Lineare Algebra I

Blatt 10

Lorenz Burg M.Nr: 5113060
lorenz.burg@students.uni-freiburg.de

Tobius Remde M.Nr: 5100067
tobius.remde@gmx.de

08.02.21

Aufgabe 1

a)

Fehlstände: $\# \{(i,j) \mid i<j \ \sigma(i) > \sigma(j)\}$

$\forall\ i<j$ mit $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt $i = \sigma^{-1}(\sigma(i)) < \sigma^{-1}(\sigma(j)) = j$

also ist $\sigma^{-1}(\sigma(i)) < \sigma^{-1}(\sigma(j))$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$

(Für alle Tupel (i,j), also $i<j$ mit $\sigma(i) < \sigma(j)$

gilt $i = \sigma^{-1}(\sigma(i)) < \sigma^{-1}(\sigma(j)) = j$ also kein Fehlstand)

$\Rightarrow$ # Fehlstand von σ = # Fehlstand von σ^{-1}

Somit besitzen σ und σ^{-1} das gleiche Vorzeichen. $\square$

Aufgabe 1

b)

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{\prod_{1 \leq k \leq n}^{n} a_{k,\sigma(k)}}_{a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots} = 0$$

Sei $\sigma \in S_n$ beliebig: Wissen n.V. $a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = a_{1,\sigma(2)}\, a_{2,\sigma(1)}$

$\tau = \sigma \circ (1\,2)$ das ist in S_n mit $\operatorname{sign}(\tau) = -1 \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$

$$\operatorname{sign}(\tau) \cdot \underbrace{\prod_{1 \leq k \leq n}^{n} a_{k,\tau(k)}}_{a_{1,\sigma(2)} \cdot a_{2,\sigma(1)} \cdot a_{3,\sigma(3)} \cdots} + \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{1 \leq k \leq n} a_{k,\sigma(k)} = 0$$

$$= a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} \cdots$$

Aufgabe 1

g) Z.z $\quad \mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$

Sei $AB = (c_{ij})$, $BA = (d_{ij})$

mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}, \quad d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{spur}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \mathrm{Spur}(BA)$$

$\square$