# Einführung in die Mathematikdidaktik

## Vorlesung 6: Üben

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

18. Dezember 2020

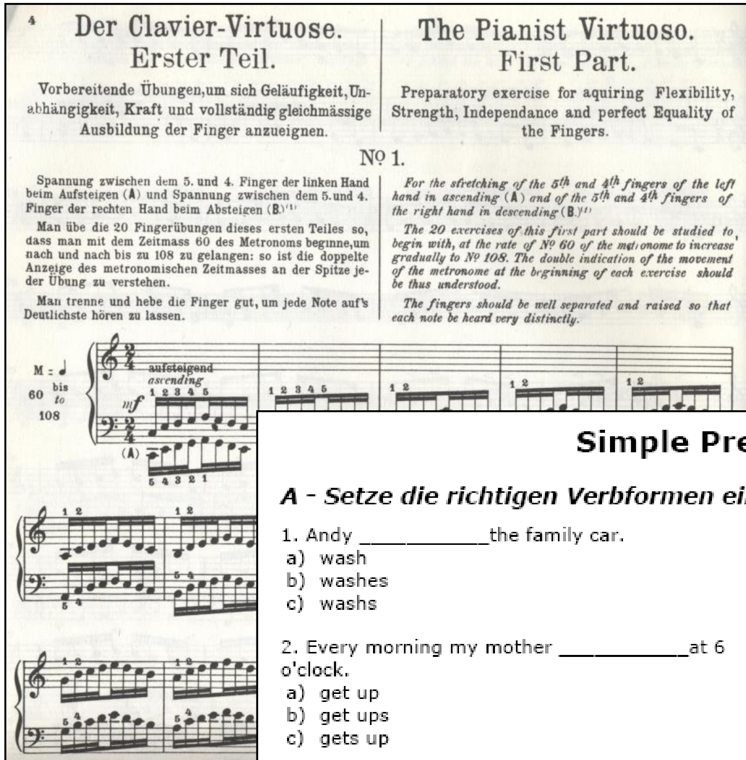
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

UNI FREIBURG

# Inhalte dieser Veranstaltung:

| | Datum | Thema |
|---|---|---|
| 1 | 13.11. | Lerntheorien |
| 2 | 20.11. | Darstellungsebenen |
| 3 | 27.11. | Grundvorstellungen |
| 4 | 4.12. | Entdeckendes Lernen |
| 5 | 11.12. | Begriffsbildung |
| 6 | 18.12. | Üben |
| 7 | 8.1. | Differenzieren |
| 8 | 15.1. | Curriculum und Kompetenzen |
| 9 | 22.1. | Modellieren |
| 10 | 29.1. | Problemlösen |
| 11 | 5.2. | Begründen und Beweisen |
| 12 | 15.2. | Klausur |

# Was ist „Üben"?


4 Der Clavier-Virtuose. Erster Teil.

Vorbereitende Übungen, um sich Geläufigkeit, Unabhängigkeit, Kraft und vollständig gleichmässige Ausbildung der Finger anzueignen.

The Pianist Virtuoso. First Part.

Preparatory exercise for aquiring Flexibility, Strength, Independance and perfect Equality of the Fingers.

Nº 1.

Spannung zwischen dem 5. und 4. Finger der linken Hand beim Aufsteigen (A) und Spannung zwischen dem 5. und 4. Finger der rechten Hand beim Absteigen (B.)[1]

Man übe die 20 Fingerübungen dieses ersten Teiles so, dass man mit dem Zeitmass 60 des Metronoms beginne, um nach und nach bis zu 108 zu gelangen: so ist die doppelte Anzeige des metronomischen Zeitmasses an der Spitze jeder Übung zu verstehen.

Man trenne und hebe die Finger gut, um jede Note auf's Deutlichste hören zu lassen.

*For the stretching of the 5th and 4th fingers of the left hand in ascending (A) and of the 5th and 4th fingers of the right hand in descending (B.)[1]*

*The 20 exercises of this first part should be studied to begin with, at the rate of Nº 60 of the metronome to increase gradually to Nº 108. The double indication of the movement of the metronome at the beginning of each exercise should be thus understood.*

*The fingers should be well separated and raised so that each note be heard very distinctly.*



## Simple Prese

### A - Setze die richtigen Verbformen ein.

1. Andy ___________the family car.
 a) wash
 b) washes
 c) washs

2. Every morning my mother ___________at 6 o'clock.
 a) get up
 b) get ups
 c) gets up

3. Mr. Black ___________e-mails in the evenings.
 a) write
 b) writes
 c) writs

4. The girls ___________the shopping.
 a) dos
 b) does
 c) do

5. Mandy and Susan ___________films every weekend.
 a) watches
 b) watch
 c) watchs

 c) goes

7. Do you ___________milk in your tea?
 a) like
 b) liks
 c) likes

8. ___________I correct?
 a) Are
 b) Be
 c) Am
 d) Is

9. It ___________a beautiful day today.
 a) am
 b) are
 c) be
 d) is

10. John often ___________handball.
 a) play
 b) plays
 c) playes

**a)** $(3x-6)(x+4)=0$; $(x-11)(5x-20)=0$; $x(7x+35)=0$; $(9x-99)(8-x)=0$; $(5-10x)(9+3x)=0$

**b)** $(6x+18)(2x-14)=0$; $(24-8x)(30-6x)=0$; $(9x+9)(7x+21)=0$; $(12x-36)(33-11x)=0$; $(14+2x)(14-2x)=0$

**c)** $y(2y-5)=0$; $3z(12+5z)=0$; $(8x-12)x=0$; $(16+10y)7y=0$; $-z(35-7z)=0$

**3. a)** $x^2-7x=0$; $x^2+5x=0$; $4x-x^2=0$; $11x+x^2=0$

**c)** $5x^2-10x=0$; $2x^2+26x=0$; $18x-3x^2=0$; $35x+7x^2=0$

**e)** $5x^2-4x=0$; $10x^2+3x=0$; $18x^2+8x=0$; $2x^2-20x=0$

**g)** $3x^2+5x=0$; $7x^2-x=0$; $4x-11x^2=0$; $-3x-2x^2=0$

**b)** $x^2-9=0$; $y^2-64=0$; $25-x^2=0$; $49-x^2=0$

**d)** $6x^2-24=0$; $11z^2-11=0$; $40-10x^2=0$; $135-15x^2=0$

**f)** $x^2-0{,}04=0$; $x^2-1{,}96=0$; $y^2-\frac{9}{16}=0$; $\frac{25}{64}-x^2=0$

**h)** $\frac{1}{2}z^2-8=0$; $\frac{1}{10}x^2-2{,}5=0$; $\frac{1}{10}x^2-0{,}009=0$; $\frac{1}{3}x^2-3=0$

**4.** Bestimme die Lösungsmenge. Lösungsvariable ist x.

**a)** $(x-a)(x-7)=0$ **c)** $(x+r)\cdot(x+s)=0$ **e)** $(2x-r)(x-5)=0$

**b)** $(x+2)(x-p)=0$ **d)** $x(x-a)=0$ **f)** $(3x-c)(4x+c)=0$

# Was ist „Üben“?

„Repetitio est mater studiorum“

„Übung macht den Meister“

… etwas zum Erwerb einer Fertigkeit (z.B. quadratische Gleichungen mit Hilfe der p-q-Formel lösen können) wiederholt tun

Aber wie?

# Üben und Transfer , siehe auch [18]

Ziel des Übens:

- **Konsolidieren:** Fertigkeit sicher beherrschen
- **Flexibilisieren:** Fertigkeit **flexibel** anwenden können

Wie erreicht man diese Flexibilität?

Was bedeutet Flexibilität?

Ziel: Fähigkeit des Transfers. Bekanntes auf neue, unbekannte (verwandte) Situationen anwenden können

Wie viel Transfer muss Üben bereits enthalten??

# Automatisierendes, schematisches Üben:

**Löse die folgenden quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$**

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$x^2 + 22x + 85 = 0$

$x^2 + 16x + 15 = 0$

$x^2 - x - 56 = 0$

$x^2 + 5x - 66 = 0$

$x^2 + x = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x^2 + 14x + 24 = 0$

$x^2 + 20x + 51 = 0$

$x^2 - 12x - 64 = 0$

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$x^2 - 18x - 19 = 0$

$x^2 + 12x - 64 = 0$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

# Probleme beim schematischen Üben:

"In der Tat bemerkte fast jeder Lehrer nach einer gewissen Zeit, dass die Übungsideologie relativ wirkungslos ist. Ich erinnere mich an zahlreiche Klagen von Lehrern, die nicht verstehen konnten, warum ihre Schüler trotz "hunderter" Übungsaufgaben immer noch Fehler beim Termumformen oder Gleichungslösen machen. Manche Lehrer waren recht verzweifelt und suchten letztlich die Schuld bei den Schülern. Auf die Idee, dass das sture Üben selbst eine Ursache der Misserfolge sein könnte, kam eigentlich kaum einer. Es wird meist nämlich nicht bemerkt, dass das sture Üben auf die eigentlichen Fehlerursachen nicht explizit eingeht, dem Schüler somit wenig konstruktive Hilfen bietet, ja sogar falsche Denkweisen zementieren kann. Deshalb ist auch die Bereitschaft, von der Übungsideologie abzugehen, im allgemeinen gering, obwohl die Misserfolge gesehen werden. Vielfach werden die Misserfolge so umgedeutet, dass man noch zu wenig geübt hätte. Es werden weitere Übungsaufgaben gestellt - und damit wird die Sache oft noch schlimmer gemacht."

(aus Malle,G. , Didaktische Probleme der elementaren Algebra, 1993, S.22/23)

Außerdem: Überforderung, Unterforderung, Langeweile

# Bedeutung des Übens:

- Üben nimmt Großteil der Unterrichtszeit ein:
  Einführungsphasen - Übungsphasen im Verhältnis 1:3 bis 1:5

→ Phase des Übens bedarf großer Beachtung in didaktischen Konzeptionen!

→ zunehmende Aufmerksamkeit auf Üben und **Aufgabenkultur** in Mathematikdidaktik
(Aufgaben als entscheidendes didaktisches Instrument zur Gestaltung von Übungsphasen)

# Ansätze für „intelligentes“ Üben

- Operatives Üben
  - Variationsreiches, beziehungshaltiges Üben
  - ➢ **Aufgabenvariation**
- Produktives Üben
  - Verbindung von entdeckendem Lernen und Üben
  - ➢ **Strukturierte Päckchen**
- Offene Aufgaben

# Operatives Prinzip

- Piaget: „Denken ist vorgestelltes Handeln“
- Um ein Objekt zu erfassen, muss man damit umgehen (gedanklich operieren)
- „Die Aufgabe des Lehrers ist es, die jeweils untersuchten Objekte und das System der an ihnen ausführbaren Operationen deutlich werden zu lassen“ (Wittmann, 1981, S. 79)
- Die Eigenschaften, Beziehungen und Funktionen von Objekten werden erst unter transformierenden Operationen deutlich

# Beispiel:

- Objekt: „Flächeninhalt eines Rechtecks“
- Was kann ich damit tun/ Wie kann ich damit **gedanklich** operieren?
  - Wie groß ist der Flächeninhalt?
  - Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn sich beide Seiten verdoppeln? Eine Seite verdreifacht, …?
  - Welche Rechtecke gibt es zu einem gegebenen Flächeninhalt?
  - Welche Flächeninhalte sind möglich bei gegebenem Umfang? Wann ist der Flächeninhalt maximal?
  - In welchem Zusammenhang stehen Flächeninhalt und Volumen?
  - …

# Operatives Üben

- Mit „operativem Durcharbeiten“ bezeichnet Hans Aebli ein „variables, sinnbezogenes Üben, das der Vertiefung des Verständnisses dient, dessen Ziel noch nicht irgendeine Automatisierung ist“.
- Dabei soll das Verständnis durch Verändern der Situation in mehrere Richtungen gefördert werden.
- Typische Fragen sind „wie ist das, wenn…?“, „was bedeutet das…?“, „wie ändert sich das Ergebnis, wenn…?“, „wann bleibt es gleich?“

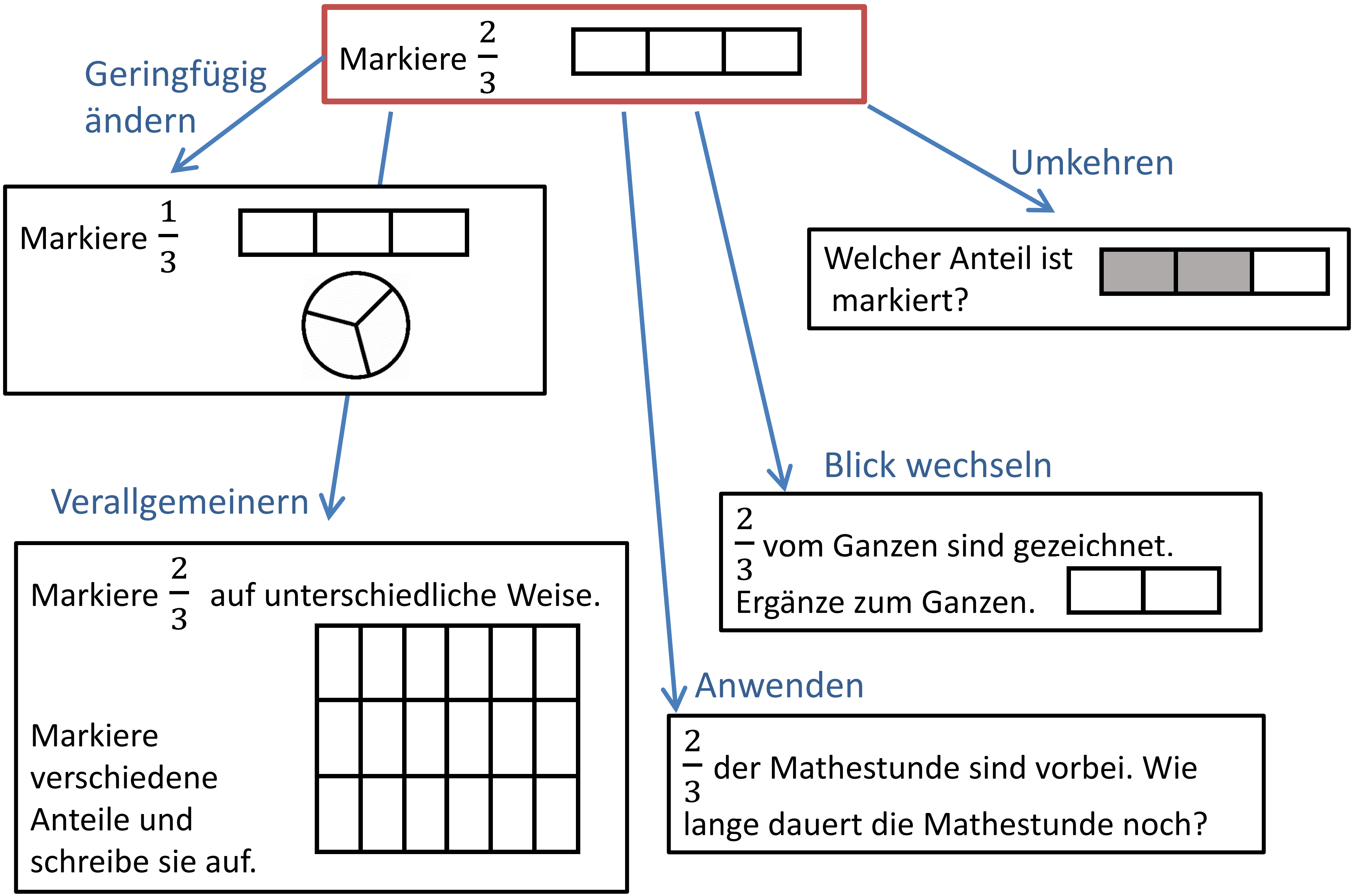
# Reversibilität und Kompositionsfähigkeit von Denkhandlungen

- Grundsätzlich können „Denkhandlungen“ reversibel (umkehrbar) und kompositionsfähig (zusammensetzbar) sein.
- Reversibilität und Kompositionsfähigkeit üben, z.B. :
  - **Objekt:** Flächeninhalt eines Rechtecks
  - **Standardfrage:** Berechne den Flächeninhalt eines Rechtecks der Länge 6cm und der Breite 4 cm.
  - **Denkrichtung umkehren:** Welche Länge und Breite kann ein Rechteck haben, dessen Flächeninhalt $24cm^2$ beträgt?
  - **Denkhandlungen zusammensetzen**: Welche Oberfläche hat ein Quader der Länge 6cm, der Breite 4cm und der Höhe 2cm?

# Operatives Üben, aber wie?

- Herausforderung: gute Aufgaben
- Wie findet man variationsreiche, beziehungshaltige Aufgaben?

# Strategien zum Aufgaben variieren



# Prinzip der Aufgabenvariation

- Geschickt arrangierte Aufgabensequenzen anstelle einzelner isolierter Einzelaufgaben
- Grundidee: Die Gegebenheiten der Aufgabenstellung durchvariiieren
- Ausgehend von einer „Initialaufgabe“ wird ein ganzes Feld erkundet

Addiere drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Was fällt Dir auf?

Geringfügig ändern

Addiere ***zwei*** aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Was fällt Dir auf?

Umkehren

***Stelle*** eine durch 3 teilbare natürliche Zahl als Summer dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ***dar***.

Verallgemeinern

Addiere ***ungerade viele*** aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Was fällt Dir auf?

Addiere drei ***gleichabständige*** natürliche Zahlen. Was fällt Dir auf?

Bedingungen ändern

Addiere drei aufeinanderfolgende ***Quadratzahlen***. Was fällt Dir auf?

Analogisieren

***Multipliziere*** drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Was fällt Dir auf?

# Aufgabenvariation

Lieber **eine** Aufgabe mit Variationen anstatt viele einzelne, unzusammenhängende Aufgaben

„Wenn man ein Problemfeld in dieser Weise von vielen verschiedenen Seiten beleuchtet und durchdringt, lernt man sicher mehr an mathematischem Denken und an kreativem Umgang mit Mathematik, als durch Abarbeiten voneinander isolierter kurzschrittig formulierter Aufgabenstellungen.“ (Ulm, 2011, S. 2)

# Aufgabenvariation im Unterricht

Nun wird niemand eine Stunde mit der Frage beginnen: „Wer hat ein Problem?“ bzw. „Wer weiß eine schöne Aufgabe?“; auch dann nicht, wenn klar ist, daß sich die Frage auf die aktuelle Unterrichtseinheit bezieht. Hingegen liegt es nahe, Aufforderungen solcher Art an gerade behandelte und gelöste Aufgaben anzuschließen und sie entsprechend zu formulieren, etwa „Wie können wir diese Aufgabe(n) abwandeln (verändern, variieren, umgestalten)?“ oder „Wer gibt uns eine ähnliche, eine verwandte Aufgabe?“.

Für ein Beispiel der Umsetzung im Unterricht siehe die Übungsaufgabe Nr. 11 zur Aufgabenvariation

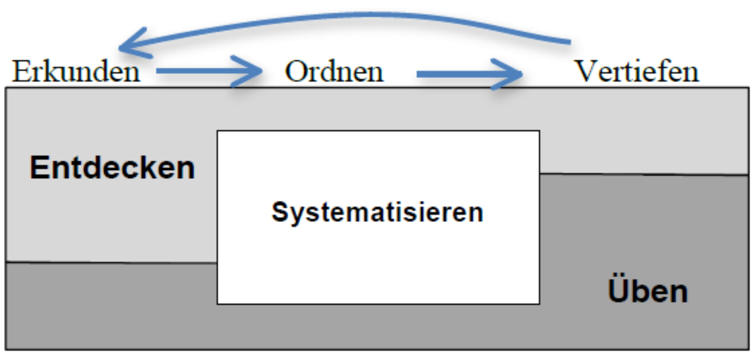
# Ansätze für „intelligentes“ Üben

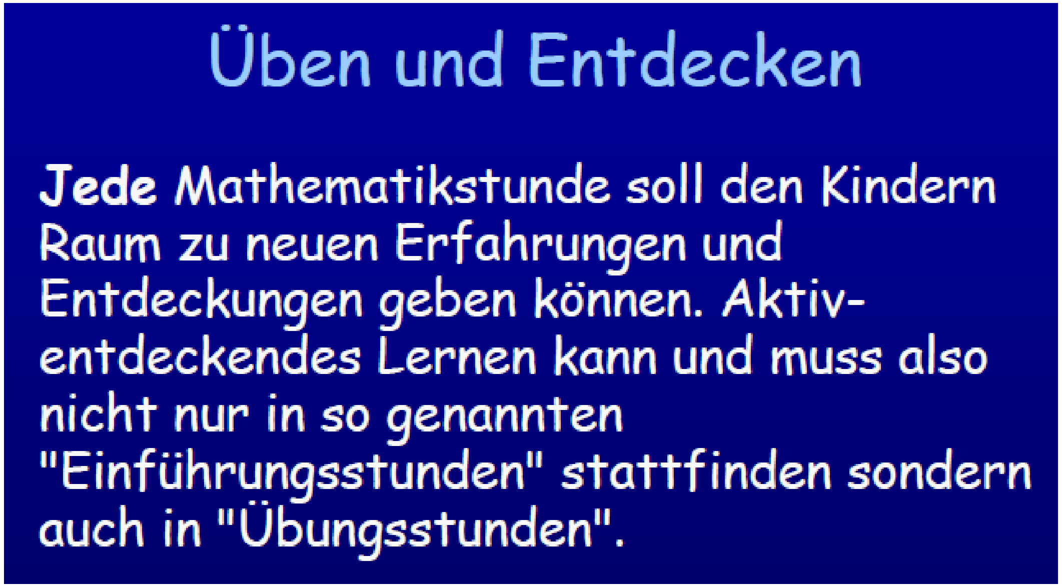
- Operatives Üben
  - Variationsreiches, beziehungshaltiges Üben
  - ➢ **Aufgabenvariation**
- Produktives Üben
  - Verbindung von entdeckendem Lernen und Üben
  - ➢ **Strukturierte Päckchen**
- Offene Aufgaben

# Was ist produktives Üben?

Aufgaben, die zum Trainieren von Fertigkeiten wichtig sind, können dennoch gleichzeitig anregen zum

- Probleme lösen (problemlösendes Üben)
- Muster erkennen (reflektierendes Üben)



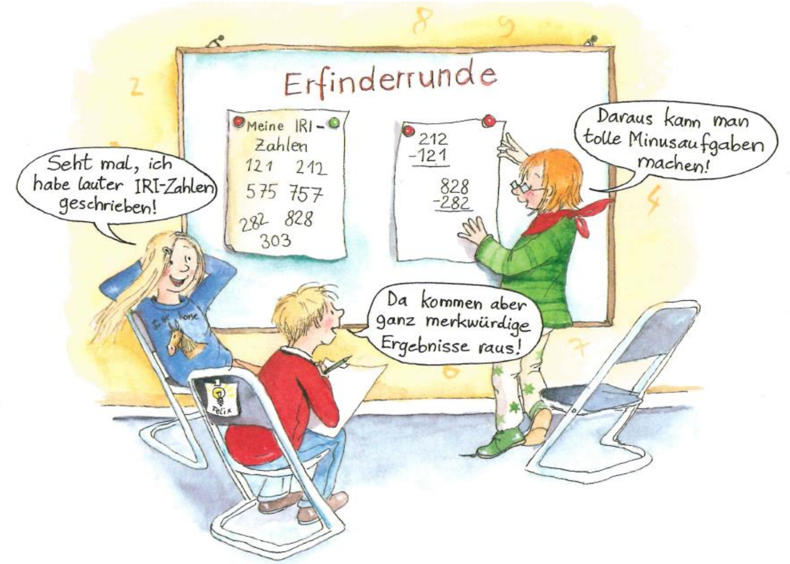
# Schriftliche Subtraktion unproduktiv:

$$\begin{array}{r} 627 \\ -\,401 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 766 \\ -\,234 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 644 \\ -\,520 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 633 \\ -\,103 \\ \hline \end{array}$$

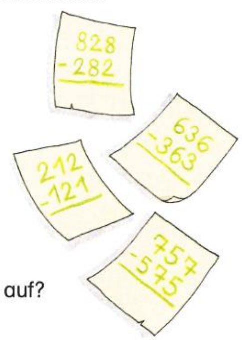
$$\begin{array}{r} 219 \\ -\,109 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 223 \\ -\,110 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 311 \\ -\,200 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 781 \\ -\,250 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 831 \\ -\,320 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 271 \\ -\,131 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 729 \\ -\,413 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 536 \\ -\,223 \\ \hline \end{array}$$

# Schriftliche Subtraktion produktiv:




1. a) Kannst du erklären warum Irina ihre Zahlen IRI-Zahlen genannt hat?
   b) Wie viele solcher Zahlen gibt es wohl? Überlege, schätze und probiere es aus.




2. a) Bilde selbst 10 bis 15 Minus-Aufgaben mit zusammengehörigen IRI-Zahlen. Schreibe sie auf kleine Kärtchen und rechne sie aus.
   b) Überlege, wie du deine Kärtchen sortieren kannst, und klebe die Aufgaben so geordnet auf. Warum hast du so sortiert?
   c) Sieh dir deine Ergebnisse noch einmal an. Fällt dir etwas auf?

3. Welche Aufgaben könnten noch zu diesen passen?

   a) 323 − 232   767 − 676   989 − 898    b) 424 − 242   757 − 575   979 − 797    c) 636 − 363 …

4. Kannst du erklären, wovon es abhängt, welches Ergebnis man herausbekommt?

Eine Fertigkeit wird geübt

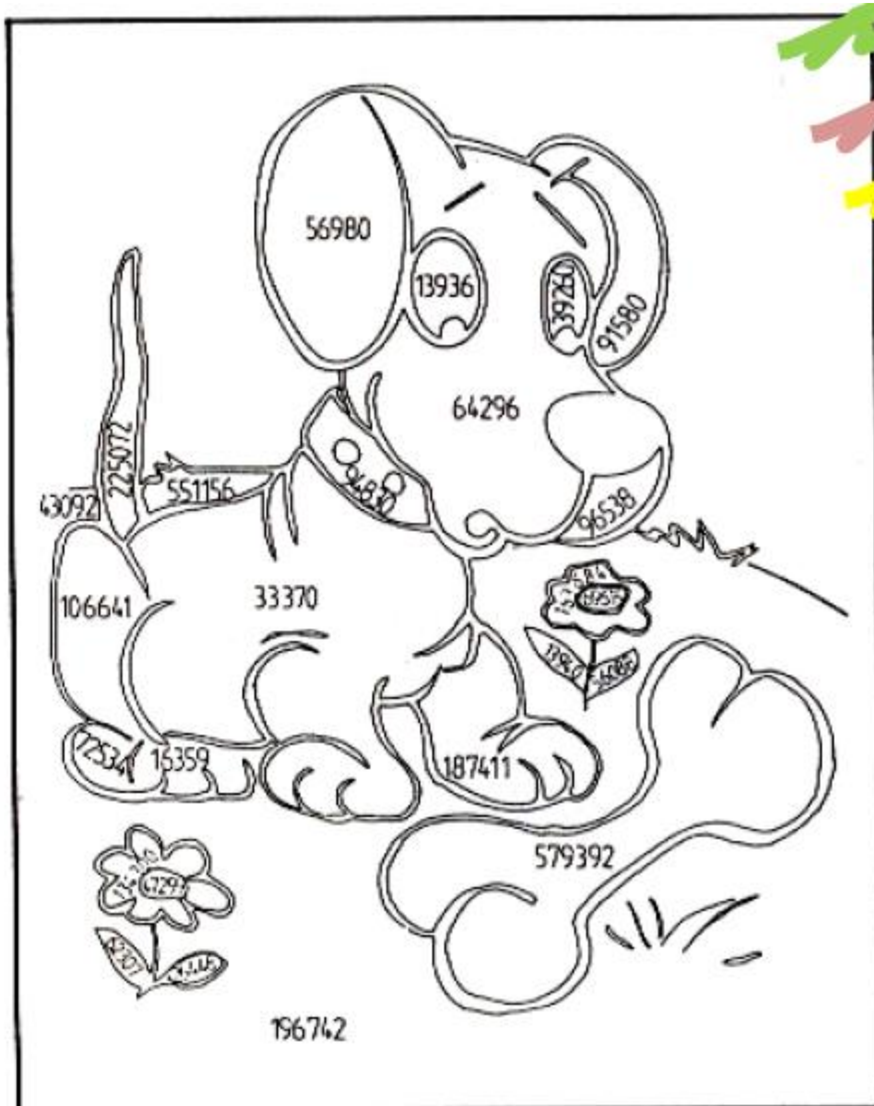
(schriftlich Subtrahieren)

und gleichzeitig eine mathematische Struktur entdeckt.

# Multiplikation unproduktiv

**Ausmalen von Bildern**

1. $407 \cdot 140 =$ dunkelbraun
2. $423 \cdot 152 =$ hellbraun
3. $104 \cdot 134 =$ gelb
4. $823 \cdot 704 =$ grau (Bleistift)
5. $235 \cdot 142 =$ hellbraun
6. $425 \cdot 316 =$ orange
7. $123 \cdot 867 =$ hellbraun
8. $232 \cdot 114 =$ dunkelgrün
9. $221 \cdot 315 =$ orange
10. $432 \cdot 521 =$ hellbraun
11. $542 \cdot 302 =$ rot
12. $123 \cdot 456 =$ hellgrün
13. $287 \cdot 653 =$ hellbraun
14. $302 \cdot 130 =$ gelb
15. $410 \cdot 340 =$ hellgrün
16. $661 \cdot 158 =$ hellbraun
17. $301 \cdot 207 =$ dunkelgrün
18. $322 \cdot 611 =$ hellgrün
19. $203 \cdot 233 =$ gelb
20. $380 \cdot 241 =$ dunkelbraun
21. $435 \cdot 218 =$ blau
22. $908 \cdot 607 =$ hellgrün
23. $314 \cdot 231 =$ hellbraun
24. $114 \cdot 378 =$ hellgrün
25. $123 \cdot 133 =$ hellbraun



# produktive Päckchen

Die Multiplikation wird geübt und gleichzeitig eine mathematische Struktur entdeckt.

Berechne und setze jeweils die Rechenreihen fort:

produktiv

a) $2 \cdot 5=$
b) $4 \cdot 10=$
c) $8 \cdot 20=$
d) $16 \cdot 40=$

a) $400 \cdot 2 =$
b) $200 \cdot 4=$
c) $100 \cdot 8=$
d) $50 \cdot 16=$

a) $100 \cdot 1600=$
b) $200 \cdot 800=$
c) $400 \cdot 400=$
d) …

Schreibe auf, was Dir auffällt. Verwende die Begriffe Faktor, Produkt, verdoppeln, halbieren.

## Aufgabe p-q - Formel

$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

(1) Löse folgende quadrat. Gleichungen

(a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(c) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(e) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(f) $x^2 + 7x + 12 = 0$

(2) Wie stehen die beiden Lösungen $x_1$ und $x_2$ mit $p$ und $q$ in Zusammenhang?

(3) Überprüfe deine Erkenntnis an folgenden Gleichungen.

(g) $x^2 + 8x + 15 = 0$

(h) $x^2 - 2x - 15 = 0$

(4) Löse folgende Gleichung ohne p-q-Formel

(i) $x^2 - 2x - 63 = 0$

(j) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(5) Beweise deine Erkenntnisse mit der p-q-Formel

Aufgabe p-q - Formel $x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

(1) Löse folgende quadrat. Gleichungen mit der p-q-Formel

beobachten

(a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$

(b) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x_1 = 1 ; x_2 = 2$

(c) $x^2 - 4x + 3 = 0$ $x_1 = 1 ; x_2 = 3$

(d) $x^2 - 4x + 4 = 0$ $x_1 = 2 ; x_2 = 2$

(e) $x^2 + 4x + 4 = 0$ $x_1 = -2 ; x_2 = -2$

(f) $x^2 + 7x + 12 = 0$ $x_1 = -3 ; x_2 = -4$

(2) Wie stehen die beiden Lösungen $x_1$ und $x_2$ mit p und q in Zusammenhang?

vermuten

Wie müssen $x_1$ und $x_2$ kombiniert werden, um p bzw. q zu erhalten?
Zusammenhang bei größeren Zahlen besser erkennbar? Tabelle?

(3) Überprüfe deine Erkenntnis an folgenden Gleichungen.

überprüfen

(g) $x^2 + 8x + 15 = 0$ $x_1 = -3 ; x_2 = -5$

(h) $x^2 - 2x - 15 = 0$ $x_1 = -3 ; x_2 = 5$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2) \\ q &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}}$$

(4) Löse folgende Gleichung ohne p-q-Formel

anwenden

(i) $x^2 - 2x - 63 = 0$ $x_1 = 9 ; x_2 = -7$

(j) $x^2 + 2x - 15 = 0$ $x_1 = -5 ; x_2 = 3$

beweisen

(5) Beweise deine Erkenntnis mit der p-q-Formel siehe Tafel

# Fazit

Die eben gezeigte Aufgabe ist „produktiv“, da neben dem Trainieren eines Kalküls (korrektes Anwenden der p-q-Formel) zusätzlich ein (subjektiv) neuer mathematischer Zusammenhang entdeckt werden kann, nämlich der Satz von Vieta.

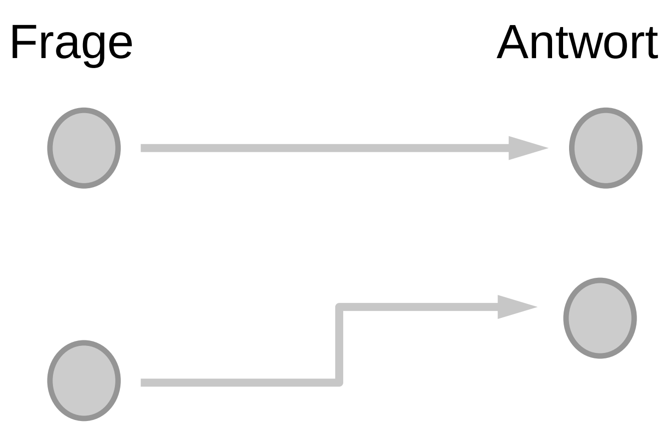
# Aufgabentypen

Wir unterscheiden folgende Aufgabentypen:

- Geschlossene Aufgaben
- Ergebnisoffene Aufgaben
- Lösungswegoffene Aufgaben

# Geschlossene Aufgaben

Eine geschlossene Aufgabe lässt sich meist mit einem bestimmten Standardverfahren lösen. D.h. der Lösungsweg ist vorgezeichnet. Dabei können die Lösungsschritte unterschiedlich komplex sein.




Beispielaufgaben

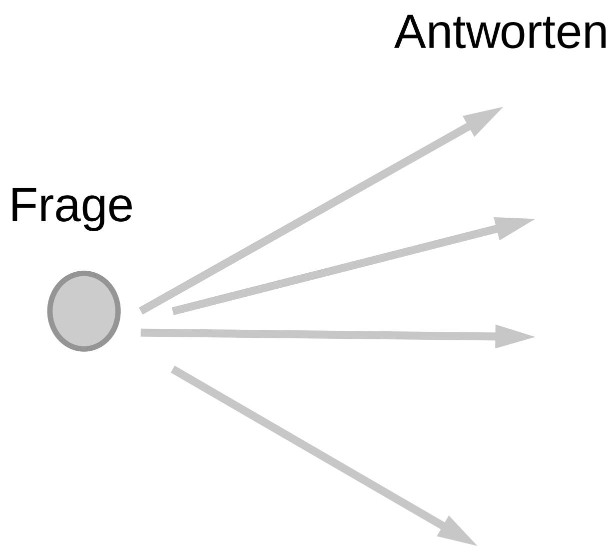
Löse mit der p-q-Formel:

$$x^2 + 2x + 7 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 8 = 7x + 13x^2$$

# Offene Aufgaben: ergebnisoffen

Eine offene Aufgabe lässt mehrere Lösungsmöglichkeiten zu. Dabei sind häufig verschiedene Lösungen auf unterschiedlichem Niveau möglich.

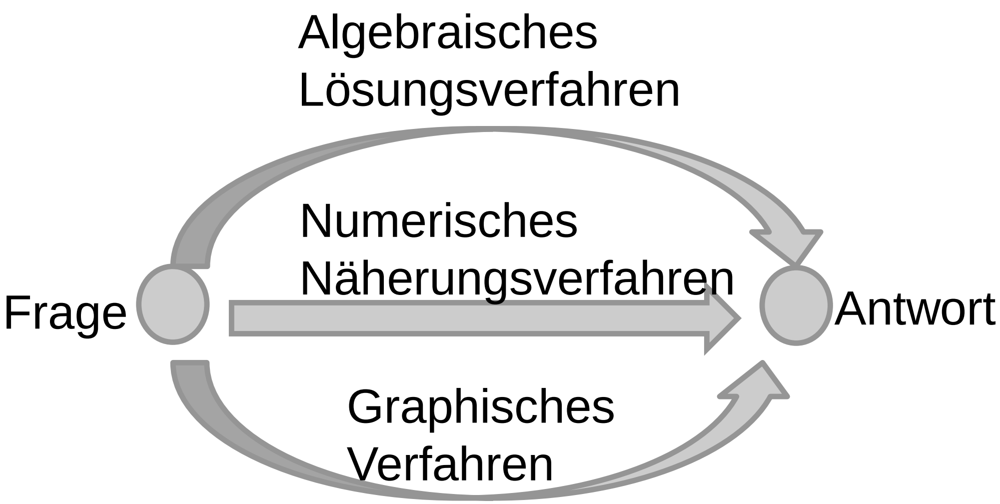



Beispielaufgabe:

Nenne mehrere quadratische Gleichungen mit den Lösungen $x_1=2$ und $x_2=3$.

# Offene Aufgaben: lösungswegoffen

Bei lösungswegoffenen Aufgaben sind unterschiedliche Lösungswege möglich, die zum selben Ergebnis führen.




Beispielaufgabe:

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Grundsätzlich sollten im Mathematikunterricht nicht nur geschlossene Aufgaben, mit denen meist ein bestimmtes Lösungsverfahren trainiert wird, sondern auch offene Aufgaben vorkommen. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, zwischen verschiedenen Lösungsverfahren begründet auszuwählen, und die Grenzen der möglichen Lösungsverfahren kennen lernen. Dies wird unter anderem durch offene Aufgaben gefördert.

# Literatur:


- [18] Winter, H. (1984). *Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht*. Mathematik lehren (2). S. 4-16. Verfügbar unter ILIAS.

- [19] Leuders, T. (2012). *Einüben oder Ausüben – Übekonzepte im Mathematikunterricht*. Pädagogik (12). Verfügbar unter ILIAS.

- [20] Leuders, T. (2014) *Entdeckendes Lernen – Produktives Üben*. In: Linneweber (Hrsg.): Fachdidaktik Mathematik. Zug: Klett & Balmer, S. 237 – 264. Verfügbar unter ILIAS.