Lineare Algebra 1
Blatt 4

Lorenz Bung (Matr. Nr.: 5113060)
Lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Tobias Remde (Matr. Nr.: 5100067)
tobias.remde@gmx.de

06. 12. 2020

Aufgabe 1

a)

U ist Unterraum von $\mathbb{R}[T]$, falls

1.) $0_V \in U$

2.) $\forall u_1, u_2 \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda u_1 + \mu u_1 \in U$.

1.) Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ mit $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i = q_{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$

Dann ist $0_{\mathbb{R}[T]} = 0_{\mathbb{R}} \cdot p = \sum^{n} = 0_{\mathbb{R}}$.

$0_{\mathbb{R}}$ ist aber bereits in V, da

$$0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}} \cdot a_2 \cdot T^2 + 0_{\mathbb{R}} \cdot a_1 \cdot T + 0_{\mathbb{R}} \cdot a_0 = 0_{\mathbb{R}} \cdot \sum_{i=0}^{2} a_i T^i \in U$$

2.) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in U$.

Dann lassen sich v_1, v_2 schreiben als

$$v_1 = \sum_{i=0}^{2} a_i \cdot T^i = a_2 \cdot T^2 + a_1 \cdot T + a_0 \quad \text{und}$$

$$v_2 = \sum_{i=0}^{2} a_i \cdot T^i = a_2 \cdot T^2 + a_1 \cdot T + a_0.$$

Damit ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 (a_2 T^2 + a_1 T + a_0) + \lambda_2 (a_2 T^2 + a_1 T + a_0)$$

$$= \lambda_1 a_2 T^2 + \lambda_1 a_1 T + \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a_2 T^2 + \lambda_2 a_1 T + \lambda_2 a_0$$

$$= T^2 \overbrace{(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 \cdot b_2)}^{\in \mathbb{R} : c_2} + T \overbrace{(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1)}^{\in \mathbb{R} : c_1} + \underbrace{\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0}_{\in \mathbb{R} : c_0}$$

$$= c_2 T^2 + c_1 \cdot T + c_0 \in U. \qquad \square$$

b)

$$1 + T, \quad 2 + T, \quad 1 + 2T + T^2$$

Die drei Elemente sind linear unabhängig, wenn das lineare Gleichungssystem

$$0_{\mathbb{R}} = \lambda_1 (1 + T) + \lambda_2 (2 + T) + \lambda_3 (1 + 2T + T^2)$$

für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ keine Lösung außer der trivialen hat.

$$0_{\mathbb{R}} = \lambda_1 + \lambda_1 T + 2\lambda_2 + \lambda_2 T + \lambda_3 + 2\lambda_3 T + \lambda_3 T^2$$
$$= \lambda_3 T^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) T + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\Rightarrow -\lambda_2 + 2\lambda_2 = \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Also sind die Elemente $\{1+T, 2+T, 1+2T+T^2\}$ tatsachlich linear unabhänig. $\square$

c)

Wir haben in b) bereits gezeigt, dass die Elemente linear unabhänig sind.
Um zu zeigen, dass sie eine Basis bilden, bleibt zu zeigen, dass sie ein Erzeugenden system sind.
Dies ist der Fall, wenn jeder Vektor aus V als Linear Kombination der o.g. Vektoren dargestellt werden kann.

Gegenbeispiel:

$1_{\mathbb{R}} \in U$, da $0_{\mathbb{R}} T^2 + 0_{\mathbb{R}} \cdot T + 1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}}$, das LGS $1_{\mathbb{R}} = \lambda_1(1+T) + \lambda_2(2+T) + \lambda_3(1+2T+T^2)$ hat jedoch keine Lösung.

c)

Somit sind die gegebenen Vektoren kein Erzeugendessystem und damit insbesondere keine Basis von V.

□

Aufgabe 2

a) $\Gamma = \{\emptyset, \{5\}, \{2,5\}, \{1,3\}\}$

Behauptung:

Γ besitzt keine obere Schranke in S. Es gibt allerdings mehr als nur eine einzige.

Beweis:

Wir wählen $a, b \in S$ mit $a := \{1,2,3,4,5\}$ und $b := \{1,2,3,4,5,6\}$ und $a \neq b$.

Dann ist a obere Schranke von Γ, da $\forall \gamma_1 \in \Gamma: \gamma_1 \subset a$ und damit $\gamma_1 < a$.

Außerdem ist b eine obere Schranke von Γ, da $\forall \gamma_2 \in \Gamma: \gamma_2 \subset b$ und damit $\gamma_2 < b$.

Somit sind a und b beides obere Schranke von Γ.

$\square$

b)

$\Gamma = \{\{0,1,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear geordnet.

Beweis durch Vollständige Induktion:

Induktionsbehauptung:

$\{\{0,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear geordnet.

Induktionsanfang:

$n=0$

Dann ist $\{\{0,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{0\}\}$, was linear geordnet ist, da nur ein Element in der Menge enthallten ist.

Induktionsschritt:

$n \Rightarrow n+1$

Wir nehmen an, dass $\{\{0,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ für n bereits linear geordnet ist. Dann ist $\{\{0,\dots,n+1\}\}$ $= \{\{0,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\{0,\dots,n+1\}\}$.

$\{\{0,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Induktionsvorraussetzung bereits linear geordnet. Dann muss die Vereinigung der beiden Mengen jedoch auch b)

linear geordnet sein, denn alle Mengen $m \in \{\{0, \dots, n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist $m \subsetneq \{\{0, \dots, n+1\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und damit $m < \{\{0, \dots, n+1\}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$\square$

<u>Behauptung:</u>

Γ besitzt eine obere Schranke in S.

<u>Beweis:</u>

Wir haben gerade bereits gezeigt das Γ linear geordnet ist.

Ferner ist die Menge $\{0, \dots, n\}$ eine obere Schranke von Γ, da $\forall \gamma_i \in \Gamma: \gamma \subset \{0, \dots, n\}$ bzw. $\gamma < \{0, \dots, n\}$ ist.

$(\{0\} \subset \{0,1\} < \{0,1,2\} \subset \dots \subset \{0, \dots, n\})$.

Da S die Kollektion aller endlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, liegt auch $\{0, \dots, n\}$ in S (da $n \in \mathbb{N}$).

Somit existiert eine obere Schranke in S.

$\square$

c)

Behauptung

Es gibt keine maximalen Elemente in S.

Beweis:

Angenommen, es gäbe ein maximales Element $x \in S$.
Das wäre genau dann der Fall, wenn
$\forall y \in S : x \leq y \Rightarrow x = y$.
Da S die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist und $x \in S$, ist x eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$.
Wir wählen nun ein $x \in \mathbb{N}$ $x \notin x$.
Dann ist $x \subset (x \cup \{x\}) \in S$.
Damit haben wir aber eine weitere Teilmenge $x \cup \{x\}$ mit $x < (x \cup \{x\})$.
Widerspruch da $x \neq (x \cup \{x\})$.

$\square$

Aufgabe 4

Behauptung:

Das maximale Element einer linearen Ordnung ist das größte Element.

Beweis:

Sei $x, y, z \in S$.

x ist maximales Element von S. Dann gilt.

$x > y \quad y < x \quad x = y$

Es gibt ein z mit $z \neq x$.

Da x maximales Element ist gilt:

$x > z \quad x < z \quad z = x$

Da aber x und z verschieden sind ergibt das einen Widerspruch.

$\Rightarrow$ Dass das maximale Element in einer linearen Ordnung auch das größte ist.

$\square$