

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

IN0010, SoSe 2019

Übungsblatt 2

6. Mai – 10. Mai 2019

Hinweis: Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Lösung vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Quellenentropie

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q , welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X . Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b , dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

Da $p_a + p_b = 1$ folgt $p_b = 0.75$.

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$$I(a) = -\log_2 p_a = 2,00 \text{ bit}$$

$$I(b) = -\log_2 p_b \approx 0,42 \text{ bit}$$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x) = 0,81 \text{ bit/Zeichen}$$

d) Bestimmen Sie die Auftretswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q' , so dass deren Entropie H maximal ist.

Zunächst drücken wir p_1 durch p_0 aus und schreiben $p_1 = 1 - p_0$. Zur Vereinfachung schreiben wir $p_0 = p$. Anschließend lässt sich die Entropie H als Funktion in Abhängigkeit von p ausdrücken und die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned} H &= -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p) \\ \frac{dH}{dp} &= -\log_2(p) - \frac{p}{p \ln(2)} + \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p) \ln(2)} \\ &\Rightarrow \log_2(p) + \frac{p}{p \ln(2)} \stackrel{!}{=} \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p) \ln(2)} \end{aligned}$$

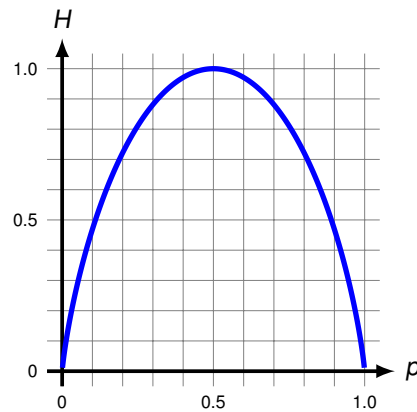
Vergleich beider Seiten liefert $p = 1 - p = 1/2$.

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

Die Entropie wird maximiert, wenn $\Pr[X = a] = \Pr[X = b] = 0.5$ gilt. Die maximale Entropie beträgt daher

$$H_{\max} = -2 \cdot 0.5 \cdot \log_2(0.5) = 1 \text{ bit/Zeichen.}$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftretswahrscheinlichkeit p .



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle Q emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Die von Q emittierte Zeichenkette, welche nichts anderes ist als verschiedene Realisierungen der Zufallsvariable X , beinhaltet Redundanz. Der von Q erzeugte Datenstrom ist durchschnittlich mit weniger als 1 bit/ Symbol darstellbar.

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N -äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

Allgemein gilt für die Entropie

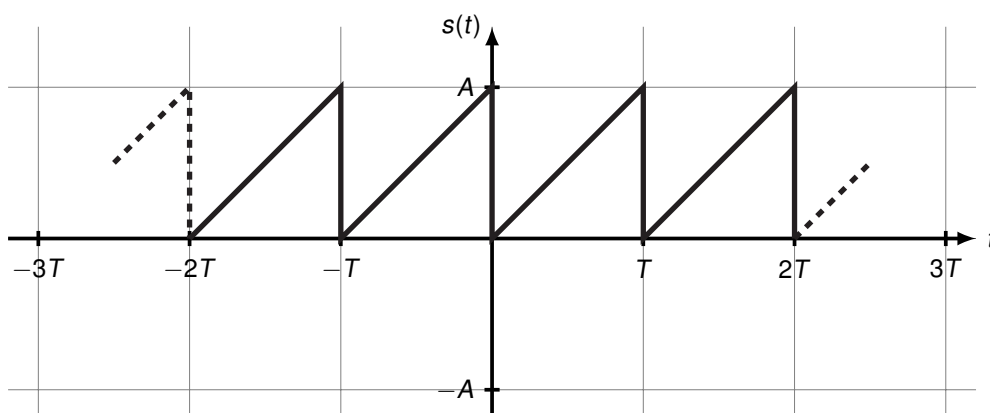
$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} I(x) p_i.$$

Mit der Forderung $p_i = p$, d. h. alle Zeichen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf, folgt sofort $p = 1/N$ und damit

$$H = \sum_{x \in \mathcal{X}} I(x) p = - \sum_{i=1}^N \log_2 \left(\frac{1}{N} \right) \frac{1}{N} = \log_2(N).$$

Aufgabe 2 Fourierreihe

Gegeben sei das folgende T -periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$$s(t) = \frac{t}{T} \cdot A \text{ für } t \in [0, T]$$

Hinweis: Siehe Geradengleichung $y = mx + t$ (Schulstoff).

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \quad (1)$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t) dt. \quad (2)$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Der Gleichanteil entsteht ausschließlich durch a_0 , denn alle anderen Koeffizienten bestimmen die Amplitude einer Sinus- oder Kosinusschwingung.

Achtung: Gemäß Formel 1 ist der Gleichanteil $\frac{a_0}{2}$!

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

Aus Formel (2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \stackrel{k=0}{=} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \cdot A dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{T} \int_0^T t dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = A \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow s(t)$ besitzt einen Gleichanteil. Dieser beträgt $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$.

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* errahnen können?

Ja: Das Signal $s(t)$ nimmt ausschließlich Werte größer Null an. Es kann daher nicht gleichanteilsfrei sein. Aus der Steigung der einzelnen Sägezähne lässt sich leicht errahnen, dass der zeitliche Mittelwert des Signals bei $A/2$ liegen muss.

e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k .

Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

Intuitiv

Der Sägezahn $s(t)$ ist in Phase mit einer Sinus-Schwingung: Zu Vielfachen der Periodendauer T besitzt $s(t)$ Null-durchgänge (den Gleichanteil einmal abgezogen). Dies entspricht genau dem Verhalten einer Sinusschwingung. Falls Sie das nicht sehen, stellen Sie sich den abrupten Pegelwechsel an Vielfachen von T leicht abgeschrägt vor.

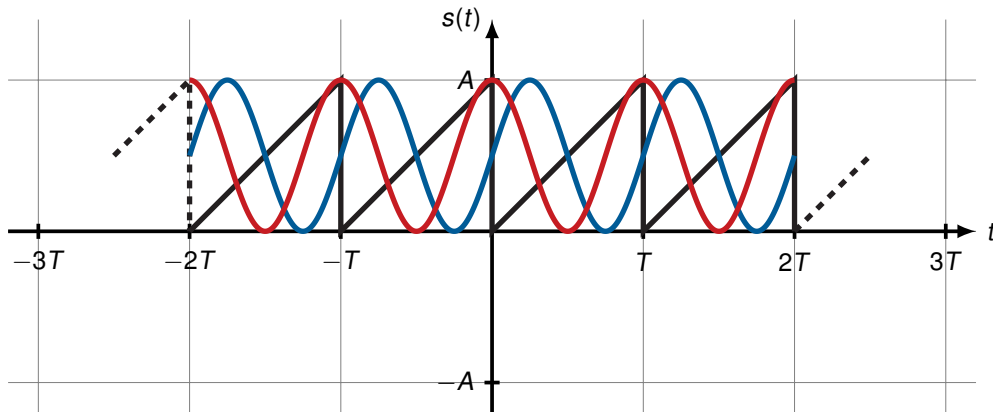
Ein kosinus-förmiges Signal hingegen hätte an diesen Stellen stets den Wert ± 1 . Da dies allerdings nicht der Form des Sägezahns entspricht, müssen die Kosinus-Anteile entfernt werden. Dies wird durch $a_k = 0, \forall k > 0$ erreicht.

Mathematisch

Da $\sin(x) = -\sin(-x)$ handelt es sich hierbei um eine ungerade (also punktsymmetrische) Funktion. Das Signal $s(t)$ ist, wenn man den Gleichanteil abzieht, ebenfalls punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (andernfalls ist der Symmetriepunkt lediglich entlang der Ordinate verschoben). Der Kosinus hingegen ist eine gerade bzw. achsensymmetrische Funktion, weswegen er nicht zu $s(t)$ beisteuern kann.

Anschaulich

In der untenstehenden Abbildung sind $s(t)$, $\cos(2\pi t)$ und $\sin(2\pi t)$ eingezeichnet. Man sieht, dass der Sinus bei Vielfachen von π das Signal $s(t)$ genau in seinen Mittelwerten kreuzt, während der Kosinus Extremwerte ungleich $s(k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ annimmt.



Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k .

Hinweise: $\int_0^1 t \sin(ct) dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

Der Hinweis erspart uns eine partielle Integration. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t) dt = 2A \int_0^1 t \sin(k\omega t) dt \\ &= 2A \cdot \frac{\sin(k\omega) - k\omega \cos(k\omega)}{k^2\omega^2} \stackrel{\omega=2\pi}{=} -\frac{A}{k\pi} \end{aligned}$$

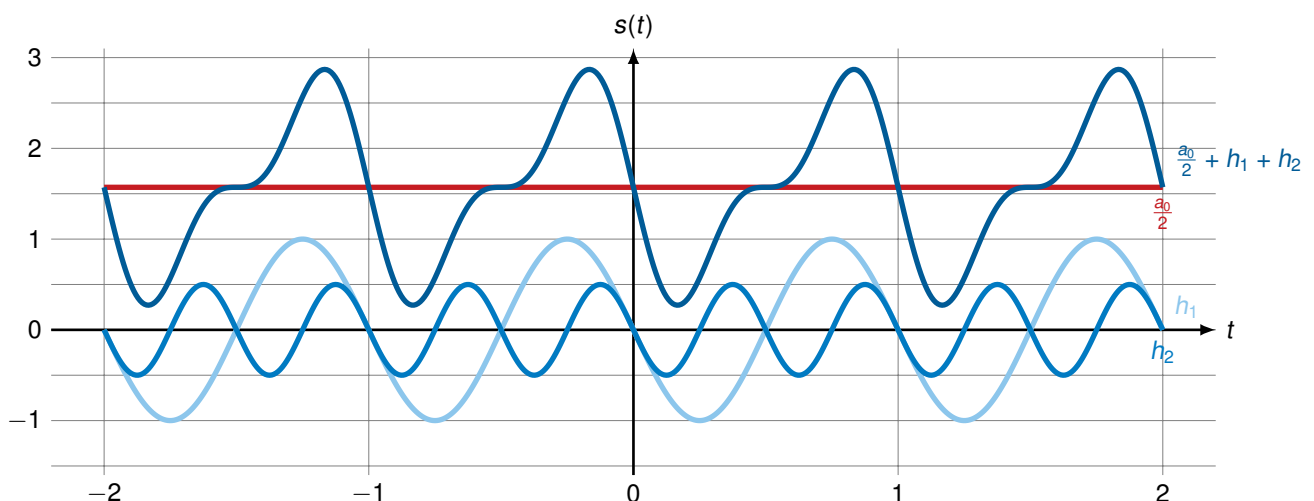
g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

Für $A = \pi$ erhalten wir:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die ersten beiden Harmonischen lauten

$$h_1(t) = b_1 \sin(2\pi t) = -\sin(2\pi t), \quad \text{und} \quad h_2(t) = b_2 \sin(4\pi t) = -\frac{1}{2} \sin(4\pi t).$$

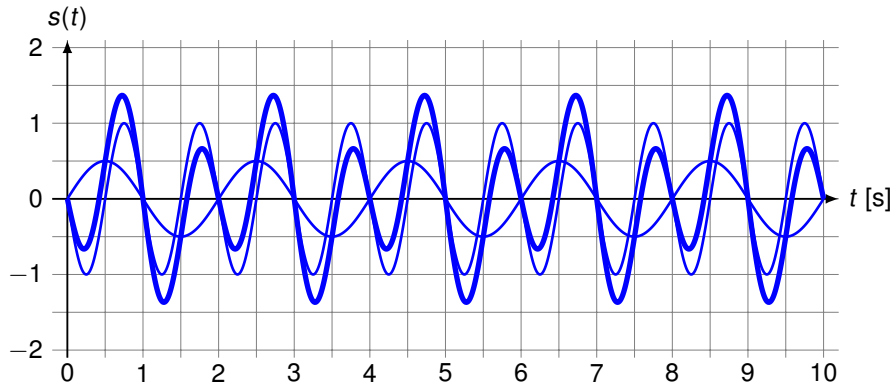


Aufgabe 3 Abtastung periodischer Signale (Hausaufgabe)

Gegeben sei das periodische Zeitsignal $s(t) = \frac{1}{2} \sin(\pi t) - \sin(2\pi t)$.

a)* Skizzieren Sie $s(t)$ im unten abgedruckten Koordinatensystem für $t \in [0; 10]$.

Hinweis: Es ist hilfreich, sich zunächst die beiden Sinusanteile, aus denen $s(t)$ zusammengesetzt ist, zu skizzieren.



b)* Welche Periodendauer T besitzt das Signal $s(t)$?

$s(t)$ ist aus zwei Sinus-Anteilen aufgebaut. Der erste hat eine Periodendauer von $T_1 = 2$ s, der zweite eine Periode von $T_2 = 1$ s. Die Periodendauer von $s(t)$ ist i. A. das **kleinste gemeinsame Vielfache** der Perioden der Einzelanteile, aus der es aufgebaut ist, hier also $T = T_1 = 2$ s.

Dies sieht man auch in der Lösung von Teilaufgabe a), da sich $s(t)$ alle $t = 2$ s wiederholt.

c)* Bestimmen Sie die maximale Frequenz f_{\max} , welche in $s(t)$ vorkommt.

Die beiden Sinusanteile haben die Frequenzen $f_1 = 1/T_1 = 0,5$ Hz und $f_2 = 1/T_2 = 1$ Hz. Die maximale Frequenz ist daher $f_{\max} = f_2 = 1$ Hz.

d) Wie hoch muss demnach die *minimale Abtastfrequenz* f_a sein, so dass aus den unquantisierten Abtastwerten eine *verlustfreie* Rekonstruktion möglich ist?

$$f_a = 2f_{\max} = 2 \text{ Hz}$$

e) Wie viele Abtastwerte werden also pro Periode benötigt?

Zwei Abtastwerte pro Sekunde bzw. vier pro Periode.

Aufgabe 4 Quantisierung und Rauschen (Hausaufgabe)

In dieser Aufgabe soll eine Temperaturkurve digitalisiert und der Einfluss von Rauschen auf Signale untersucht werden. Hierfür sollen Temperaturen im Bereich von -40°C bis 70°C betrachtet werden. Die gemessenen Werte sollen linear abgebildet werden, wobei eine Schrittweite von höchstens $0,5^{\circ}\text{C}$ erreicht werden soll.

a)* Erklären Sie den Unterschied zwischen Abtastung und Quantisierung.

Abtastung ist die Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals im Zeitbereich ohne Runden.

Quantisierung ist die Diskretisierung eines Signals in Signalstufen, d.h. im Wertebereich mit Runden

b)* Wie viele Bit werden für die Digitalisierung eines einzelnen Temperaturwerts mindestens benötigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Bereich -40°C bis 70°C mit einer Auflösung von $0,5^{\circ}\text{C}$ werden 220 unterschiedliche Signalstufen benötigt. 7 bit erlauben lediglich $2^7 = 128$ Stufen.

Die nächsthöhere Anzahl sind 256 unterschiedliche Signalstufen; es werden daher 8 bit benötigt.

oder $\lceil \log_2(220) \rceil = 8 \text{ bit}$

c) Mit welcher Schrittweite kann aufgrund der verwendeten Bitanzahl laut Teilaufgabe b) nun die Temperatur bestimmt werden?

Für 110°C auf 256 unterschiedlichen Signalstufen ergibt sich eine Genauigkeit von $\frac{110^{\circ}\text{C}}{256} \approx 0,43^{\circ}\text{C}$

d) Bestimmen Sie den maximalen Quantisierungsfehler bezüglich der berechneten Schrittweite aus Aufgabe c), unter der Annahme dass mathematisches Runden verwendet wird.

$$0,43^{\circ}\text{C} \cdot \frac{1}{2} \approx 0,215^{\circ}\text{C}$$

Das verwendete Basisbandsignal verwendet für jede Temperaturstufe genau ein Symbol. Es soll eine Kanalkapazität von 10 kbit/s erreicht werden.

e) Bestimmen Sie die mindestens benötigte Bandbreite bei einem rauschfreien Kanal, wenn die angegebene Kanalkapazität erreicht werden soll.

$$M = 2^N = 2^8 = 256 \text{ Signalstufen}$$

$$C_H = 2 \cdot B \cdot \log_2(M)$$

$$10 \text{ kbit/s} = 2 \cdot B \cdot 8$$

$$B = 625 \text{ Hz}$$

Nehmen Sie nun an, die Temperaturwerte werden mit einer Bandbreite von $B = 750 \text{ Hz}$ übertragen.

f)* Auf welchen Wert würde die Kanalkapazität bei gleicher Bandbreite sinken, wenn ein Signal-Rausch-Abstand von 35 dB angesetzt werden würde?

$$35 = 10 \cdot \log(X)$$

$$X = 3162,28$$

$$C_S = B \cdot \log_2(1 + \text{SNR})$$

$$C_S = 750 \text{ Hz} \cdot \log_2(3162,28 + 1) \approx 8720 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

g)* Begründen Sie, warum bei steigendem Signal-Rausch-Abstand die Kanalkapazität bei konstanter Bandbreite steigt.

Es sind mehr Symbole unterscheidbar, was zu einer höheren Kanalkapazität führt.