Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Mathematische Modelle der Kontinuumsmechanik [MA2904] — SoSe 2019
Prof. Dr. Daniel Matthes — matthes@ma.tum.de
Benedikt Graswald — benedikt.graswald@ma.tum.de

# Aufgabenblatt 2

Tutorübungen am 09./15./16. Mai

**Aufgabe T2.1 (Kubische Gleichung)**
Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Gleichung

$$u = a + \epsilon u^3 \tag{1}$$

in einer Umgebung vom den Punkt $a$ eine eindeutige Lösung besitzt. Welche zusätzlichen Eigenschaften dieser Lösung liefert der Satz noch?
Berechnen Sie anschließend die asymptotische Entwicklung bis zur 2. Ordnung in $\epsilon$.

*Lösungsvorschlag*:
Betrachten wir zunächst das Problem kurz im Setting des IFT

$$f(u, \epsilon) = u - a - \epsilon u^3, \quad f(u, \epsilon) = 0.$$

Da $f(a, 0) = 0$ gilt, kennen wir bereits eine exakte Lösung, um die wir lokal nach $u(\epsilon)$ auflösen wollen.
Daher betrachten wir

$\partial_2 f(u,\epsilon) = -u^3$

$$\partial_1 f(u, \epsilon) = 1 - 3\epsilon u^2 \implies \partial_1 f(a, 0) = 1 \neq 0.$$

Somit ist $\partial_1 f(a, 0)$ invertierbar und der IFT liefert, es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und eine stetig-differenzierbare Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ mit $f(u(\epsilon), \epsilon) = 0$ und $u(0) = a$, d.h. in einer Umgebung um den Punkt $a$ ist $u(\epsilon)$ die eindeutige Lösung zu unserer kubischen Gleichung (1).
Des Weiteren folgt aus dem Satz

$$u'(0) = -\frac{\partial_2 f(a, 0)}{\partial_1 f(a, 0)} = -\frac{-a^3}{1} = a^3,$$

was wir in unserer asymptotischen Entwicklung wiedererkennen werden.
Wir beginnen nun mit dem asymptotischen Ansatz

$$\boxed{u_\epsilon = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).}$$

Einsetzen in die kubische Gleichung (1) liefert

$$\begin{aligned} u_\epsilon = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) &= a + \epsilon\big(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)\big)^3 \\ &= a + \epsilon u_0^3 + 3\epsilon^2 u_0^2 u_1 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Dies führt mittels Koefizientenvergleichs auf

$$u_0 = a, \quad u_1 = u_0^3 = a^3, \quad u_2 = 3u_0^2 u_1 = 3a^5,$$

was der asympotischen Lösung $u_\epsilon = a + \epsilon a^3 + 3\epsilon^2 a^5 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ entspricht.
Der Term 1. Ordnung, die lineare Approximation, hat uns der IFT bereits geliefert.

**Aufgabe T2.2 (Asymptotische Entwicklung)**
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\epsilon x'(t) - 1 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

mit kleinem Parameter $\epsilon$ (vergleiche Aufgabe von Blatt 1).

a) Berechnen Sie die konsistente asymptotische Entwicklung der Lösung bis zur 2. Ordnung in $\epsilon$.

b) Es bezeichne $x_\epsilon(t)$ die exakte Lösung des Anfangswertproblems. Berechnen Sie $x_\epsilon(t)$ und verifizieren Sie anhand von $x_\epsilon(t)$ die asymptotische Entwicklung aus Teilaufgabe a).

*Lösungsvorschlag*:
**Teilaufgabe a)**

Wir wählen den asymptotischen Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots,$$

als Grundlage unserer Störungsrechnung, setzen ihn in das Anfangswertproblem ein und erhalten

$$\begin{aligned} x_0''(t) + \epsilon x_1''(t) + \epsilon^2 x_2''(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) &= -\epsilon x_0'(t) - \epsilon^2 x_1'(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) - 1 \\ x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) + \mathcal{O}(\epsilon^3) &= 0 \\ x_0'(0) + \epsilon x_1'(0) + \epsilon^2 x_2'(0) + \mathcal{O}(\epsilon^3) &= 1. \end{aligned}$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich bezüglich Potenzen von $\epsilon$ durch. Die $\epsilon^0$-Terme ergeben das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= -1 \\ x_0(0) &= 0 \\ x_0'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Bestimmen wir zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch direkte Integration

$$x_0(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2.$$

Aus $x_0(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$ und aus $x_0'(0) = 1$ folgt $c_1 = 1$, somit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_0(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 + t.$$

Entsprechend ergeben die $\epsilon^1$-Terme das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -x_0'(t) \\ x_1(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x_1''(t) = t - 1$ erhält man wieder durch direkte Integration

$$x_1(t) = \tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2.$$

Aus $x_1(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$ und aus $x_1'(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$, somit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_1(t) = \tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2.$$

Schließlich betrachten wir noch die $\epsilon^2$-Terme, diese ergeben das analoge Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_2''(t) &= -x_1'(t) \\ x_1(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x_2''(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$ erhält man wieder durch direkte Integration

$$x_2(t) = -\tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{6}t^3 + c_1 t + c_2.$$

Aus $x_2(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$ und aus $x_2'(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$, somit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_2(t) = -\tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{6}t^3$$

Fassen wir die Störungsrechnung zur Ordnung $\epsilon^2$ zusammen, so erhalten wir die asymptotische Lösung

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 + t + \epsilon\left(\tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2\right) + \epsilon^2\left(-\tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{6}t^3\right) + \cdot$$

**Teilaufgabe b)**

Berechnen wir nun zum Vergleich die exakte Lösung des Anfangswertproblems. Zuerst bestimmen wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x''(t) + \epsilon x'(t) = -1$. Wir beginnen mit der homogenen Gleichung und dem Ansatz $x(t) = Ae^{\lambda t}$, was uns zu $\lambda^2 + \epsilon\lambda = 0$ bzw. $\lambda_1 = -\epsilon$ und $\lambda_2 = 0$ führt. Somit lautet die homogene Lösung $x_h(t) = ae^{-\epsilon t} + b$. Die partikuäre Lösung erhalten wir durch den Ansatz von der rechten Seite $x_p(t) = -\frac{1}{\epsilon}t$.

Somit hat die Lösung die Form

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = ae^{-\epsilon t} + b - \tfrac{1}{\epsilon}t.$$

Aus den Anfangswerten $x(0) = 0 = a + b$ und $x'(0) = 1 = -\epsilon a - \frac{1}{\epsilon}$ folgt $a = -\frac{\epsilon+1}{\epsilon^2}$ und $b = \frac{\epsilon+1}{\epsilon^2}$, also die Lösung

$$x(t) = -\tfrac{\epsilon+1}{\epsilon^2}e^{-\epsilon t} - \tfrac{1}{\epsilon}t + \tfrac{\epsilon+1}{\epsilon^2}.$$

Diese Lösung lässt sich als Potenzreihe in $\epsilon$ darstellen. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^{-\epsilon t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^n t^n}{n!}$$

und erhalten durch einsetzen

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\epsilon^2}\left[(\epsilon+1)\left(1-e^{-\epsilon t}\right)-\epsilon t\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\left[-(\epsilon+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\epsilon^n t^n}{n!}-\epsilon t\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{n+1}t^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\epsilon^n t^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\epsilon^{n-1}t^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\epsilon^{n-2}t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\epsilon^n t^{n+1}}{(n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\epsilon^n t^{n+2}}{(n+2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\right)(-1)^n\epsilon^n.
\end{aligned}
$$

Schreiben wir die Terme bis zur Ordnung $\epsilon^2$ explizt, so erhalten wir

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 + t + \epsilon\left(\tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2\right) + \epsilon^2\left(-\tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{6}t^3\right) + \cdot,$$

und somit dasselbe Ergebnis wir aus unserer Störungsrechnung in Teil a).