Mathematik | **Vektorgeometrie: Einführung** | Klasse: TG11
L. Bung | | Datum:

Aufgabe 1: Flugverbindungen zwischen Städten

Eine Fluggesellschaft plant eine neue Verbindung zwischen mehreren Städten in Deutschland. Um möglichst ökonomisch zu planen, sollen die Entfernungen und Richtungen zwischen den Städten berechnet werden.

a) Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, dies mathematisch zu beschreiben.

Beschreibung als Verbindungsvektor: $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4,5 - 3 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Merke

Ein **Vektor** $\vec{v}$ ist eine Menge von Pfeilen, die alle dieselbe Koordinatendarstellung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ haben.

Der **Ortsvektor** $\vec{p}$ eines Punktes $P(p_1|p_2)$ ist der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ vom Ursprung zum Punkt P.

Der **Verbindungsvektor** von zwei Punkten $P(p_1|p_2)$ und $Q(q_1|q_2)$ heißt $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie die Verbindungsvektoren von Frankfurt zu den anderen vier Städten.

Vektor nach ...

... Freiburg: $\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

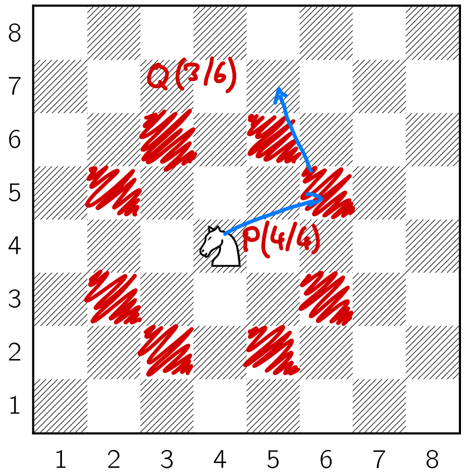
... Hannover: $\begin{pmatrix} 1{,}5-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

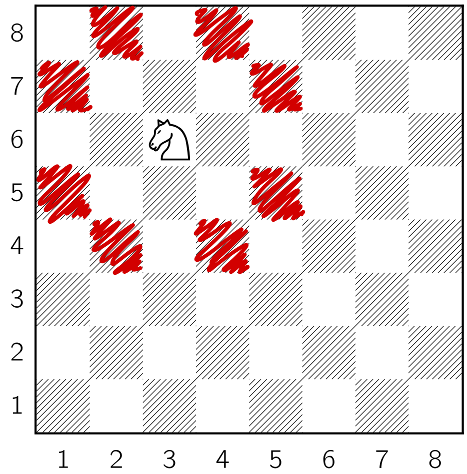
... Berlin: $\begin{pmatrix} 4{,}5-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

... München: $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Springer im Schachspiel

Der Springer beim Schachspiel kann sich in jede Richtung wie ein "L" bewegen – beispielsweise ein Feld nach rechts und zwei Felder nach oben, oder zwei Felder nach links und ein Feld nach oben.





a) Beschreiben Sie die möglichen Bewegungen der Springer mit Vektoren. Was fällt Ihnen beim Vergleich der beiden Situationen auf?

Beispiel: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die gesuchten Vektoren sind:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, oder:

$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Da sich die Bewegungsmöglichkeiten des Springers nicht ändern, sind auch die resultierenden Vektoren gleich.
Die Pfeile sind zwar verschoben, es sind aber immer noch dieselben Vektoren!

b) Überlegen Sie sich für die erste Situation, auf welchen Feldern der Springer im zweiten Zug landen kann. Wie könnten Sie das Resultat beiden Züge mithilfe der Vektoren aus Teilaufgabe a) darstellen?

Beispiel: zuerst $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

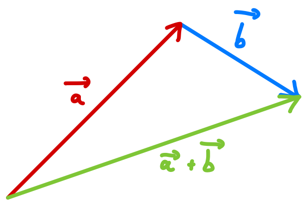
Gesamtbewegung lässt sich durch den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschreiben.

Warum? $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Merke

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ können „aneinander gesetzt" werden, indem man sie <u>addiert</u>:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 3: Lieferdrohne

Eine Lieferdrohne fliegt in einer Stadt, die als Koordinatensystem dargestellt wird. Die Startposition ist am Lagerhaus $L = (0|0)$. Nacheinander führt die Drohne folgende Lieferungen aus:

1. Die Drohne fliegt vom Lagerhaus zur ersten Lieferadresse und legt dabei die Bewegung $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ zurück.
2. Als nächstes fliegt sie zur zweiten Adresse mit $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Zuletzt kehrt die Drohne zum Lager zurück.

a) Bestimmen Sie die Gesamtbewegung der Drohne nach den ersten beiden Lieferungen.

$$\overrightarrow{v_{ges}} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

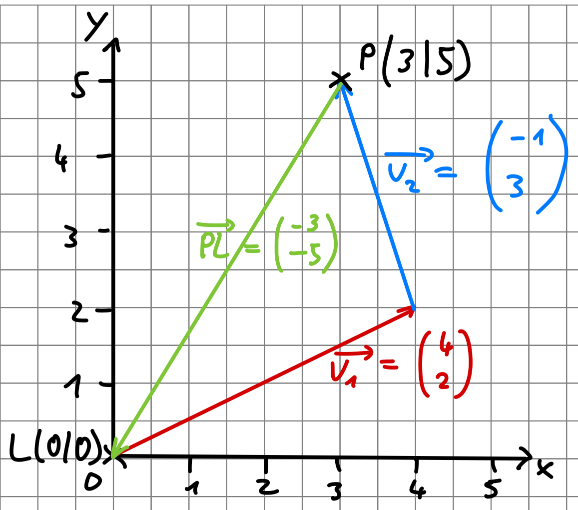
b) Bestimmen Sie den Rückflugvektor zur Basis. Welche Eigenschaften muss dieser Vektor beim Vergleich mit dem in Teilaufgabe a) berechneten Vektor haben?

Da die Drohne bei $L(0/0)$ startet, ist sie nach $\overrightarrow{v_{ges}}$ bei $P(3|5)$.

Um zurückzukommen ist der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 0 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Es muss gelten: $\overrightarrow{PL} = -\overrightarrow{v_{ges}}$.

c) Zeichnen Sie den Flugweg der Drohne in ein Koordinatensystem ein.



d) Berechnen Sie die Gesamtlänge der geflogenen Strecke.

$$\begin{aligned}
l &= |\vec{v_1}| + |\vec{v_2}| + |\vec{PL}| \\
&= \left|\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{4^2+2^2} + \sqrt{(-1)^2+3^2} + \sqrt{(-3)^2+(-5)^2} \\
&= \sqrt{20} + \sqrt{10} + \sqrt{36} \\
&\approx \underline{13{,}63 \text{ LE}}
\end{aligned}$$

(Diese Aufgabe ist für schnelle SuS. Sie können sie eigentlich noch nicht lösen – es dient als Vertiefung und Ausblick.)