Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

IN0010, SoSe 2019

Übungsblatt 3

13. Mai – 17. Mai 2019

Hinweis: Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Lösung vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit

In der Vorlesung wurde die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für Funkverbindungen mit etwa $p_{e,1} = 10^{-4}$ sowie für Ethernet über Kupferkabel mit etwa $p_{e,2} = 10^{-8}$ angegeben. Wir nehmen an, dass Bitfehler unabhängig voneinander und gleichverteilt durch ein Rauschen mit über die Zeit konstanter Leistung auftreten. Die Kanaleigenschaften ändern sich über die Zeit hinweg also nicht. Weitere Störeinflüsse wie Interferenzen seien ausgeschlossen. Die Rahmenlänge betrage 1500 B.

a)* Bestimmen Sie für beide Übertragungsarten die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen fehlerfrei übertragen wird.

$$\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] = (1 - p_e)^{\ell \cdot 8}$$

Für kabelgebundene Verbindung ergibt sich damit eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 99,99 %, für kabellose Übertragung lediglich 30,12 %

Im Folgenden betrachten wir nur noch die kabellose Verbindung. Da die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit relativ hoch ist, sieht ein Protokoll auf der Sicherungsschicht Bestätigungen vor. Für korrekt übertragene Rahmen wird also eine Bestätigung verschickt. Bleibt eine Bestätigung aus, so nimmt der Sender an, dass die Übertragung nicht erfolgreich war. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass Bestätigungen nicht verloren gehen.

b)* Gibt es eine maximale Anzahl an Wiederholungen, bis ein bestimmter Rahmen garantiert korrekt übertragen wurde?

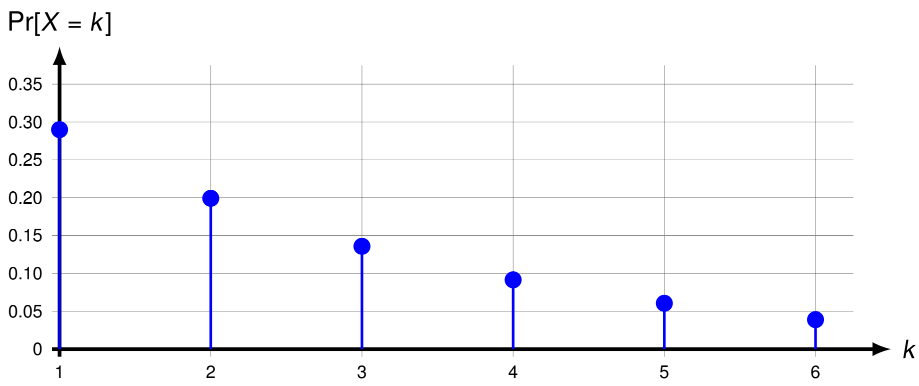
Nein. Die einzelnen Übertragungen sind unabhängig voneinander, d. h. es tritt auch bei jeder Wiederholung ein Rahmenfehler mit den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten auf. Es bleibt also stets ein Restrisiko.

c)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Rahmen genau k-mal übertragen werden muss.

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der notwendigen Übertragungen an. Mit $p_R = \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Pr[X = k] &= \Pr[\text{„Übertragung } (k-1)\text{-mal erfolglos“}] \cdot \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] \\ &= (1 - p_R)^{k-1} \cdot p_R\end{aligned}$$

d) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit aus c) für $k \in \{1, ..., 6\}$.



e) Angenommen das zuständige Protokoll auf der Sicherungsschicht bricht die Wiederholung ab, falls der dritte Sendeversuch erfolglos war. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen nicht übertragen werden kann?

Die Wahrscheinlichkeit entspricht der, dass die Übertragung drei mal in Folge fehlschlug ohne Rücksicht darauf, ob es beim 4. Mal funktioniert oder nicht. Dies ergibt

$$\Pr[X > 3] = 1 - \Pr[X \leq 3] = 1 - \sum_{k=1}^{3} \Pr[X = k] \approx 34\,\%$$

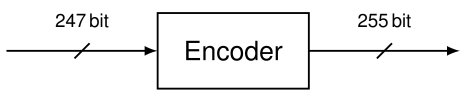
Alternative Lösung:

$$\Pr[X > 3] = (1 - p_R)^3 \approx 34\,\%$$

Achtung: Die alternative Lösung ist nur deswegen korrekt, da die X geometrisch verteilt ist und die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d. h. das Fehlschlagen der k-ten Übertragung beeinflusst nicht die $(k + 1)$-te Übertragung. Wäre diese Unabhängigkeit nicht erfüllt, so würde die alternative Lösung ein falsches Ergebnis liefern!

Aufgabe 2 Kanalkodierung

In der vorherigen Aufgabe haben wir gesehen, dass die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bei schlechter Kanalqualität zum Problem werden kann. Für den Funkkanal mit einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_e = 10^{-4}$ betrug die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Rahmen der Länge 1500 B nur etwa 30 %. Um der hohen Bitfehlerrate zu begegnen, kommt nun ein Blockcode auf Schicht 1 zum Einsatz:



Dieser ermöglicht es dem Decoder auf der Empfängerseite in einem Kanalwort der Länge $n = 255$ bit *einen beliebigen* Bitfehler zu korrigieren. Treten zwei oder mehr Bitfehler auf, so ist die Entscheidung des Decoders falsch und die gesamte Information des Kanalworts verloren.

a)* Bestimmen Sie die Coderate.

$$R = \frac{k}{n} = \frac{247}{255} \approx 0.97$$

b)* Was sagt die Coderate aus?

Die Coderate drückt das Verhältnis zwischen der Größe eines Nutzdatenblocks und der Größe eines durch Redundanz gesicherten Nutzdatenblocks (Kanalwort) aus. Je kleiner R, desto mehr Redundanz wurde hinzugefügt. Für $R = 247/255$ trägt also jedes Kanalwort der Länge 255 bit insgesamt 8 bit an Redundanz sowie 247 bit Information.

c)* Da der Rahmen größer ist als ein Block von 247 bit, muss dieser in mehrere Blöcke zerlegt werden. Bestimmen Sie die Anzahl N der Kanalwörter, die übertragen werden müssen.

Jedes Kanalwort der Länge 255 bit trägt 247 bit Nutzdaten. Es ergibt sich also:

$$N = \left\lceil \frac{1500 \cdot 8}{247} \right\rceil = 49.$$

d) Bestimmen Sie den prozentualen Overhead, der durch Padding im letzten Kanalwort erzeugt wird.

$$\gamma = \frac{103}{1500 \cdot 8 + 103} \approx 0{,}85\,\%.$$

e)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb des Kanalworts zwei oder mehr Fehler auftreten. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Bitfehler in einem Kanalwort der Länge n angibt.

$$\begin{aligned}
p_{e,Codewort} &= \Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X \leq 1] = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} \cdot p_e^i \cdot (1-p_e)^{n-i} \\
&= 1 - \left(1 \cdot p_e^0 \cdot (1-p_e)^{255} + 255 \cdot p_e^1 \cdot (1-p_e)^{254}\right) \\
&\approx 1 - \left(0,9748 + 255 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9748\right) \\
&\approx 3.18 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

f) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen korrekt übertragen wird – also keines der Kanalwörter, die den Rahmen ausmachen, fehlerhaft übertragen wird.

Damit der Rahmen korrekt übertragen wird, müssen alle Kanalwörter korrekt übertragen werden. Es ergibt sich mit den Ergebnissen der vorhergehenden Teilaufgaben also:

$$\Pr[\text{„Kein Fehler im Rahmen"}] = (1 - p_{e,Codewort})^N \approx 98{,}50\,\%$$

g) Zusammen mit der Lösung auf Teilaufgabe e) beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen korrekt übertragenen Rahmen damit etwa 98,5 %. Beurteilen Sie dieses Ergebnis bezüglich der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich übertragenen Rahmen (30 %). Bedenken Sie dabei auch die durch R bedingte Verringerung der Übertragungsrate sowie die Alternative, defekte Rahmen zu wiederholen (vgl. Aufgabe 1e)).

Im Vergleich zu der ursprünglichen Erfolgswahrscheinlichkeit bei der Übertragung eines Rahmens von nur etwa 30 % hat sich die Situation nun erheblich gebessert. Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich übertragenen Rahmen hat sich auf 98,5 % erhöht, was mehreren Zehnerpotenzen in der Bitfehlerrate entspricht. Natürlich muss man noch den Overhead durch Padding (insgesamt 103 bit im letzten Block) und Kanalkodierung berücksichtigen. Damit ergibt sich eine Effizienz von

$$\begin{aligned}
\eta &= R \cdot \Pr[\text{„Kein Fehler im Rahmen"}] \cdot (1-\gamma) \\
&= 0,97 \cdot 0,985 \cdot \left(1 - \frac{103}{1500 \cdot 8 + 103}\right) \approx 0,95.
\end{aligned}$$

Mit der Methode aus Aufgabe 1e) müsste ein Rahmen 11 – 12 mal wiederholt werden, um eine ähnliche Erfolgswahrscheinlichkeit wie mit Kanalkodierung zu erreichen. Die mehrfache Übertragung desselben Rahmens reduziert natürlich die Nettodatenrate auf dem Kanal deutlich (muss ein Rahmen im Mittel zweimal übertragen werden, so halbiert sich die Nettodatenrate).

Fazit: Kanalkodierung ermöglicht überraschende Verbesserungen und ist bei unzuverlässigen Verbindungen unerlässlich. Erreicht wird dies im Fall von Blockcodes durch zwei Tricks:

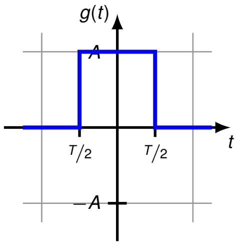
- Der eigentliche Rahmen wird in kleinere Blöcke unterteilt – für jeden der Blöcke ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bereits bedeutend geringer als für den Rahmen im Ganzen. ABER: Da **alle** Codewörter korrekt übertragen werden müssen, gewinnt man zunächst noch nichts.
- Erst dadurch, dass pro Codewort an einer beliebigen Stelle ein Bitfehler auftreten darf, wird die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bedeutend reduziert.

Aufgabe 3 Leitungscodes (Hausaufgabe)

In dieser Aufgabe wollen wir die beiden Leitungscodes NRZ und Manchester miteinander vergleichen. Beispielhaft soll die Bitfolge `1001 0011` übertragen werden.

a)* Geben Sie den NRZ-Grundimpuls sowohl grafisch als auch analytisch an.

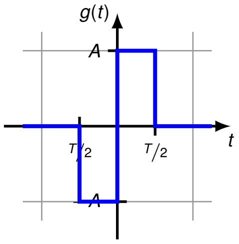
Sei $A > 0$ der betragsmäßig maximale Signalpegel. Dann gilt:



$$g_{\mathrm{NRZ}}(t) = \begin{cases} A & -T/2 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b)* Geben Sie den Manchester-Grundimpuls g_{Manch} sowohl grafisch als auch analytisch an.

Sei $A > 0$ der betragsmäßig maximale Signalpegel. Dann gilt:



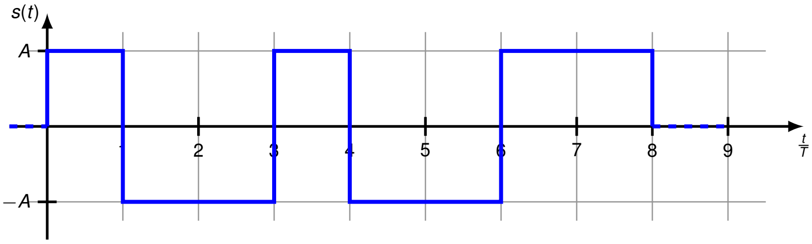
$$g_{\mathrm{Manch}}(t) = \begin{cases} -A & -T/2 \leq t < 0 \\ A & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c)* Weswegen gibt es für beide Leitungscodes jeweils zwei Möglichkeiten, die angegebene Bitfolge zu übertragen?

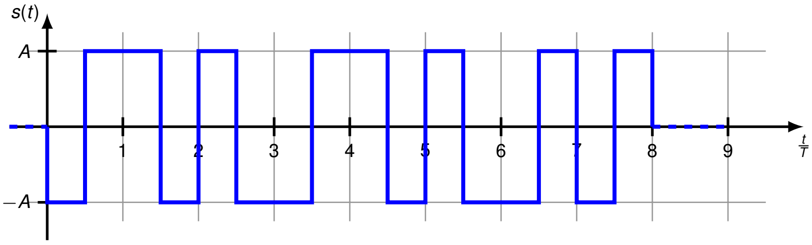
Eine logische `1` kann bei einem binären Leitungscode entweder durch niedriges oder hohes Potential (bzw. im Fall des Manchester Codes durch eine steigende oder fallende Taktflanke) dargestellt werden. Welche Bedeutung Verwendung findet, ist Definitionssache.

Z. B. gibt es neben der bei 10-Base-T verwendeten Form des Manchester Codes (steigende Taktflanke bedeutet logisch `1`) auch die Variante Manchester II (auch „Biphase-L" genannt), bei der die Definition genau umgekehrt lautet.

d)* Geben Sie das kodierte Basisbandsignal an, sofern NRZ verwendet wird.



e)* Geben Sie das kodierte Basisbandsignal an, sofern Manchester verwendet wird.



Aus der Vorlesung ist das Spektrum des NRZ-Impulses bekannt als

$$G_{\mathrm{NRZ}}(f) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}. \tag{1}$$

f) Bestimmen Sie das Spektrum $G_{\mathrm{Manch}}(f)$ des Manchester Impluses.

Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sin(t) = \cos(t)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\cos(t) = -\sin(t)$, $\sin(-t) = -\sin(t)$ und $\cos(-t) = \cos(t)$ sowie der Eulerschen Formel $e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$ (siehe Vorlesung) erhalten wird:

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{Manch}}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathrm{Manch}}(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(-\int_{-T/2}^{0} \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{T/2} \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}\,t \right) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} \left(-[\sin(2\pi ft)]_{-T/2}^{0} + j[-\cos(2\pi ft)]_{-T/2}^{0} + [\sin(2\pi ft)]_{0}^{T/2} - j[-\cos(2\pi ft)]_{0}^{T/2} \right) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} (-[0 - \sin(-\pi fT)] + j[-1 + \cos(-\pi fT)] + [\sin(\pi fT) - 0] - j[-\cos(\pi fT) + 1]) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} (-\sin(\pi fT) - j + j\cos(\pi fT) + \sin(\pi fT) + j\cos(\pi fT) - j) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} (2j\cos(\pi fT) - 2j) \\
&= j\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(\pi fT) - 1}{\pi f}
\end{aligned}$$

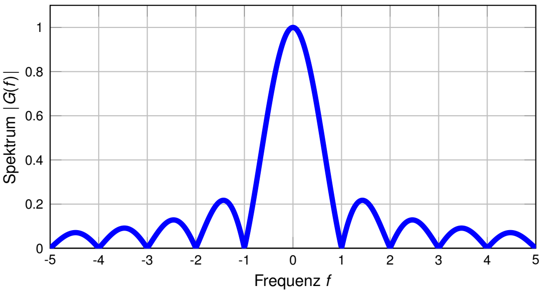
Hinweis: Die imaginäre Einheit ($j^2 = -1$) wird in der Elektrotechnik mit j bezeichnet, da das in der Mathematik verwendete i hier für den Stromfluss genutzt wird.

g) Wie verhalten sich die Spektren beider Impulse für $f \to \infty$?

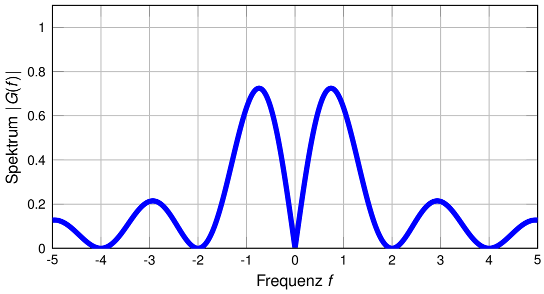
Beide Spektren klingen mit $^1/_f$ ab. Asymptotisch gibt es also keinen Unterschied zwischen beiden Impulsen.

h) Plotten Sie für $T = 1\,\mathrm{s}$ und $A = \sqrt{2\pi}$ sowohl $|G_{\mathrm{NRZ}}(f)|$ als auch $|G_{\mathrm{Manch}}(f)|$ in einem Programm Ihrer Wahl. Vergleichen Sie beide Spektren miteinander.

Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München



(a) NRZ



(b) Manchester