Analysis I, Blatt 5

Gruppe 11
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Charlotte Rothhaar (Matr.-Nr. 4315016)
charlotte.rothhaar97@gmail.com

9. Dezember 2020

Aufgabe 17

(a) Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ absolut, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.
Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right|$$
$$\overset{n\geq 0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2}.$$

Aus den Koeffizienten des höchsten Grades der Polynome im Bruch ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Damit konvergiert die Folge nach dem Quotientenkriterium absolut, und nach Lemma 3.12.12 ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.
□

(b) Wir wenden das Leibnizkriterium für alternierend relle Reihen auf $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ an:

- Die Folge $\frac{1}{2n+1}$ ist eine Nullfolge, da sie Teilfolge der harmonischen Folge ist (welche bereits eine Nullfolge ist). ✓
- Es bleibt zu zeigen, dass $a_n := \frac{1}{2n+1}$ monoton fallend ist:

$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)+1} \leq \frac{1}{2n+1} \Rightarrow 2n+1 \leq 2n+3. \quad \checkmark$$

  Die Folge a_n ist also monoton fallend.

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ nach dem Leibnizkriterium.

Für die absolute Konvergenz verwenden wir das Minorantenkriterium:

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{n}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist jedoch die harmonische Reihe, welche divergiert.

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ nicht absolut.

$\square$

(c) Wir wenden das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{3n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^{3n-1}}$ an:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2(n+1)!}{(n+1!(n+1))} \cdot \frac{1}{2^{3(n+1)-1}}}{\frac{2n!}{n!n!} \cdot \frac{1}{2^{3n-1}}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)!}{(n+1)!(n+1)} \cdot \frac{1}{2^{3(n+1)-1}} \cdot \frac{n!n! \cdot 2^{3n-1}}{2n!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2) \cdot 2n!}{(n+1)n! \cdot (n+1)n! \cdot 2^{3n+2}} \cdot 2^{3n-1} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1) \cdot 2^{3n-1}}{(n+1)(n+1) \cdot 2^{3n} \cdot 2 \cdot 2} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{3n}}{(n+1) \cdot 2^{3n} \cdot 4} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{4(n+1)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n+1} \right| = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{3n-1}}$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

$\square$

Aufgabe 18

(a) Wir berechnen den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$ mithilfe von Satz 3.12.25. Damit ist

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} \\ &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{0} = \infty. \end{aligned}$$

(b) Wir erhalten für die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^4} x^n$ die Folge $a_n := \frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^4}$ und somit

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^4}}} \\ &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2^n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^4}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^4}} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{2^n}}} \\ &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^4}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(c) Hier erhalten wir für die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ die Folge $a_n := \frac{n!}{n^n}$.

Weiterhin nutzen wir die Stirling-Formel zur Approximation von $n!$ für große n:

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \tag{1}$$

Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}}{n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}{n}} \\
&= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} e \sqrt[2n]{2\pi n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} e \sqrt[2n]{2\pi} \sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

(i) $p(z) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i z^i,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0$

zu zeigen: Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert ein (komplexes) Polynom q mit Grad $d-1$, sodass $p(z) - p(\lambda) = (z-\lambda)q(z)$.

Beweis:
$p(z)$ hat die Form

$$p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Wir suchen

$$q(z) = b_{d-1} z^{d-1} + b_{d-2} z^{d-2} + \ldots + b_1 z + b_0$$

mit $q(z) = \frac{p(z)}{z-\lambda} - \frac{p(\lambda)}{z-\lambda}$.

Durch Polynomdivision ergibt sich

$$
\begin{aligned}
q(z) =&(a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0) : (z-\lambda) = a_d z^{d-1} + \ldots \\
&\underline{-(a_d z^d - \lambda a_{d-1} z^{d-1})} \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

Somit ist der Grad des entstehenden Polynoms $d-1$. Dies gilt ebenfalls für $p(\lambda)$. Auch bei Subtraktion entsteht ein Polynom vom Grad $d-1$. Somit existiert immer ein solches Polynom q.

(ii) **zu zeigen**: Ist das Polynom $p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ vom Grad d, so hat $p(z)$ höchstens d Nullstellen.

Beweis:
Sei λ_1 eine Nullstelle des Polynoms $p(z)$. Der Linearfaktor $(z - \lambda_1)$ lässt sich von $p(z)$ abspalten und wir erhalten

$$p(z) = (z - \lambda_1)(a_{d-1} z^{d-1} + a_{d-2} z^{d-2} + \ldots + a_1 z + a_0),$$

also nach Teilaufgabe (i) ein Restpolynom vom Grad $d-1$. Es lässt sich vom Polynom $p(z)$ also höchstens d-mal ein Linearfaktor abspalten. Jede Nullstelle wird durch mindestens einen der so entstandenen Linearfaktoren repräsentiert. Daher kann ein Polynom vom Grad d also maximal auch d Nullstellen besitzen.

(iii) Aus dem in Abbildung 1 dargestellten Schema lässt sich erkennen:

- a_d wird d-mal mit x_0 multipliziert, also $a_d {x_0}^d$
- a_{d-1} wird $d-1$-mal mit x_0 multipliziert, also $a_{d-1} {x_0}^{d-1}$
- $\vdots$
- a_0 wird 0-mal mit x_0 multipliziert, also $a_0 x^0 = a_0$.

	a_d	a_{d-1}	a_{d-2}	$\cdots$	a_0
x_0		$a_d \cdot x_0$	$a_{d-1}x_0 + a_d x_0^2$	$\cdots$	
	a_d	$a_{d-1} + a_d x_0$	$a_{d-2} + a_{d-1}x_0 + a_d x_0^2$	$\cdots$	$a_d x_0^d + \ldots + a_0 = p(x_0)$

Abbildung 1

Es ergibt sich $a_d {x_0}^d + a_{d-1} {x_0}^{d-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)$. Somit ist $p(x_0) = z$.

	a_d	a_{d-1}	$\cdots$	a_0
x_0		$a_d \cdot x_0$	$\cdots$	
	a_d	$a_{d-1} + a_d x_0$	$\cdots$	$p(x_0) = 0$

Abbildung 2

Wenn x_0 eine Nullstelle des Polynoms ist, erhalten wir nach dem in Abbildung 2 dargestellten Schema

$$q(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + p(x_0).$$

Damit ist

$$q(x) \cdot (x - x_0) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots = p(x).$$

Aufgabe 20

(i) **Behauptung**: $(s_k)_{k>0}$ muss eine Nullfolge sein, damit σ_n konvergiert.

Beweis: Wie wissen: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq N$.
Wir zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : \left|\frac{s_1+s_2+\ldots+s_m}{m}\right| < \varepsilon \ \forall m \geq M$.

Nach der Dreiecksungleichung gilt für $m > N$:

$$\left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_m}{m} - 0\right| \leq \left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N}{m}\right| + \left|\frac{s_{N+1} + s_{N+2} + \ldots + s_m}{m}\right|$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, ist $\forall \frac{\varepsilon}{2} \exists N \in \mathbb{N} : |\sigma_n - 0| = |\sigma_n| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N$.
Wir wählen $M > N$ und $\left|\frac{s_1+\ldots+s_N}{M}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $m \geq M$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left|\frac{s_1 + \ldots + s_m}{m}\right| &= \left|\frac{s_1 + \ldots + s_N + s_{N+1} + \ldots + s_m}{m}\right| \\
&\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \frac{|s_1 + \ldots + s_N|}{m} + \frac{|s_{N+1}| + \ldots + |s_m|}{m} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|s_{N+1}| + \ldots + |s_m|}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(m-N)\frac{\varepsilon}{2}}{m} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

(ii)

(iii) Ist $s_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ Cesaro-summierbar?

Partialsummen:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1-1=0\\
s_3 &= 1-1+1=1\\
&\vdots\\
s_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}=0\\
s_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}=1.
\end{aligned}
$$

Wir bilden $\sigma_n := \frac{1}{n}(s_1+s_2+\ldots+s_n)$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= 1\\
\sigma_2 &= \frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}\\
\sigma_3 &= \frac{1+0+1}{3}=\frac{2}{3}\\
&\vdots\\
\sigma_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} s_k = \frac{n}{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\\
\sigma_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} s_k = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{2n+2}{2(2n+2)} = \frac{2n+1}{2(2n+2)} + \frac{1}{2(2n+2)}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+2)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Also $\sigma_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ und damit ist der Cesaro-Grenzwert $\frac{1}{2}$.