Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Mathematische Modelle der Kontinuumsmechanik [MA2904] SoSe 2019
Prof. Dr. Daniel Matthes matthes@ma.tum.de
Benedikt Graswald benedikt.graswald@ma.tum.de

Aufgabenblatt 3

Tutorübungen am 22./23./29. Mai

Aufgabe T3.1 (Mehrskalenansatz)
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $t > 0$

$$\begin{aligned} x''(t) + 2\epsilon x'(t) + (1+\epsilon^2)x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

mit kleinem Parameter $\epsilon > 0$.

a) Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung der Lösung $x(t)$ bis zur 1. Ordnung in ϵ.

b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems und vergleichen Sie diese mit der asymptotischen Entwicklung aus Teil a). Für welche Zeiten ist die Approximation gut?

c) Um eine bessere Approximation zu finden versuchen Sie den Ansatz

$$x(T_0, T_1) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1) + \cdots$$

wobei $T_0 := t$ und $T_1 := \epsilon t$ sei. Bestimmen Sie $x_0(T_0, T_1)$.
(*Hinweis:* Die Gleichung zur Ordnung ϵ^0 bestimmt x_0 nicht eindeutig. Wählen Sie die Lösung so, dass die Gleichung zur Ordnung ϵ^1 möglichst einfach wird.)

Lösungsvorschlag:
Aufgabenteil a)

Wir wählen den asymptotischen Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots,$$

als Grundlage unserer Störungsrechnung, setzen ihn in das Anfangswertproblem ein und erhalten

$$\begin{aligned} x_0''(t) + \epsilon x_1''(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) + 2\epsilon x_0'(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) + (1+\epsilon^2)\left(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) &= 0 \\ x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ x_0'(0) + \epsilon x_1'(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 1. \end{aligned}$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich bezüglich Potenzen von ϵ durch. Die ϵ^0-Terme ergeben das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_0''(t) + x_0(t) &= 0 \\ x_0(0) &= 0 \\ x_0'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Wie man sofort sieht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x_0(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$ und somit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_0(t) = \sin(t)$$

Entsprechend ergeben die ϵ^1-Terme das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1''(t) + x_1(t) &= -2\cos(t) \\ x_1(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Der homogene Anteil der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung ist wie oben

$$x_{h,1}(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t).$$

Zur vollständigen allgemeinen Lösung benötigen wir noch eine partikuläre Lösung, welche wir uns durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite beschaffen, d.h.,

$$x_1(t) = at\sin(t) + bt\cos(t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$2a\cos(t) - 2b\sin(t) - at\sin(t) - bt\cos(t) + at\sin(t) + bt\cos(t) = -2\cos(t),$$

und somit

$$2a\cos(t) - 2b\sin(t) = -2\cos(t).$$

Offensichtlich ist diese Gleichung für beliebige $t > 0$ nur dann erfüllt falls $a = -1$ und $b = 0$ gilt. Die allgemeine Lösung lautet also

$$x_1(t) = c_1\sin(t) + c_2\cos(t) - t\sin(t).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ und somit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_1(t) = -t\sin(t).$$

Fassen wir die Störungsrechnung zur Ordnung ϵ^1 zusammen, so erhalten wir die asymptotische Lösung

$$x(t) = \sin(t) - \epsilon t\sin(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Aufgabenteil b)

Berechnen wir nun zum Vergleich die exakte Lösung des Anfangswertproblems. Zuerst bestimmen wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + 2\epsilon x'(t) + (1+\epsilon^2)x(t) = 0$$

mit Hilfe eines exponentiellen Ansatzes der Form $x(t) = e^{\lambda t}$. Einsetzen ergibt die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\epsilon\lambda + 1 + \epsilon^2 = 0,$$

deren Lösungen sind $\lambda_1 = -\epsilon + i$ und $\lambda_2 = -\epsilon - i$. Die allgemeine komplexe Lösung ist somit

$$x(t) = c_1 e^{-\epsilon t} e^{it} + c_2 e^{-\epsilon t} e^{-it},$$

aus deren Real- und Imaginärteil ergibt sich die allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = \tilde{c}_1 e^{-\epsilon t}\sin(t) + \tilde{c}_2 e^{-\epsilon t}\cos(t).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $\tilde{c}_1 = 1$ und $\tilde{c}_2 = 0$ und somit erhalten wir die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = e^{-\epsilon t} \sin(t).$$

Wie man sieht ergibt die exakte Lösung die Reihe

$$x(t) = \left(1 - \epsilon t + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 t^2 - \cdots\right) \sin(t),$$

deren erste beiden Terme wir bereits aus er Störungsrechnung erhalten haben. Es ist klar, dass $1 - \epsilon t$ nur für sehr kleine Werte von t eine vernünftige Approximation von $e^{-\epsilon t}$ liefert. Das Problem besteht darin, dass die Dämpfung der harmonischen Schwingung $e^{-\epsilon t}$ auf Zeitskala ϵt abläuft, also auf einer um den Faktor ϵ langsameren Zeitskala wie die harmonische Schwingung $\sin(t)$. Eine Separation dieser beiden Zeitskalen sollte also ein besseres Ergebnis liefern.

Aufgabenteil c)

Um eine bessere Approximation zu erhalten separieren wir die Zeitskalen mit Hilfe des Ansatzes

$$x(T_0, T_1) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1) + \cdots$$

wobei $T_0 := t$ und $T_1 := \epsilon t$ sei. Zum Einsetzen in das Anfangswertproblem benötigen wir noch die erste bzw. zweite Ableitung bezüglich t, welche wir mit Hilfe der Kettenregel erhalten

$$\frac{dx_{0,1}}{dt}(T_0, T_1) = \frac{\partial x_{0,1}}{\partial T_0}(T_0, T_1) + \epsilon \frac{\partial x_{0,1}}{\partial T_1}(T_0, T_1),$$

$$\frac{d^2 x_{0,1}}{dt^2}(T_0, T_1) = \frac{\partial^2 x_{0,1}}{\partial T_0^2}(T_0, T_1) + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_{0,1}}{\partial T_0 \partial T_1}(T_0, T_1) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_{0,1}}{\partial T_1^2}(T_0, T_1).$$

Wir erhalten somit bis zur Ordnung ϵ^1 des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2}(T_0, T_1) + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1}(T_0, T_1) + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}(T_0, T_1) + \cdots \\
+2\epsilon \frac{\partial x_0}{\partial T_0}(T_0, T_1) + (1 + \epsilon^2)\left(x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \cdots\right) = 0 \\
x_0(0,0) + \epsilon x_1(0,0) + \cdots = 0 \\
\frac{\partial x_0}{\partial T_0}(0,0) + \epsilon \frac{\partial x_0}{\partial T_1}(0,0) + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_0}(0,0) + \cdots = 1.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt in Ordnung ϵ^0 das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2}(T_0, T_1) + x_0(T_0, T_1) = 0 \\
x_0(0,0) = 0 \\
\frac{\partial x_0}{\partial T_0}(0,0) = 1.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist wieder

$$x_0(T_0, T_1) = c_1(T_1) \sin(T_0) + c_2(T_1) \cos(T_0),$$

allerdings mit T_1 abhängigen Koeffizienten. Die Anfangswerte ergeben die Bedingungen $c_1(0) = 1$ und $c_2(0) = 0$ und somit keine eindeutige Festlegung der Koeffizienten. Die hieraus gewonnene Freiheit kann man verwenden um ein möglichst einfaches Anfangswertproblem in Ordnung ϵ^1 zu erhalten, dessen allgemeine Form lautet

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1}(T_0, T_1) + \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}(T_0, T_1) + 2\frac{\partial x_0}{\partial T_0}(T_0, T_1) + x_1(T_0, T_1) &= 0 \\ x_1(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial x_0}{\partial T_1}(0,0) + \frac{\partial x_1}{\partial T_0}(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

Die größte Vereinfachung läßt sich erzielen, wenn man mit Hilfe geeigneter Koeffizienten $c_1(T_1)$ und $c_2(T_1)$ die von x_0 abhängigen Terme eliminiert. Setzen wir hierzu die allgemeine Lösung ein, so erhalten wir

$$0 = \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1}(T_0, T_1) + \frac{\partial x_0}{\partial T_0}(T_0, T_1) = c_1'(T_1)\cos(T_0) - c_2'(T_1)\sin(T_0) + c_1(T_1)\cos(T_0) - c_2(T_1)\sin(T_0).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $c_1'(T_1) + c_1(T_1) = 0$ und $c_2'(T_1) + c_2(T_1) = 0$. Somit haben die Koeffizienten die Form $c_1(T_1) = a_1 e^{-T_1}$ und $c_2(T_1) = a_2 e^{-T_1}$. Ein Vergleich mit den Anfangsbedingungen ergibt schließlich $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$. Wir kommen also zu dem Schluß, dass die von x_0 abhängigen Terme verschwinden falls wir in Ordnung ϵ^0 die folgende Lösung wählen

$$x_0(T_0, T_1) = e^{-T_1}\sin(T_0).$$

Ein Vergleich mit Aufgabenteil b) zeigt aber, dass dies bereits die exakte Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems ist. Wie man leicht sieht, erhält man in allen höheren Ordnungen die Null-Lösung.

Aufgabe T3.2 (Singuläre Störung)
Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme für $t > 0$

(i) $\epsilon x'(t) + \sin(\epsilon)x(t) = \epsilon^2 t,\ x(0) = 1$ (ii)$\epsilon x'(t) + \cos(\epsilon)x(t) = \epsilon t,\ x(0) = 1$

mit kleinen Parameter $\epsilon > 0$.

Untersuchen Sie, ob diese Anfangswertprobleme regulär oder singulär gestört sind. Und bestimmen Sie, falls das Problem regulär gestört ist, die asymptotische Entwicklung bis zur ersten Ordnung in ϵ.

Lösungsvorschlag:

(i) Wir können die ganze Gleichung durch ϵ teilen und $\epsilon \to 0$ betrachten, dann erhalten wir immer noch eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. D.h. unser System wird auch im Limit $\epsilon \to 0$ durch eine ähnliche Differentialgleichung beschrieben

$$x'(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Diese können wir auch mit dem Anfangswert lösen, daher vermuten wir, dass unser Problem regulär gestört ist.

Wir beginnen mit dem Ansatz $x_\epsilon(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \ldots$ Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\epsilon(x_0'(t) + \epsilon x_1'(t)) + \sin(\epsilon)(x_0(t) + \epsilon x_1(t)) = \epsilon^2 t$$

mit Anfangswert

$$x_0(0) + \epsilon x_1(0) = 1.$$

Der Koeffizientenvergleich führt auf

$$x_0'(t) + x_0(t) = 0, \quad x_0(0) = 1,$$

d.h. $x_0(t) = \exp(-t)$. In erster Ordnung in ϵ erhalten wir

$$x_1'(t) + x_1(t) = t, \quad x_1(0) = 0,$$

somit erhalten wir $x_1(t) = e^{-t} + (t-1)$. Damit ist unsere asymptotische Entwicklung in ϵ gegeben durch $x_\epsilon(t) = \exp(-t) + \epsilon(e^{-t} + (t-1))$. (Dies ist genau die Taylorentwicklung der exakten Lösung $x_\epsilon(t) = \frac{\epsilon^2}{\sin(\epsilon)} t - \frac{\epsilon^3}{\sin^2(\epsilon)} + (1 + \frac{\epsilon^3}{\sin^2(\epsilon)}) \exp(-\frac{\sin(\epsilon)}{\epsilon} t)$).

(ii) Dieses Problem ist singulär gestört, denn lassen wir hier $\epsilon \to 0$, dann erhalten wir die Gleichung

$$x(t) = 0, \quad x(0) = 1,$$

welche offensichtlich keine Lösung besitzt.