

Aufgabenblatt 4

Tutorübungen am 5./6./12./13. Juni

Aufgabe T4.1 (Mehrskalenansatz)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $t > 0$

$$\begin{aligned}\epsilon^2 x'(t) + \epsilon x(t) &= \sin(\epsilon t) \\ x(0) &= 1\end{aligned}$$

mit kleinem Parameter $\epsilon > 0$.

- a) Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung der Lösung $x(t)$ für die Differentialgleichung bis zur 2. Ordnung in ϵ , vernachlässigen Sie hierbei zunächst den Anfangswert.
- b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems und vergleichen Sie diese mit der asymptotischen Entwicklung aus Teil a).
 - Für welche Zeiten ist die Approximation gut?
 - Ist die Approximation konsistent?
 - Ist das Anfangswertproblem regulär oder singular gestört?

- c) Berechnen Sie mittels Mehrskalenansatz eine Approximation der Lösung bis zur 2. Ordnung

$$z(t, s) = z_0(t, s) + \epsilon z_1(t, s) + \epsilon^2 z_2(t, s) + \dots$$

wobei $s := \epsilon t$ sei.

- d) Vergleichen Sie die Mehrskalenapproximation mit der exakten Lösung aus Teil b).
- e) Benutzen Sie den Grenzsichtenansatz $\tilde{x}(\tau) := x(t)$ mit der neuen Zeitskala $\tau = \frac{t}{\epsilon^\alpha}$, um eine gute Näherung nahe der Anfangsbedingung zu erhalten. Der Parameter $\alpha > 0$ ist hierbei geeignet zu wählen.