Lineare Algebra I, Blatt 1

Gruppe 4
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
`lorenz.bung@students.uni-freiburg.de`
Tobias Remde (Matr.-Nr. 5100067)
`tobias.remde@gmx.de`

15. November 2020

Aufgabe 1

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{2,3}(1)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{V_{2,3}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_2(3)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{2,1}(2)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist die Zahl der nichttrivialen Zeilen. In diesem Fall sind dies 3 Zeilen.
Der Lösungsraum $\mathcal{S}$ lässt sich darstellen durch:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{b_1 - 2b_2 - 8b_3}{3}, b_2 + 2b_3, -b_3 \right) \;\middle|\; (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Durch Hintereinderausführung der folgenden Funktionen ergibt sich aus Matrix (1) die Matrix (2):

$$A_{3,1}(1) \to M_2(2) \to M_4(2) \to A_{2,1}(3) \to A_{4,1}(5) \to V_{2,3} \to A_{4,2}(1)$$
$$\to A_{3,2}(3) \to V_{3,4} \to A_{4,3}(-7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Der Rang der Matrix ist 4, da es 4 nichttriviale Zeilen gibt.
Der Lösungsraum $\mathcal{S}$ lässt sich darstellen durch:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2b_1 - 2b_2 + 3b_3 + 79b_4}{4}, \frac{2b_2 - b_3 + 11b_4}{2}, b_3 + 5b_4, -40b_4 \right) \;\middle|\; (b_1, \ldots, b_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

Aufgabe 2

(a) $(\mathbb{Q}, \star)$ ist Halbgruppe $\Leftrightarrow a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Dann ist
$a \star (b \star c) = a \star (cb + 2c + 2b + 2)$
$= a(cb + 2c + 2b + 2) + 2a + 2(cb + 2c + 2b + 2) + 2$
$= abc + 2ac + 2ab + 2bc + 4a + 4b + 4c + 6$
$= (ab + 2a + 2b + 2)c + 2(ab + 2a + 2b + 2) + 2c + 2$
$= (ab + 2a + 2b + 2) \star c$
$= (a \star b) \star c$.
Somit ist $(\mathbb{Q}, \star)$ eine Halbgruppe.

Es bleibt zu zeigen, dass $(\mathbb{Q}, \star)$ abelsch ist:
$(\mathbb{Q}, \star)$ abelsch $\Leftrightarrow a \star b = b \star a \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$. Seien also $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann ist
$a \star b = ab + 2a + 2b + 2$
$= ba + 2b + 2a + 2 = b \star a$.

$\square$

(b) Aufgrund der Kommutativität ist ein linksneutrales Element auch das rechtsneutrale Element. Es genügt also zu zeigen, dass ein rechtsneutrales Element existiert.
Seien also $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann ist b rechtsneutrales Element, wenn

$$a \star b = ab + 2a + 2b + 2 = a.$$

Durch Umformungen erhält man
$ab + 2a + 2b + 2 = a$
$\Leftrightarrow ab + a + 2b = -2$
$\Leftrightarrow b(a+2) + a = -2$
$\Leftrightarrow b = -\frac{2+a}{a+2}$
$\Leftrightarrow b = -1.$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann ist b (rechts-)inverses von a, falls

$$a \star b = e = -1.$$

Durch Umformungen erhält man
$ab + 2a + 2b + 2 = -1$
$\Leftrightarrow b(a+2) + 2a = -3$
$\Leftrightarrow b(a+2) = -3 + 2a$
$\Leftrightarrow b = -\frac{3+2a}{a+2}.$
Für $a = 0$ erhält man somit $b = -\frac{3}{2}$.
Für $a = -2$ hat die Gleichung keine Lösung, somit existiert auch kein inverses Element.

Aufgabe 3

$\star$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Das neutrale Element der Gruppe ist b.