n$ und C' von $\mathbb{K}^m$ so gibt, dass die Darstellungsmatrix von F_A bezüglich B' und C' die Form H_r hat, wobei $r = \mathrm{Rg}(F_A) = \mathrm{Rg}(A)$, wegen der Bemerkung 2.47.

Wir beweisen allgemein folgende Behauptung, welche den gewünschten Beweis liefert.

Behauptung. *Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Es gibt Basen B_1 von V und C_1 von W derart, dass die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basen B_1 und C_1 die Form*

$$H_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Id}_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

besitzt, wobei r der Rang von F ist.

Beweis der Behauptung. Sei U ein Komplementärraum zu $\mathrm{Ker}(F)$ in V, siehe die Proposition 2.18. Die Einschränkung $F_{\restriction U}$ ist klarerweise injektiv und somit sind die Bilder der Basisvektoren von U linear unabhängig in W, wegen der Proposition 2.29.

Wähle eine Basis $\{v_1, \ldots, v_k\}$ von U und eine Basis $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ von $\mathrm{Ker}(F)$. Wegen des Korollars 2.19 bildet $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Der Beweis des Satzes 2.31 liefert, dass $k = \mathrm{Rg}(F)$, da das Bild $F(V)$ von den linear unabhängigen Vektoren $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ aus W erzeugt wird. Mit Hilfe des Basisergänzungssatzes 2.10 finden wir eine Basis C_1 von W, welche die Teilmenge $\{F(v_1), \ldots, F(v_k)\}$ ergänzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist

$$C_1 = \{F(v_1), \ldots, F(v_k), w_{k+1}, \ldots, w_m\}.$$

Klarerweise hat die Darstellungsmatrix von F bezüglich B_1 und C_1 die obige Form H_k, mit $k = \mathrm{Rg}(F) = r$, weil

$$F(v_i) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} F(v_i) + \sum\limits_{\substack{1 \le j \le k \\ j \neq i}} 0_{\mathbb{K}} F(v_i) + \sum\limits_{k+1 \le h \le n} 0_{\mathbb{K}} w_h, \text{ für } 1 \le i \le k \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}.$$

$\square_{\text{Beh.}}$

Insbesondere sind zwei Matrizen in $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ genau dann äquivalent, wenn sie denselben Rang besitzen, weil die obige Äquivalenzrelation transitiv und symmetrisch ist.

Analog zur Definition 2.61 können wir folgende Äquivalenzrelation definieren: Zwei quadratische Matrizen A und A' in $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ sind *ähnlich*, wenn es eine reguläre Matrix S in $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ mit $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$ gibt. Eine Charakterisierung jeder Äquivalenzklasse bezüglich Ähnlichkeit ist wesentlich komplizierter und wird uns in der nächsten Vorlesung *Lineare Algebra II* zur Jordanschen Normalform führen.

Kapitel 3

Determinanten

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

3.1 Elementarmatrizen

In diesem Abschnitt werden wir eine explizite Methode angeben, um die Inverse einer regulären Matrix über $\mathbb{K}$ zu berechnen. Insbesondere wird folgen, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ von den Elementarmatrizen erzeugt wird.

Definition 3.1. Gegeben eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Indizes $1 \leq i, j \leq n$, definiere folgende quadratische $n \times n$-Matrix $\mathbf{E}_{ij}$: Der Eintrag an der (i, j)-Stelle von $\mathbf{E}_{ij}$ ist $1_{\mathbb{K}}$ und alle anderen Einträge sind $0_{\mathbb{K}}$. Das heißt, für die Matrix $\mathbf{E}_{ij} = (a_{k\ell})$ ist

$$a_{k\ell} = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}}, & \text{für } (k, \ell) \neq (i, j) \\ 1_{\mathbb{K}}, & \text{für } (k, \ell) = (i, j) \end{cases} .$$

Eine quadratische Matrix ist *elementar*, falls sie zu einem der drei folgenden Fällen gehört (siehe Definition 1.4):

Vertauschung Die Matrix V_{ij} entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_n$ durch Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile

$$V_{ij} = \mathbf{Id}_n - \mathbf{E}_{ii} + \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}.$$

Multiplikation Die Matrix $M_i(\lambda)$ entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_n$ durch Multiplikation der i-ten Zeile mit dem Skalar $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$

$$M_i(\lambda) = \mathbf{Id}_n + (\lambda - 1) \cdot \mathbf{E}_{ii}.$$

Addition Für $i \neq j$ entsteht die Matrix $S_{ij}(\mu)$ aus der Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_n$ durch Addition des μ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

$$S_{ij}(\mu) = \mathbf{Id}_n + \mu \cdot \mathbf{E}_{ij}.$$

Bemerkung 3.2. Alle elementare Matrizen sind regulär:

$$\begin{aligned} V_{ij}^{-1} &= V_{ij}(=V_{ji}) \\ M_i(\lambda)^{-1} &= M_i(\lambda^{-1}) \\ S_{ij}(\mu)^{-1} &= S_{ij}(-\mu) \end{aligned}$$

Sei nun B eine beliebige quadratische $n \times n$-Matrix. Gegeben eine Elementarmatrix A, ist die Matrix $A \cdot B$ die quadratische Matrix, welche aus B durch Anwendung der entsprechenden Zeilenumformung in Definition 1.4 entsteht. Des Weiteren gilt für die Matrix $B \cdot A$:

Vertauschung Falls $A = V_{ij}$ entsteht die Matrix $B \cdot A$ aus B durch Vertauschung der i-ten und j-ten Spalte.

Multiplikation Falls $A = M_i(\lambda)$ entsteht die Matrix $B \cdot A$ aus B durch Multiplikation der i-ten Spalten mit λ.

Addition Falls $A = S_{ij}(\mu)$ entsteht die Matrix $B \cdot A$ durch Addition des μ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte (**Achtung auf die Reihenfolge!**)

Satz 3.3. *Eine quadratische Matrix A in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann regulär, wenn sie durch endlich viele Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_n$ überführen werden kann. Wenn A regulär ist, entsteht die Matrix A^{-1} aus $\mathbf{Id}_n$ durch Anwendung genau dieser Zeilenumformungen.*

Insbesondere wird die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ durch die Elementarmatrizen erzeugt, das heißt, jede reguläre Matrix lässt sich als endliches Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

Beweis. Aus dem Korollar 2.57 folgt, dass A genau dann regulär ist, wenn sie Rang n hat. Die Gauß-Eliminationsmethode 1.8 und 2.50 liefert, dass A genau dann Rang n hat, wenn es Elementarmatrizen $B_1, \ldots, B_n$ derart gibt, dass $B_n \cdots B_1 \cdot A = \mathbf{Id}_n$.

Ferner ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ nach Korollar 2.56 eine Gruppe und somit ist die Inverse A^{-1} durch die Gleichung $X \cdot A = \mathbf{Id}_n$ eindeutig bestimmt, wegen des Lemmas 1.22. Weil Elementarmatrizen regulär sind, ist insbesondere A^{-1} gleich $B_n \cdots B_1 = B_n \cdots B_1 \cdot \mathbf{Id}_n$, wie gewünscht. □

Bemerkung 3.4. Der obige Satz lässt sich leicht als Verfahren implementieren, um zu bestimmen, ob eine gegebene Matrix regulär ist und gegebenenfalls die Inverse Matrix zu gewinnen. Wir erklären das Verfahren anhand eines konkreten Beispiels: Betrachte folgende 3×3-Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei

$$(A|\mathbf{Id}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

die erweiterte Matrix. Wir wenden die Zeilenumformungen auf die Matrizen A und $\mathbf{Id}_3$ (oder äquivalent dazu, auf die erweiterte Matrix) an, bis wir auf der linken Seite entweder die Identitätsmatrix bekommen (in diesem Fall ist A regulär und die Matrix auf der rechten Seite ist gerade die Inverse A^{-1}), oder bis eine Nullzeile auf der linken Seite entsteht (in diesem Fall ist A nicht invertierbar, weil der Rang zu klein ist):

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{V_{13}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{S_{21}(2)\cdot S_{31}(3)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_{12}(-1)\cdot S_{32}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{S_{13}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{M_1(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Die Matrix A ist also invertierbar mit Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Aufgabe. Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

invertierbar?

3.2 Determinantenfunktionen

Determinanten werden eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung der Ähnlichkeit quadratischer Matrizen spielen. Es gibt verschiedene Methoden, um Determinanten einzuführen: Abstrakt, mit Hilfe multilinearer Abbildungen und äußerer Produkte, oder eher geometrisch, als Volumenfunktion n-dimensionaler Parallelepipede.

Wir haben uns für eine Matrix-basierte Definition entschieden, rein aus zeitlichen Gründen, um den Inhalt dieser Vorlesung selbstgenügsam zu halten. Dennoch soll dem Leser bewusst sein, dass alle Definitionen der Determinante äquivalent sind.

Definition 3.5. Eine *(n-dimensionale) Determinantenfunktion* ist eine Abbildung

$$D : (\mathbb{K}^n)^n = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K}$$

mit folgenden Eigenschaften:

Zeilenmultiplikation (ZM) Für alle λ aus $\mathbb{K}$ und $1 \leq i \leq n$ gilt

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \lambda \cdot D(a_1, \ldots, a_n).$$

Zeilenaddition (ZA) Für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ gilt

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) = D(a_1, \ldots, a_n).$$

Normiert Für die kanonische Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ ist $D(e_1, \ldots, e_n) = 1_{\mathbb{K}}$.

Beispiel 3.6. Wenn wir die Elemente aus $\mathbb{K}^2$ als Zeilenvektoren einer Matrix befassen, so ist

$$D((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = D(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

eine 2-dimensionale Determinantenfunktion.

Lemma 3.7. *Für jede Determinantenfunktion $D : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ gilt:*

(a) Für λ aus $\mathbb{K}$ und $1 \leq i \neq j \leq n$ ist

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) = D(a_1, \ldots, a_n).$$

(b) Wenn $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig sind, ist $D(a_1, \ldots, a_n) = 0_\mathbb{K}$. Insbesondere ist

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0_{\mathbb{K}^n}, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 0_\mathbb{K}.$$

(c) Falls $a_i = a_j$ für $i \neq j$, dann ist $D(a_1, \ldots, a_n) = 0_\mathbb{K}$. Insbesondere ist die Determinantenfunktion alternierend, *das heißt,*

$$D(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = -D(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n).$$

(d) Für jedes $1 \leq i \leq n$ ist

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = D(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) + D(a_1, \ldots, b_i, \ldots, a_n).$$

Insbesondere ist die Determinantenfunktion multilinear, *das heißt, linear in jeder Koordinate.*

Beweis. Für (a) ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda \neq 0_\mathbb{K}$ und somit folgt aus

$$\lambda \cdot D(a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{ZM}}{=} D(a_1, \ldots, \lambda a_j, \ldots, a_n) \overset{\text{ZA}}{=} D(a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, \lambda a_j, \ldots, a_n) = \\ \overset{\text{ZM}}{=} \lambda \cdot D(a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$

dass

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) = D(a_1, \ldots, a_n),$$

wie gewünscht.

Für (b) genügt es wegen der Bemerkung 2.2 die erste Behauptung zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gibt es einen Index $1 \leq i \leq n$ so, dass sich der Vektor a_i als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben lässt, also $a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$ für Skalare λ_j aus $\mathbb{K}$. Nun ist

$$D(a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{(a)}}{=} D(a_1, \ldots, a_i - \lambda_1 a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{(a)}}{=} \underbrace{\cdots}_{n-i \text{ Mal}} \overset{\text{(a)}}{=} D(a_1, \ldots, a_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j, \ldots, a_n) = \\ = D(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0_{\mathbb{K}^n}, a_{i-1}, \ldots, a_n) \overset{\text{ZM}}{=} 0_\mathbb{K} \cdot D(a_1 \ldots, a_i, \ldots, a_n) = 0_\mathbb{K}.$$

Für (c) folgt die erste Behauptung aus (b), weil die Vektoren $a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n$ klarerweise linear abhängig sind. Weiter ist

$$D(a_1, \dots, a_n) \overset{\text{ZA}}{=} D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j + a_i, \dots, a_n) \overset{\text{ZA}}{=}$$
$$= D(a_1, \dots, a_i - (a_j + a_i), \dots, a_j + a_i, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, -a_j, \dots, , a_j + a_i, \dots, a_n) \overset{\text{ZA}}{=}$$
$$= D(a_1, \dots, -a_j, \dots, , a_j + a_i - a_j, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, -a_j, \dots, , a_i, \dots, a_n) \overset{\text{ZM}}{=}$$
$$= (-1_{\mathbb{K}}) \cdot D(a_1 \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) = -D(a_1 \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

Wir beweisen nun (d) durch Fallunterscheidung: Wenn die $n-1$-elementige Menge

$$\{a_1, \dots, a_{i_1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$$

linear abhängig ist, so sind $\{a_1, \dots, a_n\}$ und $\{a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ sowie

$$\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}$$

auch linear abhängig. Aus (b) folgt, dass

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} =$$
$$= D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n),$$

wie gewünscht. Also können wir annehmen, dass die Vektoren $a_1, \dots, a_{i_1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ linear unabhängig sind. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder der Vektor a_i ist eine Linearkombination der Vektoren $a_1, \dots, a_{i_1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ oder die Menge $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ bildet eine Basis des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}^n$. Im ersten Fall schreibe $a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$, dann ist

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \overset{\text{(a)}}{=} D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) =$$
$$= D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n) = 0_{\mathbb{K}} + D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n) \overset{\text{(b)}}{=}$$
$$= D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n),$$

wie gewünscht. Im Falle, dass die Menge $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bildet, lässt sich der Vektor b_i schreiben als

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k$$

mit Skalaren μ_k aus $\mathbb{K}$. Insbesondere ist

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \overset{\text{(a)}}{=} D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i - \sum_{k \neq i} \mu_k a_k, a_{i+1}, \dots, a_n) =$$
$$= D(a_1, \dots, a_i + \mu_i a_i, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, (1_{\mathbb{K}} + \mu_i) a_i, \dots, a_n) \overset{\text{ZM}}{=}$$
$$= (1_{\mathbb{K}} + \mu_i) \cdot D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \mu_i \cdot D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \overset{\text{ZM}}{=}$$
$$= D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, a_{i-1}, \mu_i a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \overset{\text{(a)}}{=}$$
$$= D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k, \dots, a_n) =$$
$$D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n).$$

□

Korollar 3.8. *Sei D eine n-dimensionale Determinantenfunktion. Gegeben eine quadratische Matrix A aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit Zeilenvektoren*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

schreibe $D(A) = D(a_1, \ldots, a_n)$. Wenn die Matrix A' durch eine elementare Zeilenumformung aus A entsteht, gilt entsprechend:

Vertauschung $D(A') = -D(A)$.

λ-Multiplikation $D(A') = \lambda D(A)$.

Addition $D(A') = D(A)$.

Wenn die Matrix A in Diagonalform ist, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

gilt $D(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Insbesondere ist eine quadratische Matrix B genau dann regulär, wenn $D(B) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Beweis. Mit Hilfe des Lemmas 3.7 lassen sich die ersten vier Behauptungen sofort zeigen. Wenn die Matrix B nicht regulär ist, dann ist der Zeilenrang echt kleiner als n und somit die Zeilenvektoren linear abhängig. Also ist $D(B) = 0_{\mathbb{K}}$ wegen des Lemmas 3.7 (b). Wenn die Matrix B regulär ist, lässt sich B durch Zeilenumformungen in Hermitische Normalform bringen, welche dann in Diagonalform mit nicht-Null Einträgen auf der Diagonalen ist, weil B Rang n hat. Da die Zeilenumformungen die Nulligkeit des Wertes der Determinantenfunktion erhalten, schließen wir aus dem obigen, dass $D(B) \neq 0_{\mathbb{K}}$. □

Bemerkung 3.9. Eine Funktion $D : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften (mit der Notation der Definition 3.1):

(a) $D(M_i(\lambda) \cdot A) = \lambda \cdot D(A)$.

(b) $D(A) = D(S_{ij}(\mu) \cdot A)$ (es genügt $D(A) = D(S_{ij}(1_{\mathbb{K}}) \cdot A)$).

(c) $D(\mathbf{Id}_n) = 1_{\mathbb{K}}$.

liefert mit der Übersetzung aus Korollar 3.8 eine n-dimensionale Determinantenfunktion. Mit Hilfe der obigen Korrespondenz werden wir ab jetzt von Determinantenfunktionen auf der Menge $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ der quadratischen Matrizen über $\mathbb{K}$ reden.

Korollar 3.10. *Je zwei Determinantenfunktionen auf $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sind identisch.*

Beweis. Seien D und D' zwei Determinantenfunktionen wie in der vorigen Bemerkung 3.9. Wir müssen zeigen, dass $D(A) = D'(A)$ für jede Matrix A aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wenn A nicht regulär ist, sind wir fertig, weil $D(A) = 0_\mathbb{K} = D'(A)$ aus dem Korollar 3.8 folgt.

Wenn die Matrix A regulär ist, so ist auch A^{-1} invertierbar. Wegen des Satzes 3.3 entsteht die Matrix $A = (A^{-1})^{-1}$ aus der Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_n$ durch Anwendung endlich vieler Zeilenumformungen. Beachte, dass $D(\mathbf{Id}_n) = D'(\mathbf{Id}_n)$ und dass in jedem Schritt D und D' denselben Wert annehmen nach Korollar 3.8. Somit folgt auch in diesem Fall $D(A) = D'(A)$, wie gewünscht. □

Bemerkung 3.11. Der Grund für die Eindeutigkeit der Determinantenfunktion ist, dass die Menge aller alternierenden multilinearen n-dimensionalen Formen auf $\mathbb{K}^n$ (oder allgemein, auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum) einen $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 1 bilden und dann nur eine Möglichkeit bleibt, wenn wir noch verlangen, dass die alternierende multilineare Form normiert ist.

Proposition 3.12. (*Produktformel für Determinanten*) *Für jede Determinantenfunktion D auf $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt die* Produktformel*:*

$$D(A\cdot B) = D(A)\cdot D(B) \text{ für alle Matrizen } A \text{ und } B \text{ aus } \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Insbesondere ist $D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$, falls A invertierbar ist.

Beweis. Weil $D(\mathbf{Id}_n) = 1_\mathbb{K}$ für jede (normierte) Determinantenfunktion, folgt die zweite Behauptung aus dem Korollar 3.8 und der Produktformel. Seien also A und B zwei beliebige Matrizen aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wenn B nicht regulär ist, kann $A\cdot B$ auch nicht regulär sein, weil $F_{A\cdot B} = F_A \circ F_B$ nach dem Korollar 2.53 und

$$\mathrm{Rg}(A\cdot B) = \dim_\mathbb{K} F_{A\cdot B}(\mathbb{K}^n) = \dim_\mathbb{K} F_A(F_B(\mathbb{K}^n)) \le \dim_\mathbb{K} F_B(\mathbb{K}^n) = \mathrm{Rg}(B) < n.$$

Insbesondere ist $D(A\cdot B) = 0_K = D(A)\cdot 0_\mathbb{K} = D(A)\cdot D(B)$, wie gewünscht.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, dass B regulär ist und somit $\mu = D(B) \ne 0_\mathbb{K}$. Wegen der Eindeutigkeit der Determinantenfunktion im Korollar 3.10, genügt es zu zeigen, dass die Funktion

$$\begin{array}{rccc} D': & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \mu^{-1}\cdot D(A\cdot B) \end{array}$$

im Sinne der Bemerkung 3.9 eine Determinantenfunktion ist. Wenn wir dies gezeigt haben, sind wir fertig, da $D(A) = D'(A) = D(A\cdot B)/D(B)$ und somit

$$D(A)\cdot D(B) = D(A\cdot B),$$

wie gewünscht.

Gegeben λ aus $\mathbb{K}$, ist

$$D'(S_{ij}(1_\mathbb{K})\cdot A) = \mu^{-1}D\big(\,(S_{ij}(1_\mathbb{K})\cdot A)\cdot B\big) = \mu^{-1}D\big(S_ij(1_\mathbb{K})\cdot(A\cdot B)\big) = \mu^{-1}D(A\cdot B) = D'(A),$$

weil D die Eigenschaft (a) in der Bemerkung 3.9 besitzt. Aus demselben Grund ist

$$D'(M_i(\lambda)\cdot A) = \mu^{-1}\cdot D\big((M_i(\lambda)\cdot A)\cdot B\big) = \mu^{-1}\cdot D\big(M_i(\lambda)\cdot(A\cdot B)\big) = \lambda\cdot\mu^{-1}\cdot D(A\cdot B) = \lambda\cdot D'(A).$$

Des Weiteren ist $D'(\mathbf{Id}_n) = \mu^{-1}\cdot D(\mathbf{Id}\cdot B) = \mu^{-1}\cdot D(B) = \mu^{-1}\cdot\mu = 1_\mathbb{K}$, wie gewünscht. □

Aus dem Korollar 3.8 und der Produktformel 3.12 folgt nun, dass $D(S_{ij}(\mu)) = 1_{\mathbb{K}}$ und $D(M_i(\lambda)) = \lambda$. Insbesondere ist $D(V_{ij}) = -1_{\mathbb{K}}$, weil $V_{ij} = M_i(-1_{\mathbb{K}}) \cdot S_{ij}(1_{\mathbb{K}}) \cdot S_{ji}(-1_{\mathbb{K}}) \cdot S_{ij}(1_{\mathbb{K}})$ (siehe Definition 1.4). Folgendes Ergebnis folgt mit Hilfe der Produktformel direkt aus der Bemerkung 3.2:

Korollar 3.13. *Sei D eine Determinantenfunktion auf der Menge $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ der quadratischen Matrizen. Wenn die Matrix A' aus A durch eine elementare Spaltenumformung entsteht, ist:*

Vertauschung $D(A') = -D(A)$.

λ-Multiplikation $D(A') = \lambda D(A)$.

Addition $D(A') = D(A)$.

Definition 3.14. Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$. Die zu A *transponierte* Matrix ${}^tA$ ist die $n \times m$-Matrix, welche als Zeilenvektoren die Spaltenvektoren von A hat, dies bedeutet, dass

$$ {}^tA = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \text{ Spalten}}\right\} n \text{ Zeilen}, $$

wobei

$$ A = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}}\right\} m \text{ Zeilen}. $$

In der Literatur werden häufig die Notationen A^T oder $A^\top$ für die transponierte Matrix von A verwendet.

Aufgabe. Zeige ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ und ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Korollar 3.15. *Gegeben eine Determinantenfunktion D auf $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, gilt für jede $n \times n$-Matrix A, dass*

$$ D(A) = D({}^tA). $$

Beweis. Wenn A singulär ist, so ist dies auch ${}^tA$, weil der Spaltenrang gleich dem Zeilenrang ist, siehe Satz 2.49 und Korollar 2.57. Somit ist in diesem Fall $D(A) = 0_{\mathbb{K}} = D({}^tA)$.

Wenn nun A regulär ist, gibt es ein endliches Produkt von Elementarmatrizen, welches A auf die Einheitsmatrix bringt. Die entsprechenden Spaltenoperationen überführen ${}^tA$ in ${}^t\mathbf{Id}_n = \mathbf{Id}_n$. Somit folgt aus der Produktformel, dass $D(A) = D({}^tA)$, wie gewünscht. $\square$

Aus den Ergebnissen dieses Abschnittes folgt, dass eine Determinantenfunktion auf $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ durch ihre definitorische Eigenschaften eindeutig bestimmt wird. Wir werden nun explizit zeigen, dass Determinantenfunktionen existieren. Im Beweis werden wir implizit die Laplace'sche Entwicklung 3.18 verwenden.

Hierfür brauchen wir die folgende Notation. Gegeben eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ und zwei Indizes i und j, sei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, so wie es im folgenden Diagramm zu sehen ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 3.16. *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es genau eine Determinantenfunktion*

$$D_n : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}.$$

Sie erfüllt die Gleichung

$$D_n(A) = \sum_{1\leq i\leq n} (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1}).$$

Beweis. Die Eindeutigkeit wurde bereits bewiesen. Wir zeigen die Existenz induktiv über n. Für $n = 1$ ist $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ und die Funktion $D_1(\lambda) = \lambda$ erfüllt alle Bedingungen einer 1-dimensionalen Determinantenfunktion. Die letzte Behauptung folgt in diesem Fall trivialerweise, weil es keine Teilmatrizen gibt.

Angenommen nun, dass wir D_n bereits konstruiert haben, setze

$$D_{n+1}(A) = \sum_{1\leq i\leq n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a_{i1} D_n(A_{i1})$$

für A aus $\mathcal{M}_{n+1\times n+1}(\mathbb{K})$. Wir müssen zeigen, dass D_{n+1} die gewünschten Eigenschaften besitzt:

ZM: Gegeben λ aus $\mathbb{K}$, sei $A' = M_i(\lambda)\cdot A$ die Matrix, welche aus der $(n+1)\times(n+1)$-Matrix A durch Multiplikation der i-ten Zeile mit λ entsteht. Wir müssen $D_{n+1}(A) = \lambda D_{n+1}(A)$ zeigen. Beachte, dass $a'_{i1} = \lambda \cdot a_{i1}$ und $A'_{i1} = A_{i1}$ sowie $a'_{k1} = a_{k1}$ und

$$A'_{k1} = \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{i,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,2} \\ a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,2} \end{pmatrix}$$

für $k \neq i$. Aus der Induktionsannahme folgt $D_n(A'_{k1}) = \lambda \cdot D_n(A_{k1})$ für $k \neq i$. Nun ist

$$D_{n+1}(A') = \sum_{1\leq k\leq n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a'_{k1} D_n(A'_{k1}) = (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a'_{i1} D_n(A'_{i1}) + \sum_{\substack{1\leq k\leq n+1 \\ k\neq i}} (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a'_{k1} D_n(A'_{k1}) =$$

$$= \lambda \cdot \Big((-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a_{i1} D_n(A_{i1}) + \sum_{\substack{1\leq k\leq n+1 \\ k\neq i}} (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a_{k1} D_n(A_{k1}) \Big) = \lambda \cdot D_{n+1}(A),$$

wie gewünscht.

ZA: Seien $i \neq k$ zwei Indizes. Setze

$$A' = S_{ik}(1_{\mathbb{K}}) \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i + a_k \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix},$$

wobei a_j die j-te Zeile von A ist. Beachte, dass $a'_{i1} = (a_{i1} + a_{k1})$ und $A'_{i1} = A_{i1}$ sowie $a'_{j1} = a_{j1}$ und

$$A'_{j1} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{i-1} \\ \widetilde{a}_i + \widetilde{a}_k \\ \widetilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{j-1} \\ \widetilde{a}_{j+1} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{n+1} \end{pmatrix}$$

für $j \neq i$, wobei $\widetilde{a}_r$ das n-Tupel sei, welches aus dem $n+1$-Tupel a_r durch Streichen der ersten Koordinate entsteht. Aus der Induktionsannahme folgt $D_n(A'_{j1}) = D_n(A_{j1})$ für $j \neq i, k$. Für $j = k$ folgt aus dem Lemma 3.7 (d), dass $D_n(A'_{k1}) = D_n(A_{k1}) + D_n(B)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{i-1} \\ \widetilde{a}_k \\ \widetilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{k-1} \\ \widetilde{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass sich B in A_{i1} überführen lässt, wenn wir $|k-i|-1$ viele (Zeilen-)Vertauschungen anwenden. Somit folgt

$$D_n(B) = (-1_{\mathbb{K}})^{|i-k|-1} D(A_{i1})$$

aus der Produktformel 3.12, weil der Wert der Determinantenfunktion auf einer elementaren

Vertauschung $-1_{\mathbb{K}}$ ist. Nun ist

$$D_{n+1}(A') = \sum_{1\le j\le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a'_{j1} D_n(A'_{j1}) =$$

$$= (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a'_{i1} D_n(A'_{i1}) + (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a'_{k1} D_n(A'_{k1}) + \sum_{\substack{1\le j\le n+1\\ j\ne i,k}} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a'_{j1} D_n(A'_{j1}) =$$

$$= (-1_{\mathbb{K}})^{i+1}(a_{i1}+a_{k1}) D_n(A_{i1}) +$$

$$+ (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a_{k1}\Big(D_n(A_{k1}) + (-1_{\mathbb{K}})^{|i-k|+1} D_n(A_{i1})\Big) + \sum_{\substack{1\le j\le n+1\\ j\ne i,k}} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{j1} D_n(A_{j1}) =$$

$$= (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a_{i1} D_n(A_{i1}) + (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a_{k1} D_n(A_{k1}) + \sum_{\substack{1\le j\le n+1\\ j\ne i,k}} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{j1} D_n(A_{j1}) + \eta,$$

mit

$$\eta = a_{k1} D_n(A_{i1})\Big((-1_{\mathbb{K}})^{i+1} + (-1_{\mathbb{K}})^{k+1}(-1_{\mathbb{K}})^{|i-k|-1}\Big) = a_{k1} D_n(A_{i1})\Big((-1_{\mathbb{K}})^{i+1} + (-1_{\mathbb{K}})^{i}\Big) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Also

$$D_{n+1}(A') = (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} a_{i1} D_n(A_{i1}) + (-1_{\mathbb{K}})^{k+1} a_{k1} D_n(A_{k1}) + \sum_{\substack{1\le j\le n+1\\ j\ne i,k}} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{j1} D_n(A_{j1}) + 0_{\mathbb{K}} =$$

$$= \sum_{1\le j\le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{j1} D_n(A_{j1}) = D_{n+1}(A).$$

Normiert: Für die Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_{n+1} = (a_{ij})$ ist $a_{i1} = 0_{\mathbb{K}}$ für $i \ne 1$. Weil $a_{11} = 1_{\mathbb{K}}$ und die Teilmatrix $(\mathbf{Id}_{n+1})_{11}$ gerade die Einheitsmatrix $\mathbf{Id}_n$ ist, folgt $D_n((\mathbf{Id}_{n+1})_{11}) = D_n(\mathbf{Id}_n) = 1_{\mathbb{K}}$ aus der Induktionsannahme. Insbesondere ist

$$D_{n+1}(A') = \sum_{1\le j\le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a'_{j1} D_n(A'_{j1}) =$$

$$= (-1_{\mathbb{K}})^{1+1}\cdot 1_{\mathbb{K}}\cdot 1_{\mathbb{K}} + \sum_{\substack{1\le j\le n+1\\ j\ne i}} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{j1} D_n(A_{j1}) = 1_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}},$$

und somit erfüllt D_{n+1} alle Eigenschaften einer $n+1$-dimensionalen Determinantenfunktion. □

Notation. Da die Determinantenfunktion auf $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ eindeutig bestimmt ist, benutzen wir für eine quadratische Matrix der Größe n die Notation $\det(A)$ statt $D_n(A)$ und bezeichnen diesen Wert $\det(A)$ als die *Determinante* der Matrix A. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

schreibe

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A).$$

Aus der Produktformel 3.12 folgt, dass die Determinante einer quadratischen Matrix unter Ähnlichkeit erhalten bleibt.

Korollar 3.17. *Sei A eine Matrix aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ und B eine invertierbare Matrix aus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Für $A' = B\cdot A\cdot B^{-1}$ ist $\det(A) = \det(A')$.*

Insbesondere definieren wir die Determinante eines Endomorphismus F des endlich-dimensionalen Vektorraumes V als die Determinante der Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis B von V. (Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Basis ab.)

Korollar 3.18. (*Entwicklungssatz von Laplace*) *Die Determinante einer Matrix A aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ lässt sich nach der k-ten Spalte*

$$\det(A) = \sum_{1\le i\le n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$$

sowie nach der k-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{1\le j\le n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj})$$

entwickeln.

Beweis. Weil die Determinante der transponierten Matrix gerade die Determinante der ursprünglichen Matrix ist, genügt es, wenn wir die Entwicklung nach Spalten zeigen. Für $k=1$ folgt dies aus dem Satz 3.16. Für $2\le k\le n$ setze

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Weil die Matrix A' aus A durch $(k-1)$-viele Spaltenvertauschungen entsteht, ist

$$\det(A') = (-1)^{k-1}\det(A),$$

wegen der Produktformel 3.12. Nun ist

$$(-1)^{k-1}\det(A) = \det(A') = \sum_{1\le j\le n} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{jk} \det(A'_{j1}) = \sum_{1\le j\le n} (-1_{\mathbb{K}})^{j+1} a_{jk} \det(A_{jk}),$$

und somit gilt

$$\det(A) = \sum_{1\le j\le n} (-1_{\mathbb{K}})^{j+k} a_{j+k} \det(A_{jk}),$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 3.19. Wenn wir die Determinante einer großen Matrix berechnen müssen, ist es oft sinnvoll, zuerst Zeilen- und Spaltenumformungen anzuwenden, bis eine konkrete Zeile (bzw. Spalte) viele Nulleinträge besitzt.

Korollar 3.20. (*Kästchenregel*) *Gegeben eine Matrix der Form*

$$C = \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix},$$

wobei A und B quadratische Matrizen sind (und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix der entsprechenden Größe bezeichnet), ist

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Insbesondere hat die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_k \end{pmatrix},$$

wobei alle A_i quadratische Matrizen (möglicherweise verschiedener Größen) sind, die Determinante

$$\det(D) = \det(A_1) \cdots \det(A_k).$$

Für eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \textit{bzw}\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{pmatrix},$$

gilt $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt klarerweise aus dem Korollar 3.15 und der zweiten Behauptung, welche sich induktiv aus der ersten Behauptung ergibt. Wir müssen also nur zeigen, dass

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$$

für eine Matrix C der Form

$$C = \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen es induktiv über die Größe der quadratischen Matrix A. Falls A in $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$ ist, so ist A ein Skalar λ. Die Laplace'sche Entwicklung nach der ersten Spalte von C liefert

$$\det(C) = (-1_{\mathbb{K}})^{1+1} \lambda \det(C_{11}) = \det(A) \cdot \det(B),$$

wie gewünscht. Wir nehmen nun an, dass $A = (a_{ij})$ aus $\mathcal{M}_{n+1\times n+1}(\mathbb{K})$ kommt, und dass die Behauptung für Matrizen der Größe n bereits gezeigt wurde. Wende die Laplace'sche Entwicklung nach der ersten Spalte von

$$C = \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

an:

$$\det(C) = \sum_{1 \le i \le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} \cdot a_{i1} \det(C_{i1}) + 0_{\mathbb{K}},$$

wobei

$$C_{i1} = \begin{pmatrix} A_{i1} & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass A_{i1} in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ liegt und somit aus der Induktionsannahme (für C_{i1}) folgt, dass

$$\det(C_{i1}) = \det(A_{i1}) \cdot \det(B).$$

Also ist

$$\det(C) = \sum_{1\le i\le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} \cdot a_{i1} \det(C_{i1}) = \det(C) = \sum_{1\le i\le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} \cdot a_{i1} \det(A_{i1}) \cdot \det(B) =$$
$$= \det(B) \cdot \sum_{1\le i\le n+1} (-1_{\mathbb{K}})^{i+1} \cdot a_{i1} \det(A_{i1}) = \det(B) \cdot \det(A),$$

wie gewünscht. □

Aufgabe. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sei S_n die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$ (siehe Beispiel 1.23). Gegeben eine Permutation σ in S_n, ist die 2-elementige Menge $\{i, j\}$ ein *Fehlstand*, falls durch σ die Ordnung invertiert wird: d. h. $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ (oder andersherum). Das *Vorzeichen* von σ wird definiert als

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1_{\mathbb{K}})^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma}.$$

(a) Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeige, dass

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{1\le k\le n} a_{k\sigma(k)} = 0_{\mathbb{K}},$$

falls zwei Zeilen von A identisch sind.

Hinweis: Seien die i-te und j-te Zeile von A identisch sowie $k \neq \ell$ gegeben. Wie unterscheiden sich die Vorzeichen zweier Permutationen σ und τ mit

$$\sigma(k) = i, \sigma(\ell) = j \text{ und } \tau(k) = j, \tau(\ell) = i,$$

sowie $\sigma(r) = \tau(r)$ für $r \neq k, \ell$?

(b) Schließe it Hilfe des Korollars 3.10 die Leibniz Formel für Determinanten:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{1\le k\le n} a_{k\sigma(k)}.$$

3.3 Geometrie, Inversen und Determinanten

Bemerkung 3.21. Für 3×3-Matrizen können wir nun die bekannte Formel (genannt die *Regel von Sarrus*) nachrechnen: Gegeben

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

liefert die Laplace'sche Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned}
\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\
= a_{11}\Big(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\Big) - a_{21}\Big(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\Big) + a_{31}\Big(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\Big) = \\
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}
\end{aligned}$$

oder als Merkregel illustriert im folgenden Bild:

$$\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

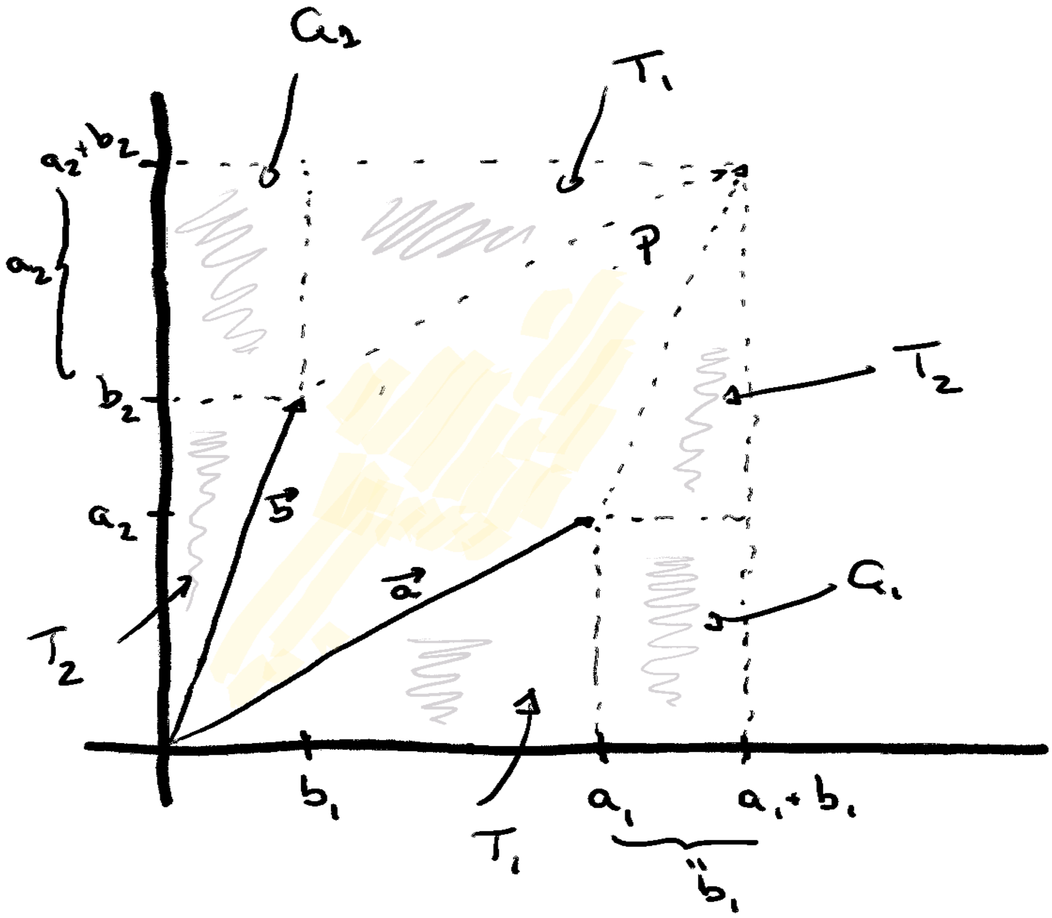
Bemerkung 3.22. Die Determinante liefert die Möglichkeit, den Flächeninhalt eines Parallelograms in $\mathbb{R}^2$, beziehungsweise das Volumen eines Parallelotops in $\mathbb{R}^3$, zu berechnen. Gegeben zwei Vektoren $\bar{a} = (a_1, a_2)$ und $\bar{b} = (b_1, b_2)$ aus $\mathbb{R}^2$, sei $J((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ der Wert des Flächeninhalts des von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ erzeugten Parallelograms in $\mathbb{R}^2$. Klarerweise ist $J((1, 0), (0, 1)) = 1$. Ferner, wenn wir einen der beiden Vektoren mit λ skalieren, wird der Wert J dementsprechend skaliert. Weil der Flächeninhalt des von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ erzeugten Parallelograms genau dem Flächeninhalt des von $\bar{a} + \bar{b}$ und $\bar{b}$ erzeugten Parallelograms entspricht, folgt aus der Eindeutigkeit 3.10, dass dieser Flächeninhalt gerade die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

sein muss. Analog gilt für Volumina in $\mathbb{R}^3$: Das Volumen des von den drei Vektoren $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ und $\bar{a}_3$ aus $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops ist gleich

$$\det\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Wir werden nun eine explizite geometrische Anschauung in der Ebene liefern, welche zeigt, dass die Determinante gerade den Flächeninhalt berechnet. Sei P das von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ erzeugte Parallelogram wie im folgenden Bild:



Ziehen wir von der Fläche des Rechteckes mit den Kanten a_1+b_1 und a_2+b_2 jeweils zweimal die Flächen der Dreiecke T_1 und T_2 sowie zweimal die Fläche des Rechteckes Q_1 ab, erhalten wir die Fläche von P. Somit gilt

$$\mathrm{vol}(P) = (a_1+b_1)(a_2+b_2) - 2\left({}^{b_1b_2}\!/_2 + {}^{a_1a_2}\!/_2\right) - 2a_2b_1 =$$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 - b_1b_1 - a_1a_2 - 2a_2b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Wir werden nun sehen, wie wir die Inverse einer Matrix explizit mit Hilfe von Determinanten berechnen können. Insbesondere werden wir einen Beweis der Cramer'schen Regel liefern. Hierfür brauchen wir die folgende Definition.

Definition 3.23. Sei $A=(a_{ij})$ eine quadratische Matrix aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Für jeden Eintrag a_{ij} sei A_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die *Komplementärmatrix* B von A ist die transponierte der Matrix (c_{ij}) mit (i,j)-Eintrag

$$c_{ij} = (-1_{\mathbb{K}})^{i+j}\det(A_{ij}).$$

Der Wert $\det(A_{ij})$ ist der (i,j)-*Minor* (der Größe $n-1$) von A.

Insbesondere ist der (i,j)-Eintrag der Komplementärmatrix gleich $(-1_{\mathbb{K}})^{i+j}\det(A_{ji})$.

Proposition 3.24. *Gegeben eine quadratische Matrix* $A = (a_{ij})$ *aus* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *mit Komplementärmatrix* B*, ist*

$$A \cdot B = B \cdot A = \det(A) \cdot \mathbf{Id}_n.$$

Wenn A *regulär ist, dann ist*

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot B.$$

Beweis. Die zweite Behauptung folgt sofort aus der ersten, weil die Inverse einer invertierbaren Matrix eindeutig bestimmt ist, siehe Lemma 1.22.

Wir zeigen nur $A \cdot B = \det(A) \cdot \mathbf{Id}_n$, weil sich die andere Gleichung analog zeigen lässt. Schreibe $A \cdot B = (d_{ij})$ mit

$$d_{ij} = \sum_{1\leq k\leq n} a_{ik}(-1_{\mathbb{K}})^{k+j} \det(A_{jk}).$$

Klarerweise folgt

$$d_{ii} = \sum_{1\leq k\leq n} (-1_{\mathbb{K}})^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \det(A) = \det(A) \cdot 1_{\mathbb{K}},$$

aus der Laplace'schen Entwicklung von A nach der k-ten Spalte. Wir müssen nur noch zeigen, dass $d_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ für $i \neq j$. Dafür betrachten wir die Matrix A', welche aus A durch Ersetzen der j-ten Zeile mit der i-ten Zeile entsteht. Klarerweise ist $\det(A') = 0_{\mathbb{K}}$. Wenn wir A' nach der j-ten Zeile entwickeln, erhalten wir

$$0_{\mathbb{K}} = \det(A') = \sum_{1\leq k\leq n} (1_{\mathbb{K}})^{j+k} a_{ik} \det(A_{jk}) = d_{ij},$$

wie gewünscht. □

Beispiel 3.25. Wir wenden das obige Verfahren auf die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

an. Die Laplace'sche Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4 + 5 = 1$$

und somit ist A invertierbar.

Wir berechnen nun die Minoren von A:

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\det(A_{12}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$\det(A_{21}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\det(A_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det(A_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Komplementärmatrix von A ist also

$$^t\begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und somit erhalten wir

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Korollar 3.26. (*Cramer'sche Regel*) *Sei A eine reguläre Matrix aus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und b ein Vektor aus $\mathbb{K}^n$. Die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = {}^tb$ ist gegeben durch $(c_1, \ldots, c_n)$ mit*

$$c_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)},$$

wobei die Matrix B_i aus A durch Ersetzen der i-ten Spalte durch den Spaltenvektor ${}^tb$ entsteht.

Beweis. Wegen der Proposition 3.24 ist $A^{-1} = (a'_{ij})$ mit

$$a'_{ij} = (-1_{\mathbb{K}})^{i+j} \det(A)^{-1} \det(A_j i).$$

Da ${}^tc = A^{-1\,t}b$, gilt

$$c_i = \sum_{1 \le j \le n} a'_{ij} \cdot b_j = \det(A)^{-1} \sum_{1 \le j \le n} (-1)^{i+j} b_j \det(A_{ji}) \stackrel{(\star)}{=} \frac{\det(B_i)}{\det(A)},$$

wobei die letzte Gleichung $(\star)$ durch Entwicklung der Matrix B_i nach der i-ten Spalte gewonnen wird. $\square$

Appendix

A Das Induktionsprinzip der natürlichen Zahlen

In dieser Vorlesung wird die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen zusammen mit den kanonischen Operationen (oder Verknüpfungen) Summe $+$ und Produkt $\cdot$ als bekannt vorausgesetzt. Beachte, dass 0 in $\mathbb{N}$ liegt (in diesem Punkt sind sich nicht alle Mathematiker einig). Insbesondere ist eine Aufzählung $x_1, \ldots, x_n$ leer, wenn $n = 0$.

Die Multiplikation natürlicher Zahlen kann mit Hilfe der Addition definiert werden:

$$n \cdot m = \underbrace{n + \cdots + m}_{m}$$

Die totale Ordnung $<$ auf den natürlichen Zahlen (siehe Appendix C für die entsprechenden Begriffe) können wir folgendermaßen definieren:

$$n < m \Longleftrightarrow \exists k \neq 0 \in \mathbb{N} \ \text{ mit } n + k = m$$

Bezüglich dieser Ordnung ist 0 das kleinste Element. Allgemein gilt folgendes Prinzip:

Prinzip A.1. (*Prinzip des kleinsten Elementes*)
Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Aus dem obigen Prinzip folgt eines der wichtigsten Prinzipen in der Mathematik: *Induktion* (Beide Prinzipien sind sogar äquivalent).

Prinzip A.2. (*Prinzip der vollständigen Induktion auf* $\mathbb{N}$)
Sei $\mathcal{P}$ eine mathematische Eigenschaft derart, dass:

- *Die Eigenschaft $\mathcal{P}$ gilt für das Element 0 aus $\mathbb{N}$.*
- *Wenn die Eigenschaft $\mathcal{P}$ für das Element n aus $\mathbb{N}$ gilt, so gilt $\mathcal{P}$ auch für das Element $n + 1$.*

Dann gilt die Eigenschaft $\mathcal{P}$ für alle natürlichen Zahlen.

Beweis. Wir beweisen das Prinzip A.2 indirekt durch Widerspruch: Angenommen, dass die Teilmenge

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ erfüllt nicht die Eigenschaft } \mathcal{P}\} \neq \emptyset,$$

dann besitzt M wegen des Prinzips A.1 ein kleinstes Element n_0. Nun ist $n_0 \neq 0$, da $\mathcal{P}$ für 0 gilt. Also schreibe $n_0 = m + 1$ für ein m aus $\mathbb{N}$. Insbesondere muss $m < n_0$ und somit kann m nicht in der Menge M liegen, weil n_0 das kleinste Element von M ist. Das bedeutet, dass $\mathcal{P}$ für m gilt. Aus der Annahme muss dann $\mathcal{P}$ auch für $m + 1 = n_0$ gelten, was den gewünschten Widerspruch liefert. $\square$

Folgende Variante des Induktionsprinzips lässt sich leicht zeigen:

Korollar A.3. *Sei $\mathcal{P}$ eine mathematische Eigenschaft derart, dass es ein Element n_0 aus $\mathbb{N}$ gibt mit:*

- *Die Eigenschaft $\mathcal{P}$ gilt für das Element n_0.*
- *Wenn die Eigenschaft $\mathcal{P}$ für alle Elemente k aus $\mathbb{N}$ mit $n_0 \leq k < n$ gilt, so gilt $\mathcal{P}$ auch für n.*

Dann gilt die Eigenschaft $\mathcal{P}$ für alle natürliche Zahlen $n \geq n_0$.

Für den Beweis des Korollars genügt es vollständige Induktion für folgende Eigenschaft (befasst als Eigenschaft von n):

„Alle natürliche Zahlen im Intervall $[n_0, n_0 + n]$ erfüllen $\mathcal{P}$“

anzuwenden.

B Äquivalenzrelationen und Quotienten

Definition B.1. Eine *Äquivalenzrelation* E auf einer (nicht-leeren) Menge X ist eine binäre Relation $E \subset X \times X$, welche für alle x, y und z aus X die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Reflexivität Es gilt xEx (Wir schreiben xEy anstatt $(x, y) \in E$).

Symmetrie Wenn xEy gilt, so gilt auch yEx.

Transitivität Wenn xEy und yEz gelten, so gilt xEz.

Die *Äquivalenzklasse* eines Elementes x ist die Menge

$$[x]_E = x/E = \{y \in X \mid xEy\}.$$

Beachte, dass $[x]_E \neq \emptyset$, wegen der Reflexivität.

Beispiel B.2. In jeder (nicht-leeren) Menge definiert Gleichheit eine Äquivalenzrelation derart, dass jede Äquivalenzklasse eine Einermenge ist.

Bemerkung B.3. Gegeben eine Äquivalenzrelation E auf einer (nicht-leeren) Menge X sowie zwei Elemente x und y aus X, gilt

$$xEy \quad \Longleftrightarrow \quad [x]_E \cap [y]_E \neq \emptyset.$$

Insbesondere sind zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. Wenn xEy, dann liegt das Element x in $[x]_E$ und in $[y]_E$, also $[x]_E \cap [y]_E \neq \emptyset$.

Falls z im Durchschnitt $[x]_E \cap [y]_E$ liegt, dann gilt xEz und yEz. Aus der Symmetrie und der Transitivität folgt nun xEy.

Aus xEy folgt $[x]_E = [y]_E$ wegen der Symmetrie und der Transitivität. □

Definition B.4. Der *Quotientenraum* X/E von X durch die Äquivalenzrelation E ist die Menge, deren Elemente die Äquivalenzklassen sind.

Gegeben eine Äquivalenzrelation E auf einer nicht-leeren Menge X, definiert die Kollektion aller Äquivalenzklassen eine *Partition* (oder *Zerlegung*) von X: Keine der Teilmengen in der Zerlegung ist leer, je zwei verschiedene Teilmengen sind disjunkt und die Vereinigung aller Teilmengen ist die Menge X selbst. Ferner induziert jede Zerlegung von X

$$X = \dot{\bigcup_{i \in I}} A_i$$

in disjunkte nicht-leere Teilmengen $(A_i)_{i \in I}$ eine Äquivalenzrelation: Setze xEy genau dann, wenn x und y in derselben Menge A_i liegen.

Definition B.5. Ein *Repräsentantensystem* der Äquivalenzrelation E ist eine Teilmenge P von X derart, dass jede Äquivalenzklasse genau ein Element aus P enthält.

Beachte, dass eine Äquivalenzrelation verschiedene Repräsentantensysteme haben kann, sobald es eine Äquivalenzklasse mit mehreren Elementen gibt.

Beispiel B.6. Gegeben eine natürliche Zahl $n \geq 1$, definieren wir folgenderweise die *Kongruenzklassen modulo* n auf $\mathbb{Z}$:

$$xEy \Longleftrightarrow x - y \text{ ist durch } n \text{ teilbar (schreibe } x \equiv y \bmod n).$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Ein mögliches Repräsentantensystem wird durch die Menge $\{0, \ldots, n-1\}$ gegeben. Wir bezeichnen den Quotientenraum mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definition B.7. Sei E eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Die Abbildung $f : X \to Y$ ist *E-kompatibel* falls

$$x_1 E x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Lemma B.8. *Gegeben eine Äquivalenzrelation E auf der Menge X, induziert jede E-kompatible Abbildung $f : X \to Y$ eine wohldefinierte Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & X/E & \to & Y \\ & [x]_E & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass $\bar{f}$ nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse abhängt: Wenn $[x_1]_E = [x_2]_E$, gilt $x_1 E x_2$ und somit

$$\bar{f}([x_1]_E) = f(x_1) = f(x_2) = \bar{f}([x_1]_E),$$

wegen der E-Kompatibilität von f. □

C Das Zorn'sche Lemma

Definition C.1. Eine Menge $\mathcal{S}$ ist *partiell angeordnet*, falls sie eine binäre Relation $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität $x \leq x$ für alle x aus $\mathcal{S}$;

Antisymmetrie Für alle x und y aus $\mathcal{S}$ gelten $x \leq y$ und $y \leq x$ gleichzeitig genau dann, wenn $x = y$;

Transitivität Für alle x, y und z aus $\mathcal{S}$ gilt die Implikation

$$x \leq y \text{ und } y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$$

Wir schreiben $x < y$, falls $x \leq y$ aber $x \neq y$.
Eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{S}$ ist *total*, oder *linear*, falls $x < y$ oder $y < x$ für alle $x \neq y$ aus $\mathcal{S}$.
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{S}$.

- Ein Element x ist eine *obere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $\gamma \leq x$ für alle γ aus Γ.
- Ein Element x ist eine *untere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $x \leq \gamma$ für alle γ aus Γ.
- Das Element x aus $\mathcal{S}$ ist *maximal*, falls die einzige obere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist. Oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $x < y$ existiert. Das Element x ist das größte Element der Teilmenge Γ, falls x in Γ liegt und $y \leq x$ für alle y aus Γ.
- Das Element x aus $\mathcal{S}$ ist *minimal*, falls die einzige untere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist. Oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $y < x$ existiert. Das Element x ist das kleinste Element der Teilmenge Γ, falls x in Γ liegt und $x \leq y$ für alle y aus Γ.
- Das Element a ist das *Supremum* (oder das *Oberste*) der Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls a die kleinste obere Schranke von Γ ist. Das Element a ist das *Maximum* von Γ, wenn a das Supremum von Γ ist und a in Γ liegt.
- Ein Element a ist das *Infimum* der Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls a die größte untere Schranke von Γ ist. Das Element a ist das *Minimum* von Γ, wenn a das Infimum von Γ ist und a in Γ liegt.
- Die Menge $\mathcal{S}$ ist *induktiv*, falls jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ besitzt.

Bemerkung C.2. Beachte, dass jede induktive partiell geordnete Menge $\mathcal{S}$ nicht-leer ist, da die leere Menge $\emptyset$ linear geordnet ist und somit eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ besitzt (jedes Element aus $\mathcal{S}$ ist eine obere Schranke für $\emptyset$).

Trotz des folgenden Namens ist das Zorn'sche Lemma eine Aussage der Mengenlehre, welche unabhängig vom Zermelo-Fraenkel-System und äquivalent zum *Auswahlaxiom* ist.

Lemma C.3 (Zorn'sches Lemma)**.** *Jede induktive partiell geordnete Menge* $(\mathcal{S}, \leq)$ *besitzt ein maximales Element.*

D Polynomringe

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (siehe Definition 1.34)

Definition D.1. Der *Polynomring über* $\mathbb{K}$ *in der Variablen* T ist die Kollektion $\mathbb{K}[T]$ von Ausdrücken der Form

$$P = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T,$$

wobei n eine (beliebige) natürliche Zahlen ist und jeder Koeffizient a_i in $\mathbb{K}$ liegt. Das *Nullpolynom (oder das triviale Polynom)* 0 ist das Polynom, dessen Koeffizienten alle Null sind. Jedes nicht-triviale Polynom lässt sich eindeutig als

$$P = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T$$

schreiben, mit $a_n \neq 0$ für eine natürliche Zahl $n = \deg(P)$, genannt den *Grad* von P. Als Konvention setzen wir $\deg(0) = -\infty$.

Wenn P Grad n hat, ist der Koeffizient a_n in der Darstellung von P der *Führungskoeffizient* von P. Das Polynom P ist *normiert*, falls der Führungskoeffizient $1_{\mathbb{K}}$ ist.

Bemerkung D.2. Jedes Element λ von $\mathbb{K}$ lässt sich als *konstantes Polynom* vom Grad 0 auffassen.

Auf dem Polynomring können wir folgenderweise eine Summe definieren: Gegeben Polynome

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i T^i \text{ und } Q = \sum_{j=1}^{m} b_j T^j,$$

können wir annehmen, dass $n = m$ ist (für $d = \max(n, m)$ setze für $n < i \leq d$ und $m < j \leq d$ die neuen Koeffizienten $a_i = b_j = 0$). Dann ist

$$P + Q = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) T^i.$$

Analog definieren wir folgendermaßen eine Multiplikation auf $\mathbb{K}[T]$:

$$P \cdot Q = \sum_{k=1}^{n+m} c_k T^k \text{ mit } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\mathbb{K}[T]$ mit diesen beiden Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Eins ist und eine kompatible Struktur als $\mathbb{K}$-Vektorraum derart besitzt, dass für alle λ aus $\mathbb{K}$ sowie Polynome P und Q aus $\mathbb{K}[T]$ gilt:

$$\lambda(P \cdot Q) = (\lambda P) \cdot Q = P(\lambda Q).$$

Solche Ringe heißen *kommutative* $\mathbb{K}$-*Algebren*.

Beachte, dass der Polynomring $\mathbb{K}[T]$ ein Integritätsbereich ist (siehe Definition 1.32): Wenn P und Q beide nicht trivial sind, dann ist $PQ \neq 0$, da

$$c_{\deg(P)+\deg(Q)} = a_{\deg(P)} b_{\deg(Q)} \neq 0_{\mathbb{K}},$$

weil der Körper $\mathbb{K}$ ein Integritätsbereich ist.

Bemerkung D.3. Der Polynomring über $\mathbb{K}$ in einer Variablen kann leicht in folgender Weise konstruiert werden. Betrachte die Menge $\mathcal{I}$ aller abzählbaren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{K}$ derart, dass alle bis auf endlich viele a_n Null sind.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{I}$ ist eindeutig in Korrespondenz mit dem Polynom

$$P(T) = a_0 + a_1 T + \cdots$$

Beachte, dass wegen der Definition von $\mathcal{I}$ der obige Ausdruck in der Tat ein Polynom ist. Die Summe von Polynomen ist in Korrespondenz mit der koordinatenweisen Summe von Folgen. Allerdings entspricht das Produkt von Polynomen nicht dem koordinatenweisen Produkt von Folgen. Die Nullfolge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ stellt das triviale Polynom dar.

Der Polynomring ist bis auf $\mathbb{K}$-Algebra-Isomorphismus eindeutig bestimmt. Daher reden wir vom Polynomring anstatt von einem Polynomring.

Satz D.4. (*Division mit Rest*) *Gegeben Polynome P und Q mit* $\deg(Q) > 0$, *existieren eindeutig bestimmte Polynome H und R mit*

$$P = HQ + R \textit{ und } \deg(R) < \deg(Q).$$

Das Polynom H ist der *Quotient* und das Polynom R der *Rest* der Division mit Rest von P durch Q. Wenn $R = 0$ ist, *teilt* Q das Polynom P. Das Polynom Q ist ein *echter Teiler (oder Faktor)* von P, falls Q das Polynom P teilt und $0 < \deg(Q) < \deg(P)$.

Beweis. **Existenz:** Wenn $\deg(P)$ in der Menge $\{-\infty, 0, 1, \ldots, \deg(Q) - 2\}$ liegt, setze $H = 0$ und $R = P$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\deg(P) = \deg(Q) - 1 + k$ für eine natürliche Zahl k. Wir beweisen die Existenz des Quotienten und des Restes induktiv über k. Für $k = 0$ setze $H = 0$ und $R = P$. Für $k > 0$ schreibe

$$P = \sum_{i=1}^{\deg(P)} a_i T^i \text{ und } Q = \sum_{j=1}^{\deg(Q)} b_j T^j,$$

mit $a_{\deg(P)} \neq 0_{\mathbb{K}}$ und $b_{\deg(Q)} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Setze nun

$$P' = P - a_{\deg(P)} b_{\deg(Q)}^{-1} T^k Q = c_0 + c_1 T + \cdots + c_{\deg(P)-1} T^{\deg(P)-1}$$

für gewisse Elemente c_i aus $\mathbb{K}$ (es wird nicht behauptet, dass $c_{\deg(P)-1} \neq 0_{\mathbb{K}}$). Beachte, dass $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 = \deg(Q) - 1 + k - 1$. Wegen der Induktionsannahme gibt es H' und R' mit $\deg(R') < \deg(Q)$ und

$$P - a_{\deg(P)} b_{\deg(Q)}^{-1} T^k Q = H'Q + R',$$

also

$$P = \Big(a_{\deg(P)} b_{\deg(Q)}^{-1} T^k + H'\Big) Q + R',$$

wie gewünscht.

Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass $P = QH_1 + R_1 = QH_2 + R_2$ mit $\deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(Q)$. Dann gilt

$$R_1 - R_2 = Q(H_2 - H_1).$$

Weil der Grad von $R_1 - R_2$ echt kleiner als $\deg(Q)$ ist, muss das Polynom $H_2 - H_1$ trivial sein. Das heißt, dass $H_1 = H_2$ und somit $R_1 = R_2$, wie gewünscht. □

Bemerkung D.5. Jedes Polynom $P = \sum_{i=0}^n a_i T^i$ definiert in folgender Weise eine Abbildung auf $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & c & \mapsto & \sum_{i=0}^n a_i c^i \end{array}$$

Das Element c aus $\mathbb{K}$ ist eine *Nullstelle* von P, falls $P(c) = 0$. Zum Beispiel besitzt das Polynom $T^2 - 3$ zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$, aber das Polynom $T^2 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$.

Für das triviale Polynom ist jedes Element aus $\mathbb{K}$ eine Nullstelle, aber ein konstantes nichttriviales Polynom besitzt keine Nullstelle.

Korollar D.6. *Gegeben ein Element c aus $\mathbb{K}$, lässt sich jedes nicht-triviale Polynom P eindeutig als*

$$P = (T-c)^k H + P(c)$$

schreiben, für ein Polynom H mit $H(c) \neq 0_{\mathbb{K}}$ und eine natürliche Zahl k. Insbesondere ist $k \geq 1$ und

$$P = (T-c)^k H,$$

wenn c eine Nullstelle von P ist.

Die Zahl $k = \mathrm{ord}_c(P)$ heißt die *Vielfachheit* der Nullstelle c.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass eine solche Darstellung eindeutig ist: Angenommen, dass

$$P = (T-c)^k H + P(c) = (T-c)^\ell H' + P(c),$$

mit $k \neq \ell$, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $k < \ell$, also

$$(T-c)^k H = (T-c)^{k+(\ell-k)} H' = (T-c)^k (T-c)^{\ell-k} H'.$$

Weil der Polynomring ein Integritätsbereich ist, folgt aus dem Lemma 1.33, dass

$$H = (T-c)^{\ell-k} H'.$$

Weil $H(c) \neq 0_{\mathbb{K}}$, jedoch $\ell - k \geq 1$, liefert dies den gewünschten Widerspruch.

Die Existenz wird induktiv über $\deg(P)$ bewiesen. Weil P nicht trivial ist, ist $\deg(P)$ eine natürliche Zahl. Wenn $\deg(P) = 0$, ist P konstant, also $P = a$ für ein a aus $\mathbb{K}$. Insbesondere ist $P(c) = a$. Setze also $k = 0$ und $H = 1$.

Wir nehmen nun an, dass $\deg(P) > 0$ und wenden Division mit Rest D.4 für $Q = T - c$ an. Also

$$P = (T-c)P_1 + R,$$

wobei $\deg(R) < \deg(T-c) = 1$. Dies bedeutet, dass $R = b$ ein konstantes Polynom ist (möglicherweise ist der Rest R das triviale Polynom). Wenn wir in die obige Gleichung c einsetzen, erhalten wir $P(c) = R(c) = b$. Beachte, dass P_1 nicht trivial sein kann, weil P nicht konstant ist.

Wir machen nun eine Fallunterscheidung: Falls $P_1(c) \neq 0_{\mathbb{K}}$, setze $H = P_1$ und $k = 1$. Wenn $P_1(c) = 0_{\mathbb{K}}$, beachte, dass

$$\deg(P) = \deg\big((T-c)P_1 + R\big) = \max(\deg((T-c)P_1), 0) = \deg\big((T-c)P_1\big) = 1 + \deg(P_1)$$

und schreibe induktiv P_1 als

$$P_1 = (T-c)^\ell H + P_1(c) = (T-c)^\ell H,$$

mit $H(c) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Insbesondere ist

$$P = (T-c)P_1 + P(c) = (T-c)\big((T-c)^\ell H\big) + P(c) = (T-c)^{\ell+1} H + P(c),$$

also setze $k = \ell + 1$. $\square$

Korollar D.7. *Jedes nicht-triviale Polynom P über $\mathbb{K}$ lässt sich (bis auf Permutation) eindeutig schreiben als*

$$P = (T - c_1) \cdots (T - c_k) P_0,$$

für eine natürliche Zahl $0 \le k \le \deg(P)$ sowie Elemente $c_1, \ldots, c_k$ aus $\mathbb{K}$ (möglicherweise mit Wiederholungen) und ein Polynom P_0, das keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzt.

Insbesondere besitzt ein nicht-triviales Polynom höchstens $\deg(P)$ viele Nullstellen im Körper $\mathbb{K}$.

Beweis. Da jede Nullstelle von P eines der Elemente c_i sein muss, folgt die zweite Behauptung sofort aus der obigen Darstellung. Wir beweisen die Existenz einer solchen Darstellung wie oben induktiv über $\deg(P)$. Wenn $\deg(P) = 0$, ist das Polynom P konstant und besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{K}$. Setze also $k = 0$ und $P_0 = P$. Wir nehmen nun an, dass $\deg(P) \ge 1$. Wenn P keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzt, sind wir fertig: setze $k = 0$ und $P_0 = P$. Sei also c_1 eine Nullstelle von P. Mit Hilfe des Korollars D.6 schreiben wir $P = (T - c_1)^{\mathrm{ord}_c(P)} H$ für ein Polynom H mit $H(c_1) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Weil $\mathrm{ord}_c(P) \ge 1$, ist

$$\deg\Big((T - c_1)^{\mathrm{ord}_c(P)-1} H\Big) < \deg(P)$$

und so können wir induktiv schreiben

$$(T - c_1)^{\mathrm{ord}_c(P)-1} H = (T - c_2) \cdots (T - c_k) P_0,$$

für eine natürliche Zahl k mit $k - 1 \le \deg\Big((T - c_1)^{\mathrm{ord}_c(P)-1} H\Big)$, wobei das Polynom P_0 keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzt. Insbesondere ist $k \le \deg(P)$ und

$$P = (T - c_1)^{\mathrm{ord}_c(P)} H = (T - c_1)\Big((T - c_1)^{\mathrm{ord}_c(P)-1} H\Big) = (T - c_1) \cdots (T - c_k) P_0,$$

wie gewünscht. Die Eindeutigkeit der Darstellung folgt leicht aus der Kommutativität des Polynomringes zusammen mit dem Lemma 1.33. □

Aufgabe. Kann die Menge $\{P(c)\}_{c \in \mathbb{K}}$ endlich sein, wenn P ein nicht-konstantes Polynom ist?

Definition D.8. Der Körper $\mathbb{K}$ ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{K}$ eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzt.

Bemerkung D.9. Weder $\mathbb{R}$ noch $\mathbb{Q}$ sind algebraisch abgeschlossen, weil das Polynom T^2+1 mit ganzzahligen Koeffizienten keine Nullstelle besitzt. Jedoch lässt sich jeder Körper als Teilkörper in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten.

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, wegen des Fundamentalsatzes der Algebra, dessen Beweis nicht nur algebraische Methoden verwendet (wir werden den Beweis in dieser Vorlesung nicht sehen).

Korollar D.10. *Wenn der Körper algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt jedes nicht-konstante Polynom P in Linearfaktoren. Das heißt, dass*

$$P = \lambda (T - c_1) \cdots (T - c_{\deg(P)}),$$

für Elemente $c_1, \ldots, c_{\deg(P)}$ und $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ aus $\mathbb{K}$.

Wenn P normiert ist, ist $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$.

Beweis. Mit Hilfe des Korollars D.7 schreibe

$$P = (T - c_1) \cdots (T - c_k) P_0,$$

für eine natürliche Zahl $k \leq \deg(P)$ und ein Polynom P_0 ohne Nullstellen in $\mathbb{K}$. Insbesondere muss P_0 konstant sein, weil $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Da P nicht-konstant ist, haben wir $P_0 = \lambda \neq 0_K$ und somit $k = \deg(P)$, wie gewünscht.

Die zweite Behauptung folgt sofort, weil der Führungskoeffizient des Produktes

$$\lambda(T - c_1) \cdots (T - c_k)$$

gerade das Element λ ist. $\square$