Einführung in die Mathematikdidaktik

Vorlesung 3: Grundvorstellungen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

27. November 2020

StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Raum 131, Ernst-Zermelo-Straße 1
boecherer-linder@math.uni-freiburg.de

Literatur:

- ~~[05]_Vortrag_Hefendehl_Auf rationale Weise zur Irrationalität (verfügbar auf Ilias)~~

Diese Literatur [05] und [06] fällt dieses Semester weg.

- ~~[06]_Folien_Hefendehl_Freiburg 2019-11-05 (verfügbar auf Ilias)~~

- [07] *Die Entwicklung des mathematischen Denkens*. In: K. Reiss & C. Hammer (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik. Springer, Basel. S. 27-36. *[als e-Book bei der UB-Freiburg]*

Klausurtermin und Studienleistung

- Montag, 15. Februar, 8:15 – 9:45 Uhr im Rundbau

- Anmeldung zur Studienleistung (Übungen) müsste jetzt gehen.

Inhalte dieser Veranstaltung:

	Datum	Thema
1	13.11.	Lerntheorien
2	20.11.	Darstellungsebenen
3	27.11.	Grundvorstellungen
4	4.12.	Entdeckendes Lernen
5	11.12.	Begriffsbildung
6	18.12.	Üben
7	8.1.	Differenzieren
8	15.1.	Curriculum und Kompetenzen
9	22.1.	Modellieren
10	29.1.	Problemlösen
11	5.2.	Begründen und Beweisen
12	12.2.	Klausur

Grundvorstellungen

- Grundvorstellungen geben Antwort auf die Frage „was soll man sich darunter vorstellen“ und die Frage, was die mathematischen Objekte und Operationen eigentlich bedeuten.
- Die Grundvorstellungen sind eine theoretische Beschreibung verschiedener Aspekte mathematischer Begriffe.
- Während einer mathematischen Rechnung kann ein Wechsel zwischen den Grundvorstellungen sinnvoll sein (siehe Übung)

Beispiel: Grundvorstellungen zu natürlichen Zahlen:

Was kann die Zahl 4 alles bedeuten? Was kann man mit natürlichen Zahlen ausdrücken, in welchen Sinnzusammenhängen werden sie benutzt?

- Kardinalzahlaspekt (Mengenvorstellung), Beispiel: „Hier liegen 4 Bauklötze."
- Ordinalzahlaspekt (Zahlen als Positionen), Beispiel: „Heute ist der 4. Juni."
- Maßzahlaspekt (Größenangaben), Beispiel: „Mein Schulweg ist 4 km lang."
- Operatoraspekt (beschreibt eine Vielfachheit einer Handlung), Beispiel: „Klatsche viermal in die Hände."

Aus dem Bildungsplan für das allgemeinbildende Gymnasium [08]:

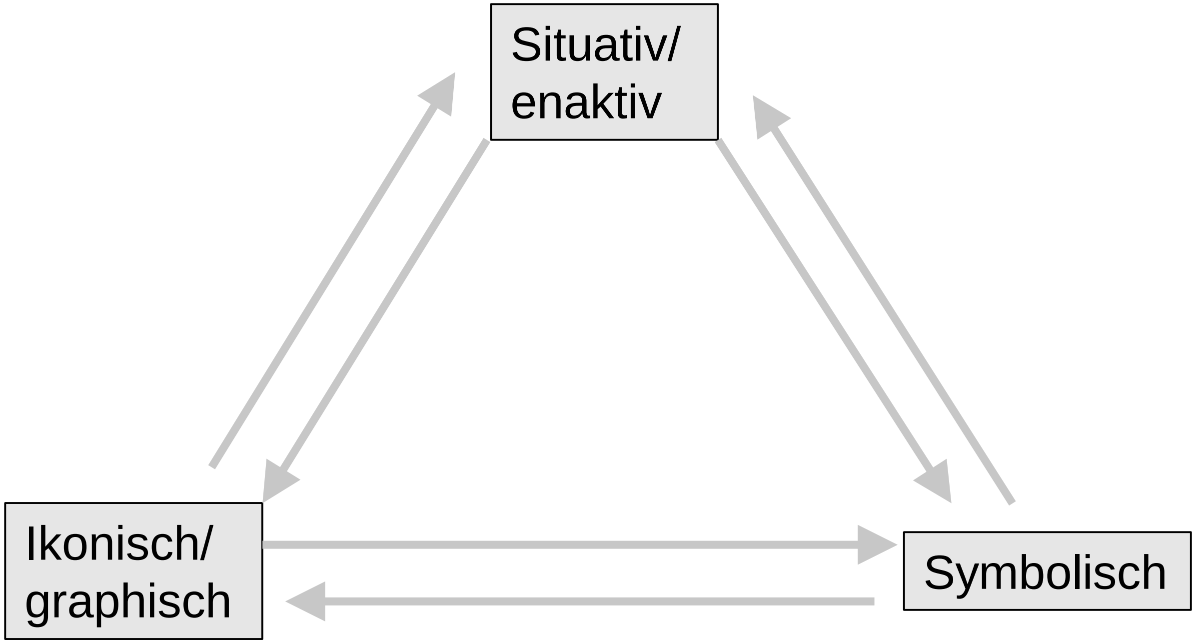
Grundvorstellungen und Lernprozesse

Damit die Lernenden Mathematik sinnerfüllt erleben und verstehen, müssen die schon in der Grundschule angebahnten *Grundvorstellungen* tragfähig weiterentwickelt, ergänzt und im Bedarfsfall revidiert werden. Die Grundvorstellungen ermöglichen den Schülerinnen und Schülern, einen Sinnzusammenhang zwischen der mathematischen und der realen Welt herzustellen: Ein mathematisches Konzept kann erst sinnvoll eingesetzt werden, wenn die entsprechenden Grundvorstellungen dazu aktiviert werden können (zum Beispiel benötigt das Addieren von Brüchen Grundvorstellungen zu Brüchen als Anteil und zur Verfeinerung von Anteilsdarstellungen). Grundvorstellungen bilden so die notwendige Basis für mathematisches Verständnis und damit für den Aufbau mathematischer Kompetenzen. Stabile Grundvorstellungen sind Voraussetzung dafür, auch auf längerfristig zurückliegende mathematische Begriffe und Regeln nachhaltig zugreifen zu können.

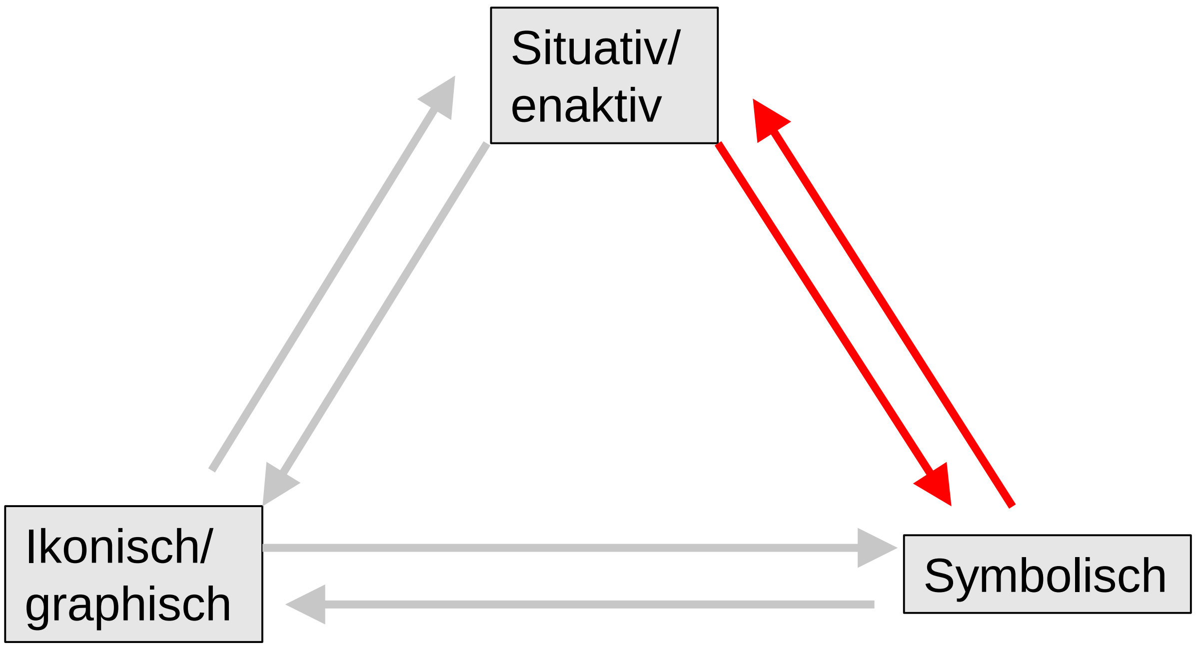
„Sinnzusammenhang zwischen der mathematischen und der realen Welt“

- … hierfür wir schauen uns jetzt den Darstellungswechsel situativ ↔ symbolisch noch etwas genauer an.

Darstellungswechsel



Darstellungswechsel



Grundvorstellungen der Addition:

Schreiben Sie eine Rechengeschichte, die zu folgender Rechnung passt: 4+3=7

„Hanna hat 4 €. Sie erhält von ihrer Oma noch 3 € dazu. Wie viel € hat sie jetzt?“

Grundvorstellung 1: „Hinzufügen“

„Hanna hat 4€ und ihr kleiner Bruder hat 3€. Wie viel € haben Sie zusammen?“

Grundvorstellung 2: „Zusammenfügen“

Grundvorstellungen der Subtraktion:

Übung:

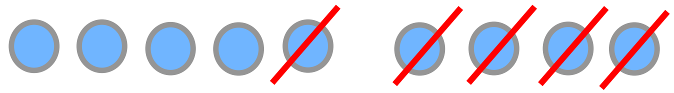
Schreiben Sie eine Rechengeschichte auf, die zu der folgenden Rechnung passt: **9-4**

Schreiben Sie eine Rechengeschichte auf, die zu der folgenden Rechnung passt: **41-39**

Grundvorstellungen der Subtraktion:

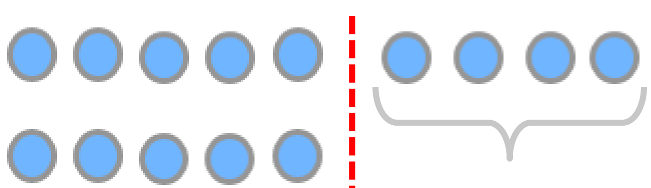
9-5

„Wegnehmen“



„Von den 9 Bonbons esse ich 5 auf. Wie viele sind noch **übrig**?“

„Unterschied“



„Ich habe 9 Bonbons und Du hast 5 Bonbons. Wie viele Bonbons habe ich **mehr als** Du?“

Was bedeutet eigentlich das „-“?

6-1

Torben möchte
sechs Eier zum Früh-
stück machen. Ein Ei
fällt ihm auf den Bo-
den. Wie viele Eier
kann er jetzt noch
machen?

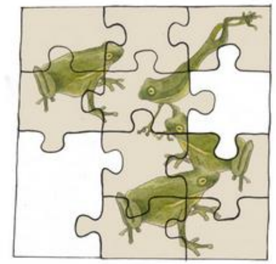
Deutung:
„Wegnehmen“

9-6

Jan hat neun Äpfel.
Paula hat sechs Äpfel.
Wie viele Äpfel hat
Jan ***mehr*** als Paula?

Deutung:
„Vergleichen“

12-9



Marie hat neun Puz-
zleteile zusammenge-
setzt. Das Bild hat ins-
gesamt zwölf Teile.
Wie viele Teile fehlen
ihr noch?

Deutung:
„Ergänzen“

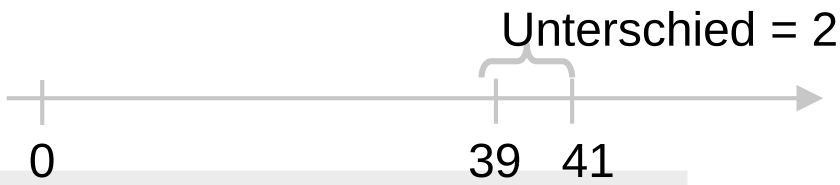
„Unterschied“-Vorstellung

Grundvorstellungen der Subtraktion:

Übung:

Schreiben Sie eine Rechengeschichte, die zu der folgenden Rechnung passt: **9-4**

Schreiben Sie eine Rechengeschichte, die zu der folgenden Rechnung passt: **41-39**



Grundvorstellungen der Subtraktion:

Übung:

A: Wegnehmen

B: Unterschied

Schreiben Sie eine Rechengeschichte auf, die zu der folgenden Rechnung passt: **9-4**

Schreiben Sie eine Rechengeschichte auf, die zu der folgenden Rechnung passt: **41-39**

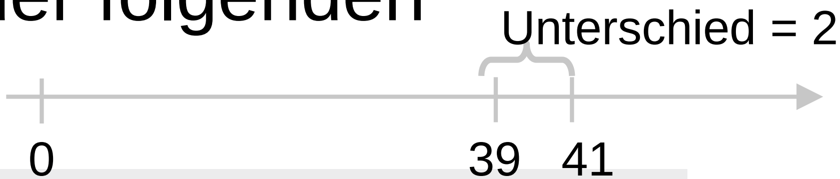
Grundvorstellungen der Subtraktion:

Übung:

Schreiben Sie auf ein Kärtchen eine Rechengeschichte, die zu der folgenden Rechnung passt: **9-4**

Beobachtung: In den Vorlesungen der letzten Semester haben wir aus den Antwortkärtchen Stapel gebildet, um zu sehen, wie viele Studierende die Grundvorstellung „Wegnehmen“ und wie viele die Grundvorstellung „Unterschied“ verwendet haben. Das Ergebnis war, dass der Stapel für „Wegnehmen“ viel höher war, obwohl die Rechnung 41-39 mit der Unterschiedsvorstellung viel leichter ist.

Schreiben Sie auf ein anderes Kärtchen eine Rechengeschichte, die zu der folgenden Rechnung passt: **41-39**



Dominanz der „Wegnehmen"-Vorstellung bei der Subtraktion:

Vergleichssituationen zu lösen, fällt Kindern oft schwerer als Situationen des Abziehens oder Ergänzens, so belegen es auch Studien (vgl. u. a. von Stern 1998).

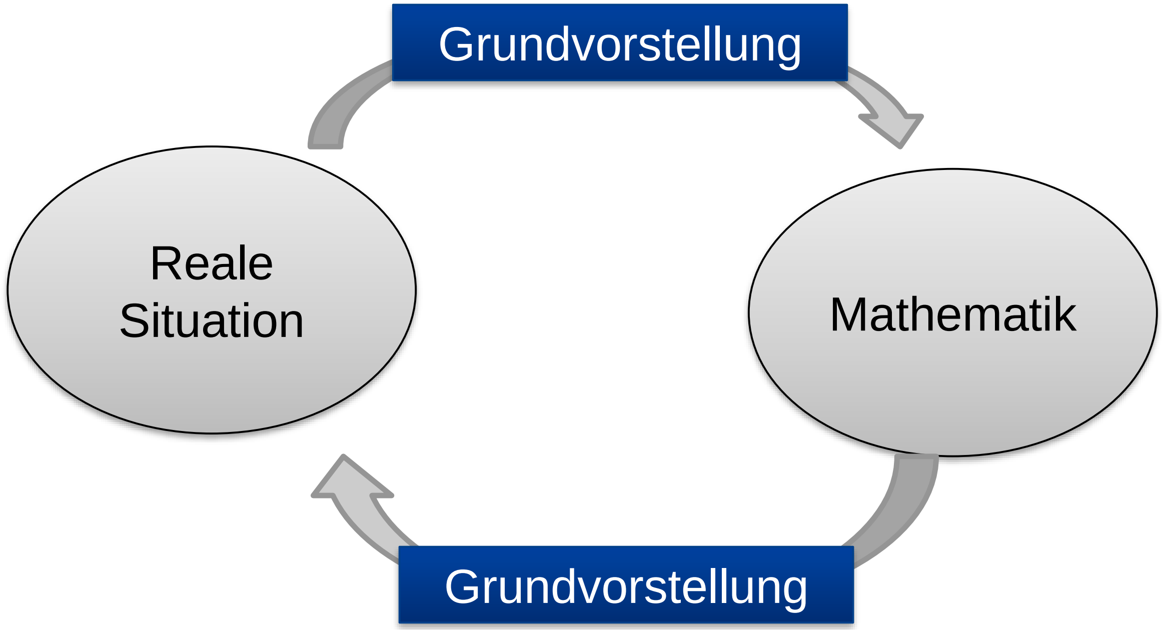
Ein Grund für diese Schwierigkeiten beim Lösen von Vergleichssituationen ist die fehlende oder mindestens nachrangige Thematisierung aller Grundvorstellungen zur Subtraktion in Schulbüchern und damit im Mathematikunterricht.

Warum ist das ein Problem?

- Schwierigkeiten beim „flexiblen Rechnen" (Wie rechnen Sie **601-598** ?)
- Schwierigkeiten mit dem Abstandsbegriff
  $$d(a, b) = |a - b|$$
- Schwierigkeiten beim Mathematisieren von Anwendungssituationen

Grundvorstellungen beim Mathematisieren

- Mathematisieren beschreibt den Wechsel zwischen Welt und Mathematik:



- Grundvorstellungen sind die „Übersetzungs-scharniere" zwischen Welt und Mathematik.

Was sind „Grundvorstellungen“?

- sind Standard-Vorstellungen, die mit mathematischen Operationen / Konzepten / Begriffen verbunden sind
- bilden die Brücke („Übersetzungsscharniere“) zwischen Mathematik und Welt, d.h. sind Basis für das Mathematisieren einer Situation bzw. das Interpretieren einer Rechnung
- sind daher notwendig zum Lösen außermathematischer Probleme
- Wichtig: Jede Grundvorstellung muss erworben werden! (Wer nur über die Vorstellung des „Wegnehmens“ verfügt, kann nicht automatisch auch Subtraktionsaufgaben lösen, bei denen die Vorstellung des „Unterschieds“ aktiviert werden muss).

Grundbildung und Grundvorstellungen, siehe [11]

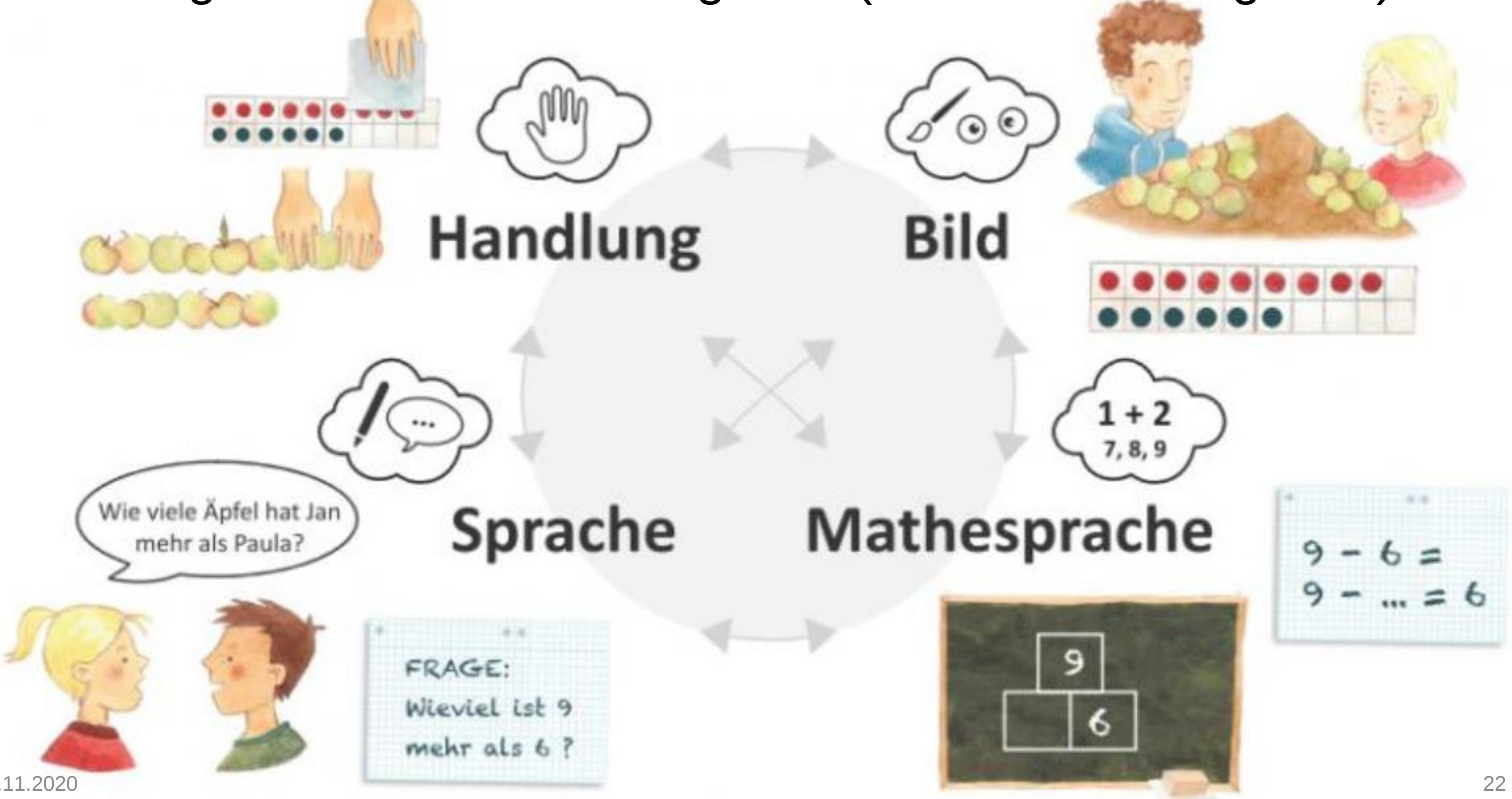
Der vielleicht wichtigste Kritikpunkt an unserem heutigen Mathematikunterricht besteht darin, dass er sich zu sehr an der Vermittlung von Standardverfahren orientiert, während der Erwerb von flexibel anwendbaren mathematischen Fähigkeiten eher zu kurz kommt.

Hierbei stellen sich ganz konkrete Fragen wie: Was versteht man eigentlich unter mathematischer Grundbildung? Was ist hierfür wesentlich, was verzichtbar? Worin liegt der für das Verständnis wichtige Kern eines mathematischen Gebiets? Welche Fähigkeiten und Fertigkeiten müssen hierzu ausgebildet werden? Welche Ideen und welche Vorstellungen sind erforderlich?

[11] vom Hofe, R (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik lehren (118), S. 4-8. [verfügbar auf ILIAS]

Wichtig für das Ausbilden von Grundvorstellungen:

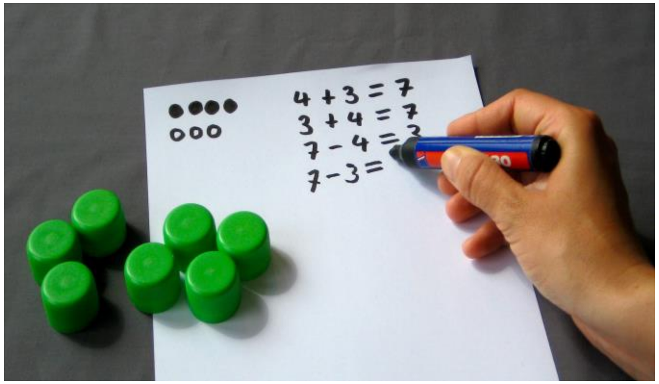
- Geeignete ikonische Darstellung (mit konzeptuellem Gehalt) nutzen
- Darstellungswechsel durchführen
- Handlungsbegleitend versprachlichen
- Beziehungen zwischen den Aufgaben (z.B. Umkehraufgaben) nutzen



Operationsverständnis:

Zu einem umfassenden Operationsverständnis gehört die Berücksichtigung und Förderung der folgenden drei Aspekte:

- Grundvorstellungen zur Rechenoperation
- Fähigkeit zum Darstellungswechsel
- Erkennen und Nutzen von Beziehungen und Strukturen zwischen Aufgaben



Übung:

Schreiben Sie auf das Kärtchen eine Situation, die zu der folgenden Rechnung passt:

$$21 : \frac{3}{4}$$

Rechengeschichten von Studierenden der Mathematik (WS18)

Passend oder nicht?

21 Kinder teilen sich einen Kuchen, von dem die Katze ein Viertel gegessen hat.
Wie viel bekommt jeder?

A

Auf einer Feier gibt es 21 Äpfel. Wenn alle einen 3/4 Apfel essen bekommen alle gleich viel.
Wie viele Menschen sind da?

C

Du möchtest deinen 21 m langen Gartenweg mit Platten auslegen. Eine Platte ist 3/4 m lang. Wie viele Platten brauchst du?

B

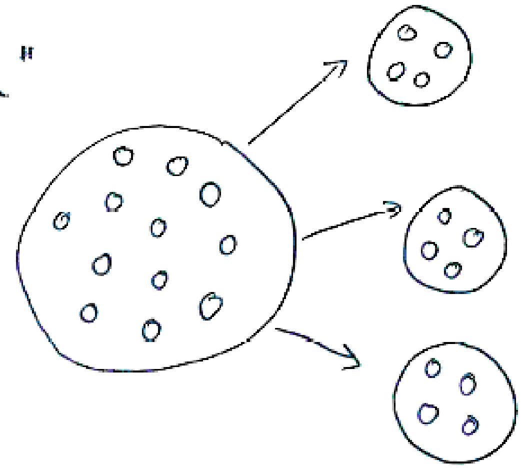
Von einer Schokoladentafel sind noch 3/4 übrig. 21 Kinder aus der Klasse möchten etwas davon bekommen. Wieviel erhält jeder? Teile gerecht!

D

Grundvorstellungen der Division

$\boxed{12:3=4}$

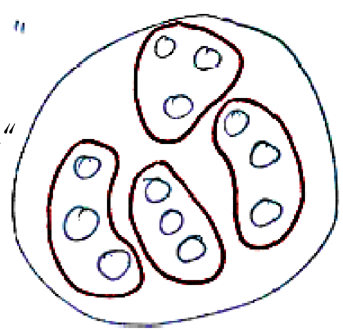
„Verteilen"



„12 Mandarinen werden an 3 Kinder verteilt. Wie viele bekommt jeder?"

„Aufteilen"

Auch: „Passen in"



„12 Mandarinen werden in Tüten mit je 3 Stück verpackt. Wie viele Tüten sind es?"

Umkehroperation zur Multiplikation

$3 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow 12:3=4$

Wichtige Anmerkung:

Für den Übergang zu den rationalen Zahlen gilt:

Nur die Grundvorstellung des Aufteilens/Passen-in ist ausbaufähig für die Bruchrechnung !! Die Vorstellung des Verteilens ergibt hier hingegen keinen Sinn mehr.

$$1 : \frac{1}{4} = ?$$

„Wie oft passt ¼ Liter in 1 Liter?" ✓

„1 Liter an ¼ Kind verteilen" ✗

Rechengeschichten von Studierenden der Mathematik (WS18)

21 Kinder teilen sich einen Kuchen, von dem die Katze ein Viertel gegessen hat.
Wie viel bekommt jeder?

A

Vorstellung: Verteilen

Du möchtest deinen 21m langen Gartenweg mit Platten auslegen. Eine Platte ist $3/4$ m lang. Wie viele Platten brauchst du?

B

Vorstellung: Passen-in

Auf einer Feier gibt es 21 Äpfel. Wenn alle einen $3/4$ Apfel essen bekommen alle gleich viel.
Wie viele Menschen sind da?

C

Vorstellung: Passen-in

Von einer Schokoladentafel sind noch $3/4$ übrig. 21 Kinder aus der Klasse möchten etwas davon bekommen. Wieviel erhält jeder? Teile gerecht!

D

Vorstellung: Verteilen

Primäre und Sekundäre GV:

Grundvorstellungen heißen

- primär, wenn sie „ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen aus der Vorschulzeit haben“ und „den Charakter von konkreten Handlungsvorstellungen haben“.
- sekundär, wenn sie „aus der Zeit mathematischer Unterweisung stammen“ und „zunehmend mit Hilfe von mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert werden.“

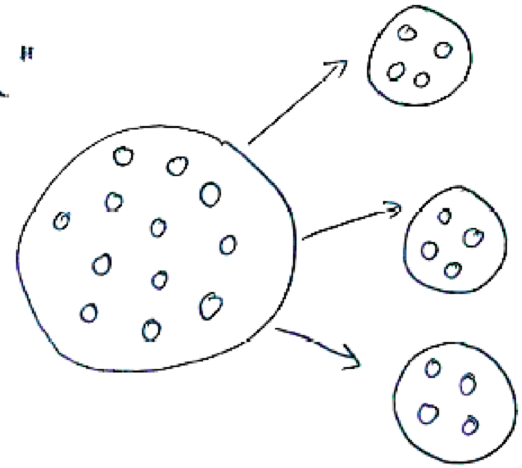
aus: vom Hofe (2003), siehe [11]

Grundvorstellungen der Division

$\boxed{12:3=4}$

„Verteilen"

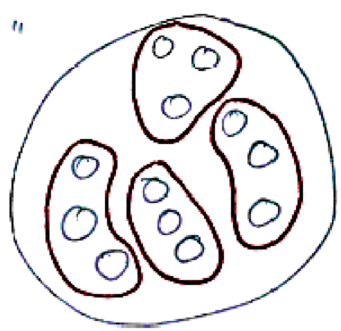
Primäre GV



„12 Mandarinen werden an 3 Kinder verteilt. Wie viele bekommt jeder?"

„Aufteilen"

Primäre GV



„12 Mandarinen werden in Tüten mit je 3 Stück verpackt. Wie viele Tüten sind es?"

Umkehroperation zur Multiplikation

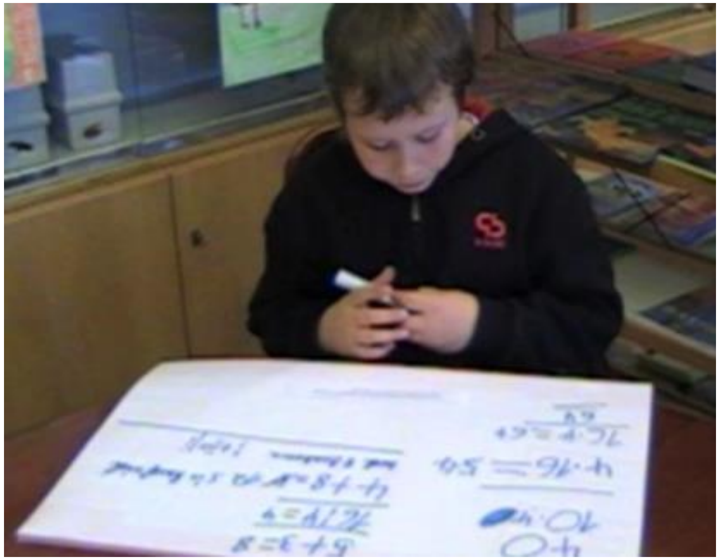
$3 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow 12:3=4$

Sekundäre GV

Diagnose und Grundvorstellung

- Wir hören uns das Interview „Anton und der Graupapagei“ [09] an und fragen uns:
- „Was ist da los?“ → Diagnose

Die Audiodatei finden Sie bei ILIAS im Vorlesungsordner.



Der afrikanische Graupapagei kann bis zu 40 cm lang werden.
Ein Flamingo misst vom Schnabel bis zu den Zehen etwa 2 m, also 200 cm.
Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei?

Interview mit Anton (Anfang Klasse 5, mittleres Leistungsniveau):

A: „Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei? … da… 40 mal 200?“

I: „Wie kommst Du darauf?“

A: „Nee. Oder. Würde ich ... Oder, oder… 40 geteilt durch 200…Muss ich mal gucken. Ja?

I: „Ja, überleg ruhig.“

A: „Also…also 160, also ein Meter 60 ist er größer der Flamingo, das weiß ich, ich kann mir das ja mal merken“

I: „genau, schreib das mal auf“

A: „160. Und das habe ich jetzt gerechnet. In … also ich habe jetzt ergänzt. Wie macht man das Ergänzt-Zeichen?“

I: „Entweder Du kannst durch Plus irgendwie aufschreiben…“

A: „ok… kann ich ja… ja, kann ich auch … also dann, [40] plus 60 plus 100 = 160 .. Zentimeter.“

I: „Nee, das stimmt aber nicht.“

A: „40 plus 60 sind 100 und dann 200… ah, jetzt hab ich da, dann hab ich… da kommen jetzt 200 raus, dann, irgendwie hab ich es, weiß ich, dass der Graupapagei, der is ja, 40 cm, dann muss ich 200 minus 40 rechnen.“

I: „Hm, und was bekommst Du dann raus?“

A: „Moment, 200-40=160.“

I: „Hm, und was hast Du jetzt raus?“

A: „Dass der Graupapagei 160cm kleiner ist als der Flamingo.“

Das Interview finden Sie ebenfalls bei ILIAS im Vorlesungsordner.

Der afrikanische Graupapagei kann bis zu 40 cm lang werden.
Ein Flamingo misst vom Schnabel bis zu den Zehen etwa 2 m, also 200 cm.
Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei?

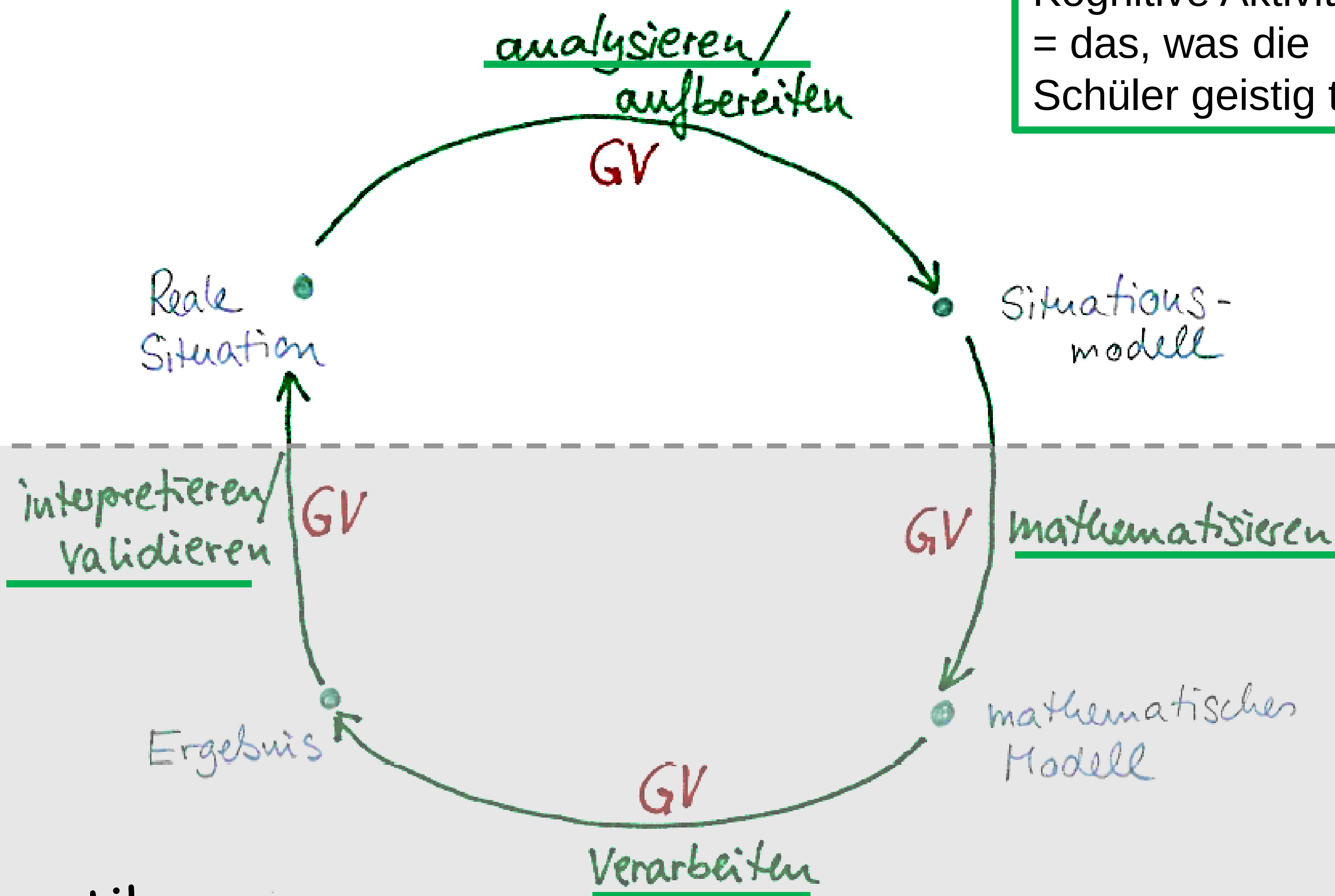
- Hören Sie sich das Interview mit Anton (ILIAS-Vorlesung) an. Lesen Sie das Interview ein zweites Mal. (Text ebenfalls bei ILIAS).

- Was ist hier los? Beschreiben Sie die Schwierigkeiten von Anton.

Der Modellierungskreislauf:

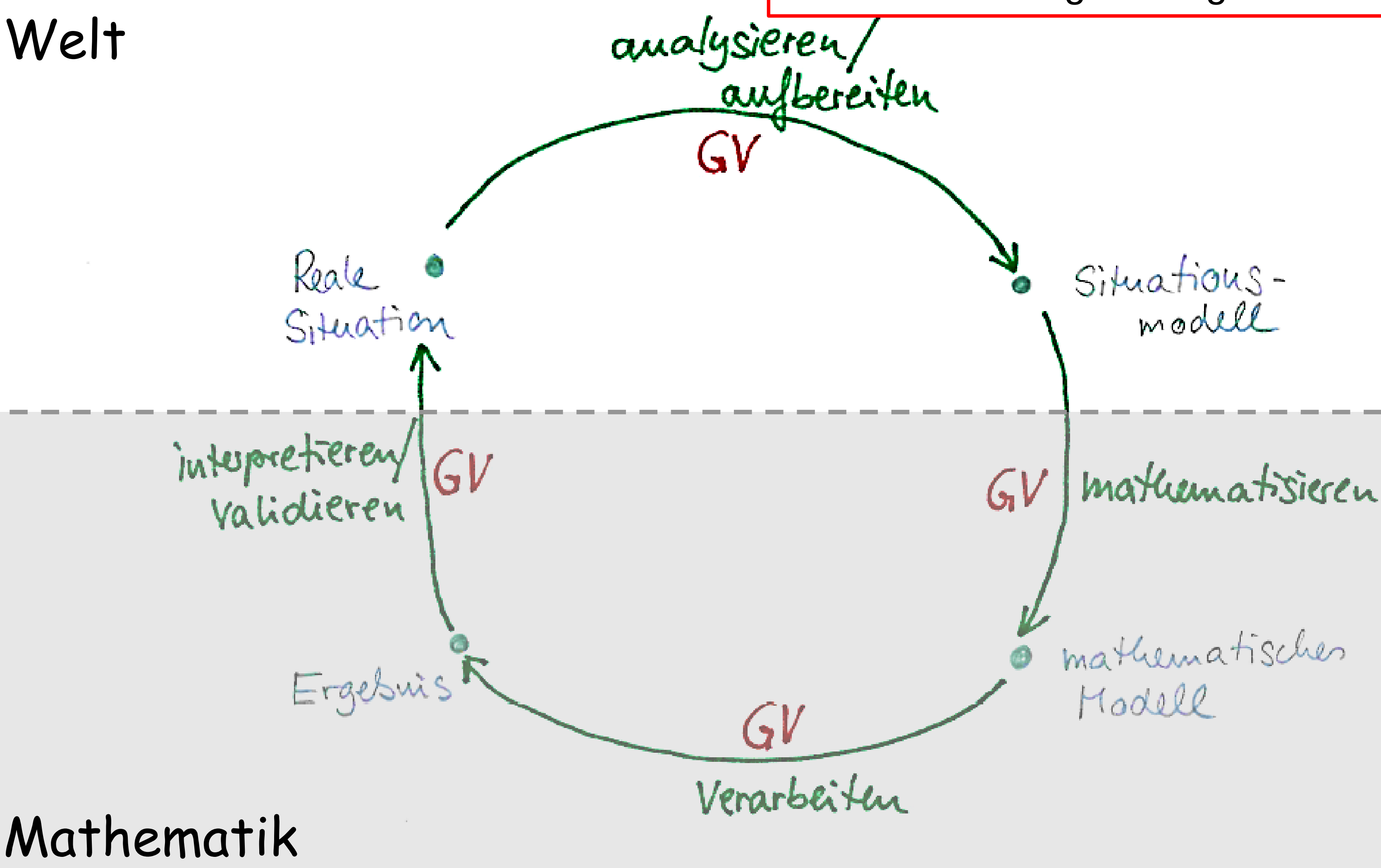
Kognitive Aktivitäten = das, was die Schüler geistig tun

Welt



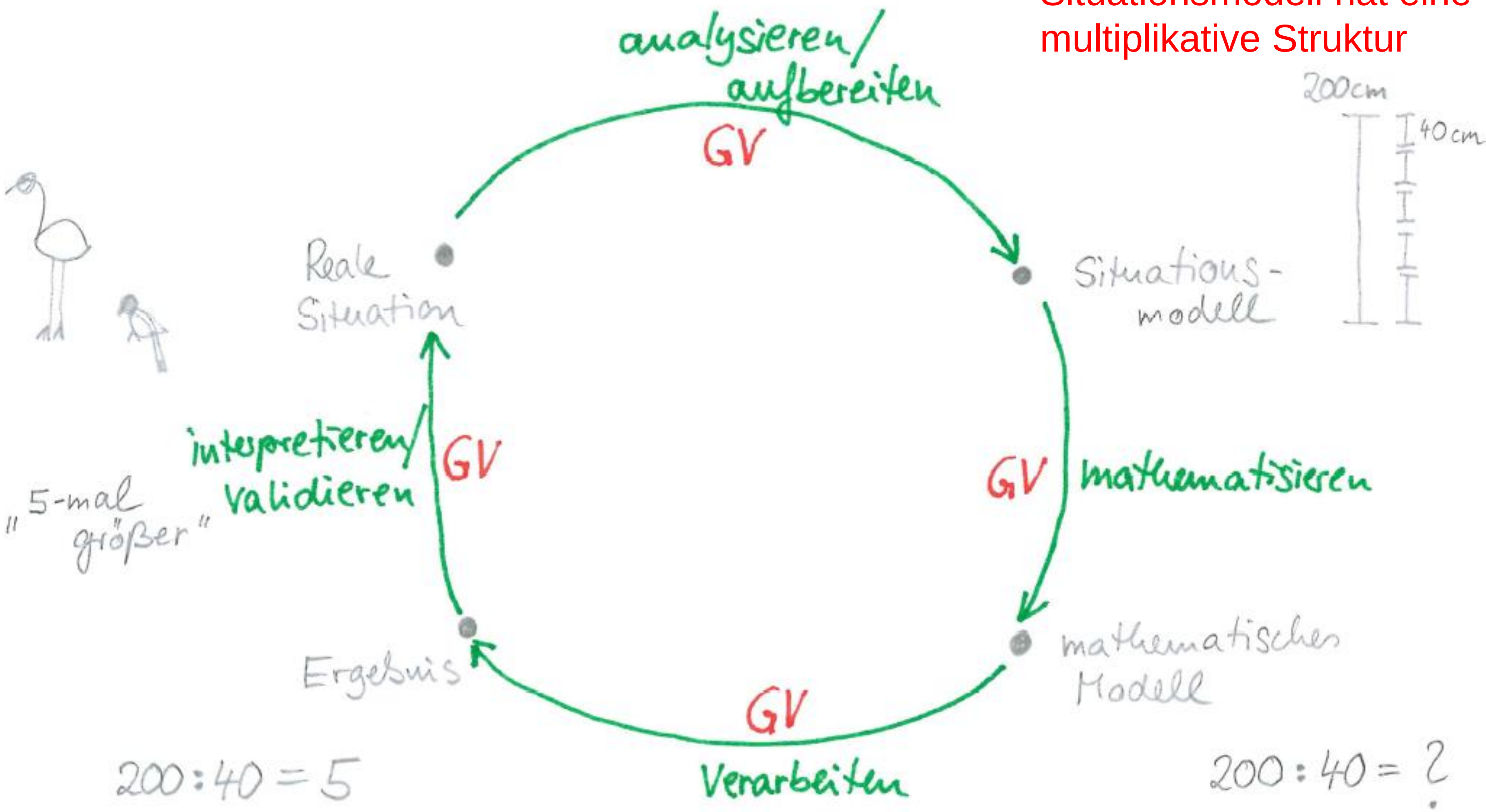
Mathematik

GV: Grundvorstellungen
Die jeweiligen kognitiven Aktivitäten können nur dann erfolgreich ausgeführt werden, wenn die dafür nötigen Grundvorstellungen ausgebildet sind.



Analyse Interview: Die Graupapagei-Aufgabe im Modellierungskreislauf

Situationsmodell hat eine multiplikative Struktur



Analyse Interview:

Um die Frage „wie viel mal größer“ mit der Rechnung □ : □ verknüpfen zu können, muss man über die Vorstellung des „Aufteilens/Passen-in“ verfügen können.

Vermutung: Anton kann möglicherweise nur über die Vorstellung des „Verteilens“ verfügen, die Interpretation des Aufteilens/Passen-in ist ihm nicht vertraut.

Interview mit Anton (Anfang Klasse 5, mittleres Leistungsniveau):

A: „Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei? … da… 40 mal 200?“

I: „Wie kommst Du darauf?“

A: „Nee. Oder. Würde ich ... Oder, oder… 40 geteilt durch 200…Muss ich mal gucken. Ja?

I: „Ja, überleg ruhig.“

A: „Also…also 160, also ein Meter 60 ist er größer der Flamingo, das weiß ich, ich kann mir das ja mal merken“

I: „genau, schreib das mal auf“

A: „160. Und das habe ich jetzt gerechnet. In … also ich habe jetzt ergänzt. Wie macht man das Ergänzt-Zeichen?“

I: „Entweder Du kannst durch Plus irgendwie aufschreiben…“

A: „ok… kann ich ja… ja, kann ich auch … also dann, [40] plus 60 plus 100 = 160 .. Zentimeter.“

I: „Nee, das stimmt aber nicht.“

A: „40 plus 60 sind 100 und dann 200… ah, jetzt hab ich da, dann hab ich… da kommen jetzt 200 raus, dann, irgendwie hab ich es, weiß ich, dass der Graupapagei, der is ja, 40 cm, dann muss ich 200 minus 40 rechnen.“

I: „Hm, und was bekommst Du dann raus?“

A: „Moment, 200-40=160.“

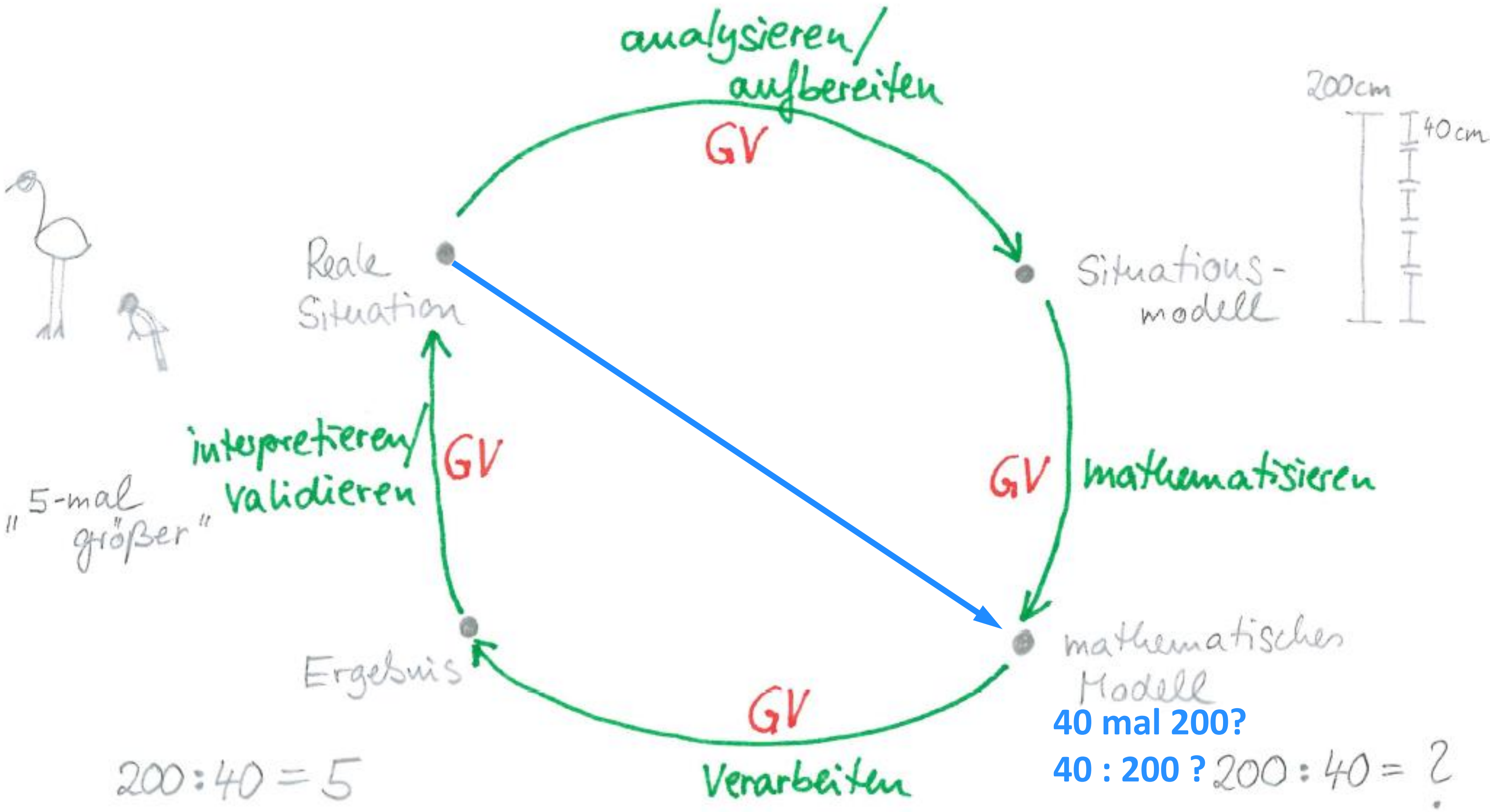
I: „Hm, und was hast Du jetzt raus?“

A: „Dass der Graupapagei 160cm kleiner ist als der Flamingo.“

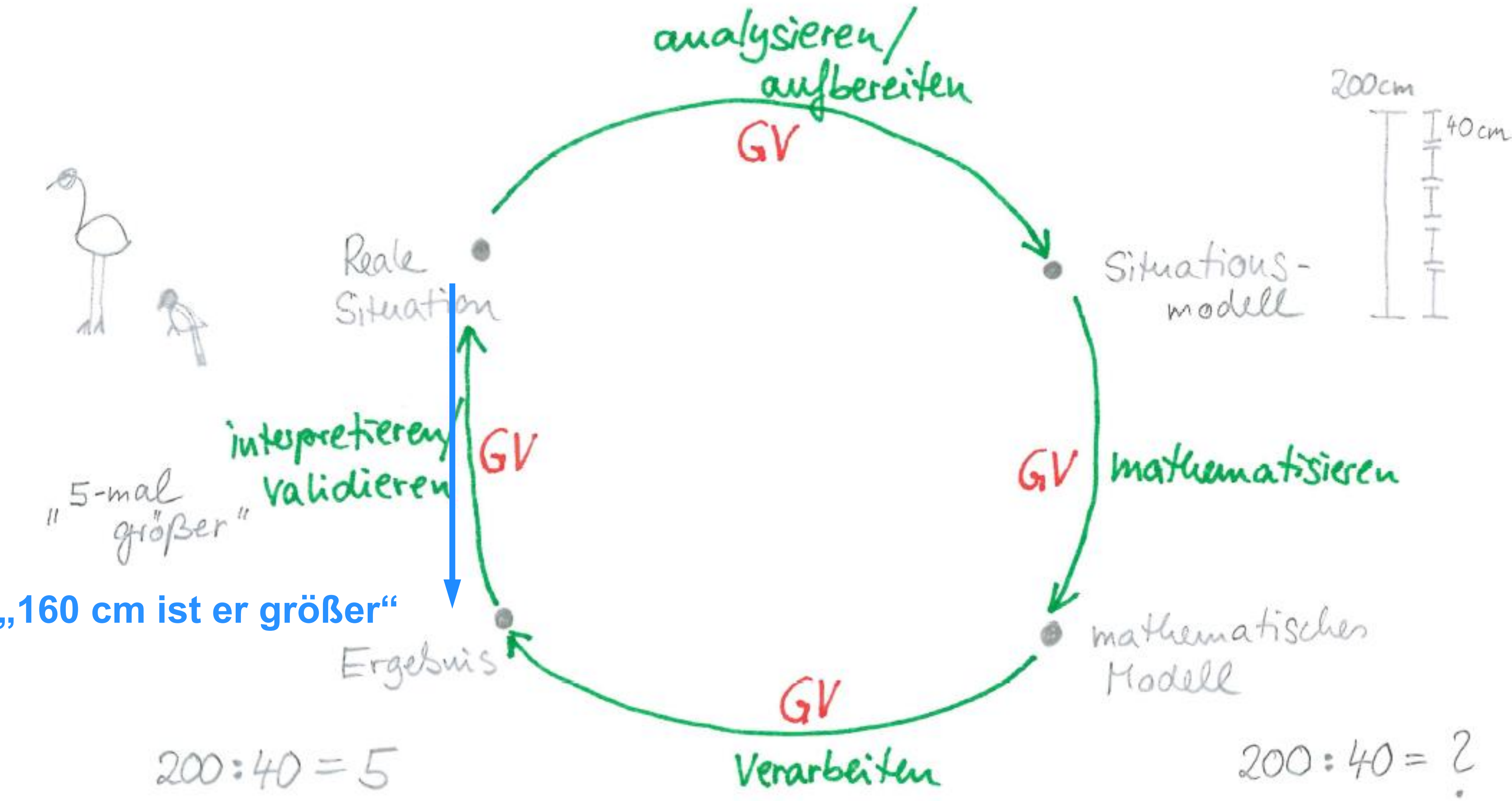
Der afrikanische Graupapagei kann bis zu 40 cm lang werden.
Ein Flamingo misst vom Schnabel bis zu den Zehen etwa 2 m, also 200 cm.
Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei?

Das Interview finden Sie ebenfalls bei ILIAS im Vorlesungsordner.

Analyse Interview: Antons Weg



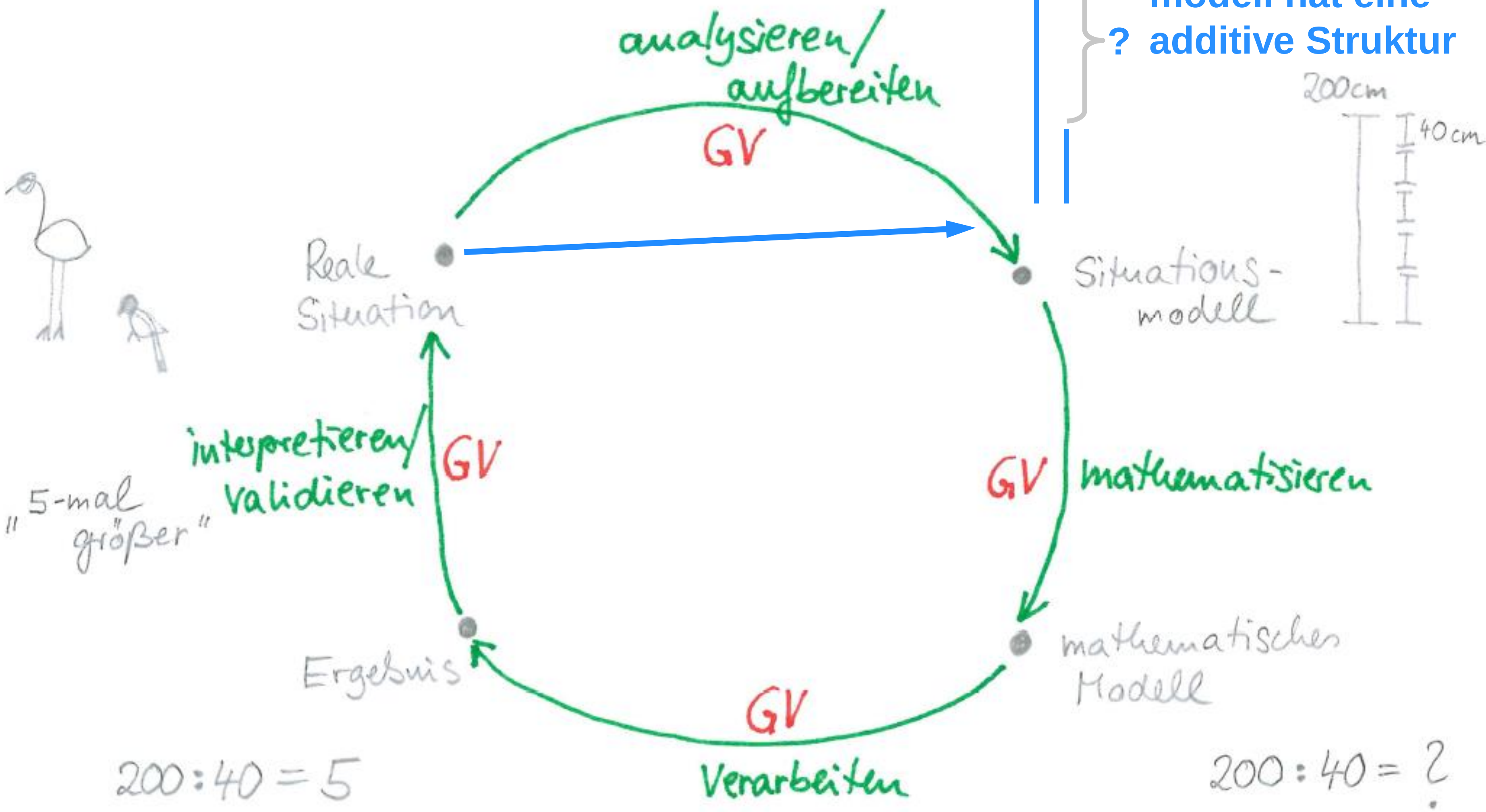
Analyse Interview: Antons Weg



Analyse Interview: Antons Weg

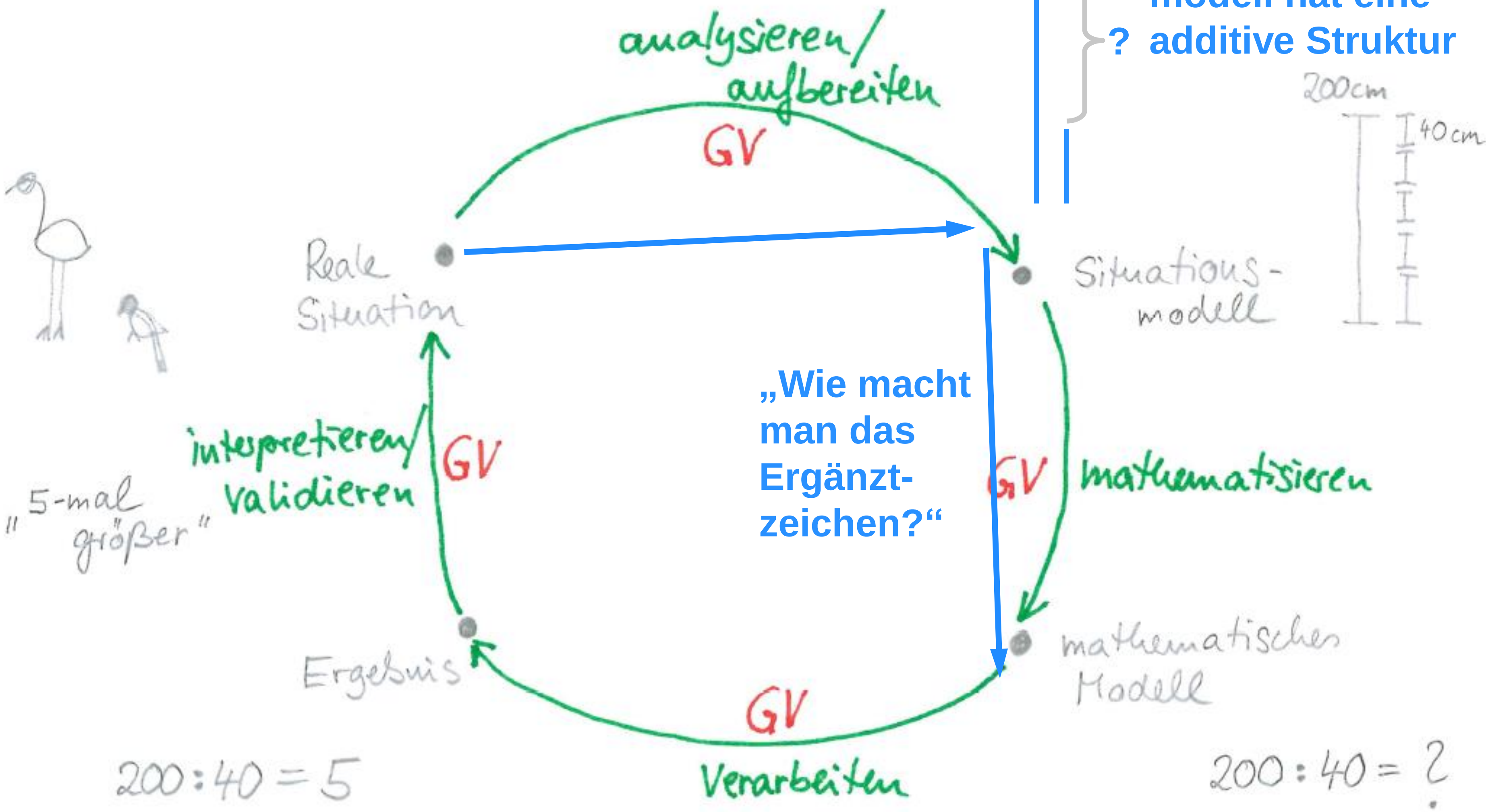
Antons Situations-modell hat eine additive Struktur

?



Analyse Interview: Antons Weg

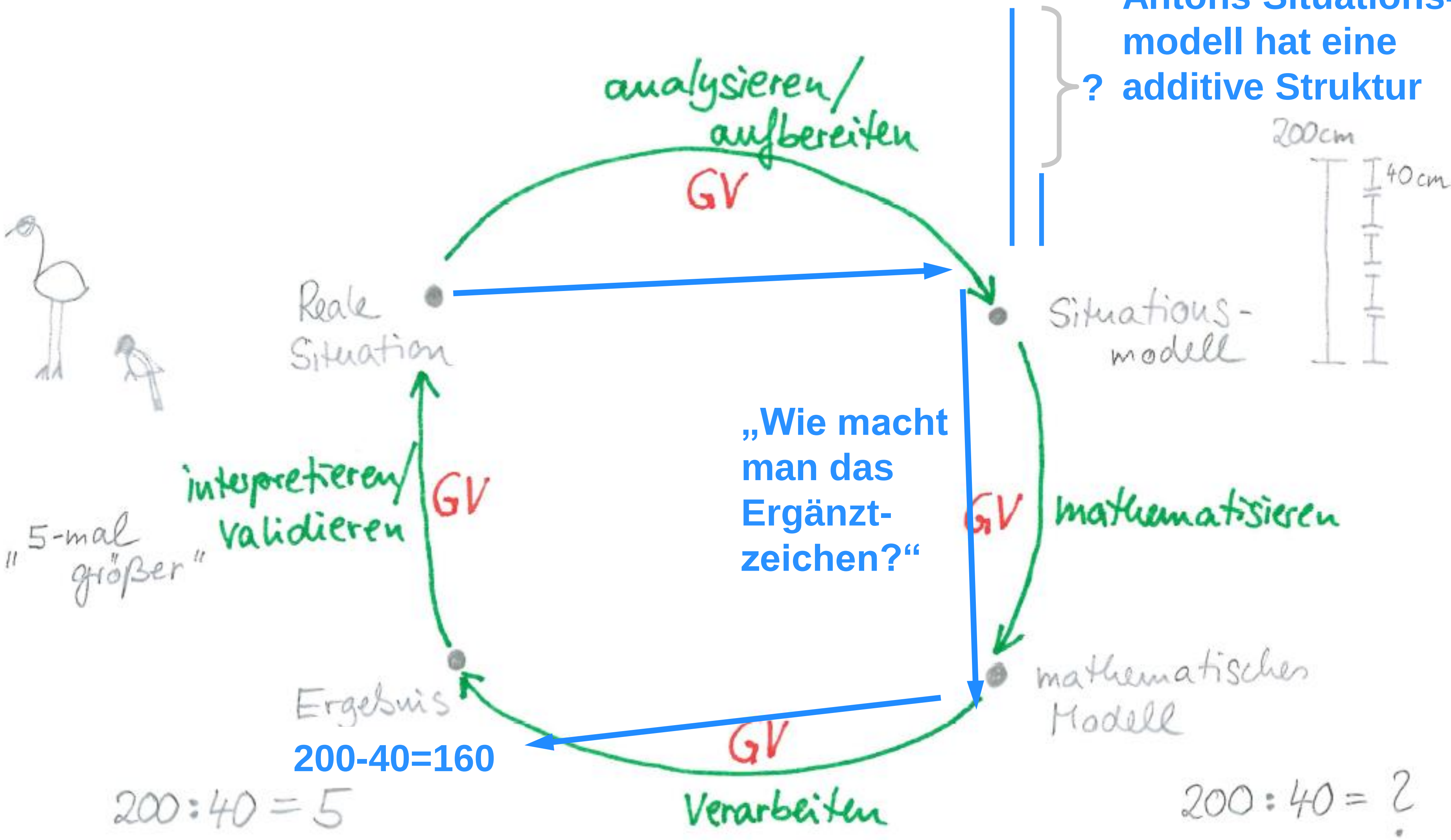
Antons Situations-modell hat eine additive Struktur



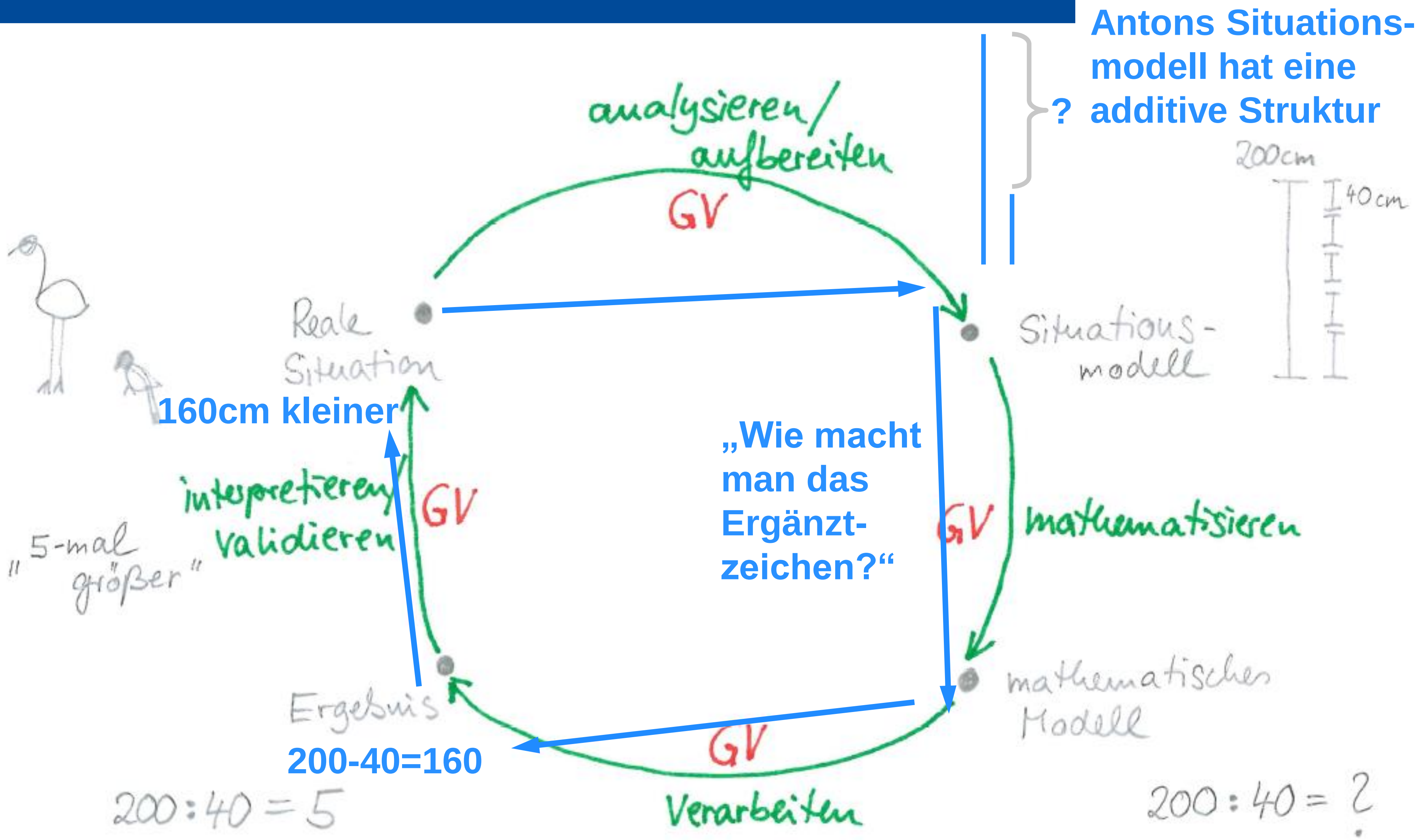
Analyse Interview: Antons Weg

Antons Situations-modell hat eine additive Struktur

?



Analyse Interview: Antons Weg



Analyse Interview:

- Um die Frage „wie viel mal größer“ mit der Rechnung $\square : \square$ verknüpfen zu können, muss man über die Vorstellung des „Aufteilens/Passen-in“ verfügen können.
- Anton kann möglicherweise nur über die Vorstellung des „Verteilens“ verfügen, die Interpretation des Aufteilens/Passen-in ist ihm nicht vertraut.
- Antons Situationsmodell ist additiv und passt nicht zur multiplikativen Struktur der Aufgabenstellung.

Weitere Grundvorstellungen

- Grundvorstellungen der Multiplikation und von Brüchen

Grundvorstellungen der Multiplikation:

$\boxed{3 \cdot 5}$

wiederholte Addition

zeitlich-sukzessive

„Ich gehe 3-mal 5 Teller holen"

räumlich-simultan

„Hier stehen 3 Stapel mit jeweils 5 Tellern"

Skalierung

3cm $\xrightarrow{\cdot 5}$ 15 cm

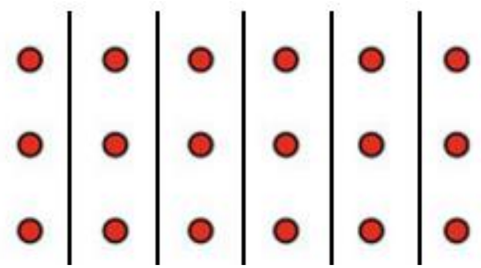
Wichtige Anmerkungen:

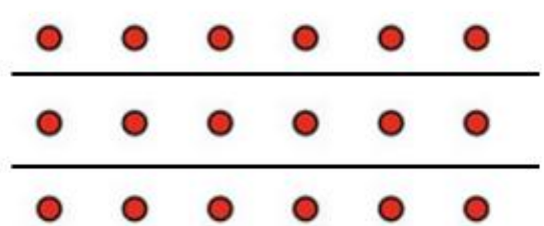
- Nur die Vorstellung des „Skalierens“ ist tragfähig für die Multiplikation zweier Brüche

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$$

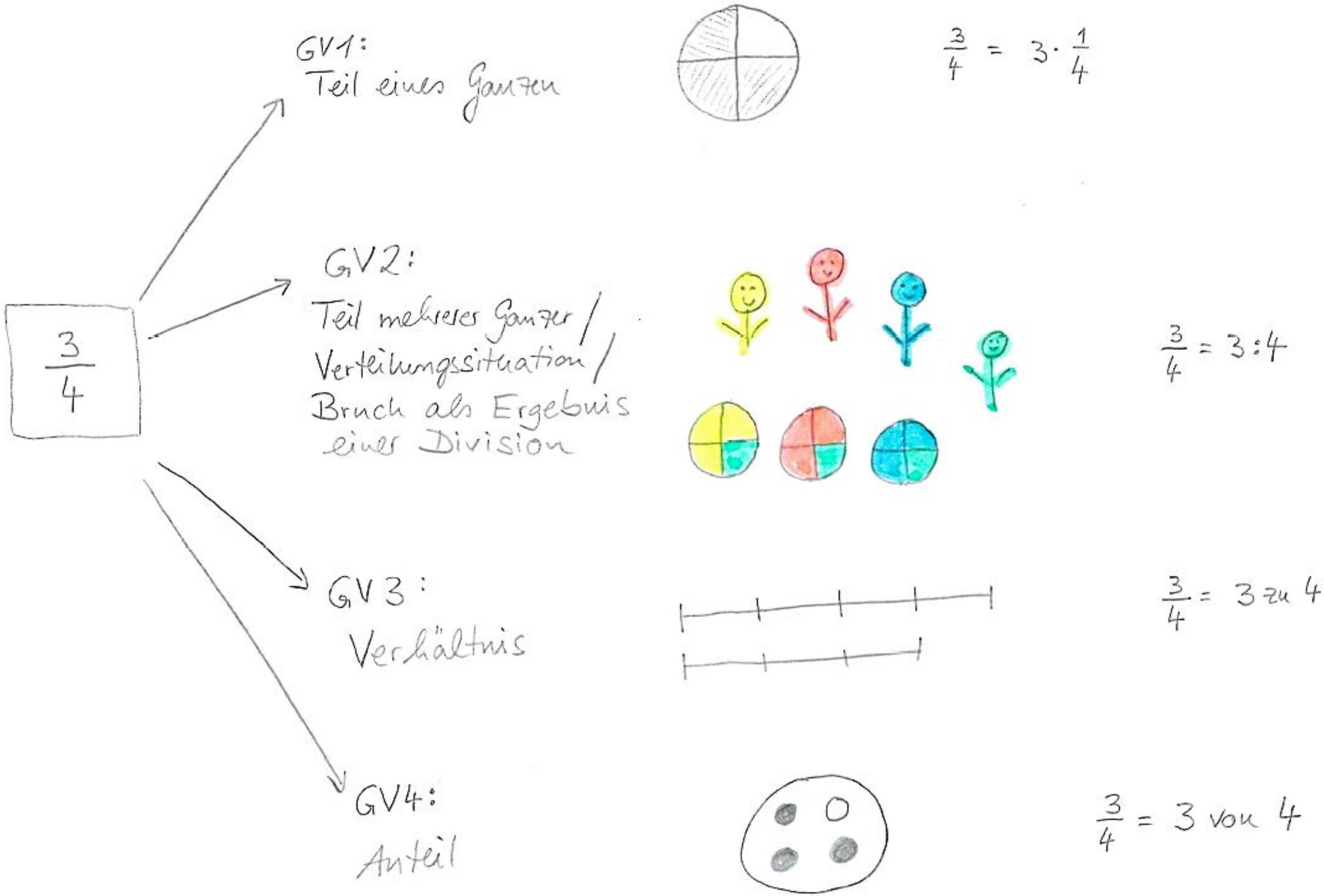
- Nur in der räumlich-simultanen Vorstellung ist das Kommutativgesetz unmittelbar einsichtig.

$$6 \cdot 3 \quad = \quad 3 \cdot 6$$





Grundvorstellungen zu Brüchen:



Wichtige Anmerkung

- Jede Grundvorstellung muss ausgebildet werden !!
- Man darf nicht davon ausgehen, dass Schülerinnen und Schüler, denen man die Bedeutung eines Bruches anhand der GV1 erklärt hat, von sich aus Situationen mathematisieren können, bei denen auf andere Grundvorstellungen zurückgegriffen werden muss.
- Grundvorstellungen sind Hintergrundwissen für Lehrkräfte, um den Unterricht und Übungsaufgaben sinnvoll zu gestalten und um Verständnisschwierigkeiten besser erkennen zu können. Schülerinnen und Schüler müssen **nicht** einzelne Grundvorstellungen erkennen oder benennen können.

Literatur:

- [08] Bildungsplan 2016, Allgemeinbildendes Gymnasium Baden-Württemberg, Mathematik [verfügbar auf ILIAS]

- [09] Prediger, S. (2009). *Wie sage ich es mathematisch?* In Höttecke, D. (Hrsg.): Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Dresden 2009, LIT-Verlag, Berlin, 6-20. Verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/10-Prediger_GdCP-Mathematisieren.pdf

- [10] Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen. Mathematik lehren (123). Verfügbar unter ILIAS

- [11] vom Hofe, R (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik lehren (118), S. 4-8. [verfügbar auf ILIAS]