Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Mathematische Modelle der Kontinuumsmechanik [MA2904] SoSe 2019
Prof. Dr. Daniel Matthes matthes@ma.tum.de
Benedikt Graswald benedikt.graswald@ma.tum.de

Aufgabenblatt 6

Tutorübungen am 03./04./10./11. Juli

Aufgabe T6.1 (Euler vs. Lagrange)
Wir betrachten eine Abbildung $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von Lagrangekoordinaten X zu Eulerkoordinaten x der Form

$$x(t, X) = \begin{pmatrix} X_1 + t \\ e^t X_2 \\ X_3 + tX_1 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie das zugehörige Geschwindigkeitsfeld in Eulerschen Koordinaten.
2. Es sei die Funktion $\rho(t, x) = x_1 + x_2 \sin(t)$ gegeben. Verifizieren Sie für die materielle Ableitung

$$D_t\rho(t, x) = \frac{d}{dt}\rho\big(t, x(t, X)\big).$$

Aufgabe T6.2 (Kontinuitätsgleichung)
Gegeben sei eine Abbildung $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von Lagrangekoordinaten X zu Eulerkoordinaten x. Des Weiteren seien die beiden folgenden Gleichungen erfüllt

$$\partial_t\rho(t, x) + \nabla \cdot \big(\rho(t, x)v(t, x)\big) = 0, \qquad \nabla \cdot v(t, x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass für einen fixen Wert X

$$\frac{d\rho}{dt}\big(t, x(t, X)\big) = 0$$

gilt. Folgern Sie, dass in diesem Fall aus der Kontinuitätsgleichung die Transportgleichung

$$\partial_t\rho + v \cdot \nabla\rho = 0,$$

wird. Stellen Sie eine Lösungsformel auf, wenn $v =$ konstant gilt. Sind alle Lösungen von dieser Form? Machen Sie sich ausgehend von diesem Fall die Lösungsformel für den allgemeinen Fall plausibel und berechnen sie die Lösung für das Vektorfeld $v(x, y) = (y, -x)^T$.

Aufgabe T6.3 (Determinante und Spur)
Gegeben sei eine invertierbare Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir identifizieren den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mittels

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Identifikation die Jakobimatrix der Determinante $\det(A)$ und verifizieren Sie damit die Formel $D(\det A)H = Spur(A^{-1}H)\det(A)$ aus der Vorlesung. Berechnen sie anschließend die Hesse-Matrix und diskutieren Sie das Ergebnis.