Analysis I

Universität Freiburg, WS 20/21
Nadine Große

Skript - Version vom 22. Dezember 2020

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

1 Worum geht es?

Die Analysis entstand aus einer Vielzahl von Methoden, die versuchen Funktionen, die aus Anwendungen kommen, qualitativ und quantitativ zu verstehen, mit dem Ziel diesen einen theoretischen Unterbau zu geben. Solche Anwendungen kommen z.B. aus Modellen in der Physik, Biologie, Chemie oder Statistik/Stochastik. **Woche 1**

Insbesondere geht es bei analytischen Fragen zumeist um Funktionen auf Größen, die kontinuierliche Werte, wie die reellen Zahlen, annehmen können. Wichtige Fragen der Analysis sind dabei Änderungsverhalten von Funktionen, Approximation von Lösungen – insgesamt Grenzprozesse. Warum ist das relevant? In der realen Welt kann man solche kontinuierlichen Größen nicht beliebig genau messen, d.h. schon in den Messwerten hat man eine Näherung/Approximation und dann möchte man nicht nur sicherstellen, dass auch darauf angewendete Funktionen auf den Messwerten Werte nahe der Funktion des 'realen Wertes' annehmen, sondern wir hätten gerne auch quantitative Informationen zur Frage 'wie nah'.

Wir wollen verstehen warum, wie und wann diese Methoden funktionieren. Das 'Warum' gibt die Intuition, das 'Wie' die Methode zum Rechnen. Das 'Wann' erfordert eine Auseinandersetzung mit den Voraussetzungen, unter welchen die Methode funktioniert – wir werden beweisen, dass eine Methode in einem gegebenem Rahmen funktioniert/dass eine Aussage unter gewissen Voraussetzungen richtig ist.

Man kann sich natürlich fragen, wozu beweisen wir eigentlich Sachen? Zum einen zur Bestätigung einer Vermutung, die entweder empirisch gefunden wurde oder aus unserer Intuition resultiert und auch um auszuloten, worin die Grenzen unserer Methode liegen. Idealerweise helfen uns dann Erkenntnisse daraus, neue Zusammenhänge/Aussagen/Methoden zu finden.

In Analysis 1 geht es allerdings fast nur um Analysis in einer Variablen. Aber schon daran werden wir die wichtigsten Konzepte kennenlernen.

2 Erste Grundbegriffe

Hier geht es um erste Grundbegriffe, wie Mengen, Funktionen, Relationen, natürliche, ganze und rationale Zahlen. Die meisten dieser Begriffe und ihre Eigenschaften sind aus der Schule bekannt. Aber wir wollen Sie hier aus verschiedenen Gründen noch einmal betrachten: Einmal um Notationen/Schreibweisen festzuhalten. Aber auch, um einmal zu skizzieren, was man sich aus Sicht des Mathematikers eigentlich alles überlegen müsste, um die Begriffe einzuführen und ihre Eigenschaften, mit denen oft täglich arbeiten, wirklich logisch abzuleiten. D.h. nicht, dass wir jeden einzelnen Schritt ausführen werden, um von den natürlichen Zahlen zu den reellen Zahlen zu kommen, und alle Rechenregeln nachprüfen werden. Sondern es geht auch darum, in bekanntem Terrain mal zu sehen, wie man vorgehen und wichtige Grundlagen zu lernen.

2.1 Mengen

Als grundlegendes Objekt werden wir *Mengen* betrachten.

Für uns besteht eine Menge aus einer Ansammlung von Elementen.
Heißt die Menge X und ist x ein Element aus X, dann schreiben wir $x \in X$ (lese: x ist ein Element von X bzw. kurz: x ist in X). Insbesondere können wir immer für ein beliebiges y immer fragen, ob y ein Element unser Menge, hier X ist. Falls ja, ist $y \in X$, falls nein, schreiben wir $y \notin X$. Die Menge, die keine Elemente enthält, nennen wir *leere Menge* und schreiben dafür $\varnothing$. Für die Menge, die nur das Element a enthält, schreiben wir $\{a\}$; für die, die nur die Elemente a, b enthält, schreiben wir $\{a, b\}$; usw.

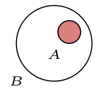
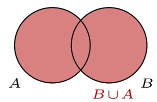
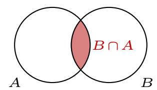
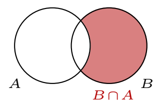
Eine Menge kann auch unendlich viele Elemente enthalten, z.B. kennen wir die Menge der natürlichen Zahlen, die wir mit $\mathbb{N}$ bezeichnen.
Eine weitere wichtige Schreibweise zur Beschreibung einer Menge lernen wir am Beispiel von $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$ kennen: Das ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die größer als fünf sind.

Auch $\{1, a, \{b, c\}\}$ ist zum Beispiel eine Menge. Sie enthält drei Elemente, nämlich 1, a und $\{b, c\}$. Das $\{b, c\}$ selbst auch eine Menge ist, ist kein Problem, wir haben nie gesagt, dass irgendein Objekt kein Element sein darf.

Sind X und Y Mengen. Wir nennen X eine Teilmenge von Y (geschrieben: $X \subset Y$), falls jedes Element von X auch ein Element von Y ist. Wir können so auch die Gleichheit von Mengen beschreiben. Zwei Mengen X, Y nennen wir *gleich* (kurz: $X = Y$), wenn $X \subset Y$ und $Y \subset X$ gilt.

Es gilt $X \subset X$ und $\varnothing \subset X$.

Im Folgenden listen wir noch ein paar wichtige Operationen mit Mengen auf.

Notation	Name	Definition	Anschauung
$A \subset B$	A ist *Teilmenge* von B	Jedes Element in A ist auch Element in B.	
$A = B$	die Mengen sind *gleich*	$A = B$, falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt.	
$A \cup B$	*Vereinigung* von A und B	$x \in A \cup B$, falls $x \in A$ <u>oder</u> $x \in B$ gilt.	
$A \cap B$	*Durchschnitt* von A und B	$x \in A \cap B$, falls $x \in A$ <u>und</u> $x \in B$ gilt.	
Falls $A \subset B$: $B \setminus A$	*Komplement* von A in B	$x \in B \setminus A$, falls $x \in B$ und $x \notin A$ gilt.	

Auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $B \setminus A$ sind wieder Mengen.
Mit diesen Operationen kann man schon verschiedene Mengengleichheiten finden. Wir schauen uns hier einmal ein solches Beispiel an und sehen wie man eine solche Mengengleichheit beweist.

Lemma 2.1.1. *Für Mengen A, B, C gilt*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beweis. Nach Definition der Gleichheit von Mengen müssen wir zeigen, dass sowohl $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ als auch $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ gilt.

Wir beginnen mit der ersten Behauptung: Sei dazu $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann muss $x \in A$ und $x \in B \cup C$ sein. Ist $x \in B$, dann ist $x \in A \cap B$ und somit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ist andererseis $x \notin B$, so muss wegen $x \in B \cup C$ dann $x \in C$ sein. Somit ist in diesem Fall $x \in A \cap C$ und somit auch $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Wir haben also $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sei nun $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Im Fall $x \in A \cap B$ muss $x \in A$ und $x \in B$ gelten und damit $x \in B \cup C$ sowie $x \in A \cap (B \cup C)$. Im Fall $x \notin A \cap B$ folgt $x \in A \cap C$ und somit $x \in A$ und $x \in C$. Wir haben also $x \in B \cup C$ und damit $x \in A \cap (B \cup C)$. □

Beispiel 2.1.2. (i) Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

Die leere Menge $\varnothing$ und die Menge selbst ist Teilmenge jeder Menge M, also gilt immer $\varnothing \subset \mathcal{P}(M)$ und $M \subset \mathcal{P}(M)$. Sei $M = \{a, b\}$. Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

(ii) Seien X, Y Mengen. Aus $a \in X$ und $b \in Y$ bilden wir ein neues Objekt (a, b), welches wir *geordnetes Paar* von a, b nennen. Dabei betrachten wir zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) als gleich, falls $a = c$ und $b = d$ gilt. Die Menge

$$X \times Y := \{(a, b) \mid a \in X, b \in Y\}$$

nennen wir *(kartesisches) Produkt* von X und Y.

Ist zum Beispiel $X = \{a\}$ und $Y = \{1, 3\}$, dann ist $X \times Y = \{(a, 1), (a, 3)\}$.

Russelsches Paradox Wir haben oben gesagt, dass wir von einem 'naiven Mengenbegriff' ausgehen, der von Georg Canter (1845-1918) eingeführt wurde. Das soll suggerieren, dass das in Wirklichkeit nicht so passt. Was meinen wir damit? Eigentlich sieht es doch nach einer guten Definition aus. Wir nennen eine Ansammlung von Elementen eine Menge und gehen davon aus, dass es auf die Frage, ob ein bestimmtes Element in dieser Menge liegt, es immer eine eindeutige Antwort wahr oder falsch gibt. Klingt eigentlich gut, führt aber zu überraschenden Widersprüchen, sogenannten Antinomien.

Ein solcher Widerspruch wurde von Bertrand Russel (1872-1970) gefunden: Nach unserer 'Definition' von Menge kann eine Menge sich auch prinzipiell selbst wieder als Element enthalten. Russel definiert nun die Menge R, die alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten, also $R:=\{A \text{ ist Menge} \mid A \notin A\}$. Wir fragen nun, ob $R \in R$ gilt? Falls ja, dann widerspricht es der Definition von R, da R ja nur Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Falls nein, dann widerspricht es aber auch der Definition von R. Das ist das Russelsche Paradox bzw. die Russelsche Antinomie*.

Es gibt Lösungen: Russell selbst überwand dies durch Einführung einer Typentheorie; in ihr hat eine Klasse ('Ersatz für die allgemeiner Menge') stets einen höheren Typ als ihre Elemente. Dann kann man gar nicht mehr frage, ob eine Klasse sich selbst enthält gar nicht mehr in dem Rahmen formulieren. Dort wäre R von oben, dann kein Beispiel einer Menge, sondern es wäre eine Klasse.

Unabhängig davon hat Zermelo die erste axiomatische Mengenlehre eingeführt. Eine Erweiterung davon, die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ist heute die Grundlage auf der wir aufbauen.

Wir können und wollen hier darauf nicht weiter eingehen. Was bedeutet das für uns: Wir bleiben bei unserem naiven Mengebegriff. Generell gilt endliche Mengen sind kein Problem. Erst bei Ansammlungen unendlich vieler Elemente können Probleme auftauchen. Wir gehen ab hier erst einmal immer davon aus, dass wir wissen, ob etwas eine Menge ist.

2.2 Funktionen

Definition 2.2.1. Seien X, Y, W, U beliebige Mengen. Eine *Abbildung/Funktion* f *von* X *nach* Y ist eine Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element aus Y zuordnet.

Notation: $f\colon X \to Y$, $x \mapsto f(x)$. Hierbei ist $f(x)$ das Element aus Y, was durch f dem Element $x \in X$ zugeordnet wird.
Die Menge X heißt *Definitionsbereich von* f und wird auch mit $\mathrm{dom}(f)$† bezeichnet.
Die Menge

$$\mathrm{im}(f):=\{y \in Y \mid \exists x \in X\colon y = f(x)\}$$

ist das *Bild von* f.
Die Menge

$$\mathrm{graph}(f):=\{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

heißt *Graph von* f.
Sei $A \subset X$. Wir setzen $f(A):=\{f(a) \mid a \in A\}$. Sei $B \subset Y$. Dann ist

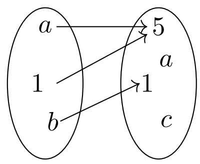
$$f^{-1}(B):=\{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

das *Urbild von* B *unter* f.

*https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie
†dom - kommt vom englischen Wort *domain*

Zwei Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon W \to U$ heißen *gleich* (wir schreiben $f = g$, falls $X = W$, $Y = U$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Beispiel 2.2.2. (i) Wenn der Definitions- und Wertebereich sehr klein sind, kann man einen Funktion auch wieder mittels Mengendiagrammen visualisieren:



Das ist die Funktion $f\colon \{a, 1, b\} \to \{5, a, 1, c\}$ mit $f(a) = f(1) = 5$ und $f(b) = 1$.

(ii) Auf jeder Menge X gibt es die *Identität* $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $x \mapsto x$.

(iii) Sei $X \subset Y$. Dann nennen wir $\iota\colon X \to Y$, $x \mapsto x$ *Inklusionsabbildung*.

(iv) Sei X eine Menge. Eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge* in X und wird zumeist als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben, wobei $a_n{:=}a(n)$ ist.

Zum Beispiel ist für die Folge der Quadratzahlen $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Hier ist $X = \mathbb{N}$ und $a_n = n^2$.

(v) *Hintereinanderausführung/Komposition von Abbildungen*: Haben wir zwei Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, wo der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g ist, dann können wir durch Hintereinanderausführen eine neue Abbildung $g \circ f\colon X \to Z$ als $x \mapsto g(f(x))$ definieren.

Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt

Lemma 2.2.3 (Assoziativität der Hintereinanderausführung)**.** *Für $h\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ und $f\colon Z \to U$ gilt $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.*

Beweis. Nach Definition der Gleichheit von Abbildungen ist zu zeigen, dass die Definitions- und Wertebereiche übereinstimmen und dass $(f\circ(g\circ h))(x) = ((f\circ g)\circ h)(x)$ für alle $x \in \operatorname{dom} h$ gilt: Beide Funktionen bilden X nach U ab. Für die Gleichheit der Bilder lösen wir jeweils die linke und rechte Seite nach Definition der Hintereinanderausführung auf:

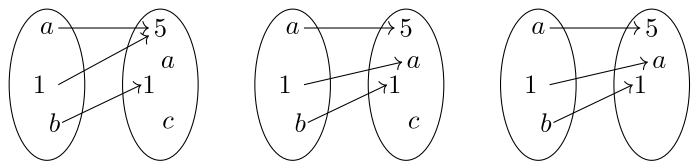
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) =& f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))\\ ((f \circ g) \circ h)(x) =& (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))).\end{aligned}$$ □

Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

Definition 2.2.4. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f *surjektiv*, wenn $\mathrm{im}(f) = Y$ gilt, und *injektiv*, wenn $f(x) \neq f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ folgt. Wir nennen f *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel 2.2.5. (i) Von einer Zuordnung, die Gästen einer Feier ihren Sitzplatz zuweist (zuordnet), wollen wir normalerweise, dass dies eine injektive Funktion ist, da niemand den Sitzplatz mit jemand anderes teilen will.

(ii)



Die linke Funktion ist weder injektiv noch surjektiv; die mittlere ist injektiv, aber nicht surjektiv; die rechte ist sogar bijektiv.

Die Definitionen kann man umformulieren:
Injektiv bedeutet, dass es zu jedem Element im Bild der Abbildung es höchstens ein Urbild gibt (also höchstens ein Element des Definitionsbereich, was dahin abbildet).
Surjektiv bedeutet, dass es zu jedem Element im Wertebereich mindestens ein Urbild gibt.

Zusammenfassend bedeutet also bijektiv, dass es zu jedem Element im Wertebereich genau ein Urbild gibt. Das heißt, wir können im Falle einer bijektiven Abbildung eine Abbildung konstruieren, die jedem Element im Wertebereich sein Urbild zuordnet. Diese Funktion heißt dann *Umkehrfunktion* und wir konstruieren diese noch einmal ganz explizit im Beweis von folgender Aussage:

Satz 2.2.6. *Sei $f\colon X \to Y$ bijektiv. Dann gibt es ein $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.*

Beweis. Wir konstruieren die Funktion g wie folgt: Sei $y \in Y$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dieses x ist sogar eindeutig: Angenommen es gibt ein $x' \in X$ mit $x' \neq x$ und $f(x') = y$, dann wäre $f(x') = f(x)$ und f wäre somit nicht injektiv. Das ist ein Widerspruch, also muss x eindeutig sein. Wir setzen $g(y) = x$ und haben somit $g\colon Y \to X$ definiert. Weiterhin gilt: $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, also $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. □

Wir nennen g *Umkehrfunktion von* f und schreiben $g = f^{-1}$.*

2.3 Natürliche Zahlen und Induktion

Auch wenn wir natürliche Zahlen, deren Eigenschaften und die Rechenregeln darauf schon lange kennen, wollen wir an dieser Stelle uns trotzdem einmal anschauen, wie man mathematisch die natürlichen Zahlen beschreiben kann und welche Eigenschaften man ableiten kann.

*Auch in der Bezeichnung des Urbild einer Menge unter einer Abbildung f kommt f^{-1} vor.

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$. Jetzt müssen wir diese Menge natürlich noch irgendwie (und möglichst eindeutig) beschreiben. Dazu verwenden wir das Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen.

Peanosches Axiomensystem der natürlichen Zahlen.

(1) Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl, d.h. $0 \in \mathbb{N}$.

(2) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $\nu(n)$, die *Nachfolger* von n genannt wird.

(3) Die Zahl 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(4) Aus $\nu(n) = \nu(m)$ folgt, $n = m$.

(5) Enthält eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ die Zahl 0 und mit jedem $n \in M$ auch ihren Nachfolger $\nu(n)$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Benennung der natürlichen Zahlen: 0, $1{:=}\nu(0)$, $2{:=}\nu(1) = \nu(\nu(0))$, ...

Für uns soll also auch Null eine natürliche Zahl sein. Es ist einfach eine Geschmacksfrage, ob die natürlichen Zahlen bei 0 oder 1 beginnen sollen.

Was man sich immer fragen sollte, ist ob die Definition/die Axiome, das tun, was man eigentlich vorhat. D.h. beschreiben Sie wirklich die natürlichen Zahlen und nur die natürlichen Zahlen? Oder sind die Axiome wirklich widerspruchsfrei? Darum kümmern wir uns hier nicht.

Aus den Peanoschen Axiomen kann man direkt das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ableiten:

Satz 2.3.1 (Beweisverfahren der vollständigen Induktion)**.** *Gegeben sei eine Folge von Aussagen $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es möge gelten:*

1 (Induktionsanfang) $A(0)$ ist wahr.

2 (Induktionsschritt) Falls $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Sei M die Menge aller natürlichen Zahlen n, so dass $A(n)$ war ist. Nach dem Induktionsanfang enthält M die Zahl 0 und nach dem Induktionsschritt mit jedem $n \in M$ auch ihren Nachfolger $\nu(n)$. Damit ist nach dem 5. Peanoschen Axiom $M = \mathbb{N}$. □

Um ein erstes Beispiel der Anwendung von vollständiger Induktion zu sehen, nehmen wir mal kurz wir wissen schon, wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert und welche Rechenregeln da gelten. Wie das geht, kennen Sie natürlich aus der Schule. Aber strenggenommen haben wir es hier noch nicht definiert, das kommt danach.

Satz 2.3.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*[*]

$$2\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1). \tag{2.1}$$

Beweis. Wir wollen diese Aussage mittels vollständiger Induktion beweisen.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung gleich 0 und die linke ist $2\sum_{i=0}^{0} i = 2 \cdot 0 = 0$.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass (2.1) für $n = m$ stimmt und wollen nun die analoge Gleichung für $n = m + 1$ zeigen:

$$2\sum_{i=0}^{m+1} i = 2\left(\sum_{i=0}^{m} i + m + 1\right) = m(m+1) + 2(m+1) = (m+1)(m+2) \qquad \square$$

Eine weitere wichtige Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion ist die *rekursive Definition* – Als Rekursion (vom Lateinischem recurrere ‚zurücklaufen') bezeichnet man einen Vorgang, dass Regeln auf ein Objekt, das sie selbst erzeugt haben, von neuem angewandt werden.

Wir können die erstes Beispiel eine Folge rekursiv definieren: $a_{n+1} = 2a_n$ mit $a_0 = 1$. Nach dem Satz zur vollständigen Induktion ist a_n damit für alle n definiert ($A(n)$ wäre hier die Aussage 'a_n ist definiert'). Die Folge hier beschreibt exponentielles Wachstum und man sieht direkt $a_n = 2^n$.

Als weiteres Beispiel einer rekursiven Defintion definieren wir ausgehend von den Peanoschen Axiomen die arithmetischen Grundoperation $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{N}$ wie folgt:

$$n + 0 := n, \;\; n + \nu(m) := \nu(n+m)$$
$$n \cdot 0 := 0, \;\; n \cdot \nu(m) := n \cdot m + n.$$

Bei gegebenem $n \in \mathbb{N}$ sind somit die Ausdrücke $n+m$ und $n \cdot m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert. Wir schreiben oft bei Verwendung von Variablen das Multiplikationszeichen $\cdot$ nicht mit, also $mn := m \cdot n$.

Da jetzt Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen definiert sind, kann man nun Eigenschaften dieser Operationen finden. Da wir natürlich wissen, wie man mit natürlichen Zahlen operiert, ist uns natürlich klar, was uns hier erwartet - z.B. 'Summanden kann man vertauschen, die Summe bleibt gleich'. Wir nehmen ab jetzt einfach ohne Beweis direkt an, dann wir wissen wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert und welche Regeln da gelten (Die Beweise laufen auch über vollständige Induktion).

Es gibt verschiedene Abwandlungen der vollständigen Induktion. Wir wollen hier noch zwei wichtige Versionen. Zum Formulieren braucht man $\leq$-Ordnung auf den natürlichen

[*] Summenzeichen: Für eine Folge a_n sei $\sum_{i=k}^{n} a_i := a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$. In unserem Beispiel ist $a_i = i$.

Zahlen, die wir zwar aus dem Leben kennen, aber hier noch nicht definiert haben, weshalb wir die beiden Sätze hier auch noch nicht beweisen können.*

Satz 2.3.3 (Beweisverfahren der vollständigen Induktion II)**.** *Gegeben sei eine Folge von Aussagen $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es möge gelten:*

1 (Induktionsanfang) $A(0)$ ist wahr.

2 (Induktionsschritt) Falls $A(k)$ für alle $0 \leq k \leq n$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Satz 2.3.4 (Beweisverfahren der vollständigen Induktion III)**.** *Gegeben sei eine Folge von Aussagen $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Es möge gelten:*

1 (Induktionsanfang) $A(n_0)$ ist wahr.

2 (Induktionsschritt) Falls $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Beispiel 2.3.5. Die *Fibonaccifolge*† ist rekursiv definiert als $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ und $a_0 = a_1 = 1$. Nach dem letzten Satz ist damit a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert (als Aussage $A(n)$ wählen wir die Aussage 'a_n ist definiert'). Die ersten Glieder der Fibonaccifolge sind $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

2.4 Relationen

Von den natürlichen Zahlen wollen wir zu den (erst einmal nichtnegative) rationalen Zahlen kommen. Im allgemeinen schreibt man nichtnegative rationale Zahlen als einen Bruch zweier natürlichen Zahlen $\frac{a}{b}$, wobei wir natürlich nicht die Null teilen dürfen. Wenn man nicht schon vorher weiß, was rationale Zahlen sind, was sie bedeuten, ist das erst einmal nur eine Schreibweise für ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen $(a, b) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ und so wäre zum Beispiel $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ verschieden. Da wir Pizzastücke vor Augen haben, wollen wir das natürlich nicht. Deshalb definiert man, wann $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gleich sein sollen, nämlich wenn $ac = bd$ gilt.

Das führt auf den Begriff der Relation:

Definition 2.4.1. Sei X eine Menge. Eine *Relation* R ist eine Teilmenge von $X \times X$. Für $(x, y) \in R$ schreibt man auch oft $x \sim_R y$ bzw. wenn aus dem Kontext klar ist, um welche Relation es sich handelt, auch nur $x \sim y$.
Eine Relation heißt

*Gefahr eines Zirkelschluss: Eigentlich versucht man zu vermeiden, Aussagen zu benutzen, bevor man Sie bewiesen hat. Einfach weil man sonst sehr aufpassen muss, dass man für den Beweis einer Aussage A nicht Aussage B verwendet, für deren Beweis man schon A verwendet hat. Das wäre ein Zirkelschluss und sagt nichts, darüber aus, ob Aussage A richtig ist.

†`https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge`

(i) *reflexiv*, falls $x \sim x$ für alle $x \in X$ ist.

(ii) *symmetrisch*, falls aus $x \sim y$ auch $y \sim x$ folgt.

(iii) *antisymmetrisch*, falls aus $x \sim y$ und $y \sim x$ folgt, dass $x = y$ gilt.

(iv) *transitiv*, falls aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt, dass $x \sim z$ gilt.

(v) *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(vi) *Ordnung* bzw. *Ordnungsrelation*, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. In diesem Fall heißt $(X, \sim_R)$ eine *geordnete Menge*. Ist weiterhin $x \sim y$ oder $y \sim x$ für alle $x, y \in X$, dann nennt die Ordnung *total*.

Beispiel 2.4.2. Nach Übungsaufgabe 3(ii) gibt es für jede natürliche Zahl n ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass entweder $n = 2m$ (n ist *gerade*) oder $n = 2m + 1$ (n ist *ungerade* gilt. Wir definieren auf $\mathbb{N}$ eine Relation, wie folgt:

$$a \sim b, \text{falls beide Zahlen gerade oder beide Zahlen ungerade sind.}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation.

Was können Äquivalenzrelationen? Die Motivation zur Definition der nichtnegativen rationalen Zahlen gibt eine Relation, die sogar eine Äquivalenzrelation ist (Übungsaufgabe).

Hat man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M so bezeichnet man für jedes $x \in M$

$$[x] := \{y \in M \mid x \sim y\}$$

als *Äquivalenzklasse* von x modulo $\sim$. Die Menge der Äquivalenzklassen von M modulo $\sim$ bezeichnen wir mit $M/\sim$ und wir nennen x *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[x]$. Ist z.B. $x \sim y$, dann gilt $[x] = [y]$ (Diese Gleichheit benutzt schon, dass $\sim$ symmetrisch ist!) und x und y sind beides Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse.

Wenn wir für rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ schreiben, meinen wir also in Wirklichkeit die Äquivalenzklasse $[(a, b)]$.

Eine *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ einer Menge M ist eine Teilmenge $\mathcal{I}$ der Potenzmenge von M, also $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(M)$, so dass es für jedes Element $x \in M$ genau ein $A \subset \mathcal{I}$ mit $x \in A$ gibt.

Satz 2.4.3. *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, dann ist $M/\sim$ eine Zerlegung von M.*

Bevor wir den Satz beweisen – ein einfaches Beispiel einer Äquivalenzrelation auf der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ wäre: $a \sim b$ genau dann, wenn $a = b$ oder $\{1, 2\} = \{a, b\}$ gilt. Dann ist $[1] = [2] = \{1, 2\}$ und $[3] = \{3\}$, $M/\sim = \{[1], [3]\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Beweis. Nach Definition ist $M/\sim$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M. Sei nun $x \in M$, dann ist $x \in [x]$ wegen der Reflexivität von $\sim$. Es bleibt zu zeigen, dass aus $x \in [y]$ auch $[x] = [y]$ folgt: Da $x \in [y]$ ist, gilt $y \sim x$ und wegen der Symmetrie auch $x \sim y$. Wir zeigen als erstes, dass $[x] \subset [y]$ gilt. Dazu sei $z \in [x]$ und damit $x \sim z$. Aus der Transitivität von $\sim$ folgt $y \sim z$. Also ist $z \in [y]$ und damit $[x] \subset [y]$.

Um $[y] \subset [x]$ zu zeigen, sei $z \in [y]$, also $y \sim z$. Mit $x \sim y$ und der Transitivität folgt $x \sim z$. Damit ist $z \in [x]$ und somit $[y] \subset [x]$. Insgesamt haben wir also $[x] = [y]$ gezeigt und somit ist $M/\sim$ eine Zerlegung von M.* □

Beispiel 2.4.4 (ganze Zahlen)**.** Um auch negative Zahlen einzuführen gibt es verschiedene Möglichkeiten, wir wählen eine Möglichkeit über eine Relation auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Die Idee hierbei ist, dass $(a, 0)$ die natürliche Zahl a darstellen soll und $(0, a)$ ihr Negatives. Ein (a, b) soll dann die ganze Zahl '$a - b$' repräsentieren. D.h. wir wollen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die folgende Relation:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ auf } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ falls } a + d = c + d \text{ gilt.}$$

Auch hier kann man direkt überprüfen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Wir setzen $\mathbb{Z}{:=}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ und schreiben $-a{:=}[(0, a)]$.

Natürlich wollen wir auch ganze Zahlen addieren und multiplizieren können. Wie definiert man diese Operationen hier in diesem Kontext (selbstverständlich, so dass das sie das tun, was wir gewohnt sind)?

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, ([(a, b)], [(c, d)]) &\mapsto [(a, b)] + [(c, d)]{:=}[(a + c, b + d)] \\ \cdot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, ([(a, b)], [(c, d)]) &\mapsto [(a, b)] \cdot [(c, d)]{:=}[(bd + ac, ad + bc)] \end{aligned}$$

Wie kommt man darauf am Beispiel der Addition? Da wir ja Erfahrung mit dem Rechnen von ganzen Zahlen haben, wissen wir was wir erwarten würden: $[(a, b)] + [(c, d)]$ sollte der Zahl $a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$ entsprechen und somit gleich $[(a + c, b + d)]$ sein.

Ist das eine wohldefinierte Abbildung? Dazu erst einmal: wohldefiniert - was heißt das? Wenn wir uns die Definition der Abbildungen oben anschauen, dann fällt auf, dass wir direkt den Repräsentanten der Äquivalenzklasse nutzen. Es könnte also theoretisch passieren, dass für $[(a, b)] = [(a', b')]$ und $[(c, d)] = [(c', d')]$ <u>nicht</u> $[(a + c, b + d)] = [(a+c, b+d)]$ gilt. Das wäre nicht schlecht, weil dann die Addition oben, gar nicht auf den Äquivalenzklassen definiert wäre, sondern von der Wahl des Repräsentanten abhängig wäre. Deshalb muss man in solchen Situationen die Wohldefiniertheit überprüfen. Sei

*Es ist immer gut am Ende eines Beweises mal zu schauen, ob man eigentlich alle Voraussetzungen/Annahmen der zu beweisenden Aussage verwendet hat (Also hier alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.) Falls nicht, gibt es zwei Möglichkeiten. Vielleicht hat man einen Fehler im Beweis oder man braucht gar nicht alle Annahmen und hat einen Satz gezeigt, der in Wirklichkeit unter allgemeineren Bedingungen gilt. Natürlich muss, nur weil man eine Voraussetzung im Beweis verwendet, diese nicht unbedingt nötig sein – aber es gibt einen Anhaltspunkt. Wenn man wirklich zeigen will, dass eine bestimmte Voraussetzung nötig ist, muss man ein Beispiel finden, wo alle anderen Voraussetzungen der Aussage außer der gerade betrachteten erfüllt sind, aber die Aussage falsch ist.

also $[(a,b)] = [(a',b')]$ und $[(c,d)] = [(c',d')]$. Dann gilt $a+b' = a'+b$ und $c+d' = c'+d$. Also gilt $a+c+b'+d' = b+d+a'+c'$ und somit $[(a+c, b+d)] = [(a+c, b+d)]$. Analog überlegt man es sich für die Multiplikation.

Beispiel 2.4.5 (rationale Zahlen)**.** Auf $\{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid y \neq 0\}$ definieren wir, wie oben angedacht, die Relation $(x,y) \sim (x',y')$ falls $xy' = x'y$. Dann kann man überprüfen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir setzen

$$\mathbb{Q} := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \neq 0\} / \sim$$

mit $(x,y) \sim (x',y')$ falls $xy' = x'y$ gilt. Wir schreiben für $[(x,y)] \in \mathbb{Q}$ auch $\frac{x}{y}$.

Wie auch bei ganzen Zahlen, kann man sich wieder überlegen, was die Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen sein sollte. Ab sofort nehmen wir an, dass wir dass alles gemacht haben und damit auch rechnen können.

Mehr zu den Eigenschaften der rationalen Zahlen und der Addition/Multiplikation darauf im nächsten Abschnitt.

Ordnungsrelationen Nach Definition 2.4.1 ist eine Ordnung eine reflexive, transitive, antisymmetrische Relation $\sim$ auf einer Menge M. Falls für zwei Elemente $x, y \in M$ auch $x \sim y$ oder $y \sim x$ gilt, heißt die Ordnung total.

Der Name kommt in Anlehnung an die $\leq$-Relation (d.h. $x \sim y$ falls $x \leq y$) auf den natürlichen, ganzen, rationalen, reellen Zahlen. Die $<$-Relation ist in diesem Sinne keine Ordnung, da sie nicht reflexiv ist.

Wie würden wir $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ definieren? Auf $\mathbb{Q}$ gibt es eine totale Ordnung: Seien $a, b \in Q$. Wir setzen $a \geq b$, falls es $c \in \mathbb{Q}$ mit $c = \frac{m}{n}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $a + c = b$ gilt. Man überprüft direkt, das es sich hier um eine totale Ordnung handelt.

Ist $a \leq 0$, dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ und $c = \frac{m}{n}$, so dass $a + c = 0$ gilt. Damit ist $0 + c = -a$ und es folgt $0 \leq -a$.

Falls $a \geq b$ aber $a \neq b$ ist, schreiben wir auch $a > b$ bzw. $b < a$. Mit dieser Schreibweise kann man dann sehen: Ist $a < 0$, also $a \leq 0$ und $a \neq 0$, dann ist $0 \leq -a$ und $-a \neq 0$, also auch $0 < -a$.

Aus der Antisymmetrie von $\leq$ folgt, dass für jede rationale Zahl x entweder $x < 0$ (wir nennen x *negativ*), $x = 0$ oder $x > 0$ (wir nennen x *positiv*) gilt.

Definition 2.4.6. Für $x \in \mathbb{Q}$ definieren wir den *Betrag* von x durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Lemma 2.4.7. *Für $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$a \leq |a| \tag{2.2}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{2.3}$$

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \tag{2.4}$$

Beweis. (2.2): Sei $a \geq 0$. Dann gilt $|a| = a$, also insbesondere auch $a \leq |a|$. Sei nun $a < 0$. Dann ist $|a| = -a$ und $-a > 0$ und damit nach Transitivität $a < 0 < -a$, also $a \leq |a| = -a$.
(2.3): Übungsaufgabe 4
(2.4): Aus $|a| = |a+b+(-b)| \leq |a+b|+|-b| = |a+b|+|b|$ folgt $|a|-|b| \leq |a+b|$. Ganz analog sieht man $|b|-|a| \leq |a+b|$. Da $||a|-|b||$ gleich $|a|-|b|$ oder gleich $|b|-|a||$ ist, folgt die Behauptung. □

2.5 Körper

Die Menge der rationalen Zahlen mit der Addition und Multiplikation ist ein Körper:

Definition 2.5.1. Ein Menge $\mathbb{K}$ mit einer Addition $+\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $(a,b)\mapsto a+b$ und einer Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b$ heißt *Körper*, falls

(a) *Assoziativgesetz:*
$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

(b) *Kommutativgesetz:*
$$a+b = b+a$$
$$a\cdot b = b\cdot a$$

(c) *Neutrales Element:* Es gibt Zahlen $0\in\mathbb{K}$ und $1\in\mathbb{K}$ mit $1\neq 0$, so dass für alle $a\in\mathbb{K}$ gilt:
$$a+0 = a$$
$$a\cdot 1 = a$$

(d) *Inverses Element:* Zu jedem $a\in\mathbb{K}$ gibt es Lösungen $x,y\in\mathbb{K}$ der Gleichungen
$$a+x = 0$$
$$a\cdot y = 1 \text{ falls } a\neq 0$$

(e) *Distributivgesetz:*
$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

Die ganzen Zahlen bilden z.B. keinen Körper, da 2 bzgl. der Multiplikation kein inverses Element hat. Dazu führt man ja die rationalen Zahlen ein, damit 2 mit $\frac{1}{2}$ ein solches multiplikatives Inverses hat.

Aber die Menge der rationalen Zahlen ist nicht der einzige Körper. Auch die Menge der reellen Zahlen ist z.B. ein Körper. Ein anderer Körper ist $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$ mit der Addition und Multiplikation gegeben durch: $0+0 = 1+1 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$ und $0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 0\cdot 1 = 0$, $1\cdot 1 = 1$.

Wegen der Assoziativität kann man $a+b+c := (a+b)+c = a+(b+c)$ bzw. $abc := (ab)c = a(bc)$ ohne das man festlegen muss, in welcher Reihenfolge die Operationen ausgeführt werden.

Für das inverse Element zu $a \in \mathbb{K}$ bzgl. der Addition schreiben wir $-a$ und falls $a \neq 0$ für das bzgl. der Multiplikation a^{-1}.

Aus den Körperaxiomen leiten sich einige Eigenschaften und Rechenregeln ab, die damit insbesondere auch für rationale Zahlen gelten, da diese ein Körper sind. Hier ein paar Beispiele:

Lemma 2.5.2. *In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt für alle $a, b, c, p, q \in \mathbb{K}$:*

(i) Das neutrale Element der Addition ist eindeutig, d.h. erfüllen 0_1 und 0_2 (c), dann gilt $0_1 = 0_2$.

(ii) Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig.

(iii) Zu einem $a \in \mathbb{K}$ sind die inversen Elemente zu Addition und Multiplikation eindeutig.

(iv) $-(-a) = a$

(v) Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$ und aus $pc = qc$ mit $c \neq 0$ folgt $p = q$.

(vi) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$

Beweis. (i) $0_1 \overset{(c)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(b)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{(c)}{=} 0_2$.
(ii) analog zu (i)
(iii) Wir überprüfen das hier nur für die Addition, der Fall der Multiplikation geht analog: seien a_1 und a_2 inverse zu a bzgl. der Addition, d.h. es gilt $a + a_1 = 0$ und $a + a_2 = 0$. Dann gilt.

$$a_1 \overset{(c)}{=} a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) \overset{(a)}{=} (a_1 + a) + a_2 \overset{(b)}{=} (a + a_1) + a_2 = 0 + a_2 \overset{(b)}{=} a_2 + 0 \overset{(c)}{=} a_2$$

(iv) $-a$ erfüllte $a + (-a) = 0$, $-(-a)$ erfüllt $-a + (-(-a)) = 0$. Damit ist

$$-(-a) \overset{(c)}{=} -(-a) + 0 = -(-a) + (a + (-a)) \overset{(a),(b)}{=} a + (-a + (-(-a))) = a + 0 \overset{(c)}{=} a.$$

(v) +(vi) zum Selbstprobieren □

Definition 2.5.3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit einer totalen Ordnung $\leq$. Wir schreiben $a < b$, falls $a \leq b$ und $a \neq b$ gilt. Falls zusätzlich für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\text{aus } a < b \text{ folgt } a + c < b + c \text{ und aus } 0 < a \text{ und } 0 < b \text{ folgt } 0 < ab,$$

dann nennen wir $\mathbb{K}$ einen *angeordneten Körper*. Für einen angeordneten Körper wird der Betrag durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

definiert.

Falls für einen angeordneten Körper zusätzlich gilt, dass es

$$\text{zu jedem } x \in \mathbb{K} \text{ es ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq x \text{ gibt,} \qquad \text{(Archimedisches Axiom)}$$

nennen wir $\mathbb{K}$ einen *archimedisch angeordneter Körper.*

Die rationalen Zahlen sind ein archimedisch angeordneter Körper.

2.6 In Richtung der reellen Zahlen

Die schrittweise Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den ganzen und dann rationalen Zahlen, kann man auch als Erweiterung sehen, welche Gleichungen dann lösbar werden, z.B. $2 + x = 1$ (ganze Zahlen), $2x = 1$ (rationale Zahlen). Nun wollen wir uns $x^2 = 2$ widmen. Wir sehen als erstes, dass diese Gleichung nicht in den rationalen Zahlen lösbar ist. **Woche 2**

Lemma 2.6.1. *Für kein $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x^2 = 2$.*

Ist n gerade, dann auch n^2, da $n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2)$ gilt. Analog sieht man, dass für n ungerade auch n^2 ungerade ist.

Beweis. Wir führen hier einen Beweis durch Widerspruch: Sei also $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Da wenn x eine Lösung von $x^2 = 2$ auch $-x$ die Gleichung $(-x)^2 = 2$ erfüllt, können wir annehmen, dass x positiv, also $p, q \in \mathbb{N}$ ist. Aus $x^2 = 2$ folgt, $p^2 = 2q^2$.

Weiterhin kann man durch wiederholtes Kürzen annehmen, dass wir p, q so gewählt haben, dass p, q nicht beide gleichzeitig gerade sind. Wir haben also, dass $p^2 = 2q^2$ gerade ist und damit auch p gerade ist. D.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p = 2m$. Dann ist $p^2 = 4m^2$ und somit $q^2 = 2m^2$. Nun folgt, aber wie eben, dass dann auch p gerade ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass p und q nicht beide gerade sind. □

Auf der anderen Seite glaubt man, dass man sich der 'Lösung' von $x^2 = 2$ zumindest in den rationalen Zahlen 'annähern' kann - wie kommen wir darauf? Haben wir ein Quadrat der Seitenlänge a, so ist der Flächeninhalt a^2. Wir nähern uns diesem Quadrat durch Rechtecke mit rationaler Seitenlänge an und Flächeninhalt 2 an: Dazu wählen wir uns eine Startseitenlänge $x_0 \in \mathbb{Q}$ mit $x_0 > 0$. Damit das Rechteck Flächeninhalt 2 hat, muss die zweite Seite Länge $y_0 = \frac{2}{x_0}$ haben. Da im allgemeinen $x_0 \neq \frac{2}{x_n}$ ist, bilden wir als nächstes ein Rechteck mit dem Mittelwert $x_1 := \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_n}\right)$ als eine der beiden Seitenlängen. Dann ist die andere Seitenlänge $y_1 = \frac{2}{x_0}$. Man kann sich nun überlegen, dass die Differenz der Seitenlängen zum zweiten Rechteck hin kleiner geworden ist. Durch Wiederholen dieser Prozedur erhält man eine Folge x_n und man glaubt anschaulich (vgl. auch Übungsaufgabe), dass die zugehörige Folge von Rechtecken sich der Seitenlänge des gesuchten Quadrates immer mehr annähert, vgl. Abbildung 2.1.
Da wir mit einem rationalen x_0 starten, sind so auch x_1, x_2, ... wieder rational.
Hier erst einmal die Definition der Folge von x_n für $x^2 = c$ mit $c > 0$.

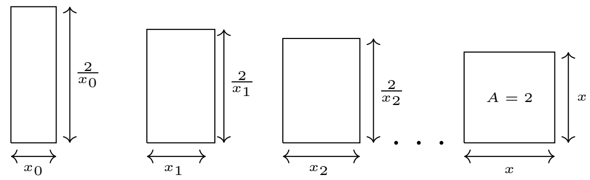


Abbildung 2.1: 'Näherung' eines Quadrates mit Flächeninhalt 2 durch eine Folge von Rechtecken mit rationaler Seitenlänge.

Definition 2.6.2. Sei $c \in \mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Zu gebenem Startwert $x_0 \in \mathbb{Q}_+$ definieren wir die *Heron-Folge* rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right).$$

Die resultierende Seitenlänge wollen wir dann als Lösung von $x^2 = c$ betrachten. Natürlich müssen wir dieses 'Annähern' dafür genauer fassen. das führt auf den Begriff der Konvergenz einer Folge im nächsten Abschnitt.

Damit werden wir dann auch die reellen Zahlen formal einführen, nämlich als Zahlen, die durch eine rationale Folge 'angenähert' werden. Wir verraten schon mal, dass auch die reellen Zahlen ein archimedisch angeordneter Körper ist.

3 Folgen

3.1 Konvergenz und erste Eigenschaften

In Beispiel 2.2.2 hatten wir Folgen in einer Menge X definiert: Eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge* in X und wird zumeist als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben, wobei $a_n{:=}a(n)$ ist.

Ist $X = \mathbb{Q}$, so sagen wir zu einer Folge in $\mathbb{Q}$ auch *rationale Folge* (Analog für natürliche, ganze, ... Folgen).
Um wirklich zu fassen, was wir meinen, wenn sich eine Folge von Zahlen einer anderen Zahl annähert, führen wir den Begriff der Konvergenz ein. Hier erst einmal nur für rationale Folge, doch die Definition für reelle Folgen ist ganz analog.

Definition 3.1.1 (Konvergenz von (rationalen) Folgen)**.** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ *konvergiert für* $n \to \infty$ *gegen* $a \in \mathbb{Q}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Die Zahl a heißt *Grenzwert* der Folge und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*. Wir schreiben kurz $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Eine Folge, die gegen Null konvergiert, nennen wir $(a_n)_n$ *Nullfolge*.

Eine erste naheliegende Frage: Ist es richtig von dem Grenzwert einer Folge zu reden? D.h. falls die Folge konvergiert, gibt es dann wirklich nur einen Grenzwert? Falls ja, sagt man der Grenzwert ist eindeutig; falls nein, dürfte man korrekterweise nicht von 'dem Grenzwert' sondern nur von 'einem Grenzwert' der Folge reden.
Rein von der Anschauung ist es naheliegend, dass der Grenzwert, wenn die Folge überhaupt konvergent ist, auch eindeutig ist. Das versuchen wir im Folgenden zu zeigen:

Satz 3.1.2 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist der Grenzwert eindeutig.*

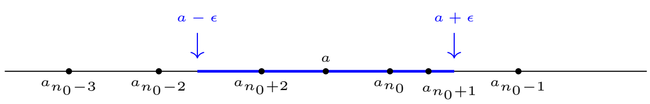


Abbildung 3.1: a_n konvergiert gegen a, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt (welches von ϵ abhängen wird), so dass ab n_0 alle Folgenglieder im blauen Intervall von $a - \epsilon$ bis $a + \epsilon$ liegen.

Beweis. Da die Folge konvergent ist, existiert ein Grenzwert a. Sei auch b Grenzwert der Folge. Wir müssen zeigen, dass $a = b$ ist.

Dazu schätzen wir $|a - b|$ ab:

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b|.$$

Da nach Grenzwertdefinition es für jedes $\epsilon > 0$ es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gibt, folgt $|a - b| < 2\epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $a = b$. $\square$

Bevor wir uns Beispiele anschauen bemerken wir noch, dass man um die obige Grenzwertdefinition hinzuschreiben ein angeordneter Körper genügen würde, da wir dann die Ordnung $<$ und den Betrag hätten. D.h. analog konvergiert eine Folge in $\mathbb{K}$, für einen angeordneten Körper $\mathbb{K}$, falls man in obiger Definition alle $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{K}$ ersetzt. So wird dann auch später die Konvergenz reeller Zahlen definiert.

Beispiel 3.1.3. (i) Die Folge bestehend aus $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)_{n>0}$ nennt man *harmonische Folge*. Wir wollen zeigen, dass a_n eine Nullfolge ist: Sei dazu $\epsilon > 0$. Da $\mathbb{Q}$ ein archimedisch angeordneter Körper ist, gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{2}{\epsilon}$. Damit gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

(ii) Die *konstante Folge* $a_n = a$ konvergiert gegen a, da für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \geq 0$ direkt $|a_n - a| = 0 < \epsilon$ gilt.

(iii) (Geometrische Folge) Für $q \in \mathbb{Q}$ mit $|q| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (Übungsaufgabe).

(iv) Die Folge $a_n = (-1)^n$, d.h. $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$, ist nicht konvergent: Wir führen hier einen *Beweis durch Widerspruch*, d.h. wir nehmen an, dass die Aussage nicht gilt und versuchen, dann einen Widerspruch zu kommen. Dann musste die Aussage also wahr sein.

Dazu nehmen wir an, dass a_n konvergent ist, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für ein a sei. Dann muss es für $\epsilon = 1 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$ geben. Damit haben wir

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2,$$

was ein Widerspruch ist.

Bevor wir zu weiteren Eigenschaften, Beispielen, Anwendungen... von Folgen kommen, bemerken wir, dass um zu überprüfen, ob eine Folge konvergiert wir schon wissen müssen, was der Grenzwert ist. Das ist irgendwie unbefriedigend, weil wir den Grenzwert erst einmal raten müssten. Es wäre gut, wenn wir irgendwie auch so wenigstens rausfinden würden, ob eine Folge überhaupt konvergiert, ohne das Wissen des Grenzwertes zu nutzen.

Dazu werden uns (jedenfalls dann in den reellen Zahlen) Cauchyfolgen helfen:

Definition 3.1.4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Folge. Dann ist a_n eine *Cauchyfolge*, falls für alle $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$ es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.

Satz 3.1.5. *Jede konvergente rationale Folge ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert a. Sei $\epsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Damit gilt für alle $n, m \geq n_0$ nach Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Beispiel 3.1.6. Sei $c \in \mathbb{Q}_+$ und $x_0 \in \mathbb{Q}_+$. Die zugehörige Heron-Folge x_n, vgl. Definition 2.6.2, ist eine Cauchyfolge (Übungsaufgabe).

Wenn man nun schon mal glaubt, dass wenn diese Heron-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert, der Grenzwert auch wirklich eine Lösung von $x^2 = c$ ist, sehen wir, dass zumindest für $c = 2$ diese Cauchyfolge nicht in $\mathbb{Q}$ konvergieren kann (da $x^2 = 2$ keine rationale Lösung hat).

Beispiel 3.1.7 (Dezimalbruchfolge)**.** Sei $(b_n)_n$ eine Folge mit $b_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Wir setzen $a_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{10^i}$, also $a_n = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n$ wenn man sich die b_i als Ziffern der Zahl a_n vorstellt. Dann ist die Folge $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge:

Für $n > m$ gilt

$$|a_n - a_m| = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{b_i}{10^i} \leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{10}{10^i} = 10 \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{10^i}$$

Es gilt allgemein für beliebige $q \in \mathbb{R}$, dass $(1 + q + q^2 + \ldots + q^k)(1 - q) = 1 - q^{k+1}$ und damit für $q \neq 1$:

$$\sum_{i=m+1}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{m} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{q^{m+1} - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bei uns ist $q = \frac{1}{10}$. Damit ist q^n eine geometrische Folge und damit nach Beispiel 3.1.3 eine Nullfolge. Damit gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|q^n| < \frac{(1-q)}{2\cdot 10}\epsilon$, und es gilt für alle $n, m \geq n_0$ mit $n > m$

$$|a_n - a_m| = 10 \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{10^i} = 10 \frac{q^{m+1} - q^{n+1}}{1 - q} < \frac{1}{1 - q} \left(\frac{1 - q}{2}\epsilon + \frac{1 - q}{2}\epsilon \right) = \epsilon.$$

Der Fall $n < m$ geht analog und für $n = m$ ist $|a_n - a_m| = 0$.

Als weitere mögliche Eigenschaft einer Folge lernen wir Beschränktheit kennen:

Definition 3.1.8 (Beschränktheit von Folgen.)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *beschränkt*, falls es ein $C > 0$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Eine Folge heißt *von oben beschränkt* bzw. *von unten beschränkt*, falls es ein $C > 0$ mit $a_n \leq C$ bzw. $a_n \geq -C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Lemma 3.1.9. *Jede konvergente Folge und jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gibt es für $\epsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ist nach Dreiecksungleichung $|a_n| < |a| + 1$ für alle $n \geq n_0$. Wir setzen C als das Maximum von $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|$ und $|a| + 1$. Dann gilt $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist beschränkt.

Sei nun a_n eine Cauchyfolge. Dann gibt es für $\epsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < 1$ für alle für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Insbesondere können wir $m = n_0$ wählen. Der Rest des Beweises geht dann analog wie zum Fall der konvergenten Folge von oben. □

Konstruktion reeller Zahlen Wenn wir an das Beispiel der Heron-Folge zurückdenken, vgl. Definition 2.6.2, welche anschaulich eine Lösung von $x^2 = 2$ annähert, würden wir gerne diese Folge benutzen, um die positive Lösung von $x^2 = 2$ zu definieren.

Auch bei unserem Beispiel der Dezimalbruchfolge würden wir uns den Grenzwert gerne als den (potenziell) unendlich Dezimalbruch vorstellen (z.B. wird $0,1234512345\ldots$ angenähert durch die Folge, die diesen Bruch nach der n.ten Kommastelle abschneidet.)

Das heißt wir wollen 'potenziell neue Zahlen' durch Cauchyfolgen definieren und die rationalen Zahlen, die wir schon kennen, könnten konstanten Folgen entsprechen. Da muss man aber natürlich vorsichtig sein, weil verschiedene Folgen, den gleichen Grenzwert haben können. Deshalb werden wir auf der Menge der rationalen Cauchyfolgen eine Relation einführen, die modellieren soll, dass zwei Cauchyfolgen den gleichen Grenzwert haben (auch wenn dieser Grenzwert, dann selbst vielleicht nicht rational ist):

Sei
$$C := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ rationale Folge} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge in } \mathbb{Q}\}.$$

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$. Dann setzen wir $(a_n) \sim (b_n)$, falls die Folge $(c_n := b_n - a_n)_n$ gegen 0 konvergiert. Man überprüft direkt, dass $\sim$ auf C eine Äquivalenzrelation ist. Wir definieren die reellen Zahlen als

$$\mathbb{R} := C/\sim .$$

Die reellen Zahlen sollen ja eigentlich eine Erweiterung der reellen Zahlen sein, d.h. $\mathbb{Q}$ soll eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein. So wie wir das hier eingeführt haben ist, dass erst einmal nicht so. Aber die Abbildung

$$i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \mapsto [(x)_n]$$

ist injektiv, und so können wir $\mathbb{Q}$ mit $i(\mathbb{Q})$ identifizieren.

Bis jetzt ist $\mathbb{R}$ erst einmal nur als abstrakte Menge definiert. Wir hatten aber behauptet, dass $\mathbb{R}$ sogar ein archimedisch angeordneter Körper sein wird. D.h. wir brauchen auf alle Fälle eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$. Diese soll natürlich auf $\mathbb{Q}$ (wenn identifiziert mit $i(\mathbb{Q})$) der Addition und Multiplikation entsprechen, die wir schon kennen.

Wir definieren

$$[(a_n)_n] + [(b_n)_n] := [(a_n + b_n)_n], \quad [(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n] := [(a_n \cdot b_n)_n]$$

Wohldefiniertheit der Abbildungen? Hier ist die Frage, ob die Abbildungen wirklich wieder in $\mathbb{R}$ abbilden (D.h. sind die Bildfolgen $(a_n + b_n)_n$ und $(a_n \cdot b_n)_n$ wirklich wieder Cauchyfolgen.) und ist die Definition unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklasse. Das impliziert dann insbesondere, dass die Addition auf $i(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ mit der auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. All das kann man direkt nachprüfen, wir beschränken uns hier als Beispiel auf

Lemma 3.1.10. *Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, so ist auch $(a_n b_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Es gilt

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |(a_n - a_m) b_n + a_m (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| \cdot |b_n| + |a_m| \cdot |b_n - b_m|.$$

Da a_n, b_n eine Cauchyfolge ist, sind die Folgen nach Satz 3.1.9 beschränkt. D.h. es gibt $C_1, C_2 > 0$ mit $|a_n| < C_1$ und $|b_n| < C_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da a_n Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{1}{2C_2}\epsilon$ für alle $n, m \geq n_1$. Analog gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b_m| < \frac{1}{2C_1}\epsilon$ für alle $n, m \geq n_2$. Wir setzen n_0 das Maximum von n_1 und n_2.

Dann gilt für alle $n, m \geq n_0$:

$$|a_n b_n - a_m b_m| \leq |a_n - a_m| \cdot |b_n| + |a_m| \cdot |b_n - b_m| < \frac{1}{2C_2}\epsilon C_2 + \frac{1}{2C_1}\epsilon C_1 = \epsilon \qquad \square$$

Nun haben wir eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$. Als Ordnungsrelation definieren wir $[(a_n)_n] \leq [(b_n)_n]$, falls $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$ oder falls es eine Cauchyfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n > 0$ und $a_n + c_n = b_n$ für alle $n \geq n_0$.* Man kann direkt überprüfen, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ ist, die auf $\mathbb{Q}$ unserem Standard-$\leq$ entspricht.

Mit dieser Addition, Multiplikation und einer Ordnungsrelation $\leq$, die analog zu der in $\mathbb{Q}$ definiert ist, kann man Schritt für Schritt nachprüfen, dass $\mathbb{R}$ wirkich ein archimedisch angeordneter Körper ist. Ab sofort nehmen wir an, dass wir die zugehörigen Rechenregeln kennen.

Die Definition des Grenzwertes einer rellen Folge ist nun ganz analog der rationalen, d.h.: Eine relle Folge $(a_n)_n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Alle Eigenschaften von konvergenten Folgen, die wir bis jetzt betrachtet haben, wie z.B. Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 3.1.2), dass jede konvergent Folge eine Cauchyfolge

*Im ersten Moment denkt man vielleicht, dass man auch (äquivalent) definieren könnte: $[(a_n)_n] \leq [(b_n)_n]$, falls es eine Cauchyfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n \geq 0$ und $a_n + c_n = b_n$ für alle $n \geq n_0$.

Aber da muss aufpassen: Z.B. Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = -\frac{1}{n}$. Dann ist $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$ (das wäre die $0 \in \mathbb{R}$), aber es gäbe eine solche Cauchyfolge c_n, wie eben gefordert, nicht.

ist (Satz 3.1.5) und dass jede konvergente Folge oder Cauchyfolge beschränkt ist (Satz 3.1.9), gilt mit genau den gleichen Beweisen auch für reelle Zahlen.

Was haben wir durch die Konstruktion der reellen Zahlen auf diese Art und Weise gegenüber den rationalen Zahlen gewonnen?

Jede reelle Cauchyfolge konvergiert in den reellen Zahlen.

Somit konvergiert auch unsere Dezimalbruchfolge aus Beispiel 3.1.7; den Grenzwert notieren wir dann als den unendlichen Dezimalbruch. Und auch unsere Heron-Folge aus Definition 2.6.2 konvergiert. Die (berechtigte) Hoffnung ist natürlich, dass der Grenzwert dann auch wirklich eine Lösung von $x^2 = 2$ ist. Um das zu überprüfen benötigen wir noch ein paar Rechenregeln für konvergente Folgen.

3.2 Rechenregeln und Eigenschaften für konvergente Folgen

Satz 3.2.1 (Rechnen mit konvergenten Folgen)**.** *Seien zwei konvergente reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gegeben. Sei $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) Die Folge $\mu a_n + \nu b_n$ konvergiert nach $\mu a + \nu b$.

(ii) Die Folge $a_n b_n$ konvergiert nach ab.

(iii) Für $b \neq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \geq n_0$ definiert ist. Diese Folge konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.

Beweis. (i) Falls $\nu \neq 0$ und $\mu \neq 0$ sind, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|\mu|}$ für alle $n \geq n_1$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|\nu|}$ für alle $n \geq n_2$. Sei nun $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|(\mu a_n + \nu b_n) - (\mu a + \nu b)| = |\mu(a_n - a) + \nu(b_n - b)| \leq |\mu||a_n - a| + |\nu||b_n - b| < \epsilon.$$

Falls ein μ oder ν gleich Null ist, sieht man die Behauptung ganz analog. (ii) wird sehr ähnlich zu Lemma 3.1.10 gezeigt.
(iii) Wir können erst einmal $a_n = 1$ annehmen, da der allgemeine Fall dann aus (ii) mit $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ folgt. Um zu zeigen, dass b_n ab einem n_0 an nicht mehr Null werden kann, schätzen wir ab:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b|.$$

Da b_n zu b konvergiert, gibt es $\epsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Somit ist $|b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ für alle $n \geq n_0$ und somit $\frac{1}{b_n}$ definiert.

Es bleibt die Konvergenz von $\frac{1}{b_n}$ zu zeigen: Wir haben für $n \geq n_0$, dass gilt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Für $\epsilon > 0$ sei $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$ für alle $n \geq n_1$ gilt. Dann gilt für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, dass

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \epsilon$$

ist. □

Beispiel 3.2.2 (Heron-Folge – Existenz der Quadratwurzel)**.** Für $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, ist die Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, konvergent mit Grenzwert $x \geq x_0$, vgl. Übungsaufgabe 12 . Damit gilt mit den obigen Rechenregeln, dass

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$$

und damit $x^2 = c$ gilt.

Somit haben wir gesehen, dass $x^2 = c$ für $x > 0$ eine positive Lösung hat. Man kann sich überlegen, dass es nur eine positive Lösung gibt. Diese Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt{c}$.

Für das nächste Beispiel führen wir folgende Begriffe ein:

Definition 3.2.3. Ein *Polynom* ist eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + d_1 x + d_0 = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$$

mit $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$. Falls $a_d \neq 0$, dann heißt a_d *Leitkoeffizient* und d *Grad* von p.
Eine *rationale Funktion* ist eine Funktion $f\colon S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für Polynome p, q mit $q \neq 0$* und $S = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Beispiel 3.2.4. Sei $f = \frac{p}{q}\colon S \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion wie oben. Sei $(x_n)_n$ eine konvergente Folge in S mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in S$. Dann folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen direkt, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p(x_n) &= \lim_{n\to\infty} (a_d x_n^d + \ldots + a_1 x_n + a_0)\\ &= a_d(\lim_{n\to\infty} x_n)^d + \ldots + a_1(\lim_{n\to\infty} x_n) + a_0) = p(x)\end{aligned}$$

und analog $\lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ gilt.

*0 ist hier die Nullfullunktion $0\colon S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$. Damit ist $q \neq 0$ (Un-)Gleichheit auf Funktionen. D.h. q könnte zwar für bestimmte x den Wert Null annehmen, aber nicht für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Der 'Grenzwert unendlich' - uneigentliche Konvergenz

Betrachten wir die Folgen $a_n = n$ und $b_n = (-1)^n$, dann konvergieren beide nicht nach unserer Grenzwertdefinition. Aber Konvergenz geht aus unterschiedlichen Gründen 'schief'. Während b_n immer zwischen -1 und 1 springt, könnte man sagen, dass sich a_n nach unendlich strebt. Um dies noch zu unterscheiden, führt man den Begriff der uneigentlichen Konvergenz ein.

Definition 3.3.1 (Uneigentliche Konvergenz)**.** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich* gegen $\pm\infty$, falls es zu jedem $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\pm a_n > K$ für alle $n \geq n_0$ gibt.*
Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ oder $a_n \to \pm\infty$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.3.2. $\lim_{n\to\infty} \pm n = \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$
Für $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$ ist $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Lemma 3.3.3. *Sei a_n eine Folge mit $a_n > 0$ für alle n. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ ist.*

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq n_0$. Somit ist mit $|\frac{1}{a_n}| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und damit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
Sei nun andererseits $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ und $K > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|\frac{1}{a_n}| < \frac{1}{K}$ für alle $n \geq n_0$. Somit ist $a_n = |a_n| > K$ für alle $n \geq n_0$ und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Im allgemeinen (also ohne die Positivitätsforderung an a_n) folgt aus $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ aber nur $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Auch andere der Rechenregeln für konvergente Folgen lassen sich auf die uneigentliche Konvergenz übertragen, man muss nur an einigen Stellen vorsichtig sein. Ähnlich wie das letzte Lemma zeigt man direkt:

Lemma 3.3.4. *Seien $a_n \to a \in \mathbb{R}$ und $b_n, c_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Dann gilt:*

(i) Die Folgen $a_n + b_n$, $b_n + c_n$, $b_n c_n$ konvergieren uneigentlich nach unendlich.

(ii) Falls $a \neq 0$ ist, konvergiert $a_n b_n$ uneigentlich gegen unendlich für $a > 0$ und gegen minus unendlich für $a < 0$.

Beispiel 3.3.5. Andererseits wissen wir in der Situation von obigen Lemma apriori nichts über die Konvergenz von $\frac{b_n}{c_n}$ oder von $a_n b_n$ falls a_n eine Nullfolge ist:

Seien $p(x) = \sum_{i=0}^{d} p_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i$ zwei Polynome vom Grad d bzw. m. Wir betrachten die Folgen $b_n = p(n)$ und $c_n = q(n)$. Dann haben wir mit den Rechenregeln für (uneigentlich) konvergente Folgen

*Man muss hier $\pm$ separat lesen, d.h. für Konvergenz gegen unendlich soll $a_n > K$ und für gegen minus unendlich soll $-a_n > K$ (also $a_n < -K$) sein.

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{p_d n^d + p_{d-1} n^{d-1} + \ldots + p_0}{q_m n^m + q_{m-1} n^{m-1} + \ldots + q_0} = n^{d-m} \underbrace{\frac{p_d + \frac{p_{d-1}}{n} + \ldots + \frac{p_0}{n^d}}{q_m + \frac{q_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{q_0}{n^m}}}_{=:a_n}$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt $a_n \to \frac{p_d}{q_m}$ für $n \to \infty$. Wohin dann $\frac{b_n}{c_n}$ (uneigentlich) konvergiert, hängt dann am Verhalten von n^{d-m}. Falls $d > m$ ist, geht n^{d-m} und damit ganz $\frac{b_n}{c_n}$ gegen unendlich; falls $d = m$ ist, ist $\frac{b_n}{c_n} = a_n \to \frac{p_d}{q_m}$; falls $d < m$ ist, ist n^{d-m} eine Nullfolge und somit auch $\frac{b_n}{c_n}$.

Noch eine Bezeichnung für besondere Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Definition 3.3.6 (Intervalle)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ ist das offene Intervall von } a \text{ bis } b \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ ist das abgeschlossene Intervall von } a \text{ bis } b \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ ist das rechtsoffene Intervall von } a \text{ bis } b \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ ist das linksoffene Intervall von } a \text{ bis } b \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \text{ ist das offene Intervall von } a \text{ bis } \infty \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \text{ ist das linksgeschlossene Intervall von } a \text{ bis } \infty \\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \text{ ist das offene Intervall von } -\infty \text{ bis } b \\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \text{ ist das rechtsgeschlossene Intervall von } -\infty \text{ bis } b
\end{aligned}$$

3.4 Vergleiche mit konvergenten Folgen

Satz 3.4.1. *Seien a_n, b_n, c_n reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.*

(i) (Vergleichssatz) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, dann ist $a \leq b$.

(ii) (Einschnürungssatz) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$ und gilt $a = b$, dann ist c_n konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(iii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir: Aus $a_n < b_n$ im obigen Kontext folgt nicht $a < b$ sondern auch nur $a \leq b$, z.B. ist $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ für alle n, aber beide Folgen sind Nullfolgen.

Beweis von Satz 3.4.1. (i) Es ist

$$a - b \leq a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq |b - b_n| + |a_n - a|$$

für alle $n \geq n_0$. Sei $\epsilon > 0$. Aus der Konvergenz von a_n und b_n folgt, dass ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ gilt. Somit gilt für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$b - a \leq \epsilon.$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $a \leq b$.
(ii) Es gilt $a_n - a \leq c_n - a \leq b_n - a$ für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ und somit $|c_n - a| \leq \max\{|a_n - a|, |b_n - a|\} < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ mit n_1 wie aus (i) . Damit ist $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
(iii) Aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung Lemma 2.4.7 folgt $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. Der Rest folgt dann mit der Konvergenz von a_n ähnlich wie oben. □

Beispiel 3.4.2. Wir wollen mittels des Einschnürungssatzes zeigen, dass $c_n := \frac{n!}{n^n}$ eine Nullfolge ist. Es ist $c_n \geq 0$ und

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}}_{\leq 1 \text{ für } n \geq 2} \leq \frac{1}{n} \text{ für } n \geq 2.$$

Insgesamt also $0 \leq c_n \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 2$. Aus dem Einschnürungssatz folgt nun, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Beispiel 3.4.3. Sei nun $a_n := \sqrt{n^2+1} - n$. Es gilt $a_n \geq 0$. Als nächstes zeigen wir $a_n \leq \frac{1}{2n}$: Dafür beginnen wir mit $0 \leq \frac{1}{4n^2}$. Daraus folgt

$$n^2 + 1 \leq \frac{1}{4n^2} + 1 + n^2 = \left(\frac{1}{2n} + n\right)^2$$

und damit

$$\sqrt{n^2+1} \leq \frac{1}{2n} + n,$$

also die Behauptung.
Damit ist $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2n}$, also a_n ist zwischen zwei Nullfolgen eingeschnürt und damit selber eine Nullfolge. *

3.5 Intervallschachtelung

Woche 3 Bis jetzt haben wir Folgen betrachtet, deren Konvergenz, haben Cauchyfolgen eingeführt und damit insbesondere die reellen Zahlen eingeführt. Wir haben die wichtigsten Rechenregeln und Vergleichsätze für konvergente Folgen kennengelernt. In den folgenden Abschnitten werden wir verschiedene oft auftretende weitere Methoden und Begriffe im Umfeld von Folgen kennenlernen.

Wir beginnen mit der Intervallschachtelung:

Definition 3.5.1 (Intervallschachtelung)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := [a_n, b_n]$ ein abgeschlossenes Intervall (d.h. insbesondere $a_n < b_n$). Wir nennen $(I_n)_n$ eine *Intervallschachtelung*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

*Alternative Methode ist dritte binomische Formel, also $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$ für $n \to \infty$.

- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := b_n - a_n < \epsilon$.

Man kann zeigen, siehe Übungsaufgabe 8, dass es zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_n$ es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$* gibt. Insbesondere ist dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

Als eine Anwendung der Intervallschachtelung zeigen wir die Existenz der n-ten Wurzel aus einer nichtnegativen reellen Zahl:

Satz 3.5.2 (Existenz der n-ten Wurzel). *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zu jedem $a \geq 0$ gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = a$. Diese Lösung bezeichnen wir als* n-te Wurzel aus a *und schreiben $\sqrt[n]{a}$ bzw. $a^{\frac{1}{n}}$.*

Beweis. Die Existenz der n-Wurzel zeigen wir mittels einer Intervallschachtelung, die wir wie folgt rekursiv konstruieren: $I_0 = [0, \max\{1, a\}]$. Damit gilt $0 \leq z^n \leq \max\{1, a^n\}$ für alle $z \in I_0$ und $a \in [0, \max\{1, a^n\}]$. Haben wir $I_k = [a_k, b_k]$ konstruiert, setzen wir

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_{k+1} := a_k, b_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2}] & \text{falls } a_k^n \leq a \leq \left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)^n \\ [a_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2}, b_{k+1} := b_k] & \text{falls } \left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)^n < a \leq b_k^n \end{cases}$$

Da aus $c \leq d$ folgt, dass $c \leq \frac{c+d}{2} \leq d$ ist, haben wir $I_{k+1} \subset I_k$. Außerdem ist nach Konstruktion $|I_{k+1}| = 2^{-1}|I_k| = 2^{-k-1}|I_0|$. Damit ist $|I_{k+1}|$ eine Nullfolge, und wir haben die Voraussetzungen einer Intervallschachtelung erfüllt. Damit gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k =: x \geq 0$. Nach Definition von I_k gilt $a_k^n \leq a \leq b_k^n$. Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Einschnürungssatz ist somit $x^n = a$.

Bis jetzt haben wir Existenz gezeigt. Es fehlt noch die Eindeutigkeit: Seien x_1 und x_2 zwei nichtnegative Zahlen mit $x_1^n = a = x_2^n$ mit $x_1 \neq x_2$. Sei $x_1 < x_2$. (Der Fall $x_2 > x_1$ wird analog funktionieren.) Dann ist

$$a = x_1^n = x_1^{n-1} x_1 < x_1^{n-1} x_2 < x_1^{n-2} x_2^2 < \ldots < x_1 x_2^{n-1} < x_2^n = a,$$

was den Widerspruch gibt. Also muss $x_1 = x_2$ und die n-te Wurzel aus a somit eindeutig sein. □

Mit Hilfe der n-ten Wurzel können wir nun auch, Potenzen mit rationalen Exponenten definieren: Sei $q = \frac{r}{s}$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann setzen wir für $a = 0$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ immer $a^q = 0$† und für $a > 0$ setzen wir

$$a^q := (a^r)^{\frac{1}{s}}.$$

Da eine rationale Zahl verschiedene Darstellungen als Bruch hat, müssen wir auch hier wieder überprüfen, dass dies wohldefiniert ist: Sei dazu $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$. Dann ist nach den Potenzgesetzen für ganzzahlige Exponenten:

$$((a^{r_1})^{\frac{1}{s_1}})^{s_1 s_2} = (((a^{r_1})^{\frac{1}{s_1}})^{s_1})^{s_2} = (a^{r_1})^{s_2} = a^{r_1 s_2} = a^{r_2 s_1} = \ldots = [((a^{r_2})^{\frac{1}{s_2}})^{s_1 s_2}$$

*$\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \ldots$, also: Es ist genau dann $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, wenn $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
†0^0 ist im Allgemeinen nicht definiert.

und somit nach Eindeutigkeit der n-ten Wurzel $(a^{r_1})^{\frac{1}{s_1}} = (a^{r_2})^{\frac{1}{s_2}}$.
Durch Verwenden der Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten kann man nachrechnen, dass für $r, s \in \mathbb{Q}$, $a, b > 0$ gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s},\ (a^r)^s = a^{rs},\ a^r b^r = (ab)^r.$$

Idee fürs Nachrechnen: Um diese Potenzgesetze nachzurechnen, will man die Gesetze für ganzzahlige Exponenten verwenden. D.h. statt direkt $a^r a^s = a^{r+s}$ zu überprüfen, rechnet man (falls $r = \frac{p_1}{q_1}$ und $s = \frac{p_2}{q_2}$ für $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$) nach, dass $(a^{\frac{p_1}{q_1}} a^{\frac{p_2}{q_2}})^{q_1 q_2} = (a^{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}})^{q_1 q_2}$ gilt und benutzt dann die Eindeutigkeit der $q_1 q_2$-ten Wurzel. Das ist die Idee, die wir auch bei der Wohldefiniertheit unserer Definition von a^q verwendet haben.

Als eine weitere Anwendung der Intervallschachtelung kann man sich überlegen, dass jede reelle Zahl eine Darstellung als unendlicher Dezimalbruch hat. Diese Darstellung ist nicht zwingend eindeutig, z.B. ist $0,\overline{9}{:=}0,99999\ldots = 1$ und auch $4,31\overline{9}{:=}4,139999\ldots = 4,14$, vgl. Übungsaufgabe 8. Wenn man allerdings keine abbrechenden Dezimalbrüche zulässt, als keine Darstellung, wo nach der einer Nachkommastelle $b_m \neq 0$ nur noch Nullen folgen, sondern diese Nachkommastelle durch $b_m - 1$ ersetzt und danach alle Kommastellen auf 9 setzt, ist die Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen eindeutig. Dann besitzt jede reelle Zahl eine eindeutige unendliche (nichtabrechende) Dezimalbruchdarstellung.

3.6 Konvergenzkriterium: Monoton und beschränkt

Eine Folge am Beispiel des Zinseszins: Einem Kunden wird eine ein jährlicher Zinsatz von p (entspricht $p \cdot 100\%$) versprochen. Der Kunde legt 1 Euro an. Nach einem Jahr hat er $1 + p$ Euro, ..., nach r Jahren hat er $(1 + p)^r$ Euro.

Woanders wird dem Kunden nun aber ein halbjährlicher Zins von $\frac{p}{2}$ versprochen. Dann hat der Kunde nach einem halben Jahr $1 + \frac{p}{2}$ Euro und nach einem ganzen Jahr $(1 + \frac{p}{2})^2 = 1 + p + \frac{p^2}{4}$ Euro und damit mehr als die $1 + p$ Euro vom ersten Fall.

Da denkt sich der Kunde wahrscheinlich, vielleicht findet sich jemand der mir nach $\frac{1}{n}$.tel eines Jahres einen Zinsatz von $\frac{p}{n}$ verspricht. Dann hätte er nach einem Jahr $(1 + \frac{p}{n})^n$ Euro. Vielleicht ist das ja mehr als für $\frac{1}{n-1}$.tel eines Jahres und man kann so (wenn man mal ignoriert, dass niemand das Jahr in beliebig kleine Teile aufteilen wird) vielleicht in nur einem Jahr beliebig viel Geld machen?

Das für auf die Betrachtung der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Im Kontext des Zinseszins mag die Frage vielleicht noch etwas künstlich erscheinen, weil bei der Verzinsung die Zeitschritte einfach in der Realität nicht beliebig klein gewählt werden. Aber diese Folge kommt noch in zahlreichen Prozessen in der Natur vor – wann immer eine Größe u sich in jeder hinreichenden kleinen Zeitspanne Δt proportional zu dem vorhandenen u zur Zeit t und der Zeitspanne Δt ändert, also

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \alpha u(t)\Delta t,$$

hierbei ist α eine Konstante – der Proportionalitätsfaktor. Beispiele für solche Prozesse:

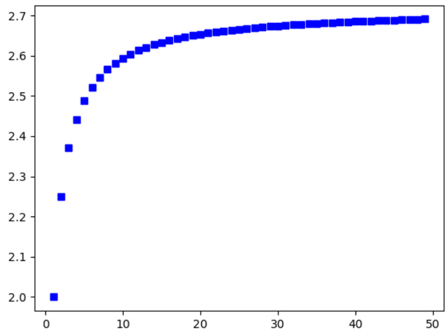
- Entwicklung der Bevölkerungszahl unter der Annahme, dass sich die Population mit einer konstanten Rate (=Geburtsrate-Todesrate) verändert.

- Zerfall radioaktiver Substanzen

- Temperaturdifferenz eine Körpers zur Umgebung, welche auf konstanter Temperatur gehalten wird.

Im Falle des Zinseszins wäre $\alpha = p$ und $\Delta t = \frac{1}{n}$.

Wenn wir uns mal die ersten Folgenwerte anschauen, haben wir den Eindruck, dass die Folge immer wächst, aber nicht beliebig groß wird, sondern sich einem Wert (wahrscheinlich irgendwo nahe $2,7$) annähert. Die Anschauung macht uns glauben, dass allgemein eine Folge die kontinuierlich wächst und von oben beschränkt ist einen Grenzwert haben sollte. Das wird auch so sein, wie wir bald zeigen werden.



Zuvor führen wir jedoch erst noch eine Begriffe ein:

Definition 3.6.1. Eine Funktion $f\colon S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, wenn für $x, y \in S$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) \leq f(y)$ gilt.

- *streng monoton wachsend*, wenn für $x, y \in S$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) < f(y)$ gilt.

- *monoton fallend*, wenn für $x, y \in S$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) \geq f(y)$ gilt.

- *streng monoton fallend*, wenn für $x, y \in S$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) > f(y)$ gilt.

Beispiel 3.6.2. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind die Funktionen $f_n\colon x \in \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_n\colon x^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton steigend:
Sei $x < y$. Dann ist $x, y \geq 0$. Falls $x = 0$ ist, ist $x^n = 0 < y^n$ klat. Für $x, y > 0$ gilt $f_n(x) = x^n < x^{n-1}y < x^{n-2}y^2 < \ldots < y^n = f_n(y)$.
Sei $x < y$. Um zu zeigen, dass g_n streng monoton wachsend ist, nehmen wir $x^{\frac{1}{n}} \geq y^{\frac{1}{n}}$ an. Da alles nichtnegative Zahlen sind, folgt aus der Monotonie von f_n, dass $x = (x^{\frac{1}{n}})^n \geq (y^{\frac{1}{n}})^n$, was ein Widerspruch zu $x < y$ wäre. Damit ist g_n streng monton wachsend.

Da eine reelle Folge a_n einer Funktion $a\colon \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, entspricht, ergibt sich daraus, wann eine reelle Folge monoton wachsend, usw. ist:

Lemma 3.6.3. *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analoge Aussagen gelten für (streng) monoton wachsend/fallend.*

Beweis. Sei a_n monoton wachsend. Dann folgt $a_{n+1} \geq a_n$ aus $n+1 \geq n$.
Sei nun $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \geq n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit $n = m+c$ und wir haben $a_n \geq a_{m+c-1} \geq a_{m+c-2} \geq \ldots \geq a_m$. Also ist a_n monoton wachsend. □

Definition 3.6.4. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein $C \in \mathbb{R}$ mit $x \leq C$ für alle $x \in M$ heißt *obere Schranke* von M.
Gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

- K ist obere Schranke von M
- Ist $k < K$, dann ist k keine obere Schranke von M,

dann nennen wir K das Supremum von M und schreiben $\sup M = K$. Das Supremum ist also die kleinste obere Schranke von M.
Ist $\sup M \in M$, dann nennen wir $\sup M$ das Maximum von M und schreiben $\max M$.
Analog definieren wir *untere Schranken* und die größte untere Schranke von M – das *Infimum* $\inf M$ von M und im Fall, dass $\inf M \in M$ gilt, das *Minimum* $\min M$ von M.

Sei $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Dann ist $\sup M = \max M = 1$, $\inf M = 0$ und M besitzt kein Minimum, da es es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} = 0$ gibt. Man sagt: Das Infimum von M wird nicht angenommen.

Dagegen gilt

Satz 3.6.5. *Jede nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{Z}$, die nach unten beschränkt ist, besitzt ein Minimum.*

Beweis. Sei zunächst $M \subset \mathbb{N}$. Dann ist 0 eine untere Schranke für M. Ist $0 \in M$, dann ist 0 automatisch das Minimum und wir sind fertig. Ist $0 \notin M$, dann ist 1 eine untere Schranke von M. Ist $1 \in M$, so ist 1 das Minimum, wenn nicht ist 2 eine untere Schranke. So fahren wir weiter fort. Dieses Verfahren muss irgendwann abbrechen, da M nicht-leer ist, und es somit ein $x \in M \subset \mathbb{N}$ existiert. Spätestens $x+1$ kann dann keine untere Schranke mehr von M sein, d.h. irgendwann vorher müssen wir das Minimum von M gefunden haben.

Sei nun $M \subset \mathbb{Z}$. Da M nach unten beschränkt ist, gibt es eine untere Schranke $b \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten $M' {:=} \{n - b \mid n \in M\}$, Dann ist $M' \subset \mathbb{N}$, denn für $n \in M$ folgt aus $n \geq b$, dass $n - b \geq 0$ gilt. Da M' nicht-leer ist, folgt aus obigen Überlegungen, dass M' ein Minimum $y {:=} \min M'$ besitzt. Dann ist $y + b = \min M$. □

- Existenz einer oberen Schranke ist gleichbedeutend mit die Folge/Menge ist von oben beschränkt
- Gibt es eine obere Schranke für eine nicht-leere Menge M in $\mathbb{R}$, dann gibt es auch eine kleinste obere Schranke, also $\sup M \in \mathbb{R}$ existiert.

Beweis. Sei C eine obere Schranke von M und $x \in M$. Wir konstruieren uns die kleinste obere Schranke durch eine Intervallschachtelung ähnlich wie in der Konstruktion der n-ten Wurzel.

Wir setzen $a_0 = x$ und $b_0 = C$. Ist $x = C$, dann ist x automatisch die kleinste obere Schranke. Sonst definieren wir rekursiv folgende Intervalle: Ist $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$ eine obere Schranke von M, so setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Falls nicht, setzen wir $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und $b_{n+1} = b_i$. Dann haben wir eine Intervallschachtelung $I_n{:=}[a_n, b_n]$, da nach Konstruktion $I_{n+1} \subset I_n$ und $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ gilt. Somit gibt es ein a mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$. Da alle b_n obere Schranken von M sind und alle a_n keine oberen Schranken sind, ist a die kleinste obere Schranke von M. □

Damit haben wir gesehen, dass eine von oben beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ immer ein Supremum in $\mathbb{R}$ besitzt. Analog hat jede von unten beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ immer ein Infimum. Diese Eigenschaft nennt man *Ordnungsvollständigkeit* der reellen Zahlen. Die rationalen Zahlen sind z.B. nicht ordnungsvollständig, da für eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ das Supremum zwar in $\mathbb{R}$ existiert, aber nicht in $\mathbb{Q}$ liegen muss.

Nun können wir unsere Vermutung zur Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen beweisen:

Satz 3.6.6 (Konvergenzkriterium der Monotonie und Beschränktheit)**.** *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Analog ist jede monoton fallend, nach unten beschränkte Folge konvergent.*

Beweis. Sei a_n die monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. D.h. es gibt das Supremum $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir wollen zeigen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt:
Nach Definition des Supremums gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$, denn sonst wäre $a - \epsilon$ eine obere Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da a_n monoton wachsend ist, folgt $a - \epsilon < a_n \leq a$ und damit $|a - a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert a_n gegen a für $n \to \infty$. □

Dieses Kriterium wollen wir gerne auf die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ anwenden. D.h. wir müssen für diese Folge zeigen, dass sie monoton wachsend und von oben beschränkt ist. Dazu sammeln wir zuerst noch ein paar Hilfsmittel:

Satz 3.6.7 (Binomialkoeffizienten und binomischer Satz)**.** *Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Die* Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$* *sind definiert durch*†

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Es gilt

*Interpretation: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen.

†Fakultät: $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten n verschiedene Elemente in eine Reihenfolge zu bringen: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ für $n > 0$ und $0! = 1$.

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(ii) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ *für* $1 \le k \le n$

(iii) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$ *und somit insbesondere* $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(iv) $2^{n-1} \le n!$ *für* $n \ge 1$

Beweis. (i) direkt aus Definition
(ii)+(iii)+(iv) Mittels vollständiger Induktion. □

Beispiel 3.6.8. Die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert:
Wir zeigen, dass a_n monoton wachsend und beschränkt ist, dann wird die Konvergenz aus Satz 3.6.6 folgen:
Monoton wachsend:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Mit der Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^m \ge 1+mx$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \ge -1$, vgl. Übungsaufgabe 7, angewendet für $m = n+1$ und $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Von oben beschränkt:
Nach dem binomischen Satz gilt

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

Für $1 \le k \le n$ gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot\ldots\cdot n} \le \frac{1}{k!}$ und damit zusammen mit Satz 3.6.7(iv)

$$a_n \le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \overset{j=k-1}{=} 1 + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2^j}$$

Die rechte Seite ist gleich $1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3$. Damit ist a_n durch 3 von oben beschränkt.

Damit wissen wir, dass a_n konvergiert, den Grenzwert nennen wir *Eulersche Zahl e*.

Nach dem Vergleichssatz 3.4.1 folgt $e \le 3$. Wir werden später sehen, dass e eine irrationale Zahl ist.

3.7 Asymptotische Gleichheit

Vergleichen wir die uneigentlich konvergenten Folgen $(n)_n$, $(n+1)_n$ und $(n^2)_n$. Alle konvergieren gegen unendlich. Doch beim Blick auf den Graphen würden wir sagen, dass n^2 'schneller gegen unendlich strebt' mals die anderen beiden Folgen, wogegen n und $n+1$ eher 'gleich schnell' gegen unendlich konvergieren. Diese Intuition wird durch den Begriff der asymptotischen Gleichheit erfasst:

Definition 3.7.1. Seien (a_n), (b_n) Folgen positiver reeller Zahlen. Dann nennen wir (a_n) und (b_n) *asymptotisch gleich* (geschrieben: $a_n \sim b_n$), falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ für $n \to \infty$.

Asymptotische Gleichheit bilden eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Folgen positiver reller Zahlen.

Beispiel 3.7.2. (i) Konvergieren a_n und b_n gegen den gleichen Grenzwert ungleich Null, so sind sie nach den Rechenregeln für konvergente Folgen automatisch asymptotisch gleich.

(ii) $n+1$ und n sind asymptotisch gleich, da $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ für $n \to \infty$.

(iii) n^2 und n sind nicht asymptotisch gleich, da $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

(iv) Ist p ein Polynom vom Grad d und Leitkoeffizient a, dann ist $p(n) \sim an^d$: Sei $p(n) = an^d + a_{d-1}n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0$. Dann ist

$$\frac{p(n)}{an^d} = 1 + \frac{a_{d-1}}{an} + \ldots + \frac{a_1}{an^{d-1}} + \frac{a_0}{an^d} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Asymptotische Gleichheit wird auch verwendet, um die Laufzeit/Komplexität von Algorithmen in der Informatik zu vergleichen.

Interessant ist der Begriff der asymptotischen Gleichheit vor allem, wenn man Näherungswerte für eine Folge a_n für große n haben will, wo die Folgenglieder aber selbst aufwendig/langsam zu berechnen sind. Wenn man dann eine 'leichter/schneller berechenbare' Folge findet, die asymptotisch gleich ist, kann man diese nutzen um Näherungswerte zu erhalten. Ein Beispiel dafür ist die *Stirlingsche Formel*, die eine schnelle approximative Berechnung von $n!$ für große n möglich macht:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Diese Formel werden wir jedoch erst später nachrechnen können.

3.8 Teilfolgen und Häufungspunkte

Definition 3.8.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir nennen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n), falls es eine Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $i_0 < i_1 < i_2 < \ldots$ gibt, so dass $b_n = a_{i_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $a_n = (-1)^n$. Dann sind $b_n{:=}a_{2n} = 1$, $c_n{:=}a_{2n+1} = -1$, $d_n{:=}a_{n^2} = (-1)^{(n^2)}$ Teilfolgen von a_n.

In Übungsaufgabe 6 sehen wir:

Lemma 3.8.2. *Jede Teilfolge einer (ggf. uneigentlich) konvergenten Folge konvergiert (ggf. uneigentlich) gegen den gleichen Grenzwert.*

Im Beispiel $(-1)^n$ von oben haben wir gesehen, dass selbst, wenn eine Folge nicht konvergent ist, sie konvergente Teilfolgen besitzen kann:

Definition 3.8.3. Ein $a \in \overline{\mathbb{R}}{:=}\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist ein *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_n$, wenn es eine gegen a (uneigentlich) konvergierende Teilfolge von a_n gibt.

Die Folge $(-1)^n$ war zwar nicht konvergent, aber sie hat zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und -1.

Um in Zukunft nicht mehr (wenn nicht unbedingt nötig) zwischen Konvergenz und uneigentlicher Konvergenz unterscheiden zu müssen, setzen wir $\bar{\mathbb{R}}{:=}\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und sagen, dass eine Folge *in* $\mathbb{R}$ *konvergiert*, falls sie uneigentlich oder in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Lemma 3.8.4. *Eine Folge ist genau dann von oben (bzw. von unten) nicht beschränkt (man sagt auch* unbeschränkt*, wenn ∞ (bzw. $-\infty$) ein Häufungspunkt der Folge ist.*

Beweis. Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Sei zunächst ∞ ein Häufungspunkt von a_n. Dann gibt es eine gegen unendlich uneigentlich konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von a_n. D.h. insbesondere gibt es für alle $K > 0$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_\ell} > K$. Damit kann kein K eine obere Schranke von a_n sein und somit ist a_n nicht von oben beschränkt.

Sei nun $(a_n)_n$ nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k} > k$. Damit ist insbesondere $a_{n_j} > k$ für alle $j \geq k$ und $(a_{n_k})_k$ ist eine nach unendlich konvergierende Teilfolge. $\square$

Wir hatten gesehen, dass jede montone beschränkte Folge konvergiert. Wenn wir das monoton weglassen, muss die Folge im Allgemeinen nicht mehr konvergieren, aber wir haben:

Satz 3.8.5 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei a_n die beschränkte Folge. Sei $b_n{:=}\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Dann gilt $b_n \leq b_{n+1}$. b_n ist also eine montone Folge. Da a_n beschränkt ist, gibt es ein $C > 0$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und b_n ist beschränkt. Nach Satz 3.6.6 ist b_n damit konvergent. Der Grenzwert heiße b.

Nun wird b_n im Allgemeinen keine Teilfolge von a_n sein (das ist nur der Fall, wenn das Infimum in der Definition angenommen wird, also schon ein Minimum ist). Aber selbst wenn b_n kein Folgenglied von $(a_m)_m$ ist, wird es nach Definition des Infimums immer Folgenglieder a_m geben, die beliebig nahe an b_n sind:

- Sei n_1 derart, dass $a_{n_1} \leq b_{n_1} + 1$ gilt.

- Sei $n_2 > n_1$ derart, dass $a_{n_2} \leq b_{n_2} + \frac{1}{2}$ gilt.
- Sei $n_3 > n_2$ derart, dass $a_{n_3} \leq b_{n_3} + \frac{1}{3}$ gilt.

Solche n_i existieren, weil nach der Definition des Infimums $b_{n_{i-1}+1} + \frac{1}{i}$ keine untere Schranke an die Menge $\{a_{n_{i-1}} + 1, a_{n_{i-1}+2}, \ldots\}$ sein darf. Somit ist

$$b_{n_i} \overset{\text{Def. von } b_{n_i}}{\leq} a_{n_i} \overset{\text{Wahl der } a_{n_i}}{\leq} b_{n_i} + \frac{1}{i}.$$

Nach dem Einschnürungssatz 3.4.1 ist somit $\lim_{n\to\infty} a_{n_i} = b$. □

Folgerung 3.8.6. *Jede reelle Folge hat einen Häufungspunkt in* $\bar{\mathbb{R}}$.

Beweis. Folgt direkt aus Bolzano-Weierstrass zusammen mit Lemma 3.8.4. □

Das b, welches wir in obigem Beweis vom Bolzano-Weierstrass als Grenzwert von $b_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ gefunden haben, ist der kleinste Häufungspunkt von a_n.

Beweis. Sei $c < b$ auch ein Häufungspunkt von a_n. Sei $\epsilon = \frac{b-c}{2} > 0$. Da $b_n \to b$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n > b - \epsilon$ für $n \geq n_0$. Wegen $a_n \geq b_n$ ist somit $a_n > b - \epsilon = c + \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Somit kann c kein Häufungspunkt von a_n sein. □

Definition 3.8.7. Sei a_n eine reelle Folge. Wir definieren den *Limes inferior* von a_n als den kleinsten Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ von a_n – geschrieben $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Analog wird der *Limes superior* von a_n als der größte Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ von a_n definiert – geschrieben $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Schauen wir uns einige Beispiele an: Sei $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ für $n > 0$. Dann sind 0 und 1 alle Häufungspunkte, also $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$. Zum Vergleich: $\sup\{a_1, a_2, \ldots\} = \frac{3}{2}$ und $\inf\{a_1, a_2, \ldots\} = -1$.

Als zweites Beispiel sei $b_n = (-1)^n n$. Das hat zwei Häufungspunkte: ∞ und $-\infty$.

Lemma 3.8.8. *Sei* $(a_n)_n$ *eine Folge und* $a \in \bar{\mathbb{R}}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Folge* a_n *konvergiert in* $\bar{\mathbb{R}}$ *gegen* a.

(ii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$.

(iii) a *ist der einzige Häufungspunkt von* a_n.

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist direkt klar nach Definition. Aus folgt nach Lemma 3.8.2, dass aus (i) aus (iii) folgt. Sei nun a der einzige Häufungspunkt von a_n. Wir wollen zeigen, dass a dann auch der Grenzwert von a_n ist. Wir betrachten hier nur den Fall, dass $a \in \mathbb{R}$ ist. Der Fall $a \in \{\pm\infty\}$ geht ähnlich und den lassen wir zur Übung.

Da $a \in \mathbb{R}$ der einzige Häufungspunkt ist, ist a_n nach Lemma 3.8.4 insbesondere beschränkt.

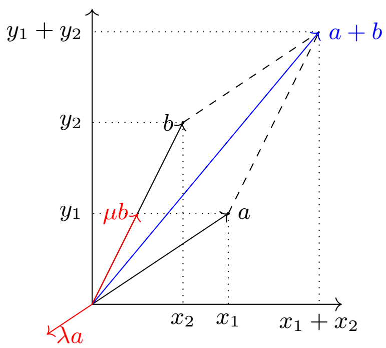
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch: Sei a nicht Grenzwert von a_n, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n > n$ mit $|a_{m_n} - a| > \epsilon$ existiert. Die Folge $(a_{m_n})_n$ ist nun eine Teilfolge von a_n und noch immer beschränkt. Sie hat also nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge b_k. Doch für alle diese b_k gilt $|b_k - a| > \epsilon$. Damit kann der Grenzwert von b_k nicht a sein und somit ist a nicht der einzige Häufungspunkt von a_n, was unser Widerspruch ist. □

3.9 Folgen im $\mathbb{R}^n$

Für die reellen Zahlen haben wir uns die Zahlengerade als Modell vorgestellt, für $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stellen wir uns die Ebene vor, für den $\mathbb{R}^3$ stellen wir uns den dreidimensionalen Raum vor.

Der $\mathbb{R}^n$ ist dann die Verallgemeinerung

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$



Im $\mathbb{R}^n$ gibt es die Addition

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \\ (x, y) &\mapsto x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

und die skalare Multiplikation[a]

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Im Fall $n = 1$ ist die skalare Multiplikation einfach die 'normale' Multiplikation auf $\mathbb{R}$ mit der $\mathbb{R}$ sogar ein Körper ist.

Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir auch eine Verallgemeinerung des Betrages auf $\mathbb{R}$:

Definition 3.9.1. Die *euklidische Norm* eines $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}.$$

Der *euklidische Abstand* von $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $|x - y|$. Das *euklidische Skalarprodukt* von $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

[‡] Vgl. Lineare Algebra: Mit dieser Addition und skalaren Multiplikation ist $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wir sammeln ein paar wichtigsten Eigenschaften der euklidischen Norm und des euklidischen Skalarprodukt:

Lemma 3.9.2. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) (Positivität) $\langle x, x\rangle = |x|^2 \geq 0$ und es gilt genau dann Gleichheit, wenn $x = 0$ ist.

(ii) (Symmetrie) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(iii) (Bilinearität) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ und $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle + \mu\langle z, y\rangle$

(iv) (Homogenität) $|\lambda x| = |\lambda||x|$

(v) (Dreiecksungleichung) $|x+y| \leq |x|+|y|$ In der Dreiecksungleichung gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y gleichsinnig parallel *sind, d.h. es gibt ein $\lambda \geq 0$ mit $x = \lambda y$ oder $y = \lambda x$.*

Beweis. (i) $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$, da jedes $x_i^2 \geq 0$ ist. Für Gleichheit muss $x_i^2 = 0$ und damit $x_i = 0$ für alle i gelten.
(ii) -(iv) können direkt nachgerechnet werden
Den Beweis von (v) stellen wir kurz zurück. Dafür brauchen wir noch folgende oft auftretende Ungleichung. □

Lemma 3.9.3 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind, d.h. wenn aus $\lambda x + \mu y = 0$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ schon folgt, dass $\lambda = \mu = 0$ ist.[*]

Beweis. Sobald x oder y gleich $0 \in \mathbb{R}^n$[†] ist, ist die Ungleichung wahr und es gilt sogar Gleichheit. Sei nun sowohl x als auch y ungleich Null. Dann ist

$$0 \leq \left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right|^2 = \langle \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\rangle = 2 - 2\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$$

und somit $\langle x, y\rangle \leq |x|\,|y|$. Aus $\langle x, y\rangle \leq |x|\,|y|$ für alle x, y, folgt $-\langle x, y\rangle = \langle -x, y\rangle \leq |-x|\,|y| = |x|\,|y|$ und damit zusammen $|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|$.
Insgesamt gilt Gleichheit also genau dann, wenn in den auftretenden Ungleichungen Gleichheit gilt, also wenn $0 = \left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right|$ oder $0 = \left|\frac{-x}{|-x|} - \frac{y}{|y|}\right|$ gilt. Insgesamt also, wenn $|\frac{x}{|x|} = \pm\frac{y}{|y|}$ gilt. □

Beweis der obigen Dreiecksungleichung. Mit Cauchy-Schwarz haben wir

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

[*] Anders gesagt: Zwei Elemente in $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig, wenn keines ein reelles Vielfaches des anderen ist.

[†] Wenn wir $0 \in \mathbb{R}^n$ schreiben, meinen wir den Nullvektor, also $0 = (0, \ldots, 0)$.

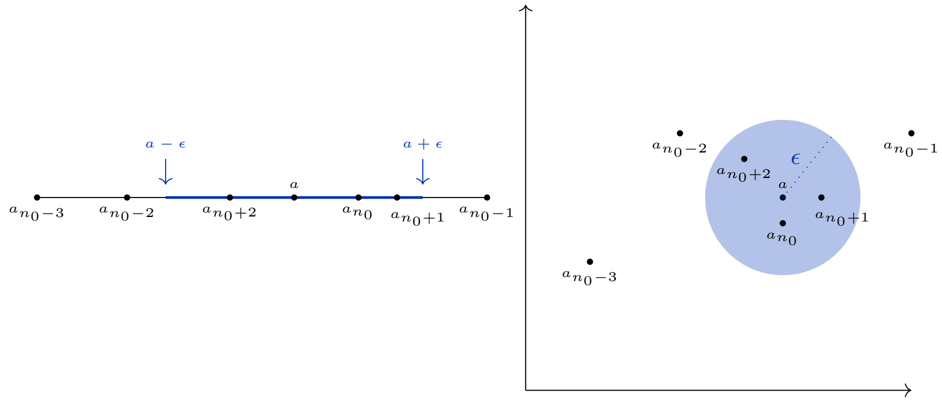


Abbildung 3.2: In $\mathbb{R}^n$ konvergiert a_n gegen a, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass ab n_0 alle Folgenglieder im Inneren des blauen Balles um a mit Radius ϵ liegen.

und damit

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ und Gleichheit in Cauchy-Schwarz gilt, also genau dann wenn es ein λ
geq mit $x = \lambda y$ oder $y = \lambda x$ gibt und $\square$

3.9.1 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Definition 3.9.4 (Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$)**.** Eine Folge $(a_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}^n$, falls für alle $\epsilon > 0$ es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_k - a| < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$ gilt.
Eine Folge $(a_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine *Cauchyfolge*, falls für alle $\epsilon > 0$ es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_k - a_m| < \epsilon$ für alle $m, k \geq k_0$ gilt.

Die Definitionen der Konvergenz sind also im $\mathbb{R}^n$ also für n gleich. In Abbildung 3.2 ist es für $n = 1$ und $n = 2$ veranschaulicht.

Der *Ball um a mit Radius ϵ*, auch *ϵ-Umgebung um a* genannt, ist die Menge

$$B_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \epsilon\}.$$

In $\mathbb{R}$ ist dieser Ball das Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Wenn man a aus diesem Intervall herausnimmt, zerfällt das Intervall in einen 'linken' und einen 'rechten' Teil. Das ist aber eine Besonderheit von $\mathbb{R}$.

Auch Beschränkheit wird ganz analog eingeführt wie in $\mathbb{R}$:

Definition 3.9.5 (Beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$)**.** Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $C > 0$ mit $|x| \leq C$ für alle $x \in M$ gibt.

Aber es gibt kein 'von oben beschränkt' oder 'von unten beschränkt' im $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$! Es gilt mit dem gleichen Beweis wie in $\mathbb{R}$, vgl. Lemma 3.1.9 und Satz 3.1.5:

Lemma 3.9.6. *Jede konvergente Folge im $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt und eine Cauchyfolge. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Das auch jede Cauchyfolge im $\mathbb{R}^n$ konvergiert, folgt direkt aus folgender Charakterisierung der Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$:

Satz 3.9.7. *Eine Folge $(a_k)_k$ im $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent/beschränkt/Cauchyfolge, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Folgen in $\mathbb{R}$, die aus den i-Koordinaten gebildet werden, also $((a_k)_i)_k$, konvergent/beschränkt/Cauchyfolgen sind.*

Beweis. Ist $(a_k)_k$ konvergent/beschränkt/Cauchyfolge, dann folgt die entsprechende Eigenschaft für die Koordinatenfolgen aus $|x_i| \le |x = (x_1, \dots, x_n)|$ für alle i.

Sei nun $((a_k)_i)_k$ für alle $i = 1, \dots, n$ konvergent mit Grenzwert b_i. D.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $k_i \in \mathbb{N}$ mit $|(a_k)_i - b_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ für alle $k > k_i$. Wir setzen $b{:=}(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$|a_k - b|^2 = \sum_{i=1}^n ((a_k)_i - b_i)^2 < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^2}{n} = \epsilon^2$$

und somit $|a_k - b| < \epsilon$ für alle $k > \max\{k_1, \dots, k_n\}$.

Das Argument für Cauchyfolgen geht ganz analog.

Sei nun $((a_k)_i)_k$ für alle $i = 1, \dots, n$ beschränkt. Dann gibt es für alle $i = 1, \dots, n$ ein $C_i > 0$ mit $|(a_k)_i| \le C_i$ für alle k. Somit ist für alle k

$$|a_k|^2 = \sum_{i=1}^n |(a_k)_i|^2 \le \sum_{i=1}^n C_i^2 =: C.$$

Also ist $(a_k)_k$ beschränkt. □

Folgerung 3.9.8. *Der $\mathbb{R}^n$ ist* vollständig*, d.h. jede Cauchyfolge im $\mathbb{R}^n$ konvergiert.*

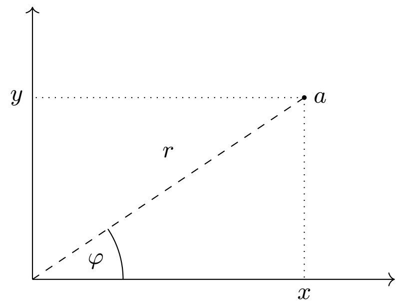
Beweis. Nach letztem Satz ist eine Folge $(a_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ genau dann eine Cauchyfolge, wenn alle Koordinatenfolgen $((a_k)_i)_k$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind. In $\mathbb{R}$ konvergieren aber alle Cauchyfolgen, woraus aus dem letzten Satz wieder folgt, dass schon $(a_k)_k$ konvergiert. □

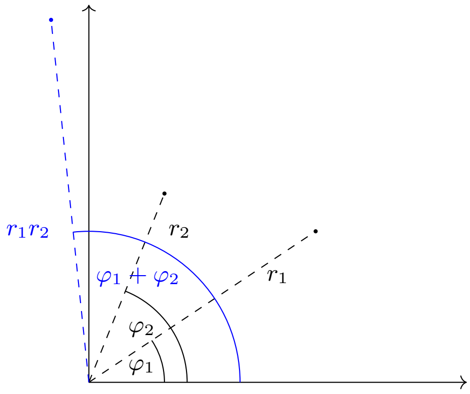
3.9.2 Einführung komplexer Zahlen

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ haben wir für allgemeines $n > 1$ der $\mathbb{R}^n$ keine keine Multiplikation $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sonder nur eine skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die im Falle von $n = 1$ genau der Multiplikation reeller Zahlen entspricht. **Woche 4**

Es gibt aber einen Sonderfall – der Fall $n = 2$. Dort kann man eine Multiplikation definieren. Wir schauen uns hier mal die Idee dazu an:

Eine Zahl $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kann man, wenn als Vektor gesehen, eindeutig durch den Radius des Vektors und den Winkel $\in [0, 2\pi)$ zur positiven Hälfte der x-Achse charakterisieren. Wenn wir mal kurz an den Sinus und den Kosinus aus der Schule erinnern, auch wenn diese in der Analysis erst noch definiert werden müssen, dann ist $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.





Anschaulich erhält man eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ wie folgt: Das Produkt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ soll der Vektor sein, dessen Radius dem Produkt der Radien der beiden Faktoren ist und dessen Winkel zur x-Achse der Summe der Winkel der beiden Faktoren entspricht bzw. wenn diese Summe $\geq 2\pi$ ist, dann der Summe der Winkel minus 2π. Weiterhin soll das Produkt mit dem Nullvektor immer wieder der Nullvektor sein.

Definieren kann man ja viel, die Frage ist natürlich, ob diese Abbildung Eigenschaften hat, die man von einer Multiplikation so erwarten würde (vgl. Körperdefinition).

Und wir sehen direkt an der Definition: Diese Multiplikation ist kommutativ, assoziativ, hat als neutrales Element $a = (1, 0) = (1\cos 0, 1\sin 0)$. Jede $a = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat ein inverses Element: $(r^{-1}\cos(-\varphi), r^{-1}\sin\varphi)$.
Auch das Distributivgesetz kann man nachrechnen. Jedoch sollte man sich vorher überlegen, was die Anschauung eigenlich genau für die Koordinaten des Produkts bedeutet: Sei also $a = (x_1 = r_1\cos\varphi_1, y_1 = r_1, \sin\varphi_1)$ und $b = (x_2 = r_2\cos\varphi_2, y_2 = r_2\sin\varphi_2)$.
Dann ist mit den Additionstheoremen für Kosinus und Sinus

$$\begin{aligned}
ab =& (r_1r_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2), r_1r_2\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\
=& (r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2, r_1r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + r_1r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2) \\
=& (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)
\end{aligned}$$

Insgesamt kann man nachrechnen, dass $\mathbb{R}^2$ mit der Standardaddition und dieser Multiplikation wirklich zu einem Körper wird:

Satz 3.9.9. *Die Menge* $\mathbb{C}{:=}\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *mit der Addition und Multiplika-*

tion definiert durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v),$$
$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

bildet einen Körper – den Körper der komplexen Zahlen*.*

Notation:

- Statt $(x, 0) \in \mathbb{C}$, schreiben wir einfach x, und fassen so $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.
- $\mathrm{i} := (0, 1)$ – die *imaginäre Einheit*. Multiplikation mit i entspricht einer Drehung des Vektors um 90° in mathematisch positive Richtung (=entgegen dem Uhrzeigersinn)
- Wir schreiben $(x, y) = x + \mathrm{i}y$.
- Für $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ nennen wir $\mathrm{Re}\, z := x$ den *Realteil* von z und $\mathrm{Im}\, z := y$ den *Imaginärteil* von z.

Dass man statt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nun $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ schreibt, ist erst einmal nur eine Konvention mit der man insbesondere verdeutlicht, dass man komplexe Zahlen, also Elemente in $\mathbb{C}$ nun multiplizieren kann. In dieser Schreibweise für komplexe Zahlen lautet die Addition und Multiplikation:

$$(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v) = (x + u) + \mathrm{i}(y + v)$$
$$(x + \mathrm{i}y) \cdot (u + \mathrm{i}v) = xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu).$$

Insbesondere ist $\mathrm{i}^2 = -1$, und das ist auch der Grund, warum man komplexe Zahlen einführt (also warum man auf $\mathbb{R}^2$ eine Multiplikation einführt): Die Gleichung $x^2 = -1$ hatte in den reellen Zahlen keine Lösung, aber in den komplexen Zahlen sogar zwei Lösungen: i und $-\mathrm{i}$.

Man rechnet mit den komplexen Zahlen im Distributivgesetz im Prinzip wie mit den rellen Zahlen nur unter Verwendung von $\mathrm{i}^2 = -1$, also

$$(x + \mathrm{i}y) \cdot (u + \mathrm{i}v) = xu + \mathrm{i}yu + x\mathrm{i}v + \mathrm{i}^2 yv = xu - yv + \mathrm{i}(yu + xv).$$

Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist einfach die euklidische Norm als Vektor im $\mathbb{R}^2$, also $|z = x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}$, das wäre der Radius des zugehörigen Vektors.

Zwar ist $\mathbb{C}$ ein Körper, wie auch schon die rationalen und reellen Zahlen, aber er kann nicht angeordnet werden, d.h. es gibt keine Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{C}$, die ihn zu einem angeordneten Körper, vgl. Definition 2.5.3, macht:

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe einen Ordnungsrelation $\leq$, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht. Wir schreiben wieder $a < b$, falls $a \leq b$ und $a \neq b$ gilt. Wir überlegen uns zuerst, dass in einem angeordneten Körper immer $a^2 \geq 0$ gilt: Für $a = 0$ ist das richtig. Sei nun $a \neq 0$. Da die Ordnung total ist, muss dann $0 < a$ oder $a < 0$, also $0 < -a$, gelten. Mit der Definition eines angeordneten Körpers folgt dann $0 = 0 \cdot 0 < aa = a^2$ oder $0 = 0 \cdot 0 < (-a)(-a) = a^2$. In allen Fällen ist also $0 \leq a^2$ und damit auch insbesondere $0 \leq 1^2 = 1$ und $0 \leq \mathrm{i}^2 = -1$, was den Widerspruch gibt. □

Es gibt noch eine weitere wichtige Operation auf $\mathbb{C}$ – die *komplexe Konjugation.*

Definition 3.9.10. Die Abbildung $\bar{}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y \mapsto \bar{z} := x - \mathrm{i}y$, heißt *komplexe Konjugation* und $\bar{z}$ ist das *komplex Konjugierte* von z.

Anschaulich ist die komplexe Konjugation die Spiegelung an der x-Achse und ist nicht zu verwechseln mit $z \mapsto -z$, was der Drehung um 180° um den Ursprung entspricht.

Durch einfaches Nachrechnen sieht man direkt:

Lemma 3.9.11. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

(i) $\bar{\bar{z}} = z$ (ii) $z\bar{z} = |z|^2$

(iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (iv) $|z| = |\bar{z}|$

(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ (vi) $z = \bar{z}$ *genau dann, wenn* $z \in \mathbb{R}$

(vii) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Beispiel 3.9.12. Für $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = |z|^{-2}\bar{z}$. Gehört zu z der Vektor mit Radius r und Winkel φ. Dann ist $\frac{1}{z}$ der Vektor mit Radius r^{-1} und Winkel $2\pi - \varphi$.
Zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{2-\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}\frac{2-\mathrm{i}}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

Folgen komplexer Zahlen Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert, wenn sie aufgefasst als Folge in $\mathbb{R}^2$ konvergiert.
Z.B. ist $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 0$, da $\left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \to 0$ für $n \to \infty$.
Für Folgen in $\mathbb{R}^2$ hatten wir gesehen, dass eine Folge in $\mathbb{R}^2$ genau dann konvergiert, wenn sie koordinatenweise konvergiert. In der Sprache für komplexe Zahlen heißt das:

Lemma 3.9.13. *Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Realteile und die Folge ihrer Imaginärteile konvergiert.*

Man kann sich wie in den reellen Zahlen überlegen, dass die Summe zweier konvergenter komplexer Folgen auch wieder konvergiert. Das stimmt auch für Folgen im $\mathbb{R}^n$. Da wir allerdings in den komplexen Zahlen auch eine Multiplikation auf $\mathbb{C}$ haben, können wir komplexe Folgen auch multiplizieren. Es gelten dann (mit gleichem Beweis) die Rechenregeln für konvergente Folgen wie in Satz 3.2.1.

Wir definieren keinen Begriff von uneigentlicher Konvergenz für komplexe Folgen (oder allgemeiner für Folgen in $\mathbb{R}^n$).

Wozu komplexe Zahlen? Die erste Anwendung werden Sie wahrscheinlich in lineare Algebra sehen – beim Lösen polynomialer Gleichungen.

Ein *komplexes Polynom* ist analog zu reellen Polynomen definiert, vgl. Definition 3.2.3, $p(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$. Ist $a_d \neq 0$, so heißt d *Grad* des Polynoms und a_d *Leitkoeffizient*.

Satz 3.9.14 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad d mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h. es gilt*

$$p(z) = a_d(z - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_k)^{\nu_k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Hierbei sind die $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von p und die $\nu_i \geq 1$, $\nu_i \in \mathbb{N}$, die Vielfachheiten *dieser Nullstellen mit $\nu_1 + \ldots + \nu_k = n$.*

Diesen Satz werden wir erst in Analysis II beweisen.

Weitere Anwendungen der komplexen Zahlen:

- Rotationen im $\mathbb{R}^2$ zu kodieren. Das macht das Rechnen leichter.
- In der Elektrotechnik zur Berechnung von Widerständen in Wechselstromkreisen, zur Berechnung von Wechselstrom.
- In der Quantenmechanik
- Allgemein als Rechenhilfsmittel

3.10 Einschub: Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit

Für zwei endliche Mengen, also Mengen mit endlich vielen Elementen, können wir die Anzahl der Elemente zählen und so sagen, wann beide gleich viele Elemente beinhalten. Anderseits haben wir bis jetzt verschiedene unendliche Menge kennengelernt, insbesondere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Unendlich ist klar mehr als endlich. Aber enthalten diese Mengen 'gleich viele' Elemente – ist 'unendlich = unendlich' oder gibt es da 'Qualitätsunterschiede'? Wie kann man das messen?

Denken wir wieder an endliche Mengen: Wie kann man herausfinden, ob zwei Mengen gleich viele Elemente beinhalten, ohne die Anzahl wirklich zu zählen? Vgl. Abbildung 3.3. Diese Idee wollen wir auch für unendliche Mengen verwenden:

Definition 3.10.1. Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt. Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Eine Menge mit unendlich vielen Elementen, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Ist M abzählbar, dann gibt eine bijektive $f\colon \mathbb{N} \to M$ insbesondere eine Möglichkeit die Elemente in M durchzunummerieren, also abzuzählen, – also $f(0)$ als erstes Element, $f(1)$ als zweites Element, etc.

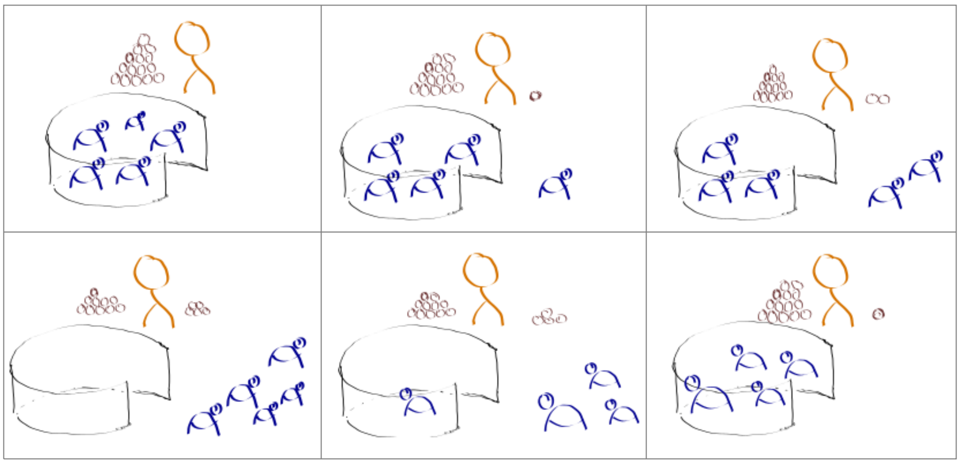


Abbildung 3.3: Wir haben eine Menge von Schafen, die tagsüber den Stall verlassen und abends wiederkommen. Um ohne Zählwörter zu verwenden herauszufinden, ob es abends noch genauso viele Schafe zurückgekommen sind, verwenden wir Steine. Sobald ein Schaf den Stall verlässt, legen wir einen Stein beiseite. Damit haben wir nachdem das letzte Schaf den Stall verlassen hat, genauso viele Steine beiseite gelegt, wie wir Schafe hatten. Wir haben eine Bijektion zwischen der Megen dieser Steine und der Menge der Schafe konstruiert.

Beispiel 3.10.2. (i) Ist A eine Menge mit genau n Elementen und B gleichmächtig zu A, dann muss auch B genau n Elemente enthalten.

(ii) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind gleichmächtig, da $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \mapsto n+1$, bijektiv ist.

(iii) $\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N}{:=}\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind gleichmächtig, da $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \mapsto 2n$, bijektiv ist.

(iv) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, da

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{für } n \geq 0 \\ 2(-n) - 1 & \text{für} n < 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

Satz 3.10.3. *(i) Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

(ii) Sei $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist die Vereinigung

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k{:=}\{x \mid x \in M_\ell \quad \textit{für } \ell \in \mathbb{N}\}$$

wieder abzählbar. Insbesondere ist die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen wieder abzählbar.

Bevor wir diesen Satz beweisen, zeigen wir direkt eine Folgerung:

Folgerung 3.10.4. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar*

Beweis. Aus Satz 3.10.3(ii) folgt, dass $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ abzählbar ist, denn $\mathbb{Z}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\times\{n\}$ ist eine Vereinigung von abzählbaren Mengen. Wir können $\mathbb{Q}$ wie folgt als Teilmenge von $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ auffassen: Für $q\in\mathbb{Q}$, sei $q=\frac{r}{s}$, $r\in\mathbb{Z}$, $s\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, eine Darstellung von q, so dass $|r|$ und s teilerfremd sind (das kann durch Kürzen immer erreicht werden). Diese Darstellung ist eindeutig und somit ist die Abbildung $\iota\colon q\in\mathbb{Q}\mapsto(r,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0\}$ injektiv und damit bijektiv aufs Bild $\iota(\mathbb{Q})$. Andererseits ist $\mathbb{Q}$ und damit $\iota(\mathbb{Q})$ aber eine unendliche Menge. Somit ist nach Satz 3.10.3(i) $\iota(\mathbb{Q})$ und damit $\mathbb{Q}$ abzählbar. $\square$

Beweis von Satz 3.10.3. (i) Sei M abzählbar und $A\subset M$ unendliche Teilmenge. Wir nehmen eine Durchnummerierung von $M=\{a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots\}$. Sei nun $i_1\in\mathbb{N}$ das kleinste i mit $a_i\in A$. Sei $i_2\in\mathbb{N}$ das kleinste i mit $i>i_1$ und $a_i\in A$, usw. Dann ist $a_{i_0},a_{i_1},a_{i_2},\ldots$ eine Durchnummerierung der Elemente von A und ergibt eine Bijektion $f\colon\mathbb{N}\to A$, $j\mapsto a_{i_j}$. Also ist A abzählbar.

(ii) Für jede Menge M_k wählen wir eine Durchnummerierung $M_k=\{a_{k0},a_{k1},a_{k2},\ldots\}$. Nun können wir eine Durchnummerierung von $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ durch folgendes Schema erreichen:

$$\begin{array}{lcl}
M_1 & = & \{\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{15},\ a_{16},\ldots\} \\
M_2 & = & \{\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24},\ a_{25},\ a_{26},\ldots\} \\
M_3 & = & \{\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34},\ a_{35},\ a_{36},\ldots\} \\
M_4 & = & \{\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44},\ a_{45},\ a_{46},\ldots\} \\
M_5 & = & \{\ a_{51},\ a_{52},\ a_{53},\ a_{54},\ a_{55},\ a_{56},\ldots\} \\
M_6 & = & \{\ a_{61},\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}
\end{array}$$

Hierbei wird jedes Element übersprungen, was in zuvor schon einmal vorkam. Dieses Schema des Abzählens nennt man *Cantorsches Diagonalverfahren.*

Also ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ abzählbar. Da $M_1\cup M_2$ eine unendliche Teilmenge von $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ ist, ist es nach (i) auch abzählbar. $\square$

Wir haben bis jetzt viele abzählbare Mengen gesehen, aber gibt es auch überabzählbare?

Satz 3.10.5. *Die Menge der Folgen in* $\{0,1\}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Sei M die Menge der Folgen in $\{0,1\}$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei also M abzählbar, d.h. wir haben eine Durchnummerierung $M=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$. Jedes a_n ist eine Folge in $\{0,1\}$ – sei also $a_n=(b_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $b_{ni}\in\{0,1\}$.

Wir konstruieren nun eine Folge in $\{0,1\}$, die nicht in dieser Durchnummerierung vorkommen kann: Sei

$$c_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } b_{ii}=1 \\ 1 & \text{falls } b_{ii}=0. \end{cases}$$

Dann kann die Folge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ keines der Folgen $a_n = (b_{ni})_i$ sein, da nach Konstruktion $c_n \neq b_{nn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir hatten aber angenommen, dass M durch die a_n durchnummeriert wird. Das ist der Widerspruch und M konnte nicht abzählbar sein. $\square$

Folgerung 3.10.6. *Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen ist überabzählbar*

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zur Menge M der Folgen in $\{0,1\}$ ist. Einem $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, also $A \subset \mathbb{N}$, ordnen wir die Folge

$$\left(a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in A \\ 0 & \text{falls } n \notin A \end{cases}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

zu. Dies ist eine bijektive Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to M$ und zeigt mit dem letzten Satz, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. $\square$

Satz 3.10.7. *$\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist überabzählbar*

Beweis. Wir wollen eine injektive Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ von der Menge M der Folgen in $\{0,1\}$ nach $\mathbb{R}$ angeben. Dann wäre $f\colon M \to f(M)$ bijektiv und wir hatten nach Satz 3.10.5 ein überabzählbare Teilmenge $f(M)$ von $\mathbb{R}$. Nach Satz 3.10.3(i) kann $\mathbb{R}$ somit nicht abzählbar sein.

Wir definieren

$$f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{10^n}.$$

In Beispiel 3.1.7 haben wir uns überlegt, dass dann die Folge $\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{10^n}$ eine Cauchyfolge ist und damit der Grenzwert auf der rechten Seite wirklich in $\mathbb{R}$ existiert. Es bleibt die Injektivität zu überprüfen: Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \in M$ verschieden. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Sei o.B.d.A.* $a_{n_0} = 0$ und $b_{n_0} = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} f((a_n)_n) = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{10^n}}_{a_0,a_1\ldots a_{n_0-1}0a_{n_0+1}\ldots} &\leq \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{a_n}{10^n} + \sum_{n_0+1}^{k}\frac{1}{10^n}\right)}_{a_0,a_1\ldots a_{n_0-1}0111\ldots} \\ < \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0}}}_{a_0,a_1\ldots a_{n_0-1}1000\ldots} &\leq \underbrace{\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{b_n}{10^n}}_{a_0,a_1\ldots a_{n_0-1}1b_{n_0+1}\ldots} = f((b_n)_n) \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Wäre $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ abzählbar, dann wäre, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, nach Satz 3.10.3 auch $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ abzählbar. $\square$

*'o.B.d.A.' bedeutet 'ohne Beschränkung der Allgemeinheit' und wird verwendet, wenn man im Beweis nur einen von mehreren möglichen Fällen betrachtet, weil die anderen Fällen exakt genauso gehen. Z.B. bei Symmetrie der Behauptung. Im obigen Beispiel kann man den zweiten Fall $a_{n_0} = 1$ und $b_{n_0} = 0$ einfach durch Umbennung der Folgen $a_n \leftrightsquigarrow b_n$ erreichen.
https://de.wikipedia.org/wiki/Ohne_Beschr%C3%A4nkung_der_Allgemeinheit

Ausblick: Überabzählbare Mengen sind i.A. nicht gleichmächtig. So sind z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ sind gleichmächtig, aber nicht gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Man kann nicht nur gleichmächtig definieren, sondern auch: Menge A ist höchstens gleichmächtig zu einer Menge B, geschrieben $|A| \leq |B|$, falls es eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt. Man kann zeigen, dass das eine Ordnungsrelation ist und falls $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ gilt, die Menge A und B wirklich gleichmächtig nach unserer Definition sind. Das ist das Schröder-Bernstein Theorem. $|A|$ nennt man *Kardinalität* von A.* Im Fall endlicher Mengen $|A| \in \mathbb{N}$ einfach die Anzahl der Elemente in A.

3.11 Oft vorkommende Folgen

Wir sammeln in diesem Abschnitt noch einige oft vorkommende Folgen:

Beispiel 3.11.1. Für $r \in \mathbb{Q}$†, $r > 0$, ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$:

(Für $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ folgt das z.B. daraus, dass dann $\frac{1}{n^r}$ eine Teilfolge der Nullfolge $\frac{1}{n}$ ist oder auch aus dem Einschnürungssatz angewendet auf $0 \leq \frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n}$.)

Sei nun $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Dann ist $r = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$. Die Funktionen $x \mapsto x^p$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ sind monoton wachsend nach Beispiel 3.6.2. Damit ist auch $x \mapsto x^r$ monoton wachsend. Somit gilt für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n^r}\right| = \frac{1}{n^r} \overset{x^r \text{ mon. wachsend}}{\leq} \frac{1}{n_0^r} \overset{x^r \text{ mon. wachsend}}{<} \epsilon.$$

Beispiel 3.11.2. Für $p > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$:

Sei zunächst $p \geq 1$. Sei $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Dann ist $x_n \geq 0$ für $n > 0$. Nach dem binomischen Satz ist

$$p = (1 + x_n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \overset{x_n > 0}{\geq} n x_n.$$

Also ist $0 < x_n \leq \frac{p}{n}$. Nach dem Einschnürungssatz folgt $x_n \to 0$ und damit $\sqrt[n]{p} \to 1$ für $n \to \infty$.
Für $0 < p < 1$ benutzen wir obigen Grenzwert für $\frac{1}{p} > 1$. Dann ist $\sqrt[n]{\frac{1}{p}} \to 1$ und somit $\sqrt[n]{p} \to 1$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.11.3. Für $q \in \mathbb{R}$ konvergiert q^n für $|q| < 1$ nach Null, vgl. Beispiel 3.1.3. Für $q = 1$ ist es eine konstante Folge. Für $q > 1$ konvergiert es uneigentlich nach ∞:

Nehmen wir es gibt ein $K > 0$ mit $q^n \leq K$ für alle n. Da die n-te Wurzel monoton wachsend ist, ist $q \leq \sqrt[n]{K}$. Mit dem letzten Beispiel folgt $q \leq 1$, was ein Widerspruch wäre. Also ist q^n eine unbeschränkte Folge. Da weiterhin q^n monton wachsend ist, da $q^{n+1} > q^n$ direkt aus $q > 1$ folgt, konvergiert q^n uneigentlich nach ∞.

Für $q \leq -1$ konvergiert q^n weder eigentlich noch uneigentlich.

*https://en.wikipedia.org/wiki/Cardinality

†Diese Aussage wird mit genau dem gleichen Beweis auch für $r \in \mathbb{R}$ gelten, wir haben hier nur noch nicht Potenzen mit irrationalen Exponenten definiert.

Beispiel 3.11.4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

Sei $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann ist $x_n > 0$ für $n > 0$

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_n^i \overset{x_n>0}{\geq} \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

und somit $0 \leq x_n \leq \sqrt{2}{n-1}$. Nach dem Einschnürungssatz folgt $x_n \to 0$ und damit $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.11.5. Für $r \in \mathbb{Q}$[*] und $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{s^n} = 0$ ('Polynome wachsen langsamer als Exponentialfunktionen (bei Basis[†] größer 1)'):

Da $s > 1$, ist $s = 1 + p$ für ein $p > 0$. Dann ist für $n > 2k$

$$s^n = (1 + p)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i > \binom{n}{k} p^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

und somit

$$0 \leq \frac{n^r}{s^n} \leq \frac{k! 2^k}{p^k} \frac{1}{n^{k-r}}.$$

Wählen wir k fest mit $k > r$ und lassen n gegen unendlich gehen, dann folgt die Behauptung mit dem Einschnürungssatz und Beispiel 3.11.1.

3.12 Reihen

Wir lernen als nächstes eine wichtige spezielle Klasse von Folgen kennen lernen:

Definition 3.12.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}$ eine reelle oder komplexe Folge. Dann ist $s_k = \sum_{i=n_0}^{k} a_i$ die *n-te Partialsumme* von a_n. Eine Folge von Partialsummen nennen wir *Reihe* und schreiben $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$. Die a_i heißen *Glieder* der Reihe. Wir sagen, die Reihe konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n$ existiert und schreiben für den Grenzwert auch $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$. Eine reelle Reihe *konvergiert uneigentlich* gegen $\pm\infty$ falls $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ ist.

!! $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ hat zwei Bedeutungen je nach Verwendung: Einmal einfach die Folge der Partialsummen s_n, damit ist dann $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ eine Abbildung $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Weiterhin verwenden wir $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ für den Grenzwert der Folge, falls er existiert. Damit ist dann $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ eine reelle oder komplexe Zahl. !!

Was gemeint ist, wird sich aus dem Kontext ergeben, z.B.: $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ konvergiert, bedeutet die Folge der zugehörigen Partialsumme konvergiert. Wogegen $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = 1$ bedeutet, die Folge konvergiert gegen 1.

Beispiel 3.12.2. Eines der wichtigsten Beispiele überhaupt haben wir schon implizit an verschiedenen Stellen kennengelernt – die *geometrische Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$[‡], $q \in \mathbb{R}$.

---

[*] Diese Aussage wird mit genau dem gleichen Beweis auch für $r \in \mathbb{R}$ gelten, wir haben hier nur noch nicht Potenzen mit irrationalen Exponenten definiert.

[†] Bei $x \mapsto a^x$ wird a *Basis* genannt. Solche Funktionen nennt man auch Exponentialfunktionen, da (sehen wir später) $a^x = e^{x \ln a}$ gilt.

[‡] Für $q = 0$ betrachten wir 0^0 als Eins. Es soll also für alle q: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ sein.

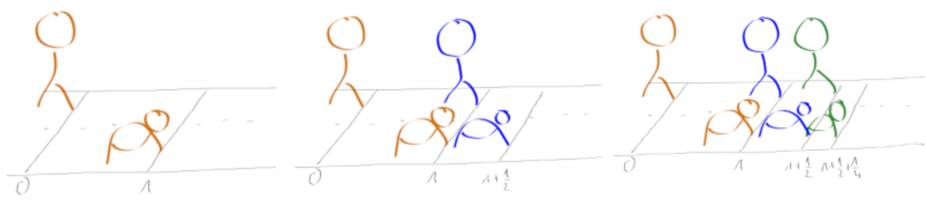


Abbildung 3.4: Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

Nach Definition ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$. Für $q \neq 1$ haben wir für die Partialsummen den expliziten Ausdruck $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, vgl. Beispiel 3.1.7. Aus Beispiel 3.11.3 wissen wir, dass q^n genau dann konvergiert, falls $|q| \leq 1$ und $q \neq -1$ gilt. Damit ist $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$. Die Reihe konvergiert nicht für $|q| \geq 1$.

Die geometrische Reihe ist auch Mittelpunkt des Paradoxon von Achilles und der Schildkröte von Zenon von Elea (5. Jh. v. Chr.), vgl. Abbildung 3.4. Es handelt von einem Wettlauf zwischen Achilles und einer Schildkröte. Beide starten zur selben Zeit, aber die Schildkröte erhält anfangs einen Vorsprung von einem Meter. Achilles ist doppelt so schneller wie die Schildkröte. Zenos argumentiert, dass Achilles die Schildkröte nie erreicht, da er erst den Punkt erreichen muss, an dem die Schildkröte gestartet ist, bis zu diesem Zeitpunkt wird sich die Schildkröte, wenn auch nur um eine kleine Strecke, zu einem anderen Punkt vorwärts bewegt haben; bis Achilles die Strecke zu diesem Punkt zurückgelegt hat, wird die Schildkröte zu einem anderen Punkt gelaufen sein usw. Mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen wir aber schon, dass die einzelnen Zeit- und Wegabschnitte, dass deren Summe konvergiert.

Man kann auch mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen, dass $0,\bar{9} = 1$ ist:

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{10} = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Rechnen mit $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ ist wie mit endlichen Summen? Kurz: Es geht vieles, aber nicht alles, z.B.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-\ldots &= (1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0\\ &= 1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-\ldots = 1\end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass dieses Problem (nicht beliebig Klammern setzen zu dürfen) nur deswegen auftaucht, weil $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ nicht konvergiert. Aber wir werden später sehen, dass z.B. Kommutativität der Summanden auch für konvergente Reihen schiefgehen kann.

Wir schauen uns aber erst noch mehr Beispiele an:

Beispiel 3.12.3. (i) Die Dezimalbruchdarstellung ist eine Darstellung einer reellen Zahl als Reihe $\pm\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ mit $a_0 \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $i > 0$.

(ii) Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert uneigentlich nicht: Wir haben für die 2^k.te Partialsumme

$$\begin{aligned} s_{2^k} =& \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\ \geq& 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2}k. \end{aligned}$$

Da alle Glieder der Folge positiv sind, ist s_n monoton wachsend und nach obigem unbeschränkt. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, vgl. auch Übungsaufgabe 15(iii).

3.12.1 Erste Konvergenzkriterien für Reihen

Wir wollen erste Konvergenzkriterien für Reihen sammeln. Zuvor jedoch werden wir erst noch eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe kennenlernen.

Satz 3.12.4 (Notwendige* Bedingung für Konvergenz einer Reihe)**.** *Falls* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert, dann ist* a_i *eine Nullfolge.*

Beweis. Seien $s_n = \sum_{i=0}^{n}$ die zugehörige Partialsumme. Da die Reihe konvergiert, also $(s_n)_n$ konvergiert, muss $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge sein. Damit gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Das gilt insbesondere für $m = n + 1$. Damit ist $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0 + 1$. Also ist a_n eine Nullfolge. □

Das letze Beispiel der harmonischen Reihe, zeigt, dass die Umkehrung nicht gilt, also dass Nullfolge zu sein, keine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die zugehörige Reihe konvergiert. Aber wir werden sehen, dass im Fall alternierender Reihen und unter einer Zusatzbedingung es doch eine hinreichende Bedingung ist.

Definition 3.12.5. Eine reelle Reihe $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ heißt *alternierend*, falls aufeinanderfolgende Folgenglieder immer verschiedenes Vorzeichen haben.

Satz 3.12.6 (Leibnizkriterium für alternierende reelle Reihen)**.** *Sei* $(a_n)_n$ *eine monoton fallende (und damit insbesondere reelle) Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beweis. Da es sich um eine monoton fallende Nullfolge handelt, ist insbesondere $a_n \geq 0$ (damit ist also $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ wirklich eine alternierende Reihe . Aus der Monotonie der Folge folgt $s_{2n+2} - s_{2n} = -x_{2n+1e} + x_{2n} \leq 0$ und $s_{2n+3} - s_{2n+1} = x_{2n+2} - x_{2n+3} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Außerdem ist $s_{2n+1} = s_n - a_{2n+1} \geq s_{2n}$ und somit $s_{2n+1} \geq s_0 = a_0$ und $s_{2n} \leq s_1 = a_0 - a_1$. Demnach sind die Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt und konvergieren also. Konvergiere $s_{2n} \to a$ und $s_{2n+1} \to b$. Wenn wir nun zeigen

*https://de.wikipedia.org/wiki/Notwendige_und_hinreichende_Bedingung können, dass $a = b$ ist, folgt mit Übungsaufgabe 6(iii), dass auch schon $(s_n)_n$ gegen a konvergiert:

$$a - b = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0. \qquad \square$$

Beispiel 3.12.7. Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}$ konvergieren beide nach dem Leibnizkriterium. Wir können allerdings im Moment noch nicht sagen, wohin diese Reihen konvergieren, aber wir werden später sehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \ln 2$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!} = \sin 1$ ist.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ heißt *alternierende harmonische Reihe.*

Dass alle Folgen genau dann konvergent sind, wenn sie Cauchyfolgen sind, ergibt angewendet auf Reihen das folgende Konvergenzkriterium:

Satz 3.12.8 (Cauchykriterium)**.** *Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ist genau dann konvergent, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left|\sum_{i=m+1}^{n} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n\right| < \epsilon$ für alle $n > m \geq n_0$, $n, m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei s_n die n.te Partialsumme zu $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Dann ist $s_n - s_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$. Damit ist das Cauchykriterium einfach die Aussage: Die Folge $(s_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge ist. $\square$

3.12.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Aus einigen der Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir direkt auch Rechenregeln für konvergente Reihen:

Lemma 3.12.9. *Sei $a, b \in \mathbb{C}$. Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$ und $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = ca$ für alle $c \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Seien $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Dann konvergieren $s_n \to a$ und $s_n \to b$. Wir stellen fest, dass die n-te Partialsumme zu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$ gleich $s_n + t_n$ ist und die zu $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = ca$ gleich cs_n ist. Damit folgt die Konvergenz aus den Rechenregeln für die konvergenten Folgen s_n und t_n. $\square$

Assoziativität bei konvergenten Reihen? Das ist die Frage: Kann man bei einer konvergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ beliebig Klammern setzen oder weglassen ohne, dass sich das Konvergenzverhalten ändert?

Ist die Reihe konvergent, kann man beliebig Klammern setzen und die so entstandene Reihe konvergiert gegen den gleichen Grenzwert: Sei $0 = n_{-1} < n_1 < n_2 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen. Dann gilt

$$a_0 + a_1 + \ldots = (a_0 + \ldots + a_{n_1-1}) + (a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2-1}) + \ldots,$$

also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} a_k\right),$$

da die Folge der Partialsummen zur rechten Reihe eine Teilfolge der Partialsummen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der linken Reihe ist, nämlich $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Andererseits darf man bei konvergenten Reihen nicht einfach weglassen, z.B. ist $\sum_{i=1}^{\infty}(1-1)=0$, aber beim Weglassen der Klammern ergeben sich Probleme.

Kommutativität bei konvergenten Reihen? Das ist die Frage: Kann man bei einer konvergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots$ beliebig Summanden vertauschen? Nein: Als Beispiel schauen wir auf die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots$$

Wir wissen nach dem Leibnizkriterium, dass diese Reihe konvergiert.
Schauen wir nun

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+-\ldots$$

an. Dann gilt für die $3n$.te Partialsumme t_{3n} zu dieser Reihe

$$\begin{aligned} t_{3n} &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+--\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{4n-2}{-}\frac{1}{4n}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+-\ldots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), \end{aligned}$$

was der Hälfte der $2n$.ten Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ entspricht. D.h. wenn überhaupt, konvergiert diese Reihe nach $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ (Die Reihe konvergiert wirklich, wie man sich leicht überlegen kann, wenn man t_{3n+1} und t_{3n+2} mit t_{3n} vergleicht.).

3.12.3 Absolute Konvergenz

Woche 5 Im letzten Abschnitt haben wir ein Beispiel einer konvergenten Reihe gesehen, bei der nach Vertauschung unendlich vieler Glieder zwar wieder eine konvergent Reihe entsteht, diese aber einen anderen Grenzwert hat. Den Prozess des Vertauschens unendlich vieler Reihenglieder nennt man Umordnung:

Definition 3.12.10. Sei $\sigma\colon \mathbb{N}_{\geq n_0}:=\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq n_0\}\to\mathbb{N}_{\geq n_0}$ eine bijektive Abbildung und $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ eine Reihe. Dann heißt $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_{\sigma(i)}$ eine *Umordnung* dieser Reihe.

Es gibt aber eine besondere Klasse von konvergenten Reihen, bei welcher wir nach Herzenslust umordnen dürfen, ohne den Grenzwert zu verändern – die absolut konvergenten Reihen:

Definition 3.12.11. Eine reelle/komplexe Reihe $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist <u>nicht</u> absolut konvergent.

Als nächstes zeigen wir, dass die absolut konvergenten Reihen wirklich eine Teilmenge der konvergenten Reihen sind:

Lemma 3.12.12. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Da $\sum_{i=n_0}^{\infty}|a_i|$ konvergiert, erfüllt diese Reihe das Cauchykriterium, Satz 3.12.8. Also gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{i=n+1}^{m}|a_i|\right| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_0$. Nach der Dreiecksungleichung ist somit aber auch

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \left|\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|\right| < \epsilon.$$

Somit erfüllt auch $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ das Cauchykriterium und konvergiert damit. □

Nun zu Umordnungen:

Satz 3.12.13 (Umordnungssatz)**.** *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist wieder absolut konvergent und hat den selben Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe.*

Beweis. Sei $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ die n.te Partialsumme der absolut konvergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i =: s$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Da die Reihe auch absolut konvergiert gibt es auch ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=n+1}^{\infty}|a_i| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Sei nun $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$.

Sei nun $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $t_n = \sum_{i=0}^{n} a_{\sigma(i)}$ die n.-te Partialsumme der zugehörigen Umordnung. Wir wollen zeigen, dass t_n auch gegen s konvergiert: Wir wählen $n_3 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\{0, 1, \ldots, n_2\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n_3)\}$ gilt. Das geht immer, da $\{0, 1, \ldots, n_2\}$ und damit auch $\sigma^{-1}(\{0, 1, \ldots, n_2\}) \overset{\sigma \text{ bijektiv}}{=} \{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(n_2)\}$ endliche Mengen sind.

Für $n \geq n_3$ besteht $t_n - s_{n_2}$ nur aus Summanden a_i mit $i > n_0$. Also gilt für $n \geq n_3$

$$\begin{aligned} |t_n - s_{n_2}| &\leq \sum_{i=n_2+1}^{\infty} |a_i| \overset{n_2 \geq n_0}{<} \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und damit} \\ |t_n - s| &= |t_n - s_{n_2} + s_{n_2} - s| \leq |t_n - s_{n_2}| + |s_{n_2} - s| < \epsilon. \end{aligned}$$ □

Für den Umordnungssatz für Reihen ist es wirklich nötig, dass die Reihe absolut konvergent ist. Der nächste Satz zeigt uns das für reelle Reihen:*

Satz 3.12.14 (Riemannscher Umordnungssatz)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, die nicht absolut konvergiert.*

*Für komplexe konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, ist die Menge der Grenzwerte von Umordnungen dieser Reihe entweder eine Gerade in $\mathbb{C}$ oder schon ganz $\mathbb{C}$. Das ist der Steinitzsche Umordnungssatz.

(i) Für jedes $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, gibt es eine Umordnung der Reihe, die gegen α (ggf. uneigentlich) konvergiert.

(ii) Es gibt eine Umordnung, die beschränkt und nicht konvergent ist.

Beweis. Wir zeigen hier aus Zeitgründen nur (i) und dort nur den Fall $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Ideen sonst sind sehr ähnlich. Wir definieren $I_+ := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$ und $I_- := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0\}$.

- Die Mengen I_+ und I_- sind unendlich und damit (da Teilmenge von $\mathbb{N}$) abzählbar.

  Um zu zeigen, dass $I_\pm$ beide unendlich sind, führen wir einen Beweis durch Widerspruch: Sei o.B.d.A. I_- endlich. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass alle Elemente in I_- kleiner als n_0 sind. Da auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergiert und alle Reihenglieder nun positiv sind, muss diese Reihe und damit auch die Ausgangsreihe absolut konvergieren. Dies widerspricht den Voraussetzungen. Also ist I_- unendlich.

Sei $f_\pm \colon \mathbb{N} \to I_\pm$ eine Durchnummerierung von $I_\pm$. Sei $b_n := a_{f_+(n)}$ und $c_n := a_{f_-(n)}$. Die Folgen $(b_n)_n$ bzw. $(c_n)_n$ sind nun Teilfolgen von $(a_n)_n$ mit ausschließlich nichtnegativen bzw. negativen Folgengliedern. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, sind a_n und somit auch b_n und c_n Nullfolgen.

- Beide Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sind unbeschränkt:

  Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ beide beschränkt, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sogar absolut. Ist nur eine dieser beiden Reihen beschränkt, dann wäre auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ unbeschränkt.

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $b_0 + b_1 + \ldots + b_{n_0} \geq \alpha$.
Sei $m_1 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $\beta_1 := b_0 + b_1 + \ldots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \ldots + c_{m_1} < \alpha$.
Dann ist $b_0 + \ldots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \ldots + c_{m_1-1} \geq \alpha$ und damit $|\alpha - \beta_1| \leq |c_{m_1}|$.
Sei $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, die kleinste natürliche Zahl mit $\gamma_1 := b_0 + b_1 + \ldots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \ldots + c_{m_1} + b_{n_0+1} + \ldots + b_{n_1} \geq \alpha$. Wie oben sieht man $|\alpha - \gamma_1| \leq b_{n_1}$.
Sei $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_2 > m_1$, die kleinste natürliche Zahl mit $\beta_2 := b_0 + b_1 + \ldots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \ldots + c_{m_1} + b_{n_0+1} + \ldots + b_{n_1} + c_{m_1+1} + \ldots + c_{m_2} < \alpha \ldots$
So erhalten wir Folgen $(n_k)_{k>0}$, $(m_k)_{k>0}$, $(\beta_k)_{k>0}$ und $(\gamma_k)_{k>0}$ mit

$$|\alpha - \beta_k| \leq |c_{m_k}| \quad \text{und} \quad |\alpha - \gamma_k| \leq b_{n_k}.$$

Da b_n und c_n Nullfolgen sind, gilt $\beta_k \to \alpha$ und $\gamma_k \to \alpha$ für $k \to \infty$. Damit konvergiert die Umordnung

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_{n_0} + c_0 + c_1 + \ldots + c_{m_1} + b_{n_0+1} + \ldots + b_{n_1} + c_{m_1+1} + \ldots + c_{m_2} + b_{n_1+1} + \ldots$$

gegen α. □

3.12.4 Kriterien für absolute Konvergenz

Es gibt einige Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen, die dann natürlich automatisch auch Kriterien für Konvergenz von Reihen sind:

Satz 3.12.15. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe. Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, dann ist die Reihe absolut konvergent:*

(i) (Majorantenkriterium) *Es gibt eine konvergente reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $|a_n| \leq c_n$ für alle n.*

(ii) (Quotientenkriterium) *Es gibt ein $q \in [0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \geq n_0$ ist.*

(iii) (Wurzelkriterium) *Es gibt ein $q \in [0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ ist.*

Andererseits konvergiert die Reihe <u>*nicht absolut*</u>*, falls eine der folgenden Bedinungen erfüllt ist*

(iv) (Minorantenkriterium) *Es gibt eine nicht-konvergente reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $0 \leq c_n \leq |a_n|$ für alle n.*

(v) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1, a_n \neq 0 \quad \textit{oder} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

für alle $n \geq n_0$.

- !! Es ist wichtig, dass $q < 1$ ist: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$ (und auch $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \leq 1$) für alle n, ist aber nicht konvergent.
- Die Bedinungen im Quotienten- und im Wurzelkriterium sind äquivalent zu

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \text{bzw.} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Im ersten Fall muss $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ sein.

Beweis von Satz 3.12.15. (i) Die Folge der Partialsummenn von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben durch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ beschränkt. Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und somit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
(iv) Da alle c_n nichtnegativ sind, muss $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty$ sein, damit die Reihe nicht konvergiert. Wegen $c_n \leq a_n$ für alle n, ist somit auch die Folgen der Partialsummen zu $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ monoton wachsend und unbeschränkt und somit gilt auch hier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$.
(ii) Es gilt $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \ldots \leq q^{n-n_0}|a_{n_0}|$. Da für $q \in [0,1)$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|q^n$ konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut

konvergiert: Wir wählen $c_n = |a_n|$ für $n < n_0$ und $c_n = q^{n-n_0}|a_{n_0}|$ für $n \geq n_0$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + \sum_{k=n_0}^{\infty} q^{n-n_0}|a_{n_0}| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + |a_{n_0}| \sum_{i=0}^{\infty} q^i$.
(iii) Da $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$ und $q \in [0,1)$ folgt wie in (ii) die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit dem Majorantenkriterium wie in (ii).
(iv) In beiden Fällen ist a_n keine Nullfolge und damit kann die Reihe nicht konvergent sein. D.h. hier sieht man sogar, dass die Reihen nicht konvergieren, was mehr als die Behauptung ist, dass sie nicht absolut konvergieren. □

Beispiel 3.12.16. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0$ für $k \to \infty$.

Im Beweis haben wir gesehen, dass das Wurzel- und Quotientenkriterium ein Spezialfall des Majorantenkriterium ist, in dem man mit der geometrischen Reihe vergleicht. Das Wurzelkriterium ist außerdem stärker als das Quotientenkriterium, denn es gilt:

Lemma 3.12.17. *Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Beweis. Für $\limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \infty$ ist die Behauptung erfüllt, sein nun $\limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = q \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Somit gilt für alle $n \geq n_0$

$$c_n \leq qc_{n-1} \leq q^2 c_{n-2} \leq \dots q^{n-n_0} c_{n_0}$$

und damit für $q \neq 0$

$$\sqrt[n]{c_n} \leq q \sqrt[n]{q^{-n_0} c_{n_0}} \to q \text{ nach Beispiel 3.11.2},$$

und $\sqrt[n]{c_n} \to 0$ für $q = 0$, was $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq q$ impliziert. □

Ist das Quotientenkriterium für eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erfüllt, dann ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. Mit dem letzten Lemma ist dann $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ und somit ist das Wurzelkriterium erfüllt. Allerdings hat es trotzdem Sinn beide Kriterien zu haben, da es manchmal schwierig ist den lim sup von $\sqrt[n]{|a_n|}$ wirklich zu bestimmen.

Beispiel 3.12.18. Betrachten wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} & \text{für ungerade } n \\ 3^{-\frac{n}{2}} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

Hier hilft das Quotientenkriterium nicht, da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \begin{cases} \frac{2}{3}^{\frac{n+1}{2}} & \text{für ungerade } n \\ \frac{1}{2}\frac{3}{2}^{\frac{n}{2}} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

und somit $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$ gilt. Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir dagegen für $n \geq 1$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[2n]{2}} & \text{für ungerade } n \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

und damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Also konvergiert die Reihe.

Beispiel 3.12.19. Es gibt absolut konvergente Reihen, deren Konvergenz nicht mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium gezeigt werden können: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.

Das Quotienten- und Wurzelkriterium können wir nicht anwenden, da $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$ ist.

Aber wir können direkt zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert: Für $n < 2^m$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{k^2} \right) \leq \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{2^{2i}} \right) = \sum_{i=0}^{m} 2^i 2^{-2i} = \sum_{i=0}^{m} 2^{-i} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2.\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
Mit der gleichen Methode kann man auch zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für alle $s > 1$ konvergiert.

3.12.5 Potenzreihen

Als einen Spezialfall von Reihen betrachten wir nun Potenzreihen, die man als Verallgemeinerung von Polynomen auffassen kann:

Definition 3.12.20. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$, wobei hier für $x = 0$ immer $0^0 = 1$ gesetzt wird, also ist die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

Setzen wir $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert }\}$, dann ist

$$f \colon \operatorname{dom} f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Funktion.

Beispiel 3.12.21. (i) Jedes Polynom ist eine Potenzreihe mit $a_n = 0$ für alle $n \geq n_0$ bei geeignetem $n_0 \in \mathbb{N}$.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium für alle $x \in \mathbb{C}$:

$$\frac{|\frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}|}{|\frac{1}{k!} x^k|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Also erhalten wir eine Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ – die *Exponentialfunktion*

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Lemma 3.12.22. *Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = x_0$ konvergiert, so konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_0|$ und die Konvergenz ist sogar absolut.*

Dies ist nicht unbedingt wahr für $|x| = |x_0|$: Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ konvergiert für $x_0 = 1$ (nach dem Leibinizkriterium) und damit nach letztem Lemma für alle x mit $|x| < 1$. Aber sie konvergiert nicht für $x = 1$ (harmonische Reihe).

Beweis von Lemma 3.12.22. Für $x_0 = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $x_0 \neq 0$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{k} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{k} |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

Wir wollen das Majorantenkriterium nutzen, um die Konvergenz dieser Reihe für $|x| \leq |_0|$ zu nutzen. Es ist $\left| \frac{x}{x_0} \right| =: q < 1$. D.h. wenn zeigen können, dass $|a_n x_0^n|$ beschränkt ist, dann folgt die Konvergenz aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Da jedoch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, ist $(a_n x_0^n)_n$ eine Nullfolge und damit beschränkt. □

Definition 3.12.23. Der *Konvergenzradius* einer Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ ist

$$R := \sup \left\{ r \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists x \in \mathbb{C} : |x| = r \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} |c_i x^i| \text{ konvergiert} \right\}$$

Satz 3.12.24. *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ absolut. Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$ konvergiert die Reihe nicht.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$. Dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $|x| < |x_0| \leq R$, so dass die Potenzreihe für x_0 konvergiert. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.12.22. Sei nun $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$. Falls die Potenzreihe für x konvergiert, dann konvergiert zu nach Lemma 3.12.22 absolut für $\frac{|x|+R}{2} \in (R, |x|)$. Das widerspricht der Definition des Konvergenzradius, die Potenzreihe kann also für x nicht konvergieren. □

Aus dem Wurzelkriterium für die Konvergenz von Reihen, ergibt sich:

Satz 3.12.25. *Für den Konvergenzradius der Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *gilt*

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1},$$

wobei wir $\frac{1}{0} = \infty$ *und* $\frac{1}{\infty} = 0$ *setzen.*

Beweis. Ist $|x| < \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$, dann folgt die Konvergenz der Reihe mit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ und dem Quotientenkriterium. Sei nun $|x| > R$, also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$. Damit gibt es eine Teilfolge mit $|a_{n_j} x^{n^j}| > 1$ für alle $j \geq j_0$ und somit kann $(a_n x^n)_n$ keine Nullfolge sein und die Reihe kann nicht konvergieren. □

Wie auch das Wurzelkriterium ist diese explizite Formel nicht immer nützlich, da es schwer sein kann, den lim sup von $\sqrt[n]{|a_n|}$ zu berechnen.

Da man Potenzreihen als verallgemeinerte Polynome betrachen kann, können wir uns analog wie bei Polynomen überlegen, was die Werte der Reihe machen für $x_n \to x$:

Satz 3.12.26. *Sei* R *der Konvergenzradius der Potenzreihe* $p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. *Sei* x_n *eine komplexe Folge und Grenzwert* $\hat{x}$, *so dass* $|\hat{x}| < R$ *und* $|x_n| < R$ *für alle* n. *Dann gilt* $p(x_n) \to p(\hat{x})$ *für* $n \to \infty$.

Beweis. Sei $r = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $|\hat{x}| \leq r < R$.
Da für $|x| < R$ die Potenzreihe absolut konvergiert, also auch für $x = r$, gibt es für $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=k}^{\infty} |a_i| r^n < \frac{\epsilon}{4}$ für alle $k \geq k_0$.
Es gilt

$$\begin{aligned} |p(x_n) - p(\hat{x})| &\leq |\underbrace{\sum_{k=0}^{k_0} a_k x_n^k}_{=:q(x_n)} - \sum_{k=0}^{k_0} a_k \hat{x}^k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k x_n^k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k \hat{x}^k| \\ &\leq |q(x_n) - q(x)| + 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k| r^k \\ &\leq |q(x_n) - q(x)| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Aus Beispiel 3.2.4 wissen wir, dass aus $x_n \to \hat{x}$ für $n \to \infty$ folgt für Polynome $q(x_n) \to q(\hat{x})$ für $n \to \infty$. D.h. für $n \to \infty$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |p(x_n) - p(\hat{x})| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $\limsup_{n\to\infty} |p(x_n) - p(\hat{x})| = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = p(\hat{x})$. □

3.12.6 Die Exponentialfunktion

Wir hatten gesehen, dass

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

eine Funktion, die Exponentialfunktion, auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, da der Konvergenzradius dieser Potenzreihe unendlich ist. Um zu sehen, wo der Name Exponentialfunktion herkommt, überlegen wir uns zunächst:

Lemma 3.12.27. *$exp(1) = e$*

Beweis. Die Eulersche Zahl ist definiert als $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Mit dem binomischen Satz haben wir somit $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$.

Sei $\epsilon > 0$. Da die Reihe $\exp(1)$ konvergiert, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!}| < \frac{\epsilon}{4}$ für alle $k \geq k_0$.

Es ist

$$\left|\exp(1) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Es gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \frac{1}{k!} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n}) \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

und insbesondere gilt $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \to \frac{1}{k!}$. D.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0(k) \geq k$ mit

$$\left|\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!}\right| < \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{2^k}$$

für alle $n \geq n_0(k)$. Zusammen ergibt sich für alle $n \geq \max\{k_0, n_0(0), n_0(1), \ldots, n_0(k_0)\}$

$$\begin{aligned} \left|\exp(1) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right| &\leq \sum_{k=0}^{k_0} \left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right| + 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{2^k} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

□

Lemma 3.12.28. *e ist irrational.*

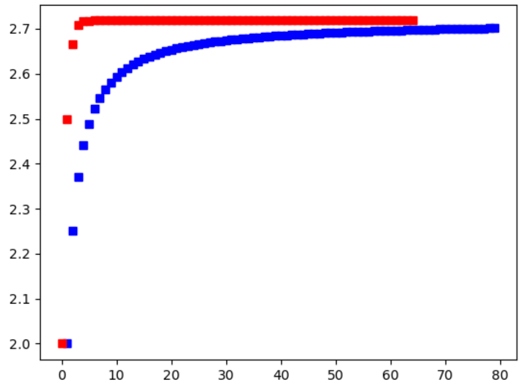


Abbildung 3.5: Die Exponentialreihe approximiert e wesentlich schneller als die Folge vom Zinseszins: Rot – $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, Blau – $n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709 3\ldots$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2}\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \frac{2}{(n+1)!} \end{aligned}$$

und damit

$$0 < n!e - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} < \frac{2}{n+1}.$$

Wäre e rational, also der Form $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, dann wäre insbesondere $n!e \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq q$. Dann wäre $n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ eine natürliche Zahl größer als Null und kleiner als $\frac{2}{n+1}$. Das ist ein Widerspruch, also kann e nicht rational sein. □

Wir wollen als nächstes sehen, dass $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ ist und dann $\exp(x)$ nutzen, um e^x für $x \in \mathbb{R}$ zu definieren.

Falls das stimmt erwarten wir insbesondere, dass $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ gilt. Um das nachzurechnen, müssen wir Reihen multiplizieren können:

*https://oeis.org/A001113

Satz 3.12.29 (Cauchy-Produkt). *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Sei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)$$

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$. Wir überlegen uns zuerst, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent ist:*

$$\sum_{k=0}^{n} |c_n| \leq \sum_{i+j\leq n} |a_i||b_j| \leq \sum_{i,j\leq n} |a_i||b_j| = s_n t_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$$

Um zu zeigen, dass der Grenzwert der gesuchte ist, schätzen wir ab (vgl. auch Abbildung 3.6):

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} c_k - \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=0}^{n} b_i\right| &= \left|\sum_{i+j\leq n} a_i b_j - \sum_{i,j\leq n} a_i b_j\right| \leq \sum_{i,j\leq n; i+j>n} |a_i|\,|b_j| \\ &\leq \sum_{i,j\leq n} |a_i|\,|b_j| - \sum_{i,j\leq \frac{n}{2}} |a_i|\,|b_j| \leq s_n t_n - s_m t_m,\end{aligned}$$

wobei $m = \frac{n}{2}$ für n gerade und $m = \frac{n-1}{2}$ für n ungerade ist. Da $s_n t_n$ konvergiert, ist es Cauchyfolge. D.h. gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|s_n t_n - s_m t_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Mit der Abschätzung von oben, folgt somit die Behauptung. □

Satz 3.12.30. *(i) Es gilt $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$.*

(ii) Für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt $exp(x \cdot y) = (exp(y))^x$. Insbesondere ist damit $exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{Q}$.

Beweis. (i) Mit dem Cauchyprodukt aus dem letzten Satz folgt

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).\end{aligned}$$

(ii) Für $x \in \mathbb{N}$ folgt die Aussage aus (i) mittels Induktion: Für $x = 1$ ist es klar. Stimmt die Aussage für $x = n$. Dann folgt

$$\exp((n+1)y) = \exp(ny + y) = \exp(ny)\exp(y) = (\exp(y))^n \exp(y) = (\exp(y))^{n+1}.$$

*$\sum_{i+j\leq n}$ bedeutet: Summe über alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i + j \leq n$. Da es sich dann um eine endliche Summe handelt, ist die Reihenfolge der Summanden egal und man kann deshalb diese Kurzschreibweise nutzen.

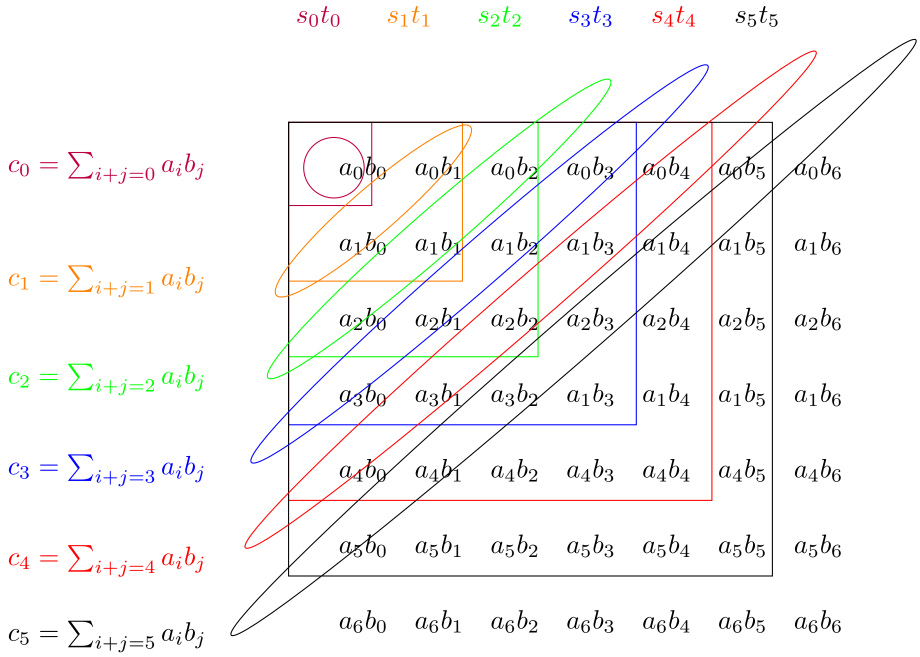


Abbildung 3.6: Anschauung zum Cauchy-Produkt zweier absolut konventer Reihen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$. D.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist die Summe über die Summen der Diagonalen. Die Rechtecke den Produkten der Partialsummen $s_n t_n$ für $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ entsprechen.

Sei nun $x = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Dann ist

$$(\exp(y))^m = \exp(my) = \exp(n\frac{m}{n}y) = (\exp(\frac{m}{n}y))^n$$

und somit $\exp(\frac{m}{n}y) = (\exp(y))^{\frac{m}{n}}$.
Es bleiben noch die negativen rationalen x: Dann ist $-x$ eine positive rational Zahl und wir haben

$$1 = \exp(0) = \exp(xy + (-x)y) = \exp(xy)\exp((-x)y) = (\exp(xy))(\exp(y))^{-x}$$

und somit haben wir $\exp(x \cdot y) = \exp(y)^x$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{Q}$. $\square$

Damit können wir $e^z := \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ definieren und sind kompatibel mit der Definition von e^x für $x \in \mathbb{Q}$, die wir zuvor hatten.

Satz 3.12.31 (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion)**.** *Für die reelle Exponentialfunktion exp*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gilt*

(i) exp$(0) = 1$ *und exp*$(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*

(ii) exp ist streng monoton wachsend

(iii) Für jede reelle Folge $x_n \to \infty$ *gilt exp*$(x_n) \to \infty$*.*

(iv) Für jede reelle Folge $x_n \to -\infty$ *gilt exp*$(x_n) \to 0$*.*

(v) $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist bijektiv.*

Beweis. (i) $\exp(0) = 1$ ist klar. Für $x > 0$ folgt $\exp(x) > 0$ direkt, da alle Folgenglieder nichtnegativ sind und das erste immer gleich eins ist. Sei nun $x < 0$, dann ist $-x > 0$ und $\exp(x) = (\exp(-x))^{-1} > 0$.
(ii) Für $x > 0$ ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots > 1$. Sei $x > y$. Dann ist

$$\exp(x) = \exp(y)\exp(\underbrace{x - y}_{>0}) > \exp(y).$$

(iii) Für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1 + x$. Damit folgt aus $x_n \to \infty$, dass $\exp(x_n) \to \infty$ gilt.
(iv) Für $x < 0$ folgt aus $0 < \exp(x) = \exp(-x)^{-1} < (1 + x)^{-1}$, dass $\exp(x) \to 0$ für $x_n \to -\infty$.
(v) Aus (ii)-(iv) folgt $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$. Injektivität folgt aus streng monoton wachsend. Es bleibt die Surjektivität. Das kann man aus Satz 3.12.26 mittels einer Intervallschachtelung wie bei der Existenz der n-ten Wurzel beweisen. Solch ein Argument werden wir bald im allgemeinern Rahmen führen, deswegen führen wir es hier nicht aus. $\square$

Da die Exponentialfunktion von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$ bijektiv ist, können wir die Umkehrfunktion definieren:

Definition 3.12.32. Der *Logarithmus* $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der rellen Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$.

Aus den Eigenschaften der rellen Exponentialfunktion lesen sich direkt folgende Eigenschaften des Logarithmus ab:

Satz 3.12.33. *Für* $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) Aus $x_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$ *folgt* $\ln x_n \to \infty$.

(iii) Aus $x_n \to 0$, $x_n > 0$, *für* $n \to \infty$ *folgt* $\ln x_n \to -\infty$.

(iv) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Mit Hilfe des Logarithmus führen wir nun relle Potenzen von reellen positiven Zahlen ein:

Definition 3.12.34. Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$ sei

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a).$$

Das diese Definition konsistent ist mit unserer Definition von Seite 29 für Potenzen mit rationalen Exponenten folgt aus

$$\exp(x \cdot \ln a) \overset{Satz\ 3.12.30(ii)}{=} (\exp(\ln a))^x = a^x.$$

Mit dieser Definition, der Funktionalgleichung für exp aus Satz 3.12.30(ii) und den Eigenschaften des Logarithmus lassen sich dann die Potenzgesetze, so wie wir sie von rationalen Exponenten kennen, auch allgemein nachrechnen:

Lemma 3.12.35. *Für* $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r a^s = a^{r+s}, \quad a^r b^r = (ab)^r$$

Beweis. Übungsaufgabe □

Alternative Definition von a^x für $x \in \mathbb{R}$: Man kann a^x für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und $x \in \mathbb{R}$ auch wie folgt definieren: Sei x_n eine Folge rationaler Zahlen mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Da wir Potenzen mit rationalen Exponenten schon früher definiert haben, existiert a^{x_n}. Wir setzen

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

Bei dieser Definition müsste man einiges Überprüfen: Existenz des Grenzwerts und Wohldefiniertheit, d.h. Unabhängigkeit von der gewählten Folge. Wenn man das hat, stimmt es wenigstens direkt automatisch mit der Definition von a^x für $x \in \mathbb{Q}$ überein, da man dort immer die konstante Folge nehmen kann. Es bleibt dann noch mit dieser Definition die Potenzgesetze zu überprüfen und zu zeigen, dass es äquivalent zur obigen Definition ist. Machen wir hier alles erst mal nicht.

Woche 6 **Sinus und Kosinus** Betrachten wir nun $\exp(\mathrm{i}x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die zugehörige Reihe eine komplexe absolut konvergente Reihe. Diese konvergiert, wenn die Reihe ihrer Real- und Imaginärteile absolut konvergent. Dies gibt uns also automatisch die Konvergenz zweier weiterer Reihen:

Da $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ und $\mathrm{i}^4 = 1$ ist, haben wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} x^k}{k!} + \mathrm{i} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} x^k}{k!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

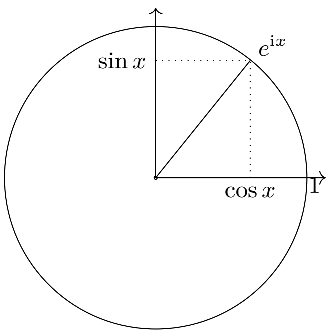
Wir setzen
$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{und} \quad \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$
Beide Reihen haben Konvergenzradius ∞.
Also ist
$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \quad (\textit{Eulersche Formel})$$

Was man hier sofort für $x = 0$ ablesen kann: $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$. Außerdem sieht man sofort an den Potenzreihen: $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ und damit gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{\mathrm{i}x}} = \overline{\cos x + \mathrm{i} \sin x} = \cos x - \mathrm{i} \sin x = \cos(-x) + \mathrm{i} \sin(-x) = e^{\mathrm{i}(-x)} = e^{-\mathrm{i}x}.$$

Geometrische Anschauung. Es ist
$$|e^{\mathrm{i}x}|^2 = e^{\mathrm{i}x}\overline{e^{\mathrm{i}x}} = e^{\mathrm{i}x} e^{-\mathrm{i}x} = e^{\mathrm{i}x - \mathrm{i}x} = e^0 = 1,$$

damit liegen die komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis:



Was wir noch nicht wissen (kommt später in Satz 4.1.18), dass alle Punke auf dem Einheitskreis die Form $e^{\mathrm{i}x}$ für $x \in \mathbb{R}$ haben.

Lemma 3.12.36 (Trigonometrischer Pythagoras)**.** *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*[*]

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Beweis. Wir benutzen die Eulerformel:

$$\begin{aligned} 1 =& |e^{\mathrm{i}\alpha}|^2 = e^{\mathrm{i}\alpha} e^{-\mathrm{i}\alpha} = (\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)(\cos \alpha + \mathrm{i} \underbrace{\sin(-\alpha)}_{=-\sin \alpha}) \\ =& \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.12.37 (Additionstheoreme für Sinus und Kosinus)**.** *Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) =& \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) =& \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen wieder Satz 3.12.30.(i) und die Eulerformel:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} =& e^{\mathrm{i}\alpha} e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)(\cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta) \\ =& (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + \mathrm{i}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Andererseits ist $e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i} \sin(\alpha+\beta)$. Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Additionstheoreme. □

Mehr zu Eigenschaften von Sinus und Kosinus kommt später.

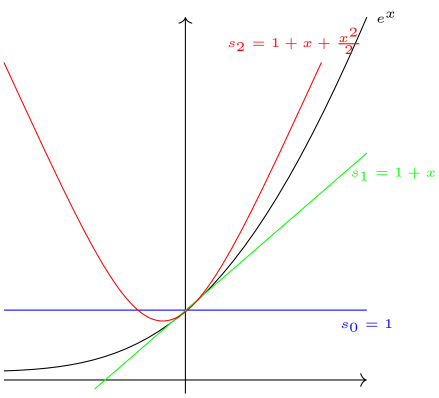
[*] $\cos^2 \alpha := (\cos \alpha)^2$ und analog für den Sinux.

4 Funktionen in einer Variablen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Funktionen mit einer Variablen beschäftigen und dabei wird es zumeist um die Approximation von Funktionen durch 'leichtere Funktionen' wie Polynome gehen.

Wenn wir an die Exponentialfunktion denken, dann hatten wir diese über die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ definiert. Diese Reihe war für alle $x \in \mathbb{R}$ (absolut) konvergent. D.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ gegen e^x. Man kann das so verstehen, dass die Polynome $s_n(x)$ die Exponentialfunktion annähern. Besonders gut bzw. schnell in der Nähe von 0. (Wenn man nahe $x_0 \neq 0$ approximieren wollte, würde man eher auf eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ gehen.)

Die Frage, die uns nun ausgiebig beschäftigen wird, ist, ob sowas immer geht/wahr ist. Die Antwort ist jein – kommt darauf an, was man mit 'sowas' meint. Nicht jede Funktion wird eine konvergente Potenzreihe sein - auch wenn es eine große Klasse von Funktionen gibt, die das sind. Für eine noch größere Klasse werden sich allerdings Polynome finden lassen, die eine gegebene Funktion f in der Umgebung eines Punktes $(x_0, f(x_0))$ gut approximieren und die Approximation wird dann i.A. besser je höher der Grad des Polynoms ist. Was heißt hier besser? Dass die Differenz 'Funktion - Polynom' wenn x sich x_0 annähert, schneller gegen Null geht. Das mindeste sollte aber sein, dass diese Differenz überhaupt gegen Null geht.



Bei der Exponentialfunktion approximiert z.B. $s_0(x) = 1$ Funktionswerte e^x nahe $x = 0$, aber $s_1(x) = 1 + x$ ist für x die nahe genug eine bessere Approximation von e^x. Man sieht am Graphen, dass $|e^x - s_1(x)|$ für x nahe 0 kleiner als $|e^x - s_0(x)|$ ist.

Andererseits sehen wir am Beispiel, wo $x \leq 0$ auf 0 abgebildet wird und $x > 0$ auf 1, dass schon die 'nullte Approximation' mit konstanten Funktionen (hier $x \mapsto 0$) i.A. nicht Funktionswerte nahe $(x_0, f(x_0))$ approximieren müssen (Egal wie klein $x > 0$ ist, ist der Funktionswert 1 und damit weit weg von 0).

Wir werden verschiedene Klassen von Funktionen kennenlernen, wo diese Approximationen (jeweils bis zu einem bestimmten Grad des Polynoms) funktionieren und beginnen werden wir mit der nullten Approximation, der Approximation durch konstante Funktionen nahe einer gegebenen Stelle – das wird der Begriff der Stetigkeit sein.

4.1 Stetigkeit

4.1.1 Folgenstetigkeit und Stetigkeit

Wir wollen als erste Approximation den Stetigkeitsbegriff kennenlernen:

Definition 4.1.1. Eine Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *in* $x_0 \in A$ *folgenstetig*, wenn es für alle Folgen $(x_n)_n$ in A mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x_0)$ ist. Die Funktion f heißt *folgenstetig*, wenn $f\colon A \to \mathbb{R}$ in allen $x \in A$ folgenstetig ist.

Beispiel 4.1.2.

- Für einige Funktionen haben wir die Folgenstetigkeit schon überprüft ohne das so zu benennen: Polynome und rationale Funktionen sind folgenstetig nach Beispiel 3.2.4, Potenzreihen sind stetig für alle $x \in (-R, R)$ mit R der Konvergenzradius nach Satz 3.12.26 Konvergenzradius.

  Damit sind exp, sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ folgenstetig.

- Die *Heaviside Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $$x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

  ist folgenstetig in allen $x \neq 0$: Sei o.B.d.A. $x > 0$ (Der Fall $x < 0$ geht analog). Sei x_n eine Folge mit $x_n \to x$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ und somit $f(x_n) = 1$ für alle $n \geq n_0$. Damit konvergiert $f(x_n) \to 1 = f(x)$ und f ist folgenstetig in $x > 0$.

  Aber f ist nicht folgenstetig in $x = 0$: Wähle $x_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt $x_n \to 0$, aber $f(x_n) = 1$ konvergiert nicht gegen $0 = f(0)$.

Folgenstetigkeit bedeutet, dass man den Funktionswert an einer Stelle, approximativ durch Funktionswerte nahe dieser Stelle bestimmen kann. Man kann auch anders herum fragen, wann kann man mit dem Funktionswert an einer Stelle die Funktionswerte nahe der Stelle approximieren. Das leistet der Begriff der Stetigkeit:

Definition 4.1.3 (Stetigkeit – $\epsilon - \delta$-Kriterium)**.** Eine Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *in* $x_0 \in A$ *stetig*, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$,so dass für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

gilt. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn f in allen $x \in A$ stetig ist.

Die Stetigkeitsdefinition mit Quantoren geschrieben:

Eine Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in A$, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \; |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

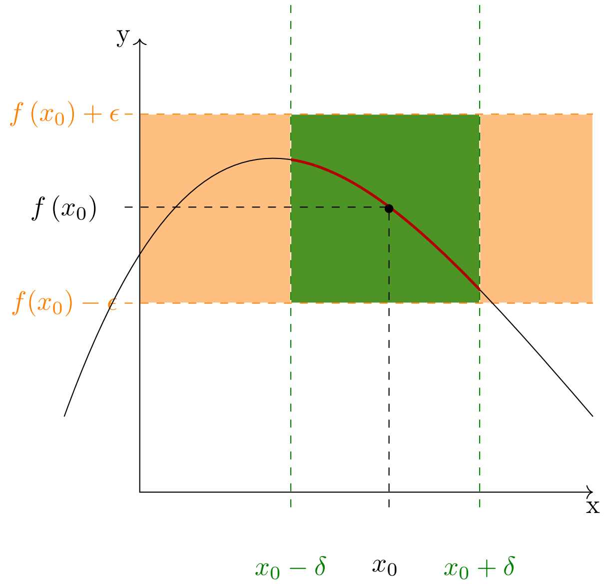


Abbildung 4.1: Für jedes $\epsilon > 0$ muss das $\delta > 0$ so gewählt werden, dass der rote Abschnitt der Kurve, also $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = f(B_\delta(x_0))$, vollständig im grünen Bereich liegt.

Beispiel 4.1.4. (i) Die *konstante Funktion* mit Wert $a \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a$, ist stetig:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass f in x_0 stetig ist. Dazu sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = 1$ (jedes $\delta > 0$ funktioniert hier). Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass $|f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \epsilon$ ist.

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$, ist stetig: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0| < 2\delta = \epsilon.$$

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$:

Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2|x_0|+1}\}$ Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0|^2 = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq \delta(|x| + |x_0|) \\ &\overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \delta(2|x_0| + |x - x_0|) \leq \delta(2|x_0| + \delta) \overset{\delta<1}{\leq} \delta(2|x_0| + 1) \end{aligned}$$

— Das δ darf (und wird im Allgemeinen) von x_0 und ϵ abhängen. —

Bemerkung 4.1.5 (Negation – nicht stetig in x_0)**.** Eine Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht in $x_0 \in A$ stetig, wenn

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| > \epsilon.$$

In Worten: ... wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ ist.

Beispiel 4.1.6. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig $x_0 = 0$:

Wir zeigen nun, dass f nicht in $x_0 = 0$ stetig ist: Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}$. Sei $\delta > 0$. Dann gilt für $x = \frac{\delta}{2}$, dass $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \epsilon$ ist.

Lemma 4.1.7 (Stetigkeit =Folgenstetigkeit für Funktionen in $\mathbb{R}$)**.** *Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion und $x_0 \in A$. Dann ist die Funktion f genau dann in x_0 stetig, wenn sie in x_0 folgenstetig ist.*

Beweis. Sei f zunächst in x_0 stetig, und sei $(x_n)_n$ eine Folge in A mit $x_n \to x_0$. Wir wollen zeigen, dass $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$:
Sei $\epsilon > 0$. Aus der Stetigkeit folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.
Aus $x_n \to x_0$ folgt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gibt. Zusammen gilt also $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und somit $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$.

Sei nun f folgenstetig in x_0. Wir zeigen durch Beweis durch Widerspruch, dass f in x_0 stetig ist: Ist f in x_0 nicht stetig, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein x mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ gibt. Für $\delta = \frac{1}{n}$ heiße ein solches x x_n. Dann gilt $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und somit geht $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ während $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$ gilt. Aber aus der Folgenstetigkeit folgt $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$, was den Widerspruch gibt. $\square$

Nach letztem Lemma wissen wir also direkt, dass Polynome und rationale Funktionen stetig sind und dass alle Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius R (also für alle $x \in (-R, R)$) stetig sind.

Als nächstes sehen wir Stetigkeit eine *lokale Bedingungen*, d.h.

Lemma 4.1.8. *Sei $f\colon A \subset \mathbb{R}$. Sei $r > 0$ und $x_0 \in A$. Dann ist die Einschränkung $f\colon A \cap B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ genau dann stetig in $x_0 \in A$, wenn $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in A$ ist.*

Beweis. Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Sei nun x_n eine Folge in $A \cap B_r(x_0)$, die gegen x_0 konvergiert. Dann ist das automatisch eine Folge in A und damit konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.

Sei $f\colon A \cap B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ folgenstetig in x_0. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen x_0 konvergiert. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < r$, also $x_n \in B_r(x_0)$, für alle $n \geq n_0$. Also ist $(x_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge in $A \cap B_r(x_0)$ und somit konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$. $\square$

Lemma 4.1.9. *(i) Sind $f, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, dann sind auch $f + g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$, und $fg\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ stetig in x_0. Falls zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ ist, ist auch $\frac{f}{g}\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, stetig in x_0.*

(ii) Seien $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subset B$. Ist f stetig in $x_0 \in A$ und g stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis. Wir überprüfen die Aussagen, in dem wir jeweils die Folgenstetigkeit in x_0 überprüfen:
(i) Sei x_n eine Folge in A mit $x_n \to x_0$. Da f und g stetig in x_0 sind, folgt $f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \to g(x_0)$ für $n \to \infty$. Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$ sowie $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0) = (fg)(x_0)$. Für $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ folgt auch $\frac{f}{g}(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0)$.
(ii) Sei x_n eine Folge in A mit $x_n \to x_0$. Dann folgt, da f in x_0 stetig ist, dass $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$. Da $(f(x_n))_n$ nun eine Folge in B ist, die gegen $f(x_0)$ konvergiert und g dort stetig ist, folgt, $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$ für $n \to \infty$. $\square$

Beispiel 4.1.10. Mit dem letzten Lemma und dem Wissen, dass Polynome, die Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus auf $\mathbb{R}$ stetig sind, erhalten wir sofort, dass z.B. die folgenden Funktionen stetig sind:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x + \cos x$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \sin x$
- $f\colon \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{x+\sin x}$

Lemma 4.1.11. *Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass es ein $L > 0$ gibt mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in A$. Dann ist f stetig.

Eine solche Funktion nennt man *Lipschitz-stetig*.

Beweis. Sei $x_0 \in A$ und sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \frac{\epsilon}{L} > 0$. Dann gilt für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \epsilon$$

ist. Also ist f stetig. $\square$

Z.B. ist jede Kontraktion (vgl. Übungsaufgabe 11) Lipschitz-stetig (mit $L \in (0, 1)$) und damit stetig.

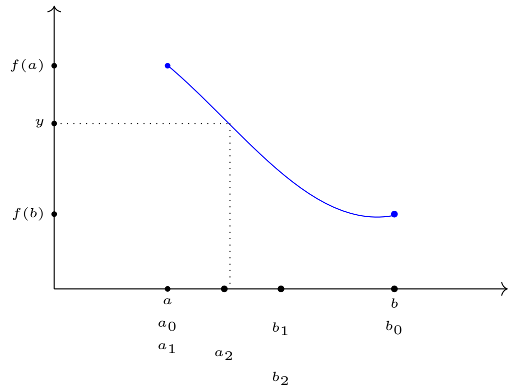


Abbildung 4.2: Intervallschachtelung für den Zwischenwertsatz

4.1.2 Zwischenwertsatz

Satz 4.1.12. *Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $y \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$ ist. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis. Wir werden das x mit Hilfe einer Intervallschachtelung konstruieren, vgl. Abbildung 4.2: Sei $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und $I_0 = [a_0, b_0]$. O.B.d.A. sei $f(b) \leq y \leq f(a)$ (also wie im Bild, der andere Fall geht analog. Haben wir schon $I_n = [a_n, b_n]$ so konstruiert, dass $f(b_n) \leq y \leq f(a_n)$ gilt, dass setzen wir

$$I_{n+1} = \begin{cases} [a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n] & f(b_n) \leq y \leq f(\frac{a_n+b_n}{2}) \\ [a_{n+1} = a_n, b_n = \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt auch $f(b_{n+1}) \leq y \leq f(a_{n+1})$. So erhalten wir eine Folge von Intervallen $(I_n)_n$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ und $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ für alle n. Wir haben also eine Intervallschachtelung konstruiert. Also gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. (Bis hierhin wurde noch nicht verwendet, dass f stetig ist.) Da f stetig ist, folgt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Da aber nach Konstruktion $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ für alle n gilt, ist nach dem Einschnürungssatz $y = f(x)$. □

Folgerung 4.1.13. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ auch ein Intervall in $\mathbb{R}$.*

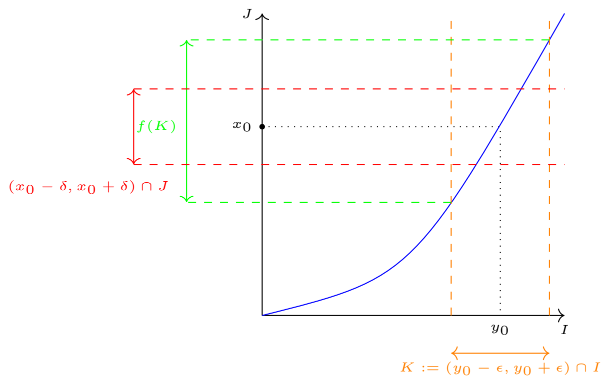
Achtung: Auch wenn $f(I)$ wieder ein Intervall ist, muss es nicht die 'gleiche Art' von Intervall sein, d.h. offene Intervalle werden i.A. nicht auf offene Intervalle abgebildet, z.B. Für $f(x) = x^2$ ist $f((-1,3)) = [0,9)$.

Ist f allerding streng monoton, dann kann man sich überlegen, dass die 'Art des Intervalls' (offen, geschlossen, halboffen) erhalten bleibt (nur wird bei streng monoton fallend aus einem linksoffenen Intervall ein rechtsoffenes und umgekehrt).

Beweis. Um zu zeigen, dass $f(I)$ ein Intervall ist, müssen wir zeigen, dass für alle $a, b \in I$ mit $f(a) < f(b)$, $[f(a), f(b)] \subset f(I)$ gilt: Sei $y \in [f(a), f(b)]$, also $f(a) \leq y \leq f(b)$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Also ist $y \in f(I)$ und somit $[f(a), f(b)] \subset f(I)$. □

Satz 4.1.14. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone stetige Funktion. Sei $J = f(I)$. Dann ist $f\colon I \to J$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ ist stetig.*

Beweis. Surjektivität von $f\colon I \to J$ ist klar, da $J = f(I)$ ist. Injektivität folgt direkt aus der strengen Monotonie: O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend und $x < y$, dann ist $f(x) < f(y)$. Also ist f bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $f^{-1}\colon J \to I$ stetig ist:



Sei $x_0 \in J$. Setze $y_0 = f^{-1}(x_0)$. Sei $\epsilon > 0$. Es ist zu zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f^{-1}(x) - y_0| \leq \epsilon$ für alle $x \in J$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Die Menge $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I$ wieder ein Intervall und, da f stetig ist,

ist $K{:=}f(((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I) = f(((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)) \cap J$ somit ein Intervall mit $y_0 = f(x_0) \in K$.
1.Fall: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J \subset K$. D.h. für alle $y \in I$ mit $|y - y_0|$ ist $f^{-1}(y) \in K$, also $|f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$.
2.Fall: x_0 ist eine Intervallgrenze von K*. Da bei streng monoton stetigen Funktionen die Art des Intervalls erhalten bleibt, muss auch y_0 eine Grenze des Intervalls $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \cap I$ und damit eine Grenze von I sein. Dann ist aber x_0 eine Grenze des Intervalls J und somit existiert doch ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J \subset K$ und wir sind doch im ersten Fall. □

Beispiel 4.1.15. Die n.te Potenz auf nichtnegativen Zahlen $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig, streng monoton wachsend und surjektiv. Also ist die n.te Wurzel $\sqrt[n]{.}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig.
Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv, also ist der Logarithmus $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 4.1.16. *Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.*†

*also K hat die Form $[x_0, .)$, $[x_0,]$, $(., x_0]$ oder $[., .x_0]$
†Für Polynome geraden Grades gilt das i.A. nicht, z.B. $x \mapsto x^2 + 1$.

Beweis. Sei $p(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ mit d ungerade. O.B.d.A. sei $a_d > 0$ (ansonsten betrachte $-p(x)$). Sei x_n eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \pm\infty$* für $n \to \infty$. Insbesondere ist dann $x_n \neq 0$ für alle n groß genug. Dann haben wir für $n \to \infty$

$$p(x_n) = \underbrace{\underbrace{a_d x_n^d}_{\to\pm\infty} \left(\underbrace{1 + \frac{a_{d-1}}{a_d x_n} + \ldots + \frac{a_0}{a_d x_n^d}}_{\to 0} \right)}_{\to\pm\infty \text{ nach Lemma 3.3.4}}.$$

Also gibt es $x_\pm \in \mathbb{R}$ mit $p(x_+) > 0$ und $p(x_-) < 0$. Da Polynome stetig sind, muss es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = 0$ geben. □

4.1.3 Sinus, Kosinus und Pi

Wir hatten den Kosinus bzw. Sinus als Real- und Imaginärteil von e^{ix}, für $x \in \mathbb{R}$, definiert und gesehen, dass somit

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$$

ist. Beide Potenzreihen haben Konvergenzradius unendlich und definieren somit stetige Funktionen

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ und } \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Wir wollen uns nun überlegen, dass der Kosinus Nullstellen besitzt. Dazu schätzen wir zuerst $\cos 2$ ab:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} \underbrace{- \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}}_{<0} \underbrace{- \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}}_{<0} + - \ldots,$$

da für $n \geq 1$ immer $\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$ gilt (da $(n+1)(n+2) > 4$). Also ist

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Außerdem ist $\cos 0 = 1$. Da der Kosinus stetig ist, ergibt sich aus dem Zwischenwertsatz, dass der Kosinus auf $[0, 2]$ eine Nullstelle besitzen muss.
Wir wollen die kleinste dieser Nullstellen auf dem Intervall $[0, 2]$ benutzen, um π zu definieren. Dazu müssen wir uns jedoch erst einmal überlegen, dass es eine solche kleinste

*Wir betrachten hier gleichzeitig, die beiden Fälle $x_n \to \infty$ und $x_n \to -\infty$.

Nullstelle in $[0,2]$ gibt. Dazu definieren wir uns die Menge $M{:=}\{x \in [0,2] \mid \cos x = 0\}$ und setzen $a{:=}\inf M$. Wir wollen nun zeigen, dass a in Wirklichkeit das Minimum von M ist (das Infimum also angenommen wird) und damit diese kleinste Nullstelle ist:

Es gibt eine Folge in x_n in M mit $x_n \to a$. Aus der Stetigkeit(=Folgenstetigkeit) des Kosinus folgt $0 = \cos x_n \to \cos a$, also $\cos a = 0$ und somit $a \in M$. Es ist klar, dass $a \in (0,2)$ liegt.

Definition 4.1.17. Die Zahl π ist definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle vom Kosinus.

Also ist das a von oben gleich $\frac{\pi}{2}$ und damit ist $\pi \in (0,4)$.

Satz 4.1.18. *(i)* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(ii) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ *und* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(iii) Die Funktionen $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ *und* $x \mapsto e^{\mathrm{i}x}$ *sind* 2π*-periodisch und* π*-antiperiodisch. (Eine Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *heißt* a-periodisch *bzw.* a-antiperiodisch, *falls* $f(x) = f(x+a)$ *bzw.* $f(x) = -f(x+a)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.)*

(iv) Aus $e^{ix} = 1$ *folgt* $x = 2\pi k$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(v) Die Abbildung $[0,2\pi) \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $x \mapsto e^{\mathrm{i}x}$, *ist bijektiv.*

Beweis. (i) Aus dem trigonometrischen Pythagoras folgt $1 = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2}$. Wenn wir jetzt noch wüssten, dass $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ ist, folgt die Behauptung: Dazu schätzen wir mit dem gleichen Argument wie bei $\cos 2$ von oben ab:
Für $a = \frac{\pi}{2} \in [0,2]$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\frac{a^n}{n!} > \frac{a^{n+2}}{n+2!}$, da $(n+1)(n+2) \geq 6 > 4 \geq \frac{\pi^2}{4}$.
Somit ist

$$\begin{aligned} \sin a =& a - \frac{a^3}{3!} + \underbrace{\frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!}}_{>0} + - \dots \\ \overset{a=\frac{\pi}{2}}{>}& \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{4\cdot 6}\right) \overset{0<\pi<4}{>} \frac{\pi}{2}(1 - \frac{4}{6}) > 0. \end{aligned}$$

(ii) Es ist $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}1 = \mathrm{i}$. Damit ist $e^{\mathrm{i}(x+\frac{\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\cos x - \sin x$. Vergleich mit $e^{\mathrm{i}(x+\frac{\pi}{2})} = \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(x+\frac{\pi}{2})$ liefert die Behauptung.
(iii) Es ist $e^{\mathrm{i}\pi} = (e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^2 = \mathrm{i}^2 = -1$ und damit

$$e^{\mathrm{i}(x+\pi)} = e^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}x} = -e^{\mathrm{i}x}.$$

Also ist $e^{\mathrm{i}x}$ und damit auch der Real- und Imaginärteil π-antiperiodisch und somit 2π-periodisch.
(iv) Es ist wirklich $e^{\mathrm{i}2\pi k} = (e^{\mathrm{i}2\pi})^k = 1^k = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Was wir wirklich zeigen müssen ist, dass es nicht mehr Lösungen gibt: Sei $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $e^{\mathrm{i}x} = 1$. Dann ist wegen (iii) auch $e^{\mathrm{i}(x+2\pi k)} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

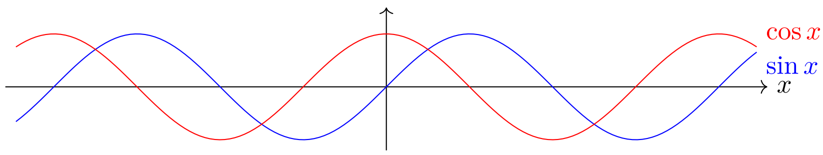
Wir wählen $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass $y{:=}x + 2\pi k \in [-\pi, \pi)$ ist. Dann ist $\sin y = 0$ und $\cos y = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass $y = 0$ sein muss:
Setzen wir $u{:=}y + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Dann ist $\cos u = \cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y = 0$ und $\sin u = \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y = 1$. Wir wissen, dass der Kosinus keine Nullstelle in $(0, \frac{\pi}{2})$ hat und wegen $\cos x = \cos(-x)$ damit auch keine in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Zusammen mit $\cos 0 = 1$ und der π-Antiperiodizität hat der Kosinus in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ nur die Nullstellen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Wegen $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$ muss $u = \frac{\pi}{2}$ und damit $y = 0$ sein.
(v) Injektivität: Sei $s, t \in [0, 2\pi)$. Aus $e^{\mathrm{i}s} = e^{\mathrm{i}t}$, folgt $e^{\mathrm{i}(s-t)} = 1$ und somit $s - t = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da $s - t \in (-2\pi, 2\pi)$ ist, folgt $k = 0$ und somit $s = t$.
Surjektivität: Dass $\cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$ gilt, folgt direkt aus dem trigonometrischen Pythagoras. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$. Dies folgt aber direkt aus dem Zwischenwertsatz, da der Kosinus stetig ist und $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -\cos 0 = -1$ gilt.
Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $|z| = 1$. Wegen $1 = |z|^2 = x^2 + y^2$ ist somit $|x| \leq 1$ und es gibt ein $t \in [0, \pi]$ mit $\cos t = x$. Wegen des trigonometrischen Pythagoras ist dann $\sin t$ gleich y oder $-y$. Falls es gleich y ist, ist $e^{\mathrm{i}t} = z$ und sonst $e^{-\mathrm{i}t} = e^{\mathrm{i}(2\pi - t)} = z$. In beiden Fällen haben wir also ein $s \in [0, 2\pi)$ mit $e^{\mathrm{i}s} = z$. Also folgt die Surjektivität. $\square$

Insbesondere haben wir in dem Beweis in (iv) alle Nullstellen des Kosinus in $[0, 2\pi)$ und damit wegen der 2π-Periodizität alle Nullstellen des Kosinus gefunden:

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Zusammen mit (ii) ist dann

$$\sin x = 0 \iff x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$



Woche 7

Satz 4.1.19. *Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat eine Darstellung $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $r = |z|$ und φ ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.*
Man nennt dann (r, φ) die Polardarstellung *von z.*

Beweis. Setzen wir $r = |z|$. Dann ist $r > 0$. Wir definieren $w = \frac{z}{|z|}$. Dann ist $|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Nach Satz 4.1.18.v gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $w = e^{\mathrm{i}\varphi}$ und somit $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Wir haben bis hierhin gezeigt, dass jedes $z \neq 0$ eine Darstellung der Form $re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Sei nun auch $z = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}$. Dann folgt $r_1 = |z| = r$ und $e^{\mathrm{i}(\varphi - \varphi_1)} = 1$. Nach Satz 4.1.18.iv gibt es somit ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi_1 = \varphi + 2\pi k$. $\square$

Ist $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ und $w = se^{\mathrm{i}\psi}$, dann ist $zw = rse^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}$. Das ist genau die Gleichung, die wir als Motivation bei der Einführung der komplexen Zahlen verwendet haben.

Wir haben also gesehen, dass Multiplikation von komplexen Zahlen in der Polarstellung besonders einfach ist. Wohingegen Addition leichter in der Darstellung $a+\mathrm{i}b$ funktioniert. Auch fürs 'Wurzelziehen' eignet sich die Polardarstellung sehr gut:

Satz 4.1.20. *Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$, $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, und $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Dann hat die Gleichung $w^n = z$ genau die Lösungen*

$$\sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}},\ \sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi}{n}},\ \sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+4\pi}{n}},\dots,\ \sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+(n-1)2\pi}{n}}.$$

Beweis. Dass dies alles Lösungen sind, ergibt sich direkt aus $\left(\sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+k2\pi}{n}}\right)^n = re^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k} = re^{\mathrm{i}\varphi} = z$. Die Lösungen sind auch alle verschieden, da $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}} \neq 1$ ist für $k \in \{0,\dots,n-1\}$ (vgl. Satz 4.1.18.iv). Da ein Polynom vom Grad n nur n komplexe Nullstellen haben kann, sind das alle Lösungen. □

4.1.4 Erste topologische Grundbegriffe

Wir werden in diesem Abschnitt erste wichtige topologische Grundbegriffe kennenlernen. Das wichtigste Beispiel, was wir aus Sicht der Analysis I immer im Kopf haben sollten, ist $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand. Aber es lohnt sich hier schon mal auch ein paar andere Beispiele gesehen zu haben:

Definition 4.1.21. Eine Menge X zusammen mit einer Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *metrischer Raum*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) (Definitheit) $d(p,q) \geq 0$ für alle $p,q \in X$ und aus $d(p,q) = 0$ folgt $p = q$

(ii) (Symmetrie) $d(p,q) = d(q,p)$ für alle $p,q \in X$

(iii) (Dreiecksungleichung) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ für alle $p,q,r \in X$.

Wir schreiben dann (X,d) für den metrischen Raum und nennen d eine *Abstandsfunktion* auf X.

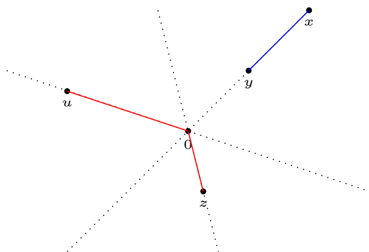
Beispiel 4.1.22. (Beispiele metrischer Räume)

(i) $\mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) = |x-y|$

(ii) $\mathbb{R}$ mit $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ (Übungsaufgabe)

(iii) (französische Eisenbahnmetrik) $\mathbb{R}^2$ mit

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{falls } x,\ y \text{ auf einer Ursprungsgeraden liegen} \\ |x|+|y| & \text{sonst} \end{cases}$$



(iv) (Hammingabstand) Sei Σ ein endliche Menge. Dann ist der Hammingabstand auf $\Sigma^n := \underbrace{\Sigma \times \ldots \times \Sigma}_{n-\text{mal}}$ gegeben durch:

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \#\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i \neq y_i\}$$

Hier ist $\#M$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M. Der Hammingabstand macht (Σ^n, d) zu einem metrischen Raum. Er spielt z.B. in der Kodierungstheorie eine Rolle.* In diesem Kontext wird die Menge Σ dann Alphabet genannt.

(v) Viele Funktionenräume (Mengen von Funktionen mit gewissenen Eigenschaften) werden metrische Räume sein. Wir geben hier ein Beispiel:

Sei $X = C^0([a,b], \mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiere $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ als

$$d(f,g) := \sup\{|(f-g)(x)| \mid x \in [a,b]\} (=: \sup_{[a,b]} |f-g|).$$

Dann musse man sich erst einmal überlegen, dass $d(f,g)$ immer endlich ist. Das liegt daran, dass $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall ist. Kommt bald im Satz übers Maximum.

Wenn wir das aber annehmen, können wir nachrechnen, dass (X,d) so ein metrischer Raum wird:

Definitheit: $d(f,g) \geq 0$ klar. Ist $d(f,g) = 0$, dann muss $(f-g)(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ und damit $f = g$ sein.

Symmetrie: klar, da $|(f-g)(x)| = |(g-f)(x)|$ ist.

Fehlt die Dreiecksungleichung: Seien $f, g, h \in X$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung für Beträge:

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup\{|(f-g)(x)| \mid x \in [a,b]\} \leq \sup\{|(f-h)(x)| + |(h-g)(x)| \mid x \in [a,b]\} \\ &\leq \sup\{|(f-h)(x)| \mid x \in [a,b]\} + \sup\{|(h-g)(x)| \mid x \in [a,b]\} \\ &\leq d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

Definition 4.1.23. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $E \subset X$.

(i) Für $r > 0$, $p \in X$, heißt

$$B_r(p) := \{q \in X \mid d(q,p) < r\}$$

r-Umgebung um p oder *r-Ball um p*.

*https://de.wikipedia.org/wiki/Hamming-Abstand

(ii) Der Punkt $p \in E$ heißt *innerer Punkt von* E, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(p) \subset E$ gilt.

(iii) Die Teilmenge E heißt *offen*, wenn jeder Punkt von E ein innerer Punkt ist.

(iv) Die Teilmenge E heißt *abgeschlossen* in X, wenn $X \setminus E$ offen ist.

(v) Die Teilmengen E heißt *beschränkt*, wenn es ein $q \in X$ und ein $r > 0$ mit $E \subset B_r(q)$ gibt.

(vi) Ein Punkt $p \in X$ heißt *Häufungspunkt von* E, wenn es für jedes $r > 0$ ein $q \in E$ mit $q \neq p$ und $q \in B_r(p)$ gibt.

Beispiel 4.1.24. (i) $(0,1) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt, da $(0,1) \subset B_1(0)$. Jedes $q \in (0,1)$ ist ein innerer Punkt, da $B_r(q) \subset (0,1)$ für $r = \min\{q, 1-q\}$ ist. Damit ist $(0,1)$ auch offen. Die Menge der Häufungspunkte ist $[0,1]$. Die Menge $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und beschränkt.

(ii) Jede endliche Menge in einem metrischen Raum ist beschränkt, abgeschlossen und besitzt keinen Häufungspunkt:

Sei $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die endliche Menge und sei $r = \max\{d(e_1, e_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Dann ist $E \subset B_{2r}(e_1)$ und die Menge ist beschränkt.

Sei $p \in X \setminus E$ und $s = \min\{d(e_i, p) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Dann ist $s > 0$, da E endlich ist, und somit $B_s(p) \subset X \setminus E$. Also ist $X \setminus E$ offen und damit E abgeschlossen.

Für eine Häufungspunkt p von E brauchen wir für alle $r > 0$ ein $q \in E$ mit $q \neq p$ und $q \in B_r(p)$. Da aber für das obige s gilt $B_s(p) \subset X \setminus E$, falls $p \in X \setminus E$, bzw. $B_s(p) \cap E = \{p\}$ für $p \in E$, kann es für $r \leq s$ kein solchen q geben und somit kann E Häufungspunkte haben.

(iii) Für (X, d) metrischen Raum, $p \in X$ und $r > 0$ ist $B_r(p)$ offen:

Sei $q \in B_r(p)$. Wir müssen zeigen, dass q ein innerer Punkt von $B_r(p)$ ist. Dazu sei $\delta = r - d(p,q)$. Dann ist $\delta > 0$, da $q \in B_r(p)$. So gilt für alle $z \in B_\delta(q)$, dass

$$d(z,p) \leq d(z,q) + d(p,q) < \delta + d(p,q) = r$$

und somit $z \in B_r(p)$. Also ist $B_\delta(q) \subset B_r(p)$ und damit q innerer Punkt von $B_r(p)$.

(iv) Die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + 2|y| < 2\}$ ist

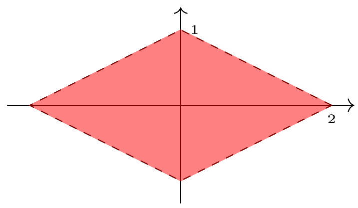
- beschränkt, da für alle $(x,y) \in M$

$$d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y| \leq |x| + 2|y| < 2$$

  und somit $M \subset B_2((0,0))$.

- offen: Sei $(x, y) \in M$ und $q = |x| + 2|y|$. Dann ist insbesondere $q < 2$. Wähle $\delta = \frac{2-q}{4}$. Dann gilt für alle $(\hat{x}, \hat{y}) \in B_\delta((x, y))$, dass (wir benutzen $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$)

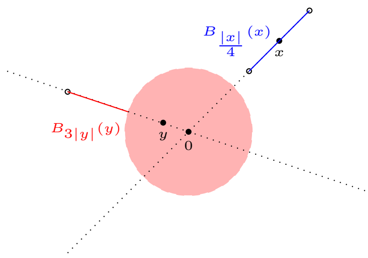
$$\begin{aligned} |\hat{x}| + 2|\hat{y}| &= |x + (\hat{x} - x)| + 2|y + (\hat{y} - y)| \\ &\overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} |x| + 2|y| + 2(|\hat{x} - x| + |\hat{y} - y|) \\ &\leq q + 2\sqrt{2}\sqrt{|\hat{x} - x|^2 + |\hat{y} - y|^2} < q + 2\delta = 2. \end{aligned}$$

- 

Z.B. ist $(2, 0)$ ein Häufungspunkt von M, da $(2 - s, 0) \in M$ für alle $s < 2$ gilt und somit für alle $r > 0$ gilt: $(2-s, 0) \in B_r((2, 0))$ für $s = \min\{s, \frac{r}{2}\}$.

Die Menge ist M ist das Innere dieses roten Gebietes und man kann sich überlegen, dass das ganze rote Gebiet und alle Punkte auf dem Rand Häufungspunkte von M sind.

(v) Eisenbahnmetrik:



Die Endpunkte von der Geradenabschnitte (mit Kreisen gekennzeichnet) gehören nicht zu den Bällen. Auch der Rand des roten Kreises (das ist der euklidische Kreis mit Radius $2|w|$) außer dem Randpunkt des roten Geradenabschnitts gehört nicht zur Menge $B_{3|y|}(y)$.

Die Menge $S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ hat keine Häufungspunkte bzgl. der Eisenbahnmetrik, da für $u, v \in S^1$, $u \neq v$, der Abstand in der Eisenbahnmetrik immer gleich 2 ist. (aber natürlich sind alle Punkte in S^1 Häufungspunkte bzgl. der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$.

Achtung: Häufungspunkt einer Menge und einer Folge sind erst einmal verschiedene Sachen. Die Folge $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte 1 und -1, aber die Menge $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{+1, -1\}$ ist endlich und hat keine Häufungspunkte.

Ein Punkt $p \in X$ ist genau dann Häufungspunkt einer Teilmenge $E \subset X$, wenn es eine Folge $(x_n)_n$ in E mit $x_n \neq p$ gibt, so dass $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(p)$ gilt. (Für $r > 0$, wähle x_n mit $n > \frac{1}{r}$. Dann ist $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \subset B_r(p)$.)

Lemma 4.1.25. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $E \subset X$. Dann ist E genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von E schon in E liegt.*

Beweis. Sei zunächst jeder Häufungspunkt von E schon in E. Wir wollen zeigen, dass $X \setminus E$ offen ist. Dazu sei $q \in X \setminus E$. Wir beweisen durch Widerspruch, dass q ein innerer

Punkt von $X \setminus E$ sein muss: Ist q kein innerer Punkt, dann gibt es für alle $r > 0$ ein $x_r \in E$ mit $x_r \in B_r(q)$. Wegen $q \in X \setminus E$ sind diese x_r von q verschieden. Also ist q Häufungspunkt von E und muss damit in E liegen, was der gesuchte Widerspruch ist.

Sei nun E abgeschlossen, also $X \setminus E$ offen. Sei q ein Häufungspunkt von E. Angenommen, $q \notin E$, also $q \in X \setminus E$. Da $X \setminus E$ offen ist, ist q ein innerer Punkt von $X \setminus E$ und somit gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(q) \subset X \setminus E$. Dann kann aber q kein Häufungspunkt von E sein. Also muss schon $q \in E$ gelten. $\square$

Definition 4.1.26. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $E \subset X$ liegt *dicht in* X, wenn jedes $p \in X \setminus E$ ein Häufungspunkt von E ist.

Beispiel 4.1.27. (i) Im $\mathbb{R}^n$ mit euklidischem Abstand gilt: Die Menge der Häufungspunkte von $B_r(p)$ ist

$$\overline{B_r(p)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| \leq r\} :$$

Ist x_n eine Folge in $B_r(p)$ mit $x_n \to x_0$. Dann gilt $|p - x_0| \leq |p - x_n| + |x_n - x_0| < r + |x_n + x_0| \to r$. Also ist $d(p, x_0) = |p - x_0| \leq r$ und damit $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) \leq r\}$. Andererseits ist jedes $q \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) \leq r\}$ auch in $\overline{B_r(p)}$, denn es ist entweder schon in $B_r(p)$ oder wenn $d(q,p) = r$ ist, ist q Häufungspunkt, da $(1 - \frac{1}{n})q \in B_r(p)$ für alle n und $(1 - \frac{1}{n})q \to q$ für $n \to \infty$ gilt.

Also liegt $B_r(p)$ dicht in $\overline{B_r(p)}$.

(ii) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, da jede reelle Zahl Grenzwert einer rationalen Folge ist. Auch $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}^2$.

(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ist auch dicht in $\mathbb{R}$: Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann ist $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$.

Definition 4.1.28. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X *konvergiert* gegen $x_0 \in X$, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in B_\epsilon(x_0)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. (Gleiche Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ bzw. $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$).

Eine Menge $E \subset X$ nennen wir *kompakt*, falls jede Folge in E eine konvergent Teilfolge mit Grenzwert in E (also einen Häufungspunkr in besitzt.

Beispiel 4.1.29. $[a, b]$ ist kompakt in $\mathbb{R}$. $(a, b), [a, \infty), [a, b)$ sind nicht kompakt in $\mathbb{R}$, da $b - \frac{1}{n}$ (ab n groß genug) eine Folge in (a, b) mit Grenzwert b ist, analog für $[a, b)$, und da n für $n \geq a$ eine Folge in $[a, \infty)$ ist, die gar keine konvergente Teilfolge besitzt.

Lemma 4.1.30. *Jede kompakte Menge eine metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Sei (X, d) der metrische Raum und sei $E \subset X$ kompakt.
Angenommen E ist nicht beschränkt. Sei $q \in E$. Dann gibt es für alle $r = n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, ein $p_n \in E$ mit $p_n \notin B_n(q)$, also $d(p_n, q) \geq n$. Die Folge p_n kann keine konvergente Teilfolge besitzen: Für alle $p \in X$ gilt

$$d(p, p_n) \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\geq} d(q, p_n) - d(p, q) = n - d(p, q) \to \infty$$

also kann p kein Grenzwert einer Teilfolge von p_n sein.Das gibt den Widerspruch.

Angenommen E ist nicht abgeschlossen. Dann muss es nach Lemma 4.1.25 einen Häufungspunkt $p \in X \setminus E$ von E und damit eine Folge x_n in E mit $x_n \to p$ geben. Das ist auch ein Widerspruch zur Kompaktheit von E. □

Für Teilmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$* gilt auch die Umkehrung:

Satz 4.1.31 (Satz von Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge E des euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn E beschränkt und abgeschlossen ist.*

Das gilt auch für E Teilmengen von $\mathbb{C}$, da wir in $\mathbb{C}$ auch den euklidischen Abstand von $\mathbb{R}^2$ verwenden.

Beweis. Die eine Richtung folgt aus dem letzten Lemma. Sei nun $E \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass es für jede Folge $p_n \in E$ eine konvergent Teilfolge gibt, dessen Grenzwert in E liegt: E ist abgeschlossen. Damit folgt sobald die Teilfolge konvergent ist, dass der Grenzwert als Häufungspunkt von E schon in E liegt. Es bleibt also, zu zeigen, dass p_n eine konvergente Teilfolge besitzt: Da E eine beschränkte Menge ist, ist p_n eine beschränkte Folge und somit auch jede der Koordinatenfolgen von p_n beschränkt. Dann folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge direkt aus Bolzano-Weierstrass Satz 3.8.5 und Satz 3.9.7. □

4.1.5 Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.1.32. Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei x_0 ein Häufungspunkt von A. Dann schreiben wir $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$ bzw. $f(x) \to y$ für $x \to x_0$, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - y| \leq \epsilon$$

für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Achtung: x_0 ist i.A. nicht in A.

Ist $x_0 \in A$, dann ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ äquivalent zur Aussage: f ist stetig in x_0 und $y = f(x_0)$.

Mit dem gleichen Beweis wie in Satz 4.1.7 (Stetigkeit=Folgenstetigkeit) sieht man direkt:

Lemma 4.1.33. *Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei x_0 ein Häufungspunkt von A. Dann gilt genau dann $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in E mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ist.*

Existiert aber der Grenzwert für einen Häufungspunkt außerhalb des Definitionsbereich, dann können wir den Definitionsbereich dahin erweitern, und die neue Funktion wird in diesem Häufungspunkt stetig sein. Genauer:

*euklidischer Raum = $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand

Lemma 4.1.34. *Sei* $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Sei* x_0 *ein Häufungspunkt von* A *und* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$. *Dann ist die Funktion* $\tilde{f}\colon A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

in x_0 *stetig.*

Wir sagen: $\tilde{f}$ *setzt* f *stetig in* x_0 *fort.*

Beweis. Folgt direkt aus der Stetigkeitsdefinition und der Definition von $\lim_{x\to x_0}$: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| = \underbrace{\begin{cases} |f(x) - y| & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0 \end{cases}}_{\leq \epsilon}$$

für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$. □

Beispiel 4.1.35. (i) Die Funktion $f(x)\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

ist stetig, aber kann in 1 nicht stetig fortgesetzt werden: Für $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ ist $x_n \to 1$ und $f(x_n) = 2 \to 2$ für $n \to \infty$. Für $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ gilt $x_n \to 1$ und $f(x_n) = 1 \to 1$ für $n \to \infty$. Wäre aber f in 1 stetig fortsetzbar, müsste für alle Folgen $x_n \to 1$, $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, die Folgen der Funktionswerte $f(x_n)$ die gleichen Grenzwerte haben. Das ist hier nicht der Fall.

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, da es eine rationale Funktion ist. Aber es gibt keine stetige Fortsetzung auf $x = 0$, da sonst insbesondere für jede Folge $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, die Funktionswerte konvergieren müssen. Aber für $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert $f(x_n) = n$ nicht (sondern konvergiert uneigentlich gegen unendlich).

Am letzten Beispiel sehen wir, dass es auch ganz nützlich wäre auch für Funktion einen Begriff des 'Gegen-Unendlich-Konvergierens' zu haben. Für Folgen in $\mathbb{R}$ habe wir auch uneigentliche Konvergenz definiert. D.h. wir können setzen

Definition 4.1.36. Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und sei x_0 eine Häufungspunkt von A. Wir schreiben $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ bzw. $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to x_0$, falls für alle Folgen $(x_n)_n$ in A mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to \pm\infty$ folgt.

Hier haben wir im Gegensatz zur Definition 4.1.32 die Variante über Folgen gewählt, weil wir uneigentliche Konvergenz schon hatten. Aber auch hier gibt es ein Analogon zur $\epsilon - \delta$-Bedinung aus Definition 4.1.32:

Lemma 4.1.37. *Sei* $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und sei* x_0 *eine Häufungspunkt von* A. *Dann ist* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *genau dann, wenn für alle* $K > 0$ *es ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass* $f(x) > K$ *für alle* $x \in A$ *mit* $|x - x_0| < \delta$ *gilt.*

Beweis. Der Beweis läuft sehr analog ab zum Beweis (Stetigkeit=Folgenstetigkeit) – also ruhig selber probieren.

Es gelte: Für alle $K > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > K$ für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Um zu zeigen, dass $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ gilt, sei $(x_n)_n$ eine Folge in A mit $x_n \to x_0$ und sei $K > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Hierbei sei δ, das δ aus der Definition von $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ für das gewählte K. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass $f(x_n) > k$. Also konvergiert $f(x_n)$ uneigentlich gegen unendlich für $n \to \infty$.

Gelte nun: Für alle Folgen $(x_n)_n$ in A mit $x_n \to x_0$ konvergiert $f(x_n)$ uneigentlich gegen unendlich. Nehmen wir an, dass die Behauptung des Lemmas nicht gilt. Dann gibt es ein $K > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $f(x) \leq K$. Für $\delta = \frac{1}{n}$ nennen wir das zugehörige x dann x_n. Somit haben wir eine Folge $(x_n)_n$ in A mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $f(x_n) < K$. Also konvergiert x_n gegen x_0 aber die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ ist beschränkt, was uns den Widerspruch gibt. ☐

Die Rechnenregeln für konvergenten Folgen übersetzen sich auf Grenzwerte von Folgen.

Lemma 4.1.38. *Seien $f, g \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und x_0 ein Häufungspunkt von A. Existieren die Limiten $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ in $\mathbb{R}$, dann ist*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

und, falls $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ ist,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

Ähnlich übersetzen sich auch die Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz, z.B. aus $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R} \cap \{\infty\}$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$$

usw. Man kann nur wieder i.A. keine Aussage über $\infty \cdot 0$, $-\infty + \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ treffen.

4.1.6 Einseitige Grenzwerte und Grenzwerte im Unendlichen

Definition 4.1.39. Sei $f \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und sei x_0 ein Häufungspunkt von A, so dass es ein $r > 0$ mit $(x_0 - r, x_0) \subset A$ gibt. Der *linkseitige Grenzwert* von f gegen x_0 existiert und ist gleich y , falls für alle Folgen $(x_n)_n$ in A mit $x_n \to x_0$ und $x_n < x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x_n) \to y$ für $n \to \infty$. Wir schreiben dann: $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y$.

Analog wird der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ definiert.
Falls $(L, \infty) \subset A$ für ein $L > 0$ ist, wird so auch der uneigentliche Grenzwert gegen ∞, also $\lim_{x \to \infty} f(x)$ definiert, also: $\lim_{x \to \infty} f(x) = y \in \bar{\mathbb{R}}$, falls für alle Folgen x_n aus A mit $x_n \to \infty$ folgt $f(x_n) \to y$.
Analog für $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Lemma 4.1.40. *Sei $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und sei x_0 ein innerer Punkt von A. Dann ist f genau dann in x_0 stetig, wenn*

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

gilt.

Beweis. Ist f stetig in x_0, dann konvergieren für alle Folgen $x_n \to x_0$ die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$, also insbesondere auch alle solchen Folgen mit $x_n > x_0$, was $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ impliziert, und alle solchen Folgen mit $x_n < x_0$, was $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$ impliziert.

Sei nun $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$. Wir wollen zeigen, dass f in x_0 stetig ist. Sei dazu x_n eine Folge in A mit $x_n \to x_0$. Wir zerlegen x_n in Teilfolgen:
Annahme: Es gibt unendlich viele x_n mit $x_n > x_0$, unendlich viele mit $x_n = x_0$ und unendlich viele mit $x_n < x_0$. (Die anderen Fälle gehen ähnlich.) Dann seien a_n, b_n, c_n die zugehörigen Teilfolgen. Wegen $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ folgt $f(a_n) \to f(x_0)$, $f(b_n) = f(x_0)$ und $f(c_n) \to f(x_n)$. Damit auch $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$. Also ist f stetig in x_0 □

Beispiel 4.1.41. Sei f eine rationale Funktion. Dann hat $f(x)$ die Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q. Der Definitionsbereich von f ist $A{:=}\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$. Sei x_0 eine Nullstelle von q. Wann kann f in x_0 stetig fortgesetzt werden? Welche Fälle können auftreten?
Sei x_0 eine Nullstelle von q der Vielfachheit ν, d.h. $q(x) = (x-x_0)^\nu r(x)$ für ein Polynom r mit $r(x_0) \neq 0$. Sei $p(x) = (x-x_0)^\mu s(x)$ für ein Polynom s mit $s(x_0) = 0$ und ein $\mu \in \mathbb{N}$ (ggf. ist μ halt gleich Null, wenn x_0 keine Nullstelle hat).

- (Hebbare Singularität) Falls $\mu \geq \nu$ ist, dann gilt
$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)^{\mu-\nu} s(x)}{r(x)} = \begin{cases} \frac{s(x_0)}{r(x_0)} & \text{falls } \mu = \nu \\ 0 & \text{falls } \mu > \nu \end{cases}$$
Also ist in diesem Fall f auf x_0 stetig fortsetzbar.

- Falls $\mu < \nu$ ist, dann gilt
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x)}{(x-x_0)^{\nu-\mu} r(x)}$$
und das geht im Betrag immer gegen unendlich. Sei $\lim_{x \to x_0} \frac{s(x)}{r(x)} > 0$. Dann gilt: Ist $\nu - \mu$ gerade, dann ist $\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$. Ist $\nu - \mu$ ungerade, dann ist $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$ und $\lim_{x \searrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$. Für $\lim_{x \to x_0} \frac{s(x)}{r(x)} < 0$ kehren sich die Vorzeichen um.

Die Grenzwerte gegen $\pm\infty$ lassen sich mit den Rechenregeln für Grenzwerte und Ausklammern der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner bestimmen, z.B.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0.$$

4.1.7 Mehr Beispiele (nicht)stetiger Funktionen

Woche 8 Wir sammeln noch eine paar mehr oder weniger pathologische* Beispiele, um ein bisschen zu zeigen, was so passieren kann:

Beispiel 4.1.42. (i) Die *Dirichlet-Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Dirichlet-Funktion ist in allen x unstetig: Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gibt es nach Konstruktion der reellen Zahlen eine rationale Folge x_n mit $x_n \to x$. Doch dann konvergiert $f(x_n) = 0$ nicht gegen $1 = f(x)$; f kann also nicht in x stetig sein.

Sei nun $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es immer eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen x konvergiert (die irrationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$, vgl. Beispiel 4.1.27.ii), und analog wie zuvor sehen wir, dass f auch hier nicht in x stetig.

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

ist stetig: Sei $x \in \mathbb{Q}$ und sei $x_n \to x$ eine rationale Folge. Da $x \neq \sqrt{2}$ sein muss, da $\sqrt{2}$ irrational ist, gibt es entweder ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > x$ für alle $n \geq n_0$ oder ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < x$ für alle $n \geq n_0$. In beiden Fällen gilt $f(x_n) \to f(x)$.

(iii) Die *Tomaesche-Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_{>0}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in alle rationalen Zahlen stetig (analoges Argument wie bei der Dirichletfunktion), aber in allen irrationalen Zahlen unstetig. Um das letztere zu zeigen, muss man sich überlegen, dass für jede Folge, die gegen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergiert, auch die Funktionswerte konvergieren. Für eine irrationale Folge ist das klar. Sei nun $x_n = \frac{p_n}{q_n} \to x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}_{>0}, p_n$ und q_n teilerfremd. Wir zeigen, dass dann $q_n \to \infty$ gilt: Würde q_n nicht gegen ∞ gehen, hätte q_n eine beschränkte Teilfolge, die wiederum eine konvergente Teilfolge q_{n_j} hätte. Also $q_{n_j} \to \hat{q}$ für $j \to \infty$. Da alle $q_n \in \mathbb{N}$ sind, muss auch $q \in \mathbb{N}$ gelten. Damit $\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} \to x$ für $j \to \infty$ folgt muss auch p_{n_j} selbst konvergieren $p_{n_j} \to \hat{p} \in \mathbb{Z}$. Doch dann wäre $\frac{p_{n_j}}{p_{n_j}} \to x = \frac{\hat{p}}{\hat{q}} \in \mathbb{Q}$, was den Widerspruch gibt. Also geht $q_n \to \infty$ und damit $f(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$.
Für eine beliebige Folge muss man dann nur zur rationalen bzw. irrationalen Teilfolge übergehen und erhält die Stetigkeit in x.

*https://de.wikipedia.org/wiki/Pathologisches_Beispiel

4.1.8 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir sammeln hier noch zwei Sätze zu stetigen Funktionen, die oft verwendet werden und anschaulich auch sehr intuitiv sind.

Satz 4.1.43 (Satz vom Maximum und Minimum)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $m, M \in [a,b]$, so dass*

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M)$$

für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Dann ist $f(m) = \min\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b]\}$ und wird *Minimum von f* genannt. Analog nennt man $f(M)$ das *Maximum von f*.

Es ist wichtig, dass f auf einem geschlossenen Intervall stetig ist: Z.B. ist $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig aber besitzt kein Maximum.

Beweis. Sei $s{:=}\sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b]\}$, falls das Supremum existiert, sonst $s{:=}\infty$. Dann gilt in jedem Fall $f(x) \leq s$ für alle $x \in [a,b]$. Es bleibt zu zeigen, dass s wirklich das Supremum ist und angenommen wird.

Sei $x_n \in [a,b]$ eine Folge mit $f(x_n) \to s$ für $n \to \infty$. Eine solche Folge muss es geben, da s sonst nicht das Supremum von $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b]\}$ wäre. Da $[a,b]$ beschränkt ist, gibt es nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$. Der Grenzwert sei M. Dann ist $x \in [a,b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x_{n_j}) \to f(M)$. Also ist $s = f(M)$.

Für das Mimimum geht es analog. □

Folgerung 4.1.44. *Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Lemma 4.1.45. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig und sei $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt**

$$\sup_{a<x<x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \inf_{x_0<x<b} f(x).$$

Beweis. Es gibt eine Folge s_n mit $s_n < \sup_{a<x<x_0} f(x)$ und $s_n \to \sup_{a<x<x_0} f(x)$. Dann gibt es für alle n es ein $x_n \in (a, x_0)$ mit $s_n \leq f(x_n)$. Sei nun $x \in [x_n, x_0)$. Dann gilt, da f monoton wachsend ist,

$$s_n \leq f(x_n) \leq f(x) \leq \sup_{a<x<x_0} f(x)$$

und somit für $x \nearrow x_0$:

$$s_n \leq \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \leq \sup_{a<x<x_0} f(x).$$

Mit $n \to \infty$ folgt das erste Gleichheitszeichen der Behauptung. Das zweite folgt direkt aus der Stetigkeit von f. Die anderen gehen analog. □

*Kurzschreibweise: $\sup_{x \in M} f(x){:=}\sup\{f(x) \mid x \in M\}$.

4.1.9 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Wenn man eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \colon A \to \mathbb{R}$ hat, so dass für alle $x \in A$ gilt:

$$f_n(x) \to f(x) \text{ für } n \to \infty,$$

ist dann f stetig?
Im allgemeinen ist das falsch, z.B. seien $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Alle f_n sind stetig. Es ist $f_n(0) = 1 = f(0)$ und $f_n(x) \to 0 = f(x)$ für $x > 0$. Aber f ist unstetig.

Definition 4.1.46. Seien $f \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Die Funktionenfolge f_n *konvergiert punktweise gegen* f, falls für jedes $x \in A$ gilt

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Die Funktionenfolge f_n *konvergiert gleichmäßig gegen* f, falls gilt

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkung 4.1.47 (Mit Quantoren)**.** Schreibt man diese Definition mit Quantoren, dann sieht man, dass sich diese nur in der Folge der Quantoren unterscheidet.

$$\begin{aligned} \text{Punktweise Konvergenz:} \quad & \forall x \in A\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : \ |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon \\ \text{Gleichmäßige Konvergenz:} \quad & \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall x \in A : \ |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon \end{aligned}$$

D.h. bei punktweiser Konvergenz darf n_0 sowohl von x als auch von ϵ abhängen, wogegen bei gleichmäßiger Konvergenz das n_0 zwar von ϵ abhängen darf, aber nicht von x.

Insbesondere folgt aus gleichmäßiger Konvergenz punktweise Konvergenz.

Wir haben oben gesehen, dass punktweise Konvergenz einer Funktionfolge nicht ausreicht, um Stetigkeit der Grenzwertfunktion zu folgern. Gleichmäßige Konvergenz reicht hingegen schon:

Satz 4.1.48. *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Seien $f, f_n \colon A \to \mathbb{R}$ Funktionen. Falls alle f_n stetig sind und die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in A$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in A$ und alle $n \ge n_0$ dann $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Da f_{n_0} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta$, $x \in A$, so dass $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \le \frac{\epsilon}{3}$. Dann gilt für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \le \epsilon. \qquad \square$$

Satz 4.1.49. *Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Sei $s \in (0, R)$. Dann konvergiert $f_n \colon [-s, s] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f \colon [-s, s] \to \mathbb{R}$ und die Funktion $f \colon (-R, R) \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Stetigkeit (oder genauer Folgenstetigkeit) innerhalb des Konvergenzradius haben wir für Potenzreihen zu Fuß in Satz 3.12.26 nachgerechnet. Wenn man da jetzt noch mal reinschaut, wird man sehen, dass wir dort in Wirklichkeit den Beweis für gleichmäßige Konvergenz schon immitiert haben.

Beweis. Sei $s \in (0, R)$. Wähle r mit $s < r < R$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert, gibt es ein $C > 0$ mit $|a_k r^k| \le C$ für alle k. Dann gilt für alle $x \in [-s, s]$

$$|f(x) - f_n(x)| = |\sum_{n+1}^{\infty} a_k x^k| \le \sum_{n+1}^{\infty} |a_k||s|^k = \sum_{n+1}^{\infty} |a_k||r|^k \left|\frac{s}{r}\right|^k \le K \sum_{n+1}^{\infty} \left|\frac{s}{r}\right|^k .$$

Da $\frac{s}{r} \in (0, 1)$ folge, damit $\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ und wir haben die gleichmäßige Konvergenz auf $[-s, s]$ gezeigt.

Nach letztem Satz ist somit $f \colon [-s, s] \to \mathbb{R}$ für alle $s \in (0, R)$ stetig, also ist $f \colon (-R, R) \to \mathbb{R}$ stetig. □

4.2 Differenzierbarkeit

Während man Stetigkeit interpretieren kann, dass es möglich ist, die Funktion in der Nähe eines gegebenen Punktes durch eine konstante Funktion zu approximieren, wollen wir natürlich schauen, ob es ggf. möglich ist mit Polynomen höherer Ordnung zu approximieren. Der nächste Schritt wären also lineare Funktionen, was auf den Begriff der Ableitung führt.

4.2.1 Ableitung und lineare Approximation

Definition 4.2.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f in $x_0 \in I$ *differenzierbar*, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

gibt. Wir nennen dann a die *Ableitung* von f in x_0 (Schreibweise: $f'(x_0) = a$.)

Wir nennen f *differenzierbar*, wenn f in allen x_0 differenzierbar ist und nennen die Funktion

$$f' \colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

Ableitung von f.

Setzt man $h := x - x_0$, dann ist $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Den Quotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nennt man auch *Differenzenquotient* von f in x_0.

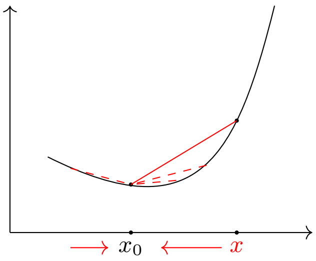


Abbildung 4.3: Die rote Gerade hat Anstieg $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Beispiel 4.2.2. (i) Die konstante Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \in \mathbb{R}$, ist differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x_0) = 0$, da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x_0) = 1$, da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

(iii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x_0) = 2x_0$, da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \to 2x_0 \text{ für } x \to x_0.$$

(iv) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in 0 <u>nicht</u> differenzierbar, da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und somit $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht existiert.

(v) Wir überlegen uns als nächstes, dass die Exponentialfunktion in $x = 0$ differenzierbar ist – d.h. die Frage ist, ob der Grenzwert von $\frac{e^x - e^0}{x-0} = \frac{e^x - 1}{x}$ existiert. Der Grenzwert ist 1. Das kann man zeigen wie in Übungsaufgabe 28 - mehr dazu noch einmal später.

Um die Ableitung von e^x für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ zu bestimmen verwenden wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die Ableitung in 0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e_0^x}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \to \infty} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

(vi) Für die Ableitung des Sinus und Kosinus benutzen wir die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \frac{\sin\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}\\ &= \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} = \cos\frac{x+x_0}{2}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\end{aligned}$$

Zusammen mit $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (vgl. Übungsaufgabe 28) und der Stetigkeit des Kosinus und Sinus folgt:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \to \cos x_0.$$

Also ist $(\sin x)' = \cos x$. Analog sieht man $(\cos x)' = -\sin x$.

Satz 4.2.3 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)**.** *Sei $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Für $x \neq x_0$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Also ist f in x_0 stetig. □

Funktionen, die in x_0 nicht stetig sind, sind also insbesondere dort auch nicht differenzierbar.

Was hat die Existenz einer Ableitung einer Funktion f in x_0 nun damit zu tun, dass die Funktion f nahe x_0 durch eine lineare Funktion approximiert werden kann:

Satz 4.2.4. *[Lineare Approximation] Sei $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r\colon I \to \mathbb{R}$, welche in x_0 stetig ist, gibt mit $r(x_0) = 0$ und*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

Insbesondere ist dann $a = f'(x_0)$.

Der Satz sagt insbesondere, dass die Tangente $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ die lineare Funktion durch $(x_0, f(x_0))$ ist, die $f(x)$ nahe x_0 am besten approximiert. Es gilt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Beweis von Satz 4.2.4. Existiert r wie beschrieben, dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + r(x) \to a \quad \text{für } x \to x_0.$$

Sei nun f in x_0 differenzierbar. Wir müssen die Funktion r und die Zahl a definieren: Wir setzen $a = f'(x_0)$ und

$$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Dann erfüllte r die gewünschte Beziehung und es gilt $r(x_0) = 0$. Weiterhin gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

für $x \to x_0$, also ist r in 0 stetig. □

4.2.2 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 4.2.5. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f \pm g$, fg und, falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierber und es gilt:*

$$\begin{aligned} (\alpha f \pm g)'(x_0) =& \alpha\, f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) =& f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) && \textit{(Produktregel)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) =& \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} && \textit{(Quotientenregel).} \end{aligned}$$

Beweis. Nach Voraussetzung existieren $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen erhalten wir somit für die Summe

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f(x) \pm g(x)) - (\alpha f(x_0) \pm g(x_0)}{x - x_0} =& \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ & \to \alpha f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{für } x \to x_0, \end{aligned}$$

für das Produkt

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =& \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ =& \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ & \to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{für } x \to x_0. \end{aligned}$$

Hier wurde bei der Grenzwertbildung benutzt, dass aus g in x_0 differenzierbar auch g in x_0 stetig folgt.

Für den Quotienten (da $g(x_0)$ nicht Null ist und g stetig ist, ist g auch in einer Umgebung um x_0 nicht Null)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - (g(x) - g(x_0)f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &\to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{für } x \to x_0. \end{aligned}$$ □

Beispiel 4.2.6. (i) Mittels vollständiger Induktion und Produktregel sieht man $(x^n)' = nx^{n-1}$: Den Induktionsanfang für $n = 1$ haben wir schon gesehen. Wissen wir nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$, dass $(x^n)' = nx^{n-1}$ ist, dann folgt mit der Produktregel:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = nx^{n-1}x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\big((x^2 + 3x + 1)e^x \cos x\big)' \overset{\text{Prod.}}{=} \big((x^2 + 3x + 1)e^x\big)' \cos x + (x^2 + 3x + 1)e^x(\cos x)' \\ &\overset{\text{Prod.}}{=} \big(x^2 + 3x + 1\big)' e^x + (x^2 + 3x + 1)(e^x)' \cos x + (x^2 + 3x + 1)e^x(\cos x)' \\ &= e^x \cos x(2x + 3 + x^3 + 3x + 1) - e^x \sin x(x^2 + 3x + 1)\end{aligned}$$

Satz 4.2.7 (Kettenregel)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und sei $x_0 \in I$ und $f(I) \subset J$. Sei f in x_0 differenzierbar und g in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Erste Idee (die nicht immer funktioniert):

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Das geht nur, wenn man nicht durch Null dividiert, also $f(x) \neq f(x_0)$ in einer (kleinen) Umgebung um x_0 ist.

Wie umgehen wir dieses Problem? Man kann den Fall f konstant nahe Null einfach separat betrachten. Wir wollen hier aber mal einen anderen Beweis mit Hilfe der Charakterisierung der Differenzierbarkeit mittels lineare Approximation, s. Satz 4.2.4, führen.

Beweis. Da f in x_0 differenzierbar ist, gibt es eine in x_0 stetige Funktion $r\colon I \to \mathbb{R}$ mit $r(x_0) = 0$ und $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$. Da g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, gibt es eine in $f(x_0)$ stetige Funktion $s\colon J \to \mathbb{R}$ mit $s(f(x_0)) = 0$ und $g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + r(y)(x - x_0)$.

Dann gilt für $y = f(x)$

$$\begin{aligned}g(f(x)) =& g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + s(f(x))(x - x_0)\\ =& g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)) + s(f(x))(x - x_0)\\ =& g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{(g'(f(x_0))r(x) + s(f(x)))}_{=:h(x)}(x - x_0).\end{aligned}$$

Somit haben wir eine Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ definiert mit $h(x_0) = 0$. Da r und f in x_0 stetig ist und s in $f(x_0)$ stetig ist, ist h in x_0 stetig. Damit ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung $g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

Satz 4.2.8. *Sei $f\colon I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar. Sei $x_0 \in I$ und $f'(x_0) \neq 0$ und sei die Umkehrfunktion stetig in $f(x_0)$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ in $f(x_0)$ differenzierbar und die Ableitung ist gegeben durch*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, gilt $f(f^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in J$. Sei $y_0 = f(x_0)$. Dann gibt es für jede Folge y_n in J mit Urbilder $x_n = f^{-1}(y_n)$. Sei nun $y_n \to y_0$, dann folgt wegen Stetigkeit von f^{-1}, dass $x_n \to x_0$. Damit gilt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

□

Wenn man schon weiß. dass f^{-1} differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel auch direkt

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

Beispiel 4.2.9. (i) Die n.te Wurzel ist die Umkehrfunktion von $x \in (0, \infty) \to x^n \in (0, \infty)$, was differenzierbar ist. Die n.te Wurzel selbst ist stetig. Somit können wir den letzten Satz anwenden und erhalten

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

(ii) Der Logarithmus ln ist stetig und die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$, die differenzierbar ist. Damit ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(iii) Der Kosinus $\cos\colon (0,\pi) \to (-1,1)$ ist differenzierbar, bijektiv (vgl. Beweis von Satz 4.1.18) und streng monoton fallend (kommt später). Dann ist nach Satz 4.1.14 Die Umkehrfunktion nennt man *Arkuskosinus* $\arccos\colon (-1,1) \to (0,\pi)$. Dann gilt

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin\arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

hierbei folgt die letzte Gleichheit aus $\sin y \in (0,1]$ für $y \in (0,\pi)$ und somit mittels des trigonometrischen Pythagoras

$$\sin\arccos x = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Die griechischen Buchstaben

Kleinbuchstaben	Großbuchstaben	Name	Latein
α	A	alpha	A
β	B	beta	B
γ	Γ	gamma	G
δ	Δ	delta	D
ϵ, ε	E	epsilon	E
ζ	Z	zeta	Z
η	H	eta	H
ϑ, θ	Θ	theta	
ι	I	iota	I
κ	K	kappa	K
λ	Λ	lambda	L
μ	M	my	M
ν	N	ny	N
ξ	Ξ	xi	X
o	O	omikron	O
π	Π	pi	P
ρ	P	rho	R
σ	Σ	sigma	S
τ	T	tau	T
υ	Υ	ypsilon	Y
ϕ, φ	Φ	phi	
χ	X	chi	
ψ	Ψ	psi	
ω	Ω	omega	