Analysis 1- Übungsblatt 07

Gruppe 11

Lorenz Bung: lorenz.bung@googlemail.com

Matrikelnummer: 5113060

Charlotte Rothhaar: Charlotte.rothhaar97@gmail.com

Matrikelnummer: 4315016

Analysis I

Wir haben beide an der Umfrage teilgenommen

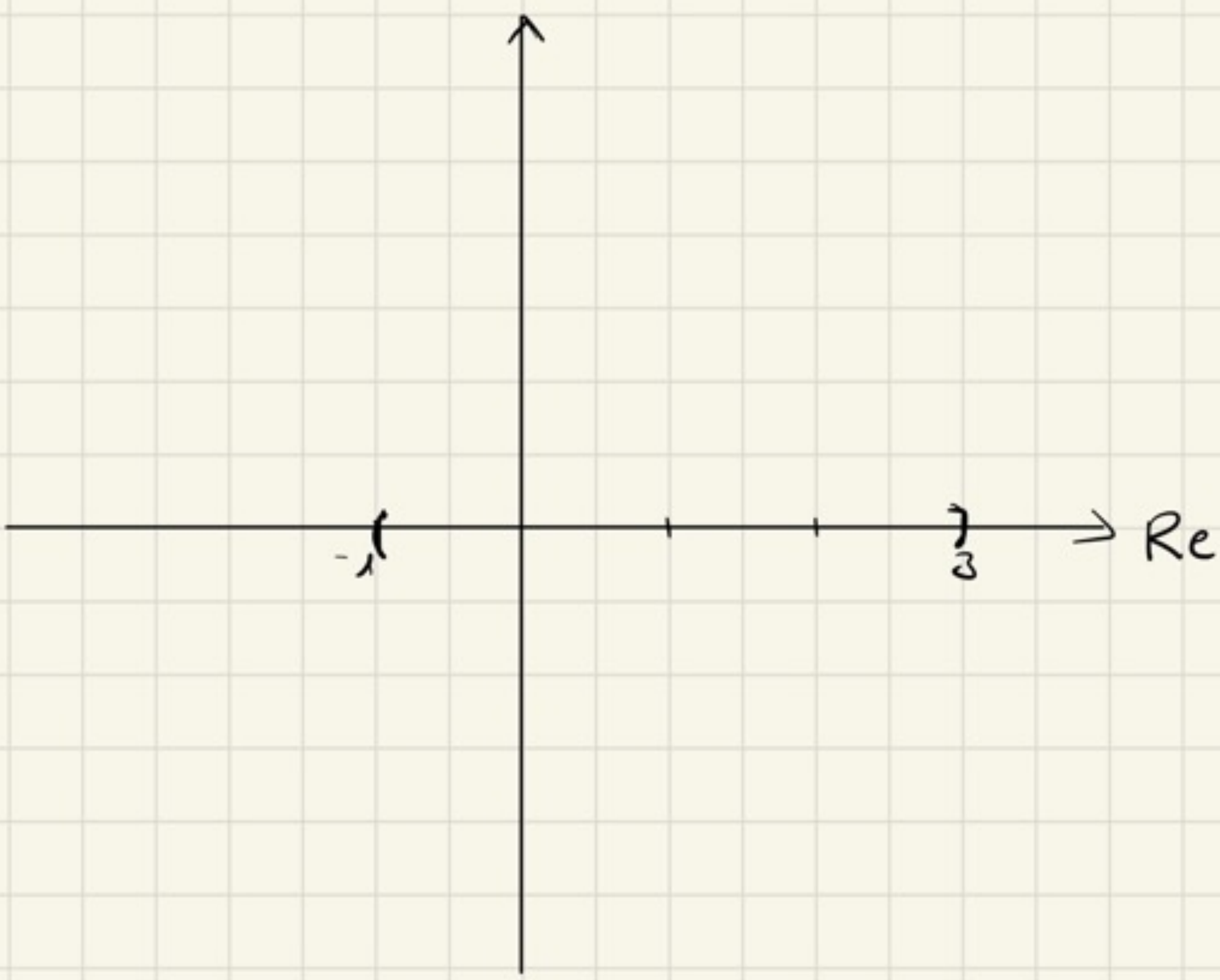
Übungsblatt 7

Aufgabe 25:

a) Gegeben sei die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| + |z| < 4\} =: M$

$z := a+b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, wobei a Realteil und b Imaginärteil von z ist.

Es gilt: $\sqrt{(a-2)^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} < 4$



1. Beschränktheit: Die Menge M ist beschränkt, da $\forall (a,b) \in M$ gilt

$d((a,b),(1,0)) = \sqrt{(a-1)^2+b^2} \leq \sqrt{(|a-1|^2+|b|^2)} =$

2. offen/abgeschlossen

Die Menge ist offen, da jedes $q \in (a,b)$ ist ein innerer Punkt, da

$B_r(q) \subset (a,b)$ mit $r = \min\{$

3. Kompaktheit

Nach dem Satz von Heine Borel ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen beschränkt ist.

$\Rightarrow$ Somit ist M nicht kompakt.

b) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| + |z| < 4$

1. Beschränktheit

2. abgeschlossen/offen

Annahme: M ist abgeschlossen. Dann müsste es einen Punkt $p \in M$ geben, der kein innerer Punkt von M ist.

zz.: $\exists\, p \in M$ mit $B_r(p) \not\subset M$ und $r > 0$.

Sei $p = (3,0)$ und $r = 1$. Dann ist $B_1(3,0)$ nicht mehr komplett in M enthalten, da der Realteil 3 mit Radius $r=1$ addiert wird, erhalten wir den Punkt $(4,0) \notin M$.

$\Rightarrow$ Somit ist M abgeschlossen.

3. Kompaktheit

Nach dem Satz von Heine Borel ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen beschränkt ist.

$\Rightarrow$ Somit ist M kompakt.

Aufgabe 26:

(i) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{für } x \in (1,2] \\ be^x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass $f(x)$ in den Intervallen zwischen diesen beiden Punkten stetig ist, da konstante Funktionen stetig sind (s. Bsp. 4.1.4(i)), Polynome ($ax+2$ als Polynom 1. Grades) und Exponentialfunktionen ebenfalls stetig sind (s. Bsp: 4.1.2).

Wir betrachten $f(x)$ in den Punkten $x=1$ und $x=2$ und wollen $a, b \in \mathbb{R}$ so konstruieren, dass $f(x)$ stetig ist.

Annahme: Sei $a := (-1)$ und $b := 0$. Dann ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1 \\ (-1) \cdot x + 2 & \text{für } x \in (1,2] \\ 0 \cdot e^x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Wir betrachten nun den Grenzwert für $x \to 1$ und $x \to 2$.

Dann ist $\lim\limits_{x \to 1} 1 = 1 = \lim\limits_{x \to 1} (-1) \cdot 1 + 2$

und

$$\lim_{x \to 2} (-1) \cdot 2 + 2 = 0 = \lim_{x \to 2} 0 \cdot e^x$$

(ii) Gegeben ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zz: f ist an der Stelle 0 unstetig

Wir suchen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(0)$, um mit der Definition der Folgenstetigkeit zu zeigen, dass f an der Stelle 0 unstetig ist.

Wir wählen hierfür ein $f(x) \neq 0$. Sei also $f(x) = 1$. Wir formen also um:

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \Big| \cos^{-1}$$

$$\frac{1}{x} = \underbrace{2k\cdot\pi}_{\text{da } \cos\ 2\pi\text{-periodisch}} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{2k\pi} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$\forall x = \frac{1}{2k\pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt also $f(x) = 1$

Sei also unsere Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$$

Außerdem gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos(2n\pi)}_{\text{aufgrund}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$\Rightarrow$ Damit ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$, obwohl $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist.

Somit ist f an der Stelle $x=0$ unstetig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $f(x)$ in allen anderen x stetig ist.

Sei nun ein x_0 gegeben und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit $x_n = \frac{1}{x}$, wobei $x \neq 0$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \cos(x)$$

$\Rightarrow$ Somit ist nach der Definition der Folgenstetigkeit die Funktion in allen $x \neq 0$ stetig.

zz.: $f(0) = a$ für $a \in \mathbb{R}$ ist stetig.

Sei $f(0) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, so kann $f(0)$ jeden bel. Wert x_0 in $\mathbb{R}$ annehmen. Da wir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren, kann $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a = f(0)$ für jede beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Also ist $f(x)$ auch in $x=0$ stetig.

(iii) Gegeben ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zz.: $f(x)$ ist stetig.

Sei x_0 gegeben und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = x_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{x_0}\right) = f(x_0)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f(x)$ an der Stelle 0 stetig ist.

Sei nun $x_0 = 0$ gegeben und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n}_{* = 0} \cdot \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

$$= 0 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

$$= 0 = f(x_0) = f(0)$$

$\Rightarrow$ Also ist $f(x)$ stetig nach dem Folgekriterium.

Aufgabe 27:

Sei $a, b \in \mathbb{R}$

Satz 4.1.12. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $y \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) \le y \le f(b)$ oder $f(b) \le y \le f(a)$ ist. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.*

(i) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv.

zz.: f ist streng monoton wachsend / fallend.

Wir wissen, dass $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, da f injektiv ist.

Außerdem ist f stetig und somit auch folgenstetig, also gilt nach Definition von Folgenstetigkeit $f(x_n) \to f(x_0)$ $\forall (x_n)_n$ mit $x_n \to x_0$.

Da f injektiv ist, gilt $f(a) < f(b)$ oder $f(a) > f(b)$ $\forall a \neq b$.

O.B.d.A sei nun $f(a) < f(b)$.

Wir konstruieren eine stetige Folge $(x_n)_n$, mit $x_n \to b$ und $x_0 = a$.

Damit ist $\forall c \in [a,b]$ mit $a \le c \le b$ nach ZWS auch $f(a) \le f(c) \le f(b)$. Damit muss f monoton wachsend sein.

(monoton fallend: analog dazu)

(ii) Gegeben ist $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x^2 \cdot \cos + 1 \in \mathbb{R}$

z.z.: Die Funktion besitzt min. eine reelle Nullstelle

Wir wissen, dass die Funktion stetig ist, da Polynome und $\cos x$ stetig ist.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Außerdem ist } f(0) = 0^3 + 0^2 \cdot \cos 0 + 1 = 1 > 0 \\ \text{und } f(-\pi) = (-\pi)^3 - \pi^2 \cdot \cos(-\pi) + 1 \approx -39{,}86 < 0 \end{array}\right\} \text{ also } -\pi < 0 < 1$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in (-\pi, 1)$ mit $f(x) = 0$.

$\Rightarrow$ Somit gibt es min. eine Nullstelle.

$\square$

(iii) Sei $f:[a,b] \to [a,b]$ stetig.

zz: f besitzt mindestens einen Fixpunkt $f(x)=x$

Sei $f:[a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

Wir definieren die Funktion $h:[a,b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{stetig}} - \underbrace{x}_{\text{stetig}}$,

denn durch Umformen von $f(x)=x$ zu $f(x)-x=0$, sehen wir,

dass x Fixpunkt von f ist, falls x Nullstelle der Funktion

$h(x)=f(x)-x$ ist.

Um den Zwischenwertsatz anwenden zu können bleibt zu

zeigen, dass h stetig ist. h ist jedoch als Differenz zweier

stetiger Funktionen selbst stetig. Es gilt:

$h(a) = \underbrace{f(a)}_{\in[a,b]} - a \geq 0$ und

$h(b) = \underbrace{f(b)}_{\in[a,b]} - b \leq 0$

Daraus folgt aufgrund des Zwischenwertsatzes

$h(b) \leq 0 \leq h(a)$ und damit existiert ein x_0 mit

$h(x_0)=0$, so dass $h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$ bzw. $f(x_0) = x_0$ gilt.

$\Rightarrow$ Somit besitzt f min. einen Fixpunkt.

$\square$

Aufgabe 28:

Die Funktion $\frac{\sin x}{x} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ ist auf $x=0$ stetig fortsetzbar.

Beweis:

Es ist $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$

und damit $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots}{x} = \frac{x}{x} - \frac{x^{\cancel{3}2}}{3!\,\cancel{x}} + \frac{x^{\cancel{5}4}}{5!\,\cancel{x}} - \frac{x^{\cancel{7}6}}{7!\,\cancel{x}} + - \ldots$

wobei $x \neq 0$ laut Voraussetzung

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \ldots$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Hierfür verwenden wir die Reihendarstellung der Sinusfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Dann gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\left((-1)^0 \cdot \frac{x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!}\right)}^{\text{0-te Summenglied}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} + \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n} \cdot \cancel{x}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

Nach Rechenregeln für Grenzwerte

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{0^{2n}}{(2n+1)!}}_{=0}}_{=0}$$

$$= 1 + 0 = \underline{1}$$

$\Rightarrow$ Somit ist $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □