

Knobelaufgaben zum Vorkurs Mathematik

für Mathematiker
vor dem WS 2020/21

Timo Enger, Peter Pfaffelhuber
Universität Freiburg

6. Oktober 2020

Falls Sie diese Aufgaben entdecken, bevor der Vorkurs beginnt: Wie wäre es damit, wenn Sie sich schon mal an eine der Knobelaufgaben versuchen würden? Diese werden als Hausaufgabe für die ganze Woche am Freitag nachmittag in den Übungen besprochen.

Knobelaufgabe für die ganze Woche

1. Seien α und n natürliche Zahlen. Wir betrachten die Aussage:

$\mathcal{A}(n, \alpha)$: Zwischen 10α und $10\alpha + 100$ liegen nicht mehr als n Primzahlen..

Finden Sie n so klein wie möglich ist und einen Beweis dafür, dass $\mathcal{A}(n, \alpha)$ für alle $\alpha > 0$ gilt.

HINWEIS: Als ersten Schritt finden Sie am besten einen Beweis dafür, dass $\mathcal{A}(50, \alpha)$ für alle $\alpha > 1$ gilt.

HINWEIS: Hier sind alle Primzahlen unter 200:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

Für $\alpha = 2$ ergeben sich die Primzahlen 23, ...113, also 22 Stück.

2. Fünf Häuser stehen in einer Reihe und tragen, von links nach rechts gelesen, die Hausnummern 1 bis 5. Jedes Haus hat eine andere Farbe. In jedem Haus wohnt eine einzige Familie. Die Nationalitäten der Familien sind verschieden. Jede Familie bevorzugt ein bestimmtes Getränk, eine bestimmte Speise, und hält ein bestimmtes Haustier.

Die Farben sind: blau, gelb, grün, rot, weiss.

Die Nationalitäten sind: Deutschland, Schweiz, Frankreich, Österreich, Polen.

Die Getränke sind: Bier, Kaffee, Milch, Tee, Wasser.

Die Speisen sind: Kartoffelauflauf, Nudeln, Reis, Gemüsesuppe, Rindsfilet.

Die Haustiere sind: Fisch, Hund, Katze, Pferd, Vogel.

Folgendes ist bekannt:

- (a) Die französische Familie wohnt im roten Haus.

- (b) Die polnische Familie hält einen Hund.
- (c) Die Familie aus der Schweiz trinkt gerne Tee.
- (d) Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
- (e) Die Familie im grünen Haus trinkt gerne Kaffee.
- (f) Die Liebhaber von Reis halten einen Vogel.
- (g) Die Familie im mittleren Haus trinkt gerne Milch.
- (h) Die Familie im gelben Haus isst gerne Kartoffelauflauf.
- (i) Die Nudel-Liebhaber wohnen neben den Katzenhaltern.
- (j) Die Pferdebesitzer wohnen neben den Liebhabern von Kartoffelauflauf.
- (k) Die Liebhaber von Rindsfilets trinken gerne Bier.
- (l) Die österreichische Familie wohnt im ersten Haus.
- (m) Die österreichische Familie wohnt neben dem blauen Haus.
- (n) Die deutsche Familie mag Gemüsesuppe.
- (o) Die Nudel-Liebhaber haben Nachbarn, die gerne Wasser trinken.

Wem gehört der Fisch?

(Antwort mit Herleitung, d.h. einer Auflistung aller logischen Schlussfolgerungen.)

3. Zwei Lösungen des 4×4 -Sudokus (siehe auch Abschnitt 4.3 heißen *im wesentlichen gleich*, wenn man beide durch Hintereinanderausführung folgender Operationen ineinander überführen kann:

- Vertauschen der ersten beiden, oder letzten beiden Zeilen;
- Vertauschen der ersten beiden, oder letzten beiden Reihen;
- Spiegelung an einer der beiden Winkelhalbierenden;
- Vertauschung der Zahlen 1,2,3,4 untereinander.

Sind zwei Lösungen nicht im wesentlichen gleich, so heißen sie *im wesentlichen verschieden*.

- (a) Sind folgende Lösungen im wesentlichen gleich oder verschieden?

4	3	2	1
2	1	4	3
1	2	3	4
3	4	1	2

4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4

- (b) Wieviele im wesentlichen verschiedene Lösungen des 4×4 -Sudokus gibt es?

4. Die Zahl π ist aus der Schule bekannt und ist

- (a) die Fläche eines Kreises mit Radius 1;
- (b) der Umfang eines Kreises mit Radius $\frac{1}{2}$;
- (c) die erste positive Nullstelle der Sinus-Funktion.

Zeigen/Begründen/Beweisen Sie, dass die durch (a),(b) und (c) beschriebenen Zahlen identisch sind.