

# Einführung in die Mathematikdidaktik

## Vorlesung 5: Begriffsbildung

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



**UNI  
FREIBURG**

11. Dezember 2020

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder  
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1  
[boecherer-linder@math.uni-freiburg.de](mailto:boecherer-linder@math.uni-freiburg.de)

# Inhalte dieser Veranstaltung:



	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	15.2.	Klausur

# Warum „Begriffe“?



- Mathematik ist eine stark begrifflich geprägte Wissenschaft
- Die Objekte der mathematischen Untersuchungen entstehen erst durch die Begriffe (z.B. Primzahl, Fläche, Funktion, ...)
- mathematische Begriffe sind die zentralen „Werkzeuge“ (Freudenthal 1983, S. IX)
- Mathematik ist „Denken in Begriffen“ (Wittenberg, 1957)

- Mathematische Objekte werden durch Definitionen eindeutig festgelegt.
- Bsp. „Normalteiler“

Eine Untergruppe  $H$  einer Gruppe  $G$  heißt **Normalteiler** genau dann, wenn alle Linksnebenklassen bzgl. eines beliebigen Gruppenelements mit den Rechtsnebenklassen übereinstimmen:

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

Begriffe können definiert und damit „eingeführt“ werden, doch ist damit noch lange nichts darüber ausgesagt, welche Sichtweise und welches Wissen Lernende damit verbinden. Kennen sie passende Problemzusammenhänge? Können sie den Begriff anwenden? Besitzen sie anschauliche Vorstellungen? Begriffe lernen ist meist ein langfristiger Prozess und erfordert unterschiedliche Unterrichtsstrategien.

Begriffs**bildung** meint die Frage, was alles nötig ist, um einen Begriff zu erlernen.

Wann können wir sagen, dass wir verstanden haben, was XXX bedeutet?

- Wenn wir die Definition nennen können?
- Wenn wir ein Beispiel nennen können?
- ...

Die Mathematikdidaktik versucht zu beschreiben, was alles nötig ist, um von einem ausgeprägten Begriffsverständnis sprechen zu können, und hat fünf Facetten identifiziert:

Begriffsname, Begriffsinhalt, Begriffsdefinition, Begriffsumfang und Begriffsvernetzung

# Wissensfacette 1: Begriffsname



wie viele neue mathematische Begriffe lernen Schülerinnen und Schüler eigentlich während eines Schuljahres oder gar während ihrer gesamten Schullaufbahn? Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis eines Schulbuchs gibt einen kleinen Eindruck: Potenz, Exponent, Potenzfunktion, ganzrationale Funktion, Wachstum, Transformation, Verschieben, Strecke, Nullstelle, mittlere Änderungsrate, Extremwert, Modellfunktion, Nullwachstum, Erwartungswert, Zufallsgröße, Streuung ...

Fachvokabular:  
Schulbuch (Kl. 5) hat 170 neue Wörter  
(Vergleich: Englischbuch 800)

„Begriffsname“ meint einfach das Fachwort, das den Begriff bezeichnet. Auch diese Fachwörter müssen erlernt werden.

Der Begriffsinhalt meint **alle Eigenschaften**, die das Objekt hat.

Bsp.: Begriffsinhalt zum Begriff „Parallelogramm“

Ein Parallelogramm

- Ist ein Viereck
- Gegenüberliegende Seiten sind parallel
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- Ist punktsymmetrisch
- Die Diagonalen halbieren sich
- Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang



# Wissensfacette 3: Begriffsdefinition



Die **Begriffsdefinition** spannt den **Begriffsinhalt** auf.

Begriffsinhalt = alle Eigenschaften, die das Objekt hat.

Begriffsdefinition=minimale Anzahl von Eigenschaften, die den Begriff festlegen

Def.: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem die Gegenseiten jeweils parallel sind.

Bei einem Parallelogramm sind die Gegenseiten jeweils gleich lang.

Bei einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Ein Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.

Bei einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel jeweils gleich groß.

## Was bedeutet „definieren“?

„Durch eine *Definition* wird ein Begriff festgelegt und erklärt. Häufig gibt es mehrere Möglichkeiten, um einen Begriff zu definieren. Welche Möglichkeiten man zur Definition eines Begriffs wählt, ist willkürlich. Man wählt meist eine besonders einfache, anschauliche oder für die folgenden Überlegungen zweckmäßige Möglichkeit aus.“

(Elemente der Mathematik 4, S. 75)

# Wissensfacette 4: Begriffsumfang

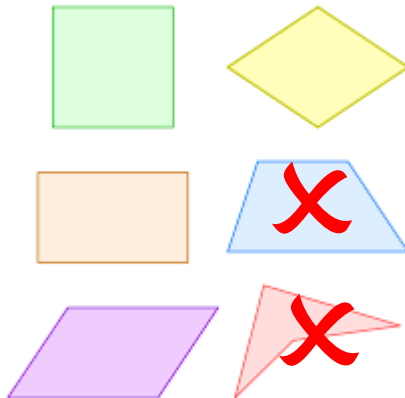


Begriffsumfang = Menge aller Beispiele und Gegenbeispiele

Prototypisches Beispiel



Kenntnis von prototypischen Beispielen reicht nicht:



Dabei sollten die Beispiele möglichst stark variieren (**Prinzip der Variation**). Die Gegenbeispiele sollten den Beispielen möglichst ähnlich sein (**Prinzip des Kontrasts**).

# Wissensfacetten des Begriffsverständnisses:



Was braucht es, um einen  
mathematischen Begriff zu kennen?

1. Begriffsname
2. Begriffsinhalt (alle Eigenschaften,  
die auf den Begriff zutreffen)
3. Begriffsdefinition
4. Begriffsumfang (Menge der  
Beispiele und Gegenbeispiele)

Braucht es noch was?

# Beispiele aus Klasse 8:



Dans les exercices suivants, répondre par Vrai ou Faux. Justifier brièvement.

## Exercice 1 :

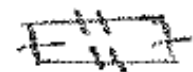
a) Un carré est un rectangle. *faux. Tous les côtés d'un rectangle n'ont pas la même longueur.*

*... Vrai, car le carré possède les propriétés du rectangle.*

*FAUX un carré ne peut être un rectangle.*

*Oui, c'est un rectangle spécial.*

*NON car les côtés d'un carré ont tous la même longueur et pas ceux du rectangle.*



# Peinliche Panne ...



FREIBURG



15	€ 1 MILLION
14	€ 500.000
13	€ 125.000
12	€ 64.000
11	€ 32.000
10	€ 16.000
9	€ 8.000
8	€ 4.000
7	€ 2.000
6	€ 1.000
5	€ 500
4	€ 300
3	€ 200
2	€ 100
1	€ 50

Jedes Rechteck ist ein ...

➤ A: Drachen

➤ B: Trapez

➤ C: Parallelogramm

➤ D: Quadrat

# Wissensfacetten des Begriffsverständnisses:



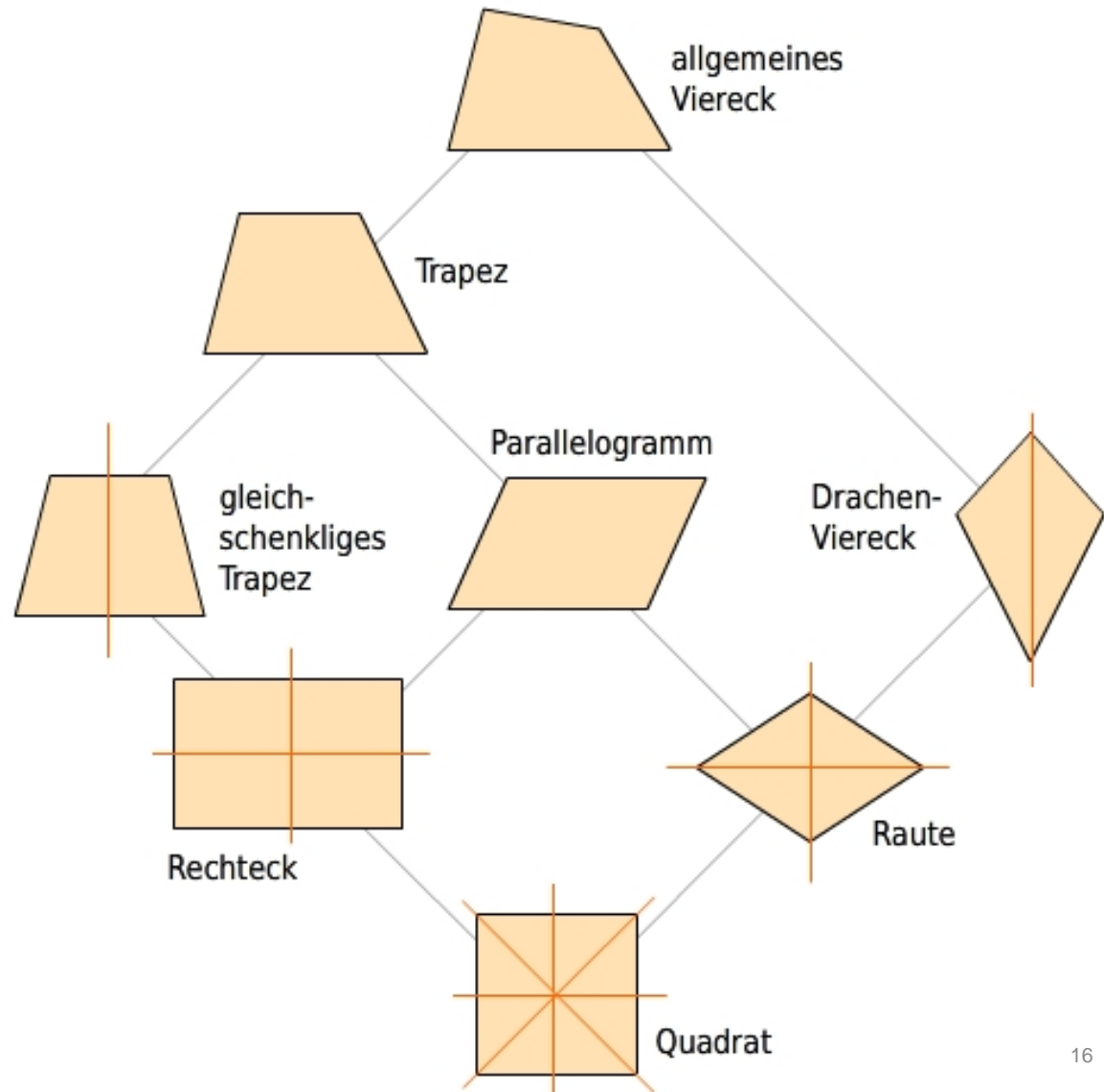
Was braucht es, um einen  
mathematischen Begriff zu kennen?

1. Begriffsname
2. Begriffsinhalt (alle Eigenschaften,  
die auf den Begriff zutreffen)
3. Begriffsdefinition
4. Begriffsumfang (Menge der  
Beispiele und Gegenbeispiele)
5. **Begriffsvernetzung (Vernetzung mit  
anderen Begriffen)**

# Das „Haus der Vierecke“



Begriffsvernetzung -  
Begriffshierarchien:  
z.B. „Jedes  
Parallelogramm ist  
auch ein Trapez“





Die fünf oben genannten Wissensfacetten beschreiben, was ausgeprägt sein muss, damit wir sagen können: „ich verstehe, was XXX bedeutet“. Sie beschreiben also einen Zustand.

Begriffsbildung fragt nun nach dem Weg dorthin. Welche Prozesse sind nötig, damit ein sicheres Begriffsverständnis ausgebildet werden kann?

Wie wird das Verständnis für Begriffe erworben?

- Indem die richtigen Fachwörter gelernt werden?
- Indem die Definitionen gelernt werden?

Worauf kommt es an?

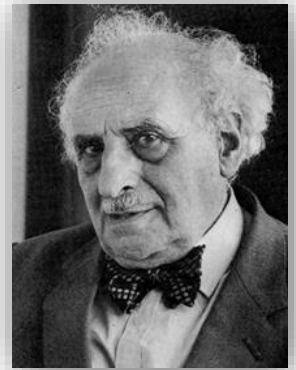
# Begriffsbildung als Form des entdeckenden Lernens



UNI  
FREIBURG

Hans Freudenthal: Mathematik als Tätigkeit

„Was dem erwachsenen Mathematiker recht ist - **seine eigenen Begriffe zu erfinden und die anderer nachzuerfinden**, Mathematik nicht als einen Sachbestand, sondern **als Tätigkeit** zu üben, ein Feld zu erkunden, Fehler zu machen und von seinen Fehlern zu lernen - das soll dem Lernenden von Kindesbeinen an billig sein.“



„Begriffe kann man im Grunde nicht einführen (wohl aber Sprechweisen und Termini), der **Begriffserwerb** ist vielmehr ein aktiver, schöpferischer Prozess des lernenden Individuums“ Heinrich Winter (1983)

# Zwei Typen von Begriffsbildung



- A) Problem-genetische Begriffsbildung
- B) Exemplarische Begriffsbildung

Konstruktivismus



Entdeckendes Lernen



Begriffsbildung

# A) Problem-genetische Begriffsbildung:



- Der Begriff entsteht/wird benötigt für die Lösung eines Problems.
- Der Begriff entsteht als Antwort auf eine Frage.
- Es werden Erfahrungen im „konzeptuellen Feld“ des Begriffes gemacht, bevor der Begriff selbst festgelegt ist.
- Der Begriff steht nicht am Anfang sondern am Ende eines Erkenntnisprozesses.

Gérard Vergnaud (Mathematiker, Philosoph,  
Psychologe, Pädagoge)

„Theory of conceptual fields“

„Ein konzeptuelles Feld ist ein Set an Situationen, deren Bewältigung bestimmte, zusammenhängende Begriffe erfordert. Es besteht außerdem aus dem Set an Begriffen mit unterschiedlichen Merkmalen, deren Bedeutung aus den Situationen gezogen wird.“ (Vergnaud 1996, S. 225)



Erst durch die Situationen, zu deren Bewältigung die Begriffe erforderlich sind, wird die Bedeutung von Begriffen deutlich!

Konsequenz für die Lernprozesse: Problemsituationen sind wichtig!

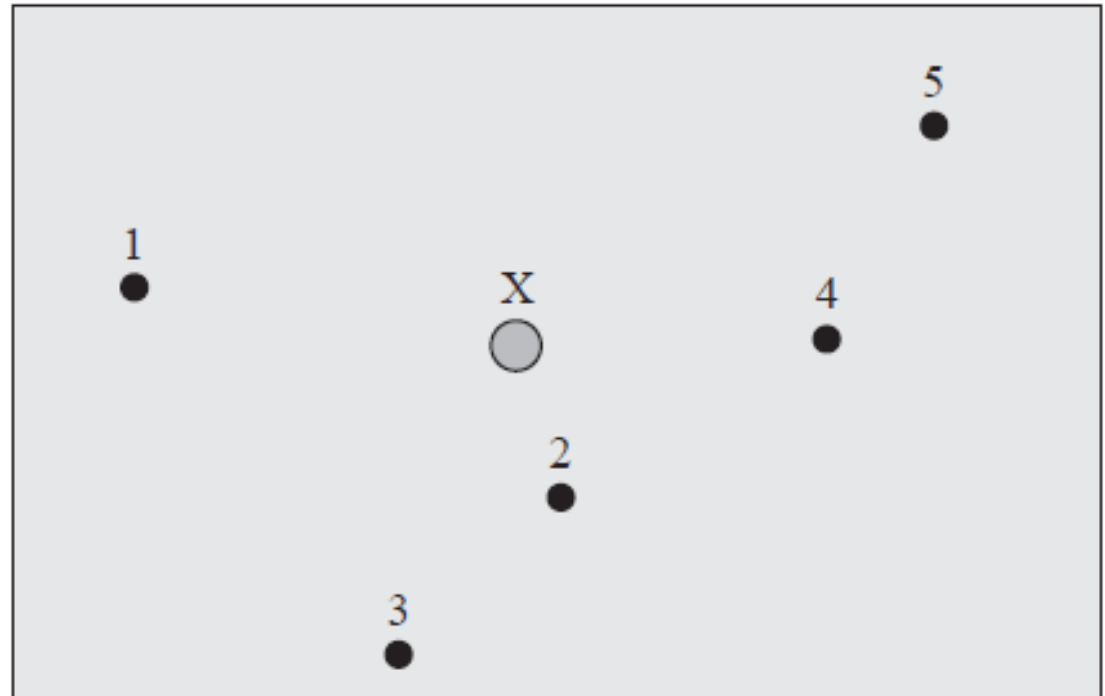
# Erfahrung mit einem konzeptuellen Feld: Um welchen mathematischen Begriff geht es hier und wie löst man damit das Problem?



*Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet.*

*Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?*

*Die Wahl war natürlich nicht schwierig. Du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.*





# Was können wir erwarten?

(z.B. 7. Klasse, Mittelsenkrechte noch unbekannt)

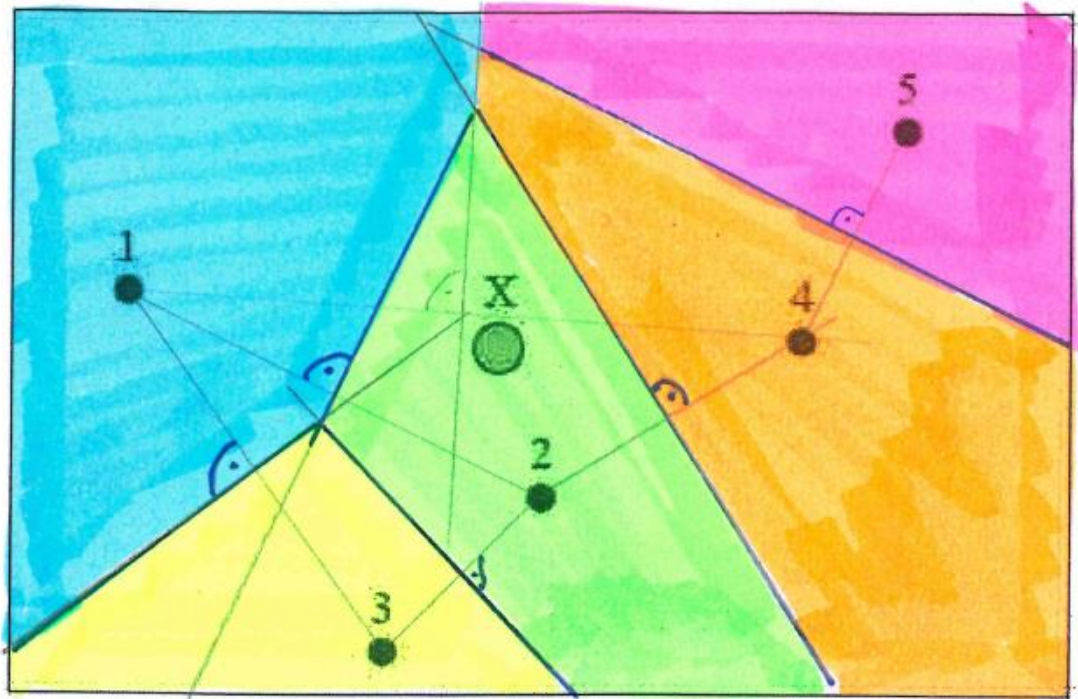


## Normative Lösung:

*Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet.*

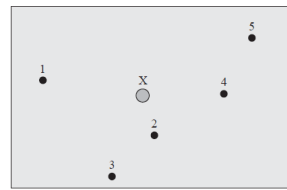
*Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?*

*Die Wahl war natürlich nicht schwierig. Du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.*





Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du? Die Wahl war natürlich nicht schwierig. Du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.



Didaktisches Ziel:

*Genetische* Hinführung zum Begriff der Mittelsenkrechten (Der Begriff entsteht notwendig bei der Lösung des Problems).

Lernziele:

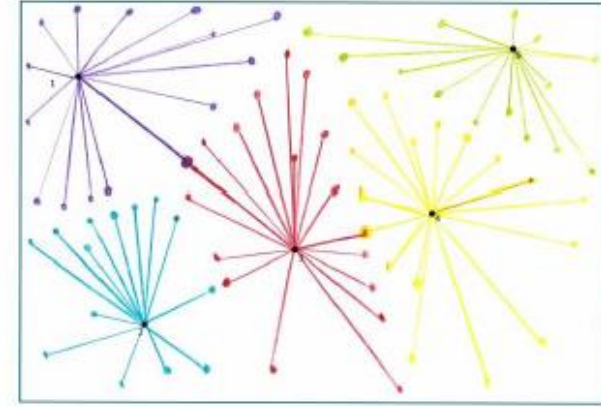
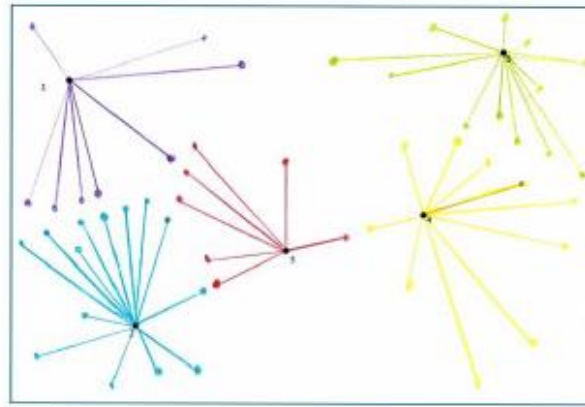
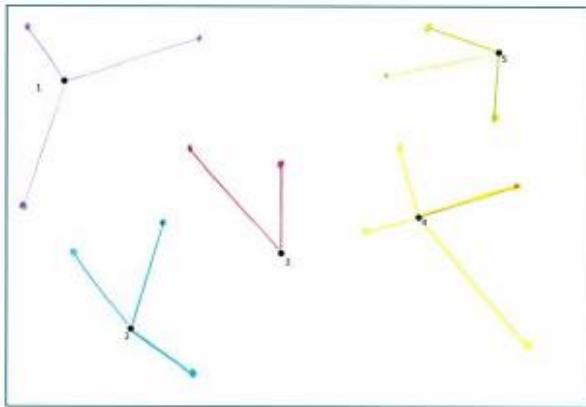
Anhand der Problemaufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler wesentliche Merkmale der Mittelsenkrechten, indem sie ...

- ... das Gebiet daraufhin erkunden, wo welcher Brunnen am nächsten ist.
- ... die Bedeutung der Streckenmittelpunkte erkennen und nutzen.
- ... zu einer Gebietsaufteilung gelangen, die die Mittelsenkrechten nutzt.

## Lernziele:

Anhand der Problemaufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler wesentliche Merkmale der Mittelsenkrechten, indem sie ...

1. ... das Gebiet daraufhin erkunden, wo welcher Brunnen am nächsten ist.
2. ... die Bedeutung der Streckenmittelpunkte erkennen und nutzen.
3. ... zu einer Gebietsaufteilung gelangen, die die Mittelsenkrechten nutzt.



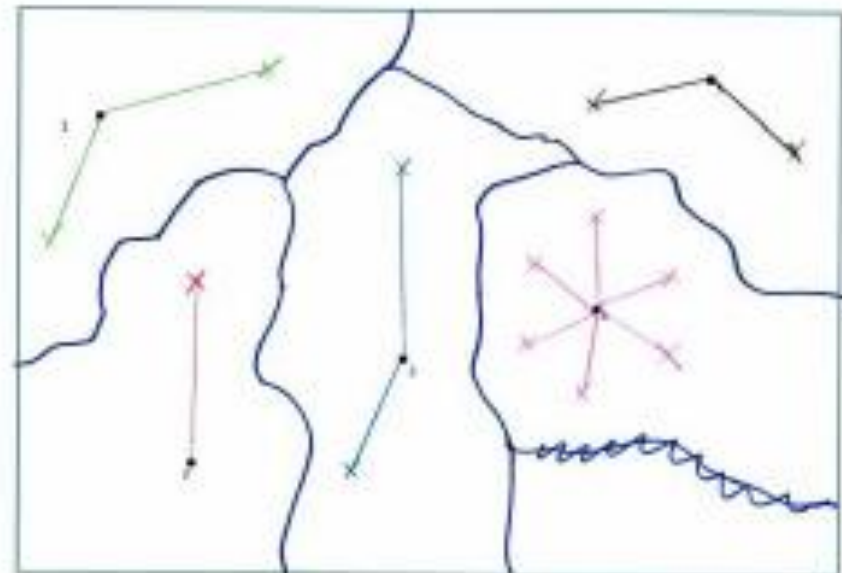
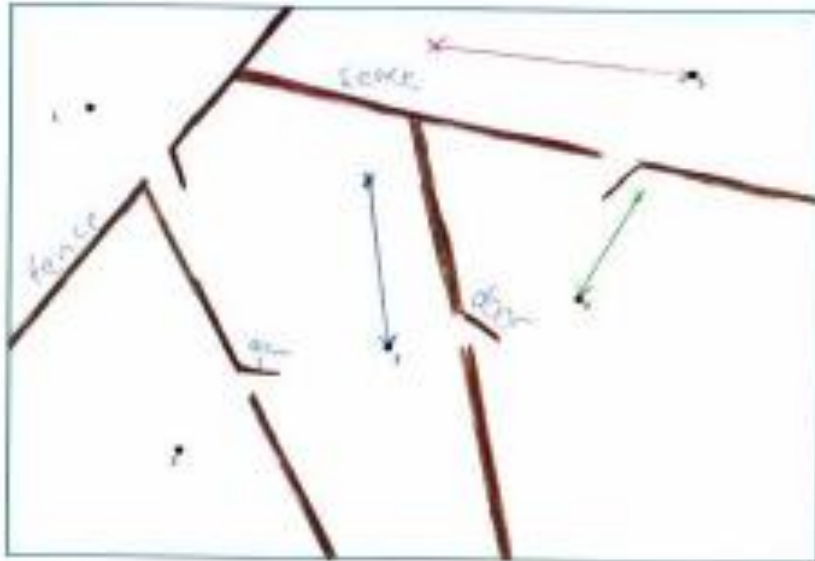
Hier kannst du deine Überlegungen und deine Arbeitsschritte beschreiben:

Ich habe die Augen zu gemacht und irgendwo ein Kreuz gemacht und dann geguckt welcher Brunnen der nächste ist.

## Lernziele:

Anhand der Problemaufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler wesentliche Merkmale der Mittelsenkrechten, indem sie ...

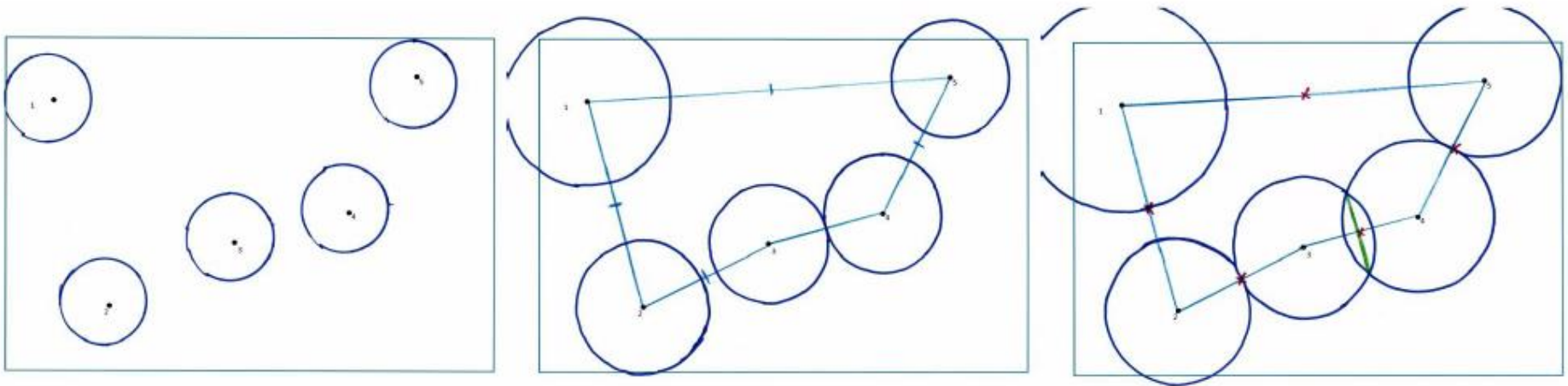
1. ... das Gebiet daraufhin erkunden, wo welcher Brunnen am nächsten ist.
2. ... die Bedeutung der Streckenmittelpunkte erkennen und nutzen.
3. ... zu einer Gebietsaufteilung gelangen, die die Mittelsenkrechten nutzt.



## Lernziele:

Anhand der Problemaufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler wesentliche Merkmale der Mittelsenkrechten, indem sie ...

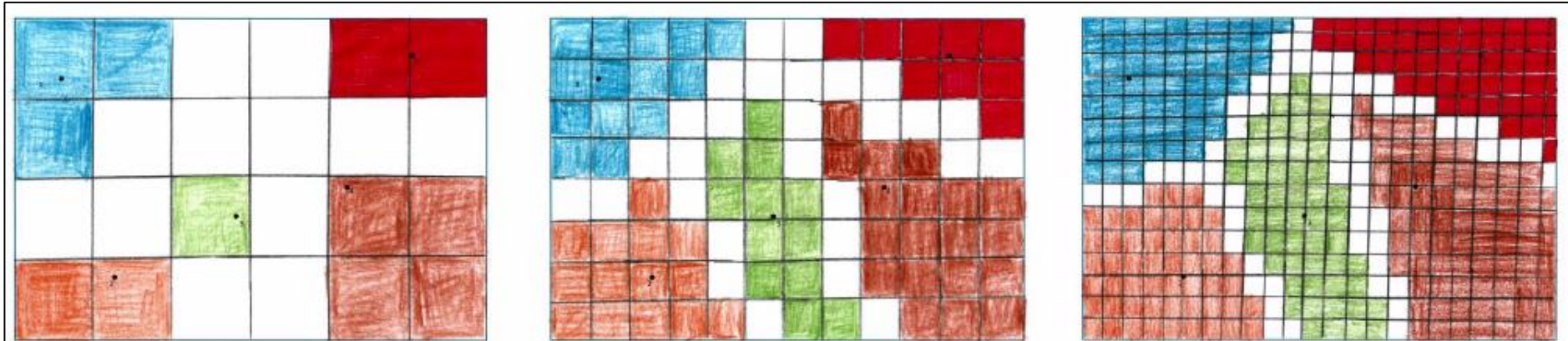
1. ... das Gebiet daraufhin erkunden, wo welcher Brunnen am nächsten ist.
2. ... die Bedeutung der Streckenmittelpunkte erkennen und nutzen.
3. ... zu einer Gebietsaufteilung gelangen, die die Mittelsenkrechten nutzt.



## Lernziele:

Anhand der Problemaufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler wesentliche Merkmale der Mittelsenkrechten, indem sie ...

1. ... das Gebiet daraufhin erkunden, wo welcher Brunnen am nächsten ist.
2. ... die Bedeutung der Streckenmittelpunkte erkennen und nutzen.
3. ... zu einer Gebietsaufteilung gelangen, die die Mittelsenkrechten nutzt.



Hier kannst du deine Überlegungen und deine Arbeitsschritte beschreiben:

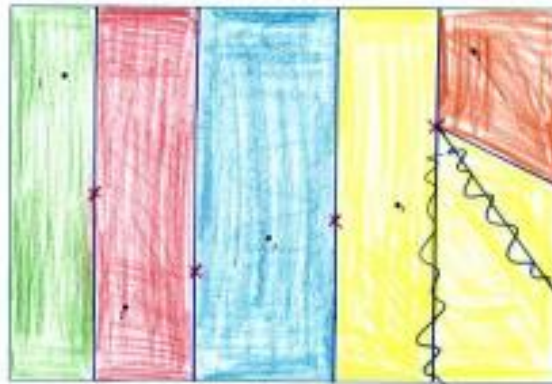
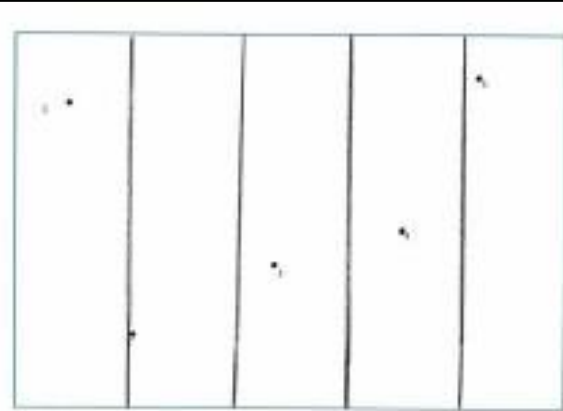
Wenn man alles in Raster einteilt  
kommt man zum Ergebnis. Bei der  
hälfte habe ich einen Strich gezogen  
an dem Punkt wo ich zum anderen Punkt gehen  
würde



## Lernziele:

Anhand der Problemaufgabe erarbeiten die Schülerinnen und Schüler wesentliche Merkmale der Mittelsenkrechten, indem sie ...

1. ... das Gebiet daraufhin erkunden, wo welcher Brunnen am nächsten ist.
2. ... die Bedeutung der Streckenmittelpunkte erkennen und nutzen.
3. ... zu einer Gebietsaufteilung gelangen, die die Mittelsenkrechten nutzt.



# ... und nach dem ersten Problem?



- geeignete Problemsituationen sind zentral, um überhaupt Anlässe zur Bildung des entsprechenden Begriffs zu schaffen.
  - reichen aber allein nicht aus, um zu einem umfassenden Begriffsverständnis zu kommen
- Sammeln, Sichern, Systematisieren

# Die drei Kernprozesse von Unterricht:



UNI  
FREIBURG

Erkunden,  
Entdecken,  
Erfinden

Sammeln,  
Sichern,  
Systematisieren

Üben,  
Vertiefen,  
Anwenden



Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?  
Die Wahl war natürlich nicht schwierig. Du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.



Begriffsbildung muss alle drei Prozesse durchlaufen.

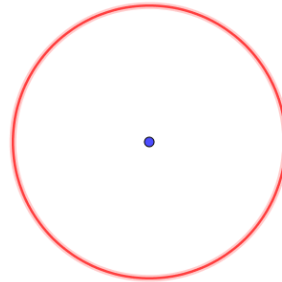


# Sammeln, Sichern, Systematisieren:

## Bsp. „Mittelsenkrechte“

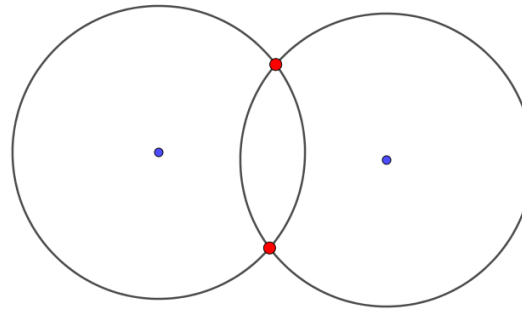


„gleich weit weg von einem Punkt“

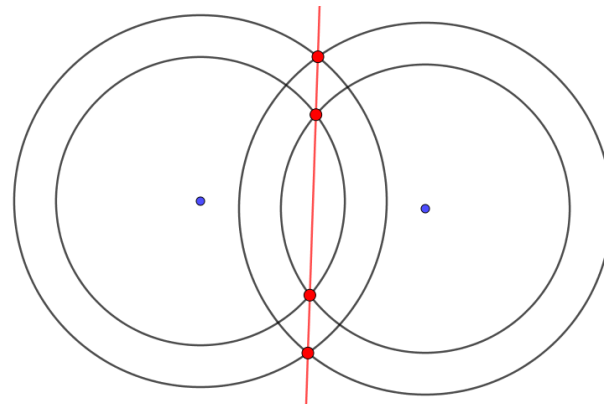


Def: Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt festen Abstand haben.

„gleich weit weg von zwei Punkten“



„gleich weit weg von zwei Punkten“



Beobachtung: Die Menge der Punkte, die von zwei festen Punkten jeweils gleich weit weg sind, liegen auf einer Geraden.

# Sammeln, Sichern, Systematisieren:

## Bsp. „Mittelsenkrechte“



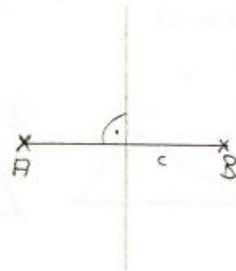
### Ordnen C

#### Wie kann man die Mitte finden?

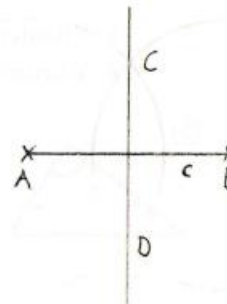
##### 7 Gleich weit weg von den Ecken

- a) Punkte, die gleich weit von **einem** Punkt entfernt liegen, kann man so finden:
- Zeichne einen Punkt  $M$  in dein Heft und zeichne alle Punkte ein, die 4 cm von  $M$  entfernt liegen.
  - Beschreibe wie du vorgehst.
- b) Punkte, die gleich weit von **zwei** Punkten entfernt liegen, kann man so finden:

Ole



Pia



Zeichne die Senkrechte zur Strecke  $c$ .

Schlage mit dem gleichen Radius zwei Kreise, die sich schneiden, um A und B.

Zeichne eine Gerade durch die Schnittpunkte der Kreise.

Finde die Mitte der Strecke zwischen A und B.

- Konstruiere einmal wie Pia und einmal wie Ole alle Punkte, die gleich weit weg von zwei Punkten liegen.
- Ordne dazu die Satzbausteine deinen Konstruktionen zu und schreibe sie in der richtigen Reihenfolge auf.
- Welchen Weg findest du besser, Pias oder Oles Weg?

Aus:  
Mathewerkstatt,  
Bd. 3

# Sammeln, Sichern, Systematisieren:

## Bsp. „Mittelsenkrechte“



► Materialblock S.64  
Wissenspeicher  
Besondere Linien und  
Punkte im Dreieck

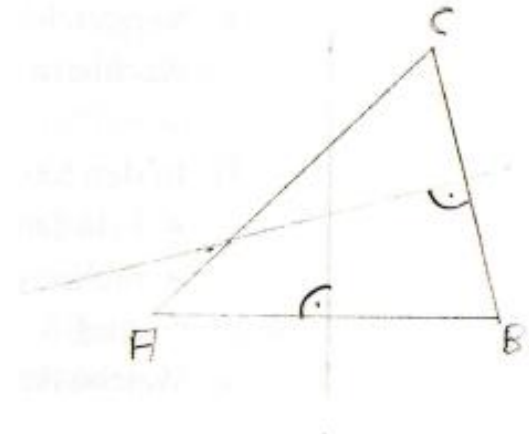
### \* Neues Wort

Auf der **Mittelsenkrechten**  
liegen alle Punkte, die  
gleich weit von zwei Punk-  
ten entfernt sind.

### \* Neues Wort

Einen Kreis, auf dem alle  
Punkte des Dreiecks liegen,  
nennt man **Umkreis**.

- c) Vergleiche eure Konstruktionsbeschreibungen zu b).  
Suche dir einen Weg aus und übertrage ihn in den Wissensspeicher.
- d) Die Gerade, die du in b) konstruiert hast, nennt man *Mittelsenkrechte*\*.  
Erkläre, warum das ein guter Name für diese Gerade ist.
- e) Ole sucht alle Punkte, die gleichweit von drei Punkten entfernt liegen.
  - Erkläre die Schritte von Oles Konstruktion.
  - Setze die Konstruktion im Wissensspeicher fort.
- f) Den Punkt, den du in e) konstruiert hast, nennt man auch Mittelpunkt des Dreiecks ABC.
  - Zeichne den *Umkreis*\* des Dreiecks.
  - Erkläre, warum der Name für diesen Kreis gut passt.
  - Erkläre den Zusammenhang zwischen dem Umkreis eines Dreiecks und den Mittelsenkrechten der Seiten.



- g) Vergleiche eure Lösungen zu e) und f) und übertrage sie in den Wissensspeicher.

- Am Ende des Erkenntnisprozesses steht dann die Definition:

Def.: Die Menge aller Punkte, die von zwei festen Punkten jeweils gleichen Abstand haben, heißt *Mittelsenkrechte*.

# B) Exemplarische Begriffsbildung



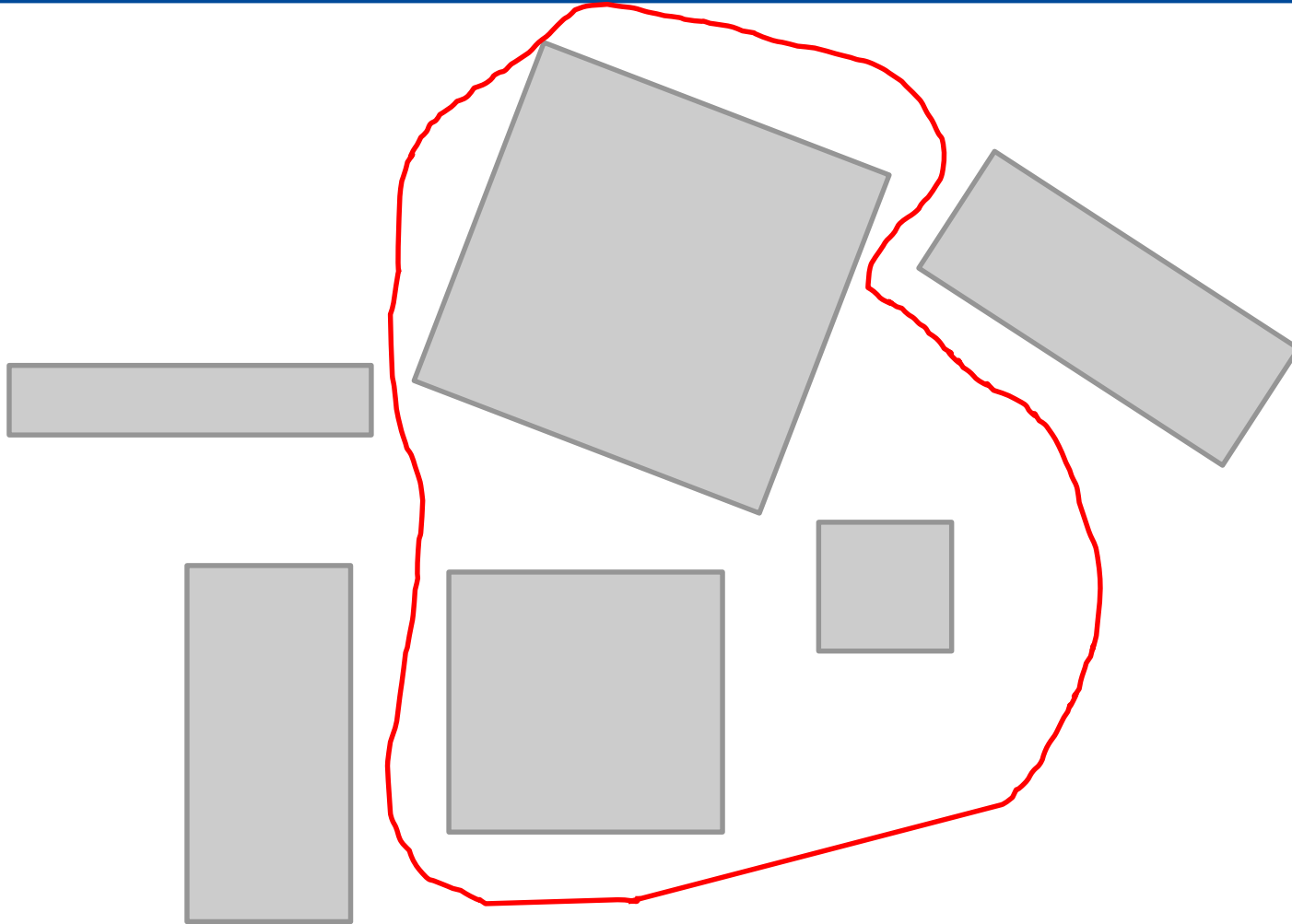
## Die exemplarische Begriffsbildung

Kleinkinder und Vorschulkinder lernen Begriffe (des Alltags) durch den Umgang mit Gegenständen in Verbindung mit der Sprache, indem sie – unbewusst – Eigenschaften vergleichen und schließlich von Einzelobjekten generalisieren (Franke 2000,

Das Suchen von Beispielen und Gegenbeispielen, das Erkennen und das bewusste Analysieren von Gemeinsamkeiten betrachteter Einzelfälle bleibt im gesamten Mathematiklehrgang zentral und wichtig für die Begriffsbildung.

siehe [16] Weigand (2012)

# B) Exemplarische Begriffsbildung



# B) Exemplarische Begriffsbildung



1. Erfahrungen machen

2. Strukturieren

3. Abgrenzen, Definieren

4. Einordnen, Vernetzen,  
Systematisieren

5. Übertragen, Reflektieren

Jeweils mit  
Hilfe von  
Beispielen  
und  
Gegen-  
beispielen

Im Folgenden wird die exemplarische Begriffsbildung für den Begriff  
**„achsensymmetrisch“** gezeigt.

# 1. Mit Beispielen Erfahrung machen:



Nimm einen Taschenspiegel zur Hand und  
untersuche die Buchstaben des Alphabets  
**A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z**



## 2. Beispiele strukturieren



Was passiert, wenn ich einen Buchstaben halbiere?  
Ordne die Buchstaben in drei Gruppen

Buchstaben, die der Spiegel repariert: **A**

Buchstaben, die der Spiegel zu anderen Buchstaben macht: **J → U**

Buchstaben, die kaputtgehen: **S**

### 3. Beispiele abgrenzen, definieren



Wann genau wird ein Buchstabe repariert?



# 4. Beispiele einordnen, vernetzen, systematisieren



*Gibt es Buchstaben (oder andere Figuren), die punktsymmetrisch und achsensymmetrisch sind?*

*Gibt es Buchstaben (oder andere Figuren), die punktsymmetrisch, aber nicht achsensymmetrisch sind?*

*Gibt es Buchstaben (oder andere Figuren), die achsensymmetrisch, aber nicht punktsymmetrisch sind?*

*Untersuche drehsymmetrische Figuren auf Punkt- und auf Achsensymmetrie.*

## 5. Beispiele nennen, übertragen, reflektieren



Suche jeweils 3 punktsymmetrische und  
3 achsensymmetrische Figuren in der  
Natur.

# Wie lange braucht man für „Begriffsbildung“? Siehe [16]



- Für manche Begriffe braucht man die gesamte Schulzeit (und darüber hinaus), um den Begriff zu entwickeln, z.B. haben Sie Ihren Begriff von „Funktion“, von „Zahl“ oder „Volumen“ auch jetzt an der Uni noch vertiefen können ... (Weigand [16] nennt dies „Leitbegriffe“)
- Für andere Begriffe reichen wenige Unterrichtsstunden, z.B. „Vierecke“ oder „achsensymmetrisch“

# „Begriffsarten“ nach Weigand [16]:



- *Leitbegriffe*, die langfristig über den gesamten Mathematiklehrgang entwickelt werden: Zahl, Funktion, Flächeninhalt, Volumen;
- *Schlüsselbegriffe*, die im Zentrum eines längeren Zeitraums stehen: Proportionalität, Lineare Funktion, Dreieck, Ähnlichkeit;
- *Standardbegriffe*, die Unterrichtseinheiten strukturieren: Nullstelle, Erweitern und Kürzen von Brüchen, Periodizität, Trapez, Kathete;
- *Arbeitsbegriffe*, das sind Hilfsbegriffe für andere – gewichtigere – Begriffe: Zusammenfassen von Termen, Höhe des Parallelogramm, Mittellinie des Trapezes.

- [16] Weigand, H-G. (2012). *Begriffe lehren – Begriffe lernen*. Mathematik lehren (Heft 172). S. 2-9.  
Verfügbar unter ILIAS.