Lineare Algebra 1

Blatt 6

Lorenz Bung (5113060): lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Tobias Remde (5100067): tobias.remde@gmx.de

Aufgabe 1

(a) **Behauptung:** Die Abbildung $F_{\bar{a}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ist für jedes n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ aus $\mathbb{K}^n$ linear.

Beweis: $F_{\bar{a}}$ ist linear, wenn $F_{\bar{a}}(\lambda x + \mu y) = \lambda F_{\bar{a}}(x) + \mu F_{\bar{a}}(y)$.
Seien also $\bar{a} := (a_1, \dots, a_n)$, $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Dann ist

$$F_{\bar{a}}(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^n a_i (\lambda x_i + \mu y_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i x_i + \mu a_i y_i)$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i + \mu \sum_{i=1}^n a_i y_i = \lambda F_{\bar{a}}(x) + \mu F_{\bar{a}}(y).$$

Damit ist $F_{\bar{a}}$ für alle $\bar{a}$ linear. $\square$

(b) **Behauptung:** $\{\bar{a} \in \mathbb{K}^n \mid F_{\bar{a}} = 0\} = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n})\}$

Beweis: Gesucht ist die Menge aller $\bar{a} \in \mathbb{K}^n$, sodass $F_{\bar{a}}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$.
Wir haben also

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

Da $x := (x_1, \dots, x_n)$ jedoch beliebig gewählt werden kann, muss bereits $\bar{a} = (0, \dots, 0)$ gewesen sein, da die Gleichung für <u>alle</u> x erfüllbar sein muss.

Somit ist $\bar{a} = (0, \dots, 0)$ die einzige Lösung und damit $\{\bar{a} \in \mathbb{K}^n \mid F_{\bar{a}} = 0\} = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n})\}$. $\square$

Aufgabe 1

(c) Es ist $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
Die Teilmenge $\mathrm{Ker}(F_{(a,b,c)})$ von $\mathbb{R}^3$ ist nach Definition die Menge aller $x \in \mathbb{R}^3$ mit $F_{(a,b,c)}(x) = 0$, also

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0.$$

Dies entspricht der Skalarmultiplikation der Vektoren (a,b,c) und (x_1, x_2, x_3).
Im geometrischen Sinn ist das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren genau dann 0, falls diese orthogonal zueinander stehen.
Also ist $\mathrm{Ker}(F_{(a,b,c)}) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \perp (a,b,c)\}$.

Aufgabe 2

(a) <u>Behauptung:</u> $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 0$.
<u>Beweis:</u> Durch Umformung der Darstellungsmatrix A in Zeilenstufenform erhalten wir

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{I+III} \\ \mathrm{I+IV} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{VI} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{II+V} \\ \mathrm{II+VI} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{VII} \\ \mathrm{VIII} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{VII} \\ \mathrm{VII+VIII} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\mathrm{Rang}(F) = \mathrm{Rang}(A) = 3$.

Aus der Dimensionsformel (Satz 2.34) folgt nun

$$\dim(\mathrm{Ker}(F)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{Rang}(F) = 3 - 3 = 0.$$

$\square$

Aufgabe 2

(b) Behauptung: $\dim(\operatorname{im}(F)) = 3$.

Beweis: Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker}(F))$$
$$= 3 - 0 = 3.$$

$\square$