Analysis I Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 20/21

Probeklausur

Bearbeitungszeit: 3h, Gesamtpunktzahl: 50

Aufgabe 1 (1.5+2.5=4)**.** (i) Definieren Sie, wann eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(ii) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 2}$

$$a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}.$$

Zeigen Sie direkt mittels der Grenzwertdefinition, dass der von Ihnen gefundene Grenzwert wirklich der Grenzwert der Folge ist.

Aufgabe 2 (5)**.** Sei $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2}$ und $a_0 = 1$. Bestimmen Sie a_1 und a_2. Konvergiert die Folge? (mit Beweis) Wenn ja bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 (1.5+5.5=7)**.** (i) Formulieren Sie das Leibnizkriterium.

(ii) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, ob die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1} x^k$$

absolut konvergiert und/oder konvergiert.

Aufgabe 4 ((1.5+1.5)+ 4=7)**.** (i) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X, Y. Seien A und B nicht-leere Teilmengen von X.

(a) Zeigen Sie $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(b) Zeigen Sie, dass aus f injektiv schon $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ folgt.

(ii) Sei $M = (1,2] \cup \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M (Angabe reicht hier). Ist M beschränkt, abgeschlossen und/oder kompakt? Begründen Sie.

Aufgabe 5 (4)**.** Zeigen Sie, dass

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 6 (1.5+2.5=3)**.** (i) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so dass es $x_1 < x_2 < x_3$ mit $f(x_1) > f(x_2)$ und $f(x_2) < f(x_3)$ gibt. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f''(x) > 0$ gibt.

Aufgabe 7 (4+1+1=6)**.**

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{1+x}{1-x}\right)$$

wobei $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ sein soll (also der Definitionsbereich des Tanges soll genau $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sein). Sie können hier als bekannt annehmen, dass der Tangens surjektiv ist.

(i) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

(ii) Zeigen Sie, dass f monoton wachsend ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.

Aufgabe 8 (1+2+1.5+0.5=5)**.** Sei $f(x) = e^x$. Sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f_n(x) = f(x)$ für alle $x = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$, und f_n jeweils linear auf den Intervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ für $k = 0, \dots, n$.

(i) Bestimmen Sie $f_n(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen f konvergiert.

(iii) Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)dx$ (Hinweis: Denken Sie bei eventuellen Summen von $e^{\frac{k}{n}}$ an die Partialsummen der geometrischen Reihe).

(iv) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ ohne zu Verwenden, dass dieser gleich $\int_0^1 f(x)dx$ ist.

Aufgabe 9 (1+2+ 2.5+ 2.5=8)**.** (i) Stellen Sie $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar.

(ii) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 = 1 + \mathrm{i}$.

(iii) Berechnen Sie $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$.

(iv) Berechnen Sie $\int_0^1 xe^{3x} dx$.