Analysis I, Blatt 3

Gruppe 11
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Charlotte Rothhaar (Matr.-Nr. 4315016)
charlotte.rothhaar97@gmail.com

25. November 2020

Aufgabe 9

(i) (a) $(a_n = n - \frac{1}{n})_{n>0}$

Monotonie.
Behauptung: $(a_n)_{n>0}$ ist monoton steigend.
zu zeigen: $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n > 0$.
Beweis:

$$\begin{aligned} n + 1 - \frac{1}{n+1} &> n - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n+1} &> -\frac{1}{n} \\ 1 &> -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Da $n \in \mathbb{N}$ ist, ist $|\frac{1}{n}| > |\frac{1}{n+1}|$ und damit $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 < 1$. Somit ist $(a_n)_{n>0}$ monoton steigend. Da nicht nur "$\geq$", sondern sogar "$>$" gilt, ist $(a_n)_{n>0}$ damit nicht monoton fallend.

Konvergenz.
Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n>0} = \infty$.
Beweis: Wir teilen a_n zunächst in zwei Folgen $(b_n = n)_{n>0}$ und $(c_n = -\frac{1}{n})_{n>0}$ auf.

Behauptung: Die Folge $b'_n := (\frac{1}{b_n})_{n>0}$ konvergiert gegen 0.
zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b'_n - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $n_0 := \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil$.
Dann ist

$$|b'_n - 0| = |b'_n| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Laut *Lemma 3.3.3.* ist $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n>0} = \infty$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{b_n})_{n>0} = \lim\limits_{n\to\infty} (b'_n)_{n>0} = 0$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n>0} = \infty$.

Behauptung: Die Folge $(c_n)_{n>0}$ konvergiert mit Grenzwert 0.
zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |c_n - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $n_0 := \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil$.
Dann ist

$$|c_n - 0| = |c_n| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n)_{n>0} = 0$.

Nach GW-Satz gilt nun $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n>0} = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n>0} + \lim\limits_{n\to\infty} (c_n)_{n>0} = \infty + 0 = \infty$.

Beschränktheit.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n>0} = \infty$, kann es keine obere Schranke geben.
Da $(a_n)_{n>0}$ monoton wachsend ist, ist

$$\inf\ (a_n)_{n>0} = a_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0 = \min\ (a_n)_{n>0}.$$

(b) $(b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n})_n$

Monotonie.
Behauptung: $(b_n)_n$ ist monoton fallend.
zu zeigen: $b_{n+1} \leq b_n\ \forall n > 0$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &\leq b_n \\
\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} &\leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
\sqrt{n+2} &\leq -\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1} \\
\sqrt{n} + \sqrt{n+2} &\leq 2\sqrt{n+1} \\
n + 2\sqrt{n^2+2n} + n + 2 &\leq 4n + 4 \\
2\sqrt{n^2+2n} &\leq 2n + 2 \\
\sqrt{n^2+2n} &\leq n + 1 \\
n^2 + 2n &\leq n^2 + 2n + 1 \\
0 &< 1.
\end{aligned}
$$

Da sogar $b_{n+1} < b_n$, ist $(b_n)_n$ streng monoton fallend und kan damit nicht monoton wachsend sein.

Konvergenz.
Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_n = 0$.
Beweis: Wir teilen b_n in zwei Folgen $(d_n = \sqrt{n+1})_n$ und $(e_n = -\sqrt{n})_n$ auf.
Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (d_n)_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} (e_n)_n = -\infty$ und damit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_n = \lim\limits_{n\to\infty} (d_n)_n + \lim\limits_{n\to\infty} (e_n)_n = \infty - \infty = 0$.
Damit konvergiert $(b_n)_n$ gegen den Grenzwert 0.

Beschränktheit.
Aus Monotonie und Konvergenzverhalten folgen

$$\sup\ (b_n)_n = b_0 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1 = \max\ (b_n)_n$$

und

$$\inf\ (b_n)_n = \lim_{n\to\infty} (b_n)_n = 0.$$

(ii) (a)

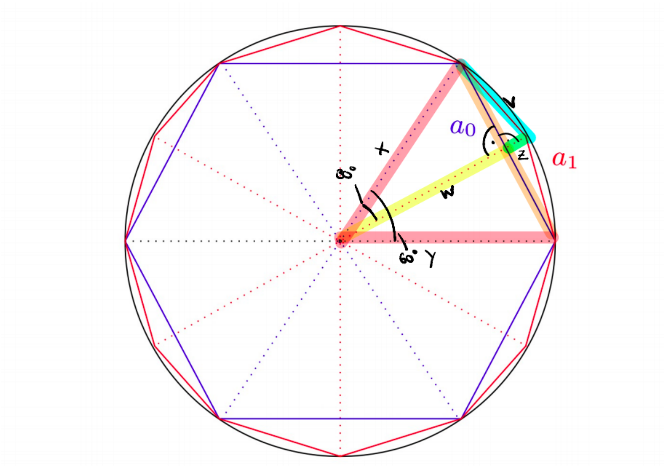


Abbildung 1

Aus den in Abbildung 1 angestellten Überlegungen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
{a_{n+1}}^2 &= \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + z^2 \\
&= \frac{{a_n}^2}{4} + (1-w)^2 \\
&= \frac{{a_n}^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 \\
&= \frac{{a_n}^2}{4} + \left(1 - 2\sqrt{1 - \frac{{a_n}^2}{4}} + 1 - \frac{{a_n}^2}{4}\right) \\
&= \frac{{a_n}^2}{4} + 2 - 2\sqrt{\frac{4 - {a_n}^2}{4}} - \frac{{a_n}^2}{4} \\
{a_{n+1}}^2 &= 2 - \sqrt{4 - {a_n}^2} \\
a_{n+1} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - {a_n}^2}}.
\end{aligned}
$$

□

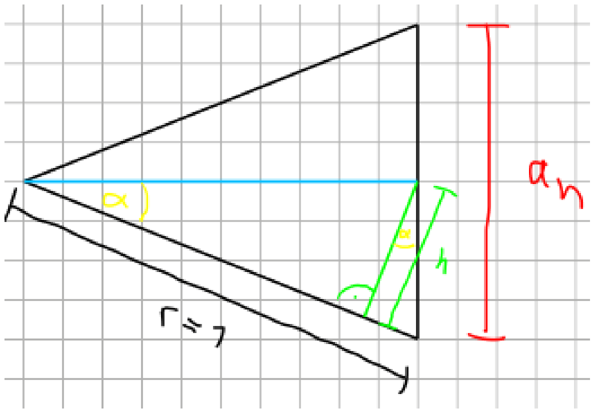
(b) 

Abbildung 2

Aus den in Abbildung 2 angestellten Überlegungen ergibt sich $h = \cos\left(\frac{30°}{2^n}\right)\frac{a_n}{2}$ und $A_\Delta = \frac{1}{2}rh = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{30°}{2^n}\right)\frac{a_n}{2}$. Da das das Sechseck ($V_0$) 12 solcher Dreiecke enthält, ergibt sich für die Gesamtfläche

$$\begin{aligned} f_n &= 12 * 2^n * \frac{1}{2} * \cos\left(\frac{30°}{2^n}\right)\frac{a_n}{2} \\ &= 3 * 2^n * \cos\left(\frac{30°}{2^n}\right) a_n \\ &= 6 * 2^n * \cos\left(\frac{30°}{2^n}\right) * \sin\left(\frac{30°}{2^n}\right) \\ f_n &= 3 * 2^n * \sin\left(\frac{60°}{2^n}\right). \end{aligned}$$

(c) f_n ist konvergent, falls f_n monoton wachsend und von oben beschränkt ist.

Monotonie.
Behauptung: f_n ist monoton wachsend.
zu zeigen: $f_{n+1} \geq f_n$

Beweis: Angenommen, $f_{n+1} \geq f_n$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &\geq f_n \\
3 * 2^{n+1} * \sin\left(\frac{60°}{2^{n+1}}\right) &\geq 3 * 2^n * \sin\left(\frac{60°}{2^n}\right) \\
2 \sin\left(\frac{60°}{2^n * 2}\right) &\geq \sin\left(\frac{60°}{2^n}\right) \\
2 \sin\left(\frac{30°}{2^n}\right) &\geq \sin\left(\frac{60°}{2^n}\right) \\
2 \sin(30°) &\geq \sin(60°) \\
1 &\geq 0,866...
\end{aligned}$$

Somit ist f_n monoton wachsend.

Beschränktheit.
Behauptung: π ist obere Schranke von f_n.
zu zeigen: $\pi \geq f_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Angenommen, die Behauptung ist wahr. Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi &\geq f_{n+1} \\
\pi &\geq 3 * 2^{n+1} * \sin\left(\frac{60°}{2^{n+1}}\right) \\
\frac{\pi}{2^n} &\geq 3 * 2 * \sin\left(\frac{30°}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ verhalten sich beide Seiten gleich, daher kann n einen beliebigen Wert annehmen. Somit ist

$$\begin{aligned}
\pi &\geq 6 * \sin(30°) \\
\pi &\geq 3.
\end{aligned}$$

Damit ist f_n durch π von oben beschränkt.
Insgesamt ist f_n monoton wachsend und von oben beschränkt und damit konvergent.

$\square$

Aufgabe 10

(i) Da die Folge $(a_n)_n$ aus den endlos wiederholten Folgengliedern $0, 1, 2, 1$ besteht, sind die Häufungspunkte 0 und 2.

Damit ist $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

$(b_n)_n$ besteht aus der Wiederholung von $2, 1, 1, 0$. Damit sind auch hier 0 und 2 Häufungspunkte.
Weiterhin sind $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

Die Folge $(c_n)_n := (a_n + b_n)_n$ besteht somit aus einer endlosen Wiederholung der Folgenglieder $a_0 + b_0, \ldots, a_4 + b_4$, also $2, 2, 3, 1$. Die Häufungspunkte sind also 1 und 3, $\liminf\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = 3$.

(ii) Sei a_n reelle eine Folge.
zu zeigen: $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.
Beweis:
Da $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) =: x$ existiert, muss es eine Teilfolge $(a_{n_m})_m$ geben, die gegen x konvergiert. Wegen $\lim\limits_{m\to\infty}(-a_{n_m}) = -\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$ ist auch $-x$ ein Häufungspunkt.
Dieser muss minimal sein: Für alle Häufungspunkte y von $(a_{n_m})_m$ muss gelten, dass $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m} = \lim\limits_{m\to\infty} -(-a_{n_m}) = -\lim\limits_{m\to\infty} -a_{n_m} = -y$. Wegen $-x = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ist $-y \leq -x \Leftrightarrow y \geq x$.
Damit ist x der kleinste Häufungspunkt von $(a_{n_m})_m$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\square$

(iii)

Aufgabe 11

(i) Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, f hätte mehr als einen Fixpunkt. Seien diese Fixpunkte $x, y \in I$.
Dann ist $|f(x) - f(y)| < q|x - y|$ und nach Definition somit
$|x - y| < q|x - y|$ bzw. $1 < q$. Widerspruch, da $q \in (0, 1)$!

$\square$

(ii) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit $x_{n+1} = f(x)$.
Ist diese Folge eine Cauchyfolge, so konvergiert sie auch gegen einen Grenzwert x' mit $f(x') = x'$.

Es gilt:

$$q * |x_n - x_{n-1}| = q * |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leq q * q * |x_{n-1} - x_{n-2}| \quad (1)$$

und damit

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \\ &\leq q * |x_n - x_{n-1}| \\ &\overset{(1)}{\leq} q^2 * |x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\vdots \\ &\leq q^n * |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Somit ist

$$|x_{n+m+n} - x_{n+m}| \leq q^m * |x_{n+1} - x_n|.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} |x_{n+m} - x_{n+m+n}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| \\ &\vdots \\ &|x_{n+1} - x_n|. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\leq q^{m-1}|x_{n+1} - x_n| + q^{m-2}|x_{n+1} - x_n| + \cdots + q^0|x_{n+1} - x_n| \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} q^i\right) |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right) |x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{1}{1-k} * q^n |x_1 - x_0| \xrightarrow{n \to 0} 0. \end{aligned}$$

Damit ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge und konvergiert.
Weiterhin gilt für den Grenzwert x der Folge

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_n).$$

Damit ist der Grenzwert x der Fixpunkt x'.

$\square$

(iii)

Aufgabe 12

(i) Sei $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Dann ist

$$a + \frac{1}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{1}{a} = \frac{a^2+1}{a} \geq 2$$

und somit

$$\frac{a^2+1}{a} - 2 = \frac{a^2+1}{a} - \frac{2a}{a} = \frac{a^2-2a+1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0.$$

$(a-1)^2$ muss schon positiv sein (denn $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$), und wegen $a > 0$ folgt auch $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$.

$\square$

(ii)

(iii) Es ist

$$x_n \geq x_{n+1} \tag{2}$$

und somit

$$\frac{c}{x_n} \leq \frac{c}{x_{n+1}}. \tag{3}$$

Wegen Gleichung 3 ist damit $\left[\frac{c}{x_{n+1}}, x_n\right] \subseteq \left[\frac{c}{x_n}, x_n\right]$. Weil außerdem wegen Gleichung 2 $\left[\frac{c}{x_n}, x_{n+1}\right] \subseteq \left[\frac{c}{x_n}, x_n\right]$ ist, muss der Schnitt $\left[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}\right]$ dieser beiden Intervalle auch eine Teilmenge von $\left[\frac{c}{x_n}, x_n\right]$ sein.

$\square$

(iv)

(v)