

Aufgabenblatt 3

Tutorübungen am 22./23./29. Mai

Aufgabe T3.1 (Mehrskalenansatz)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $t > 0$

$$\begin{aligned}x''(t) + 2\epsilon x'(t) + (1 + \epsilon^2)x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1\end{aligned}$$

mit kleinem Parameter $\epsilon > 0$.

- Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung der Lösung $x(t)$ bis zur 1. Ordnung in ϵ .
- Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems und vergleichen Sie diese mit der asymptotischen Entwicklung aus Teil a). Für welche Zeiten ist die Approximation gut?
- Um eine bessere Approximation zu finden versuchen Sie den Ansatz

$$x(T_0, T_1) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1) + \dots$$

wobei $T_0 := t$ und $T_1 := \epsilon t$ sei. Bestimmen Sie $x_0(T_0, T_1)$.

(*Hinweis:* Die Gleichung zur Ordnung ϵ^0 bestimmt x_0 nicht eindeutig. Wählen Sie die Lösung so, dass die Gleichung zur Ordnung ϵ^1 möglichst einfach wird.)

Aufgabe T3.2 (Singuläre Störung)

Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme für $t > 0$

$$(i) \epsilon x'(t) + \sin(\epsilon)x(t) = \epsilon^2 t, \quad x(0) = 1 \qquad (ii) \epsilon x'(t) + \cos(\epsilon)x(t) = \epsilon t, \quad x(0) = 1$$

mit kleinem Parameter $\epsilon > 0$.

Untersuchen Sie, ob diese Anfangswertprobleme regulär oder singulär gestört sind. Und bestimmen Sie, falls das Problem regulär gestört ist, die asymptotische Entwicklung bis zur ersten Ordnung in ϵ .