Lineara Algebra 1

Blatt 9

Lorenz Bung M.Nr. 5113060
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Tobias Remde M.Nr. 5100067
tobias.remde@gmx.de

01.02.21

Aufgabe 1

Gesucht ist die Determinante von A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \left(1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$- (-1) \cdot \left(+(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ 2 \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$- (-1) \cdot \left(-1 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ 1 \cdot \left(-1 \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

(nach Regel des Sarrus für 3x3 Matix)

$$\Rightarrow \det(A) = -1$$

Aufgabe 2

b)

Behauptung

A ist genau dann regulär wenn a, b, c, d paarweise verschieden sind.

Beweis

Angenommen $a = b = c = d$

Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3a & 3a & 3a \\ 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 \\ a^3 & a^3 & a^3 & a^3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3a & 3a & 3a \\ 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 \\ a^3 & a^3 & a^3 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 1$

$3a \cdot a_{11} + 3a \cdot a_{12} + 3a \cdot a_{13} + 3a \cdot 3_{14} = 0$

$= 3a(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14})$

$\Rightarrow 3a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$

$a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = 0$

$3a(a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24}) \neq 1$ denn $3a = 0$ ↯

Somit ist A regulär wenn a, b, c, d paarweise verschiedn sind.

$\square$.

Aufgabe 3

a)

Behauptung:

A ist regulär.

Beweis:

A ist $r \times r$ Matrix mit $A^n = 0$ $n > 0$.
0 ist $r \times r$ Nullmatrix

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \cdot \ldots$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0_{11} & \cdots & 0_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ 0_{r1} & \cdots & 0_{rr} \end{pmatrix}$$

Wir wissen das $\det(0) = 0$
Nach Produktformel für Determinanten (Prop. 3.12)
ist $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Also haben wir:

$$\det(0) = \det(A^n) = \det(A)^n = 0^n = 0$$

Somit hat A nicht den vollen Rang und ist somit nicht invertierbar.

$\square$

b)

<u>Behauptung:</u>

$A + Id_r$ ist regulär.

<u>Beweis:</u>

$A^n = 0$ für $n > 0$. $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$Id_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$A + Id_r = 0 + Id_r = Id_r$

Somit gibt es für $A + Id_r$ ein $A^{-1} + Id_r^{-1}$ so das gilt

$(A + Id_r) \cdot (A^{-1} + Id_r^{-1}) = (0 + Id_r) \cdot (0 + Id_r^{-1}) = Id_r \cdot Id_r^{-1} = Id_r$

Somit ist $A + Id_r$ regulär

$\square$

Aufgabe 4

a)

Behauptung

Die Demension von U ist $n-1$.

Beweis

Demensionsformel:

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Kern} F_B + Rg\, F_B$

mit $F_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

Darstellungmatrix von F_B ist 1-dimensonal und der Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B$ $\quad Rg\, B = 1$

U ist Kern von F_B

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\Rightarrow \quad n = \dim \operatorname{Kern} + \operatorname{Rg} B = \dim U + 1$

$\Rightarrow \quad n - 1 = \dim U$

$\square$