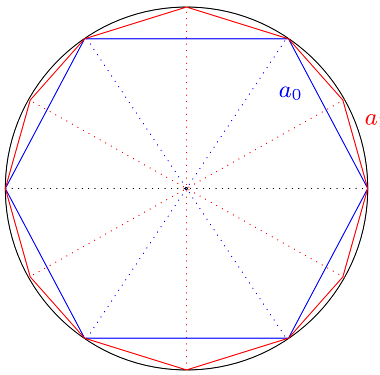
Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (3+(1+0.5+0.5)). (i) Untersuchen Sie die Folgen

$$(a_n = n - \frac{1}{n})_{n>0}, \qquad (b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n})_n$$

auf folgende Eigenschaften: von oben beschränkt, von unten beschränkt, monoton wachsend/fallend, (uneigentlich) konvergent.

(ii) Sei V_0 das im Kreis mit Radius 1 einbeschriebene reguläre Sechseck. Wir definieren rekursiv die regulären Vielecke V_n, derart dass V_n doppelt so viele Ecken wie V_{n-1} hat. Sei a_n die Seitenlänge von V_n.



(a) Zeigen Sie, dass $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ gilt.

Hinweis: Wir setzen im Folgenden den Satz des Pythagoras und weiter Sätze am Dreieck als bekannt voraus.

(b) Stellen Sie den Flächeninhalt f_n des Vielecks V_n in Abhängigkeit von a_n dar.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge f_n konvergiert.

Hinweis: Sie können verwenden, dass für zwei Polygone P_1,P_2, wobei P_1 vollständig in P_2 liegt, ist der Flächeninhalt von P_1 immer kleiner gleich dem Flächeninhalt von P_2.

Man kann diese Folge verwenden, um π als den Grenzwert dieser Folge zu definieren.

Aufgabe 10 (1.5+1+2.5).

(i) Wir betrachten zwei Folgen a_n und b_n. Die Folge a_n habe die Folgenglieder $0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots$ und so weiter periodisch fortgesetzt. Die Folge b_n habe die Folgenglieder $2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \ldots$ und so weiter periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie jeweils den Limes Superior und den Limes Inferior von $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(a_n + b_n)_n$.

(ii) Sei a_n eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$ gilt.

(iii) Seien a_n, b_n zwei reelle Folgen. Was muss für $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty}$ gelten, damit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

gilt? Begründen Sie. Finden Sie für die verbleibenden Fälle von $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty}$ jeweils ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 11 (1+2+2)**.** Sei $f\colon I \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall I, die eine *Kontraktion* ist, d.h. es gibt ein $q \in (0,1)$ mit $|f(x) - f(y)| < q|x - y|$ für alle $x, y \in I$. Ein *Fixpunkt* von f ist ein $x \in I$ mit $f(x) = x$.

(i) Zeigen Sie, dass f maximal einen Fixpunkt besitzt.

(ii) Sei $x_0 \in I$ und $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von f konvergiert.

(iii) Sei k_n der Anteil von Kindern mit Grippe in einer Kindergartengruppe am Tag n. Wir nehmen an, dass bei jedem Kontakt zwischen zwei Kindern, von welchen ein Kind krank und eines gesund ist, eine Grippevirusübertragung möglich ist. Die Infektionsrate dafür sei $\alpha \in [0,1)$. Außerdem sei ein Kind, wenn es krank ist, nur einen Tag lang krank, und es gibt keine Immunität nach erfolgter Krankheit. Das Modell sei also $k_{n+1} = \alpha k_n(1 - k_n)$. Benutzen Sie (ii) um zu zeigen, dass k_n konvergiert. Was ist der Grenzwert bei gegebenem k_0?

Aufgabe 12 (0.5+1+1+1+1.5)**.** Sei $c, x_0 \in \mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Wir betrachten die Heron-Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right).$$

Zeigen Sie:

(i) Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $x_n^2 \geq c \geq \frac{c^2}{x_n^2}$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subset [\frac{c}{x_n}, x_n]$.

(iv) Für $\ell_n := x_n - \frac{c}{x_n}$ gilt $\ell_{n+1} = \frac{1}{4x_{n+1}}\ell_n^2$.

(v) Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert.

Abgabe am Mittwoch 25.11.20 bis 14 Uhr – bitte nicht vor Dienstag 9 Uhr abgeben