Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Mathematische Modelle der Kontinuumsmechanik [MA2904] SoSe 2019
Prof. Dr. Daniel Matthes matthes@ma.tum.de
Benedikt Graswald benedikt.graswald@ma.tum.de

# Aufgabenblatt 4

Tutorübungen am 5./6./12./13. Juni

**Aufgabe T4.1 (Mehrskalenansatz)**
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $t > 0$

$$\epsilon^2 x'(t) + \epsilon x(t) = \sin(\epsilon t)$$
$$x(0) = 1$$

mit kleinem Parameter $\epsilon > 0$.

a) Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung der Lösung $x(t)$ für die Differentialgleichung bis zur 2. Ordnung in $\epsilon$, vernachlässigen Sie hierbei zunächst den Anfangswert.

b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems und vergleichen Sie diese mit der asymptotischen Entwicklung aus Teil a).

- Für welche Zeiten ist die Approximation gut?
- Ist die Approximation konsistent?
- Ist das Anfangswertproblem regulär oder singulär gestört?

c) Berechnen Sie mittels Mehrskalenansatz eine Approximation der Lösung bis zur 2. Ordnung

$$z(t,s) = z_0(t,s) + \epsilon z_1(t,s) + \epsilon^2 z_2(t,s) + \cdots$$

wobei $s := \epsilon t$ sei.

d) Vergleichen Sie die Mehrskalenapproximation mit der exakten Lösung aus Teil b).

e) Benutzen Sie den Grenzschichtenansatz $\tilde{x}(\tau) := x(t)$ mit der neuen Zeitskala $\tau = \frac{t}{\epsilon^\alpha}$, um eine gute Näherung nahe der Anfangsbedingung zu erhalten. Der Parameter $\alpha > 0$ ist hierbei geeignet zu wählen.

*Lösungsvorschlag*:
**Aufgabenteil a)**

Wie bei den beiden voran gegangenen Aufgaben wählen wir den asymptotischen Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots,$$

als Grundlage unserer Störungsrechnung. Die rechte Seite des Anfangswertproblems lässt sich ebenfalls nach $\epsilon$ entwickeln

$$\sin(\epsilon t) = \epsilon t - \frac{\epsilon^3 t^3}{6} + \frac{\epsilon^5 t^5}{120} - \cdots.$$

Setzen wir beide asymptotischen Entwicklungen in das Anfangswertproblem ein und teilen die Differentialgleichung durch $\epsilon$ so erhalten wir

$$\epsilon\left(x_0'(t)+\epsilon x_1'(t)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)+x_0(t)+\epsilon x_1(t)+\epsilon^2 x_2(t)=t-\frac{\epsilon^2 t^3}{6}+\mathcal{O}(\epsilon^4)$$
$$x_0(0)+\epsilon x_1(0)+\epsilon^2 x_2(0)+\mathcal{O}(\epsilon^3)=0$$

Nun führen wir wie gehabt einen Koeffizientenvergleich bezüglich Potenzen von $\epsilon$ durch. In $\epsilon^0$ erhalten wir $x_0(t)=t$. Betrachten wir nun die Potenz $\epsilon^1$, hier erhalten wir $x_1(t)=-1$. Bleibt noch die Potenz $\epsilon^2$, für diese Potenz ergibt sich $x_2(t)=-\frac{1}{6}t^3$. Fassen wir alles zusammen, so ergibt sich die asymptotische Entwicklung

$$x(t)=t-\epsilon-\epsilon^2\tfrac{1}{6}t^3+\cdots,$$

welche natürlich die Anfangsbedingung $x(0)=1$ nicht erfüllt.

**Aufgabenteil b)**

Bestimmen wir nun die exakte Lösung des Anfangswertproblems um zu verstehen was bei der asymptotische Entwicklung aus Teil a) schief gegangen ist. Zuerst bestimmen wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\epsilon^2 x'(t)+\epsilon x(t)=\sin(\epsilon t)$$

für beliebiges $\epsilon>0$. Hierzu bringen wir die Differentialgleichung zuerst in Standardform

$$x'(t)+\tfrac{1}{\epsilon}x(t)=\tfrac{1}{\epsilon^2}\sin(\epsilon t).$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Anteils ist $x_h(t)=ce^{-\frac{t}{\epsilon}}$. Bleibt noch eine partikuläre Lösung zu bestimmen, diese erhalten wir mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite $x_p(t)=a\sin(\epsilon t)+b\cos(\epsilon t)$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$a\epsilon\cos(\epsilon t)-b\epsilon\sin(\epsilon t)+\tfrac{a}{\epsilon}\sin(\epsilon t)+\tfrac{b}{\epsilon}\cos(\epsilon t)=\tfrac{1}{\epsilon^2}\sin(\epsilon t),$$

und somit die Bedingung

$$a\epsilon+\tfrac{b}{\epsilon}=0,\qquad -b\epsilon+\tfrac{a}{\epsilon}=\tfrac{1}{\epsilon^2}.$$

Hieraus folgt $a=\frac{1}{\epsilon(\epsilon^4+1)}$ und $b=-\frac{\epsilon}{\epsilon^4+1}$ und somit die partikuläre Lösung

$$x_p(t)=\frac{1}{\epsilon(\epsilon^4+1)}\sin(\epsilon t)-\frac{\epsilon}{\epsilon^4+1}\cos(\epsilon t).$$

Setzen wir nun in die allgemeine Lösung

$$x(t)=ce^{-\frac{t}{\epsilon}}+\frac{1}{\epsilon(\epsilon^4+1)}\sin(\epsilon t)-\frac{\epsilon}{\epsilon^4+1}\cos(\epsilon t)$$

den Anfangswert $x(0)=1$ ein so erhalten wir

$$1=c-\frac{\epsilon}{\epsilon^4+1}\quad\rightarrow\quad c=\frac{\epsilon^4+\epsilon+1}{\epsilon^4+1}$$

und somit die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t)=\frac{\epsilon^4+\epsilon+1}{\epsilon^4+1}e^{-\frac{t}{\epsilon}}+\frac{1}{\epsilon(\epsilon^4+1)}\sin(\epsilon t)-\frac{\epsilon}{\epsilon^4+1}\cos(\epsilon t).$$

- Für welche Zeiten ist die Approximation gut?

$$\lim_{t\to 0} |x_{exact}(t) - x_{asymp}(t)| = |x_{exact}(0) - x_{asymp}(0)| = 1 + \epsilon > 1$$

Somit ist der Fehler für kleine Zeiten zwar beschränkt, verschwindet aber nie. Für große Zeiten ist es noch schlimmer, wenn die exakte Lösung bleibt beschränkt, die asymptotische Entwicklung aus Teilaufgabe a) jedoch nicht. Somit gilt

$$\lim_{t\to\infty} |x_{exact}(t) - x_{asymp}(t)| = \infty$$

Die asymptotische Entwicklung liefert somit für kein Zeitintervall $t > 0$ eine gute Approximation.

- Da die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ nicht erfüllt werden kann, ist die Approximation nicht konsistent.
- Das Anfangswertproblem ist nicht regulär gestört, da der Potenzreihenansatz scheitert bzw. die Approximation nicht konsistent ist. Also ist das Problem singulär gestört.

**Aufgabenteil c)**

Offensichtlich liegen in unserem Anfangswertproblem zwei Zeitskalen vor. Deshalb betrachten wir auch noch das Verhalten der Störungsrechnung wenn die Zeitskalen separiert sind, also mit dem Ansatz

$$z(t,s) = z_0(t,s) + \epsilon z_1(t,s) + \epsilon^2 z_2(t,s) + \cdots$$

wobei $s := \epsilon t$ sei. Zum Einsetzen in das Anfangswertproblem benötigen wir die erste Ableitung bezüglich $t$, welche wir mit Hilfe der Kettenregel erhalten

$$\boxed{\frac{dz_{0,1,2}}{dt}(t,s) = \frac{\partial z_{0,1,2}}{\partial t}(t,s) + \epsilon \frac{\partial z_{0,1,2}}{\partial s}(t,s).}$$

Bevor wir einsetzen, müssen wir noch die Form des Anfangswertproblems etwas modifizieren, d.h.,

$$\epsilon z'(t) + z(t) = \frac{\sin(\epsilon t)}{\epsilon}$$
$$z(0) = 1$$

Diese Umformung macht Sinn, da die rechte Seite nach wie vor als Potenzreihe in $\epsilon$ darstellbar ist. Somit können wir auf der rechten Seite wie folgt substituieren

$$\frac{\sin(\epsilon t)}{\epsilon} \;\to\; \frac{\sin(s)}{s} t,$$

wobei $\frac{\sin(s)}{s}$ durch eine Taylorreihe um $s = 0$ darstellbar ist. Setzen wir nun den Ansatz bis zur Ordnung $\epsilon^2$ in das Anfangswertproblem ein, so erhalten wir

$$\epsilon \frac{\partial z_0}{\partial t}(t,s) + \epsilon^2 \frac{\partial z_0}{\partial s}(t,s) + \epsilon^2 \frac{\partial z_1}{\partial t}(t,s) + \cdots$$
$$+ z_0(t,s) + \epsilon z_1(t,s) + \epsilon^2 z_2(t,s) + \cdots = \frac{\sin(s)}{s} t$$
$$z_0(0,0) + \epsilon z_1(0,0) + \epsilon^2 z_2(t,s) + \cdots = 1.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt in Ordnung $\epsilon^0$ die Lösung

$$z_0(t,s) = \frac{\sin(s)}{s} t,$$

welche den Anfangswert $z_0(0,0) = 1$ wieder nicht erfüllt ist. Entsprechend liefert die Ordnung $\epsilon^1$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_0}{\partial t}(t,s) + z_1(t,s) &= 0\\ z_1(0,0) &= 0,\end{aligned}$$

und somit die Lösung

$$z_1(t,s) = -\frac{\sin(s)}{s},$$

welche ebenfalls den Anfangswert $z_1(0,0) = 0$ nicht erfüllt. Bleibt noch die Ordnung $\epsilon^2$, hier erhalten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_0}{\partial s}(t,s) + \frac{\partial z_1}{\partial t}(t,s) + z_2(t,s) &= 0\\ z_2(0,0) &= 0,\end{aligned}$$

und somit die Lösung

$$z_2(t,s) = \frac{\sin(s) - s\cos(s)}{s^2}t,$$

welche den Anfangswert $z_2(0,0) = 0$ erfüllt. Fassen wir die Störungsreihe zusammen, so erhalten wir

$$z(t,s) = \frac{\sin(s)}{s}t - \epsilon\frac{\sin(s)}{s} + \epsilon^2\frac{\sin(s) - s\cos(s)}{s^2}t + \cdots$$

Um mit der ezakten Lösung aus Teil b) zu vergleichen, setzen wir die ursprüngliche Zeitskale wieder ein und erhalten

$$z(t) = \frac{\sin(\epsilon t)}{\epsilon} - \epsilon\cos(\epsilon t) + \cdots$$

**Aufgabenteil d)**

Für kleine Zeiten haben wir erneut

$$\lim_{t\to 0}|x_{exact}(t) - z(t)| = |x_{exact}(0) - z(0)| = 1 + \epsilon > 1$$

Diese asymptotische Entwicklung ist also falsch für $t \to 0$.

Für große Werte von $t$ erhalten wir aber da der störende exponentielle Term für kleine Werte von $\epsilon$ schnell gegen Null geht

$$\limsup_{t\to\infty}|x_{exact}(t) - z(t)| = \frac{\epsilon^4}{1+\epsilon^4}\underbrace{\limsup_{t\to\infty}\left|\frac{\sin(\epsilon t)}{\epsilon} - \epsilon\cos(\epsilon t)\right|}_{=O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = O\big(\epsilon^3\big)$$

Für $\epsilon$ klein, ist die Appoximation für große Zeiten gut. Ein Vergleich mit Teil a) zeigt, dass die dort erhaltene asymptotische Entwicklung einer Taylorapproximation der Mehrskalenentwicklung um $t = 0$ entspricht und daher keine sinnvolle Approximation liefert.

**Aufgabenteil e)**

Um eine für alle Werte $t > 0$ sinnvolle Approximation zu erhalten, betrachten wir nun noch das Grenzschichtverhalten für $t \to 0$. Hierzu führen wir eine neue Zeitskala $\tau := \frac{t}{\epsilon^\alpha}$, mit $\alpha > 0$, ein. Setzen wir

$$\tilde{x}(\tau) := x(t) \;\to\; x'(t) = \epsilon^{-\alpha}\tilde{x}'(\tau),$$

so erhalten wir das Anfangswertproblem

$$\epsilon^{2-\alpha}\tilde{x}'(\tau) + \epsilon\tilde{x}(\tau) = \sin\left(\epsilon^{\alpha+1}\tau\right)$$
$$\tilde{x}(0) = 1.$$

Eine sinnvolle Wahl für den Parameter $\alpha$ ist $\alpha = 1$, womit sich die Entartung des Anfangswertproblems aufhebt und die rechte Seite als Potenzreihe in $\epsilon$ schreiben lässt. Das nun erhaltene Anfagswertproblem

$$\tilde{x}'(\tau) + \tilde{x}(\tau) = \frac{\sin\left(\epsilon^2\tau\right)}{\epsilon}$$
$$\tilde{x}(0) = 1.$$

kann wieder im Rahmen einer Störungsrechnung untersucht werden. Wir wählen also den asymptotischen Ansatz

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}_0(\tau) + \epsilon\tilde{x}_1(\tau) + \cdots,$$

als Grundlage unserer Störungsrechnung. Die rechte Seite nach $\epsilon$ entwickelt ergibt

$$\frac{\sin\left(\epsilon^2\tau\right)}{\epsilon} = \epsilon\tau - \frac{\epsilon^5\tau^3}{6} + \cdots.$$

Setzen wir die beiden asymptotischen Entwicklungen in das Anfangswertproblem ein, so erhalten wir

$$\tilde{x}_0'(\tau) + \epsilon\tilde{x}_1'(\tau) + \cdots + \tilde{x}_0(\tau) + \epsilon\tilde{x}_1(\tau) + \cdots = \epsilon t - \frac{\epsilon^5 t^3}{6} + \cdots$$
$$\tilde{x}_0(0) + \epsilon\tilde{x}_1(0) + \cdots = 1.$$

Ein Koeffizientenvergleich der Ordnung $\epsilon^0$ liefert das Anfangswertproblem

$$\tilde{x}_0'(\tau) + \tilde{x}_0(\tau) = 0$$
$$\tilde{x}_0(0) = 1,$$

dessen Lösung ist gegeben durch

$$\tilde{x}_0(\tau) = e^{-\tau}.$$

Bilden wir nun eine Linearkombination dieser asymptotischen Lösung mit der Lösung aus Teil c), derart dass $x(0) = 1$ gilt. Da unsere Lösung aus Teil c) bereits gut für große Zeiten ist, gewichten wir nur die eben erhaltene Grenzschichten Lösung mit dem Faktor $(1+\epsilon)$, damit der Anfangswert erhlaten ist

$$x(t) \approx (1+\epsilon)e^{-\frac{t}{\epsilon}} + \frac{\sin(\epsilon t)}{\epsilon} - \epsilon\cos(\epsilon t).$$

Ein Vergleich mit der exakten Lösung aus Teil b) zeigt, dass diese Approximation bis auf Terme der Ordnung $\epsilon^3$ für alle $t > 0$ richtig ist.