Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2020/2021

Lineare Algebra I
Blatt 0
Abgabe: 9.11.2019, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Lesen Sie im Skript Appendix A sowie B und versuchen Sie sich an den folgenden Aufgaben. Dieses Blatt wird nicht benotet, die Abgabe muss aber im ILIAS (als eine einzige PDF-Datei) eingereicht werden, um sich mit ILIAS vertraut zu machen.

Aufgabe 1. Zeige mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass

$$n! > 2^n$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$, wobei $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$.

Aufgabe 2. Finde und beweise induktiv eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{für } n > 0.$$

Aufgabe 3.
Betrachte folgende Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \text{Die } (n+1)\text{-te Primzahl} \end{aligned}$$

Zeige induktiv, dass $f(n) \leq 2^{2^n}$.
Hinweis: Warum gibt es unendlich viele Primzahlen? Was ist $\sum_{k=0}^{n} 2^k$?

Aufgabe 4.
Wir betrachten die sogenannte perforierte Ebene $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Die Kollektion aller Geraden, welche durch (den „fehlenden" Punkt) $(0,0)$ gehen, zerlegt die Menge X (siehe Bemerkung nach der Definition B.4 im Skript). Sei E die von dieser Zerlegung induzierte Äquivalenzrelation auf X und $[(a,b)]_E$ die Äquivalenzklasse des Punktes (a,b) in X.

(a) Sind die Äquivalenzklassen $[(0,1)]_E$ und $[(1,0)]_E$ disjunkt?

(b) Bildet der Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ein Repräsentantensystem für E?

(c) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} g: X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} x/y, & \text{falls } y \neq 0 \\ \pi, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

kompatibel mit E ist. Ist die induzierte Abbildung $\overline{g} : X/E \to \mathbb{R}$ injektiv? Und surjektiv? (Siehe Beispiel 1.23 im Skript für die Definition.)

Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.