Analysis I, Blatt 4

Gruppe 11
Lorenz Bung (Matr.-Nr. 5113060)
lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Charlotte Rothhaar (Matr.-Nr. 4315016)
charlotte.rothhaar97@gmail.com

2. Dezember 2020

Aufgabe 13

(i) **Ansatz**: $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} \Rightarrow f_{n+1} = f_n \cdot a_n$ und $a_{n-1} = \frac{f_n}{f_{n-1}} \Rightarrow f_n = f_{n-1} \cdot a_{n-1}$

Damit erhalten wir

$$a_{n+1} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{a_{n+1} \cdot f_{n+1}}{a_n \cdot a_{n-1} \cdot f_{n-1}} = \frac{f_{n+2}}{a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_0}$$

(ii) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsbehauptung: $1 \leq a_n \leq 2 \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang ($n = 0$): $1 \leq a_0 = \frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{1} = 1 \leq 2$.

Induktionsschritt $(n \Rightarrow n+1)$:

$$\begin{aligned}
& 1 \leq a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} \leq 2 \\
\Rightarrow\ & 1 \geq \frac{f_n}{f_{n+1}} \geq \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ & 2 \geq 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} \geq \frac{3}{2} \\
\Rightarrow\ & 2 \geq \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}} + \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}+f_n}{f_{n+1}} \geq \frac{3}{2} \\
\overset{(\text{Def. von } f_n)}{\Rightarrow}\ & 2 \geq \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1+1}}{f_{n+1}} \geq \frac{3}{2} \\
\Rightarrow\ & 2 \geq a_{n+1} \geq \frac{3}{2} > 1.
\end{aligned}$$

Damit ist $1 \leq a_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

(iii) **Behauptung**: $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} := \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}$ ist monoton wachsend.

Beweis: zu zeigen: $a_{2(n+1)} \geq a_{2n}$.
Aus der Definition unserer Folge $(a_n)_n$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
a_{2(n+1)} = a_{2n+2} &\geq a_{2n} \\
\frac{f_{2n+3}}{f_{2n+2}} = \frac{f_{2n+2}+f_{2n+1}}{f_{2n+1}+f_{2n}} &\geq \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} = \frac{2f_{2n+1}}{f_{2n}+f_{2n+1}} \\
\frac{f_{2n+2}-f_{2n+1}}{f_{2n+1}+f_{2n}} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $f_{2n+2} \geq f_{2n+1}$ ist der Nenner dieses Bruches immer positiv, und damit $\frac{f_{2n+2}-f_{2n+1}}{f_{2n+1}+f_{2n}} \geq 0$.
Somit ist $(a_{2n})_n$ monoton wachsend.

$\square$

(iv) **Behauptung**: Ja, $(a_n)_n$ konvergiert mit Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Beweis: Nach der Formel von Moivre-Binet ist

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n\right),\ \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \overline{\Phi}^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n\right)} \\
&= \frac{\Phi^{n+1} - \overline{\Phi}^{n+1}}{\Phi^n - \overline{\Phi}^n} = \frac{\Phi^n\left(\Phi - \frac{\overline{\Phi}^{n+1}}{\Phi^n}\right)}{\Phi^n\left(1 - \frac{\overline{\Phi}^n}{\Phi^n}\right)} \\
&= \frac{\Phi - \frac{\overline{\Phi}^{n+1}}{\Phi^n}}{1 - \frac{\overline{\Phi}^n}{\Phi^n}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi - \frac{\overline{\Phi}^{n+1}}{\Phi^n}}{1 - \frac{\overline{\Phi}^n}{\Phi^n}} = \frac{\Phi}{1} = \Phi.
$$

□

Aufgabe 14

(i) Aufgrund der Eigenschaft $i^2 = -1$ ergeben sich vier Lösungen, die sich in Abhängigkeit von n wiederholen:

$$
i^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \mod 4 \\ i & n = 1 \mod 4 \\ -1 & n = 2 \mod 4 \\ -i & n = 3 \mod 4 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}
$$

(ii) Durch Erweitern des Bruches mit $\overline{3+2i} = 3 - 2i$ erhält man

$$
\frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3+2-2i+3i}{9+4-6i+6i} = \frac{5+i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i
$$

und damit die Werte $\frac{5}{13}$ für a und $\frac{1}{13}$ für b.

(iii) Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R}$ hat höchstens zwei reelle Lösungen.

1. Fall: Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Rightarrow 2$ reelle Lösungen

2. Fall: Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Rightarrow 1$ reelle Lösung

3. Fall: Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Rightarrow$ keine reelle Lösung.

Im 3. Fall existieren zwei komplexe Lösungen für die Gleichung.

(iv) Gleichungen vom Grad 3 haben in $\mathbb{C}$ 3 Lösungen.

1. Lösung: $x^3 = e^{0\cdot i} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{3}\cdot 0\cdot i} = 1$
2. Lösung: $x^3 = e^{2\pi i} \Rightarrow x = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ ($\frac{2}{3}\pi$ im Bogenmaß entspricht $120°$)
3. Lösung: $x^3 = e^{4\pi i} \Rightarrow x = e^{\frac{4}{3}\pi i}$ ($\frac{4}{3}\pi$ im Bogenmaß entspricht $240°$)

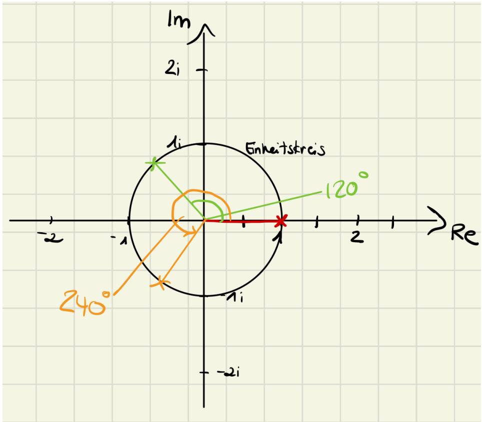

Abbildung 1

(v) Ähnlich zu Aufgabenteil (i) wiederholen sich die Lösungen in Abhängigkeit von n:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n = \begin{cases} 0 & n = 0 \mod 8 \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & n = 1 \mod 8 \\ i & n = 2 \mod 8 \\ \frac{i-1}{\sqrt{2}} & n = 3 \mod 8 \\ -1 & n = 4 \mod 8 \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & n = 5 \mod 8 \\ -i & n = 6 \mod 8 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & n = 7 \mod 8 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Diese lassen sich in einem Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$ darstellen, wobei die x-Achse den Realteil repräsentiert und die y-Achse den Imaginärteil:

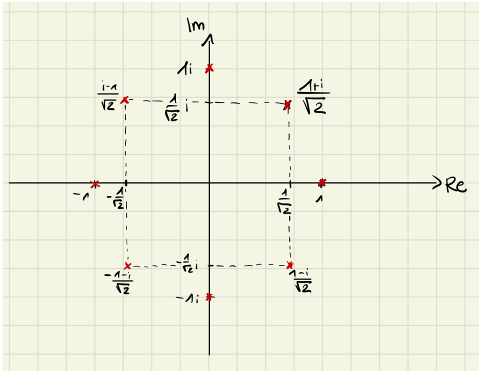

Abbildung 2

Aufgabe 15

(i) **zu zeigen**: $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$ ist konvergent $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n)_n$ existiert in $\mathbb{R}$.

Beweis: “$\Leftarrow$”
Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge, die konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ und ferner $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$.
Daraus folgt für die Reihe, dass $(a_k - a_{k-1}) \to 0$ für $n \to \infty$. Wenn die Summanden der Reihe gegen 0 gehen, konvergiert die Reihe gegen einen Grenzwert a mit

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\
&= (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\
&= (a_n - a_0) \\
\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1}) &= a - a_0.
\end{aligned}
$$

(ii) Mithilfe von Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$
\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}
$$

und damit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
Aus Teilaufgabe (i) wissen wir, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_{k+1} = a_n - a_0$ und damit

analog $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a}$.
Wegen $\frac{1}{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 0$ ist somit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - 0 = 1.$$

$\frac{2}{k^2-1}$ hat Nullstellen bei $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$. Auch hier kann man den Bruch nun mithilfe der Partialbruchzerlegung aufteilen in

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{(k+1)(k-1)} = \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k-1}.$$

Es ergibt sich

$$\frac{\alpha(k-1) + \beta(k+1)}{(k+1)(k-1)} \Rightarrow 2 = \alpha(k-1) + \beta(k+1)$$

und somit $\beta = 1$ für $k = 1$ bzw. $\alpha = -1$ für $k = -1$.
Insgesamt haben wir also

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$$

und damit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ folgt $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = 1 - 0 = 1$.

$\square$

(iii)

Aufgabe 16

(i) Da sich die Länge der Intervalle in jedem Schritt um $\frac{1}{3}$ verringert, lässt sich s_n darstellen als

$$\begin{aligned}(s_n)_n &= \sum_{i=0}^{n} M_i = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots + M_n \\ &= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^i.\end{aligned}$$

$(s_n)_n$ ist eine geometrische Reihe, da sie der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ entspricht.
Aus $|q| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ folgt, dass der Grenzwert die Form $\frac{q^m}{1-q}$ hat.
Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^0}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. Somit konvergiert die Reihe $(s_n)_n$ gegen den Grenzwert 3.

$\square$

(ii) (a) Da das mittlere Drittel der Dreiecksseite bei jedem Schritt durch ein doppelt so langes Stück ersetzt wird, wächst die Seitenlänge des Dreiecks pro Schritt um $\frac{4}{3}$.
Für den n-ten Schritt ergibt sich so ein Umfang von $l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{l_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, da es sich um eine geometrische Folge handelt und damit $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{l_n}} = \infty$.

(b) Zu Beginn hat das Dreieck einen Flächeninhalt von $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt. Dieser Flächeninhalt wird nun im ersten Schritt um drei Dreiecke erweitert, im zweiten Schritt um $3 \cdot 4 = 12$ Dreiecke und im n-ten Schritt um $3 \cdot 4^n$ Dreiecke.
Der Flächeninhalt der hinzugefügten Dreiecke beträgt dabei im ersten Schritt jeweils $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2$, im zweiten Schritt dann nur noch $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2$ und im n-ten Schritt noch $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n$.
Damit ergibt sich pro Schritt ein Flächeninhalt von

$$A_n - A_{n-1} = 3 \cdot 4^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n = 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Der gesamte Flächeninhalt lässt sich nun also darstellen als

$$A_n = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i - A_{i-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^{n} 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^i.$$

Dieser Flächeninhalt konvergiert für $n \to \infty$, denn

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^i \\ &= -2\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^i 3\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

und das ist bereits eine geometrische Reihe, welche konvergiert. Somit konvergiert auch die gesamte Summe.

$\square$