GVWL 2 – Übung 8: Kaufkraftparität, Produktionsfunktion und Skalenerträge

Hofmann, Leffler, Mamrak, Meyer

Sommersemester 2023

Übersicht über die heutige Übung

Aufgabe 1: Kaufkraftparität und Lebensstandard

- Berechnung des Konsums pro Kopf in verschiedenen Währungen
- Vergleich der Lebensstandards

Aufgabe 2: Produktionsfunktion

- Eigenschaften
- Pro-Kopf-Umformung

Aufgabe 3: Skalenerträge

- Produktionsfunktion mit Zahlen
- Skalenerträge
- Grenzerträge
- Beziehung zwischen Produktion pro Kopf und Kapital pro Kopf

Aufgabe 1: Kaufkraftparität und Lebensstandard

Aufgabe 1: Kaufkraftparität und Lebensstandard:

Nehmen Sie an, dass der durchschnittliche Konsumierende in Polen und in Deutschland folgende Produkte kauft: Nahrungsmittel und Transportdienstleistungen. Die hiervon jeweils konsumierten Mengen sowie die dazugehörigen Preise sind in der nachstehenden Tabelle angegeben:

	Nahrungsmittel		Transportdienstleistungen	
	Preis	Menge	Preis	Menge
Polen	2,5 Zloty	400	10 Zloty	200
Deutschland	1 Euro	1.000	2 Euro	2.000

Aufgabe 1: Teilaufgabe a)

Teilaufgabe a)

Berechnen Sie den deutschen Konsum pro Kopf in Euro.

Aufgabe 1: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Deutscher Konsum pro Kopf in Euro:

$$
\begin{aligned}
C_{Ger} &= 1\ € \cdot 1.000 + 2\ € \cdot 2.000 \\
&= 5.000\ €
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1: Teilaufgabe b)

Teilaufgabe b)

Berechnen Sie den polnischen Konsum pro Kopf in Zloty.

Aufgabe 1: Teilaufgabe b) – Lösungsvorschlag

Polnischer Konsum pro Kopf in Zloty:

$$\begin{aligned} C_{Pol} &= 2,5 \text{ Zloty} \cdot 400 + 10 \text{ Zloty} \cdot 200 \\ &= 3.000 \text{ Zloty} \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Teilaufgabe c)

Teilaufgabe c)
Nehmen Sie an, der Wechselkurs sei 0,2 Euro pro Zloty. Berechnen Sie den polnischen Konsum pro Kopf in Euro.

Aufgabe 1: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Polnischer Konsum pro Kopf in Euro bei gegebenem Wechselkurs von $0{,}2\frac{€}{\text{Zloty}}$:

$$\begin{aligned} C_{Pol} &= 3.000 \text{ Zloty} \cdot 0,2\frac{€}{\text{Zloty}} \\ &= 600€ \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Teilaufgabe d)

Teilaufgabe d)
Berechnen Sie den polnischen Konsum pro Kopf in Euro, indem Sie die Methode der Kaufkraftparität und deutsche Preise verwenden.

Aufgabe 1: Teilaufgabe d) – Lösungsvorschlag

Polnischer Konsum pro Kopf unter der Kaufkraftparitätentheorie:

$$\begin{aligned} C_{Pol}^{PPP} &= 1 \text{ €} \cdot 400 + 2 \text{ €} \cdot 200 \\ &= 800 \text{ €} \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Teilaufgabe e)

Teilaufgabe e)
Ermitteln Sie, um wieviel der Lebensstandard in Polen im Vergleich zu Deutschland geringer ist.

Aufgabe 1: Teilaufgabe e) – Lösungsvorschlag

Verhältnis von polnischem zu deutschem Konsum:

$$\frac{800€}{5.000€} = 0,16$$

Der Pro-Kopf-Konsum in Polen (ausgedrückt in Euro) entspricht 16% des deutschen Konsums.

Aufgabe 2: Produktionsfunktion

Aufgabe 2: Produktionsfunktion

Gehen Sie von einer Produktionsfunktion einer Volkswirtschaft der Form

$$Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

mit $0 < \alpha < 1$ aus.

Aufgabe 2: Teilaufgabe a)

Teilaufgabe a)
Welche Eigenschaften weist diese Produktionsfunktion auf? Gehen Sie dabei auf Skalen- und Grenzerträge ein.

Aufgabe 2: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Produktionsfunktion: $Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$

Skalenerträge: Was passiert, wenn man alle Elemente mit einer Konstante multipliziert?

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda N) &= (\lambda K)^{\alpha} (\lambda N)^{1-\alpha} \\ &= \lambda^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} K^{\alpha} N^{1-\alpha} \\ &= \lambda K^{\alpha} N^{1-\alpha} \\ &= \lambda Y \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation aller Inputfaktoren mit einer Konstante λ steigt der Output um λ.
$\rightarrow$ Konstante Skalenerträge

Aufgabe 2: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Produktionsfunktion: $Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$

Grenzerträge: Was passiert, wenn ein Faktor um eine *marginale* Einheit steigt?

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha) K^{\alpha} N^{-\alpha} > 0$$
$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} > 0$$

Der Output steigt jeweils, wenn man K oder N um eine Einheit erhöht.

Wie entwickeln sich die Grenzerträge mit steigendem N (bzw. K)?

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = -\alpha(1-\alpha) K^{\alpha} N^{-\alpha-1} < 0$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1) K^{\alpha-2} N^{1-\alpha} < 0$$

Der Anstieg von Y wird mit steigendem N (bzw. K) immer kleiner.
$\rightarrow$ Fallende Grenzerträge

Aufgabe 2: Teilaufgabe b)

Teilaufgabe b)
Formulieren Sie die Produktionsfunktion so um, dass sie den Zusammenhang zwischen Pro-Kopf-Output und Pro-Kopf-Kapitaleinsatz beschreibt.

Aufgabe 2: Teilaufgabe b) – Lösungsvorschlag

Unter Annahme konstanter Skalenerträge können wir alle Größen relativ zur Höhe des Arbeitsvolumens ausdrücken.

Wir beginnen mit dem Pro-Kopf-Output. Wenn ein Buchstabe klein geschrieben ist, bedeutet er: "Pro Kopf".

$$
\begin{aligned}
y = \frac{1}{N} Y = \frac{Y}{N} &= \frac{K^{\alpha} N^{1-\alpha}}{N} \\
&= K^{\alpha} \frac{N^{1-\alpha}}{N} = K^{\alpha} N^{1-\alpha-1} \\
&= K^{\alpha} N^{-\alpha} = \frac{K^{\alpha}}{N^{\alpha}} = \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha} \\
&= k^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Also: $y = k^{\alpha}$

Aufgabe 2: Teilaufgabe c)

Teilaufgabe c)
Durch ein Erdbeben werden weite Teile des Kapitalstocks der betrachteten Volkswirtschaft zerstört. Erklären Sie verbal mögliche Auswirkungen. Welche Rolle spielt α?

Aufgabe 2: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

- Der Kapitalstock schrumpft. Das verursacht eine geringere Kapitalintensität $k = K/N$.
- Reduktion der gesamten Produktion.
- Reduktion der Produktion pro Beschäftigten $y = Y/N$.
- Ausmaß der Reduktion hängt ab vom Wert von α: Je größer α, desto gravierender die Reduktion.

Hinweis: In Kapitel 7 kommen Investitionen und Sparen als zusätzliche Faktoren hinzu!

Aufgabe 3: Skalenerträge

Aufgabe 3: Skalenerträge

Betrachten Sie die Produktionsfunktion

$$Y = K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 3: Teilaufgabe a)

Teilaufgabe a)

Berechnen Sie die Produktion für $K = 49$ und $N = 81$.

Aufgabe 3: Teilaufgabe a) – Lösungsvorschlag

Produktion:

- $K = 49$
- $N = 81$

$$Y = 49^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{2}{3}} = 68{,}505$$

Aufgabe 3: Teilaufgabe b)

Teilaufgabe b)
Was passiert mit der Produktion, wenn sich sowohl Kapital als auch Arbeit verdoppeln?

Aufgabe 3: Teilaufgabe b) – Lösungsvorschlag

Verdopplung beider Inputs:

$$\begin{aligned} Y &= (2 \cdot 49)^{\frac{1}{3}} \cdot (2 \cdot 81)^{\frac{2}{3}} \\ &= 98^{\frac{1}{3}} \cdot 162^{\frac{2}{3}} \\ &= 137,01 \end{aligned}$$

Die Produktion verdoppelt sich, wenn sich Kapital und Arbeit verdoppeln.

Aufgabe 3: Teilaufgabe c)

Teilaufgabe c)

Weist diese Produktionsfunktion fallende, konstante oder steigende Skalenerträge auf? Erklären Sie.

Aufgabe 3: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag

Allgemeiner Fall:

$$Y = (\lambda \cdot K)^x \cdot (\lambda \cdot N)^y$$

Bestimmung der Skalenerträge über die Summe der Exponenten x und y:

- $x + y < 1 \longrightarrow$ fallende Skalenerträge
- $x + y = 1 \longrightarrow$ konstante Skalenerträge
- $x + y > 1 \longrightarrow$ steigende Skalenerträge

Aufgabe 3: Teilaufgabe c) – Lösungsvorschlag)

Beispiel aus der Teilaufgabe:

$$
\begin{aligned}
Y &= (\lambda K)^{\frac{1}{3}} \cdot (\lambda \cdot N)^{\frac{2}{3}} \\
&= \lambda^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda^{\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}} \\
&= \lambda^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}} \\
&= \lambda^{1} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}} \\
&= \lambda \cdot Y
\end{aligned}
$$

Hier liegen konstante Skalenerträge vor. Folglich führt jede Veränderung beider Inputs K und N um den Faktor λ, zu einer Veränderung des Outputs Y um denselben Faktor λ.

Aufgabe 3: Teilaufgabe d)

Teilaufgabe d)

Weist diese Produktionsfunktion fallende, konstante oder steigende Grenzerträge auf? Erklären Sie.

Aufgabe 3: Teilaufgabe d) – Lösungsvorschlag

Bestimmung des Grenzertrags des Kapitals für $Y = K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{3} \cdot K^{\frac{1}{3}-1} \cdot N^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot K^{-\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$$

Veränderung des Grenzertrags des Kapitals bei steigendem Kapital:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) K^{-\frac{2}{3}-1} \cdot N^{\frac{2}{3}} = \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot K^{-\frac{5}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$$

Fallende Grenzerträge des Kapitals, d.h. jede weitere Erhöhung des Kapital um eine Einheit führt zu einem geringeren Zuwachs als die vorherige Einheit Kapital.

Aufgabe 3: Teilaufgabe d) – Lösungsvorschlag

Bestimmung des Grenzertrags der Arbeit für $Y = K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{2}{3} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{-\frac{1}{3}}$$

Veränderung des Grenzertrags der Arbeit bei mehr Arbeit:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{-\frac{1}{3}-1} = \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{-\frac{4}{3}}$$

Fallende Grenzerträge der Arbeit, d.h. jede weitere Erhöhung der Arbeit um eine Einheit führt zu einem geringeren Zuwachs als die vorherige Einheit Arbeit.

Aufgabe 3: Teilaufgabe e)

Teilaufgabe e)
Schreiben Sie diese Produktionsfunktion als eine Beziehung von Produktion pro Kopf und Kapital pro Kopf: Es sei $\frac{K}{N} = 4$. Was ergibt sich für $\frac{Y}{N}$?

Aufgabe 3: Teilaufgabe e)

Produktionsfunktion in Pro-Kopf-Einheiten:

$$Y = K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{Y}{N} = K^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{N^{\frac{2}{3}}}{N}$$

$$\frac{Y}{N} = K^{\frac{1}{3}} \cdot N^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{Y}{N} = \left(\frac{K}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Mit $\frac{K}{N} = 4$ ergibt sich:

$$\frac{Y}{N} = 4^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{Y}{N} = 1,5874$$

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Aufgabe 1: Kaufkraftparität und Lebensstandard

- Berechnung des Konsums pro Kopf in verschiedenen Währungen
- Vergleich der Lebensstandards

Aufgabe 2: Produktionsfunktion

- Allgemeine Form und Eigenschaften
- Formulierung in Pro-Kopf-Werten
- Negativer Kapitalschock

Aufgabe 3: Skalenerträge

- Produktionsfunktion mit Zahlen
- Skalenerträge
- Grenzerträge und deren Entwicklung
- Beziehung zwischen Produktion pro Kopf und Kapital pro Kopf