

Aufgabenblatt 5

Tutorübungen am 19./26./27. Juni

Aufgabe T5.1 (Diskret vs. Kontinuierlich)

Betrachten Sie die Funktion $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ mit $\lambda > 0$.

- Lösen Sie die Differentialgleichung $x' = f_\lambda(x)$ mit Anfangswert $x(0) = x_0 \in [0, 1]$, und diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungen.
- Betrachten Sie die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ mit Startwert $x_0 \in [0, 1]$.
 - Für welche $\lambda > 0$ verlässt x_n nie das Intervall $[0, 1]$, für beliebige x_0 ?
 - Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Iteration.
 - Bestimmen Sie unter den Parametern aus i) diejenigen λ , für die die Iteration eine periodische Lösung mit kleinster Periode 2 besitzt.
 - Bestimmen Sie für $\lambda = 4$ ein x_0 , so dass die Iteration eine periodische Lösung mit kleinster Periode 3 liefert.

Hinweis: Benutzen Sie die Transformation $x_n = \sin^2(y_n)$ aus der Vorlesung.

Lösungsvorschlag:

Aufgabenteil a) Wir lösen die Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen, d.h.

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} = \lambda \int_0^t ds = \lambda t.$$

Für das Integral auf der linken Seite berechnen wir die Partialbruchzerlegung und erhalten

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

damit ergibt sich für das Integral

$$\lambda t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} = \int_{x(0)}^{x(t)} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} \right) d\xi = [\log(\xi) - \log(1-\xi)]_{x_0}^{x(t)} = \log \left(\frac{x(t)}{1-x(t)} \frac{1-x_0}{x_0} \right).$$

Auflösen nach $x(t)$ ergibt

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{-\lambda t} + x_0(1 - e^{-\lambda t})}.$$

Unsere Lösung konvergiert streng monoton für alle Startwerte $\neq 0$ gegen $x_\infty = 1$.

Aufgabenteil b)

i) Da sowohl $\lambda > 0$ als auch $x_0 \geq 0$ haben wir stets $f_\lambda(x_n) \geq 0$. Damit f_λ für jeden Startwert x_0 auch kleiner als 1 bleibt, muss $\lambda \leq 4$ gelten, denn klarerweise nimmt $f_\lambda(x)$ für jedes $\lambda > 0$ bei $x^* = 0.5$ sein Maximum an mit dem Wert $\frac{\lambda}{4}$.

?

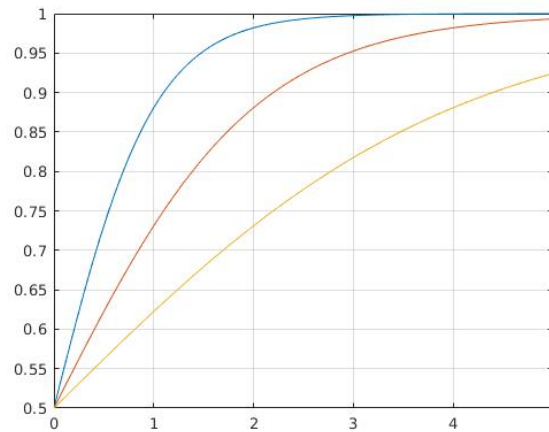


Abbildung 1: Graph der Lösung für den Anfangswert $x_0 = 0.5$, $\lambda = 0.5, 1, 2$.

ii) Die Fixpunktgleichung lautet $f_\lambda(x) = x$, woraus wir die quadratische Gleichung erhalten

$$x = \lambda x(1 - x) \iff x \in \left\{0, 1 - \frac{1}{\lambda}\right\}.$$

iii)

Um periodische Lösungen mit kleinster Periode 2 zu finden betrachten wir die Gleichung $f_\lambda(f_\lambda(x)) = x$. Diese führt auf

$$0 = \lambda^2 x(1 - x) - \lambda^3 x^2(1 - x)^2 - x = x \left(\lambda^2(1 - x) - \lambda^3(x^3 - 2x^2 + x) - 1 \right).$$

Dies ist eine polynomielle Gleichung vierten Grades, jedoch kennen wir bereits zwei Lösungen, nämlich unsere beiden Fixpunkte aus Teilaufgabe ii). Mittels Polynomdivision erhalten wir also

$$0 = -\lambda x \left(x - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \left(\lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda + 1 \right).$$

Mittels der pq-Formel erhalten wir nun die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung, die uns die echten periodischen Lösungen gibt

$$x_{1/2} = \frac{(\lambda + 1) \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Damit dies reelle Lösungen liefert, muss $\lambda^2 - 2\lambda - 3 \geq 0$ sein, was gleichbedeutend zu $\lambda \geq 3$ ist. Des Weiteren liegen beide Lösungen in unserem erlaubten Intervall $[0, 1]$, denn der Term unter der Wurzel ist genau $(\lambda - 1)^2 - 4$ und somit ist die Wurzel stets (sofern reell) kleiner als $(\lambda - 1)$, was auf $x_{1/2} \in [0, 1]$ führt. Unsere einzige Einschränkung an λ ist somit $\lambda \geq 3$.

iv) Wir benutzen die Transformation aus der Vorlesung $x_n = \sin^2(y_n)$ und erhalten

$$x_{n+1} = \sin^2(y_{n+1}) = 4x_n(1 - x_n) = 4\sin^2(y_n)\cos^2(y_n).$$

Ziehen wir die Wurzel erhalten wir zu nächst

$$\sin(y_{n+1}) = \pm 2 \sin(y_n) \cos(y_n).$$

Benutzen wir nun das Additionstheorem für den Sinus ergibt sich $y_{n+1} = 2y_n \bmod \pi$ bzw. auch die andere Formel $y_{n+1} = -2y_n \bmod \pi$.

Benutzen wir nun die Formel für eine periodische Lösung mit Periode 3 $y_{n+3} = y_n$, erhalten wir

$$y_n \in \{0, \frac{\pi}{7}, 2\frac{\pi}{7}, 3\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{9}, 2\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{9}\}.$$

Setzen wir dann y_n wieder ein, erhalten wir die beiden Fixpunkte $x \in \{0, \frac{3}{4}\}$, die $y \in \{0, \frac{\pi}{3}\}$ entsprechen. Und die sechs periodischen Lösungen mit Periode 3, z.B. $x = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Aufgabe T5.2 (Planetenbahnen)

Wir betrachten die Bewegung eines Planeten der Masse M_p um eine Sonne der Masse M_s . Dazu seien $x_p(t)$ die Position des Planeten und $x_s(t)$ die Position der Sonne. Der orientierte Abstand zwischen Planet und Sonne sei $x(t) := x_p(t) - x_s(t)$.

1. Stellen Sie die Gleichungen zur Bewegung von Sonne und Planeten auf.
2. Zeigen Sie, dass sich die Bewegung des Planeten um die Sonne durch die Gleichung

$$x''(t) = -GM \frac{x(t)}{|x(t)|^3}$$

mit der Gesamtmasse $M := M_p + M_s$ und der Gravitationskonstanten G beschreiben lässt.

3. Verifizieren Sie, dass Energie und Drehimpuls Erhaltungsgrößen sind.

Lösungsvorschlag:

Aufgabenteil a)

Die Bewegungsgleichungen des Planeten und der Sonne erhalten wir aus der Newtonschen Gleichung $F = Mx''(t)$. Zur Berechnung der Kraft gehen wir vom Gravitationspotential des Systems aus, dieses ist gegeben durch

$$\Phi(x_p, x_s) = -\frac{GM_s M_p}{|x_p - x_s|}.$$

Hieraus erhalten wir die jeweilige Kraft auf Planet

$$F_p = -\nabla_{x_p} \Phi(x_p, x_s) = -\frac{GM_s M_p}{|x_p - x_s|^3} (x_p - x_s)$$

bzw. Sonne

$$F_s = -\nabla_{x_s} \Phi(x_p, x_s) = -\frac{GM_s M_p}{|x_p - x_s|^3} (x_s - x_p),$$

und somit die beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= \frac{GM_s}{|x_p - x_s|^3} (x_s - x_p) \\ x_s''(t) &= \frac{GM_p}{|x_p - x_s|^3} (x_p - x_s). \end{aligned}$$

Aufgabenteil b)

Betrachten wir die Differenz der beiden Bewegungsgleichungen so erhalten wir

$$x_p''(t) - x_s''(t) = \frac{G(M_p + M_s)}{|x_p - x_s|^3} (x_s - x_p),$$

also die gewünschte Bewegungsgleichung der beiden Körper relativ zueinander

$$x''(t) = -\frac{GM}{|x(t)|^3} x(t).$$

Aufgabenteil c)

Die Energie des Systems setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen, wir erhalten somit die Gesamtenergie

$$E(t) = \frac{1}{2}M_p|x'_p|^2 + \frac{1}{2}M_s|x'_s|^2 - \frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|}.$$

Um zu zeigen, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, müssen wir diese nach der Zeit ableiten

$$\frac{dE(t)}{dt} = M_px'_p \cdot x''_p + M_sx'_s \cdot x''_s + \frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s) \cdot (x'_p - x'_s).$$

Setzen wir hier nun für $x''_{p/s}$ die Bewegungsgleichungen ein, so erhalten wir

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3}(x'_p - x'_s) \cdot (x_s - x_p) + \frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s) \cdot (x'_p - x'_s) = 0.$$

Die Gesamtenergie ändert sich also nicht mit der Zeit.

Entsprechend betrachten wir den Gesamtdrehimpuls des Systems

$$L(t) = M_p(x_p \times x'_p) + M_s(x_s \times x'_s).$$

Dessen Ableitung nach der Zeit ergibt

$$\frac{dL(t)}{dt} = M_p(x'_p \times x'_p + x_p \times x''_p) + M_s(x'_s \times x'_s + x_s \times x''_s) = M_p(x_p \times x''_p) + M_s(x_s \times x''_s).$$

Setzen wir auch hier für $x''_{p/s}$ die Bewegungsgleichungen ein, so erhalten wir

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3}x_p \times (x_s - x_p) + \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3}x_s \times (x_p - x_s) = \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s) \times (x_s - x_p) = 0.$$

Auch der Gesamtdrehimpuls ändert sich nicht mit der Zeit.