# GVWL 2 – Übung 9: Solow-Modell

Hofmann, Leffler, Mamrak, Meyer

Sommersemester 2023

# Übersicht über die heutige Übung

**Aufgabe 1: Solow-Modell – Allgemeiner Fall**

- Herleitung des Steady State
- Berechnung der Kapitalintensität und der Produktion pro Kopf im Steady State

**Aufgabe 2: Solow-Modell – Zahlenbeispiel**

- Bestimmung der Kapitalintensität und der Produktion pro Kopf im Steady State
- Anpassungsbewegungen zwischen Steady State

# Aufgabe 1: Solow-Modell – Allgemeiner Fall

**Aufgabe 1: Solow-Modell – Allgemeiner Fall**
Angenommen, die Produktionsfunktion sei gegeben durch:

$$Y = 0,5 \cdot K^{\frac{1}{2}} \cdot N^{\frac{1}{2}}$$

In der allgemeinen Form:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot N^{1-\alpha}$$

mit

$$A = 0,5$$
$$\alpha = 0,5$$
$$1 - \alpha = 0,5$$

# Aufgabe 1: Teilaufgabe a)

**Teilaufgabe a)**
Leiten Sie die Gleichung ab, aus der sich die Steady-State-Werte bei konstanter Sparquote $s$ und konstanter Abschreibungsrate $\delta$ berechnen lassen. Zeigen Sie anhand dieser Gleichung, dass für das Verhältnis von Kapital und Produktion im Steady State immer gelten muss $\frac{K}{Y} = \frac{s}{\delta}$.

# Aufgabe 1: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

$$I = S = s \cdot Y = s \cdot F(K, N)$$

Zum Zeitpunkt $t$:

$$I_t = s \cdot Y_t \tag{1}$$

Veränderung des Kapitalstocks über die Zeit:

$$\begin{aligned}
\underbrace{K_{t+1}}_{\text{Kapitalstock } t+1} &= \underbrace{K_t}_{\text{Kapitalstock } t} + \underbrace{I_t}_{\text{Investitionen } t} - \underbrace{\delta}_{\text{Abschreibungsrate}} \cdot \underbrace{K_t}_{\text{Kapitalstock } t} \\
\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\Delta \text{ Kapitalstock}} &= \underbrace{I_t}_{\text{Investitionen } t} - \underbrace{\delta}_{\text{Abschreibungsrate}} \cdot \underbrace{K_t}_{\text{Kapitalstock } t}
\end{aligned} \tag{2}$$

# Aufgabe 1: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Einsetzen von (1) in (2):

$$K_{t+1} - K_t = s \cdot Y_t - \delta \cdot K_t$$

In Pro-Kopf-Einheiten:

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{N_t} = \frac{s \cdot Y_t}{N_t} - \frac{\delta \cdot K_t}{N_t}$$

# Aufgabe 1: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Im Steady State gilt, dass die Kapitalintensität (d.h. $\frac{K}{N}$) über die Zeit konstant ist, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{K_{t+1} - K_t}{N_t} &= \frac{s \cdot Y_t}{N_t} - \frac{\delta \cdot K_t}{N_t} = 0 \\
\frac{s \cdot Y_t}{N_t} &= \frac{\delta \cdot K_t}{N_t} \\
\frac{Y_t}{K_t} &= \frac{\delta}{s} \\
\frac{s}{\delta} &= \frac{K_t}{Y_t}
\end{aligned} \tag{3}$$

# Aufgabe 1: Teilaufgabe b)

**Teilaufgabe b)** Bestimmen Sie den Steady-State-Wert der Kapitalintensität $k_t = \frac{K_t}{N_t}$ als Funktion von $s$ und $\delta$.

# Aufgabe 1: Teilaufgabe b) – Lösungsvorschlag

Bestimmung der Kapitalintensität im Steady State. Hierzu Einsetzen der Produktionsfunktion in Gleichung (3):

$$\begin{aligned}
\frac{s}{\delta} &= \frac{K_t}{Y_t} \\
\frac{s}{\delta} &= \frac{K_t}{A \cdot K_t^{\alpha} \cdot N_t^{1-\alpha}} \\
\frac{s}{\delta} &= \frac{K_t^{1-\alpha}}{A \cdot N_t^{1-\alpha}} \\
\frac{A \cdot s}{\delta} &= \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{1-\alpha} \\
\left(\frac{A \cdot s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{*} \\
\left(\frac{s}{2 \cdot \delta}\right)^{2} &= \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{*}
\end{aligned} \tag{4}$$

# Aufgabe 1: Teilaufgabe c)

**Teilaufgabe c)**
Bestimmen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe b) die Steady-State-Werte von Produktion und Konsum pro Kopf als Funktion von $s$ und $\delta$.

# Aufgabe 1: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Produktion pro Kopf:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= A \cdot K_t^{\alpha} \cdot N_t^{1-\alpha} \\
\frac{Y_t}{N_t} &= A \left( \frac{K_t}{N_t} \right)^{\alpha}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Einsetzen von Gleichung (4) in Gleichung (5):

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t}{N_t} &= A \left( \frac{A \cdot s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
\frac{Y_t}{N_t} &= A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left( \frac{s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
\frac{Y_t}{N_t} &= 0,5 \cdot \left( \frac{s}{2 \cdot \delta} \right) \\
\left( \frac{Y_t}{N_t} \right)^{*} &= \frac{1}{4} \frac{s}{\delta}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

# Aufgabe 1: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Konsum pro Kopf:

$$C_t = (1-s) \cdot Y_t \; | \frac{1}{N_t}$$

$$\frac{C_t}{N_t} = (1-s) \cdot \frac{Y_t}{N_t}$$

Einsetzen von Gleichung (6):

$$\left(\frac{C_t}{N_t}\right)^* = (1-s) \cdot \frac{1}{4} \frac{s}{\delta}$$

# Aufgabe 2: Solow-Modell – Zahlenbeispiel

# Aufgabe 2: Solow-Modell – Zahlenbeispiel

Angenommen die Produktionsfunktion sei gegeben durch:

$$Y_t = K_t^{\frac{1}{3}} \ N_t^{\frac{2}{3}}.$$

Die Sparquote $s$ und die Abschreibungsrate $\delta$ liegen beide bei 0,1.

# Aufgabe 2: Teilaufgabe a)

**Teilaufgabe a)**
Bestimmen Sie die Kapitalintensität und die Produktion pro Kopf im Steady State.

# Aufgabe 2: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Produktionsfunktion:

$$Y_t = K_t^{\frac{1}{3}}\ N_t^{\frac{2}{3}}$$

Die Sparquote $s$ und die Abschreibungsrate $\delta$ liegen beide bei 0,1.

Die Steady-State-Bedingung lautet:

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{N_t} = s\ \frac{Y_t}{N_t} - \delta \frac{K_t}{N_t} = 0$$

$$\frac{s}{\delta} = \frac{K_t}{Y_t}$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Nun $Y$ einsetzen:

$$\frac{s}{\delta} = \frac{K_t}{K_t^{\frac{1}{3}} N_t^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{s}{\delta} = \frac{K_t^{\frac{2}{3}}}{N_t^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{s}{\delta} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Nun einsetzen von $\delta = s = 0,1$:

$$1 = (\frac{K_t}{N_t})^{\frac{2}{3}}$$

$$1 = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^*$$

Alternativer Ansatz direkt über die Formel:

$$\left(\frac{A \cdot s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{K_t}{N_t}$$

$$\left(\frac{1 \cdot 0,1}{0,1}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \frac{K_t}{N_t}$$

$$1^{\frac{3}{2}} = 1 = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^*$$

Mit beiden Ansätzen ergibt sich im Steady State eine Kapitalintensität von 1.

# Aufgabe 2: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Berechnung der Produktion pro Kopf ($\frac{Y_t}{N_t}$):

$$Y_t = K_t^{\frac{1}{3}} \; N_t^{\frac{2}{3}}$$
$$\frac{Y_t}{N_t} = K_t^{\frac{1}{3}} \; N_t^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{N_t}$$
$$\frac{Y_t}{N_t} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Bekannt ist bereits, dass $\frac{K_t}{N_t} = 1$. Daher gilt (siehe Gleichung (5)):

$$\frac{Y_t}{N_t} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\left(\frac{Y_t}{N_t}\right)^* = (1)^{\frac{1}{3}} = 1$$

Im Steady State ergibt sich somit ein Pro-Kopf-Einkommen von 1.

# Aufgabe 2: Teilaufgabe b)

**Teilaufgabe b)**

Die Volkswirtschaft befindet sich im Steady State. Die Abschreibungsrate steigt in der Periode $t$ nun dauerhaft von 0,1 auf 0,2. Bestimmen Sie die veränderte Kapitalintensität und Produktion pro Kopf im neuen Steady State.

# Aufgabe 2: Teilaufgabe b) – Lösungsvorschlag

Aus der vorherigen Teilaufgabe ist bereits bekannt;

$$\frac{s}{\delta} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Einsetzen der neuen Abschreibungsrate von 0,2 ergibt:

$$\frac{0,1}{0,2} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$(0,5)^{\frac{3}{2}} = \frac{K_t}{N_t}$$
$$0,354 = \frac{K_t}{N_t}$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe b) – Lösungsvorschlag

Produktion pro Kopf:

$$\frac{Y_t}{N_t} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Y_t}{N_t} = \left[(0,5)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Y_t}{N_t} = (0,5)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{Y_t}{N_t} = 0,707$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe c)

**Teilaufgabe c)**

Berechnen Sie die Kapitalintensität und Produktion pro Kopf für die ersten drei Perioden nach der Veränderung der Abschreibungsrate.

# Aufgabe 2: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Die Startwerte, d.h. $K_0$ und $Y_0$ sind bereits aus Teilaufgabe a) bekannt. Die Bevölkerung verändert sich nicht und bleibt bei $N_0$. Zum Zeitpunkt $t = 1$ (d.h. in der ersten Periode nach dem Anstieg der Abschreibungsquote) ergibt sich für die Kapitalintensität $\frac{K_1}{N_0}$:

$$\frac{K_1}{N_0} = 1 + 0,1 \cdot 1 - 0,2 \cdot 1 = 0,9$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Für das Einkommen pro Kopf $\frac{Y_1}{N_0}$ gilt:

$$\frac{Y_1}{N_0} = \left(\frac{K_1}{N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Y_1}{N_0} = 0,9^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Y_1}{N_0} = 0,965$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Zum Zeitpunkt $t = 2$ (d.h. in der zweiten Periode nach dem Anstieg der Abschreibungsquote) ergibt sich für die Kapitalintensität $\frac{K_2}{N_0}$:

$$\frac{K_2}{N_0} = \frac{K_1}{N_0} + s \cdot \frac{Y_1}{N_0} - \delta \cdot \frac{K_1}{N_0}$$
$$\frac{K_2}{N_0} = 0,9 + 0,1 \cdot 0.965 - 0,2 \cdot 0,9 = 0,817$$

Für das Einkommen pro Kopf $\frac{Y_2}{N_0}$ gilt:

$$\frac{Y_2}{N_0} = \left(\frac{K_2}{N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Y_2}{N_0} = 0,817^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{Y_2}{N_0} = 0,935$$

# Aufgabe 2: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Zum Zeitpunkt $t = 3$ (d.h. in der dritten Periode nach dem Anstieg der Abschreibungsquote) ergibt sich für die Kapitalintensität $\frac{K_3}{N_0}$:

$$\frac{K_3}{N_0} = \frac{K_2}{N_0} + s \cdot \frac{Y_2}{N_0} - \delta \cdot \frac{K_2}{N_0}$$

$$\frac{K_3}{N_0} = 0,817 + 0,1 \cdot 0,935 - 0,2 \cdot 0,817 = 0,747$$

Für das Einkommen pro Kopf $\frac{Y_3}{N_0}$ gilt:

$$\frac{Y_3}{N_0} = \left(\frac{K_3}{N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{Y_3}{N_0} = 0,747^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{Y_3}{N_0} = 0,907$$

# Zusammenfassung

# Übersicht über die heutige Übung

**Aufgabe 1: Solow-Modell – Allgemeiner Fall**

- Herleitung des Steady States: $\frac{s}{\delta} = \frac{K_t}{Y_t}$
- Berechnung der Kapitalintensität und der Produktion pro Kopf im Steady State

**Aufgabe 2: Solow-Modell – Zahlenbeispiel**

- Bestimmung der Kapitalintensität und der Produktion pro Kopf im Steady State
- Anpassungsbewegungen zwischen Steady States: Wie verändern sich die Kapitalintensität und die Produktion pro Kopf nach einem Anstieg der Abschreibungsrate?

# Ausblick: Probeklausur/Klausurvorbereitung