

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (GRNVS)

IN0010 – SoSe 2019

Prof. Dr.-Ing. Georg Carle

Dr.-Ing. Stephan Günther, Johannes Naab, Henning Stubbe

Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

Übertragungsmedien

Literaturangaben

Signale, Information und deren Bedeutung

Information und Entropie

Bedingte Entropie und Verbundentropie

Informationstheoretisches Modell eines gedächtnislosen Kanals

Signale und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

Übertragungsmedien

Literaturangaben

Definition (Signale, Symbole)

Signale sind zeitabhängige und messbare physikalische Größen. Definierten messbaren Signaländerungen lässt sich ein **Symbol** zuordnen. Diese Symbole repräsentieren Information.

Beispiele für Signale:

- Licht (z.B. Übermittlung von Morsezeichen in der Schifffahrt)
- Spannung (z.B. Telegraphie)
- Schall (z.B. gesprochene Sprache, Musik)

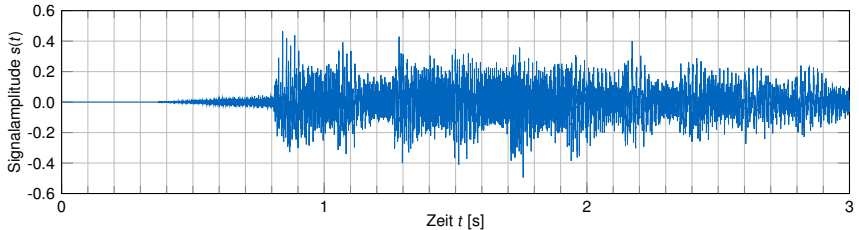


Abbildung 1: Die ersten 3 s von „Sunrise Avenue – Hollywood Hills“

Definition (Informationsgehalt)

Der Informationsgehalt eines Zeichens (oder Symbols) drückt aus, wieviel Information durch das Zeichen übertragen wird.

Der Informationsgehalt besitzt folgende Eigenschaften:

- Je seltener ein Zeichen auftritt, desto höher ist sein Informationsgehalt.
- Der Informationsgehalt einer Zeichenkette ist die Summe der Informationsgehalte der einzelnen Zeichen
- Der Informationsgehalt eines vorhersagbaren Zeichens ist 0

Die Logarithmus-Funktion ist die einfachste Funktion zur Definition eines Informationsgehalts mit diesen Eigenschaften.

Information und Entropie

Claude Elwood Shannon

* 30. April 1916; † 24. Februar 2001

AT&T Bell Labs: 1941-1958, anschließend Professor am MIT

A Mathematical Theory of Communication

by Claude E. Shannon

In: The Bell System Technical Journal,

Vol. 27, No 3, 1948, pp. 379–423

and <http://www.alcatel-lucent.com/bstj/vol27-1948/articles/bstj27-3-379.pdf>

Vol. 27, No 4, 1948, pp. 623–656

Communication in the Presence of Noise

by Claude E. Shannon

Proc. Inst. Radio Eng. (IRE) Vol. 37, 1949, pp.10-21

Online retyped copy of the paper:

<http://nms.csail.mit.edu/spinal/shannonpaper.pdf>

Communication Theory of Secrecy Systems

by Claude E. Shannon

In: The Bell System Technical Journal,

Vol. 28, No. 4, 1949, pp. 656–715

<http://netlab.cs.ucla.edu/wiki/files/shannon1949.pdf>

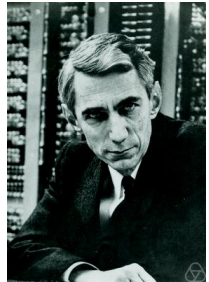
Prediction and Entropy of Printed English

by Claude E. Shannon

In: The Bell System Technical Journal,

Vol. 30, No. 1, 1951, pp. 50–64,

<https://archive.org/details/bstj30-1-50>



Definition – Information

Information besteht in der **Unsicherheit**, Veränderungen eines Signals vorhersagen zu können. Der Informationsgehalt eines Zeichens $x \in \mathcal{X}$ aus einem Alphabet \mathcal{X} hängt von der Wahrscheinlichkeit $p(x)$ ab, dass das informationstragende Signal zum Beobachtungszeitpunkt den diesem Zeichen zugeordneten Wert bzw. Wertebereich annimmt. Der Informationsgehalt I des Zeichens x mit der Auftretenswahrscheinlichkeit $p(x)$ ist definiert als

$$I(x) = -\log_2 p(x) \quad \text{mit} \quad [I] = \text{bit}.$$

Definition – Information

Information besteht in der **Unsicherheit**, Veränderungen eines Signals vorhersagen zu können. Der Informationsgehalt eines Zeichens $x \in \mathcal{X}$ aus einem Alphabet \mathcal{X} hängt von der Wahrscheinlichkeit $p(x)$ ab, dass das informationstragende Signal zum Beobachtungszeitpunkt den diesem Zeichen zugeordneten Wert bzw. Wertebereich annimmt. Der Informationsgehalt I des Zeichens x mit der Auftretswahrscheinlichkeit $p(x)$ ist definiert als

$$I(x) = -\log_2 p(x) \quad \text{mit} \quad [I] = \text{bit}.$$

Definition – Entropie

Den mittleren Informationsgehalt einer Quelle bezeichnet man als **Entropie**

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) I(x) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_2 (p(x)).$$

Definition – Information

Information besteht in der **Unsicherheit**, Veränderungen eines Signals vorhersagen zu können. Der Informationsgehalt eines Zeichens $x \in \mathcal{X}$ aus einem Alphabet \mathcal{X} hängt von der Wahrscheinlichkeit $p(x)$ ab, dass das informationstragende Signal zum Beobachtungszeitpunkt den diesem Zeichen zugeordneten Wert bzw. Wertebereich annimmt. Der Informationsgehalt I des Zeichens x mit der Auftretswahrscheinlichkeit $p(x)$ ist definiert als

$$I(x) = -\log_2 p(x) \quad \text{mit} \quad [I] = \text{bit}.$$

Definition – Entropie

Den mittleren Informationsgehalt einer Quelle bezeichnet man als **Entropie**

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) I(x) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_2 (p(x)).$$

Hinweis: Die Schreibweisen $p(x)$ oder p_x verwenden wir manchmal als Kurzform von $\Pr[X = x]$.

Beispiele:

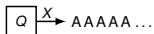
1. Deterministische, diskrete Quelle, welche stets das Zeichen 'A' emittiert:



$$I(A) = -\log_2 (\Pr[X = A]) = -\log_2(1) = 0 \text{ bit}$$

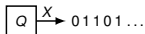
Beispiele:

1. Deterministische, diskrete Quelle, welche stets das Zeichen 'A' emittiert:



$$I(A) = -\log_2 (\Pr[X = A]) = -\log_2(1) = 0 \text{ bit}$$

2. Binäre Quelle, welche auf nicht vorhersehbare Weise die Zeichen '0' oder '1' emittiert:



$$I(0) = -\log_2 (\Pr[X = 0]) = -\log_2(0,5) = 1 \text{ bit}$$

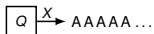
$$I(1) = -\log_2 (\Pr[X = 1]) = -\log_2(0,5) = 1 \text{ bit}$$

Die Entropie $H(X) = \sum_i p_i I(x_i)$ dieser Quelle beträgt

$$H(X) = -(p_0 \log_2(p_0) + p_1 \log_2(p_1)) = -(-0,5 - 0,5) = 1 \text{ bit/Zeichen.}$$

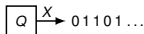
Beispiele:

1. Deterministische, diskrete Quelle, welche stets das Zeichen 'A' emittiert:



$$I(A) = -\log_2 (\Pr[X = A]) = -\log_2(1) = 0 \text{ bit}$$

2. Binäre Quelle, welche auf nicht vorhersehbare Weise die Zeichen '0' oder '1' emittiert:



$$I(0) = -\log_2 (\Pr[X = 0]) = -\log_2(0,5) = 1 \text{ bit}$$

$$I(1) = -\log_2 (\Pr[X = 1]) = -\log_2(0,5) = 1 \text{ bit}$$

Die Entropie $H(X) = \sum_i p_i I(x_i)$ dieser Quelle beträgt

$$H(X) = -(p_0 \log_2(p_0) + p_1 \log_2(p_1)) = -(-0,5 - 0,5) = 1 \text{ bit/Zeichen.}$$

3. Ungeordnete Zeichen eines langen deutschen Textes, d. h. $X \in \{A, B, C, \dots, Z\}$:



$$I(E) = -\log_2 (\Pr[X = E]) = -\log_2(0,1740) \approx 2,5223 \text{ bit}$$

Die Entropie $H(X)$ dieser Quelle beträgt

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i) \approx 4,0629 \text{ bit/Zeichen,}$$

d. h. deutscher Text lässt sich mit durchschnittlich etwas mehr als 4 bit pro Zeichen kodieren.

Hinweis: Dies gilt nur für [gedächtnislose](#) Quellen oder hinreichend lange Texte. Andernfalls müssen bedingte Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden.

Definition – Bedingte Entropie

Die **bedingte Entropie** zweier Zufallsvariablen X und Y

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log_2 p(y|x)$$

entspricht der verbleibenden Unsicherheit über Y , wenn X bekannt ist.

- Sind X und Y voneinander **abhängig**, dann ist die bedingte Entropie kleiner als im unabhängigen Fall.
- Sind X und Y voneinander **unabhängig** und ist der Ausgang von X bereits bekannt, so bleibt die Entropie von Y vollständig erhalten.

Definition – Bedingte Entropie

Die **bedingte Entropie** zweier Zufallsvariablen X und Y

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log_2 p(y|x)$$

entspricht der verbleibenden Unsicherheit über Y , wenn X bekannt ist.

- Sind X und Y voneinander **abhängig**, dann ist die bedingte Entropie kleiner als im unabhängigen Fall.
- Sind X und Y voneinander **unabhängig** und ist der Ausgang von X bereits bekannt, so bleibt die Entropie von Y vollständig erhalten.

Definition – Verbundentropie

Sei $p(x,y)$ die Verbunddichte zweier Zufallsvariablen X und Y , d.h.

$$p(x,y) = \Pr[X=x|Y=y] \Pr[Y=y].$$

Dann ist die **Verbundentropie** $H(X,Y)$ definiert als

$$H(X,Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x,y) \log_2 p(x,y).$$

Berechnung der Verbundentropie und der bedingten Entropie

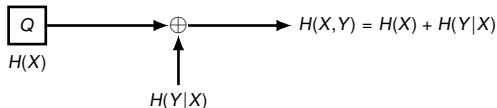
Die **Verbundentropie** $H(X, Y)$ entsteht aus der Addition der Quellenentropie $H(X)$ mit dem von dieser Quelle statistisch unabhängigen Anteil $H(Y|X)$ einer anderen Quelle:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X).$$

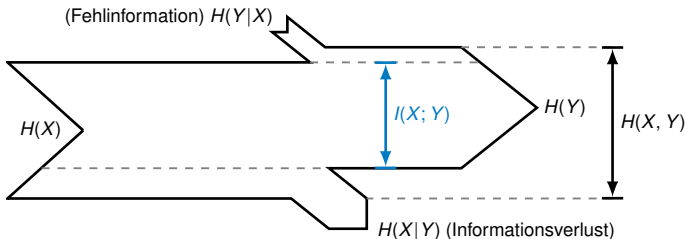
Die **bedingte Entropie** $H(Y|X)$ errechnet sich aus den Auftretswahrscheinlichkeiten p_{XY} und p_Y :

$$H(Y|X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{XY}(X = x, Y = y) \log_2(p_Y(Y = y|X = x)).$$

Beispiel: Hinzufügen von Fehlinformation $H(Y|X)$



- Die bedingte Entropie $H(Y|X)$ kann verstanden werden als die Unsicherheit in Y , wenn X bekannt ist.
- Da die Fehlinformation keine Nutzinformation beisteuert, kann die Verbundentropie auf der Empfangsseite $H(X, Y)$ nicht der Nutzinformation entsprechen.



- Für die Entropie auf der Empfangsseite (Empfangsentropie) erhalten wir $H(Y) = H(X) - H(X|Y) + H(Y|X)$ (Sendeentropie abzüglich eines Informationsverlusts durch den Kanal zuzüglich der Fehlinformation).
- Die transportierte Information (Transinformation) entspricht der Sendeentropie abzüglich des Informationsverlusts bzw. der Empfangsentropie abzüglich der Fehlinformation.

Definition (Transinformation)

Die von Sender zu Empfänger über einen gedächtnislosen Kanal transportierte Information bezeichnet man als **Transinformation** (engl. **Mutual Information**)

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

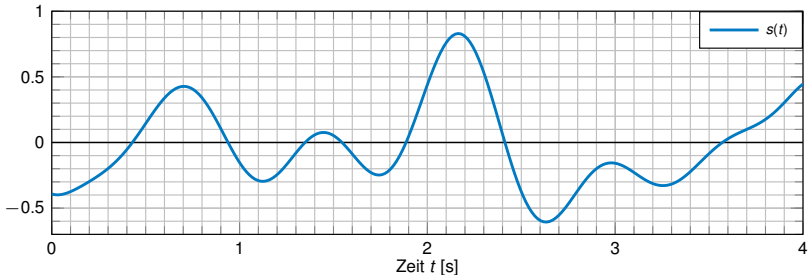
Welche Bedeutung hat ein bestimmtes Signal?

Ein Signal transportiert Information. Erst durch eine **Interpretationsvorschrift** erhält diese Information eine Bedeutung, d. h. es muss eine Abbildung zwischen **Symbolen** (Signalwerten bzw. Wertebereichen) und **Daten** geben.

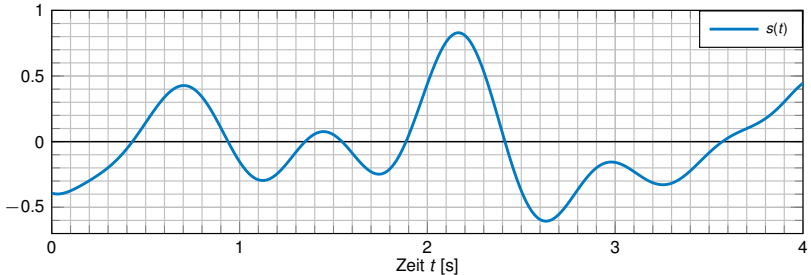
Beispiel: Gegeben sei ein binäres Alphabet mit den Zeichen $X \in \{0,1\}$. Die Interpretationsvorschrift laute

$$x = \begin{cases} 0 & s(t) \leq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Bedeutung hat das unten abgebildete Signal?



Offene Fragen



- In welchen zeitlichen Abständen werden Samples genommen? ([Zeitdiskretisierung](#))
- Bedeutet häufigeres Abtasten auch automatisch mehr Information? ([Abtasttheorem](#))
- Wie werden kontinuierliche Signalwerte gerundet? ([Quantisierung](#))
- Welche Abbildungs- / Interpretationsvorschriften gibt es? ([Leitungskodierung](#))
- Welche Störfaktoren spielen eine Rolle? ([Rauschen](#), [Dämpfung](#), [Verzerrung](#), ...)
- Wie werden Fehler erkannt und ggf. korrigiert? ([Kanalkodierung](#))
- Und wie wird ein derartiges Signal überhaupt erzeugt? ([Impulsformung](#), [Modulation](#))

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Fourierreihe

Einfache Signaleigenschaften

Fouriertransformation

Bedeutung von Fourierreihe und Fouriertransformation

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

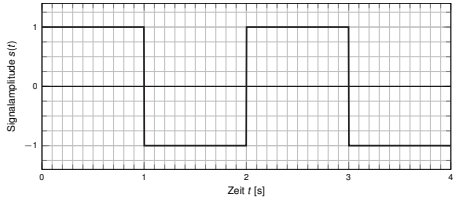
Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

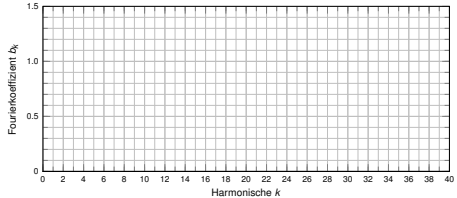
Übertragungsmedien

Literaturangaben

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$

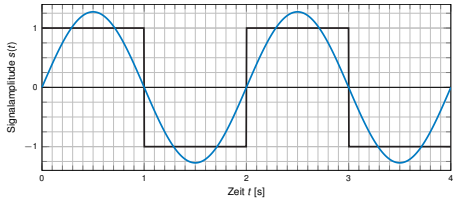


(b) Spektrum $S(f)$

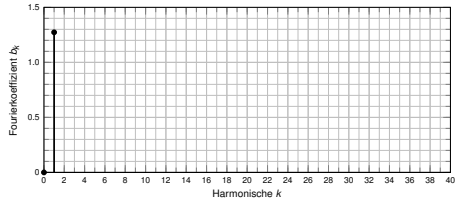
Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2$ s)

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2}$$

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$

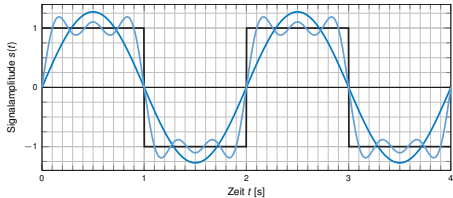


(b) Spektrum $S(f)$

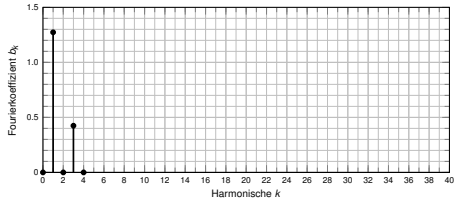
Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2$ s)

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$

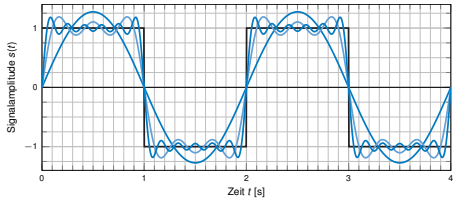


(b) Spektrum $S(f)$

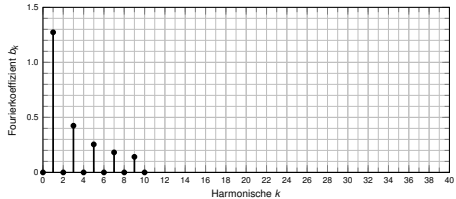
Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2$ s)

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^4 (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$

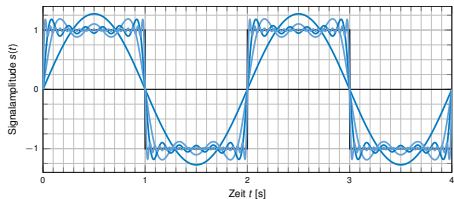


(b) Spektrum $S(f)$

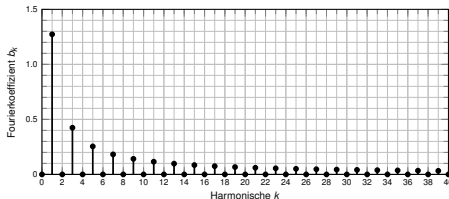
Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2$ s)

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{10} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$

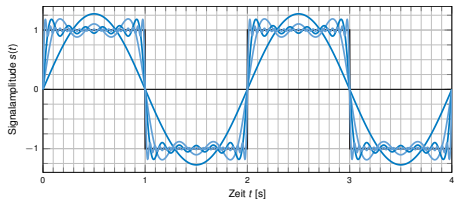


(b) Spektrum $S(f)$

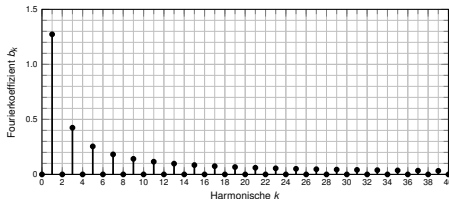
Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2$ s)

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{40} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Periodische Zeitsignale lassen sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen auffassen:



(a) Zeitsignal $s(t)$



(b) Spektrum $S(f)$

Fourier-Reihe: (mit $\omega = 2\pi/T$, Periodendauer hier $T = 2$ s)

Im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ gilt:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Fourierreihe

Ein **periodisches** Signal $s(t)$ lässt sich als Summe gewichteter Sinus- und Kosinus-Schwingungen darstellen. Die so entstehende Reihenentwicklung von $s(t)$ bezeichnet man als **Fourierreihe**:

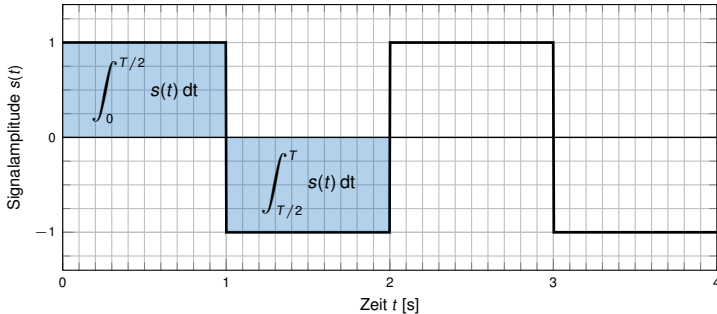
$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) .$$

Das k -te Summenglied bezeichnet man auch als k -te **Harmonische**. Das konstante Glied $a_0/2$ repräsentiert eine Verschiebung der Signalamplitude bezüglich der Ordinate (y-Achse) und damit den konstanten Anteil der Funktion. Die **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi/T$ stellt lediglich eine Normierung bezüglich der Periodendauer T des Signals dar.

Die Koeffizienten (Gewichte) a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t) dt .$$

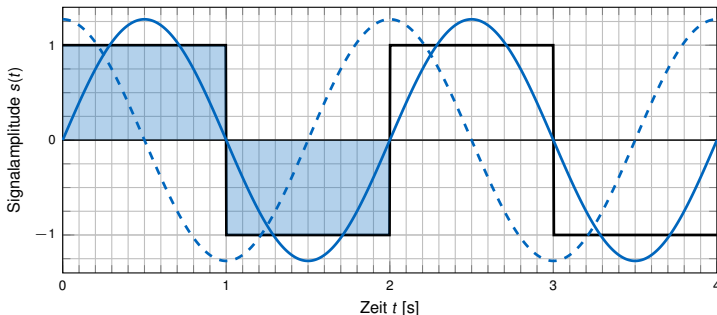
- Die Bestimmung der Koeffizienten a_k und b_k ist nur Rechenarbeit
- Einige Eigenschaften sieht man einfachen Signalen aber leicht an, z. B.:



- Punktsymmetrie zu $(T/2, 0) \Rightarrow a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) dt = 0$
- Kein Gleichanteil (d.h. keine Verschiebung entlang der Ordinate)

Frage: Was ist mit dem Signal $s'(t) = s(t) + c$ mit $c > 0$?

- Die Bestimmung der Koeffizienten a_k und b_k ist nur Rechenarbeit
- Einige Eigenschaften sieht man einfachen Signalen aber leicht an, z. B.:



- Alle Gewichte für den Kosinus sind null, also $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$
- Grund: $s(t)$ ist genau in Phase mit dem Sinus

Frage: Was ist, wenn man die Phase von $s(t)$ um 90° verschiebt?

Bislang haben wir nur periodische Signale betrachtet. Was ist mit **nicht**-periodischen Signalen?

- Keine Entwicklung als Fourierreihe möglich
- Kontinuierliches (anstatt diskretes) Spektrum
- Frequenzbereich erhält man mittels **Fouriertransformation**

Fouriertransformation

Die Fourier-Transformierte einer stetigen, integrierbaren Funktion $s(t)$ ist gegeben als

$$s(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} s(t) (\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)) dt.$$

Die Äquivalenz $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$ bezeichnet man als **Eulersche Formel**. Hinweis: $\sqrt{-1} = j$ bzw. $j^2 = -1$

Bislang haben wir nur periodische Signale betrachtet. Was ist mit **nicht**-periodischen Signalen?

- Keine Entwicklung als Fourierreihe möglich
- Kontinuierliches (anstatt diskretes) Spektrum
- Frequenzbereich erhält man mittels **Fouriertransformation**

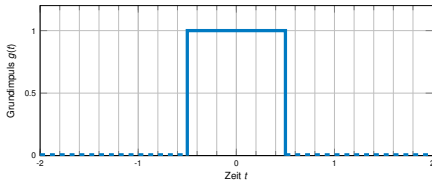
Fouriertransformation

Die Fourier-Transformierte einer stetigen, integrierbaren Funktion $s(t)$ ist gegeben als

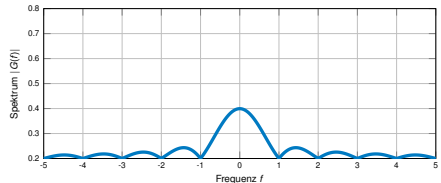
$$s(t) \longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} s(t) (\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)) dt.$$

Die Äquivalenz $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$ bezeichnet man als **Eulersche Formel**. Hinweis: $\sqrt{-1} = j$ bzw. $j^2 = -1$

Beispiel: Rechteckimpuls und zugehöriges Spektrum



(a) Zeitbereich

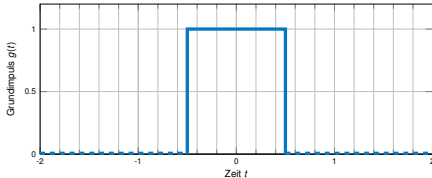


(b) Frequenzbereich

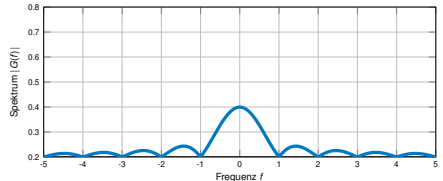
Allgemein: Für einen Rechteckimpuls im Zeitintervall $[-T/2; T/2]$ der Amplitude A erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft) dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} \left(\left[\sin(2\pi ft) \right]_{-T/2}^{T/2} + j \left[\cos(2\pi ft) \right]_{-T/2}^{T/2} \right) \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} \left(\left[\sin(\pi fT) - \sin(-\pi fT) \right] + j \left[\cos(\pi fT) - \cos(-\pi fT) \right] \right) \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{AT}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(fT)
 \end{aligned}$$

Für $A = 1$ und $T = 1$ (Abbildung unten) erhalten wir also $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(f)$.



(a) Zeitbereich



(b) Frequenzbereich

Ziel: Darstellung von Signalen als Linearkombination von Basis-Signalen

- Signale lassen sich in ihre spektralen Bestandteile zerlegen \Rightarrow Analyse
- Aus spektralen Bestandteilen lassen sich Signale generieren \Rightarrow Synthese
- Ein rauschfreier Kanal stellt ein lineares zeit-invariantes System (LZI-System) dar
- Komplexe Exponentialfunktionen sind Eigenfunktionen von LZI-Systemen
- LZI-System mit komplexer Exponentialfunktion am Eingang
 \Rightarrow komplexe Exponentialfunktion am Ausgang

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

- Abtastung

- Rekonstruktion

- Quantisierung

- Signaltypen (Übersicht)

Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

Übertragungsmedien

Literaturangaben

Natürlich vorkommende Signale sind **zeitkontinuierlich** und **wertkontinuierlich**, d.h. sie nehmen zu unendlich vielen Zeitpunkten beliebige reelle Werte an.

Problem für Computer:

- Endlicher Speicher
- Endliche Rechengenauigkeit

Natürlich vorkommende Signale sind **zeitkontinuierlich** und **wertkontinuierlich**, d. h. sie nehmen zu unendlich vielen Zeitpunkten beliebige reelle Werte an.

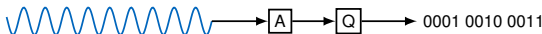
Problem für Computer:

- Endlicher Speicher
- Endliche Rechengenauigkeit

Lösung: **Diskretisierung** von Signalen im

- Zeitbereich (**Abtastung**) und
- Wertbereich (**Quantisierung**).

Ein zeit- und wertdiskretes Signal ist **digital** und wird in **Wörtern** fester Länge gespeichert.



Vergleiche: Nutzung von Fix- bzw. Gleitkommazahlen anstelle von reellen Zahlen entspricht einer Rundung (Quantisierung) auf eine endliche Anzahl diskreter Stufen.

Das Signal $s(t)$ wird mittels des Einheitsimpulses (Dirac-Impulses) $\delta[t]$ in äquidistanten Abständen T_a (Abtastintervall) für $n \in \mathbb{Z}$ abgetastet:

$$\hat{s}(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_a], \text{ mit } \delta[t - nT_a] = \begin{cases} 1 & t = nT_a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\hat{s}(t)$ nur zu den Zeitpunkten nT_a für ganzzahlige n von Null verschieden ist, vereinbaren wir die Schreibweise $\hat{s}[n]$ für zeitdiskrete aber wertkontinuierliche Signale.

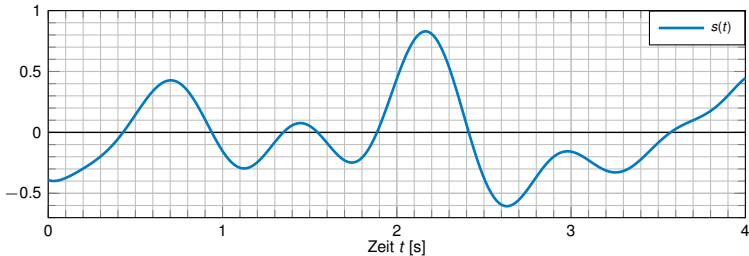


Abbildung 2: Zeitkontinuierliches Signal $s(t)$

Das Signal $s(t)$ wird mittels des Einheitsimpulses (Dirac-Impulses) $\delta[t]$ in äquidistanten Abständen T_a (Abtastintervall) für $n \in \mathbb{Z}$ abgetastet:

$$\hat{s}(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_a], \text{ mit } \delta[t - nT_a] = \begin{cases} 1 & t = nT_a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\hat{s}(t)$ nur zu den Zeitpunkten nT_a für ganzzahlige n von Null verschieden ist, vereinbaren wir die Schreibweise $\hat{s}[n]$ für zeitdiskrete aber wertkontinuierliche Signale.

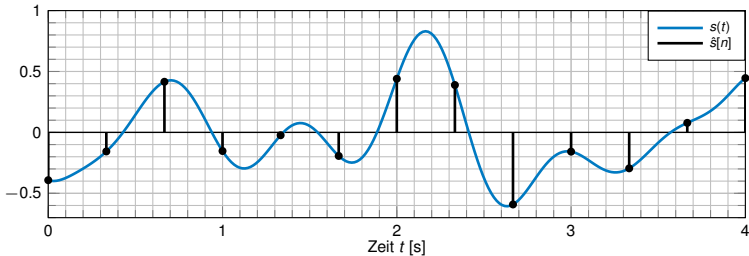


Abbildung 2: Zeitkontinuierliches Signal $s(t)$ und Abtastwerte $\hat{s}[n]$

Mittels der Abtastwerte $\hat{s}[n]$ ist es möglich, das ursprüngliche Signal $s(t)$ zu rekonstruieren:

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}[n] \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - nT_a}{T_a} \right).$$

- Abtastwerte sind **Stützstellen** und
- dienen als Gewichte für eine passende **Ansatzfunktion** (trigonometrische Interpolation, vgl. Polynominterpolation → Numerisches Programmieren).

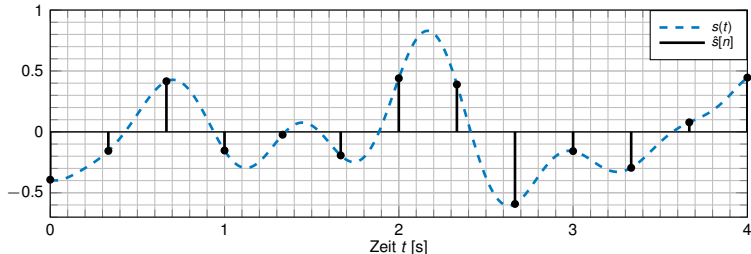


Abbildung 3: Abtastwerte $\hat{s}[n]$

Mittels der Abtastwerte $\hat{s}[n]$ ist es möglich, das ursprüngliche Signal $s(t)$ zu rekonstruieren:

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - nT_a}{T_a}\right).$$

- Abtastwerte sind **Stützstellen** und
- dienen als Gewichte für eine passende **Ansatzfunktion** (trigonometrische Interpolation, vgl. Polynominterpolation → Numerisches Programmieren).

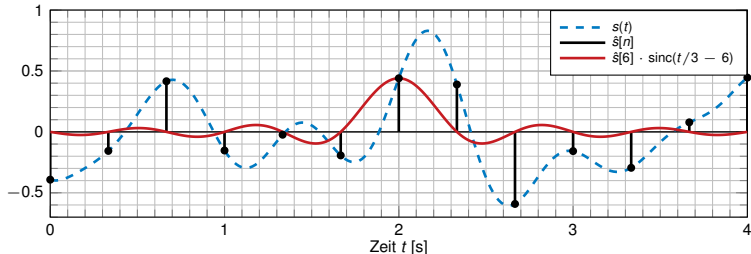


Abbildung 3: Jeder Abtastwert $\hat{s}[n]$ dient als Gewicht für die Ansatzfunktion zur Rekonstruktion.

Mittels der Abtastwerte $\hat{s}[n]$ ist es möglich, das ursprüngliche Signal $s(t)$ zu rekonstruieren:

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}[n] \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - nT_a}{T_a} \right).$$

- Abtastwerte sind **Stützstellen** und
- dienen als Gewichte für eine passende **Ansatzfunktion** (trigonometrische Interpolation, vgl. Polynominterpolation → Numerisches Programmieren).

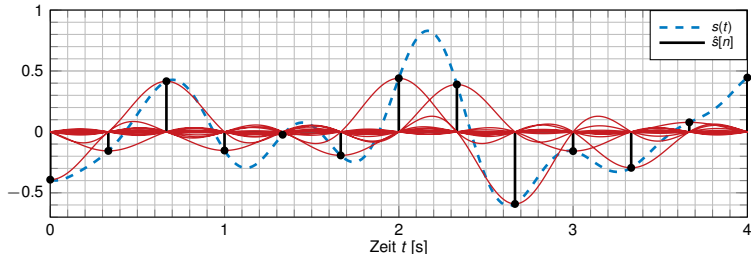


Abbildung 3: Jeder Abtastwert $\hat{s}[n]$ dient als Gewicht für die Ansatzfunktion zur Rekonstruktion.

Mittels der Abtastwerte $\hat{s}[n]$ ist es möglich, das ursprüngliche Signal $s(t)$ zu rekonstruieren:

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}[n] \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - nT_a}{T_a} \right).$$

- Abtastwerte sind **Stützstellen** und
- dienen als Gewichte für eine passende **Ansatzfunktion** (trigonometrische Interpolation, vgl. Polynominterpolation → Numerisches Programmieren).

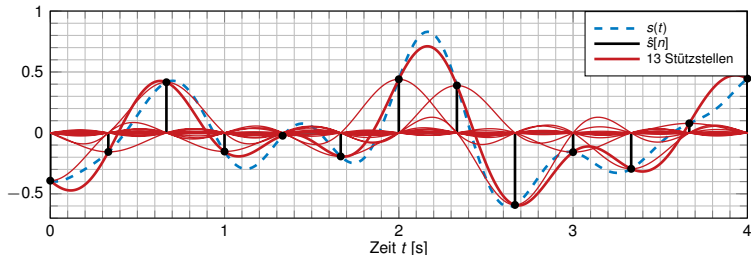


Abbildung 3: Die Summe der gewichteten Ansatzfunktionen nähert sich dem ursprünglichen Signal in Abhängigkeit der Anzahl der Summenglieder.

Mittels der Abtastwerte $\hat{s}[n]$ ist es möglich, das ursprüngliche Signal $s(t)$ zu rekonstruieren:

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}[n] \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - nT_a}{T_a} \right).$$

- Abtastwerte sind **Stützstellen** und
- dienen als Gewichte für eine passende **Ansatzfunktion** (trigonometrische Interpolation, vgl. Polynominterpolation → Numerisches Programmieren).

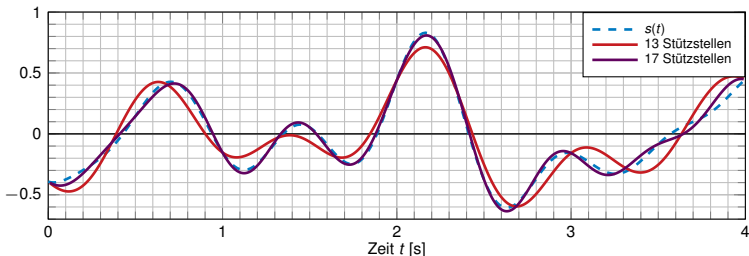


Abbildung 3: Die Summe der gewichteten Ansatzfunktionen nähert sich dem ursprünglichen Signal in Abhängigkeit der Anzahl der Summenglieder.

Wann ist eine verlustfreie Rekonstruktion möglich?

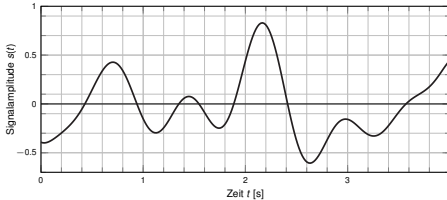
- Die Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich:

$$s(t) \cdot \delta[t - nT] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{T} S(f) * \delta[f - n/T].$$

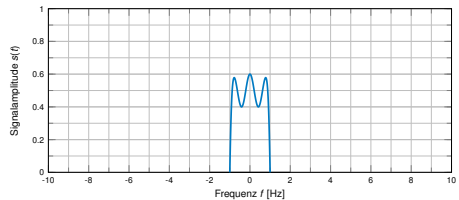
- Diese Faltung mit Einheitsimpulsen entspricht einer Verschiebung von $S(f)$ entlang der Abszisse.

Folglich entspricht die Abtastung des Signals $s(t)$ in Abständen T_a der periodischen Wiederholung seines Spektrums $S(f)$ in Abständen von $f_a = 1/T_a$.

Beispiel: Abtastung eines auf B **bandbegrenzten** Signals $s(t)$ mit der Abtastfrequenz $f_a = 3B$:



(a) Ursprüngliches Signal $s(t)$



(b) Zugehöriges Spektrum $S(f)$ (schematisch)

Wann ist eine verlustfreie Rekonstruktion möglich?

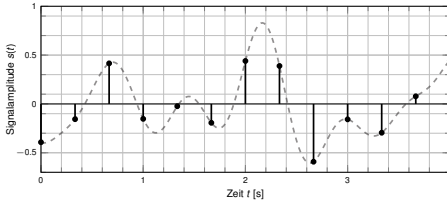
- Die Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich:

$$s(t) \cdot \delta[t - nT] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{T} S(f) * \delta[f - n/T].$$

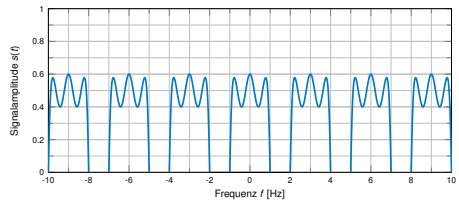
- Diese Faltung mit Einheitsimpulsen entspricht einer Verschiebung von $S(f)$ entlang der Abszisse.

Folglich entspricht die Abtastung des Signals $s(t)$ in Abständen T_a der periodischen Wiederholung seines Spektrums $S(f)$ in Abständen von $f_a = 1/T_a$.

Beispiel: Abtastung eines auf B **bandbegrenzten** Signals $s(t)$ mit der Abtastfrequenz $f_a = 3B$:



(a) Abgetastetes Signal $\hat{s}[n]$



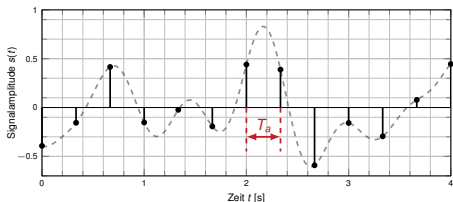
(b) Zugehöriges Spektrum $\hat{S}(f)$ (schematisch)

Abtasttheorem von Shannon und Nyquist

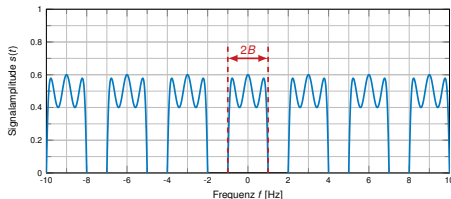
Ein auf $|f| \leq B$ bandbegrenztetes Signal $s(t)$ ist vollständig durch äquidistante Abtastwerte $\hat{s}[n]$ beschrieben, sofern diese nicht weiter als $T_a \leq 1/2B$ auseinander liegen. Die Abtastfrequenz, welche eine vollständige Signalrekonstruktion erlaubt, ist folglich durch

$$f_a > 2B$$

nach unten beschränkt.



(a) Abgetastetes Signal $\hat{s}[n]$



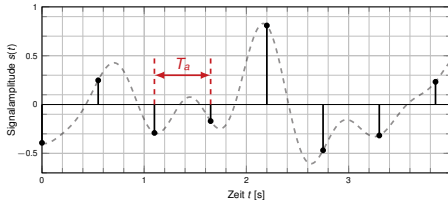
(b) Zugehöriges Spektrum $\hat{S}(f)$ (schematisch)

Abtasttheorem von Shannon und Nyquist

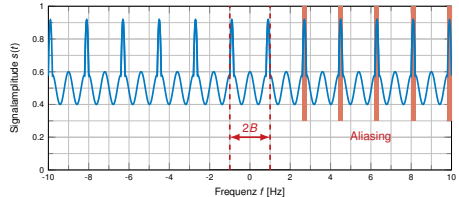
Ein auf $|f| \leq B$ bandbegrenztes Signal $s(t)$ ist vollständig durch äquidistante Abtastwerte $\hat{s}[n]$ beschrieben, sofern diese nicht weiter als $T_a \leq 1/2B$ auseinander liegen. Die Abtastfrequenz, welche eine vollständige Signalrekonstruktion erlaubt, ist folglich durch

$$f_a > 2B$$

nach unten beschränkt.



(a) Abgetastetes Signal $\hat{s}[n]$



(b) Zugehöriges Spektrum $\hat{S}(f)$ (schematisch)

- Wählt man $f_a < 2B$, so überlappen sich die periodischen Wiederholungen des Spektrums
- Diesen Effekt bezeichnet man als **Aliasing**
- Eine **verlustfreie** Rekonstruktion ist in diesem Fall **nicht** möglich

Die Abtastwerte $\hat{s}[n] \in \mathbb{R}$ sind noch kontinuierlich im Wertebereich und können i. A. nicht exakt gespeichert werden.

Lösung: Quantisierung

- Die Unterscheidung von $M = 2^N$ Signalstufen erfordert **Codewörter** von N bit
- Jeder Signalstufe wird dabei ein bestimmtes Codewort zugeordnet
- Die Signalstufen werden im **Quantisierungsintervall** $I_Q = [a,b]$ „sinnvoll“ verteilt
- Was ist „sinnvoll“?

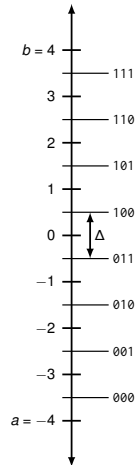
Die Abtastwerte $\hat{s}[n] \in \mathbb{R}$ sind noch kontinuierlich im Wertebereich und können i. A. nicht exakt gespeichert werden.

Lösung: Quantisierung

- Die Unterscheidung von $M = 2^N$ Signalstufen erfordert **Codewörter** von N bit
- Jeder Signalstufe wird dabei ein bestimmtes Codewort zugeordnet
- Die Signalstufen werden im **Quantisierungsintervall** $I_Q = [a, b]$ „sinnvoll“ verteilt
- Was ist „sinnvoll“?

Beispiel: Lineare Quantisierung mit mathematischem Runden

- Optimal, wenn alle Werte innerhalb I_Q mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten
- Stufenbreite $\Delta = \frac{b - a}{M}$
- Innerhalb I_Q beträgt der maximale Quantisierungsfehler $q_{\max} = \Delta/2$
- Signalwerte außerhalb I_Q werden auf die größte bzw. kleinste Signalstufe abgebildet \Rightarrow Außerhalb I_Q ist der Quantisierungsfehler unbeschränkt



Die Abtastwerte $\hat{s}[n] \in \mathbb{R}$ sind noch kontinuierlich im Wertebereich und können i. A. nicht exakt gespeichert werden.

Lösung: Quantisierung

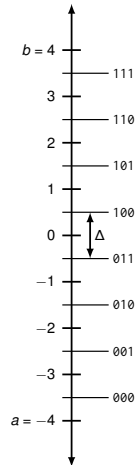
- Die Unterscheidung von $M = 2^N$ Signalstufen erfordert **Codewörter** von N bit
- Jeder Signalstufe wird dabei ein bestimmtes Codewort zugeordnet
- Die Signalstufen werden im **Quantisierungsintervall** $I_Q = [a, b]$ „sinnvoll“ verteilt
- Was ist „sinnvoll“?

Beispiel: Lineare Quantisierung mit mathematischem Runden

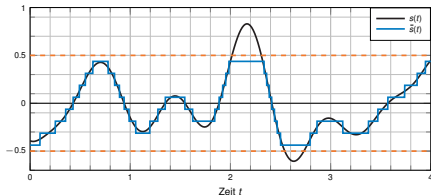
- Optimal, wenn alle Werte innerhalb I_Q mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten
- Stufenbreite $\Delta = \frac{b - a}{M}$
- Innerhalb I_Q beträgt der maximale Quantisierungsfehler $q_{\max} = \Delta/2$
- Signalwerte außerhalb I_Q werden auf die größte bzw. kleinste Signalstufe abgebildet \Rightarrow Außerhalb I_Q ist der Quantisierungsfehler unbeschränkt

Was ist, wenn die Signalwerte nicht gleichverteilt sind?

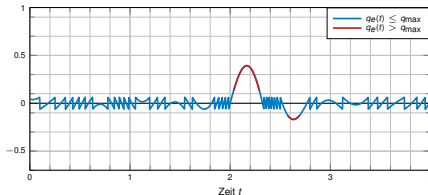
- Lineare Quantisierung ist typischerweise suboptimal
- Nicht-lineare Quantisierung wird beispielsweise bei der Digitalisierung von Sprache oder Musik eingesetzt



Beispiel: Lineare Quantisierung im Intervall $I = [-0,5; 0,5]$ mit $N = 3$ bit:



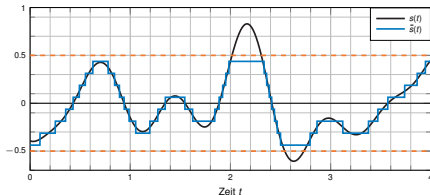
(a) Quantisiertes Signal $\tilde{s}(t)$ (blau)



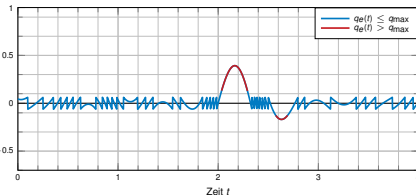
(b) Quantisierungsfehler $q_e(t) = s(t) - \tilde{s}(t)$

Codewort	000	001	010	011	100	101	110	111
Signalstufe	$-7/16$	$-5/16$	$-3/16$	$-1/16$	$1/16$	$3/16$	$5/16$	$7/16$

Beispiel: Lineare Quantisierung im Intervall $I = [-0,5; 0,5]$ mit $N = 3$ bit:



(a) Quantisiertes Signal $\tilde{s}(t)$ (blau)

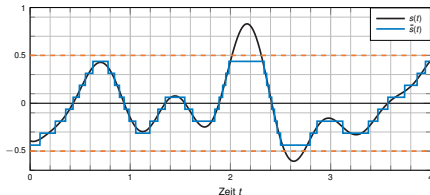


(b) Quantisierungsfehler $q_e(t) = s(t) - \tilde{s}(t)$

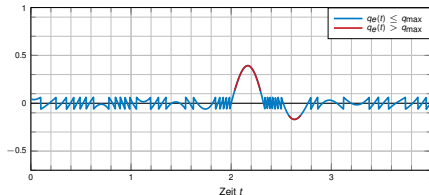
Codewort	000	001	010	011	100	101	110	111
Signalstufe	$-7/16$	$-5/16$	$-3/16$	$-1/16$	$1/16$	$3/16$	$5/16$	$7/16$

Frage: Warum liegt die höchste Signalstufe bei $7/16$ und nicht bei $1/2$?

Beispiel: Lineare Quantisierung im Intervall $I = [-0,5; 0,5]$ mit $N = 3$ bit:



(a) Quantisiertes Signal $\bar{s}(t)$ (blau)



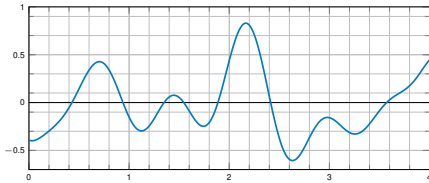
(b) Quantisierungsfehler $q_e(t) = s(t) - \bar{s}(t)$

Codewort	000	001	010	011	100	101	110	111
Signalstufe	$-7/16$	$-5/16$	$-3/16$	$-1/16$	$1/16$	$3/16$	$5/16$	$7/16$

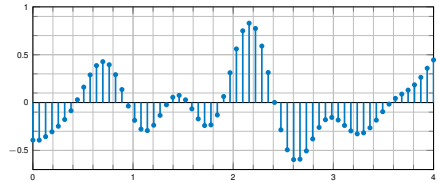
Frage: Warum liegt die höchste Signalstufe bei $7/16$ und nicht bei $1/2$?

Anmerkungen:

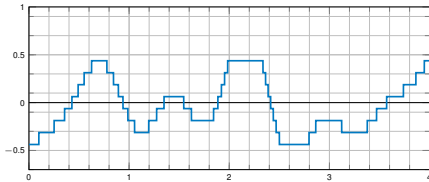
- Die Zuweisung von Codewörtern zu Signalstufen ist im Prinzip willkürlich
- Häufig wählt man jedoch einen Code, welcher die Auswirkung einzelner Bitfehler reduziert (z. B. Gray-Code: Benachbarte Codewörter unterscheiden sich nur in jeweils einer binären Ziffer, d. h. die Hamming-Distanz ist 1)



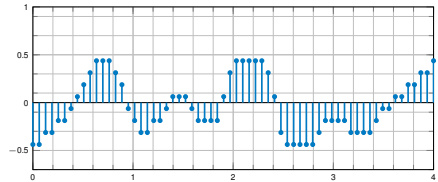
(a) Analog $s(t)$



(b) Zeitdiskret und wertkontinuierlich $\tilde{s}[n]$



(c) Zeitkontinuierlich und wertdiskret $\tilde{s}(t)$



(d) Digital $s[n]$

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Übertragungskanal

Kanaleinflüsse

Kanalkapazität

Nachrichtenübertragung

Übertragungsmedien

Literaturangaben

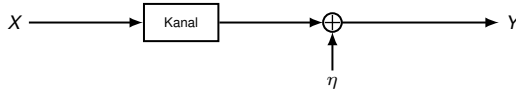
Aus dem letzten Teilkapitel sollten wir wissen:

- Was sind die Unterschiede zwischen analogen, zeitdiskreten, wertdiskreten und digitalen Signalen?
- Wie muss ein Signal abgetastet werden, so dass keine Information verloren geht?
- Unter welchen Bedingungen kann ein natürlich vorkommendes Signal aus abgetasteten und quantisierten Werten verlustfrei rekonstruiert werden?
- Wie sollten die Abtastwerte quantisiert werden, wenn innerhalb des Quantisierungsintervalls jeder Signalpegel gleich wahrscheinlich ist?

In diesem Abschnitt klären wir die folgenden Fragen:

- Welchen Einfluss hat der Übertragungskanal auf ein Signal?
- Wie hoch ist die theoretisch maximal erzielbare Übertragungsrate?

Modellvorstellung eines (linearen, zeitinvarianten) Kanals mit einem Ein- und Ausgang:



Unser Modell berücksichtigt:

- **Dämpfung** (Signalamplitude des Nutzsignals am Ausgang ist geringer als am Eingang)
- **Tiefpassfilterung** (höhere Frequenzen werden stärker gedämpft als niedrige)
- **Verzögerung** (die Übertragung benötigt eine gewisse Zeit)
- **Rauschen** in Form von **Additive White Gaussian Noise (AWGN)**¹

Wir berücksichtigen unter anderem nicht (weil zu kompliziert):

- **Interferenzen** durch andere Übertragungen
- **Reflektionen** eigener Signale
- **Verzerrungen** durch nichtlineare Filter, u.a. in Abhängigkeit des Signalpegels
- **Zeitvariante** Einflüsse, z. B. können Objekte und Personen eine Funkübertragung beeinflussen

¹ AWGN ist eine vereinfachende Modellvorstellung von Rauschprozessen. In der Realität gibt es kein AWGN.

Beispiel:

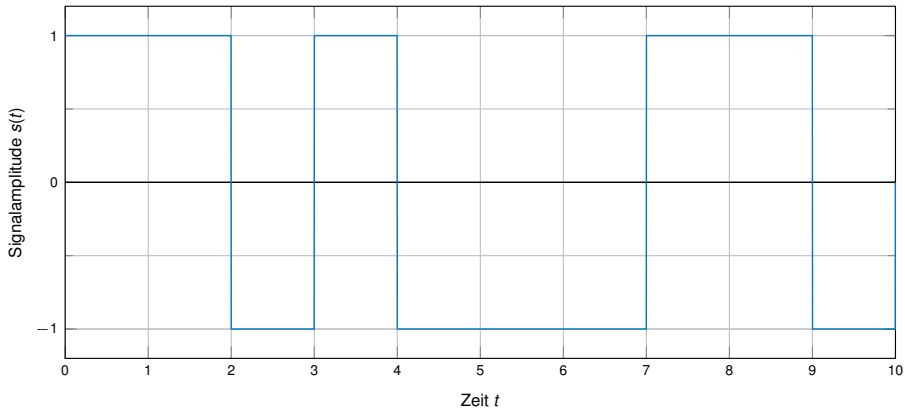


Abbildung 4: Idealisiertes Sendesignal

Beispiel:

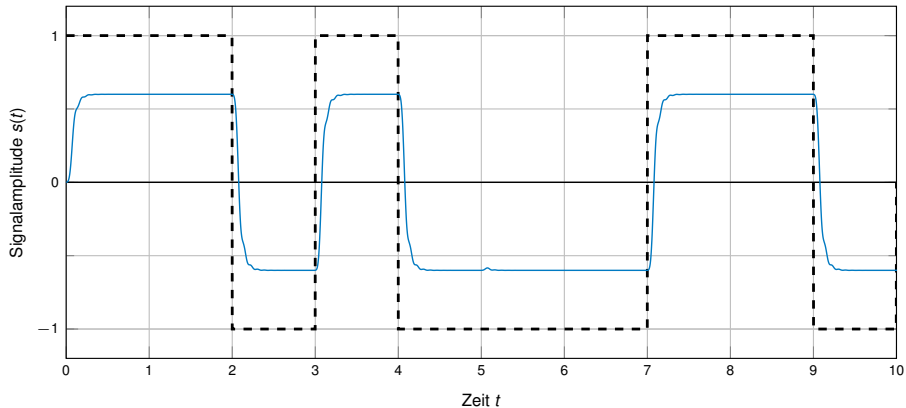


Abbildung 4: Sendesignal nach Dämpfung und Tiefpasseinflüssen durch den Kanal

Beispiel:

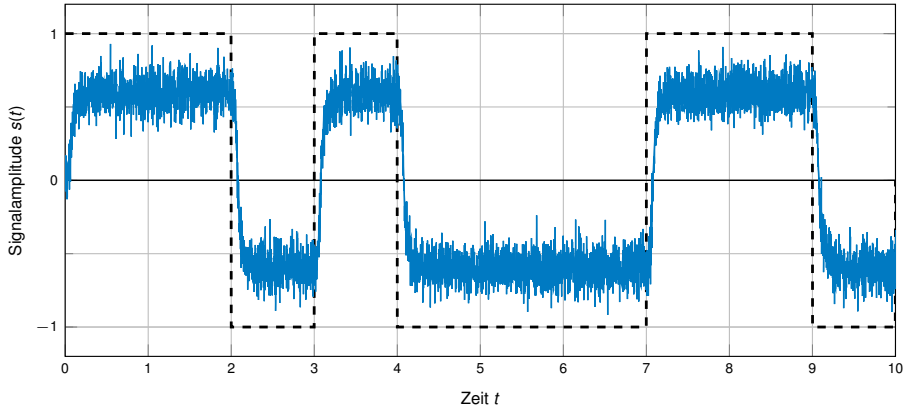


Abbildung 4: Sendesignal nach Dämpfung und Tiefpasseinflüssen durch den Kanal sowie mit AWGN

Wir haben bereits gesehen, dass

- ein Kanal wie ein Tiefpass wirkt und
- zusätzliches Rauschen die Übertragung stört.

Wegen der für Kanäle typischen Tiefpasscharakteristik kann man von einer **Kanalbandbreite B** sprechen:

- Niedrige Frequenzen passieren ungehindert (Tiefpass)
- Hohe Frequenzen werden gedämpft
- Ab einer bestimmten Frequenz ist die Dämpfung so stark, dass die betreffenden Signalanteile vernachlässigt werden können

Vereinfacht nehmen wir eine scharfe Grenze für B an:

- Frequenzanteile $|f| < B$ passieren
- Frequenzanteile $|f| \geq B$ werden gesperrt

Wie hoch ist die erzielbare Datenrate auf einem Kanal mit Bandbreite B ?

Hierfür benötigen wir einen Zusammenhang zwischen

- der Kanalbandbreite B ,
- der Anzahl M unterscheidbarer Signalstufen und
- dem Verhältnis zwischen der Leistung des Nutzsignals und des Rauschens.

Wir erinnern uns an das Abtasttheorem:

Ein auf B bandbegrenztes Signal muss mind. mit der Frequenz $2B$ abgetastet werden, um das Signal verlustfrei rekonstruieren zu können, d. h. damit keine Information verloren geht.

Anders herum betrachtet:

- Man erhält aus einem auf B bandbegrenzten Signal bis zu $2B$ **unterscheidbare**² Symbole.
- Tastet man häufiger ab, gewinnt man keine neue Information.
- Dies führt zu einer neuen Interpretation der Frequenz $f = 2B$, welche auch als **Nyquist-Rate** bezeichnet wird.

Definition: Nyquist-Rate

Sei B die Grenzfrequenz eines bandbegrenzten Kanals. Dann ist die Nyquist-Rate $f_N = 2B$

- eine untere Schranke für die minimale Abtastrate, die eine vollständige Rekonstruktion des Signals erlaubt,
- eine obere Schranke für die Anzahl an Symbolen je Zeiteinheit, die nach der Übertragung über den Kanal unterscheidbar sind.

² Hinreichend empfindliche Messsysteme vorausgesetzt

Angenommen es können nicht nur zwei sondern $M = 2^N$ unterscheidbare Symbole übertragen werden. Wie ändert sich die erzielbare Datenrate?

Wir erinnern uns an Quantisierung und Entropie:

- Mit einer Wortbreite von N bit lassen sich $M = 2^N$ diskrete Signalstufen darstellen.
- Emittiert eine Quelle alle Zeichen (Signalstufen) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, so ist die Entropie (und damit die mittlere Information) der Quelle maximal.

Folglich erhalten wir für die Übertragungsrate über einen Kanal der Bandbreite B die maximale Rate $2B \log_2(M)$ bit.

Hartleys Gesetz

Auf einem Kanal der Bandbreite B mit M unterscheidbaren Signalstufen ist die Kanalkapazität durch

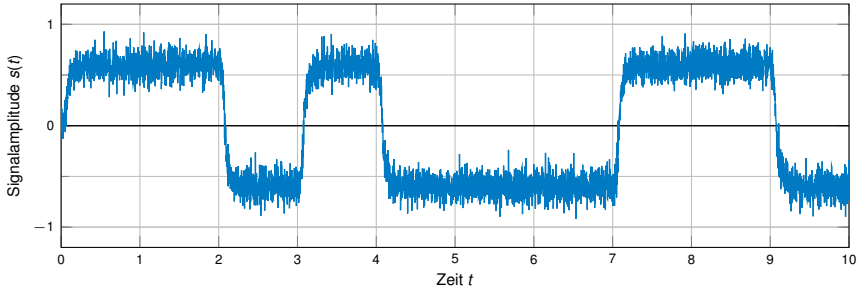
$$C_H = 2B \log_2(M) \text{ bit}$$

nach oben begrenzt.

Interessant: Wenn wir beliebig viele Signalstufen voneinander unterscheiden könnten, wäre die erzielbare Datenrate unbegrenzt! Wo ist das Problem?

Rauschen

- Rauschen macht es schwer, Signalstufen auseinanderzuhalten
- Je feiner die Signalstufen gewählt werden, desto schwieriger wird dies



Maß für die Stärke des Rauschens:

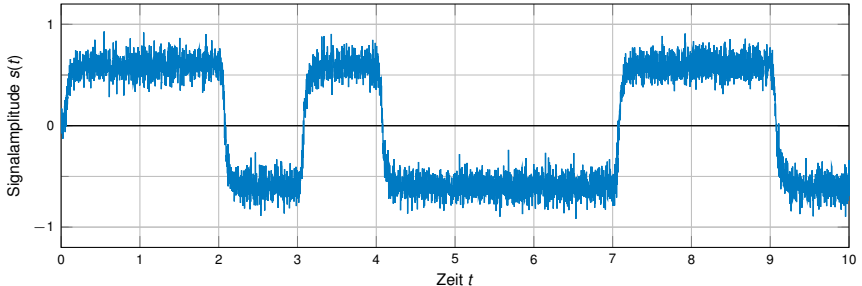
$$\text{SNR} = \frac{\text{Signalleistung}}{\text{Rauschleistung}} = \frac{P_S}{P_N}$$

Das **Signal to Noise Ratio (SNR)** wird in dB angegeben:

$$\text{SNR dB} = 10 \cdot \log_{10}(\text{SNR})$$

Rauschen

- Rauschen macht es schwer, Signalstufen auseinanderzuhalten
- Je feiner die Signalstufen gewählt werden, desto schwieriger wird dies



Maß für die Stärke des Rauschens:

$$\text{SNR} = \frac{\text{Signalleistung}}{\text{Rauschleistung}} = \frac{P_S}{P_N}$$

Beispiel: $P_S = 1 \text{ mW}$, $P_N = 0,5 \text{ mW}$

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{0,5} \right) \text{ dB} \approx 3,0 \text{ dB}$$

Das **Signal to Noise Ratio (SNR)** wird in dB angegeben:

$$\text{SNR dB} = 10 \cdot \log_{10}(\text{SNR})$$

Signalleistung

Definition (Leistung eines Signals)

Der Erwartungswert des Quadrats der Signalamplitude entspricht der **Signalleistung**. Die Varianz (Streuung) der Signalamplitude entspricht der Signalleistung ohne deren Gleichanteil und stellt die informationstragende Leistung eines Signals dar.

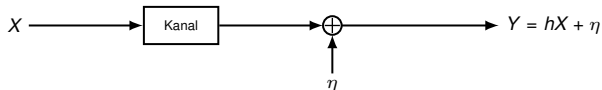
Die Signalleistung eines erwartungswertfreien³ Signals $y(t)$ (beschrieben durch die kontinuierliche Zufallsvariable Y) beträgt

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= E[(Y - E[Y])^2] = E[Y^2 - 2Y E[Y] + E[Y]^2] = E[Y^2] - 2Y E[Y] + E[Y]^2 = \Big|_{E[Y]=0} E[Y^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f_Y(\xi) d\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t) dt = P_Y. \end{aligned}$$

- Im ersten Fall wird über den Wertebereich von Y integriert und dessen zweites Moment bestimmt (welches der Varianz entspricht, da $E[Y] = 0$).
- Im zweiten Fall wird die Leistung als zeitlicher Mittelwert des Quadrats der Signalamplitude bestimmt.

³ Als „erwartungsfrei“ bezeichnet man im üblichen Sprachgebrauch eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert null ist. Dies kann zu Missverständnissen führen, da es auch Zufallsvariablen gibt, deren Erwartungswert nicht existiert.

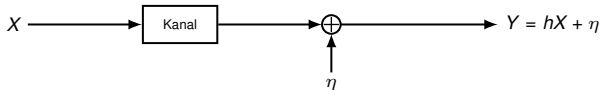
- Keine Quantisierungsfehler (da wir nur an der Rausch-Abhängigkeit interessiert sind)
- Das (erwartungswertfreie) Sendesignal X werde durch den Kanal um den Faktor $h < 1$ gedämpft und von (erwartungswertfreiem) **unabhängigem** additivem Rauschen η überlagert



Für die Signalleistung P_Y am Kanalausgang erhalten wir

$$P_Y = \text{Var}[Y] = \text{Var}[hX + \eta] = h^2 \text{Var}[X] + \text{Var}[\eta].$$

- Keine Quantisierungsfehler (da wir nur an der Rausch-Abhängigkeit interessiert sind)
- Das (erwartungswertfreie) Sendesignal X werde durch den Kanal um den Faktor $h < 1$ gedämpft und von (erwartungswertfreiem) **unabhängigem** additivem Rauschen η überlagert



Für die Signalleistung P_Y am Kanalausgang erhalten wir

$$P_Y = \text{Var}[Y] = \text{Var}[hX + \eta] = h^2 \text{Var}[X] + \text{Var}[\eta].$$

Für den Spezialfall, dass $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$ (**Gaussian Channel**), lässt sich zeigen, dass ein ebenfalls normalverteiltes $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ die Datenrate maximiert. Wir erhalten in diesem Fall

$$P_Y = h^2 \sigma_X^2 + \sigma_\eta^2.$$

Setzt man nun P_Y ins Verhältnis zur Rauschleistung $P_N = \sigma_\eta^2$, so erhalten wir

$$\frac{P_Y}{P_N} = \frac{h^2 \sigma_X^2 + \sigma_\eta^2}{\sigma_\eta^2} = 1 + \frac{h^2 \sigma_X^2}{\sigma_\eta^2} = 1 + \frac{P_S}{P_N} = 1 + \text{SNR}.$$

P_S ist die **Leistung des Nutzsignals**, die beim Empfänger ankommt.

Shannon-Hartley-Theorem

Auf einem Kanal der Bandbreite B mit additiven weißen Rauschen mit Rauschleistung P_N und Signalleistung P_S beträgt die obere Schranke für die erreichbare Datenrate

$$C_S = B \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) \text{ bit.}$$

Herleitung des Theorems: siehe Shannons Veröffentlichung [Communication in the Presence of Noise](#) von 1949 [1].

Shannon-Hartley-Theorem

Auf einem Kanal der Bandbreite B mit additiven weißen Rauschen mit Rauschleistung P_N und Signalleistung P_S beträgt die obere Schranke für die erreichbare Datenrate

$$C_S = B \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) \text{ bit.}$$

Herleitung des Theorems: siehe Shannons Veröffentlichung [Communication in the Presence of Noise](#) von 1949 [1].

Vergleich mit Hartleys Gesetz (aufschlussreich!):

$$C_H = 2B \log_2(M) = 2B \log_2 \left(\frac{b - a}{\Delta} \right).$$

Shannon-Hartley-Theorem

Auf einem Kanal der Bandbreite B mit additiven weißen Rauschen mit Rauschleistung P_N und Signalleistung P_S beträgt die obere Schranke für die erreichbare Datenrate

$$C_S = B \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) \text{ bit.}$$

Herleitung des Theorems: siehe Shannons Veröffentlichung [Communication in the Presence of Noise](#) von 1949 [1].

Vergleich mit Hartleys Gesetz (aufschlussreich!):

$$C_H = 2B \log_2(M) = 2B \log_2 \left(\frac{b - a}{\Delta} \right).$$

- Die Intervallgrenzen a, b beziehen sich hier auf das unquantisierte Signal
- Mit $\alpha = a + \Delta/2$ und $\beta = b - \Delta/2$ als minimale bzw. maximale quantisierte Signalamplitude erhalten wir

$$C_H = 2B \log_2 \left(\frac{\beta - \alpha + \Delta}{\Delta} \right) = B \log_2 \left(\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{\Delta} \right)^2 \right) = B \log_2 \left(1 + \frac{(\beta - \alpha)^2}{\Delta^2} + 2 \frac{\beta - \alpha}{\Delta} \right). \quad (1)$$

Shannon-Hartley-Theorem

Auf einem Kanal der Bandbreite B mit additiven weißen Rauschen mit Rauschleistung P_N und Signalleistung P_S beträgt die obere Schranke für die erreichbare Datenrate

$$C_S = B \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) \text{ bit.}$$

Herleitung des Theorems: siehe Shannons Veröffentlichung [Communication in the Presence of Noise](#) von 1949 [1].

Vergleich mit Hartleys Gesetz (aufschlussreich!):

$$C_H = 2B \log_2(M) = 2B \log_2 \left(\frac{b-a}{\Delta} \right).$$

- Die Intervallgrenzen a, b beziehen sich hier auf das unquantisierte Signal
- Mit $\alpha = a + \Delta/2$ und $\beta = b - \Delta/2$ als minimale bzw. maximale quantisierte Signalamplitude erhalten wir

$$C_H = 2B \log_2 \left(\frac{\beta - \alpha + \Delta}{\Delta} \right) = B \log_2 \left(\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{\Delta} \right)^2 \right) = B \log_2 \left(1 + \frac{(\beta - \alpha)^2}{\Delta^2} + 2 \frac{\beta - \alpha}{\Delta} \right). \quad (1)$$

Genau wie bei C_S erhalten wir im Logarithmus $1 + \text{SNR}$, wobei das SNR diesmal ein [Quantisierungsrauschen](#) ist:

- C_S berücksichtigt **nur** additives Rauschen des Kanals, aber **keine** Quantisierungsfehler.
- C_H berücksichtigt **nur** die Signalstufen und damit das „Quantisierungsrauschen“, aber **keine** Kanaleinflüsse.
- Der fehlende gemischte Term in (1) verglichen mit C_S liegt in der [Unabhängigkeitsannahme](#) des Nutzsignals und des Rauschens begründet ($E[x\eta] = E[x]E[\eta]$). Der Quantisierungsfehler ist natürlich nicht unabhängig vom Eingangssignal – aus diesem Grund lässt sich (1) nicht ohne Näherung in die selbe Form wie C_S bringen.

Die Kanalkapazität C ist durch zwei Faktoren beschränkt:

- **Die Anzahl M der unterscheidbaren Symbole**
Selbst ein rauschfreier Kanal hilft nichts, wenn wir nur zwei Symbole nutzen (können).
- **Signal-to-Noise Ratio (SNR)**
Ist das Signal-zu-Rausch-Verhältnis SNR zu gering, muss ggf. der Abstand Δ zwischen den Signalstufen erhöht und damit die Anzahl unterscheidbarer Symbole verringert werden, um eine zuverlässige Unterscheidung gewährleisten zu können.

Für die tatsächliche Kanalkapazität C gilt also folgende obere Schranke:

$$C < \min \{C_H, C_S\} = \min \{2B \log_2(M), B \log_2(1 + \text{SNR})\} \text{ bit.}$$

Anmerkungen:

- Das ist nur ein Modell – mit stark vereinfachenden Annahmen.
 - Wie man einen Kanalcode mit genau der richtigen Menge Redundanz konstruieren kann, so dass C maximiert wird, ist ein offenes Problem der Informationstheorie. (← Challenge!)
 - Wir sprechen hier von Datenraten im informationstheoretischen Sinn, d. h. die zu übertragenden Daten liegen redundanzfrei vor. Dies ist in praktischen Systemen nie gewährleistet:
 - Nutzdaten werden vor dem Senden nicht zwangsläufig (und niemals optimal) komprimiert
 - Zusätzlich zu den Nutzdaten werden **Kontrollinformationen (Header)** benötigt (→ später)
- ⇒ Die tatsächlich erzielbare Netto-Datenrate liegt unterhalb der informationstheoretischen Schranke.

Kapitel 1: Physikalische Schicht

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

Quellenkodierung [4]

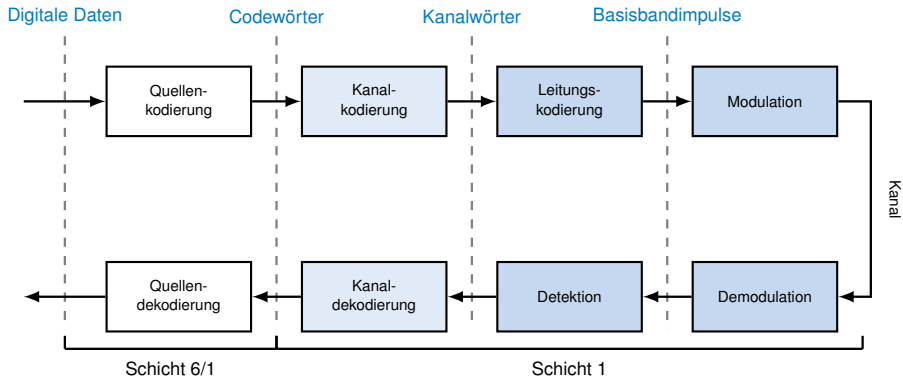
Kanalkodierung [4]

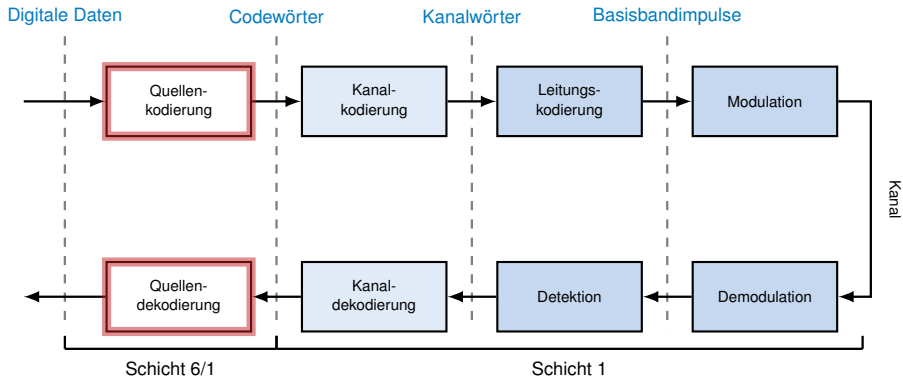
Leitungskodierung

Modulation [6]

Übertragungsmedien

Literaturangaben





Quellenkodierung (Source Coding)

Ziel der Quellenkodierung ist es, durch Abbildung von Bitsequenzen auf Codewörter **Redundanz** aus den zu übertragenden Daten zu entfernen. Dies entspricht einer **verlustlosen Datenkompression**.

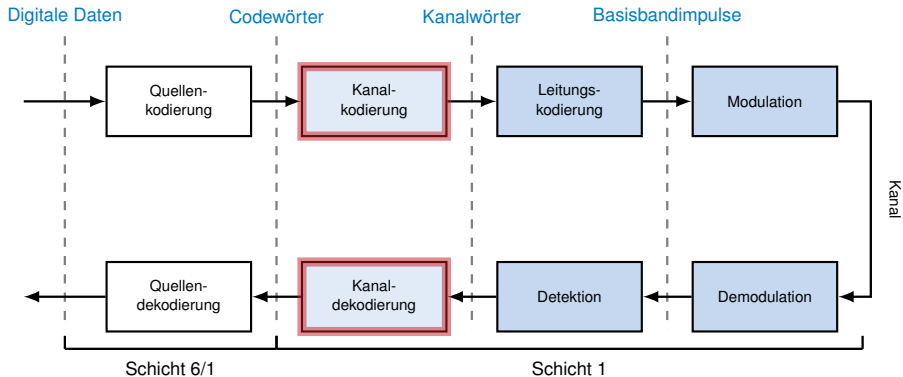
Die Quellenkodierung kann in unterschiedlichen Schichten des ISO/OSI-Modell vorkommen:

- Datenkompression kann auf der Darstellungsschicht (Schicht 6) stattfinden
- Daten können bereits in komprimierter Form vorliegen (verlustlos komprimierte Dateiformate, z. B. ZIP, PNG)
- Im Mobilfunkbereich (digitale Sprachübertragung) kann die Quellenkodierung einer niedrigen Schicht zugeordnet werden
- In lokalen Netzwerken (Ethernet, WLAN) findet i. d. R. keine Quellenkodierung statt

Beispiele:

- Huffman-Code
- Lempel-Ziv / Lempel-Ziv-Welch (LZW)
- Run-Length-Encoding (RLE)

→ In Kapitel 5 gehen wir auf den Huffman-Code ein



Kein realisierbarer Übertragungskanal ist perfekt. Ein Maßstab dafür ist die **Bitfehlerwahrscheinlichkeit** p_e :

- Bei Ethernet über Kupferkabel charakteristisch: $p_e \approx 10^{-8}$
- Bei WLAN charakteristisch: $p_e \approx 10^{-6}$ oder mehr
- Bei ungesicherter Funkübertragung charakteristisch: $p_e \approx 10^{-4}$ oder mehr

Gedankenspiel:

- Ungesicherte Funkverbindung mit $p_e = 10^{-4}$, Fehler unabhängig und gleichverteilt
- Paketlänge $L = 1500 \text{ B} = 12\,000 \text{ bit}$
- $\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Paket“}] = (1 - 10^{-4})^{12000} \approx 30 \%$

⇒ 70 % der übertragenen Datenpakete würden mind. einen Bitfehler enthalten.

Kein realisierbarer Übertragungskanal ist perfekt. Ein Maßstab dafür ist die **Bitfehlerwahrscheinlichkeit** p_e :

- Bei Ethernet über Kupferkabel charakteristisch: $p_e \approx 10^{-8}$
- Bei WLAN charakteristisch: $p_e \approx 10^{-6}$ oder mehr
- Bei ungesicherter Funkübertragung charakteristisch: $p_e \approx 10^{-4}$ oder mehr

Gedankenspiel:

- Ungesicherte Funkverbindung mit $p_e = 10^{-4}$, Fehler unabhängig und gleichverteilt
- Paketlänge $L = 1500 \text{ B} = 12\,000 \text{ bit}$
- $\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Paket“}] = (1 - 10^{-4})^{12000} \approx 30 \%$

⇒ 70 % der übertragenen Datenpakete würden mind. einen Bitfehler enthalten.

Kanalkodierung (Channel Coding)

Ziel der Kanalkodierung ist es, den zu übertragenden Daten **gezielt Redundanz** hinzuzufügen, so dass eine möglichst große Anzahl an

- Bitfehlern erkannt und
- korrigiert werden kann.

Beispiel: Unkomprimiertes Bild (Bitmap) über einen verlustbehafteten Kanal versendet



ohne Kanalkodierung

mit Kanalkodierung

Geringfügige Übertragungsfehler sind in analogen Systemen tolerierbar:

- Rauschen / Knacksen bei einer Telefonverbindung
- „Schnee“ im analogen Fernsehen
- UKW-Radio

In digitalen Systemen können Übertragungsfehler schwerwiegende Konsequenzen haben, z. B.:

- Übertragung komprimierter Daten (ggf. Fehlerfortpflanzung bei der Dekodierung)
- Übertragung verschlüsselter Daten (ggf. Fehlerfortpflanzung bei der Entschlüsselung)
- Fehlerfreie Übertragung kann gefordert sein (z. B. heruntergeladenes Programm kann schon bei einzel-nem Bitfehler unbrauchbar sein)

Es werden also zusätzliche Protokolle und Mechanismen benötigt, um trotz Kanalkodierung auftretende Übertragungsfehler

- zumindest zu erkennen und
- bei Bedarf eine Übertragung zu wiederholen.

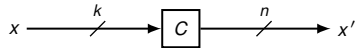
⇒ Zusammenspiel von **Prüfsummen** und **Quittungsprotokollen**, typischerweise auf Schichten 2, 4 bzw. 7.

Kanalkodierung [4]

Blockcodes

Blockcodes unterteilen den Datenstrom

- in Blöcke der Länge k und
- übersetzen diese in Kanalwörter der Länge $n > k$ wobei
- die zusätzlichen $n - k$ bit für Fehlererkennung und Rekonstruktion verwendet werden.



Das Verhältnis $R = \frac{k}{n}$ wird als **Coderate** bezeichnet.

Kanalkodierung [4]

Blockcodes

Blockcodes unterteilen den Datenstrom

- in Blöcke der Länge k und
- übersetzen diese in Kanalwörter der Länge $n > k$ wobei
- die zusätzlichen $n - k$ bit für Fehlererkennung und Rekonstruktion verwendet werden.



Das Verhältnis $R = \frac{k}{n}$ wird als **Coderate** bezeichnet.

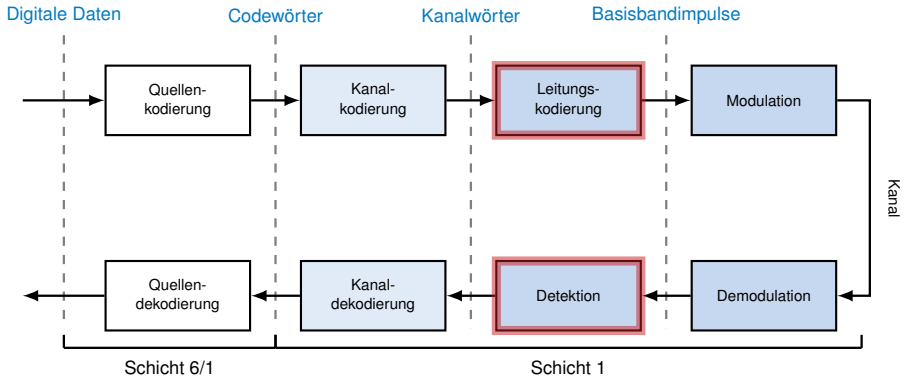
Beispiel: Repetition Code

- $k = 1, n = 3$, Abbildung: $0 \mapsto 000, 1 \mapsto 111$
- Dekodierfehler, wenn mind. 2 bit pro Block verfälscht wurden:

$$\Pr[\text{„Dekodierfehler“}] = \binom{3}{2} p_e^2 (1 - p_e) + \binom{3}{3} p_e^3 \approx \Big|_{p_e=10^{-4}} 3 \cdot 10^{-8}$$

- Neues Problem:
 - Die zu sendende Anzahl an Bits wird verdreifacht
 - Im fehlerfreien Fall würde die erzielbare Datenrate also auf $R = 1/3$ sinken

⇒ Kosten-/Nutzenverhältnis zwischen Fehlerwahrscheinlichkeit und Redundanz abhängig von der momentanen Bitfehlerrate



Definition: Leitungscodes

Leitungscodes (nicht zu verwechseln mit **Kanalcodes**) definieren die Abfolge von einer bestimmten Art von Grundimpulsen, welche Bits oder Gruppen von Bits repräsentieren. Eine solche Abfolge von Grundimpulsen wird **Sendeimpuls** genannt.

Im Kontext von Leitungscodes verstehen wir unter einem **Symbol** eine phys. messbare Veränderung des Zeitsignals.

Wichtige Eigenschaften von Leitungscodes:

- Anzahl der Signalstufen (binär, ternär, ...)
- Anzahl kodierter Bits pro Symbol
- Schrittgeschwindigkeit (Symbolrate / Baudrate), Einheit bd

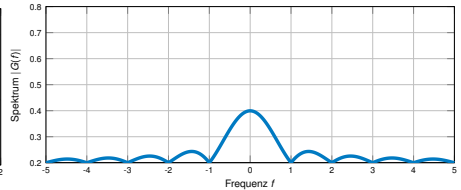
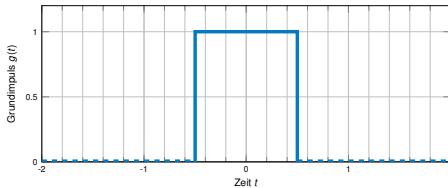
Optionale Eigenschaften von Leitungscodes:

- Taktrückgewinnung
- Gleichstromfreiheit
- Bereitstellung von Steuerzeichen (4B5B-Kodierung → später)

Je nach Art der verwendeten Grundimpulse und deren Abfolge haben Leitungscodes Einfluss auf die benötigte Kanalbandbreite. Als Daumenregel gilt: **Je mehr abrupte Signalwechsel stattfinden, desto breiter ist das benötigte Spektrum.** (s. Beispiele)

Leitungskodierung

Grundimpulse: Rechteckimpuls



$$g(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

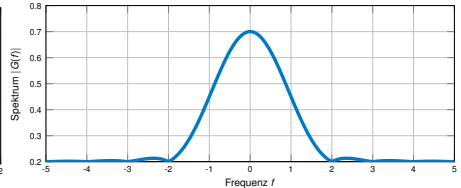
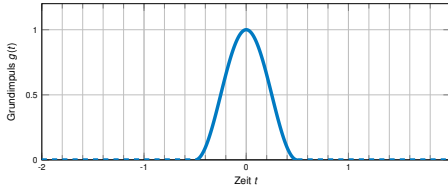
Vorteile

- Einfachste Darstellung im Zeitbereich
- Grundlage für verschiedene Sendepulse (→ später)

Nachteile

- Abrupte Signalwechsel praktisch schwer umsetzbar
- Langsam abklingendes Spektrum \Rightarrow hohe Frequenzanteile

Leitungskodierung

Grundimpulse: \cos^2 -Impuls

$$g(t) = \begin{cases} (\cos(2\pi t))^2 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad G(f) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin(\pi(f-1))}{f-1} + \frac{2\sin(\pi f)}{f} + \frac{\sin(\pi(f+1))}{f+1} \right)$$

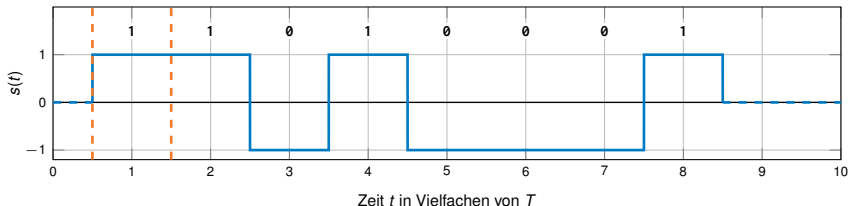
Vorteile

- Einfache praktische Umsetzung
- Schnell abklingendes Spektrum, da wenig hohe Frequenzanteile

Nachteile

- Die maximale Signalamplitude $g(t) = 1$ wird nur zum Zeitpunkt $t = 0$ erreicht
- Dadurch erschwerte Abtastung wenn Sender und Empfänger nicht taktsynchron sind

Leitungscode: Non-Return-To-Zero (NRZ)

**Kodiervorschrift:**

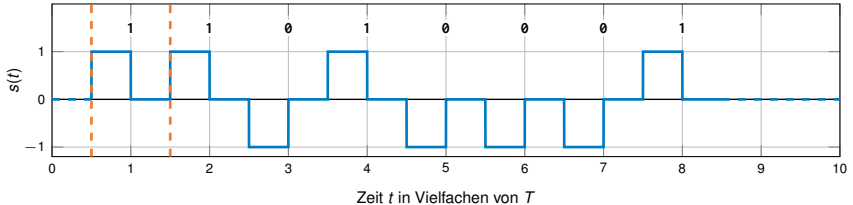
- Sendeimpuls $g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ mit Periodendauer T
- Mögliche Zuweisung der Gewichte $d_n = \begin{cases} 1 & b_n = 1 \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Binärer Code (lediglich zwei Signalstufen)
- Effizienz 1 Symbol/bit
- Keine Taktrückgewinnung (lange Null- oder Einsfolgen)
- Keine Gleichstromfreiheit
- Relativ breites Spektrum

Leitungskodierung

Leitungscode: Return-To-Zero (RZ)

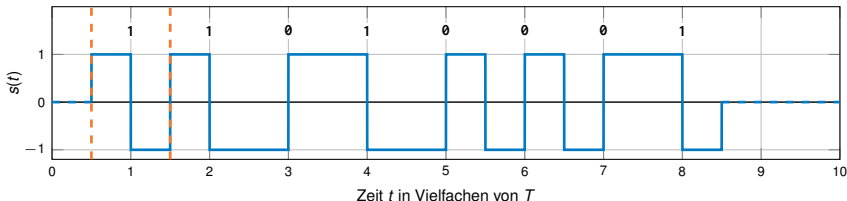


Kodiervorschrift:

- Sendeimpuls $g(t) = \text{rect}\left(\frac{2t+1/2}{T}\right)$ mit Periodendauer T
- Mögliche Zuweisung der Gewichte $d_n = \begin{cases} 1 & b_n = 1 \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Binärer Code (lediglich zwei Signalstufen)
- Effizienz 2 Symbole/bit
- Taktrückgewinnung durch erzwungene Pegelwechsel einfach
- Keine Gleichstromfreiheit
- Breiteres Spektrum als NRZ

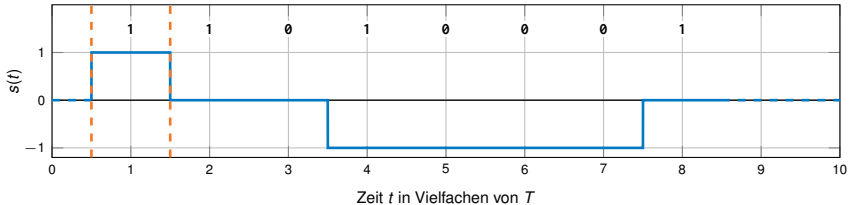
**Kodiervorschrift:**

- Grundimpuls $g(t) = \text{rect}\left(\frac{2t+1/2}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{2t-1/2}{T}\right)$ mit Periodendauer T
- Mögliche Zuweisung der Gewichte $d_n = \begin{cases} 1 & b_n = 1 \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Binärer Code (lediglich zwei Signalstufen)
- Effizienz 2 Symbole/bit
- Taktrückgewinnung durch erzwungene Pegelwechsel einfach
- Gleichstromfreiheit gewährleistet, da jeder Grundimpuls für sich gleichstromfrei ist
- Sehr breites und langsam abklingendes Spektrum

Leitungscode: Multi-Level-Transmit 3 (MLT3)

**Kodiervorschrift:**

- Grundimpuls $g(t) = \text{rect}(t/T)$ (Rechteckimpuls) mit Periodendauer T
- Gewichte $d_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n b_k\right)$ (\rightarrow abhängig von der Anzahl der **bislang** beobachteten 1-Bits)
- Sendesignal ist definiert als $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n g(t - nT)$

Eigenschaften:

- Terner Code (drei Signalstufen)
- Effizienz 1 bit/Symbol
- Keine Taktrückgewinnung (lange Folge gleicher Bits)
- Keine Gleichstromfreiheit
- Schmales Spektrum, da die Grundperiode durch den periodischen Signalverlauf reduziert wird

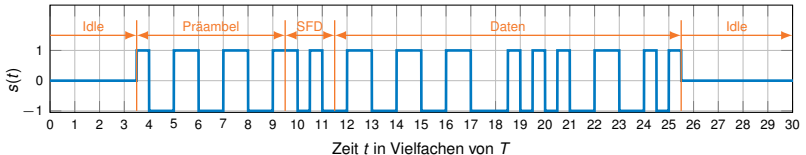
Offene Fragen: Wie kann der Empfänger erkennen,

- ob detektierte Symbole überhaupt Daten repräsentieren (Medium könnte „idle“ sein) und
- wie kann der Beginn bzw. das Ende einer Nachricht erkannt werden?

Möglichkeit 1: Coderegelverletzung

- Ist das Medium idle, können ungültige Basisbandimpulse gesendet werden
- Vor Beginn einer Nachricht kann eine fest definierte Anzahl alternierender Bits gesendet werden (**Präambel**)
- Beginn der Nachricht wird durch eine zweite Sequenz angezeigt (**Start Frame Delimiter**)
- Dies funktioniert mit NRZ, RZ und Manchester Code (z. B. Nullpegel), nicht aber mit MLT3 (Nullpegel bedeutet hier eine Folge von 0-Bits)

Beispiel: Manchester-Code mit Präambel



- Präambel ermöglicht Taktsynchronisation
- Start Frame Delimiter (SFD) am Ende der Präambel signalisiert Beginn der Nachricht
- Coderegelverletzung (Nullpegel) zeigt Idle-Zustand an
- Verwendet bei [IEEE 802.3a/i](#) (10 Mbit/s Ethernet über Koaxial- bzw. Twisted-Pair-Kabel → später)

Möglichkeit 2: Steuerzeichen

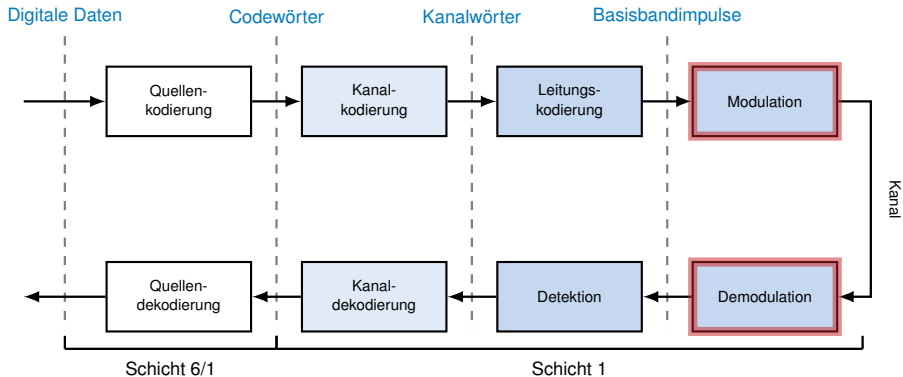
- Definiere einen Blockcode, welcher Kanalwörter in Gruppen von k Bits unterteilt und auf $n > k$ Bits abbildet
- Dieser Blockcode dient **nicht der Fehlerkorrektur** (Aufgabe der Kanalkodierung), sondern lediglich der **Bereitstellung von Steuerzeichen**
- Die Abbildung kann dabei so gewählt sein, dass bei der Übertragung gültiger Kanalwörter
 - Taktrückgewinnung und
 - Gleichstromfreiheitauch mit Leitungscodes wie NRZ, RZ und MLT3 möglich werden.
- Ungültige Codewörter, die weder Datenwörter noch Steuerzeichen darstellen, können zur **Fehlererkennung** verwendet werden

Beispiel 1: 4B5B-Code

- $k = 4$ bit werden auf $n = 5$ bit abgebildet
- Die Zuordnung zwischen Kanalwörtern und Codewörtern wird so gewählt, dass in jedem Block von 5 bit mind. ein Signalwechsel auftritt (Taktrückgewinnung bei NRZ und MLT3)
- Die zusätzlichen Codewörter werden als Steuerzeichen verwendet (Start/Stop, Idle, ...)
- Verwendet bei [IEEE 802.3u](#) (100 Mbit/s FastEthernet über Twisted-Pair-Kabel)

Beispiel 2: 8B10B-Code

- $k = 8$ bit werden auf $n = 10$ bit abgebildet
- Zuordnung ähnlich wie bei 4B5B, allerdings wird hier im zeitlichen Mittel auch Gleichstromfreiheit gewährleistet
- Verwendet u. a. bei PCIe, Serial-ATA, USB ...



Bislang haben wir nur Basisbandsignale betrachtet:

- Zeitlich verschobene Sendeimpulse werden gewichtet.
- Zeitlich begrenzte Sendeimpulse (wir haben nur solche kennengelernt) besitzen ein **unendlich ausge-dehtes Spektrum**.
- Sofern der Übertragungskanal exklusiv für die Basisbandübertragung zur Verfügung steht, ist das zu-nächst kein Problem.

Was ist, wenn der Kanal von mehreren Übertragungen **zeitgleich verwendet wird?**

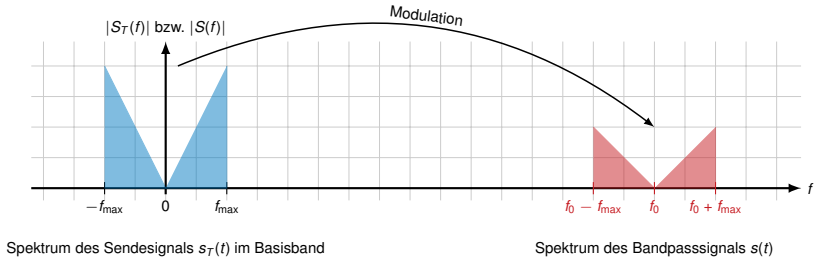
- Das Basisbandsignal (bzw. dessen Grundimpulse) wird **tiefpass-gefiltert**, was eine Begrenzung des Spektrums (und damit einer leichten Verfälschung des Zeitsignals) entspricht.
- Anschließend kann das gefilterte Basisbandsignal auf ein **Trägersignal moduliert** werden.
- Dies entspricht einer **Verschiebung des Spektrums** (Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Ver-schiebung im Frequenzbereich).
- Teilen sich mehrere Übertragungen auf diese Art einen Kanal, so sprechen wir von **Frequency Division Multiplex (FDM)**.

Prinzipieller Ablauf digitaler Modulationsverfahren

- Die Sendepulse $g(t)$ werden mittels Tiefpassfilterung auf eine maximale Frequenz f_{\max} beschränkt. Die so gefilterten Impulse bezeichnen wir als $g_T(t)$.
- Das ebenfalls bandbegrenzte Sendesignal $s_T(t)$ wird auf ein **Trägersignal** der Frequenz f_0 aufmoduliert:

$$s(t) = s_T(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot g_T(t - nT) \right) \sin(2\pi f_0 t).$$

Schematischer Ablauf im Frequenzbereich:

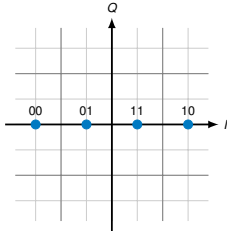


4-ASK (Amplitude Shift Keying)

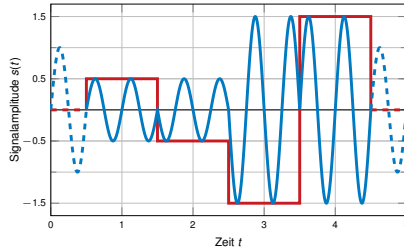
- Es werden 4 Signalstufen unterschieden \Rightarrow 2 bit/Symbol
- Es wird nur die Amplitude des Trägersignals moduliert

Beispiel: Signalraum $S = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$

- Je zwei Bits des Datenstroms werden auf ein Symbol $d \in S$ abgebildet, z. B. $00 \mapsto -\frac{3}{2}$, $01 \mapsto -\frac{1}{2}$, ...
- Die Symbolsequenz d_n verändert die Amplitude eines Grundimpulses (z. B. Rechteckimpuls)
- Das so entstehende Basisbandsignal wird mit einem Trägersignal multipliziert (Modulation)



(a) Signalraumzuordnung

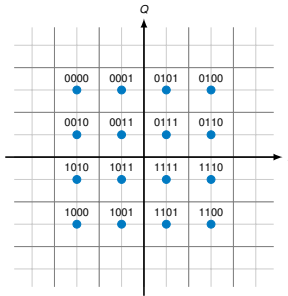


(b) Sendesignal $s(t)$ (blau), Modulationssignal $s_T(t)$ (rot)

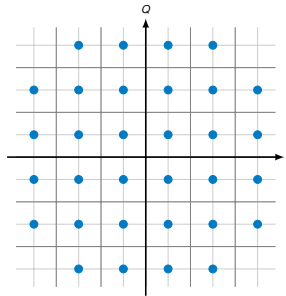
Quadratur-Amplituden-Modulation (QAM)

- Man kann kosinus- und sinus-förmige Trägersignale mischen
- Trennung durch Orthogonalität von Sinus und Kosinus möglich
- Der Kosinus wird als **Inphase-Anteil**, der Sinus als **Quadratur-Anteil** bezeichnet
- Die Datenrate lässt sich auf diese Weise verdoppeln

$$s(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_{In} \cdot g_T(t - nT) \right) \cos(2\pi f_0 t) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_{Qn} \cdot g_T(t - nT) \right) \sin(2\pi f_0 t)$$



(c) 16-QAM



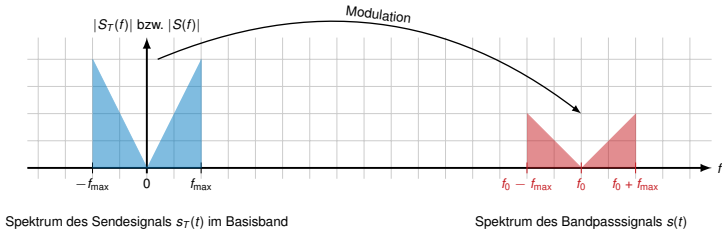
(d) 32-QAM

- QAM verdoppelt die Datenrate nochmals?
- Sensationell, wir haben Shannon widerlegt!

- QAM verdoppelt die Datenrate nochmals?
- Sensationell, wir haben Shannon widerlegt!

Natürlich nicht: [7] Durch die Frequenzverschiebung belegt das Bandpasssignal die **doppelte Bandbreite** im Vergleich zum Basisbandsignal. Es entsteht ein

- **oberes Seitenband**, welches den nicht-negativen Frequenzanteilen im Basisband entspricht, sowie ein
- **unteres Seitenband**, welches den nicht-positiven Frequenzanteilen im Basisband entspricht.



- Durch die Modulation wurde also die benötigte Bandbreite verdoppelt
- Dieser „verlorene Freiheitsgrad“ kann durch die Mischung von Sinus- und Kosinus-Trägern wieder kompensiert werden.

Die obere Schranke für die erzielbare Datenrate gilt natürlich weiterhin.

Was wir wissen sollten:

- Was sind die Unterschiede und Ziele zwischen **Quellenkodierung**, **Kanalkodierung** und **Leitungskodierung**?
- Wie funktionieren einfache **Block-Codes**, z. B. Repetition-Code?
- Warum werden trotz aller Kodierverfahren zusätzliche Verfahren zur **Fehlererkennung** benötigt?
- Wie funktionieren die in diesem Kapitel eingeführten **LeitungsCodes**?
- Was sind die jeweiligen Vor- und Nachteile der hier eingeführten LeitungsCodes?
- Wie könnte man diese LeitungsCodes auf mehr als zwei oder drei Signalstufen erweitern?
- Was ist das Prinzip von **Modulationsverfahren**?
- Wie funktioniert **Frequenzmultiplex**?
- Wie hängen Signalraumzuordnung, Modulationsverfahren und die erzielbare Datenrate zusammen?
- Wie funktioniert **Phase Shift Keying (PSK)** und wie sieht eine gültige Signalraumzuordnung für PSK aus?

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

Übertragungsmedien

- Elektromagnetische Wellen

- Koaxialleiter

- Twisted-Pair-Kabel

- Optische Leiter

Literaturangaben

Wir unterscheiden zwischen

- leitungsgebundener und
- nicht-leitungsgebundener Übertragung

sowie zwischen

- akustischen und
- elektromagnetischen Wellen.

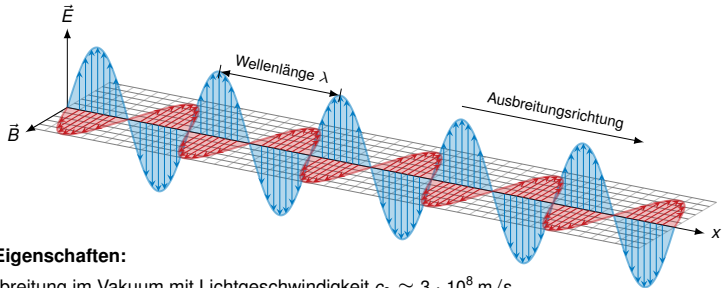
Im Bereich der digitalen Datenübertragung kommen überwiegend elektromagnetische Wellen zum Einsatz. Wenige Ausnahmen bilden hier

- Tonwahlverfahren (z. B. „Einwahl“ bei alten Modemverbindungen) sowie
- einige experimentelle Verfahren, z. B. kabellose Kommunikation unter Wasser.

Im Folgenden verschaffen wir uns einen Überblick über

- Frequenzen im EM-Spektrum,
- was EM-Wellen überhaupt sind und
- und welche Arten von Übertragungsmedien bei leitungsgebundenen Verfahren häufig zum Einsatz kommen.

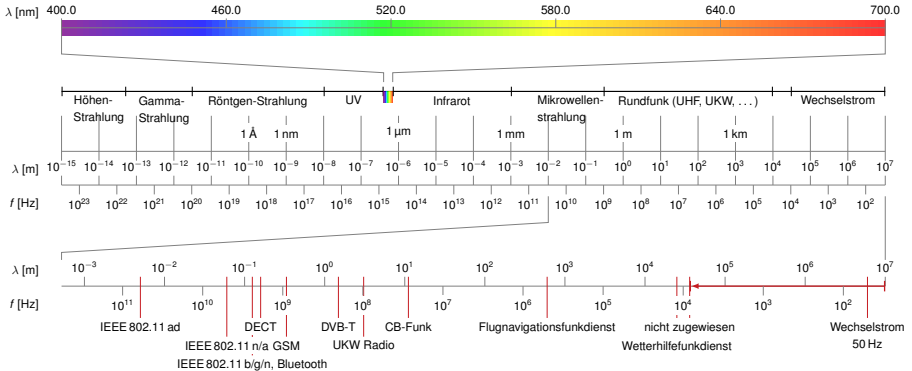
Elektromagnetische Wellen bestehen aus einer elektrischen (\vec{E}) und magnetischen (\vec{B}) Komponente, welche jeweils orthogonal zueinander und zur Ausbreitungsrichtung stehen:



Wichtige Eigenschaften:

- Ausbreitung im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- Im Gegensatz zu Schallwellen wird kein Medium zur Ausbreitung benötigt
- Innerhalb eines Mediums (Leiter, Luft) beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \nu c_0$, wobei $0 < \nu < 1$ als **relative Ausbreitungsgeschwindigkeit** bezeichnet wird, z. B. $\nu \approx 0.7$ in Lichtwellenleitern oder $\nu \approx 2/3$ in Koaxialleitern
- Die **Wellenlänge** λ beschreibt die räumliche Ausdehnung einer Wellenperiode im Medium
- Die **Frequenz** f ergibt sich aus Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge im Medium zu $f = c/\lambda = c_0/\lambda_0$
- Beim Übergang vom Vakuum in ein Medium bleibt die Frequenz f konstant, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit ändern sich proportional zueinander

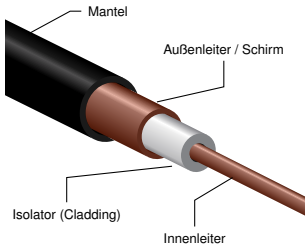
Die untenstehende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung des EM-Spektrums:



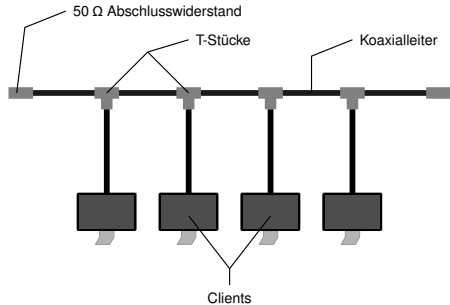
Zur digitalen Datenübertragung werden überwiegend genutzt:

- das Frequenzband zwischen einigen MHz und ~ 60 GHz (WLAN nach IEEE 802.11 ad),
- das optische Spektrum bis zu etwa $\lambda \approx 1$ nm sowie
- Frequenzen im Basisband bis zu einigen hundert MHz.

- Eingesetzt u. a. für IEEE 802.3a („10Base2 Ethernet“, 10 Mbit/s)
 - Bildet ein gemeinsamen Bus, an den alle Teilnehmer angeschlossen sind
 - Zu jeder Zeit kann nur ein Teilnehmer senden
- Weitere Einsatzbereiche:
 - TV-Kabelnetz
 - Hochfrequenztechnik (Verbindung zu Antennen in kabellosen Netzwerken)
 - Twinax-Kabel für 40 und 100 Gbit Ethernet auf kurze Distanzen (~ 7 m)



(a) Schematischer Aufbau [5]



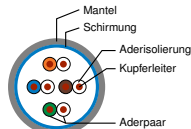
(b) 10Base2 Bus (IEEE 802.3a)

Allgemeines

- 2 oder 4 Aderpaare aus Kupferlitzen
- Jedes Aderpaar ist verdreht (daher die Bezeichnung **twisted pair**)
- Zweite Ader eines Paares führt inversen Signalpegel (differentielle Kodierung)
- Verdrehung und inverse Signalpegel reduzieren **Übersprechen (Crosstalk)**
- RJ-45 oder schmalerer RJ-11 Steckverbinder

Verwendung

- Lokale Netzwerke (die meisten Ethernet-Standards) mit RJ-45 Steckverbinder
- Telefonanschluss (analog und ISDN) mit RJ-11 Steckverbinder



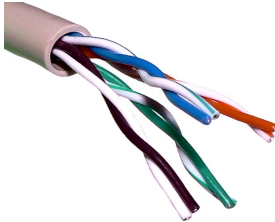
(a) Kabelquerschnitt



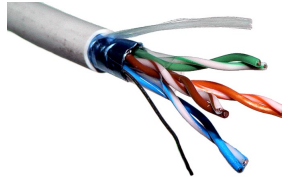
(b) Stecker

Je nach Schirmung unterscheidet man

- UTP (unshielded twisted pair)
- STP (shielded twisted pair)
- S/UTP (screened / unshielded twisted pair)
- S/STP (screened / shielded twisted pair)



(c) UTP [3]



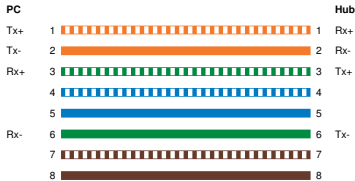
(d) Screened UTP [2]

Schirmung hat Einfluss auf

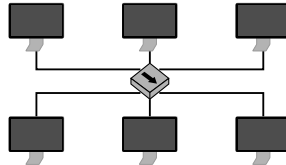
- die Signalqualität (z. B. Übersprechen von elektr. Leitungen) und
- die Flexibilität der Kabel (gut geschirmte Kabel sind steifer).

Twisted-Pair-Kabel für 100BASE-TX

- Verbindung mehrerer Computer über Hub mittels Straight-Through-Kabel



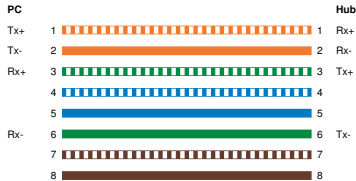
(a) Straight-Through



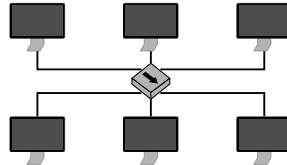
(b) Hub erzeugt phys. Bus, halbduplex

Twisted-Pair-Kabel für 100BASE-TX

- Verbindung mehrerer Computer über Hub mittels Straight-Through-Kabel

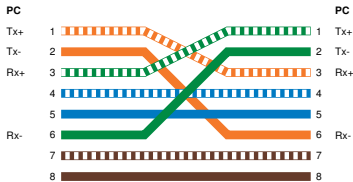


(a) Straight-Through



(b) Hub erzeugt phys. Bus, halbduplex

- Direktverbindung zweier Computer mittels Cross-Over-Kabel

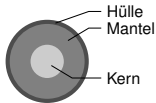


(a) Cross-Over



(b) Punkt-zu-Punkt, vollduplex

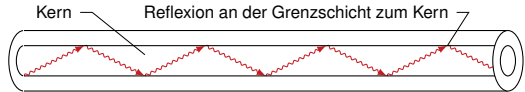
- Licht wird innerhalb des Faserkerns weitergeleitet
- Kern und Mantel besitzen jeweils unterschiedliche optische Dichten
→ Brechungsindex sorgt für annähernde Totalreflexion
- Single-Mode-Fasern vermeiden Streuung durch sehr geringen Kerndurchmesser
→ geringe Verluste, aber sehr empfindlich (Kabelbruch)
- Multi-Mode-Fasern haben einen größeren Kerndurchmesser und neigen daher zum Streuen
→ höhere Verluste, aber weniger empfindlich



(a) Kabelquerschnitt



(b) LC-Stecker



(c) Seitenansicht einer Faser

Vorteile gegenüber elektrischen Leitern:

- Sehr hohe Datenraten möglich
- Weite Strecken überbrückbar
- Kein Übersprechen
- Galvanische Entkopplung von Sender und Empfänger

- Zur digitalen Kommunikation werden **elektromagnetische Wellen**
 - im Frequenzbereich bis zu einigen GHz bzw.
 - im optischen Spektrum genutzt.
- Als Übertragungsmedien kommen
 - **elektrische Leiter** (Kupferkabel) sowie
 - **optische Leiter**in verschiedenen Ausführungen zum Einsatz.
- **Funkübertragungen** benötigen kein Medium, da sich elektromagnetische Wellen (im Gegensatz zu Schallwellen) im Vakuum ausbreiten.
- Das verwendete Medium hat Einfluss auf die **Ausbreitungsgeschwindigkeit**.

Im nächsten Kapitel beantworten wir die Fragen,

- wie Knoten auf ein ggf. gemeinsames Medium zugreifen können (**Medienzugriff**) und
- wie Nachrichten an einen bestimmten benachbarten Knoten gesendet werden können (**Adressierung**).

Signale, Information und deren Bedeutung

Signaldarstellung

Abtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Übertragungskanal

Nachrichtenübertragung

Übertragungsmedien

Literaturangaben

- [1] *Bell Syst. Tech. J.*, C. E. Shannon.
Communication in the presence of noise, 1949.
<http://nms.csail.mit.edu/spinal/shannonpaper.pdf>.
- [2] B. Ivo.
A stripped foiled twisted-pair f(utp) cable, 2007.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FTP_cable3.jpg.
- [3] B. Ivo.
Unshielded twisted-pair cable with different twist rates, 2007.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:UTP_cable.jpg.
- [4] E. Stein.
Taschenbuch Rechnernetze und Internet, chapter Codierung und Modulation, pages 59–66.
Fachbuchverlag Leipzig, 2. edition, 2004.
- [5] Tkgd2007 and Fleshgrinder.
Koaxialkabel Schnittmodell, 2009.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coaxial_cable_cutaway_new.svg.
- [6] M. Werner.
Nachrichtentechnik – eine Einführung für alle Studiengänge, chapter Digitale Übertragung im Basisband, pages 127–136.
Vieweg + Teubner, 6. edition, 2007.
- [7] M. Werner.
Nachrichtentechnik – eine Einführung für alle Studiengänge.
Vieweg + Teubner, 6. edition, 2007.