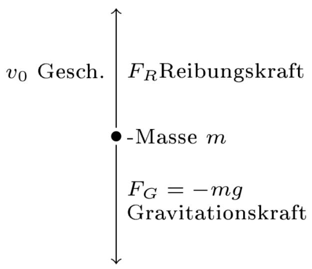
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

MATHEMATISCHE MODELLE DER KONTINUUMSMECHANIK [MA2904] SoSe 2019
PROF. DR. DANIEL MATTHES matthes@ma.tum.de
BENEDIKT GRASWALD benedikt.graswald@ma.tum.de

Aufgabenblatt 1

Tutorübungen am 24./25. April und 2. Mai

Aufgabe T1.1 (Stokes'sches Gesetz)
Ein Körper der Masse m wird von der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht in die Höhe geworfen. Der Luftwiderstand bei der Geschwindigkeit v soll durch das Stokesche Gesetz $F_R = -cv$ für den Strömungswiderstand berücksichtigt werden. Das ist für kleine Geschwindigkeiten sinnvoll. Dabei ist c ein von der Form und Größe des Körpers abhängiger Koeffizient. Die auf den Körper wirkende Gravitationskraft soll durch $F_G = -mg$ approximiert werden. Die Bewegung hänge von der Masse m, der Anfangsgeschwindigkeit v_0, der Gravitationsbeschleunigung g und dem Reibungskoeffizienten c mit Dimension $[c] = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{T}}$ ab.



Stokes'sches Gesetz(Luftwiderstand)

$F_r = -cv$ Strömungswiderstand

$[c] = \dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{T}}$ Reibungswiderstand

a) Stellen Sie ein geeignetes Anfangswertproblem für die Höhe des Körpers auf.

b) Bestimmen Sie die Variablen und Parameter mit den dazugehörigen Dimensionen.

c) Gewinnen Sie alle möglichen dimensionslosen Darstellungen der Differentialgleichung.

d) Diskutieren Sie verschiedene Möglichkeiten eines reduzierten Modells, falls $\beta = \frac{cv_0}{mg}$ klein ist.

Aufgabe T1.2 (Wiederholung Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie die Lösung zu den folgenden Anfangswertproblemen:

a) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$

b) $x'(t) + x(t) = \sin(t), \quad x(0) = \frac{1}{2}$

c) $x'(t) + tx^3(t) = 0, \quad x(1) = 2$

Betrachten Sie danach die Differentialgleichung

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = K\cos(\omega t)$$

und diskutieren Sie das Verhalten der Lösung für verschiedene Parameter α, ω_0.

1a) $m\cdot\ddot{x} = -c\dot{x} - m\cdot g \qquad x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=v_0$

b) Länge L Zeit T

Masse M

$c=\frac{M}{T} \qquad g=\frac{L}{T^2} \qquad m=M \qquad v_0=\frac{L}{T}$

c) $L=[c^{\alpha_1} m^{\alpha_2} g^{\alpha_3} v_0^{\alpha_4}]$ $\boxed{\mathrm{III}}$

$$L=\left(\frac{M}{T}\right)^{\alpha_1} M^{\alpha_2}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\alpha_3}\left(\frac{L}{T}\right)^{\alpha_4} = M^{\alpha_1+\alpha_2}\, T^{-\alpha_1-2\alpha_3-\alpha_4}\, L^{\alpha_3+\alpha_4}$$

$$\begin{array}{c} M \\ T \\ L \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$\mathrm{I}: \alpha_1+\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_1=-\alpha_2 \qquad \alpha_1=-2+1\alpha_4$

$\mathrm{II}: \alpha_2-2\alpha_3-\alpha_4=0 \Rightarrow \alpha_2-2(1-\alpha_4)-\alpha_4=0$

$\mathrm{III}: \alpha_3+\alpha_4=1 \Rightarrow \alpha_3=1-\alpha_4 \qquad \alpha_2=2-1\alpha_4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in III: β

$$c^{-2+\mu}\, m^{2-\mu}\, g^{1-\mu}\, v_0^{\mu} = \left(\frac{c\, v_0}{m\cdot g}\right)^{\mu-2}\cdot\frac{v_0^2}{g} \quad \boxed{\mathrm{VII}}$$

$$T = c^{\alpha_1} m^{\alpha_2} g^{\alpha_3} v_0^{\alpha_4} \quad \underline{\text{V}}$$

$$= \left(\frac{M}{T}\right)^{\alpha_1} M^{\alpha_2} \left(\frac{L}{T^2}\right)^{\alpha_3} \left(\frac{L}{T}\right)^{\alpha_4}$$

analog:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha_1 + (1-\alpha_4) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1 + \alpha_4 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 - \alpha_4 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 1 - \alpha_4 \\ \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eingesetzt in } \underline{\text{V}}:$$

$$T = c^{-1+d} m^{1-d} g^{-d} v_0^{d} = \left(\frac{c\, v_0}{m g}\right)^{d} \cdot \frac{m}{c} \quad \underline{\text{VI}}$$

β

Einführung neuer Parametern:

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = \frac{x(t)}{L} \qquad \tilde{t} = \frac{t}{T}$$

Kettenregel:

$$\dot{x}(t) = \frac{L}{T} \cdot \dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) \qquad \ddot{x}(t) = \frac{L}{T^2} \cdot \ddot{\tilde{x}}(\tilde{t})$$

$\underline{\text{VI}}$, $\underline{\text{VII}}$ in die Differentialgleichung:

$$m \frac{L}{T^2} \ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) = -c \frac{L}{T} \dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) - m \cdot g$$

$$m\cdot\frac{\beta^{\nu-2}\cdot\frac{v_0^2}{g}}{\beta^{2\mu}\cdot\frac{m^2}{c^2}}\cdot\ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) = -c\cdot\frac{\beta^{\nu-2}\cdot\frac{v_0^2}{g}}{\beta^{\mu}\cdot\frac{m}{c}}\cdot\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) - m\cdot g$$

$$\frac{v_0^2\, c^2}{g\cdot m}\quad \cancel{g\cdot m}\cdot\beta^{\nu-2\mu}\,\ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) = \cancel{g\cdot m}\cdot\beta^{\nu-\mu}\cdot\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) - \cancel{m\cdot g}$$

$$\beta^{\nu-2\mu}\,\ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) = \beta^{\nu-\mu}\,\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) - 1$$

I 1.2

a) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t \quad x(0)=0 \quad x'(0)=0$

char pol: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2 \Rightarrow A\cdot e^{t} + B\cdot e^{2t} = x_h$ ← homogen

partikuläre Lösung:

$x_p(t) = at + b$

$x_p'(t) = a$

partikuläre Lösung in DGL einsetzen:

$0 - 3a + 2(at + b) = t$

$2b - 3a + 2at = t + 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{4} \Rightarrow Ae^{t} + Be^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} = x(t)$

$x(0) = x'(0) = 0$ einsetzen

$x(0) = A + B + \frac{3}{4} = 0 \quad \mathrm{I} \qquad \mathrm{II} - \mathrm{I}:\ B - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$\dot{x}(0) = A + 2B + \frac{1}{2} = 0 \quad \mathrm{II} \qquad \Rightarrow A = -1$

$\Rightarrow x(t) = -e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$

b) $\dot{x}(t) + x(t) = \sin(t) \qquad x = 1/2$

homogen: $x + 1 = 0 \qquad x_1 = -1 \Rightarrow x_h = Ae^{-t}$

partikulär: $B \cdot \sin(t) + C \cdot \cos(t) = x_p(t)$

$\dot{x}_p(t) = B \cdot \cos(t) - C \cdot \sin(t)$

$B \cdot \cos(t) - C \cdot \sin(t) + B \cdot \sin(t) + C \cdot \cos(t) = \sin(t)$

$\sin(t) \cdot (B - C) + \cos(t) \cdot (B + C) = \sin(t)$

$B - C = 1 \Rightarrow B = 1 + C \qquad B + C = 0$

$1 + C + C = 0 \Rightarrow C = -1/2$

$B = 1/2$

$\Rightarrow Ae^{-t} + 1/2(\sin(t) - \cos(t)) = x(t)$

AW einsetzen:

$1/2 = A + 1/2(-1) \Rightarrow A = 1$

$\Rightarrow x(t) = e^{-t} + 1/2(\sin(t) - \cos(t))$

c) $x'(t) + t\,x^3(t) = 0 \qquad x(1)=2$

$$\frac{dx}{d(t)} = -t\,x^3(t)$$

$$\int_2^{x(t)} \frac{1}{x^3(t)} \cdot dx = \int_1^t -t \cdot d(t)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2(t)} = -2t^2 + C$$

$$\left[\frac{1}{x^2(t)}\right]_2^{x(t)} = \left[4t^2\right]_1^t$$

$$\frac{1}{x(t)^2} - \frac{1}{4} = 4t^2 - 4$$

$$\frac{1}{x(t)^2} = 4t^2 - 3{,}75$$

$$x(t) = \frac{1}{\left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2}}$$