Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 10: Problemlösen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

29. Januar 2021

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

UNI
FREIBURG

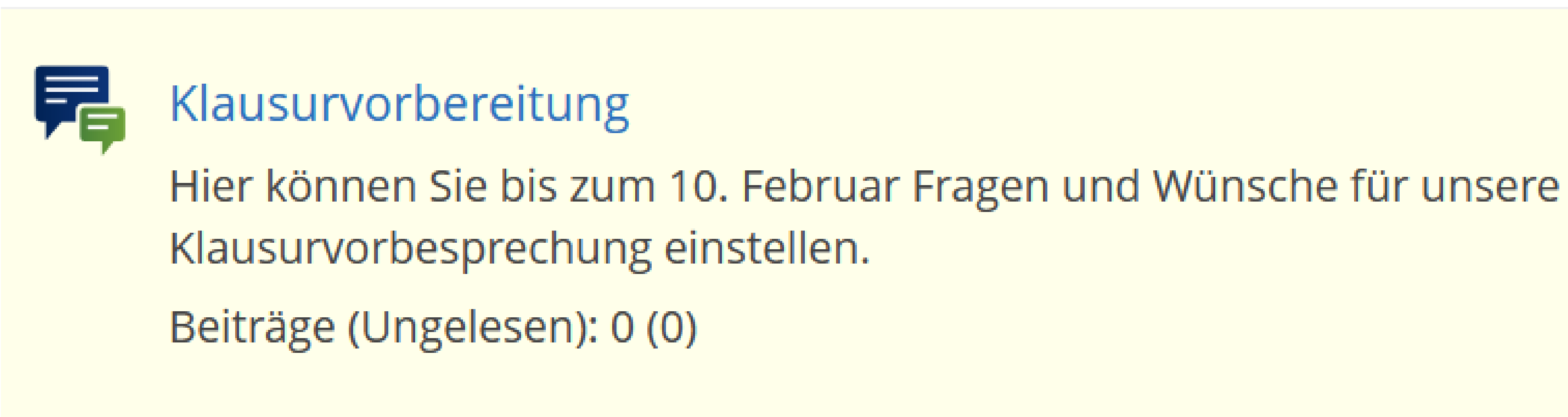
Inhalte dieser Veranstaltung:

	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	12.2.	Klausurvorbesprechung
	15.2.	Klausur

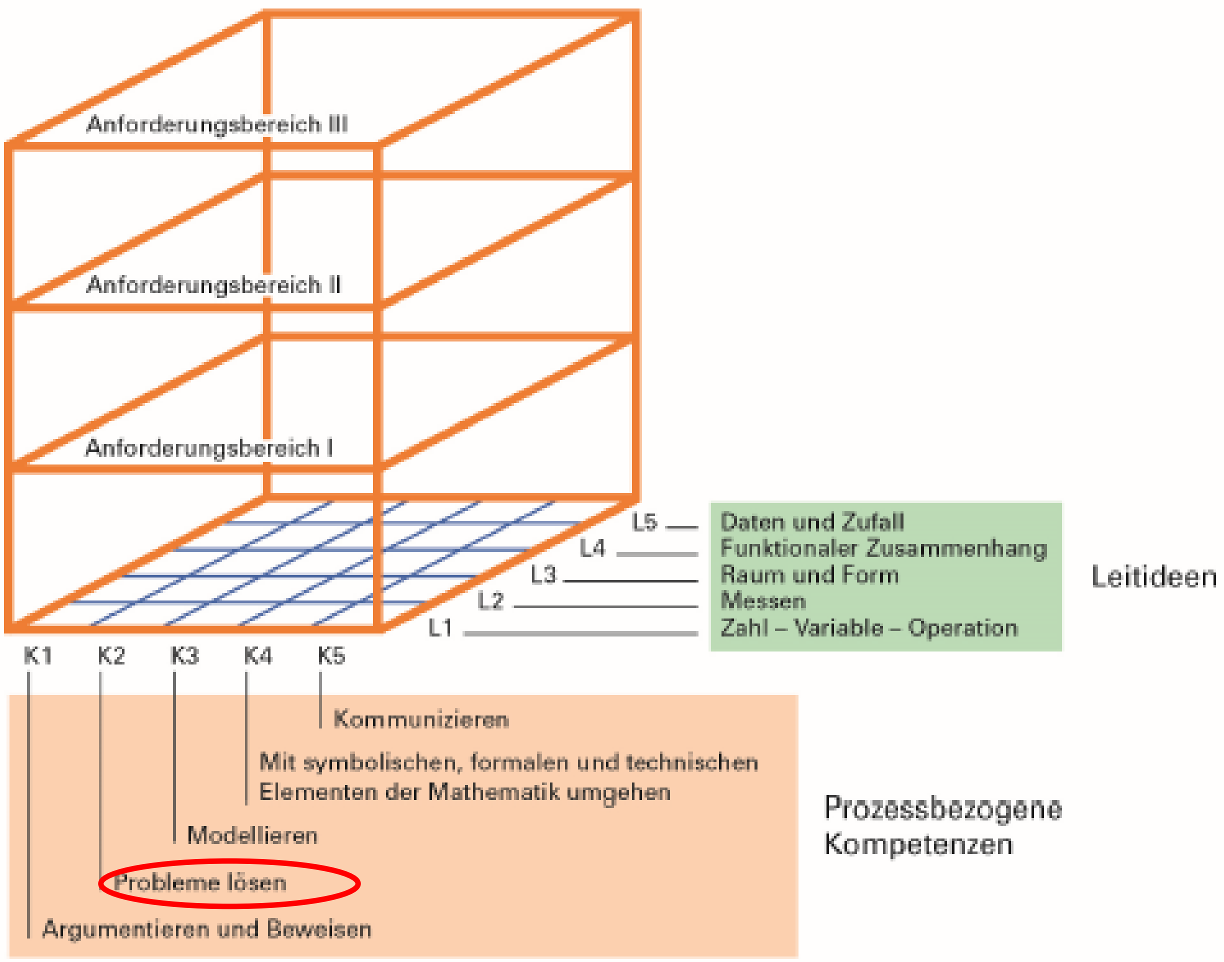
UNI FREIBURG

Klausurvorbesprechung in der Vorlesung am 12.2.

- Ich werde Ihre Fragen beantworten und auf Ihre Wünsche eingehen. Diese müssen bis zum 10. Februar auf ILIAS eingestellt werden:



Problemlösen:



Zusammenhang zwischen prozessbezogenen Kompetenzen, Leitideen (inhaltsbezogenen Kompetenzen) und Anforderungsbereichen (© Landesinstitut für Schulentwicklung)

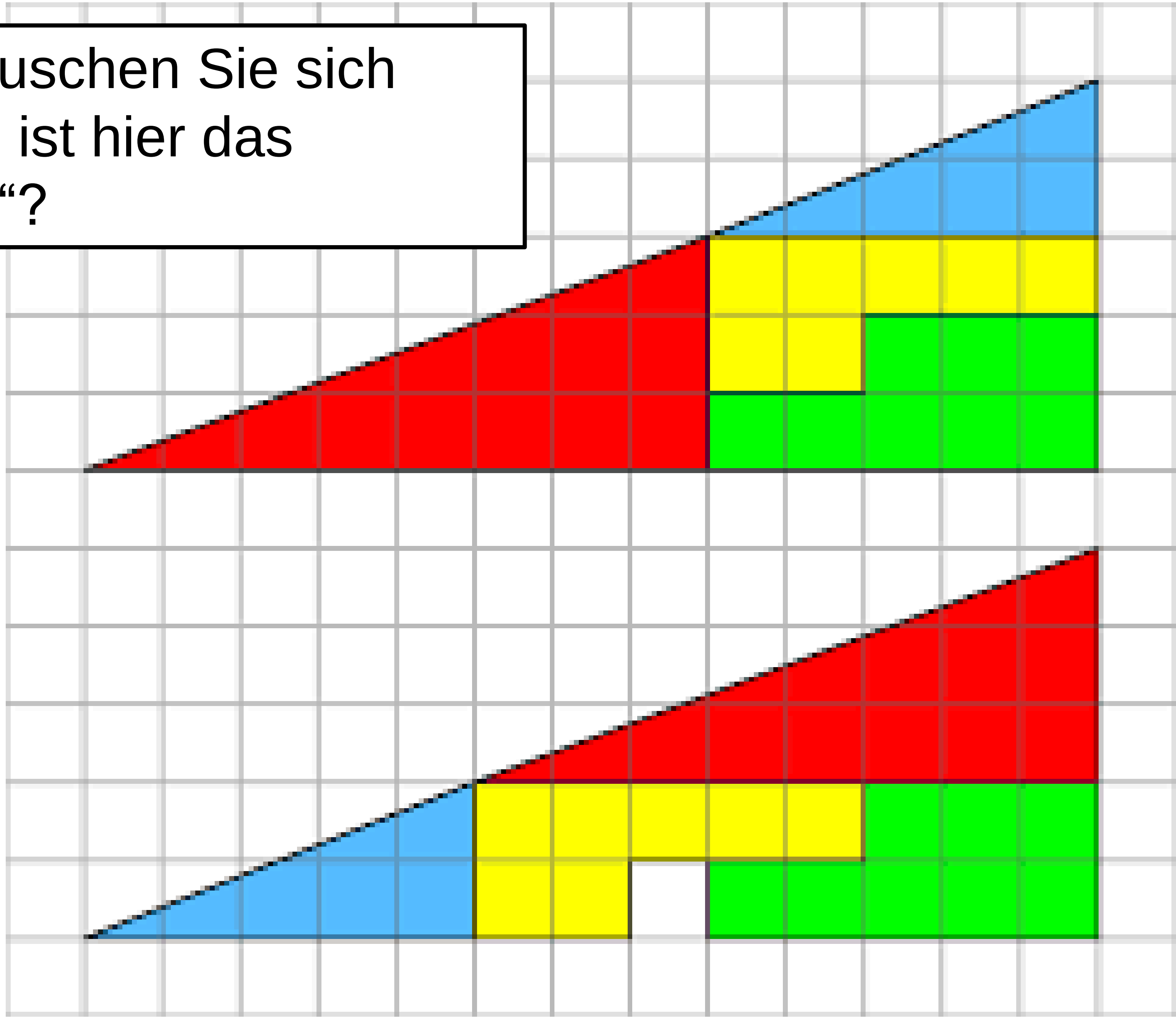
Problemlösen:

- Was ist Problemlösen?
- Wie lässt sich Problemlösekompetenz beschreiben?
- Wie kann man Problemlösen lernen / lehren?

Problemlösen:

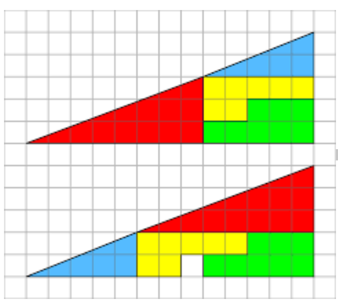
- Was ist Problemlösen?
- Wie lässt sich Problemlösekompetenz beschreiben?
- Wie kann man Problemlösen lernen / lehren?

4 min: Tauschen Sie sich aus: Was ist hier das „Problem“?



Was ist Problemlösen?

„Unter Problemlösen versteht man das Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs- oder Ist-Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Ziel- oder Soll-Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs- und Zielzustand befindet.“
(Hussy, 1983, S. 114)



Erklärung, woher das leere Kästchen kommt.

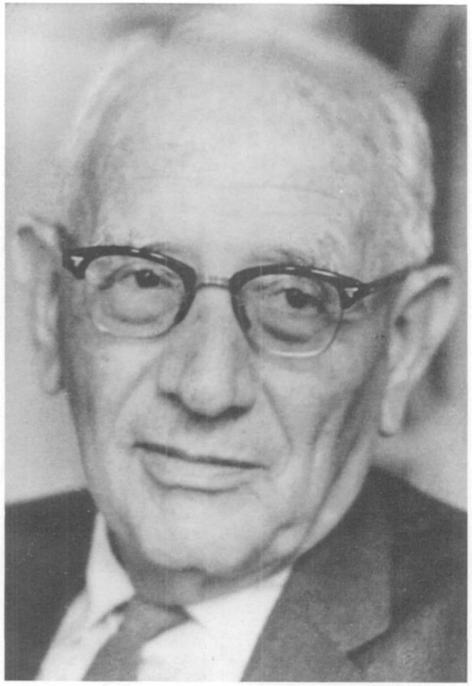
Problemlöseaufgaben ↔ Routineaufgaben
Problemlöseaufgaben ↔ Knobelaufgaben, die nicht mathematikhaltig sind

Wie sucht man die Lösung?

George (György) Pólya
(1887;Budapest – 1985;Palo Alto)
amerikanischer Mathematiker ungarischer Herkunft

- Buch: „How to solve it“ (1945)
- Dt. Übersetzung „Die Schule des Denkens (1949)

Welche Problemlösestrategien gibt es und wie kann man sie vermitteln?



G. PÓLYA, 1887–1985

WIE SUCHT MAN DIE LÖSUNG?

Aus: „Die Schule des Denkens“ von George Pólya, 1949

Erstens

Du mußt die Aufgabe *verstehen*

VERSTEHEN DER AUFGABE

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

Zweitens

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten

Du mußt vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann

Du mußt schließlich einen *Plan* der Lösung erhalten

AUSDENKEN EINES PLANES

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgend ein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

Drittens

Führe Deinen Plan *aus*

AUSFÜHREN DES PLANES

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt.* Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?

Viertens

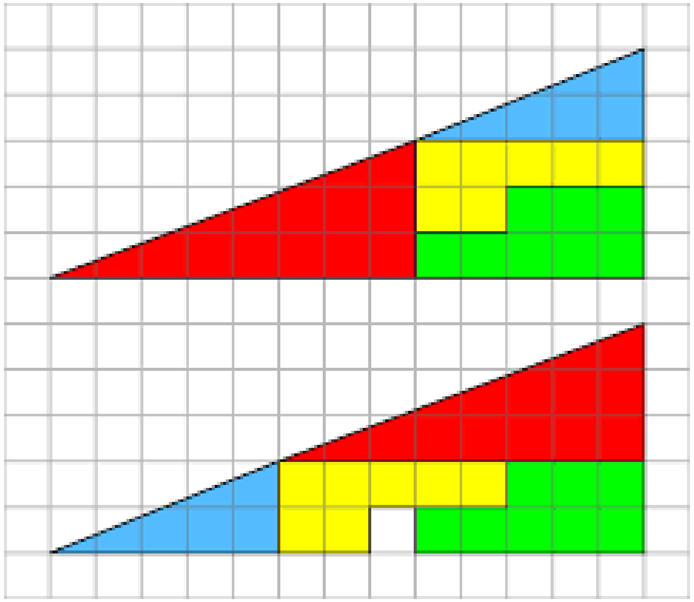
Prüfe die erhaltene Lösung

RÜCKSCHAU

- Kannst Du das *Resultat kontrollieren?* Kannst Du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

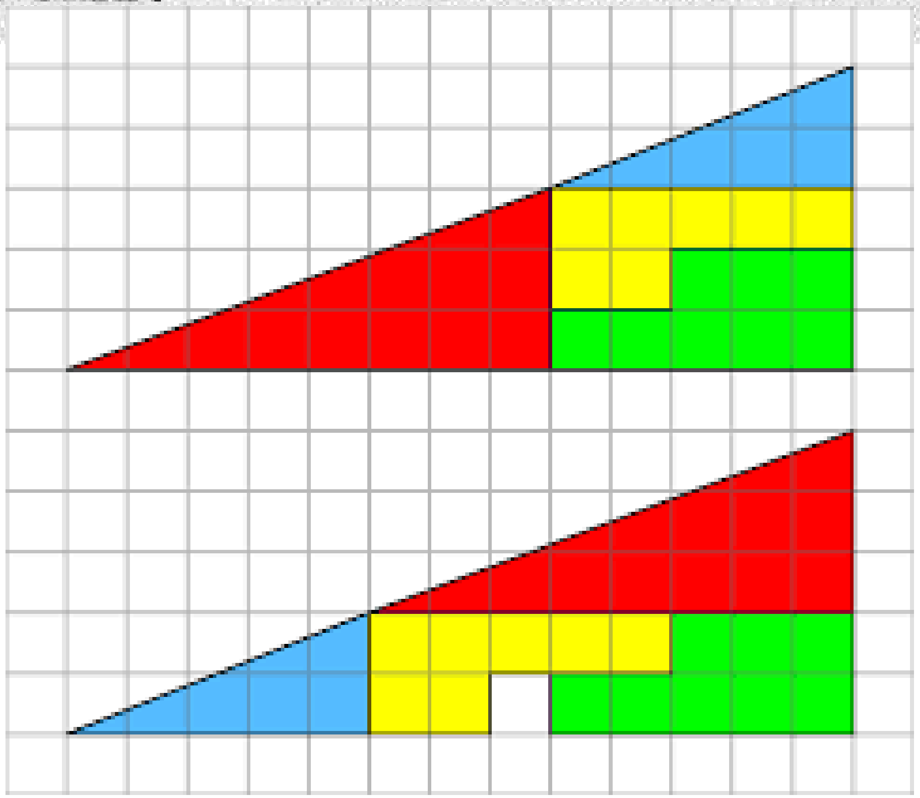
VERSTEHEN DER AUFGABE

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?



wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?

- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?



Problemlösen:

- Was ist Problemlösen?
- Wie lässt sich Problemlösekompetenz beschreiben?
- Wie kann man Problemlösen lernen / lehren?

2.2 Probleme lösen

Die Schülerinnen und Schüler analysieren Probleme und bearbeiten sie planvoll und systematisch. Sie wählen geeignete Strategien zur Problemlösung aus und wenden diese an. Sie überprüfen Lösungen und reflektieren Lösungsideen und Lösungswege.

Die Schülerinnen und Schüler können
Probleme analysieren
1. das Problem mit eigenen Worten beschreiben
2. Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten
3. durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen oder umformulieren
4. Hilfsmittel und Informationsquellen (zum Beispiel Formelsammlung, Taschenrechner, Computerprogramme, Internet) nutzen
Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln
5. durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen und diese auf Plausibilität überprüfen
6. das Problem durch Zerlegen in Teilprobleme oder das Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vereinfachen
7. mit formalen Rechenstrategien (unter anderem Äquivalenzumformung von Gleichungen und Prinzip der Substitution) Probleme auf algebraischer Ebene bearbeiten
8. das Aufdecken von Regelmäßigkeiten oder mathematischen Mustern für die Problemlösung nutzen
9. durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden
10. Sonderfälle oder Verallgemeinerungen untersuchen
11. das Problem auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
12. Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik zum Lösen nutzen
die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren
13. Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf Plausibilität oder an Beispielen prüfen
14. kritisch prüfen, inwieweit eine Problemlösung erreicht wurde
15. Fehler analysieren und konstruktiv nutzen
16. Lösungswege vergleichen

UNI FREIBURG

2.2 Probleme lösen

Die Schülerinnen und Schüler analysieren Probleme und bearbeiten sie planvoll und systematisch. Sie wählen geeignete Strategien zur Problemlösung aus und wenden diese an. Sie überprüfen Lösungen und reflektieren Lösungsideen und Lösungswege.

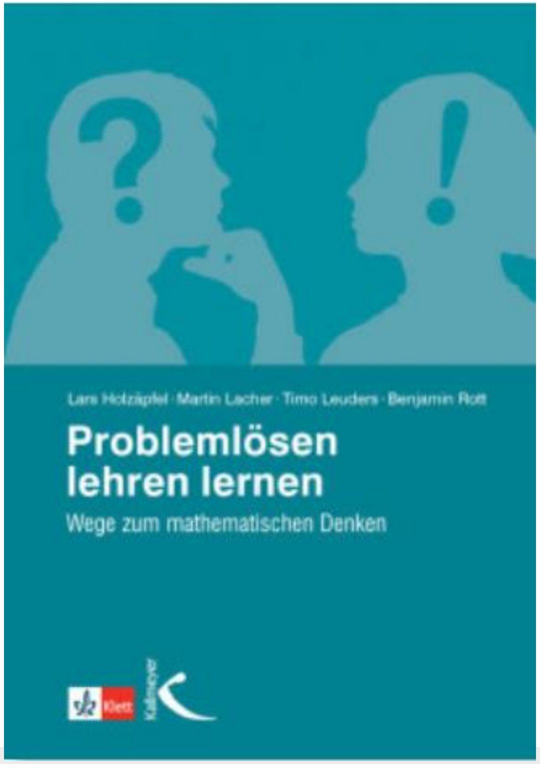
Die Schülerinnen und Schüler können
Probleme analysieren
1. das Problem mit eigenen Worten beschreiben
2. Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten
3. durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen oder umformulieren
4. Hilfsmittel und Informationsquellen (zum Beispiel Formelsammlung, Taschenrechner, Computerprogramme, Internet) nutzen

Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln
5. durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen und diese auf Plausibilität überprüfen
6. das Problem durch Zerlegen in Teilprobleme oder das Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vereinfachen
7. mit formalen Rechenstrategien (unter anderem Äquivalenzumformung von Gleichungen und Prinzip der Substitution) Probleme auf algebraischer Ebene bearbeiten
8. das Aufdecken von Regelmäßigkeiten oder mathematischen Mustern für die Problemlösung nutzen
9. durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden
10. Sonderfälle oder Verallgemeinerungen untersuchen
11. das Problem auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
12. Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik zum Lösen nutzen

die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren
13. Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf Plausibilität oder an Beispielen prüfen
14. kritisch prüfen, inwieweit eine Problemlösung erreicht wurde
15. Fehler analysieren und konstruktiv nutzen
16. Lösungswege vergleichen

Problemlösekompetenz beschreiben

- Nicht nur: „was tue ich beim Problemlösen“
- Sondern auch: „Welche Voraussetzungen muss ich mitbringen?“
- Siehe z.B. [32]



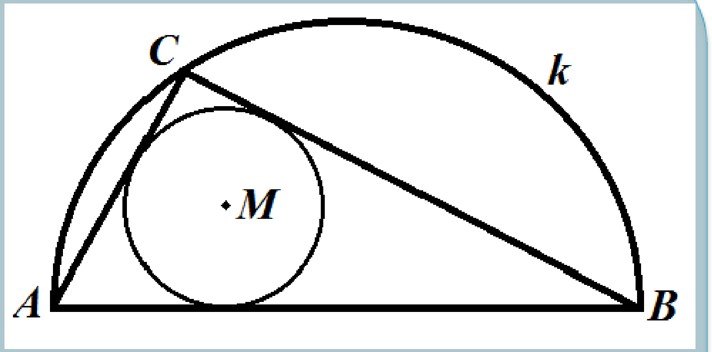
Die vier Komponenten der Problemlösekompetenz

Vorwissen

- **Deklaratives Wissen** (Faktenwissen, Definitionen, …)
- **Prozedurales Wissen** (Verfahren anwenden können)
- **Konzeptuelles Wissen** (Wissen über Zusammenhänge, Bedeutungen, Erklärungen, …)

- Dreieck
- Innenwinkelsumme
- Inkreis
- Winkelhalbierende
- Satz des Thales
- …

AB ist der Durchmesser eines Halbkreises *k*, *C* ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von *A* und *B*), und *M* ist der Mittelpunkt des Inkreises von ΔABC.



Untersuchen Sie die Größe des Winkels $\omega(AMB)$. Welche Aussage können Sie treffen? Begründen Sie Ihr Ergebnis mathematisch.

Die vier Komponenten der Problemlösekompetenz

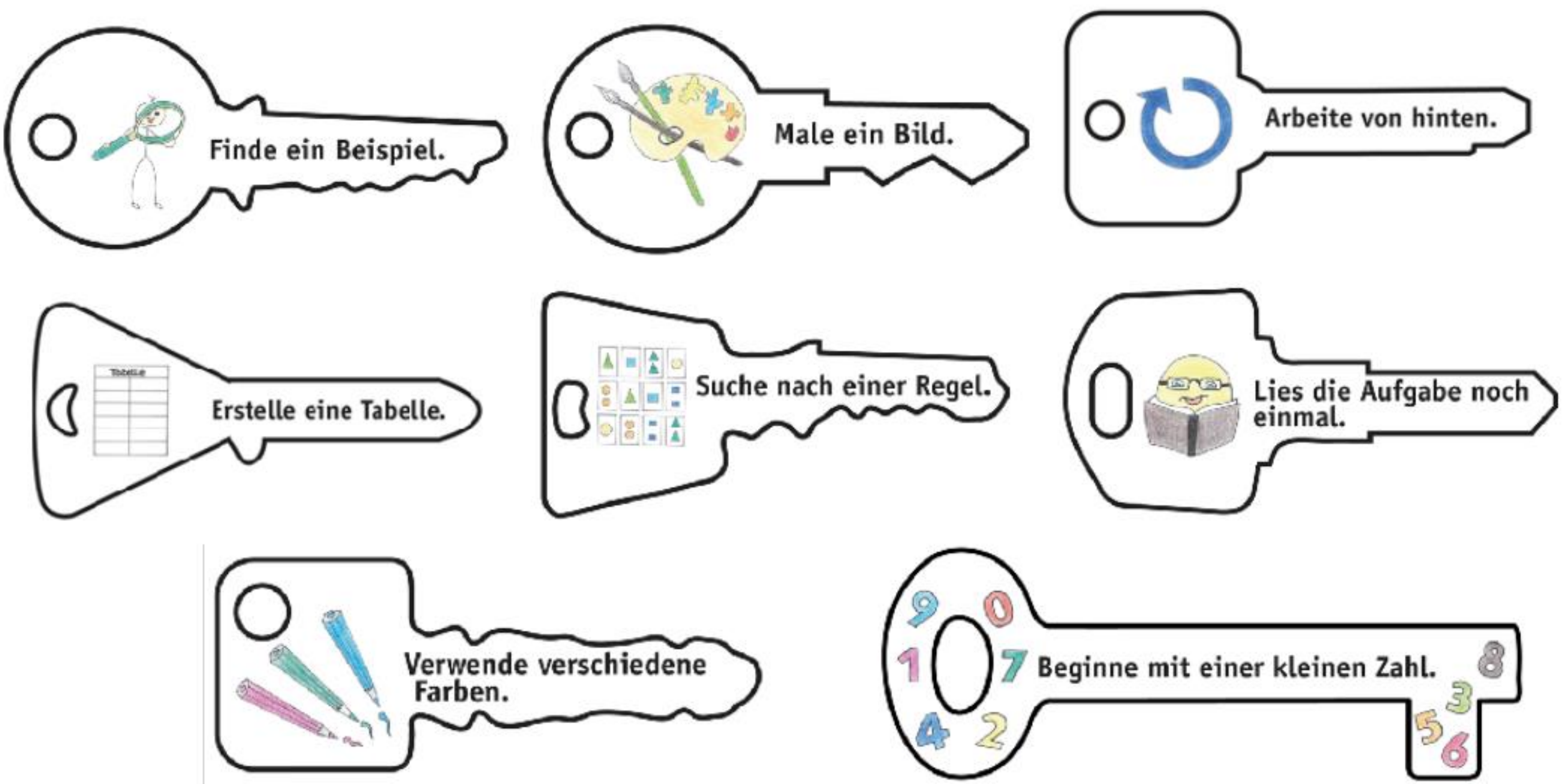
Vorwissen

- **Deklaratives Wissen** (Faktenwissen, Definitionen, …)
- **Prozedurales Wissen** (Verfahren anwenden können)
- **Konzeptuelles Wissen** (Wissen über Zusammenhänge, Bedeutungen, Erklärungen, …)

Heurismen - Problemlösestrategien

- Skizze anfertigen
- Spezialfälle betrachten
- In Teilprobleme zerlegen
- Hilfslinien / Hilfsgrößen betrachten
- Vorwärts- / Rückwärtsarbeiten
- Algebraisieren, …

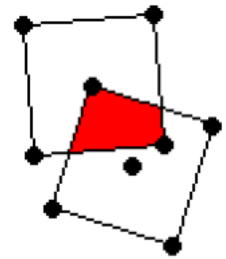
Strategieschlüssel



(Philipp 2013; Barzel, Ehret, Herold & Leuders 2014)

Zwei Bierdeckel

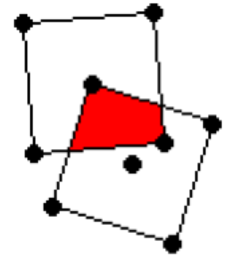
Die beiden untenstehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.



Untersuche die Größe der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche rot gekennzeichnet.]

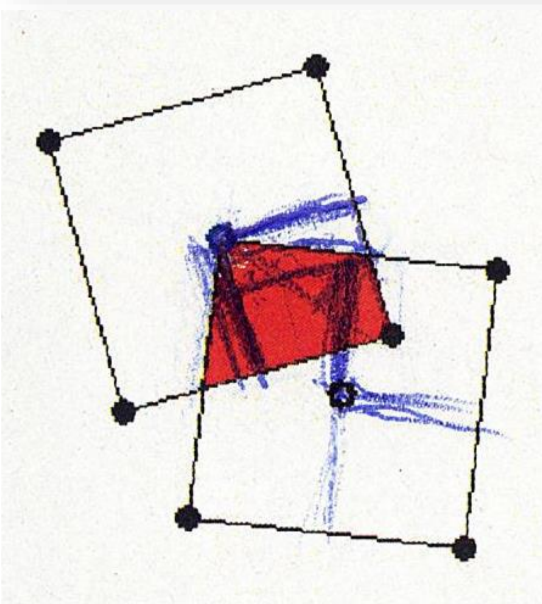
Zwei Bierdeckel

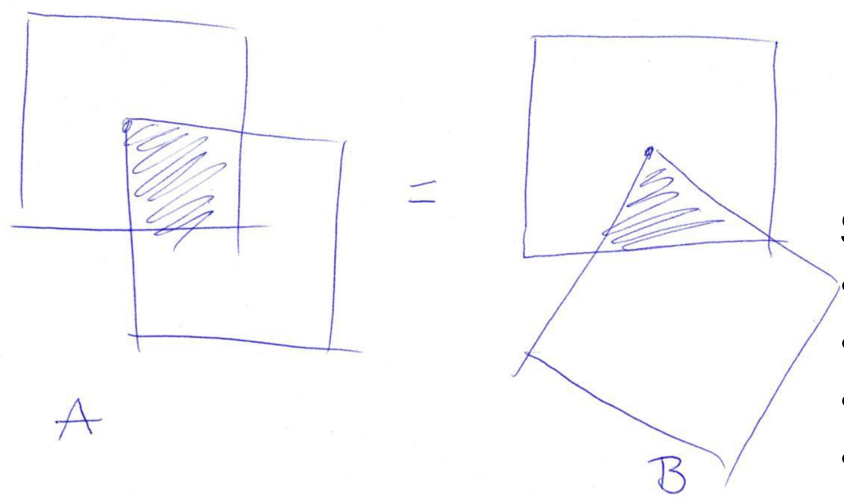
Die beiden untenstehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.



Untersuche die Größe der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche rot gekennzeichnet.]

Schüler-Lösung von **Lucy** (5. Klasse)





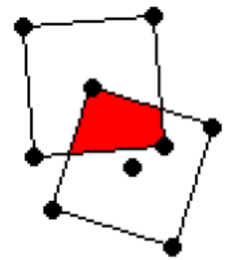
A ist genauso ~~viel~~ groß wie B.

Strategien:

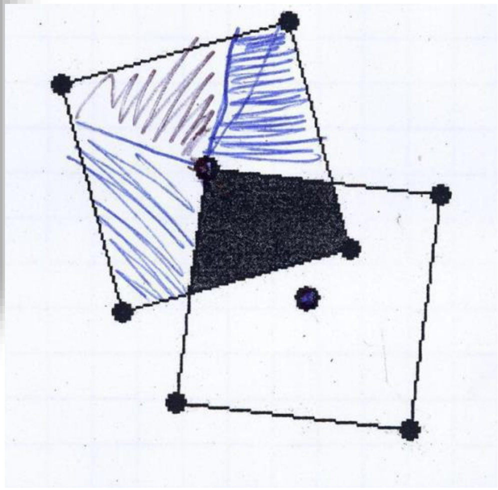
- Skizze
- Spezialfälle
- Hilfslinien
- Zerlegen

Zwei Bierdeckel

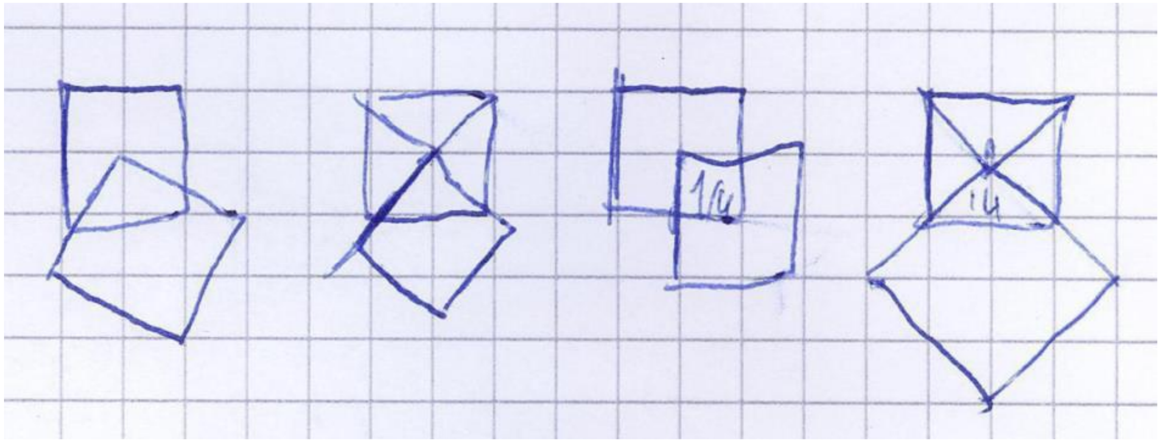
Die beiden untenstehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.



Untersuche die Größe der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche rot gekennzeichnet.]



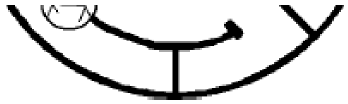
Schüler-Lösung von
Vincent (5. Klasse)



Strategien:

- Skizze
- Spezialfälle
- Hilfslinien
- Zerlegen

Strategie: zunächst ähnliche, leichtere Aufgabe lösen



Wie viele Teiler besitzt 10.000.000?

Wie viele Teiler besitzt 100?

Es ist $100 = 10 \cdot 10 = 2^2 \cdot 5^2$

	2^0	2^1	2^2
5^0	1	2	4
5^1	5	10	20
5^2	25	50	100

Es gibt $3 \cdot 3 = 9$ Teiler.

Bei $10.000.000 = 2^7 \cdot 5^7$ entsprechend $8 \cdot 8 = 64$.

Strategie: zunächst ähnliche, leichtere Aufgabe lösen

„Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? […] Kannst Du einen Teil der Aufgabe losen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort […]“ (Pólya, 1949, Einband)

Die vier Komponenten der Problemlösekompetenz

Vorwissen

- **Deklaratives Wissen** (Faktenwissen, Definitionen, …)
- **Prozedurales Wissen** (Verfahren anwenden können)
- **Konzeptuelles Wissen** (Wissen über Zusammenhänge, Bedeutungen, Erklärungen, …)

Heurismen - Problemlösestrategien

- Skizze anfertigen
- Spezialfälle betrachten
- In Teilprobleme zerlegen
- Hilfslinien / Hilfsgrößen betrachten
- Vorwärts- / Rückwärtsarbeiten
- Algebraisieren, …

Einstellungen

- Überzeugungen (beliefs), Haltungen (attitudes), Motivation, …
- Allgemein bezüglich der Mathematik oder auch speziell bezogen auf das Problemlösen
- Oft unbewusst

Ich kann das nicht

Das ist mir zu mühsam

Das war noch gar nicht dran

Cool, endlich mal wieder was zum Knobeln

Polya, 1949:

„Es würde falsch sein zu denken, daß das Lösen von Aufgaben eine rein verstandesmäßige Angelegenheit wäre; Entschlossenheit und Gefühlsregungen spielen dabei eine wichtige Rolle... man wirft seine ganze Persönlichkeit mit in die Waagschale“

„Der Unterricht im Lösen von Aufgaben ist eine Erziehung des Willens... Wenn der Schüler keine Gelegenheit in der Schule gehabt hat, sich mit den verschiedenen Gefühlsregungen im Kampf um die Lösung vertraut zu machen, so ist seine mathematische Erziehung in dem lebenswichtigsten Punkte fehlgeschlagen.“

Kury, 2019: „Vielen Schülern fällt es schwer, die Spannung auszuhalten, wenn die Aufgabe immer noch nicht gelöst ist. Sie halten diese Unklarheit nicht aus.“

Polya, 1949:

Doch es sollte nicht vergessen werden, daß ein Lehrer der Mathematik auch wirklich Mathematik können muß, und daß ein Lehrer, der seinen Schülern die richtige Geisteshaltung gegenüber Aufgaben eingeben möchte, diese Haltung selbst erworben haben muß.

Die vier Komponenten der Problemlösekompetenz

Vorwissen

- **Deklaratives Wissen** (Faktenwissen, Definitionen, …)
- **Prozedurales Wissen** (Verfahren anwenden können)
- **Konzeptuelles Wissen** (Wissen über Zusammenhänge, Bedeutungen, Erklärungen, …)

Heurismen - Problemlösestrategien

- Skizze anfertigen
- Spezialfälle betrachten
- In Teilprobleme zerlegen
- Hilfslinien / Hilfsgrößen betrachten
- Vorwärts- / Rückwärtsarbeiten
- Algebraisieren, …

Einstellungen

- Überzeugungen (beliefs), Haltungen (attitudes), Motivation, …
- Allgemein bezüglich der Mathematik oder auch speziell bezogen auf das Problemlösen
- Oft unbewusst

Metakognition / Selbstregulierung

- Fähigkeit zur Reflexion über das eigene Tun, z.B. „Ist es noch sinnvoll, was ich mache, oder sollte ich die Strategie wechseln?“
- Prüfen, ob man auf dem richtigen Weg ist

Aufgabe 10 ★★★★★

Welchen Rest liefert die folgende Division

$$5^{15} : 6 = \blacksquare?$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Erste Idee: Ausrechnen

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$5^3 = 25 \cdot 5 = 125$

$5^4 = 125 \cdot 5 = 625$

$5^5 = \underline{625 \cdot 5} = 3125$
3125

$5^6 = \underline{3125 \cdot 5} = 15625$
15625

Selbstregulation/Metakogntion:
„Halt Stop, viel zu kompliziert“
→ Strategiewechsel

$5^2 : 6 = 25 : 6$ R1

$5^3 : 6 = 125 : 6$ R5

$5^4 : 6 = 625 : 6 = (600 + 25) : 6$ R1

$5^5 : 6 = 3125 : 6 = (3000 + 125) : 6$ R5

Problemlösen:

- Was ist Problemlösen?
- Wie lässt sich Problemlösekompetenz beschreiben?
- Wie kann man Problemlösen lernen / lehren?

Wie lernt / lehrt man Problemlösen?

- Problemlösen lernt man nur durch Problemlösen…
- … durch Erfahrung und Reflexion des eigenen Tuns
- … bewusst machen: „was hat zum Erfolg geführt?“
- Vier Phasen nach Polya:
  1. Verstehen der Aufgabe
  2. Ausdenken eines Planes
  3. Durchführen des Planes
  4. Rückschau

Die Schülerinnen und Schüler können
Probleme analysieren
1. das Problem mit eigenen Worten beschreiben
2. Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten
3. durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen oder umformulieren
4. Hilfsmittel und Informationsquellen (zum Beispiel Formelsammlung, Taschenrechner, Computerprogramme, Internet) nutzen
Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln
5. durch Untersuchung von Beispielen und systematisches Probieren zu Vermutungen kommen und diese auf Plausibilität überprüfen
6. das Problem durch Zerlegen in Teilprobleme oder das Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vereinfachen
7. mit formalen Rechenstrategien (unter anderem Äquivalenzumformung von Gleichungen und Prinzip der Substitution) Probleme auf algebraischer Ebene bearbeiten
8. das Aufdecken von Regelmäßigkeiten oder mathematischen Mustern für die Problemlösung nutzen
9. durch Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten Lösungsschritte finden
10. Sonderfälle oder Verallgemeinerungen untersuchen
11. das Problem auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
12. Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik zum Lösen nutzen
die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren
13. Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf Plausibilität oder an Beispielen prüfen
14. kritisch prüfen, inwieweit eine Problemlösung erreicht wurde
15. Fehler analysieren und konstruktiv nutzen
16. Lösungswege vergleichen

Üben und bewusst machen!

Unterstützungsmöglichkeiten

- Schüler nicht allein lassen
- Ermutigungen, minimale Hilfen
- Maria Montessori: „Hilf mir, es selbst zu tun."
- Zeit geben
- Erfolge feiern

1. Hilfe für den Schüler. Eine der wichtigsten Aufgaben des Lehrers ist es, seinen Schülern zu helfen. Diese Aufgabe ist nicht ganz leicht; sie erfordert Zeit, Übung, Hingabe und klare Grundsätze.

Der Schüler muß sich ein möglichst großes Maß an Selbständigkeit erwerben. Aber wenn er mit seiner Aufgabe allein gelassen wird, ohne Hilfe oder ohne ausreichende Hilfe, wird er gar keinen Fortschritt machen. Wenn der Lehrer dagegen zu viel hilft, bleibt nichts dem Schüler selbst überlassen. Der Lehrer soll wohl helfen, aber nicht zu viel und nicht zu wenig, so daß der Schüler *einen vernünftigen Anteil an der Arbeit* hat.

Am besten ist es, dem Schüler auf eine natürliche Weise zu helfen. Der Lehrer muß sich an die Stelle des Schülers versetzen, er muß den Stand der Dinge von seiten des Schülers sehen, muß zu verstehen suchen, was in dem Geist des Schülers vor sich geht, und ihm Fragen stellen oder Schritte angeben, *die dem Schüler selbst hätten einfallen können.*

UNI FREIBURG

Polya, 1949

Typisierung von Lehrerinterventionen
(nach Leiß & Wiegand, 2005)

Schülerinnen und Schüler unterstützen:

Motivationshilfen
- „Probiere es noch einmal“
- „Du bist auf dem richtigen Weg“
- mit einem Partner arbeiten
- …

Strategische Hilfen
- „Setze eine Annahme, die dir plausibel erscheint“
- Planung des Vorgehens bei der Problembearbeitung
- Ziel der Aufgabe nochmals mit eigenen Worten formulieren
- Validierung anregen: Kritische nachfragen (Extremsituation denken …)
- …

Informationen bereit stellen / Inhaltliche Hilfen
- Information zu … (z.B. Sachkontext)
- Begriffe besprechen („Abstand“)
- Messen …

AUSDENKEN EINES PLANES

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgend ein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

UNI FREIBURG

Polya, 1949

Literatur:

- [31] Pólya, G. (1949). *Die Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke Verlag, Berlin. Verfügbar in der Bibliothek der Mathematikdidaktik.

- [32] Holzäpfel et al. (2018). *Problemlösen lehren lernen*. Klett Kallmeyer. Verfügbar in der Bibliothek der PH Freiburg.