Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

MATHEMATISCHE MODELLE DER KONTINUUMSMECHANIK [MA2904] SoSe 2019
PROF. DR. DANIEL MATTHES matthes@ma.tum.de
BENEDIKT GRASWALD benedikt.graswald@ma.tum.de

Aufgabenblatt 5

Tutorübungen am 19./26./27. Juni

Aufgabe T5.1 (Diskret vs. Kontinuierlich)
Betrachten Sie die Funktion $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ mit $\lambda > 0$.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung $x' = f_\lambda(x)$ mit Anfangswert $x(0) = x_0 \in [0,1]$, und diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungen.

b) Betrachten Sie die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ mit Startwert $x_0 \in [0,1]$.

   i) Für welche $\lambda > 0$ verlässt x_n nie das Intervall $[0,1]$, für beliebige x_0?

   ii) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Iteration.

   iii) Bestimmen Sie unter den Parametern aus i) diejenigen λ, für die die Iteration eine periodische Lösung mit kleinster Periode 2 besitzt.

   iv) Bestimmen Sie für $\lambda = 4$ ein x_0, so dass die Iteration eine periodische Lösung mit kleinster Periode 3 liefert.
   Hinweis: Benutzen Sie die Transformation $x_n = \sin^2(y_n)$ aus der Vorlesung.

Lösungsvorschlag:
Aufgabenteil a) Wir lösen die Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen, d.h.

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(1-\xi)} = \lambda \int_0^t \mathrm{d}s = \lambda t.$$

Für das Integral auf der linken Seiten berechnen wir die Partialbruchzerlegung und erhalten

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

damit ergibt sich für das Integral

$$\lambda t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(1-\xi)} = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi}\mathrm{d}\xi = [\log(\xi) - \log(1-\xi)]_{x_0}^{x(t)} = \log\left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\frac{1-x_0}{x_0}\right).$$

Auflösen nach $x(t)$ ergibt

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{-\lambda t} + x_0\big(1-e^{-\lambda t}\big)}.$$

Unsere Lösung konvergiert streng monoton für alle Startwerte $\neq 0$ gegen $x_\infty = 1$.

Aufgabenteil b)

i) Da sowohl $\lambda > 0$ als auch $x_0 \geq 0$ haben wir stets $f_\lambda(x_n) \geq 0$. Damit f_λ für jeden Startwert x_0 auch kleiner als 1 bleibt, muss $\lambda \leq 4$ gelten, denn klarerweise nimmt $f_\lambda(x)$ für jedes $\lambda > 0$ bei $x^* = 0.5$ sein Maximum an mit dem Wert $\frac{\lambda}{4}$.

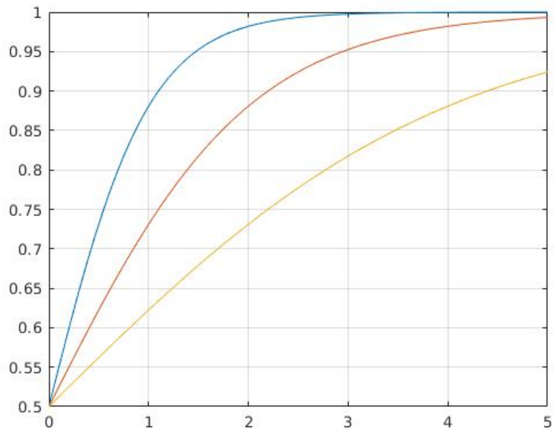

Abbildung 1: Graph der Lösung für den Anfangswert $x_0 = 0.5$, $\lambda = 0.5, 1, 2$.

ii) Die Fixpunktgleichung lautet $f_\lambda(x) = x$, woraus wir die quadratische Gleichung erhalten

$$x = \lambda x(1-x) \iff x \in \left\{0, 1 - \tfrac{1}{\lambda}\right\}.$$

iii)
Um periodische Lösungen mit kleinster Periode 2 zu finden betrachten wir die Gleichung $f_\lambda\big(f_\lambda(x)\big) = x$. Diese führt auf

$$0 = \lambda^2 x(1-x) - \lambda^3 x^2(1-x)^2 - x = x\Bigg(\lambda^2(1-x) - \lambda^3(x^3 - 2x^2 + x) - 1\Bigg).$$

Dies ist eine polynomielle Gleichung vierten Grades, jedoch kennen wir bereits zwei Lösungen, nämlich unsere beiden Fixpunkte aus Teilaufgabe ii). Mittels Polynomdivision erhalten wir also

$$0 = -\lambda x\big(x - (1 - \tfrac{1}{\lambda})\big)\Bigg(\lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda + 1\Bigg).$$

Mittels der pq-Formel erhalten wir nun die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung, die uns die echten periodischen Lösungen gibt

$$x_{1/2} = \frac{(\lambda + 1) \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Damit dies reelle Lösungen liefert, muss $\lambda^2 - 2\lambda - 3 \geq 0$ sein, was gleichbedeutend zu $\lambda \geq 3$ ist. Des Weiteren leigen beide Lösungen in unserem erlaubten Intervall $[0,1]$, denn der Term unter der Wurzel ist genau $(\lambda-1)^2 - 4$ und somit ist die Wurzel stets (sofern reell) kleiner als $(\lambda - 1)$, was auf $x_{1/2} \in [0,1]$ führt. Unsere einzige Einschränkung an λ ist somit $\lambda \geq 3$.

iv) Wir benutzen die Transformation aus der Vorlesung $x_n = \sin^2(y_n)$ und erhalten

$$x_{n+1} = \sin^2(y_{n+1}) = 4x_n(1 - x_n) = 4\sin^2(y_n)\cos^2(y_n).$$

Ziehen wir die Wurzel erhalten wir zu nächst

$$\sin(y_{n+1}) = \pm 2\sin(y_n)\cos(y_n).$$

Benutzen wir nun das Additionstheorem für den Sinus ergibt sich $y_{n+1} = 2y_n \mod \pi$ bzw. auch die andere Formel $y_{n+1} = -2y_n \mod \pi$.

Benutzen wir nun die Formel für eine periodische Lösung mit Periode 3 $y_{n+3} = y_n$, erhalten wir

$$y_n \in \{0, \tfrac{\pi}{7}, 2\tfrac{\pi}{7}, 3\tfrac{\pi}{7}, \tfrac{\pi}{9}, 2\tfrac{\pi}{9}, \tfrac{\pi}{3}, 4\tfrac{\pi}{9}\}.$$

Setzen wir dann y_n wieder ein, erhalten wir die beiden Fixpunkte $x \in \{0, \frac{3}{4}\}$, die $y \in \{0, \frac{\pi}{3}\}$ entsprechen. Und die sechs periodischeb Lösungen mit Periode 3, z.B. $x = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Aufgabe T5.2 (Planetenbahnen)
Wir betrachten die Bewegung eines Planeten der Masse M_p um eine Sonne der Masse M_s. Dazu seien $x_p(t)$ die Position des Planeten und $x_s(t)$ die Position der Sonne. Der orientierte Abstand zwischen Planet und Sonne sei $x(t) := x_p(t) - x_s(t)$.

1. Stellen Sie die Gleichungen zur Bewegung von Sonne und Planeten auf.
2. Zeigen Sie, dass sich die Bewegung des Planeten um die Sonne durch die Gleichung

   $$x''(t) = -GM\frac{x(t)}{|x(t)|^3}$$

   mit der Gesamtmasse $M := M_p + M_s$ und der Gravitationskonstanten G beschreiben lässt.
3. Verifizieren Sie, dass Energie und Drehimpuls Erhaltungsgrößen sind.

Lösungsvorschlag:
Aufgabenteil a)
Die Bewegungsgleichungen des Planeten und der Sonne erhalten wir aus der Newtonschen Gleichung $F = Mx''(t)$. Zur Berechnung der Kraft gehen wir vom Gravitationspotential des Systems aus, dieses ist gegeben durch

$$\Phi(x_p, x_s) = -\frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|}.$$

Hieraus erhalten wir die jeweilige Kraft auf Planet

$$F_p = -\nabla_{x_p}\Phi(x_p, x_s) = -\frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s)$$

bzw. Sonne

$$F_s = -\nabla_{x_s}\Phi(x_p, x_s) = -\frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_s - x_p),$$

und somit die beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= \frac{GM_s}{|x_p - x_s|^3}(x_s - x_p) \\ x_s''(t) &= \frac{GM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s). \end{aligned}$$

Aufgabenteil b)

Betrachten wir die Differenz der beiden Bewegungsgleichungen so erhalten wir

$$x_p''(t) - x_s''(t) = \frac{G(M_p + M_s)}{|x_p - x_s|^3}(x_s - x_p),$$

also die gewünschte Bewegungsgleichung der beiden Körper relativ zueinander

$$x''(t) = -\frac{GM}{|x(t)|^3}x(t).$$

Aufgabenteil c)

Die Energie des Systems setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen, wir erhalten somit die Gesammtenergie

$$E(t) = \tfrac{1}{2}M_p|x_p'|^2 + \tfrac{1}{2}M_s|x_s'|^2 - \frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|}.$$

Um zu zeigen, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, müssen wir diese nach der Zeit ableiten

$$\frac{dE(t)}{dt} = M_p x_p' \cdot x_p'' + M_s x_s' \cdot x_s'' + \frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s) \cdot (x_p' - x_s').$$

Setzen wir hier nun für $x''_{p/s}$ die Bewegungsgleichungen ein, so erhalten wir

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3}(x_p' - x_s') \cdot (x_s - x_p) + \frac{GM_sM_p}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s) \cdot (x_p' - x_s') = 0.$$

Die Gesammtenergie ändert sich also nicht mit der Zeit.

Entsprechend betrachten wir den Gesammtdrehimpuls des Systems

$$L(t) = M_p(x_p \times x_p') + M_s(x_s \times x_s').$$

Dessen Ableitung nach der Zeit ergibt

$$\frac{dL(t)}{dt} = M_p(x_p' \times x_p' + x_p \times x_p'') + M_s(x_s' \times x_s' + x_s \times x_s'') = M_p(x_p \times x_p'') + M_s(x_s \times x_s'').$$

Setzen wir auch hier für $x''_{p/s}$ die Bewegungsgleichungen ein, so erhalten wir

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3} x_p \times (x_s - x_p) + \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3} x_s \times (x_p - x_s) = \frac{GM_pM_s}{|x_p - x_s|^3}(x_p - x_s) \times (x_s - x_p) = 0.$$

Auch der Gesammtdrehimpuls ändert sich nicht mit der Zeit.