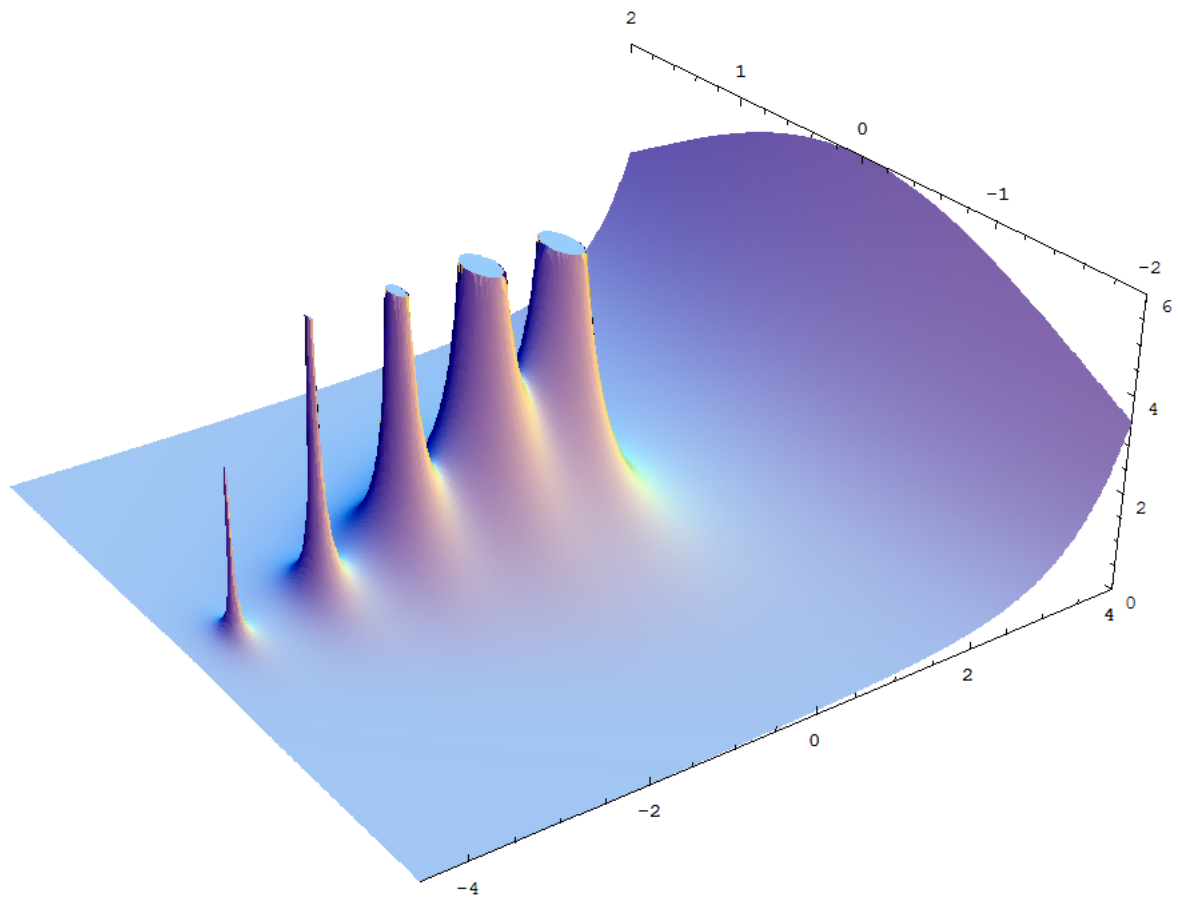


# Metodi Matematici per la Fisica 2

Filippo Antola, Lorenzo Benfatto

Novembre 2020



La strada più breve fra due verità del  
dominio reale passa per il dominio  
complesso.

---

*Jacques Hadamard*



---

# Introduzione

---

Quanto riportato è una riscrittura in  $\text{\LaTeX}$  delle note fornite dal professor Meggiolaro per il corso di *Metodi Matematici per la fisica 2* tenutosi nell'a.a. 2020-21 (interamente in versione telematica).

Tutti gli errori presenti sono imputabili unicamente agli autori e si pregano i lettori di segnalarli ai seguenti indirizzi per la realizzazione di future versioni corrette:

- [benfatto.lorenzo@gmail.com](mailto:benfatto.lorenzo@gmail.com)
- [filippoantola312@gmail.com](mailto:filippoantola312@gmail.com)

Alcune lezioni sono state riscritte solo parzialmente (specialmente le ultime) e le esercitazioni non sono state contemplate.

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami sui numeri complessi</b>	<b>6</b>
1.1	Radici $n$ -esime	6
1.2	Proprietà	7
1.3	Funzioni di variabile complessa	7
1.4	La funzione $\sqrt{z}$	7
1.5	Il punto all'infinito	8
<b>2</b>	<b>Derivabilità in senso complesso</b>	<b>9</b>
2.1	Le condizioni di Cauchy Riemann	9
2.2	Funzioni Analitiche	10
2.2.1	Proprietà delle funzioni analitiche	10
2.3	Coordinate polari	11
2.4	Funzione esponenziale complessa	11
2.5	Le funzioni trigonometriche complesse	11
2.6	Funzioni iperboliche complesse	12
2.7	Funzione logaritmo complessa	12
2.8	Funzione elevamento a potenza complessa	13
<b>4</b>	<b>Integrale di una funzione rispetto ad una variabile complessa</b>	<b>14</b>
4.1	Proprietà dell'integrale in una variabile complessa	14
4.2	Teoremi di Cauchy	16
4.3	L'integrale indefinito (primitiva) di una funzione analitica	17
<b>5</b>	<b>L'integrale di Cauchy</b>	<b>19</b>
5.1	Formula di Cauchy	19
5.1.1	Valore principale di Cauchy	20
5.2	Formula del valor medio	20
5.3	Principio del massimo modulo di una funzione analitica	20
5.4	Integrali dipendenti da un parametro	22
5.5	Derivata di ordine qualsiasi di una funzione analitica	22
5.6	Teorema di Morera	23
5.7	Teorema di Liouville	23
<b>7</b>	<b>Serie uniformemente convergenti di funzioni di variabile complessa</b>	<b>24</b>
7.1	Proprietà delle serie uniformemente convergenti	25
7.2	Serie di potenze di una variabile complessa	25
<b>8</b>	<b>Sviluppo in serie di Taylor</b>	<b>29</b>
8.1	Il teorema di Taylor	29
8.2	Esempi	30
8.2.1	Funzione logaritmo	30
8.2.2	Funzione esponenziale	30
8.2.3	Funzioni trigonometriche	30
8.2.4	Funzioni iperboliche	30
8.2.5	La funzione $f(z) = \frac{1}{z-a}$	30
8.3	Proprietà degli zeri di una funzione analitica	31
8.3.1	Teorema di unicità	31
8.3.2	Zeri di una funzione analitica	31
8.4	Teorema di unicità	32
8.4.1	Esempi	32
8.5	Il teorema di de l'Hopital-Bernoulli	32
<b>9</b>	<b>Lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent</b>	<b>34</b>
9.1	I punti singolari isolati di una funzione analitica	36
9.2	Il punto all'infinito come punto singolare isolato	38

<b>11 Teoria dei residui</b>	<b>40</b>
11.1 Calcolo del residuo per un polo	40
11.2 Teorema fondamentale della teoria dei residui	41
11.3 Residuo all'infinito	41
11.4 Teorema esterno dei residui	42
<b>12 Applicazioni dei residui al calcolo di integrali di funzioni di variabili reali</b>	<b>44</b>
12.1 Integrali della forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$	44
12.2 Integrali della forma $\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$	45
12.2.1 Esempio	45
12.3 Integrali della forma $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx$	46
12.3.1 Esempio	47
12.4 Integrali della forma $\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)dx$ o $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x)dx$	48
12.5 Integrali della forma $\int_0^{\infty} f(x)\log(x)dx$	49
<b>13 Relazione tra funzioni analitiche e armoniche</b>	<b>51</b>
13.1 Relazione inversa	51
13.2 Formula del Valor Medio	52
13.3 Il principio del Massimo/Minimo	52
13.4 Le Trasformazioni Conformi	52
13.4.1 Proprietà geometriche	53
13.5 Trasformazione di Möbius	53
13.6 Th. di Riemann	54
<b>14 Funzione di Green per sistemi lineari ed indipendenti dal tempo</b>	<b>55</b>
14.1 Sistemi lineari e funzione di Green	55
14.2 Indipendenza dal tempo	55
14.3 Funzione di Green e trasformata di Fourier	55
14.3.1 Delta di Dirac	56
14.4 Appendix: proprietà trasformata di Fourier	56
<b>15 Proprietà della Funzione di Green per sistemi lineari causali</b>	<b>57</b>
15.1 Trasformata di Hilbert	59
15.2 Th. di Titchmarsh	60
15.3 Relazioni di Kramers-Krönig	60
<b>16 Distribuzioni</b>	<b>61</b>
16.1 Esempi	62
16.1.1 Distribuzione $T_U$	62
16.1.2 Distribuzioni non associate a funzioni	63
16.2 Appendix	63
<b>17 Sulla convergenza debole tra distribuzioni</b>	<b>65</b>
17.1 Derivata delle distribuzioni	67
17.1.1 Derivata di $\Theta(x)$	68
17.1.2 Derivate della $\delta$	68
17.1.3 Esempio sulle derivate di distribuzioni	68
17.1.4 Altro esempio sulle derivate di distribuzioni	68
<b>18 Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate</b>	<b>70</b>
18.1 Esempi	70
18.2 Continuità degli operatori	71
18.3 La distribuzione "Parte Principale"	71
18.4 Esempi	73
<b>19 Proprietà e due esempi importanti</b>	<b>74</b>
19.1 Esercizi	74
19.2 Esercizi sulle distribuzioni	76

<b>20 Le distribuzioni <math>\delta_+</math> e <math>\delta_-</math></b>	<b>78</b>
20.1 Sulla trasformata di Fourier della $\theta$ . . . . .	78
20.2 Su un limite notevole . . . . .	79
20.3 Sul prodotto e la convoluzione tra distribuzioni . . . . .	80
20.3.1 Prodotto di convoluzione . . . . .	80
20.4 Cambiamento di variabili nelle distribuzioni . . . . .	81
<b>21 Esercizi sulle funzioni di Green</b>	<b>82</b>
21.1 Primo esempio . . . . .	82
21.2 Secondo esempio: . . . . .	82
21.3 Terzo esempio . . . . .	83
<b>22 La funzione di Green per l'equazione di Poisson</b>	<b>84</b>
<b>23 Funzioni di Green per sistemi con condizioni al contorno assegnate</b>	<b>86</b>
23.1 Esempio . . . . .	86
23.2 Soluzione formale del problema elettrostatico dei valori al contorno mediante la funzione di Green . . . . .	87
23.3 Esempio in 2 dimensioni . . . . .	88
23.3.1 Sottoesempio . . . . .	89
<b>24 Conclusione</b>	<b>90</b>

# Richiami sui numeri complessi

Si definisce un numero complesso  $z$  come una coppia ordinata  $(a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si indica come:

$$z = a + ib \quad \text{con} \quad a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z) \quad (1.0.1)$$

Anche nota come *Rappresentazione algebrica*.

I numeri complessi formano un campo con le operazioni di:

- **Somma:**

$$z_1 = (a_1, b_1), \quad z_2 = (a_2, b_2) \rightarrow z_1 + z_2 \equiv (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad (1.0.2)$$

Si definiscono:

$$1 = (1, 0), \quad i = (0, 1) \quad (1.0.3)$$

- **Prodotto:**

$$z_1 z_2 \equiv (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (1.0.4)$$

È possibile introdurre anche una *Rappresentazione Geometrica*:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \end{cases} \quad \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1.0.5)$$

$\varphi \equiv \operatorname{Arg}(z)$  con  $-\infty < \varphi < \infty$  è detto *argomento di  $z$*  e, dato che è definito a meno di multipli di  $2\pi$ , si può anche definire  $\arg(z)$  con  $\varphi_0 \leq \arg(z) \leq 2\pi + \varphi_0$  e  $\varphi_0$  è un numero arbitrario (che decide la posizione del taglio nella determinazione scelta).

Usando la *Formula di Eulero*:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \quad (1.0.6)$$

si può scrivere

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \rho e^{i\varphi} \quad (1.0.7)$$

La (1.0.7) è nota come *Rappresentazione esponenziale*.

In tale rappresentazione la regola di prodotto si riduce a:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.0.8)$$

## 1.1 Radici $n$ -esime

Dato l'elevamento a potenza  $n$ -esima di un numero complesso  $z$  si ha:

$$z = z_0^n = \rho_0^n e^{in\varphi_0} \quad (1.1.1)$$

$z_0$  si dice *radice  $n$ -esima di  $z$* .

Quando si deve fare la radice di un numero complesso risulta allora chiaro qual è il modulo della radice, ma non è banale per la fase.

$$z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow z_0 = \sqrt[n]{z} = \rho_0 e^{i\varphi_0} \quad \rho_0 = \sqrt[n]{\rho} \quad \varphi_0 \neq \frac{\varphi}{n} \quad (1.1.2)$$

Dato che la fase è definita a meno di multipli di  $2\pi$  ci sono  $n$  radici  $n$ -esime, che si indicano:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\varphi_k} \quad \varphi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, n-1 \quad (1.1.3)$$

## 1.2 Proprietà

Si ricorda al lettore che il quadrato di un numero complesso è definito come:

$$|z|^2 \equiv z \cdot z^* \quad \Rightarrow \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (1.2.1)$$

Si dimostrano allora le seguenti disuguaglianze (entrambe chiamate triangolari):

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (1.2.2)$$

E in generale risultano utili le relazioni:

$$\begin{aligned} ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

## 1.3 Funzioni di variabile complessa

Si definisce così una legge  $f$  che associa a un  $z \in \mathbb{C}$  un  $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ :

$$z \rightarrow \omega = f(z) \quad , \quad \omega = u + iv \quad (1.3.1)$$

con  $u, v = u(x, y), v(x, y)$  funzioni reali.

$$u = \operatorname{Re}(\omega) \quad v = \operatorname{Im}(\omega)$$

**Definizione 1.1.**  $\omega_0$  si dice **limite di  $f(z)$  in  $z_0$**  se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z) - \omega_0| < \epsilon \Rightarrow |z - z_0| < \delta \quad (1.3.2)$$

E si scrive allora:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0 \quad (1.3.3)$$

**Definizione 1.2.**  $f(z)$  si dice **continua** in  $z_0$  se:

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (1.3.4)$$

## 1.4 La funzione $\sqrt[n]{z}$

La funzione  $\sqrt[n]{z}$  è una funzione *multivoca* a  $n$ -rami.

Ossia, fissato  $\arg(z)$  t.c.  $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi$ , i valori della funzione sono dati da:

$$\omega_k(z) \equiv (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n})} \quad (1.4.1)$$

Risulta che il piano complesso è "tagliato" e i limiti per la funzione sono diversi a seconda della direzione da cui si appropia il "taglio".

$$\begin{aligned} \lim_{\arg(z) \rightarrow 0^+} \omega_k(z) &= \sqrt[n]{|\rho|} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \\ \lim_{\arg(z) \rightarrow 2\pi^-} \omega_k(z) &= \sqrt[n]{|\rho|} e^{i \frac{2\pi(k+1)}{n}} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

## 1.5 Il punto all'infinito

Ogni punto al di sopra di una sfera tangente nell'origine a un piano complesso può essere mappato *stereograficamente* in un punto sul piano, come in Figura (1.5).

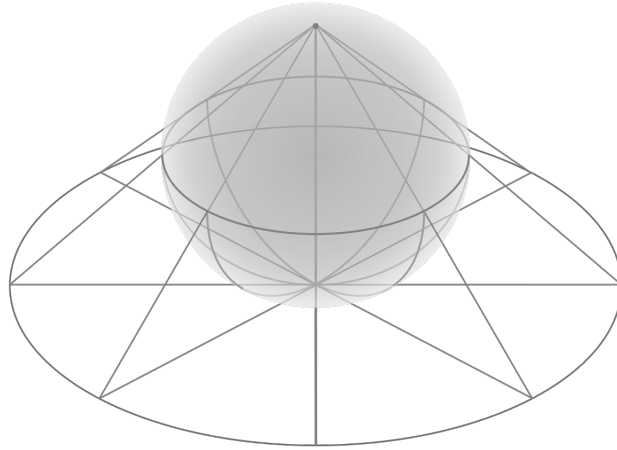


Figura 1: Proiezione Stereografica

Il polo della sfera opposto lungo il diametro a quello tangente al piano viene mappato "all'infinito".  
In maniera più rigorosa:

$$\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \omega_0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists R > 0 : |f(z) - \omega_0| < \epsilon \Rightarrow |z| > R \quad (1.5.1)$$

Ossia  $\{z : |z| > R\}$  è un intorno del punto all'infinito.



## Derivabilità in senso complesso

Sia  $f(z)$  definita in un dominio  $D$  aperto e connesso del piano complesso  $\mathbb{C}$ .

Si dice che  $f(z)$  è **derivabile/differenziabile in senso complesso** in  $z_0$  se

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2.0.1)$$

In tal caso il limite coincide con la **derivata complessa di  $f(z)$  in  $z_0$** , indicata come  $f'(z_0)$ .

Il rapporto  $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$  viene detto **rapporto incrementale**.

La derivata in senso complesso è una condizione più forte rispetto alla derivabilità in senso reale.

### 2.1 Le condizioni di Cauchy Riemann

**Teorema 2.1.**  $f$  è derivabile in senso complesso in  $z_0 = x_0 + iy_0 \implies f$  è derivabile anche in senso reale, ovvero nel punto  $(x_0, y_0)$  esistono:

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.1.1)$$

E valgono le condizioni di Cauchy Riemann:

$$f_x + if_y = 0 \quad (2.1.2)$$

*Dimostrazione.*  $f$  è derivabile in senso complesso in  $z_0$  esiste il limite del rapporto incrementale  $\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \Big|_{z_0}$  indipendentemente da come  $\Delta z$  tenda a 0. Si prende dapprima  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = f'(z_0) \quad (2.1.3)$$

Viceversa prendendo  $\Delta z = i\Delta y$ :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} \equiv \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = f'(z_0) \quad (2.1.4)$$

Si è dunque trovato che:

$$f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0) \implies f_x(x_0, y_0) + if_y(x_0, y_0) = 0 \quad (2.1.5)$$

■

**Teorema 2.2.**  $f$  differenziabile in senso reale  $\forall (x_0, y_0) \in D$  dominio di definizione e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann  $\implies f(z)$  è derivabile in senso complesso in  $z_0 = x_0 + iy_0$  e vale

$$f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0) \quad (2.1.6)$$

*Dimostrazione.* Si usa la differenziabilità in senso reale:

$$\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \sigma(|\Delta z|) \quad (2.1.7)$$

Usando le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + \sigma(\Delta z) = f_x(x_0, y_0)\Delta z + \sigma(\Delta z) \quad (2.1.8)$$

Da cui:

$$\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0) \quad (2.1.9)$$

■

## 2.2 Funzioni Analitiche

Si dice che  $f(z)$  è **analitica o olomorfa** in un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  se è derivabile in senso complesso  $\forall z \in D$ , con derivata prima continua.

Se  $f(z)$  è analitica su tutto il piano complesso, allora è detta **intera**.

Dai teoremi precedenti segue che  $f(z)$  è analitica in  $D$  se e solo se  $f(x, y)$  è differenziabile in senso reale in  $D$  con derivate prime continue e tali da soddisfare le condizioni di Cauchy-Riemann (2.1.2).

Spesso si scrive  $f(z)$  in base alle componenti reale ed immaginaria  $f = u + iv$ .

Affinche la funzione soddisfi le condizioni di Cauchy-Riemann è necessario che

$$f_x + if_y = u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = u_x - v_y + i(v_x + u_y) = 0 \implies \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Inoltre per  $f(z)$  non necessariamente analitica, ma derivabile in senso reale si definiscono gli operatori differenziali complessi:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \frac{\partial f}{\partial z^*} \equiv \frac{1}{2}(f_x + if_y) \quad (2.2.2)$$

Ad esempio se  $t = x + iy$  allora  $\frac{\partial t}{\partial z} = 1$ ,  $\frac{\partial t}{\partial z^*} = 0$ , mentre per  $g = f^* = x - iy$   $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial z^*} = 1$ .  
In particolare se  $f(z)$  è analitica:

$$\exists f'(z) = f_x = -if_y \implies \frac{\partial f}{\partial z^*} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) \quad (2.2.3)$$

Allo stesso modo se  $f(z)$  è derivabile in senso reale come da ipotesi è facile osservare come valga anche l'affermazione inversa.

Questo significa che  $t$  è analitica, mentre  $g$  non lo è. Allo stesso modo  $f(z) = x$  oppure  $f(z) = iy$ , pur essendo derivabili in senso reale, non sono analitiche perchè non soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann (2.1.2).

Esempi semplici di funzioni analitiche sono  $f(z) = az + b$  con  $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{a(z + \Delta z) + b - (az + b)}{\Delta z} = a \implies \exists f'(z) = a \quad (2.2.4)$$

Oppure  $f(z) = z^n$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^n + n\Delta z z^{n-1} - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} \implies \exists f'(z) = nz^{n-1} \quad (2.2.5)$$

### 2.2.1 Proprietà delle funzioni analitiche

**Teorema 2.3** (analiticità implica continuità). Se  $f(z)$  è analitica in  $z_0 \in D \implies f(z)$  è continua in  $z_0$ .

*Dimostrazione.*

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \implies \exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = 0 \implies \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) \quad (2.2.6)$$

■

**Teorema 2.4** (operazioni con funzioni analitiche). :  $f(z)$  e  $g(z)$  analitiche in  $D \implies f(z) + g(z)$  e  $f(z)g(z)$  sono funzioni analitiche in  $D$ ,  $\frac{f(z)}{g(z)}$  è analitica  $\forall z \in D$  tale che  $g(z) \neq 0$ , e viceversa.

Inoltre  $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$ ,  $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$  e  $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

**Teorema 2.5** (derivata della funzione composta).  $\omega = f(z)$  analitica in  $D$ ,  $\eta = g(\omega)$  analitica in  $G = f(D) \implies \eta = g(f(z)) \equiv F(z)$  è analitica in  $D$  e  $F'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$

**Teorema 2.6** (derivata della funzione inversa).  $\omega = f(z)$  analitica in  $D$ ,  $|f'(z)| \neq 0$  nell'intorno di un punto  $z_0 \implies$  nell'intorno di  $\omega_0 = f(z_0) \in G = f(D)$  è definita la funzione inversa  $\eta = f^{-1}(\omega)$  ed è analitica con  $\eta' = (f^{-1})' = \frac{1}{f'(z_0)}$

## 2.3 Coordinate polari

Spesso è conveniente esprimere una funzione complessa in coordinate polari. Se si suppone  $f(z)$  sia derivabile in senso reale rispetto a  $\rho$  e  $\phi$ , si ottengono le relazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = f_x \cos \phi + f_y \sin \phi \quad (2.3.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) = -f_x \sin \phi + f_y \cos \phi \quad (2.3.2)$$

Combinando queste equazioni e sfruttando la relazione di Eulero si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} + i \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} = (f_x + i f_y) e^{-i\phi} \quad \frac{\partial f}{\partial \rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} = (f_x - i f_y) e^{i\phi} \quad (2.3.3)$$

Per cui se  $f(z)$  soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann (2.1.2) è necessario che:

$$f_x + i f_y = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \rho} + i \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \quad (2.3.4)$$

Se si pone  $f(z) = u + iv$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \phi} + i \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Inoltre se  $f(z)$  è analitica, quindi valgono le condizioni di Cauchy-Riemann (2.1.2), la sua derivata risulta uguale a:

$$f'(z) = f_x = -i f_y = \frac{1}{2} (f_x - i f_y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) e^{-i\phi} = \frac{\partial f}{\partial \rho} e^{-i\phi} = -i \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} e^{-i\phi} \quad (2.3.6)$$

## 2.4 Funzione esponenziale complessa

Si definisce come:

$$e^z \equiv e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.4.1)$$

Per  $y = 0$  si riduce alla funzione esponenziale reale.

Gode delle usuali proprietà della funzione esponenziale reale:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad (2.4.2)$$

Difatti si può dimostrare avendo già dimostrato la tesi sull'asse reale ed immaginario:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1 + x_2} e^{iy_1 + iy_2} = e^{z_1 + z_2} \quad (2.4.3)$$

Inoltre è una funzione analitica intera e

$$(e^z)' = e^z$$

Difatti esistono le derivate in campo reale e vale la condizione di Cauchy-Riemann.

In generale si ha che  $F(z) = e^{\alpha z}$  è analitica intera con:

$$F'(z) = (e^{\alpha z})' = \alpha e^{\alpha z} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.4.4)$$

## 2.5 Le funzioni trigonometriche complesse

Si definiscono:

$$\cos(z) \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (2.5.1)$$

Sono funzioni analitiche intere e sull'asse reale coincidono con le funzioni trigonometriche reali. Rappresentano quindi un'estensione analitica.

Per calcolare le loro derivate si fa uso della (2.4.4) e si trova

$$(\cos z)' = -\sin z \quad (\sin z)' = \cos z \quad (2.5.2)$$

Inoltre si generalizza anche la formula di Eulero:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (2.5.3)$$

Inoltre continuano a valere le relazioni  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- $\cos(z + \omega) = \cos z \cos \omega - \sin z \sin \omega$
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$

Si possono dimostrare a partire dalla definizione.

## 2.6 Funzioni iperboliche complesse

Si definiscono:

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (2.6.1)$$

Sono funzioni analitiche intere, rappresentano l'estensione analitica delle rispettive funzioni reali. Inoltre vale:

$$(\cosh z)' = \sinh z \quad (\sinh z)' = \cosh z \quad (2.6.2)$$

E:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (2.6.3)$$

Nonchè le seguenti relazioni con le funzioni trigonometriche complesse:

$$\cosh z = \cos(iz) \quad \sinh z = -i \sin(iz) \quad (2.6.4)$$

## 2.7 Funzione logaritmo complessa

Si definisce come la funzione inversa della funzione esponenziale complessa:

$$e^{\log z} = z \quad (2.7.1)$$

Scrivendo  $z$  in coordinate polari:

$$\log(z) = \log(\rho) + i\phi = \log|z| + i\text{Arg}(z) \quad e^{\log(\rho) + i\phi \log(e)} = e^{\log(\rho)} e^{i\phi} = \rho e^{i\phi} = z \quad (2.7.2)$$

Non è una funzione univoca, si tratta di una funzione multivoca o polidroma a infiniti valori.

Se si fissa  $\arg(z)$  come una funzione univoca discontinua, ad esempio con immagine da 0 a  $2\pi$ , gli infiniti valori o rami della funzione logaritmo sono:

$$(\log z)_k \equiv \log|z| + i\arg(z) + i2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.7.3)$$

Con la definizione dell' $\arg(z)$  come  $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ , sono funzioni univoche nel piano complesso tagliato  $\mathbb{C}/\{z : x \geq 0, y = 0\}$ , con le relazioni:

$$\lim_{\arg z \rightarrow 0^+} (\log z)_k = \log \rho + i2\pi k \quad \lim_{\arg z \rightarrow 2\pi^-} (\log z)_k = \log \rho + i2\pi(k+1) = \lim_{\arg z \rightarrow 0^+} (\log z)_{k+1} \quad (2.7.4)$$

La determinazione con  $k = 0$ , sul bordo superiore del taglio coincide con la funzione logaritmo reale e viene detta determinazione principale.

Ciascuna determinazione è una funzione analitica nel suo dominio di definizione, difatti:

$$f(z) = \log(z) = \log(\rho) + i\phi \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \quad (2.7.5)$$

Ed inoltre

$$(\log z)' = \left( \frac{\partial \log(z)}{\partial \rho} \right) e^{-i\phi} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} = \frac{1}{z} \quad (2.7.6)$$

## 2.8 Funzione elevamento a potenza complessa

Si definisce a partire dall funzione logaritmo complessa:

$$z^\alpha \equiv e^{\alpha \log(z)} = e^{\alpha(\log|z| + i \arg(z) + i2\pi k)} = e^{\alpha \log|z|} e^{\alpha i \arg(z)} e^{\alpha i 2\pi k} = |z|^\alpha e^{\alpha i \arg(z)} e^{\alpha i 2\pi k} \quad (2.8.1)$$

Si osservi che:

- $\alpha \in \mathbb{N}$  la funzione è univoca ed analitica intera;
- $\alpha = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$  primi fra loro, la funzione è ad  $n$  valori;
- $\alpha \in \mathbb{I}$  o  $\alpha \in \mathbb{C}$  ha infiniti valori

Per quanto riguarda la derivata complessa:

$$(z^\alpha)' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log(z)} = \frac{\alpha}{e^{\log(z)}} e^{\alpha \log(z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\log(z)} = \alpha z^{\alpha-1} \quad (2.8.2)$$

## Integrale di una funzione rispetto ad una variabile complessa

Si considera una curva regolare a tratti di lunghezza  $L$ :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad ; \quad t \in [\aleph, \beth] \quad ; \quad z(\aleph) = z_{in} \quad z(\beth) = z_{fin} \quad (4.0.1)$$

$x(t)$  e  $y(t)$  sono funzioni continue e derivabili q.o. con la condizione:

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0 \quad (4.0.2)$$

Si partiziona la curva con

$$\Delta z_i \equiv z_i - z_{i-1} \quad (4.0.3)$$

e si definisce l'integrale sulla curva come:

$$\int_C f(z) dz \equiv \lim_{\max|\Delta z_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta z_i \quad (4.0.4)$$

se il limite esiste finito per ogni punto e per ogni partizione.

Scrivo:

$$z_i = x_i + iy_i \rightarrow \Delta z_i = \Delta x_i + i\Delta y_i \quad ; \quad f(z_i) = u(x_i, y_i) + iv(x_i, y_i) \quad (4.0.5)$$

Scrivo in questi termini la sommatoria per passare all'integrale

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta z_i &= \sum_{i=1}^n \{u(x_i, y_i) \Delta x_i - v(x_i, y_i) \Delta y_i\} + i \sum_{i=1}^n \{u(x_i, y_i) \Delta y_i + v(x_i, y_i) \Delta x_i\} \\ &\rightarrow \max|\Delta z_i| \rightarrow 0 \rightarrow \int_C \{u(x, y) dx - v(x, y) dy\} + i \int_C \{v(x, y) dx + u(x, y) dy\} \end{aligned} \quad (4.0.6)$$

Trovando come risultato generale

$$\int_C f(z) dz = \int_C \{u(x, y) dx - v(x, y) dy\} + i \int_C \{v(x, y) dx + u(x, y) dy\} \quad (4.0.7)$$

### 4.1 Proprietà dell'integrale in una variabile complessa

Si elenca una serie di risultati:

•

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz \quad (4.1.1)$$

•

$$\int_{C=C_1 \circ C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \quad (4.1.2)$$

•

$$\int_C \{\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)\} dz = \alpha \int_C f_1(z) dz + \beta \int_C f_2(z) dz \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (4.1.3)$$

•

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \quad (4.1.4)$$

con  $ds \equiv |dz|$  elemento differenziale di lunghezza della curva  $C$ .  $ds$  è il limite di

$$\Delta s_i \equiv |\Delta z_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \quad (4.1.5)$$

Dalla (4.1.4) discende il:

**Lemma 4.1 (Lemma di Darboux).** Se  $\max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = M$  e  $L = \int_C ds$  è la lunghezza della curva  $C$ , allora:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad (4.1.6)$$

*Dimostrazione.*

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq M \int_C ds = ML \quad (4.1.7)$$

■

- Detta  $z(t)$  una *rappresentazione parametrica* della curva  $C$ , con  $t \in [\aleph, \beth]$ ,  $z(\aleph) = z_{in}$  e  $z(\beth) = z_{fin}$ , regolare a tratti, si ha:

$$\int_C f(z) dz = \int_{\aleph}^{\beth} f[z(t)] \frac{dz}{dt} dt \quad (4.1.8)$$

**Definizione 4.1.** Una curva chiusa regolare a tratti e priva di autointersezioni si dice **Contorno Chiuso**.

L'integrale lungo un contorno chiuso si indica:

$$\oint_C f(z) dz \quad (4.1.9)$$

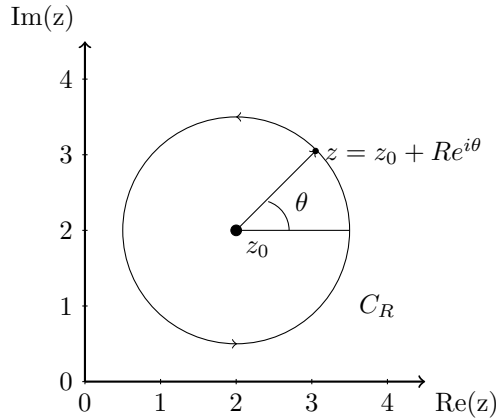
**Definizione 4.2.** Per convenzione si assume come **verso positivo di percorrenza** di un contorno chiuso quello per cui il dominio interno rimane a sinistra della direzione di percorrenza (ossia è il verso antiorario).

**Esempio:**

Si calcoli

$$I = \oint_{C_R} \frac{dz}{z - z_0} \quad (4.1.10)$$

Dove  $C_R$  è la circonferenza di raggio  $R$  e centro in  $z_0$  percorsa in senso antiorario.



Si utilizza la seguente parametrizzazione della curva  $C_R$ :

$$C_R: z(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (4.1.11)$$

Da cui il differenziale diventa:

$$z - z_0 = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta} d\theta \quad (4.1.12)$$

L'integrale in (4.1.10) diventa:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (4.1.13)$$

Si può estendere poi un risultato dall'analisi reale in più variabili:

**Teorema 4.2 (Formula di Green).** Date due funzioni  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  continue in un dominio chiuso  $\bar{G}$  limitato da un contorno regolare a tratti  $C$  e con derivate parziali del primo ordine continue in  $G$  vale:

$$\int_C A dx + B dy = \iint_G \left\{ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right\} dx dy \quad (4.1.14)$$

**Definizione 4.3.** Un dominio  $\Omega$  si dice **Semplicemente Connesso** quando ogni curva semplice e chiusa  $\Gamma$  contenuta in  $\Omega$  è frontiera di un dominio  $D$  contenuto in  $\Omega$ .

## 4.2 Teoremi di Cauchy

Si enunciano e dimostrano ora tre versioni di un teorema importante in analisi complessa:

**Teorema 4.3 (Th. di Cauchy v.1).** Sia  $f(z)$  analitica in un dominio  $G$  semplicemente connesso. Allora

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (4.2.1)$$

$\forall$  contorno chiuso  $\Gamma$  completamente contenuto in  $G$ .

*Dimostrazione.* Essendo  $G$  semplicemente connesso il contorno chiuso  $\Gamma$  è la frontiera di un dominio  $D$  ( $\Gamma = \partial D$ ) contenuto in  $G$  in cui  $f(z)$  è analitica.

Applico la formula (4.2) e trovo:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} \{u dx - v dy\} + i \oint_{\Gamma} \{v dx + u dy\} = \\ &= \iint_D \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx dy + i \iint_D \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Difatti per le condizioni di C.R. (2.1.2) risulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2.3)$$

Oppure più concisamente:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} \{f dx + i f dy\} = \iint_D \{i f_x - f_y\} dx dy = 0 \quad (4.2.4)$$

■

**Teorema 4.4 (Th. di Cauchy v.2).** Sia  $f(z)$  analitica in un dominio  $G$  semplicemente connesso limitato da un contorno regolare a tratti  $C$  e continua nel chiuso  $\bar{G}$ . Allora:

$$\oint_{C=\partial G} f(z) dz = 0 \quad (4.2.5)$$

**Teorema 4.5 (Th. di Cauchy v.3).** Sia  $f(z)$  analitica in un dominio  $G$  a connessione multipla, limitato esternamente dal contorno  $C_0$  e internamente dai contorni  $C_1, \dots, C_n$  e sia  $f(z)$  continua nel chiuso  $\bar{G}$ .

Allora, detta  $C$  la frontiera totale del dominio  $G$  formata dai contorni:

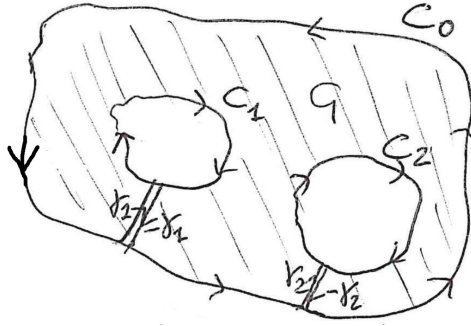
- $C_0$  percorso nel verso positivo.
- $C_1, \dots, C_n$  percorsi nel verso negativo.

si ha:

$$\oint_{C=\partial G} f(z) dz = \oint_{C_0^+} f(z) dz + \oint_{C_1^-} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n^-} f(z) dz = 0 \quad (4.2.6)$$

*Dimostrazione.* Unendo il contorno  $C_0$  ai contorni  $C_1, \dots, C_n$  con curve regolari  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  si individua un contorno chiuso  $\tilde{C}$ , in cui ogni curva  $\gamma_i$  è percorsa due volte (in sensi opposti), che racchiude un dominio  $\tilde{G}$  semplicemente connesso.





Si applica allora (4.4):

$$\oint_{\tilde{C}=\partial\tilde{G}} f(z) dz = \oint_{C_0^+} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{C_1^-} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots = 0 \quad (4.2.7)$$

Che, semplificando gli integrali sulle  $\gamma_i$ , diventa:

$$\oint_{C=\partial G} f(z) dz = \oint_{C_0^+} f(z) dz + \oint_{C_1^-} f(z) dz + \oint_{C_2^-} f(z) dz + \dots = 0 \quad (4.2.8)$$

■

### 4.3 L'integrale indefinito (primitiva) di una funzione analitica

Se  $f(z)$  è una funzione analitica in un dominio  $G$  semplicemente connesso, presi due punti  $z_0, z \in G$  e due cammini qualsiasi  $\Gamma_1, \Gamma_2$  che li connettono, in virtù di (4.3) si ha:

$$\int_{\Gamma_1} f(\eta) d\eta = \int_{\Gamma_2} f(\eta) d\eta \quad (4.3.1)$$

In questo caso si scrive sono:

$$\int_{\Gamma_1} f(\eta) d\eta = \int_{\Gamma_2} f(\eta) d\eta \equiv \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta \equiv F(z) \quad (4.3.2)$$

dal momento che l'integrale non dipende dalla scelta del cammino, ma solo dagli estremi.

**Teorema 4.6.** Sia  $f(z)$  definita e continua in un dominio semplicemente connesso  $G$  e tale che  $\forall \Gamma$  contorno chiuso valga

$$\oint_{\Gamma} f(\eta) d\eta = 0 \quad (4.3.3)$$

Allora la funzione  $F(z) \equiv \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta$  è una funzione analitica in  $G$  e inoltre:

$$F'(z) = f(z) \quad (4.3.4)$$

*Dimostrazione.* Si considerino le  $\Gamma_i$  che connettono i punti  $z_0$  e  $z$ :

$$\oint_{\Gamma} f(\eta) d\eta = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(\eta) d\eta = \int_{\Gamma_2} f(\eta) d\eta \equiv \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta \equiv F(z) \quad \forall \Gamma_1, \Gamma_2 \quad (4.3.5)$$

Scrivo allora il rapporto incrementale di  $F(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\eta) d\eta - \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta + \int_z^{z+\Delta z} f(\eta) d\eta - \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta \right\} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Scegliendo nell'ultimo integrale il cammino rettilineo tra  $z$  e  $z + \Delta z$  parametrizzato:

$$\eta(t) = z + t\Delta z \quad , \quad t \in [0, 1] \quad (4.3.7)$$

La (4.3.6) diventa:

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_0^1 f(\eta(t)) \frac{d\eta}{dt} dt = \frac{1}{\Delta z} \int_0^1 f(z + t\Delta z) \Delta z dt = \int_0^1 f(z + t\Delta z) dt \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} f(z) \int_0^1 dt = f(z) \quad (4.3.8)$$

Dato che

$$\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} \equiv F'(z) = f(z) \quad (4.3.9)$$

con  $F'(z)$  continua, allora  $F(z)$  è analitica in  $G$ . ■

**Definizione 4.4.** La funzione  $F(z)$  tale che  $F'(z) = f(z)$  si dice **Integrale indefinito** o **Primitiva** di  $f(z)$ .

# L'integrale di Cauchy

## 5.1 Formula di Cauchy

**Teorema 5.1 (II Teorema di Cauchy, I versione).**  $f(z)$  analitica in un dominio  $G$  semplicemente connesso e limitato dal contorno  $C$ .

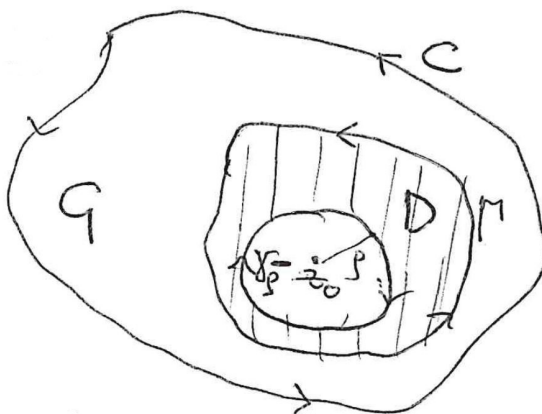
Sia  $z_0 \in G$  e  $\Gamma$  contorno chiuso completamente contenuto in  $G \Rightarrow$  vale la **formula di Cauchy**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5.1.1)$$

*Dimostrazione.* Si introduce la funzione

$$\phi(z) \equiv \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (5.1.2)$$

che è analitica in tutto  $G$  tranne che in  $z_0$ .



Considerando il dominio  $D$  in figura si trova, applicando il (4.3):

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5.1.3)$$

Considerando in particolare una curva  $\gamma_\rho$  parametrizzata come:

$$\gamma_\rho: z(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (5.1.4)$$

Si ha

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (5.1.5)$$

Ma dato che il primo membro di quest'uguaglianza non dipende da  $\rho$ , non vi può dipendere nemmeno il secondo, per cui lo si calcola per  $\rho \rightarrow 0$

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta = i f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0) \quad (5.1.6)$$

E dividendo per  $2\pi i$  si trova la tesi. ■

**Teorema 5.2 (II teorema di Cauchy, II e III versione).**  $f(z)$  analitica in un dominio  $G$  semplicemente connesso e limitato dal contorno  $C$ , continua nel dominio chiuso  $\bar{G}$  e  $z_0 \in G$ .

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C=\partial G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5.1.7)$$

La formula vale anche nel caso in cui  $G$  sia un dominio a connessione multipla, considerando come  $C = \partial G$  la frontiera totale del dominio  $G$ .

Se il punto  $z_0$  si trovasse invece all'esterno di  $\Gamma$ , la funzione sarebbe analitica nel dominio da essa contenuto per cui l'integrale farebbe 0.

Rimane da discutere il caso limite in cui  $z_0 \in \Gamma$ , in questo caso l'integrale non risulta, in generale, ben definito.

### 5.1.1 Valore principale di Cauchy

Facendo riferimento alla formula di Cauchy, si consideri il caso  $z_0 \in \Gamma$ .

Se  $\Gamma$  è derivabile in  $z_0$  (geometricamente esiste la tangente alla curva in tal punto) allora l'integrale esiste nel senso di valore principale di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5.1.8)$$

Con  $\Gamma_{\epsilon}$  parte del contorno  $\Gamma$  al di fuori del cerchio  $|z - z_0| < \epsilon$ , da cui

$$\frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2} f(z_0) \quad (5.1.9)$$

Se invece  $f(z)$  soddisfacesse:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq k|z_1 - z_2|^{\gamma} \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad \forall z_1, z_2 \in G \quad (5.1.10)$$

detta condizione di Holder ( $\gamma < 1$ ) o Lipschitz ( $\gamma = 1$ ), allora l'integrale esisterebbe come valore principale secondo Cauchy, ma in generale non corrisponderebbe a  $\frac{1}{2}f(z_0)$ .

Si noti come tale condizione implichi continuità, senza che sia vero in generale l'affermazione inversa.

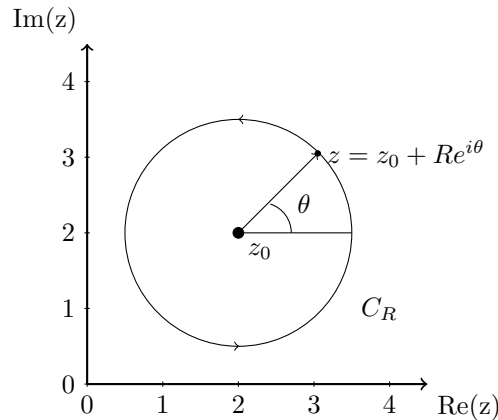
## 5.2 Formula del valor medio

Si consideri nella formula di Cauchy (5.1.1) una circonferenza  $C_R$  di raggio  $R$  e centro  $z_0$ , contenuta completamente nel dominio  $G$  della funzione  $f(z)$  al posto di  $\Gamma$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \quad (5.2.1)$$

Riassumendo:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} f(z_0 + Re^{i\theta}) dz \quad (5.2.2)$$



## 5.3 Principio del massimo modulo di una funzione analitica

**Teorema 5.3.** Sia  $f(z)$  analitica nel dominio  $G$  connesso e limitato e continua sul dominio chiuso  $\partial\bar{G}$ , allora:

- il massimo modulo  $\max_{z \in G} |f(z)|$  è assunto sulla frontiera  $\partial\bar{G}$  o

- $|f(z)|$  costante

*Dimostrazione.* Si scrive  $f(z) = u + iv$ , se ne calcola il modulo:

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \quad (5.3.1)$$

Per ipotesi è una funzione reale di 2 variabili, continua nel dominio chiuso e limitato  $\bar{G}$ : per il teorema di Weierstrass assume il valore massimo in un punto del dominio:

$$M = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = |f(z_0)| \quad z_0 \in \bar{G} \quad (5.3.2)$$

Suppongo  $z_0 \in G$ , sia allora  $\bar{z}$  altro punto interno a  $G$  e  $\gamma$  una curva completamente contenuta in  $G$  che li contenga. Si definisce:

$$d \equiv \text{dist}(\gamma, \partial G) \equiv \min |z_2 - z_1| \quad \text{con } z_1 \in \gamma, z_2 \in \partial G \quad (5.3.3)$$

Si consideri la circonferenza  $k_0$  centrata in  $z_0$  e di raggio  $R = \frac{d}{2}$ , in modo che siano contenute in  $G$ . Si trova:

$$M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = M \quad (5.3.4)$$

Di conseguenza:

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta = 2\pi M \quad (5.3.5)$$

Per cui dato che  $|f(z)| \leq M \forall z \in \bar{G}$  si deduce che:

$$|f(z)| = M \quad \forall z \in k_0 \quad (5.3.6)$$

lo stesso vale per ogni circonferenza di centro  $z_0$  e raggio minore di  $\frac{d}{2}$ .

Se  $z_1$  è l'ultimo punto di intersezione fra  $k_0$  e  $\gamma$  si ripete il procedimento considerando la circonferenza  $k_1$  di centro  $z_1$  e raggio  $R$ . Si può quindi iterare il procedimento sino a  $\bar{z}$ .

Di conseguenza  $|f(z)| = M \forall z \in G$  e, per continuità:

$$|f(z)| = M \quad \forall z \in \partial G \quad (5.3.7)$$

Per cui se la funzione non è costante il punto di massimo deve appartenere alla frontiera del dominio. ■

Analogamente se risultano verificate tali ipotesi vale anche il **principio del minimo modulo**, secondo cui o il modulo funzione è costante oppure il minimo valore della funzione viene assunto sulla frontiera.

**Teorema 5.4.**  $f(z)$  è analitica in un dominio  $G$

$$|f(z)| = \text{costante} \forall z \in G \iff f(z) = \text{costante} \forall z \in G \quad (5.3.8)$$

*Dimostrazione.* se  $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} = k$  costante allora  $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = k^2$ .

Se  $k = 0$ , si tratta del caso banale di  $f(z) = 0$ .

Se  $k \neq 0$  si derivi il modulo quadro rispetto a  $x$  e  $y$ , dopodichè sfruttando le condizioni di C.R.:

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ vv_x + uu_y = 0 \end{cases} \quad (5.3.9)$$

Si ricava che  $u_x = u_y = 0$  e per cui  $v_x = v_y = 0$  dalle condizioni di C.R.. ■

## 5.4 Integrali dipendenti da un parametro

**Teorema 5.5.**  $g(z, \eta)$  funzione di due variabili complesse,  $z \in G$  (aperto e connesso) e  $\eta \in C$  curva regolare a tratti.

- $g(z, \eta)$  sia analitica rispetto a  $z \forall z \in G, \forall \eta \in C$ .
- $g(z, \eta)$  e  $\frac{\partial g(z, \eta)}{\partial \eta}$ , continue nelle variabili  $z$  ed  $\eta \forall z \in G, \forall \eta \in C$ .

$\Rightarrow$

$$F(z) \equiv \int_C g(z, \eta) d\eta \quad (5.4.1)$$

Risulta analitica rispetto a  $z$  nel dominio  $G$  e la sua derivata può essere calcolata tramite derivazione sotto il segno di integrale.

*Dimostrazione.* Per le ipotesi fatte su  $g$ ,  $F(z)$  risulta derivabile rispetto ad  $x$  ed  $y$ . Tali derivate parziali, per i teoremi dell'analisi reale, si possono calcolare derivando sotto il segno di integrale:

$$F_x = \int_C g_x(z, \eta) d\eta \quad F_y = \int_C g_y(z, \eta) d\eta \quad (5.4.2)$$

Essendo  $g$  analitica valgono le condizioni di C.R., ma di conseguenza tali condizioni valgono anche per  $F$ ,  $F_x + iF_y = 0$ , per cui  $F(z)$  analitica.

La derivata di  $F(z)$  risulta:

$$F'(z) = F_x(z) = -iF_y(z) = \int_C g_x(z, \eta) d\eta = \int_C -ig_y(z, \eta) d\eta = \int_C \frac{\partial g}{\partial z}(z, \eta) d\eta \quad (5.4.3)$$

■

## 5.5 Derivata di ordine qualsiasi di una funzione analitica

**Teorema 5.6.**  $f(z)$  funzione analitica in  $G$  e continua in  $\bar{G}$ .

$\Rightarrow \forall z \in G$  esiste la derivata di ordine qualsiasi di  $f(z)$ , data da:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} d\eta \quad (5.5.1)$$

*Dimostrazione.* Si scriva la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \quad (5.5.2)$$

La funzione integranda  $g(z, \eta) = \frac{f(\eta)}{\eta - z}$  soddisfa le ipotesi del teorema 5.5, per cui si può calcolare la derivata sotto il segno di integrale:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{G}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \quad (5.5.3)$$

Analogamente a prima la funzione integranda soddisfa le ipotesi del teorema citato, per cui:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\bar{G}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^3} d\eta \quad (5.5.4)$$

Procedendo in tal modo si trovano gli ordini successivi. ■

Da questo teorema si ricava che una funzione analitica in un dominio  $G$  ha derivate continue di ordine qualsiasi al suo interno.

## 5.6 Teorema di Morera

**Teorema 5.7.**  $f(z)$  funzione continua in  $G$  dominio semplicemente connesso, tale che,  $\forall \Gamma$  contorno chiuso:

$$\oint_{\Gamma} f(\eta) d\eta = 0 \quad (5.6.1)$$

$\Rightarrow f(z)$  è analitica in  $G$

*Dimostrazione.* Si considera:

$$F(z) = \int_z^{z_0} f(\eta) d\eta \quad z, z_0 \in G \quad (5.6.2)$$

Il cui integrale sia fatto rispetto ad un qualsiasi cammino congiungenti i 2 punti. Dal teorema 4.6 tale funzione è analitica e  $F'(z) = f(z)$ . Tuttavia anche questa funzione è analitica per il teorema 5.6. Di conseguenza  $f(z)$  analitica con derivata  $f'(z) = F''(z)$ . ■

## 5.7 Teorema di Liouville

**Teorema 5.8.**  $f(z)$  analitica intera,  $|f(z)|$  uniformemente limitato

$$\exists M > 0 \text{ tale che } |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C} \quad (5.7.1)$$

$\Rightarrow f(z)$  è identicamente uguale ad una costante.

*Dimostrazione.* Si considera:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \quad (5.7.2)$$

Con  $C_R : \eta(\theta) = z + Re^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$  circonferenza di raggio  $R$  e centro  $z$ , ossia

$$\eta(\theta) = z + Re^{i\theta} \quad (5.7.3)$$

Considerando il modulo dell'espressione integrale della derivata si trova

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi i} \left| \oint_{C_R} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z|^2} |d\eta| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\eta(\theta))|}{R^2} R d\theta \leq \frac{M}{2\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{R}$$

La disuguaglianza deve valere per ogni valore arbitrario di  $R$ , per cui prendendo il limite  $R \rightarrow \infty$  si ha

$$|f'(z)| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \quad (5.7.4)$$

Per cui  $f(z)$  è una costante. ■

Un utile applicazione del teorema di Liouville può essere la dimostrazione del:

**Teorema 5.9 (Th fondamentale dell'algebra).** Dato un polinomio di grado  $n \geq 1$

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad a_n \neq 0 \quad (5.7.5)$$

ha almeno una radice in  $\mathbb{C}$

*Dimostrazione.* Se  $a_0 = 0$  allora  $P(0) = 0$ , caso banale.

Se  $a_0 \neq 0$ , si supponga per assurdo che  $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ .

In tal caso la funzione  $g(z) \equiv \frac{1}{P(z)}$  risulta essere analitica su tutto  $\mathbb{C}$ , intera.

Inoltre sarà anche limitata inferiormente in modulo:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0 \quad (5.7.6)$$

Per cui esiste  $R$  tale che  $|g(z)| < 1$  per  $|z| > R$ . All'interno del cerchio di raggio  $R$ ,  $g(z)$  è continua, per cui limitata in modulo  $|g(z)| < M_R, \forall z : |z| \leq R$ .

Mettendo insieme le condizioni si deduce che  $|g(z)|$  è uniformemente limitato in  $\mathbb{C}$ , per cui applicando il teorema di Liouville dovrebbe essere uguale ad una costante.

Tuttavia questo è assurdo poichè tende a 0 all'infinito e  $g(0) = a_0 \neq 0$ . ■

# Serie uniformemente convergenti di funzioni di variabile complessa

Data una successione infinita di funzioni univoche di una variabile complessa  $\{u_n(z); n = 0, 1, 2, \dots\}$  nel dominio  $G$ , si chiama *Serie di funzioni* l'espressione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \quad (7.0.1)$$

**Definizione 7.1.** si dice che la (7.0.1) è **convergente** nel dominio  $G$  alla funzione univoca  $f(z)$  se

$$\forall z \in G, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z) \quad (7.0.2)$$

con

$$S_n(z) \equiv \sum_{c=0}^n u_c(z) \quad (7.0.3)$$

Somma parziale  $n$ -esima della serie.

Cioè se

$$\forall z \in G \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, z) : \left| f(z) - \sum_{c=0}^n u_c(z) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon, z) \quad (7.0.4)$$

In questo caso  $f(z)$  si dice *Somma della serie* (7.0.1) nel dominio  $G$ .

Per una serie convergente, la serie

$$\sum_{c=n+1}^{\infty} u_c(z) = f(z) - S_n(z) \quad (7.0.5)$$

è detta *resto  $n$ -esimo* della serie e si indica con  $r_n(z)$ .

$$r_n(z) = f(z) - S_n(z) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z) = 0 \quad (7.0.6)$$

**Definizione 7.2.** Si dice che (7.0.1) è **uniformemente convergente** nel dominio  $G$  alla funzione univoca  $f(z)$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \left| f(z) - \sum_{c=0}^n u_c(z) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad \forall z \in G \quad (7.0.7)$$

**Teorema 7.1 (Criterio di Weierstrass).** Se

$$|u_n(z)| \leq |a_n| \quad \forall z \in G \quad (7.0.8)$$

e la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad (7.0.9)$$

è convergente, allora la serie (7.0.1) converge uniformemente nel dominio  $G$ .

*Dimostrazione.* Essendo (7.0.9) convergente,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \sum_{c=n+1}^{\infty} |a_c| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad (7.0.10)$$

Da cui si ha anche

$$|r_n(z)| = \left| \sum_{c=n+1}^{\infty} u_c(z) \right| \leq \sum_{c=n+1}^{\infty} |u_c(z)| \leq \sum_{c=n+1}^{\infty} |a_c| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall z \in G \quad (7.0.11)$$

■

**NB:** Il criterio (7.1) è una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza uniforme.



## 7.1 Proprietà delle serie uniformemente convergenti

**Teorema 7.2.** *Se le funzioni  $u_n(z)$  sono continue in un dominio  $G$  e la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \quad (7.1.1)$$

*converge uniformemente in  $G$  alla funzione  $f(z)$ , allora anche  $f(z)$  è continua*

**Teorema 7.3.** *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \quad (7.1.2)$$

*di funzioni continue  $u_n(z)$  converge uniformemente in un dominio  $G$  alla funzione  $f(z)$ , allora*

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C u_n(z) dz \quad (7.1.3)$$

$\forall C$  curva regolare a tratti in  $G$ .

**Teorema 7.4 (Th. di Weierstrass).** *Se le funzioni  $u_n(z)$  sono analitiche in un dominio  $G$  e la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \quad (7.1.4)$$

*converge uniformemente alla funzione  $f(z)$  in ogni sottodominio chiuso  $\bar{G}' \subset G$ , allora:*

- $f(z)$  è analitica in  $G$ .
- La derivata  $c$ -esima vale:

$$f^{(c)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(c)}(z) \quad (7.1.5)$$

- La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(c)}(z) \quad (7.1.6)$$

*converge uniformemente in ogni sottodominio chiuso  $\bar{G}' \subset G$*

**Esempio:**

Si considera la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (7.1.7)$$

Le funzioni  $u_n(z)$  sono analitiche intere e vale  $|u_n(z)| \leq \frac{1}{n^2} \forall |z| \leq 1$ . Per il criterio di Weierstrass (7.1) la serie converge uniformemente nel cerchio unitario, dominio chiuso  $\bar{G}$ .

La serie delle derivate  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$  non converge uniformemente nel cerchio di raggio unitario, in quanto diverge per  $z = 1$ , ma per il teorema di Weierstrass (7.4) converge uniformemente in ogni sottodominio chiuso.

## 7.2 Serie di potenze di una variabile complessa

Si consideri il caso in cui  $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$  con  $c_n \in \mathbb{C}$  e  $z_0$  punto fisso del piano complesso.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.2.1)$$

viene detta *Serie di Potenze*.

Le funzioni  $u_n = c_n(z - z_0)^n$  sono intere.

Il dominio di convergenza di una serie di potenze dipende dalla forma dei coefficienti  $c_n$ .

**Esempio:**

- La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(z - z_0)^n \quad (7.2.2)$$

converge solo nel punto  $z = z_0$ .

Infatti

$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = (n+1)|z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \forall z \neq z_0 \quad (7.2.3)$$

perciò la serie risulta divergente  $\forall z \neq z_0$  dal momento che non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0 \quad (7.2.4)$$

- La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z - z_0)^n \quad (7.2.5)$$

converge assolutamente  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Infatti

$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z - z_0|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall z \quad (7.2.6)$$

La serie dei moduli è convergente, per cui per il criterio di D'Alembert la serie è assolutamente convergente

**Teorema 7.5 (Th. di Abel).** *Se la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.2.7)$$

*converge in un punto  $z_1 \neq z_0$ , allora essa converge assolutamente  $\forall z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$  e, inoltre, converge uniformemente in ogni cerchio  $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$ .*

*Dimostrazione.* Si prenda  $z$  tale che  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  e si pone

$$q \equiv \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1 \quad (7.2.8)$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n \quad (7.2.9)$$

è convergente per ipotesi e quindi per il criterio necessario di convergenza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z_1 - z_0)^n = 0 \Rightarrow \exists M : |c_n||z_1 - z_0|^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \exists M > 0 : |c_n| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|^n}$$

Ne segue che

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z - z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{M}{1 - q} \quad (7.2.10)$$

che dimostra la convergenza della serie  $\forall z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$  ( $\iff q < 1$ ).

Prendendo  $z$  tale che  $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$ , risulta

$$|c_n(z - z_0)^n| \leq |c_n||z - z_0|^n \leq M \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n} \quad (7.2.11)$$

Ed essendo questa una serie geometrica convergente di ragione  $\frac{\rho}{|z_1 - z_0|} < 1$  per il criterio (7.1) la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.2.12)$$

risulta essere uniformemente convergente in ogni cerchio  $|z - z_0| \leq \rho$  di raggio  $\rho \leq |z_1 - z_0|$ . ■

Si elencano di seguito una serie di conseguenze di (7.5):

- Se la serie di potenze diverge in un punto  $z = z_1$  allora diverge  $\forall z : |z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .
- Per ogni serie di potenze esiste un  $R \geq 0$  tale che all'interno del cerchio  $|z - z_0| < R$  la serie è convergente, mentre al di fuori è divergente.

*Dimostrazione.* Si prende come  $R$  il  $\sup\{|z - z_0|\}$  sugli  $z$  tali che a serie di potenze sia convergente.

Se  $R = 0$ , allora la serie converge solo in  $z = z_0$ .

Se  $R = \infty$ , allora la serie converge in tutto il piano complesso.

Se  $0 < R < \infty$ , la serie diverge per  $|z - z_0| > R$ , mentre converge per  $|z - z_0| < R$ .

Tutto in base al Th. di Abel. ■

$R$  viene chiamato *Raggio di convergenza* e il dominio  $|z - z_0| < R$  *Cerchio di convergenza*.

Si dimostra che è dato dalla **formula di Cauchy-Hadamard**:

$$R = \frac{1}{l} \quad l \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{\sqrt[n]{|c_n|}, k \geq n\} \quad (7.2.13)$$

- Dato che le funzioni  $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$  sono intere e siccome

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.2.14)$$

converge uniformemente in ogni cerchio  $|z - z_0| \leq \rho$  con  $\rho < R$ , allora converge anche in ogni sottodominio chiuso del cerchio di convergenza.

Per il (7.4) allora la somma  $f(z)$  della serie è analitica e, dal momento che la si può integrare o derivare termine a termine un numero qualsiasi di volte nel cerchio di convergenza, il raggio di convergenza della serie derivata è lo stesso della serie di partenza.

- Detta  $f(z)$  la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.2.15)$$

vale la formula:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (7.2.16)$$

*Dimostrazione.* Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.2.17)$$

si nota che  $f(z_0) = c_0$ .

Inoltre, derivando termine a termine:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} \quad , \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) (z - z_0)^{n-2} \quad , \\ \dots \quad , \quad f^{(c)}(z) &= \sum_{n=c}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-c+1) (z - z_0)^{n-c} \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Ponendo nella (7.2.18)  $z = z_0$  si trova:

$$f'(z_0) = c_1 \quad , \quad f''(z_0) = c_2 \cdot 2! \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(c)}(z_0) = c_c \cdot c! \quad (7.2.19)$$

Che non è altro che

$$c_c = \frac{1}{c!} f^{(c)}(z_0) \quad \forall c \in \mathbb{N} \quad (7.2.20)$$

**Esempio:**

La serie di potenze con  $c_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \quad (7.2.21)$$

è una *Serie geometrica complessa*, ovvero una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \quad \eta \in \mathbb{C} \quad (7.2.22)$$

La (7.2.22) ha raggio di convergenza  $R = 1$ , per cui diverge se  $|z - z_0| \geq 1$  mentre converge assolutamente se  $|z - z_0| < 1$ .

La somma della serie è:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (z - z_0)^{n+1}}{1 - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - (z - z_0)} \quad (7.2.23)$$

# Sviluppo in serie di Taylor

## 8.1 Il teorema di Taylor

**Teorema 8.1.**  $f(z)$  funzione analitica all'interno del cerchio  $|z - z_0| < R$

$\implies$  all'interno del cerchio la funzione può essere rappresentata in modo univoco da una serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (8.1.1)$$

*Dimostrazione.* Sia  $z$  tale che  $|z - z_0| < R$ , si consideri la circonferenza di raggio  $\rho$  tale che  $|z - z_0| < \rho < R$ .  $f(z)$  è analitica nel cerchio di raggio  $R$ , per cui dal teorema di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \quad (8.1.2)$$

Siccome  $\eta \in C_\rho \implies |z - z_0| < |\eta - z_0| < \rho$  per cui  $\left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| < 1$ .

Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta - z} &= \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\eta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} = \\ &= \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Si sostituisce questa espressione nella (8.1.2) e si integra termine a termine. Si può fare per via della convergenza uniforme della serie  $\sum \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$ , maggiorata in modulo dalla serie convergente

$$M \sum \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho} \sum \left( \frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^n = \frac{M}{\rho - |z - z_0|}$$

Dato che  $M \equiv \max |f(\eta)|$  si trova

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \right) (z - z_0)^n \quad (8.1.4)$$

Ma per il Th. di Cauchy (5.1) si può passare dall'integrale su  $C_\rho$  a un integrale su un contorno chiuso  $C$  qualunque contenuto nel cerchio  $\Delta R$  e contenente all'interno  $z_0$ .

Perciò si trova che  $\forall z \in \Delta_R$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (8.1.5)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (8.1.6)$$

■

Si osservi che nell'analisi reale dal fatto che  $f(x) \in C^\infty[a, b]$  non segue necessariamente che la funzione sia sviluppabile in una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  con  $x_0 \in [a, b]$  e convergente  $\forall x \in [a, b]$ .

Ad esempio la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , ma posto  $x_0 = 0$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  converge a  $f(x)$  solo se  $x \in [-1, 1]$ .

## 8.2 Esempi

### 8.2.1 Funzione logaritmo

Si consideri della funzione  $\log(z)$  la determinazione principale ( $k = 0$ ) con  $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$ . In questo modo si ha il taglio sulla semiretta reale negativa.

$$\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z) \quad \arg(z) \in [-\pi, \pi] \quad (8.2.1)$$

Si tratta di una funzione analitica in  $\mathbb{C}/\{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ , per cui lo sarà nel cerchio  $|z - 1| < 1$ .

Si determina lo sviluppo di Taylor attorno a 1, con raggio di convergenza  $R = 1$ .

Sapendo che:

$$(\log(z))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n} \quad (8.2.2)$$

Si ottiene:

$$\log(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad \forall z : |z-1| < 1 \quad (8.2.3)$$

### 8.2.2 Funzione esponenziale

E' una funzione intera con:

$$(e^z)^{(n)} = e^z \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (8.2.4)$$

Si ottiene di conseguenza che lo sviluppo di Taylor attorno a  $z = 0$ :

$$e^z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (8.2.5)$$

Con raggio di convergenza  $R = \infty$ .

### 8.2.3 Funzioni trigonometriche

Sono funzioni intere con:

$$(\cos(z))' = -\sin(z) \quad (\sin(z))' = \cos(z) \quad (8.2.6)$$

Si ricavano gli sviluppi attorno a  $z = 0$ :

$$\cos(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (8.2.7)$$

Con raggio di convergenza  $R = \infty$ .

### 8.2.4 Funzioni iperboliche

Sono intere con derivate:

$$(\cosh(z))' = \sinh(z) \quad (\sinh(z))' = \cosh(z) \quad (8.2.8)$$

Per cui attorno a 0 si ricavano gli sviluppi:

$$\cosh(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (8.2.9)$$

Con raggio di convergenza  $R = \infty$ .

### 8.2.5 La funzione $f(z) = \frac{1}{z-a}$

Si tratta di una funzione analitica  $\forall z \in \mathbb{C}$  tale che  $z \neq a$ .

Di conseguenza il raggio di convergenza della serie sarà  $R = |z_0 - a|$ .

Si può riscrivere come:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0) - (a-z_0)} = -\frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0-a)^{n-1}} (z-z_0)^n \quad (8.2.10)$$

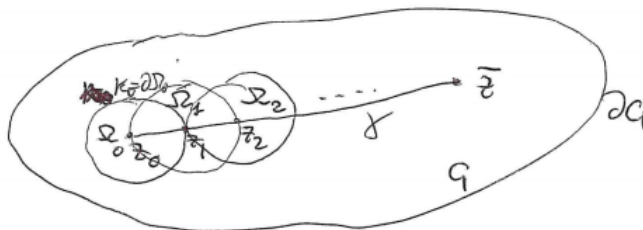
## 8.3 Proprietà degli zeri di una funzione analitica

### 8.3.1 Teorema di unicità

**Teorema 8.2.**  $f(z)$  analitica in un dominio connesso  $G$  tale che  $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in G \quad (8.3.1)$$

*Dimostrazione.* Simile al principio del massimo modulo di una funzione analitica, si consideri un punto  $t$  interno a  $G$  e sia  $\gamma$  curva completamente contenuta in  $G$  che colleghi  $z_0$  e  $\bar{z}$ .



Si definisce:

$$d \equiv \text{dist}(\gamma, \partial G) \equiv \min |z_1 - z_2| \quad z_1 \in \gamma, \quad z_2 \in \partial G \quad (8.3.2)$$

Si prenda il cerchio  $\Omega$  centrato in  $z_0$  e di raggio  $R = \frac{d}{2}$ , in questo modo  $\Omega \subset G$ , al suo interno  $f(z)$  è analitica.

Sfruttando le ipotesi ed il teorema di Taylor, si ottiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \equiv 0 \quad \forall z \in \Omega \quad (8.3.3)$$

Da cui si ottiene la tesi  $\forall z \in \Omega$ . Se  $z_1$  è l'ultimo punto di intersezione fra il cerchio e  $\gamma$  si trova per continuità che lo stesso vale anche in questo punto.

Si ripete il procedimento prendendo il cerchio di raggio  $R$  e centro  $z_1$ , e così via sino ad un punto qualunque. ■

### 8.3.2 Zeri di una funzione analitica

Sia  $f(z)$  funzione analitica non identicamente nulla, in un dominio connesso  $G$ .

Se  $f(z_0) = 0 \rightarrow z_0$  è uno zero di  $f(z)$  e:

- se  $f(z_0) = 0$ , ma  $f'(z_0) \neq 0$  si dice zero di ordine 1
- se  $f(z_0) = \dots = f^{(n)}(z_0) = 0$  ma  $f^{(n+1)}(z_0) \neq 0$  si dice zero di ordine  $n$

Per il teorema di unicità (8.2) non può essere  $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Definizione 8.1.** Uno zero è punto isolato se esiste un intorno in cui non ci sono altri zeri.

**Teorema 8.3.** Gli zeri di una funzione analitica non nulla in un dominio connesso  $G$  sono punti isolati.

Detto  $\Omega$  l'insieme degli zeri di  $f(z)$  in  $G$ , gli eventuali punti di accumulazione di  $\Omega$  non appartengono a  $G$ .

*Dimostrazione.* Se  $z_0 \in G$  è uno zero di ordine  $n$  di  $f(z)$ , risulta che, in un  $\delta$ -intorno di  $z_0$  vale lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(z) = \sum_{l=n}^{\infty} c_l (z - z_0)^l = (z - z_0)^n [c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \dots] = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^k \equiv (z - z_0)^n g(z) \quad (8.3.4)$$

dove  $g(z)$  è una funzione analitica nell'intorno di  $z_0$ . Allora, per continuità, esiste un  $\delta$ -intorno di  $z_0$  in cui  $f(z) \neq 0$  tranne che in  $z_0$ .

Di conseguenza  $z_0$  è un punto isolato, dal momento che esiste un  $\delta$ -intorno in cui non ci sono altri zeri. Si supponga ora che l'insieme  $\Omega$  degli zeri di  $f(z)$  abbia un punto di accumulazione  $\bar{z}$ , ovvero esista una successione di zeri  $z_k$  di  $f(z)$  che converga a  $\bar{z}$ . Se, per assurdo,  $\bar{z} \in G$  si avrebbe, essendo  $f(z)$  continua in  $G$ :

$$\lim_{z_n \rightarrow \bar{z}} f(z_k) = f(\bar{z}) = 0 \quad (8.3.5)$$

Per cui  $\bar{z}$  sarebbe uno zero non isolato di  $f(z)$ , in contrasto con quanto già dimostrato. ■

Ad esempio  $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$  si annulla in  $z_n = \frac{1}{n\pi}$  con  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . L'insieme degli zeri ha un punto di accumulazione in  $\bar{z} = 0$ , tuttavia non è un punto di analiticità della funzione.

**Teorema 8.4.**  *$f(z)$  non nulla, analitica in un dominio connesso, può avere solo un numero finito di zeri in ogni sottodominio chiuso e limitato  $\bar{D} \subset G$ .*

*Dimostrazione.* Se ci fossero infiniti zeri in un insieme chiuso e limitato si potrebbe formare una successione convergente a uno zero nel dominio. ■

## 8.4 Teorema di unicità

**Teorema 8.5.**  *$f(z)$  e  $g(z)$  funzioni analitiche in un dominio connesso  $G$ . Sia  $\Omega$  insieme dei punti tali che  $f(z) = g(z)$ .*

*$\implies$  se in  $\Omega$  esiste almeno un punto di accumulazione  $\bar{z} \in G$  (una successione  $\{z_n\} \in \Omega$  tali che  $f(z_n) = g(z_n)$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{z} \in G$ ):*

$$f(z) \equiv g(z) \quad (8.4.1)$$

*Dimostrazione.* Si considera la funzione:

$$F(z) \equiv f(z) - g(z) \quad (8.4.2)$$

Per ogni  $z \in \Omega$   $F(z) = 0$ , suppongo esista un punto di accumulazione  $\bar{z}$  in  $\Omega$ .

Se per assurdo fosse  $F(z)$  diverso dalla funzione nulla in  $G$  per il teorema 8.3  $\bar{z}$  non potrebbe appartenere a  $G$ . ■

Il teorema presenta un facile corollario: se  $f(z)$  e  $g(z)$  sono funzioni analitiche in un connesso  $G$  e coincidono su una curva  $\gamma$  appartenente a  $G$ , allora  $f(z) \equiv g(z)$ .

### 8.4.1 Esempi

Di conseguenza le funzioni analitiche intere sono estensioni analitiche al piano complesso delle funzioni definite sull'asse reale.

La funzione complessa  $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$  con  $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$  è l'unica estensione analitica al dominio connesso  $G = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$  della funzione definita sul semiasse reale  $\log(x)$ . Le funzioni analitiche intere  $f(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z)$  e  $g(z) = 1$  coincidono sull'asse reale e per cui coincidono su tutto il piano complesso.

## 8.5 Il teorema di de l'Hopital-Bernoulli

$f(z)$  e  $g(z)$  funzioni analitiche in dominio  $G$ ,  $z_0 \in G$  zero di ordine  $n$  per entrambe.

$\implies$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} \quad (8.5.1)$$

*Dimostrazione.* Le funzioni si possono sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di  $z_0$

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+l}(z - z_0)^l \quad g(z) = (z - z_0)^n \sum_{l=0}^{\infty} d_{n+l}(z - z_0)^l \quad (8.5.2)$$



Con  $c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$  e  $d_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ .

Per cui:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \dots}{d_n + d_{n+1}(z - z_0) + \dots} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)} \quad (8.5.3)$$

■

## Lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent

Una serie della forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (9.0.1)$$

con  $z_0$  un punto fissato del piano e  $c_n \in \mathbb{C}$  si dice *Serie di Taylor-Laurent*.

Per determinare il dominio di convergenza della (9.0.1) la si riscrive:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad (9.0.2)$$

I due termini della somma sono detti rispettivamente *parte di Taylor* e *parte di Laurent*.

A seguito di quanto visto in (8.1) la parte di Taylor converge in un certo raggio di convergenza  $|z - z_0| < R$  ad una certa funzione analitica  $f_T(z)$ .

La parte di Laurent invece è possibile riscriverla tramite un cambio di variabile come una serie geometrica complessa:

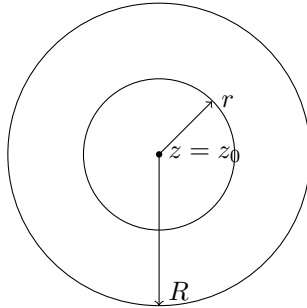
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \rightarrow \eta \equiv \frac{1}{z - z_0} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \eta^n \quad (9.0.3)$$

che converge all'interno di un certo cerchio di convergenza  $|\eta| < R'$  ad una funzione analitica  $g(\eta)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = g(\eta(z)) \equiv f_L(z) \quad \forall z : |z - z_0| > \frac{1}{R'} \equiv r \quad (9.0.4)$$

Da cui, se  $r < R$ , la parte di Taylor e quella di Laurent convergono nel dominio comune  $r < |z - z_0| < R$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f_T(z) + f_L(z) \equiv f(z) \quad \forall z : r < |z - z_0| < R \quad (9.0.5)$$



La somma della serie (9.0.5)  $f(z) = f_T(z) + f_L(z)$  è una funzione analitica nella corona circolare  $r < |z - z_0| < R$ .

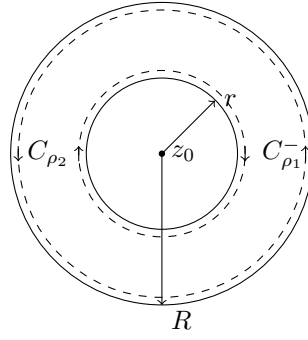
**Teorema 9.1.** Se  $f(z)$  è una funzione analitica in una corona circolare  $r < |z - z_0| < R$ , allora in tale dominio la funzione può essere rappresentata in modo univoco con una Serie di Taylor-Laurent convergente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \quad (9.0.6)$$

dove  $C$  è una curva chiusa arbitraria nella corona  $r < |z - z_0| < R$  che racchiude  $z_0$ .

*Dimostrazione.* Si prende in esame un punto qualunque  $z$  nella corona  $r < |z - z_0| < R$ .

Si considerano due circonferenze  $C_{\rho_1}$  e  $C_{\rho_2}$  centrate in  $z_0$  di raggi  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , tali che  $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$ .



In base al secondo teorema di Cauchy (5.2) per il dominio compreso tra  $C_{\rho_1}$  e  $C_{\rho_2}^-$  si può scrivere:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_2}} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}^-} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \quad (9.0.7)$$

Nel primo integrale la variabile  $\eta \in C_{\rho_2}$  soddisfa la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| &= \frac{|z - z_0|}{\rho_2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{\eta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} = \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (9.0.8)$$

Si può sostituire quanto trovato e integrare termine a termine (per via della convergenza uniforme) trovando:

$$f_T(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_2}} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_2}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, \quad \forall n \geq 0 \quad (9.0.9)$$

Nell'integrale a secondo termine invece la variabile  $\eta$  soddisfa:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\eta - z_0}{z - z_0} \right| &= \frac{\rho_1}{|z - z_0|} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\eta - z_0}{z - z_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (9.0.10)$$

Operando come sopra si trova:

$$f_L(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}^-} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}^-} f(\eta) (\eta - z_0)^n d\eta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow n+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad (9.0.11)$$

con

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}^-} f(\eta) (\eta - z_0)^{n-1} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_1}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-n+1}} d\eta \quad \forall n > 1 \quad (9.0.12)$$

Dato che le funzioni integrate presenti nell'espressione trovata per i coefficienti  $c_{\pm n}$  sono analitiche nella corona  $r < |z - z_0| < R$  si può sostituire l'integrale sulle  $C_\rho$  con uno su una curva arbitraria nel dominio.

Da cui in ultima istanza si trova:

$$\begin{aligned} f(z) = f_T(z) + f_L(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ \text{con} \quad c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (9.0.13)$$

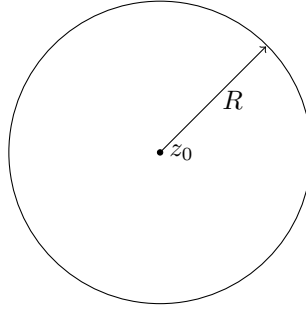
■

**Nota Bene:** Nel caso in cui  $f(z)$  sia analitica  $\forall z : |z - z_0| < R$  si vede che  $c_n = 0 \quad \forall n < 0$ , perciò  $f_L(z) = 0$  e la serie si riduce alla serie di Taylor della funzione:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (9.0.14)$$

## 9.1 I punti singolari isolati di una funzione analitica

**Definizione 9.1.** Si dice che  $z_0$  è un **punto singolare isolato** di una funzione  $f(z)$  se  $f(z)$  è analitica in una corona circolare  $0 < |z - z_0| < R$  dove  $z_0$  è un punto singolare della funzione.



In virtù di (9.1), la funzione  $f(z)$  ammette uno sviluppo in serie di Taylor-Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < R \quad (9.1.1)$$

Ci sono 3 casi possibili:

1.

Se in (9.1.1) si ha  $c_n = 0 \ \forall n < 0$  lo sviluppo si riduce a uno sviluppo in serie di Taylor e

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 \quad (9.1.2)$$

Si dice allora che  $f(z)$  ha una *singolarità eliminabile* in  $z = z_0$  dal momento che si può ridefinire  $f(z_0) \equiv c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

**Esempio:** la funzione

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} \quad (9.1.3)$$

è analitica nella corona circolare  $0 < |z| < \infty$ .

Dal momento che

$$\lim_{z \rightarrow z=0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 \quad (9.1.4)$$

il punto  $z = 0$  risulta essere un punto singolare eliminabile.

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \quad \text{per } |z| > 0 \quad (9.1.5)$$

Risulta valere il seguente:

**Teorema 9.2.** Se  $f(z)$  analitica nella corona  $0 < |z - z_0| < R$  è limitata in un  $\delta$ -intorno del punto  $z_0$ , ossia

$$\exists M > 0 \text{ e } 0 < \delta < R : |f(z)| \leq M \ \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \quad (9.1.6)$$

allora il punto  $z_0$  è un punto singolare eliminabile di  $f(z)$ .

*Dimostrazione.* Si consideri l'espressione integrale per i coefficienti dello sviluppo in serie:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (9.1.7)$$

Si prende come  $C$  una circonferenza  $C_\rho$  centrata in  $z_0$  e contenuta nel  $\delta$ -intorno ( $\rho < \delta$ ). Allora:

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C_\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|^{n+1}} |d\eta| \leq \frac{M}{2\pi \rho^{n+1}} 2\pi \rho = \frac{M}{\rho^n} \quad (9.1.8)$$

Da cui, per  $n < 0$ , il limite per  $\rho \rightarrow 0$  causa  $|c_n| \leq 0$ , ossia  $c_n = 0 \ \forall n < 0$ , da cui il punto  $z_0$  è un punto singolare eliminabile. ■

2.

Se in (9.1.1) si ha

$$c_n = 0 \quad \forall n < -m \quad \text{con } c_{-m} \neq 0 \quad m > 0 \quad (9.1.9)$$

da cui lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent ha la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (9.1.10)$$

(con un numero finito di termini nella parte di Laurent) si dice allora che  $z_0$  è un *polo di ordine*  $m$  di  $f(z)$ .

Vale la condizione:

$$\exists \text{ (finito)} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_m \neq 0 \quad (9.1.11)$$

La (9.1.11) è una condizione necessaria e sufficiente affinché  $z_0$  sia un polo di ordine  $m$ .

Infatti la funzione  $\phi(z) \equiv (z - z_0)^m f(z)$  è analitica per  $0 < |z - z_0| < R$  e ha una singolarità eliminabile in  $z_0$  e quindi ha nella corona circolare uno sviluppo in serie di Taylor, da cui:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n \quad (9.1.12)$$

Da cui si vede che nel termine di Laurent ci sono  $m$  termini  $\neq 0$ , da cui  $z_0$  è un polo di ordine  $m$ .

Quella elencata sopra è la dimostrazione di:

**Teorema 9.3.**  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  di  $f(z)$  se e solo se

$$\exists \text{ (finito)} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = c \neq 0 \quad \text{per qualche } m \neq 0 \quad (9.1.13)$$

**Nota Bene:**  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  di  $f(z) \iff z_0$  è uno zero di ordine  $m$  di  $g(z) \equiv 1/f(z)$ .

In generale vale:

**Teorema 9.4.**  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  di  $f(z)$  se e solo se

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (9.1.14)$$

*Dimostrazione.* Si considera  $g(z) = 1/f(z)$  che ha uno zero di ordine  $m$  in  $z_0$ .

Si usa allora:

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0 \quad (9.1.15)$$

■

**Esempio:** La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \quad (9.1.16)$$

analitica in  $\mathbb{C}/\{0\}$  ha un polo di ordine 2 in  $z = 0$ , infatti

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = 1 \quad (9.1.17)$$

3.

Se in (9.1.1) c'è un numero infinito di termini non nulli nella parte di Laurent si dice che  $z_0$  è un *punto singolare essenziale* di  $f(z)$ .

In questo caso non esiste il limite (finito o infinito) di  $f(z)$  per  $z \rightarrow z_0$ , ma vale:

**Teorema 9.5 (Th. di Casorati-Sochotskij-Weierstrass).**  $\forall \varepsilon > 0$  e  $\forall \beta \in \mathbb{C}$  esiste, in un qualsiasi  $\delta$ -intorno di un punto singolare essenziale  $z_0$  della funzione  $f(z)$  almeno un punto  $z_1$  tale che  $|f(z_1) - \beta| < \varepsilon$ .

E vale anche il più forte:

**Teorema 9.6 (Th. di Picard).**  $\forall \beta \in \mathbb{C}$  esistono, in un qualsiasi  $\delta$ -intorno di un punto singolare essenziale  $z_0$  di  $f(z)$ , infiniti punti in cui  $f(z) = \beta$ .

**Esempio:** La funzione  $f(z) = e^{1/z}$  è analitica  $\forall z \in \mathbb{C}/\{0\}$  e ha un punto singolare essenziale in  $z = 0$ .

Si verifica che  $\nexists \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ : basta restringersi sull'asse reale

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty \quad (9.1.18)$$

Si può anche determinare lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent nella corona  $|z| > 0$ .

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \dots + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 \quad \forall z : |z| > 0 \quad (9.1.19)$$

che è uno sviluppo con infiniti termini non nulli nella parte di Laurent.

## 9.2 Il punto all'infinito come punto singolare isolato

**Definizione 9.2.** Il punto all'infinito ( $z = \infty$ ) è un punto singolare isolato della funzione analitica  $f(z)$  se si può trovare un  $r$ -intorno del punto  $z = \infty$  in cui la funzione è analitica.

Ossia per  $|z| > r$  non ci sono singolarità di  $f(z)$  a distanza finita da  $z=0$ .

La funzione  $f(z)$  ammette allora uno sviluppo in serie di Taylor-Laurent nella corona  $r < |z| < \infty$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (9.2.1)$$

Anche qua si distinguono 3 casi:

1.

Se  $c_n = 0 \quad \forall n > 0$  allora si dice che  $z = \infty$  è un punto singolare eliminabile, con condizione necessaria e sufficiente:

$$\exists \text{ (finito)} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0 \quad (9.2.2)$$

Per cui la funzione si può sviluppare come:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n \quad (9.2.3)$$

**Esempio:** La funzione  $f(z) = 1/z$  è analitica in  $0 < |z| < \infty$  e ha in  $z = \infty$  una singolarità eliminabile dal momento che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 \quad (9.2.4)$$

Se  $C_0 = 0$  allora  $z = \infty$  è uno zero della funzione  $f(z)$ , o, generalizzando, se  $c_0 = c_{-1} = \dots = c_{-m-1} = 0, c_m \neq 0$  allora si tratta di uno zero di ordine  $m$ .

2.

Se nello sviluppo  $c_n = 0 \quad \forall n > m$  e  $c_m \neq 0$ ,  $m > 0$  allora il punto  $z = \infty$  è un polo di ordine  $m$  di  $f(z)$ .

Condizione necessaria e sufficiente è:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad (9.2.5)$$

**Esempio:** La funzione  $f(z) = z$  è intera e ha un polo di ordine 1 in  $z = \infty$ .

Infatti

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z = \infty \quad (9.2.6)$$

e si può scrivere come serie

$$f(z) = z = \sum_{n=-\infty}^1 c_n z^n \quad (9.2.7)$$

con  $c_1 = 1$  e  $c_n = 0 \quad \forall n \neq 1$ .

3.

Se lo sviluppo contiene un numero infinito di termini non nulli con potenze positive di  $z$ , allora si dice che  $z = \infty$  è un punto singolare essenziale.

Non esiste il limite per  $z$  che va a infinito di  $f(z)$ , nè finito nè infinito.

**Esempio:** La funzione  $f(z) = e^z$  è intera e ha in  $z = \infty$  una singolarità essenziale, dal momento che è:

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (9.2.8)$$

Si verifica facilmente che non esiste il limite. Basta mettersi sull'asse reale per osservare che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \neq \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty \quad (9.2.9)$$

**Osservazione:** La trasformazione  $z = 1/z'$  mappa il punto  $z = \infty$  nel punto  $z' = 0$  e l' $r$ -intorno del punto  $z = \infty$  nell' $R'$ -intorno ( $R' = 1/r$ ) di  $z' = 0$ .

Ossia il punto singolare isolato  $z = \infty$  per  $f(z)$  viene mappato nel punto singolare isolato  $z' = 0$  della funzione  $g(z) \equiv f(1/z')$  e il carattere del punto isolato non cambia. Infatti:

$$g(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{z'}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow -n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} z'^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z'^n \quad \text{per } 0 < |z'| < R' = \frac{1}{r'} \quad a_n = c_{-n} \quad \forall n$$

## Teoria dei residui

Una funzione analitica nell'intorno di un punto singolare isolato  $z_0$ , può essere sviluppata in serie di Taylor-Laurent in  $0 < |z - z_0| < R$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \quad (11.0.1)$$

Con  $C$  curva chiusa qualsiasi nel dominio di analiticità della funzione  $f(z)$ ,  $0 < |z - z_0| < R$ , e contenente al suo interno il punto  $z_0$ .

**Definizione 11.1.** Il residuo della funzione analitica  $f(z)$  nel punto  $z_0$  è il numero complesso:

$$Res[f(z), z_0] \equiv C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\eta) d\eta \quad (11.0.2)$$

Se  $z_0$  è un punto singolare eliminabile di  $f(z)$  allora  $Res[f(z), z_0] = 0$ .

### 11.1 Calcolo del residuo per un polo

Se  $z_0$  è un polo di ordine 1 di  $f(z)$  vale la:

$$Res[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (11.1.1)$$

*Dimostrazione.* In questo caso lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent ha la forma:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \implies \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = c_{-1} \equiv Res[f(z), z_0] \quad (11.1.2)$$

■

**Teorema 11.1.** Se  $f(z)$  è della forma:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (11.1.3)$$

con  $g(z)$  e  $h(z)$  funzioni analitiche in  $z_0$ ,  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$  e  $h'(z_0) \neq 0$ , ovvero zero di ordine 1, allora  $z_0$  è un polo di ordine 1 di  $f(z)$ , con:

$$Res[f(z), z_0] = \frac{g(z)}{h'(z)} \quad (11.1.4)$$

*Dimostrazione.* Nell'intorno di  $z_0$ , valgono gli sviluppi di Taylor:

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \dots \quad h(z) = h'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} h''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \quad (11.1.5)$$

Per cui esiste il limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0 \quad (11.1.6)$$

■

Generalizzando:

**Teorema 11.2.**  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  di  $f(z)$ :

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \quad (11.1.7)$$



*Dimostrazione.* In un intorno di  $z_0$ ,  $f(z)$  ammette sviluppo in serie di Taylor-Laurent:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \implies f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots \quad (11.1.8)$$

Da cui

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!c_{-1} + O(z-z_0) \implies \text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

■

## 11.2 Teorema fondamentale della teoria dei residui

**Teorema 11.3.**  $f(z)$  analitica all'interno di un contorno chiuso  $\Gamma$ , tranne che in un numero finito di punti singolari isolati  $z_k$ ,  $k=1, \dots, N$ .

$\implies$  se  $f(z)$  regolare (analitica, o almeno continua) su  $\Gamma$ , allora:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (11.2.1)$$

*Dimostrazione.* Viene anche detto teorema interno dei residui.

Posso isolare i punti singolari isolati  $z_k$  all'interno di  $\Gamma$  con delle curve chiuse  $C_k$  contenute dentro  $\Gamma$ , non intersecanti e tali che contengano internamente solo il punto singolare  $z_k$ .

Applicando il teorema di Cauchy (5.1.1) al dominio a connessione multipla racchiuso dalla frontiera  $\Gamma \cup C_1 \cup C_2 \dots \cup C_N$  si ottiene:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (11.2.2)$$

■

Il teorema vale anche in una formulazione più generale, in cui  $\Gamma$  sia la frontiera totale di un dominio a connessione multipla  $G$ , in cui  $f(z)$  sia ovunque analitica tranne che in un numero  $N$  finito di punti singolari isolati e continua su  $\Gamma$ .

## 11.3 Residuo all'infinito

Se  $z = \infty$  è un punto singolare isolato di  $f(z)$  allora può essere sviluppata in serie di Taylor-Laurent in un intorno  $r < z < \infty$  centrata in  $z_0 = 0$ .

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} d\eta \quad (11.3.1)$$

Con  $C$  curva chiusa nella corona circolare  $r < |z| < \infty$  e racchiudente il punto  $z = 0$  (centro dello sviluppo).

**Definizione 11.2.** Se  $z=\infty$  è un punto singolare isolato della funzione  $f(z)$ , si dice residuo all'infinito di  $f(z)$  il numero complesso:

$$\text{Res}[f(z), \infty] \equiv -C_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(\eta) d\eta \quad (11.3.2)$$

In questo caso il valore del residuo può essere non nullo anche nel caso in cui  $z = \infty$  sia un punto singolare eliminabile. Ad esempio per la funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$ , con  $\text{Res}[\frac{1}{z}, \infty] = -1$ , ma  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$

## 11.4 Teorema esterno dei residui

**Teorema 11.4.**  $f(z)$  è analitica ovunque all'esterno di un contorno chiuso  $\Gamma$ , tranne che in un numero finito  $N_e$  di punti singolari isolati  $z_e$  e  $f(z)$  è regolare su  $\Gamma$ .

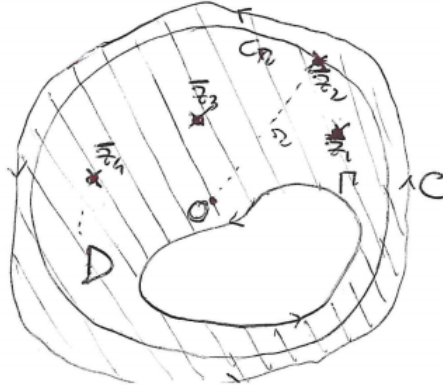
$\Rightarrow$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_1^{N_e} \text{Res}[f(z), z_e] - 2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] \quad (11.4.1)$$

*Dimostrazione.* Si pone  $r \equiv \text{Max}\{|z_e|\}$ ,  $f(z)$  risulta analitica per  $r < |z| < \infty$ , per cui è sviluppabile in serie di Taylor-Laurent.

Tutti i punti singolari isolati sono contenuti nel cerchio  $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$ .

Per cui  $z = \infty$  è punto singolare isolato: presa una qualsiasi curva chiusa  $C$  nella corona circolare e contenente  $z = 0$ , per costruzione conterrà anche la curva  $\Gamma$  e i punti  $z_e$ . Nel dominio  $D$  a connessione



multipla, racchiuso fra le curve  $C$  e  $\Gamma$ ,  $f(z)$  risulta analitica tranne che nei punti  $z_e$ . Applicando il teorema interno dei residui (11.3) si trova che:

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{\Gamma^-} f(z) dz = 2\pi i \sum_{e=1}^{N_{ext}} \text{Res}[f(z), z_e] \quad (11.4.2)$$

Dove  $N_{ext}$  è il numero di punti singolari isolati esterni a  $\Gamma$ .

Si isola dunque la parte su  $\Gamma$  e si sfrutta la definizione di  $\text{Res}[f(z), \infty]$ :

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_1^{N_e} \text{Res}[f(z), z_e] - 2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] \quad (11.4.3)$$

■

Si ottiene come corollario

**Teorema 11.5.**  $f(z)$  analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne che in un numero finito di punti singolari isolati  $z_k$ .

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] + \text{Res}[f(z), \infty] = 0 \quad (11.4.4)$$

*Dimostrazione.* Si pone  $r \equiv \text{Max}\{|z_e|\}$ ,  $f(z)$  risulta analitica per  $r < |z| < \infty$ , per cui è sviluppabile in serie di Taylor-Laurent.

Per cui  $z = \infty$  è punto singolare isolato: presa una qualsiasi curva chiusa  $C$  nella corona circolare e contenente  $z = 0$ , per costruzione conterrà tutti i punti  $z_k$ .

Applicando il teorema esterno dei residui:

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] \quad (11.4.5)$$

Applicando, invece, il teorema interno dei residui:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_1^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (11.4.6)$$

Uguagliando si ricava la tesi.



# Applicazioni dei residui al calcolo di integrali di funzioni di variabili reali

## 12.1 Integrali della forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

**Lemma 12.1.** Se  $f(z)$  è analitica nel semipiano complesso superiore  $\text{Im}(z) \geq 0$  (oppure in quello inferiore) ovunque tranne che in un numero finito di punti singolari isolati e se vale:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \max_{z \in C'_R} |f(z)| = 0 \quad (12.1.1)$$

dove  $C'_R$  è la semicirconferenza di raggio  $R$  e centro in  $z = 0$  nel semipiano complesso superiore (oppure in quello inferiore), allora:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} f(z)dz = 0 \quad (12.1.2)$$

*Dimostrazione.* Segue dal Lemma di Darboux (4.1):

$$\left| \int_{C'_R} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in C'_R} |f(z)| \cdot \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (12.1.3)$$

■

**Teorema 12.2.** Si supponga che  $f(x)$ , definita  $\forall x \in \mathbb{R}$  e tale che ne esista l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{R' \rightarrow \infty} \int_{-R}^{R'} f(x)dx \quad (12.1.4)$$

possa essere prolungata analiticamente al semipiano complesso superiore  $\text{Im}(z) \geq 0$  e che il suo prolungamento analitico  $f(z)$  soddisfi le ipotesi del Lemma (12.1) e non abbia punti singolari sull'asse reale.

Allora si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (12.1.5)$$

dove  $z_k$  sono i punti singolari della funzione nel semipiano complesso superiore (analogo col semipiano inferiore).

*Dimostrazione.* Prendendo  $R > \max_k |z_k|$  e applicando il Th. fondamentale dei residui:

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (12.1.6)$$

Perciò prendendo il limite  $R \rightarrow \infty$  e usando il Lemma (12.1) segue la tesi.

■

**Nota Bene:** Se si applica il Th. (12.2) al semipiano complesso inferiore la curva viene percorsa in senso negativo:

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C'_{R-}} f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (12.1.7)$$

## 12.2 Integrali della forma $\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$

Dove  $R$  è una funzione razionale dei suoi argomenti.

Si ponga  $z \equiv e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ .

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \\ d\theta &= \frac{1}{iz}dz \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta\end{aligned}\tag{12.2.1}$$

Con queste relazioni l'integrale diviene:

$$I \equiv \int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{iz} \equiv \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)dz \tag{12.2.2}$$

dove

$$\tilde{R}(z) \equiv \frac{1}{iz}R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \tag{12.2.3}$$

è una funzione razionale di  $z$  (rapporto di due polinomi primi tra loro in  $z$ ).

$\tilde{R}(z)$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne che negli  $N_q \leq q$  zeri del polinomio di grado  $q$  al denominatore.

Applicando il *Th. interno dei residui* (11.3) l'integrale in (12.2.2) diviene:

$$I = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N_{int}} \text{Res}[\tilde{R}(z), z_k] \tag{12.2.4}$$

Dove la somma è estesa a tutti i poli interni al dominio circondato dalla curva di integrazione (in questo caso si tratta della circonferenza centrata in 0 con raggio 1).

### 12.2.1 Esempio

Si calcoli l'integrale, con  $a \in \mathbb{R}$  e  $|a| < 1$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} \tag{12.2.5}$$

Si applicano le dovute sostituzioni:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz(1 + \frac{a}{2}(z + \frac{1}{z}))} dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a} \tag{12.2.6}$$

Si trovano dunque i punti singolari della funzione integranda:

$$z_1, z_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a} \in \mathbb{R} \implies az^2 + 2z + a = a(z^2 - Sz + P) \tag{12.2.7}$$

Con  $S \equiv z_1 + z_2 = -\frac{2}{a}$ ,  $P \equiv z_1 z_2 = 1$ , da cui un solo punto singolare è all'interno del cerchio di raggio 1:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} = -\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \implies |z_1| = \frac{|a|}{1 + \sqrt{1 - a^2}} < |a| < 1 \tag{12.2.8}$$

Per cui per il teorema interno dei residui si trova:

$$I = \frac{2}{i} 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \tag{12.2.9}$$

### 12.3 Integrali della forma $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$

**Lemma 12.3 (Lemma di Jordan).** *Se la funzione  $f(z)$  è analitica nel semipiano complesso superiore (oppure nell'inferiore), tranne che in un numero finito di punti singolari isolati  $z_k$  e se tende a zero in modulo uniformemente rispetto ad  $\arg(z)$ , ossia:*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \max_{z \in C'_R} |f(z)| \right) = 0 \quad (12.3.1)$$

dove  $C'_R$  è la semicirconferenza di raggio  $R$  e centro  $z=0$  nel semipiano complesso superiore (oppure inferiore), ovvero:

$$\exists \mu(R) : |f(z)| \leq \mu(R) \quad \text{per } |z| = R \quad \text{con } \mu(R) \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow \infty \quad (12.3.2)$$

allora si ha che, prendendo  $a \in \mathbb{R}$ :

•

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} e^{iaz} f(z) dz = 0 \quad \text{per } a > 0 \quad (12.3.3)$$

nel semipiano complesso superiore.

•

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} e^{iaz} f(z) dz = 0 \quad \text{per } a < 0 \quad (12.3.4)$$

nel semipiano complesso inferiore.

*Dimostrazione.* Nel primo caso si parametrizza un semicerchio nel semipiano  $\text{Im}(z) \geq 0$  come

$$C'_R = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\} \quad (12.3.5)$$

da cui

$$\left| \int_{C'_R} e^{iaz} f(z) dz \right| = \left| \int_{C'_R} e^{iaR\cos\theta - aR\sin\theta} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} |f(z)| R d\theta \quad (12.3.6)$$

$$\leq R\mu(R) \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta = R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta = \quad (12.3.7)$$

$$= R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta'} d\theta' = 2R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta} d\theta \quad (12.3.8)$$

Si sfrutta ora il fatto che  $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$  se  $\theta \in [0, \pi/2]$ :

$$\left| \int_{C'_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq 2R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq 2R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta} d\theta = \quad (12.3.9)$$

$$= 2R\mu(R) \left[ \frac{e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta}}{-\frac{2aR}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{a} \mu(R) [1 - e^{-aR}] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (12.3.10)$$

Da cui segue la tesi. Il caso relativo al semipiano inferiore è analogo parametrizzando  $\theta \in [-\pi, 0]$  ■

**Teorema 12.4.** *Se la funzione  $f(x)$ , definita  $\forall x \in \mathbb{R}$ , può essere prolungata analiticamente nel semipiano complesso superiore (oppure in quello inferiore) e il suo prolungamento  $f(z)$  soddisfa le ipotesi del Lemma di Jordan (12.3) e non ha punti singolari sull'asse reale, allora si ha che (per  $a \in \mathbb{R}$ ):*

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[e^{iaz} f(z), z_k] \quad \text{per } a > 0 \quad (12.3.11)$$

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[e^{iaz} f(z), z_k] \quad \text{per } a < 0 \quad (12.3.12)$$

Dove  $z_k$  sono i punti singolari della funzione nel semipiano in esame.

*Dimostrazione.* Basta applicare il Th. interno dei residui (11.3) al dominio racchiuso dal contorno  $[-R, R] \cup C'_R$  e segue direttamente dal Lemma di Jordan (12.3). ■

### 12.3.1 Esempio

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} dx \quad (12.3.13)$$

Si osservi come non si possa scrivere  $I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx$ , poichè tale integrale non esiste a causa della divergenza in 0, a differenza dell'integrale di partenza.

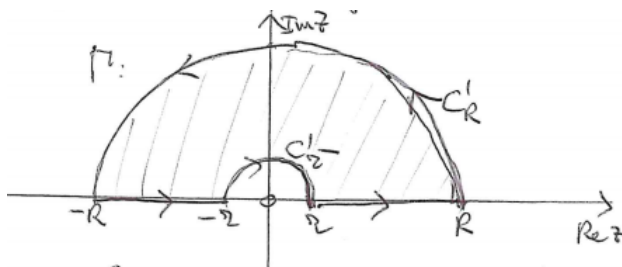
Si può bypassare il problema come:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right\} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} dx = \operatorname{Im} I_1 \quad I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right\} \frac{e^{iax}}{x} dx \equiv P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx \quad (12.3.14)$$

Inteso come integrale in senso principale di Cauchy.

Il prolungamento analitico della funzione  $f(x)$  è la funzione  $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z}$  analitica  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = 0\}$ , difatti in  $z=0$  la funzione ha un polo di ordine 1.

Per calcolare  $I_1$  si utilizza il teorema interno dei residui per l'integrale lungo il cammino chiuso  $\Gamma$ :



Dove:

$$\int_{C'_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz \oint_{\Gamma} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \left\{ \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right\} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{C'_{r-}} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{C'_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0 \quad (12.3.15)$$

Dato che  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , quindi la funzione soddisfa le ipotesi del lemma di Jordan si ha:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0 \quad (12.3.16)$$

Per cui passando al limite si ottiene:

$$I_1 = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = - \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C'_{r-}} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C'_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz \quad (12.3.17)$$

Per il cui calcolo si ricorre:

**Teorema 12.5.** Se la funzione  $F(z)$  ha un polo di ordine 1 in  $z = z_0$ , allora, detto  $\gamma_r$  un arco di circonferenza di centro  $z_0$ , raggio  $r$  e ampiezza  $\alpha$ , si ha:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r^+} F(z) dz = i\alpha \operatorname{Res}[F(z), z_0] \quad (12.3.18)$$

*Dimostrazione.* Se  $z = z_0$  è un polo di ordine 1 di  $F(z)$ , esiste un intorno  $\Delta'_R$  di  $z_0$  in cui  $F(z)$  è analitica e sarà della forma:

$$F(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} \quad (12.3.19)$$

con  $g(z)$  analitica in  $z_0$ .

Allora, prendendo  $r < R$  e parametrizzando  $\gamma_r$  così:

$$\gamma_r = \{z = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha]\} \quad (12.3.20)$$

si trova:

$$\int_{\gamma_r^+} F(z) dz = \int_{\gamma_r^+} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \quad (12.3.21)$$

Perciò, prendendo il limite per  $r \rightarrow 0^+$  e usando la continuità di  $g$  in  $z_0$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r^+} F(z) dz = i \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = ig(z_0) \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} d\theta = i\alpha g(z_0) \quad (12.3.22)$$

Ma dal momento che

$$\text{Res}[F(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) F(z) = g(z_0) \quad (12.3.23)$$

si vede che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r^+} F(z) dz = i\alpha \text{Res}[F(z), z_0] \quad (12.3.24)$$

■

Per cui nell'integrale:

$$I_1 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C'_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz = i\pi \text{Res}\left[\frac{e^{iaz}}{z}, z = 0\right] = i\pi \implies I = \text{Im}(I_1) = \pi \quad (12.3.25)$$

## 12.4 Integrali della forma $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$ o $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx$

Per il caso  $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$  si faccia l'ipotesi:

- il prolungamento analitico  $f(z)$  sia una funzione analitica univoca ovunque tranne che in un numero finito  $N$  di punti singolari isolati  $z_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , non giacenti sul semiasse reale positivo.
- $z = 0$  punto singolare eliminabile.
- Valga la condizione:

$$\max_{z \in C_R} |f(z)| R^{\alpha+1} \rightarrow 0, R \rightarrow \infty \quad \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1 \quad (12.4.1)$$

Su  $C_R$  circonferenza di raggio  $R$  e centro  $z = 0$ .

Si dimostra allora che:

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z)z^\alpha, z_k] \quad (12.4.2)$$

Nel caso  $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx$ , sostituendo alla terza ipotesi:

$$\max_{z \in C_R} |f(z)| R^\alpha \rightarrow 0, R \rightarrow \infty \quad \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1 \quad (12.4.3)$$

Si dimostra che

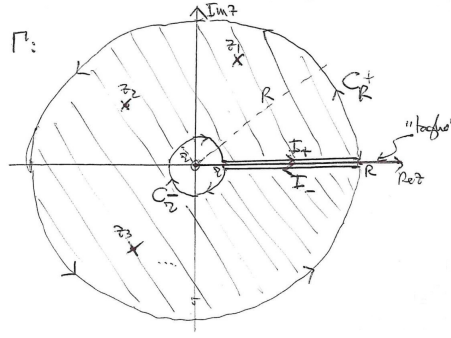
$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z)z^{\alpha-1}, z_k] \quad (12.4.4)$$

*Dimostrazione.* Si dimostra prima la relazione (12.4.2). Si definisce  $F(Z) \equiv z^\alpha f(z)$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$ .

Essendo  $z^\alpha \equiv e^{\alpha \log(z)}$ ,  $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z) + i2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $F(z)$  è una funzione multivoca. Prendendo  $\arg(z) \in [0, 2\pi]$  ed il ramo con  $l = 0$ , diventa una funzione analitica univoca nel dominio  $G = \mathbb{C} / \{z : \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$ , tranne che in un numero finito di punti singolari isolati  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Tale funzione è il prolungamento analitico della funzione integranda  $F(x) = x^\alpha f(x)$  ( $x > 0$ ), esse coincidono sul bordo superiore del "taglio",  $\arg(z) \rightarrow 0^+$ .

Si integra  $F(z)$  lungo il contorno chiuso  $\Gamma$  in Figura (12.4):





Si sceglie  $r$  sufficientemente piccolo ed  $R$  sufficientemente grande, in modo che i punti singolari siano tutti compresi nella corona circolare.

Si sfrutta ora il teorema interno dei residui:

$$\oint F(z)dz = \int_{I^+} F(z)dz + \int_{C_R} F(z)dz + \int_{I^-} F(z)dz + \int_{C_r^-} F(z)dz = 2\pi i \sum_1^{N_e} \text{Res}[f(z)z^{\alpha-1}, z_k] \quad (12.4.5)$$

Si valutano ora i 4 integrali:

- $\int_{I^+} F(z)dz = \int_r^R x^\alpha f(x)dx \rightarrow \int_0^\infty x^\alpha f(x)dx$  per  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ .  
Sfruttando che  $\arg(z) \rightarrow 0^+$ .
- $\int_{C_R} F(z)dz$ , per le ipotesi su  $f(z)$  si ha che:

$$\left| \int_{C_R} F(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |F(z)|dz \leq \max_{z \in C_R} |f(z)| R^\alpha 2\pi R \rightarrow 0 \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z)dz = 0 \quad (12.4.6)$$

- $\int_{I^-} F(z)dz$ , in questo caso  $\arg(z) \rightarrow 2\pi^-$ , per cui  $F(z) = z^\alpha f(z) \rightarrow x^\alpha f(z)e^{i2\pi\alpha}$ . Per cui:

$$\int_{I^-} F(z)dz = \int_R^r x^\alpha f(x)e^{i2\pi\alpha}dx \rightarrow -e^{i2\pi\alpha} \int_0^\infty x^\alpha f(x)dx \text{ per } R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0. \quad (12.4.7)$$

- $\int_{C_r^-} F(z)dz$ , dato che  $z = 0$  è un punto singolare eliminabile di  $f(z)$  per ipotesi, in un  $\delta$ -intorno  $\Delta_z$  sufficientemente piccolo di  $z = 0$ ,  $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \forall z \in \Delta_z$ .  
Per cui prendendo  $r < \delta$

$$\left| \int_{C_r^-} F(z)dz \right| \leq \int_{C_r^-} |F(z)||dz| \leq Mr^\alpha 2\pi r \rightarrow 0 \implies \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} F(z)dz = 0 \quad (12.4.8)$$

Per cui mettendo assieme i pezzi e passando al limite si ottiene la (12.4.2).

Per ricavare la (12.4.4) si ripetono gli stessi passaggi con la sostituzione  $\alpha \rightarrow \alpha - 1$  ■

## 12.5 Integrali della forma $\int_0^\infty f(x)\log(x)dx$

Si faccia l'ipotesi che il prolungamento analitico  $f(z)$  sia una funzione analitica univoca ovunque tranne che in un numero finito  $N$  di punti singolari isolati  $z_k, k = 0, 1, \dots, N$ , non giacenti sul semiasse reale positivo e che  $z = 0$  sia un punto singolare eliminabile.

La funzione  $F(z) \equiv f(z)\log(z)$ , prendendo il ramo con  $k = 0$  e con  $\arg(z) \in [0, 2\pi]$ :

$$\log(z) \equiv \log(|z|) + i\arg(z) \quad (12.5.1)$$

è una funzione analitica univoca nel dominio  $G = \mathbb{C} \setminus \{z : \text{Re}(z) \geq 0, \text{Im}(z) = 0\}$ , tranne che in numero finito di punti singolari isolati. Risulta quindi il prolungamento analitico della funzione integranda, le due funzioni coincidono sul bordo superiore del taglio.

E' possibile integrare la funzione desiderata, considerando il cammino  $\Gamma$  mostrato in figura (12.4) e integrando su essa la funzione  $G(Z) \equiv f(z)\log^2(z)$  con la condizione:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)(\log(z))^2 dz = 0 \quad (12.5.2)$$

Il fatto che  $z = 0$  sia un punto singolare eliminabile per  $f(z)$ , garantisce anche:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z)(\log(z))^2 dz = 0 \quad (12.5.3)$$

Difatti per  $r$  sufficientemente piccolo si trova che  $\exists M > 0, |f(z)| \leq M, \forall z \in C_r$ , da cui:

$$\left| \int_{C_r^-} G(z) dz \right| = \left| \int_{C_r^-} f(z)(\log(z))^2 dz \right| \leq \int_{C_r^-} |f(z)| |\log(z)|^2 |dz| \leq 2\pi r M [(\log(r))^2 + (2\pi)^2] \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad (12.5.4)$$

Prendendo il limite per  $R \rightarrow \infty$  si trova che:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} G(z) dz = \quad (12.5.5)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \int_{I_+} + \int_{I_-} \right\} G(z) dz = \quad (12.5.6)$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x)(\log x)^2 dx - \int_0^{\infty} f(x)(\log x + i2\pi)^2 dx = \quad (12.5.7)$$

$$= \int_0^{\infty} f(x)[(\log x)^2 - (\log x + i2\pi)^2] dx = \quad (12.5.8)$$

$$= 4\pi^2 \int_0^{\infty} f(x) dx - 4\pi i \int_0^{\infty} f(x) \log x dx \quad (12.5.9)$$

Che per il Th interno dei residui (11.3) è uguale a

$$2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z)(\log z)^2, z_k]$$

Prendendo ed eguagliando le parti reali e immaginarie della relazione trovata si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \text{Re} \left\{ \frac{i}{2\pi} \sum_1^N \text{Res}[f(z)(\log(z))^2, z_k] \right\} \\ \int_0^{\infty} f(x) \log(x) dx &= \text{Im} \left\{ -\frac{i}{2} \sum_1^N \text{Res}[f(z)(\log(z))^2, z_k] \right\} \end{aligned} \quad (12.5.10)$$

## Relazione tra funzioni analitiche e armoniche

Se  $f = u + iv$  è una funzione analitica in un certo dominio  $G$ , allora  $u(x, y), v(x, y)$  sono *funzioni armoniche piane* nello stesso dominio.

Ossia,  $\forall (x, y) \in G$ :

$$\begin{aligned}\Delta_2 u &\equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0 \\ \Delta_2 v &\equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = 0\end{aligned}\tag{13.0.1}$$

*Dimostrazione.* Derivando le Condizioni di Cauchy-Riemann (2.1.2),  $f_x + if_y = 0$  rispetto a  $x$  e a  $y$  si trova (essendo analitica,  $f$  è infinitamente differenziabile):

$$\begin{aligned}\begin{cases} f_{xx} + if_{yx} = 0 \Rightarrow f_{xx} = -if_{yx} = -if_{xy} \\ f_{xy} + if_{yy} = 0 \Rightarrow f_{yy} = if_{xy} \end{cases} \\ \Rightarrow \Delta_2 f \equiv f_{xx} + f_{yy} = -if_{xy} + if_{xy} = 0 \iff \Delta_2 u = \Delta_2 v = 0\end{aligned}\tag{13.0.2}$$

■

Le funzioni  $u(x, y), v(x, y)$  si dicono anche *armoniche coniugate*, poichè soddisfano l'equazione di Laplace e valgono per esse le condizioni (2.1.2):

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}\tag{13.0.3}$$

**Osservazione:** Le *curve di livello*  $u(x, y) = cte$  sono ortogonali alle *curve di livello*  $v(x, y) = cte$ .

*Dimostrazione.* Per definizione  $\nabla u = (u_x, u_y)$  è ortogonale alle curve di livello di  $u$  e analogamente per  $\nabla v$ .

Si osserva che in base alle condizioni (2.1.2) vale:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = 0\tag{13.0.4}$$

■

### 13.1 Relazione inversa

Data una funzione armonica  $u(x, y)$  in un dominio semplicemente connesso  $G$ , si può trovare una funzione armonica coniugata  $v(x, y)$  tale che  $f = u + iv$  sia una funzione analitica in  $G$ .

*Dimostrazione.* Si consideri la forma differenziale

$$\omega \equiv A(x, y)dx + B(x, y)dy \quad \text{con} \quad A \equiv -u_y, \quad B \equiv u_x\tag{13.1.1}$$

Osservando che  $A_y = -u_{yy} = u_{xx} = B_x$ , poichè sono armoniche per ipotesi, si vede che  $\omega$  è esatta in  $G$ .

(una forma differenziale si dice *esatta* se esiste una funzione  $f$  differenziabile tale che il suo differenziale coincida con  $\omega$ , ossia  $df = \omega$ ; ndr)

Ossia:

$$\exists v : \omega \equiv -u_y dx + u_x dy = dv = v_x dx + v_y dy \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}\tag{13.1.2}$$

che sono le condizioni (2.1.2) per la funzione  $f = u + iv$ , che quindi è analitica in  $G$ .

(Si noti che la  $v$  è definita a meno di una costante)

■

Questo legame tra funzioni analitiche e armoniche fa in modo che molte proprietà siano a comune tra le due:

## 13.2 Formula del Valor Medio

Data  $u(x, y)$  armonica in  $G$ , allora  $\forall (x_0, y_0) \in G$  e  $\forall R$  tale che la circonferenza  $C_R$  sia contenuta in  $G$ , si ha:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) d\theta \quad (13.2.1)$$

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che

$$\exists f \text{ analitica in } G \text{ tale che } u = \operatorname{Re}(f) \quad (13.2.2)$$

Basta applicare la formula del valor medio per  $f$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \quad (13.2.3)$$

e prendere la parte reali di entrambi i membri. ■

## 13.3 Il principio del Massimo/Minimo

Data  $u(x, y)$  armonica in  $G$  semplicemente connesso e limitato e continua in  $\bar{G}$ , essa non può avere punti di Max o Min in  $G$ , a meno che non sia costante su tutto il dominio, ma solo sulla frontiera  $\partial G$ :

$$\min_{(x,y) \in \partial G} u(x, y) \leq u(x, y) \leq \max_{(x,y) \in \partial G} u(x, y) \quad , \quad \forall (x, y) \in G \quad (13.3.1)$$

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che

$$\exists f \text{ analitica in } G \text{ tale che } u = \operatorname{Re}(f) \quad (13.3.2)$$

e si applica il principio del Max/Min modulo alla funzione analitica

$$g(z) \equiv e^{f(z)} = e^{u+iv} \Rightarrow |g(z)| = e^u \quad (13.3.3)$$

■

## 13.4 Le Trasformazioni Conformi

Data una funzione analitica  $f(z)$  in un dominio  $G$  con la proprietà  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ , l'applicazione  $z \rightarrow z' = f(z)$  si dice *Trasformazione Conforme* del dominio  $G$  nel dominio  $G' = f(G)$ .

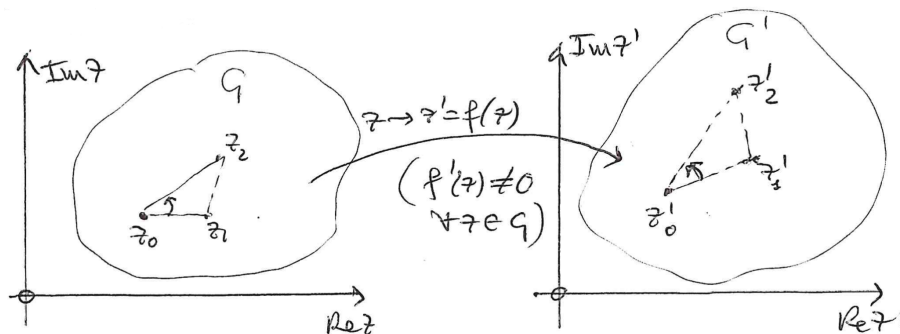


Figura 2: Trasformazione conforme

### 13.4.1 Proprietà geometriche

Una trasformazione conforme possiede nell'intorno di ogni punto  $z_0 \in G$  le proprietà:

1. conservazione degli angoli.
2. costanza delle dilatazioni.

Ossia, l'applicazione  $z \rightarrow z' = f(z)$  trasforma triangoli infinitamente piccoli con vertice in  $z_0$  in triangoli infinitamente piccoli con vertice in  $z'_0 = f(z_0)$ .

*Dimostrazione.* Si consideri la Figura (13.4).

I punti  $z_1, z_2$ , infinitamente vicini a  $z_0$  vengono mappati in  $z'_1 = f(z_1)$  e  $z'_2 = f(z_2)$  infinitamente vicini a  $z'_0 = f(z_0)$ .

Per definizione di derivata complessa:

$$f'(z_0) = \frac{\Delta z'_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta z'_2}{\Delta z_2} \quad (13.4.1)$$

Da cui, ponendo

$$f'(z_0) \equiv k e^{i\alpha} \quad ; \quad k \equiv |f'(z_0)| \quad , \quad \alpha \equiv \text{Arg}(f'(z_0)) \quad (13.4.2)$$

si trova:

$$k e^{i\alpha} = \frac{|\Delta z'_1|}{|\Delta z_1|} e^{i(\text{Arg}(\Delta z'_1) - \text{Arg}(\Delta z_1))} = \frac{|\Delta z'_2|}{|\Delta z_2|} e^{i(\text{Arg}(\Delta z'_2) - \text{Arg}(\Delta z_2))} \quad (13.4.3)$$

Da cui si trova:

$$\frac{|\Delta z'_1|}{|\Delta z_1|} = \frac{|\Delta z'_2|}{|\Delta z_2|} = k \quad (13.4.4)$$

che è la proprietà di costanza delle dilatazioni.  
e anche

$$\text{Arg}(\Delta z'_1) - \text{Arg}(\Delta z_1) = \text{Arg}(\Delta z'_2) - \text{Arg}(\Delta z_2) = \alpha \quad (13.4.5)$$

da cui

$$\text{Arg}(\Delta z'_2) - \text{Arg}(\Delta z'_1) = \text{Arg}(\Delta z_2) - \text{Arg}(\Delta z_1) \quad (13.4.6)$$

che è la proprietà di conservazione degli angoli. ■

## 13.5 Trasformazione di Möbius

Un esempio di trasformazione conforme è:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a \neq 0, \quad c \neq 0 \quad (13.5.1)$$

$f(z)$  è analitica  $\forall z \neq -\frac{d}{c}$ . Inoltre:

$$f'(z) = \frac{a}{cz + d} - \frac{(az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad (13.5.2)$$

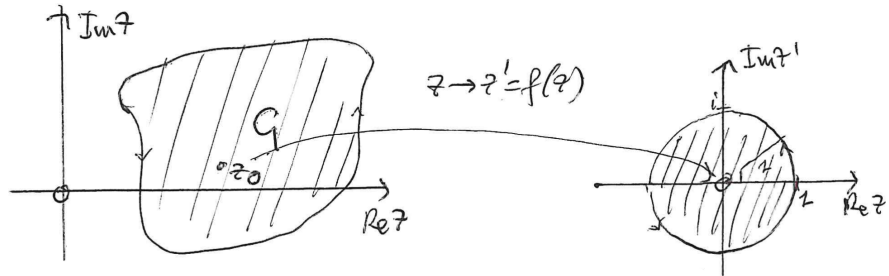
Da cui si trova la condizione

$$f'(z) \neq 0 \iff ad - bc \neq 0 \quad (13.5.3)$$

Da cui si vede che la funzione (13.5.1) con la condizione  $ad - bc \neq 0$  è una trasformazione conforme definita nel dominio  $G = \mathbb{C} / \{z = -\frac{d}{c}\}$ .

## 13.6 Th. di Riemann

**Teorema 13.1 (Th. di Riemann).**  $\forall G$  dominio semplicemente connesso del piano complesso  $z$ ,  
 $\exists z \rightarrow z' = f(z)$  trasformazione conforme che applica  $G$  all'interno del cerchio unitario  $|z'| < 1$ .



Tale trasformazione non è univocamente determinata ( $g(z) = e^{i\alpha} f(z)$  è la stessa applicazione), ma risulta definita in modo univoco con le condizioni:

- $f(z_0) = 0$  con  $z_0 \in G$ .
- $\arg(f'(z_0)) = \alpha_0$  con  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  assegnato.

# Funzione di Green per sistemi lineari ed indipendenti dal tempo

## 14.1 Sistemi lineari e funzione di Green

Si considera un segnale in ingresso  $a(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  variabile tempo, detto segnale di INPUT. Tale segnale interagisce con un sistema fisico, causando un segnale in uscita  $b(t) = L[a(t)]$ .

**Definizione 14.1.** *La proprietà di linearità del sistema implica che per 2 segnali di INPUT e OUTPUT,  $b_1(t) = L[a_1(t)]$ ,  $b_2(t) = L[a_2(t)]$ , si abbia*

$$L[\alpha a_1(t) + \beta a_2(t)] = \alpha L[a_1(t)] + \beta L[a_2(t)] = \alpha b_1(t) + \beta b_2(t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (14.1.1)$$

In questo caso si può scrivere che:

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t') a(t') dt' \quad (14.1.2)$$

Dove  $G(t, t')$  è detta **Funzione di Green** del sistema.

## 14.2 Indipendenza dal tempo

Si può richiedere che il sistema sia invariante per traslazioni nella variabile  $t$ .

Questo equivale a chiedere che se l'input è sostituito da  $a_\delta(t') \equiv a(t' - \delta)$ , allora l'output sarà  $b_\delta(t) \equiv b(t - \delta)$ , ovvero:

$$b_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') a_\delta(t') dt' = b(t - \delta) \quad (14.2.1)$$

Sostituendo  $t$  con  $t - \delta$  nella (14.1.2):

$$b(t - \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \delta, \tau) a(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \delta, t' - \delta) a(t' - \delta) dt' \quad (14.2.2)$$

Dove si è posto  $\tau = t' - \delta$ .

Comparando le 2 espressioni:

$$G(t - \delta, t' - \delta) = G(t, t') \quad \forall \delta \in \mathbb{R} \quad (14.2.3)$$

Ponendo  $\delta = t'$ , si ottiene:

$$G(t, t') = G(t - t', 0) \equiv G(t - t') \quad (14.2.4)$$

Di conseguenza :

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') a(t') dt' \quad (14.2.5)$$

Per cui per *sistemi lineari e indipendenti dal tempo* la relazione fra INPUT ed OUTPUT è del tipo:

$$b(t) \equiv (G * a)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') a(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) a(t - \tau) d\tau \quad (14.2.6)$$

Definito come **Prodotto di convoluzione**.

## 14.3 Funzione di Green e trasformata di Fourier

Si esegue ora l'analisi in frequenza del sistema attraverso la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'eq (14.2.6), si ottiene:

$$\tilde{b}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{a}(\omega) \quad (14.3.1)$$

In particolare la legge che esprime la dipendenza di  $G$  dalla variabile  $\omega$  è detta *legge di dispersione*.

### 14.3.1 Delta di Dirac

Dalla (14.3.1) si deduce che, prendendo come INPUT un segnale la cui trasformata di Fourier sia uguale ad 1, si avrebbe un OUTPUT uguale alla funzione di Green del sistema:

$$\tilde{a}(\omega) = 1 \implies \tilde{b}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \implies b(t) = G(t) \quad (14.3.2)$$

Tuttavia non esiste nessuna funzione, o almeno propriamente detta, la cui trasformata di Fourier sia uguale ad 1.

Quello che si può fare è trovare una successione di funzioni le cui trasformate tendano ad 1. Ad esempio:

$$a_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \quad (14.3.3)$$

Da cui:

$$\tilde{a}_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\tau(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{2\tau} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\tau} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{\text{sen}(\omega\tau)}{\omega\tau} \quad (14.3.4)$$

$$1 \implies \delta \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tilde{a}_\tau = 1 \quad (14.3.5)$$

Si definisce in questo modo (in maniera euristica) la "funzione" *Delta di Dirac*: non si tratta di una vera funzione poichè:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} a_\tau(t) dt = 1 \quad (14.3.6)$$

Inoltre data una funzione  $f(x)$  continua nell'intorno del punto  $t = 0$ , si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} a_\tau(t) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(\epsilon) = f(0) \quad \epsilon \in [-\tau, \tau] \quad (14.3.7)$$

La  $\delta(t)$  è in realtà una distribuzione come si vedrà più avanti.

Dalla relazione:

$$F(\delta(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} F(a_\tau(t)) = 1 \quad (14.3.8)$$

E' possibile quindi interpretare la funzione di Green  $G(t)$  di un dato sistema come la risposta, OUTPUT, del sistema ad un INPUT pari alla  $\delta(t)$ .

## 14.4 Appendix: proprietà trasformata di Fourier

- **Teoremi di traslazione:**

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{i\omega a} \mathcal{F} \quad \mathcal{F}(e^{-it} f(t)) = \tilde{f}(\omega - a) \quad (14.4.1)$$

- **Teoremi di derivazione:**

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right) = (-i\omega)^k \mathcal{F}(f(t)) \quad \mathcal{F}((it)^k f(t)) = \frac{d^k}{d\omega^k} \tilde{f}(\omega) \quad (14.4.2)$$

- **Lemma di Riemann-Lebesgue:**

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(\omega) = 0 \quad (14.4.3)$$

- **Teorema di convoluzione:**

$$\mathcal{F}(f * g) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) \quad (14.4.4)$$



## Proprietà della Funzione di Green per sistemi lineari causali

Se con  $t$  si indica la variabile temporale, si dice che un sistema lineare, descritto dalla *funzione di Green*  $G(t, t')$  è *causale* se il segnale di uscita  $b(t)$  non è influenzato dal segnale di ingresso  $a(t')$  per  $t' > t$ , ma dipende da  $a(t')$  solo per  $t' < t$ . Ossia:

$$G(t, t') = 0 \quad \text{per } t' > t \quad (15.0.1)$$

da cui

$$b(t) = \int_{-\infty}^t G(t, t') a(t') dt' \quad (15.0.2)$$

E se il sistema è anche indipendente dal tempo, la condizione di causalità (15.0.1) diventa:

$$G(t - t') = 0 \quad \text{per } t' > t \quad \Longleftrightarrow \quad G(\tau) = 0 \quad \text{per } \tau < 0 \quad (15.0.3)$$

e la relazione tra input e output diventa:

$$b(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t') a(t') dt' = \int_0^{\infty} G(\tau) a(t - \tau) d\tau \quad (15.0.4)$$

**Teorema 15.1.** Sia  $G(t)$  una funzione di Green causale e a quadrato sommabile ( $G(t) \in \mathbb{L}^2(0, \infty)$ ). Allora la sua trasformata di Fourier:

$$\chi(\omega) \equiv \tilde{G}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} G(t) dt \quad (15.0.5)$$

intesa come funzione della variabile complessa  $\omega$  è una funzione analitica nel semipiano  $\text{Im}(\omega) > 0$ .

*Dimostrazione.* Si considera il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta\chi}{\Delta\omega} = \frac{\chi(\omega + \Delta\omega) - \chi(\omega)}{\Delta\omega} \quad (15.0.6)$$

ponendo  $\varepsilon \equiv \Delta\omega$  e  $\omega = \omega' + i\omega''$ .

$$\frac{\chi(\omega + \varepsilon) - \chi(\omega)}{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon} e^{i\omega t} G(t) dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{i\varepsilon t} \right) i t e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} G(t) dt \equiv \int_0^{\infty} f_{\varepsilon}(t) dt \quad (15.0.7)$$

dove si è posto

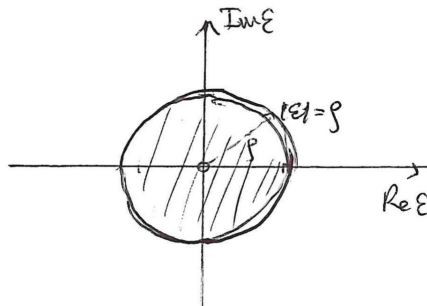
$$f_{\varepsilon}(t) \equiv \left( \frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{i\varepsilon t} \right) i t e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} G(t) \quad (15.0.8)$$

Si consideri per un dato  $t > 0$  la funzione della variabile complessa  $\varepsilon$

$$g(\varepsilon) \equiv \frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{i\varepsilon t} \quad (15.0.9)$$

$g(\varepsilon)$  è una funzione intera (ha una singolarità rimovibile in  $\varepsilon = 0$ ).

Si considera nel piano complesso  $\varepsilon$  il cerchio  $|\varepsilon| \leq \rho$  in Figura (15).



Per il principio del massimo modulo (5.3) risulta

$$|g(\varepsilon)| \leq \max_{|\varepsilon|=\rho} |g(\varepsilon)| \quad \forall \varepsilon : |\varepsilon| \leq \rho \quad (15.0.10)$$

Considerando perciò la circonferenza  $|\varepsilon| = \rho$ , ossia parametrizzando come

$$\varepsilon = \rho e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (15.0.11)$$

si trova

$$e^{i\varepsilon t} = e^{i\rho t(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{-\rho t \sin\theta} e^{i\rho t \cos\theta} \quad (15.0.12)$$

Da cui è possibile maggiorare il modulo di  $g(\varepsilon)$

$$|g(\rho e^{i\theta})| = \frac{|e^{i\varepsilon t} - 1|}{|\varepsilon|t} \leq \frac{|e^{i\varepsilon t}| + 1}{|\varepsilon|t} = \frac{e^{-\rho t \sin\theta} + 1}{\rho t} \leq \frac{e^{\rho t} + 1}{\rho t} \quad (15.0.13)$$

A questo punto si può maggiorare anche il modulo di  $f_\varepsilon(t)$  per  $|\varepsilon| \leq \rho$ , trovando:

$$|f_\varepsilon(t)| = |g(\varepsilon)| t e^{-\omega'' t} |G(t)| \leq \frac{e^{\rho t} + 1}{\rho t} t e^{-\omega'' t} |G(t)| = \frac{1}{\rho} e^{-(\omega'' - \rho)t} |G(t)| + \frac{1}{\rho} e^{-\omega'' t} |G(t)| \equiv F(t)$$

Perciò se  $\omega'' \equiv \text{Im}(\omega) > 0$ , prendendo  $\rho < \omega''$  (ad esempio  $\rho = \omega''/2$ ), si trova

$$\frac{1}{\rho} e^{-\frac{\omega''}{2}t} \quad , \quad \frac{1}{\rho} e^{-\omega''t} \quad , \quad |G(t)| \quad \in \mathbb{L}^2(0, +\infty) \quad (15.0.14)$$

Da cui

$$\frac{1}{\rho} e^{-\frac{\omega''}{2}t} |G(t)| \quad , \quad \frac{1}{\rho} e^{-\omega''t} |G(t)| \quad \in \mathbb{L}^1(0, +\infty) \quad (15.0.15)$$

Perciò

$$F(t) \equiv \frac{1}{\rho} e^{-(\omega'' - \rho)t} |G(t)| + \frac{1}{\rho} e^{-\omega''t} |G(t)| \quad \in \mathbb{L}^1(0, +\infty) \quad (15.0.16)$$

A questo punto si applica il Th. della convergenza dominata (di Lebesgue), in base al quale

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = \int_0^\infty f(t) dt \quad (15.0.17)$$

con

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) = i t e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} G(t) \quad (\in \mathbb{L}^1(0, +\infty)) \quad (15.0.18)$$

In conclusione, se  $\omega'' \equiv \text{Im}(\omega) > 0$ , allora

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\chi(\omega + \varepsilon) - \chi(\omega)}{\varepsilon} \equiv \chi'(\omega)$$

Ossia, la funzione  $\chi(\omega)$  è analitica nel semipiano complesso superiore,  $\text{Im}(\omega) > 0$ . ■

Con un procedimento analogo si può dimostrare il

**Teorema 15.2.** *Se una funzione  $G(t)$  è a supporto compatto allora la sua trasformata di Fourier*

$$\chi(\omega) \equiv \tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} G(t) dt = \int_I e^{i\omega t} G(t) dt \quad (15.0.19)$$

dove  $I$  è il supporto compatto di  $G(t)$ , come funzione della variabile complessa  $\omega$  è una funzione intera.

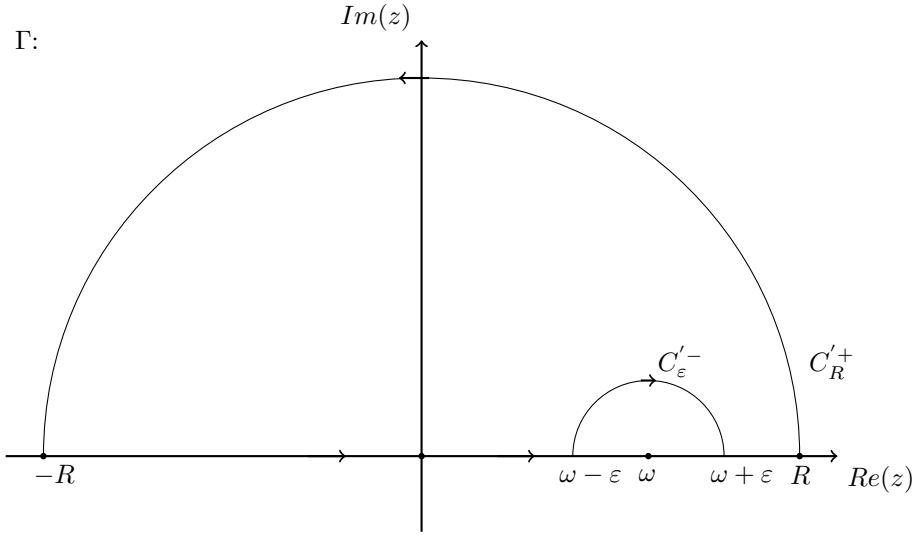
## 15.1 Trasformata di Hilbert

Per un sistema lineare, indipendente dal tempo e causale, la funzione  $\chi(\omega) \equiv \tilde{G}(\omega)$  per  $\omega \in \mathbb{R}$  si ottiene come *valore al contorno* per  $\omega'' \equiv \text{Im}(\omega) \rightarrow 0^+$  di una funzione analitica nel semipiano complesso superiore.

Integrando allora la funzione

$$\frac{\chi(z)}{z - \omega} \quad (15.1.1)$$

nella variabile  $z$  lungo il  $\Gamma$  in Figura (15.1):



Si trova applicando il *Th. di Cauchy* (4.3):

$$0 = \oint_{\Gamma} \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz = \left\{ \int_{-R}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^R \right\} \frac{\chi(\nu)}{\nu - \omega} + \int_{C'_\varepsilon-} \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz + \int_{C'_R+} \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz \quad (15.1.2)$$

Supponendo che  $\chi(z)$  abbia un *buon comportamento all'infinito*, ossia

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R+} \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz = 0 \quad (15.1.3)$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^R \right\} \frac{\chi(\nu)}{\nu - \omega} d\nu &\equiv \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\nu)}{\nu - \omega} d\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C'_\varepsilon-} \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz = \\ &= i\pi \text{Res} \left[ \frac{\chi(z)}{z - \omega}, z = \omega \right] = i\pi \lim_{z \rightarrow \omega} (z - \omega) \frac{\chi(z)}{z - \omega} = i\pi \chi(\omega) \end{aligned} \quad (15.1.4)$$

Ossia:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\nu) + i\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu = i\pi [\chi'(\omega) + i\chi''(\omega)] \quad (15.1.5)$$

Uguagliando parte reale e immaginaria in (15.1.5) si trovano le *relazioni di dispersione*:

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu \\ \chi''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\nu)}{\nu - \omega} d\nu \end{aligned} \quad (15.1.6)$$

In matematica si dice che le funzioni in (15.1.6) sono l'una la *Trasformata di Hilbert* dell'altra.

## 15.2 Th. di Titchmarsh

Un teorema che viene enunciato e non dimostrato è il seguente:

**Teorema 15.3 (Th. di Titchmarsh).** *Dato un sistema lineare e indipendente dal tempo, con funzione di Green  $G(t)$ , le seguenti proprietà risultano equivalenti:*

- $G(t)$  è causale e a quadrato sommabile, per cui ammette la trasformata di Fourier  $\chi(\omega) = \tilde{G}(\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ .
- $\chi(\omega') \equiv \tilde{G}(\omega')$  con  $\omega \in \mathbb{R}$  è a quadrato sommabile ed è il limite per  $\omega'' \equiv \text{Im}(\omega) \rightarrow 0^+$  di una funzione  $\chi(\omega = \omega' + i\omega'')$  analitica nel semipiano complesso superiore e tale per cui esiste finito

$$\sup_{\omega'' \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\omega' + i\omega'')|^2 d\omega' < +\infty \quad (15.2.1)$$

- Le funzioni  $\chi'(\omega) \equiv \text{Re}(\chi(\omega))$  e  $\chi''(\omega) \equiv \text{Im}(\chi(\omega))$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ , sono le Trasformate di Hilbert l'una dell'altra e sono a quadrato sommabile.

**Nota Bene:** La sola analiticità nel semipiano complesso superiore non basta, è necessario il buon andamento all'infinito.

## 15.3 Relazioni di Kramers-Krönig

Nel caso in cui  $a(t)=E(t)$ , campo elettrico, e  $b(t)=P(t)$  polarizzazione di un dielettrico, si ha:

$$P(t) = (G * E)(t) \quad G(t), P(t), E(t) \in \mathbb{R} \quad (15.3.1)$$

Di conseguenza:

$$\tilde{P}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{E}(\omega) \equiv \chi(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad \chi(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt \quad (15.3.2)$$

Prendendo il complesso coniugato si ottiene:

$$\chi^*(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt = \chi(-\omega) \quad (15.3.3)$$

$$\chi^*(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) = \chi'(-\omega) + i\chi''(-\omega) \Rightarrow \begin{cases} \chi'(-\omega) = \chi'(\omega) \\ \chi''(-\omega) = -\chi''(\omega) \end{cases} \quad (15.3.4)$$

Grazie a tali relazioni le *Relazioni di Dispersione* (15.1.6) possono essere riscritte in una maniera equivalente sotto il nome di *Relazioni di Kramers-Krönig*, ossia:

$$\begin{cases} \chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\nu}{\nu^2 - \omega^2} \chi''(\nu) d\nu \\ \chi''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\nu^2 - \omega^2} \chi'(\nu) d\nu \end{cases} \quad (15.3.5)$$

*Dimostrazione.*

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu + \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu \right\} = \quad (15.3.6)$$

$$= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu + \int_0^{\infty} \frac{\chi''(-\nu')}{-\nu' - \omega} d\nu' \right\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu + \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\nu')}{\nu' + \omega} d\nu' \right\} \quad (15.3.7)$$

$$= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\nu}{\nu^2 - \omega^2} \chi''(\nu) d\nu \quad (15.3.8)$$

Ed in modo analogo per l'altra relazione. ■

# Distribuzioni

**Definizione 16.1.** Una distribuzione  $T$  è un funzionale lineare continuo che applica uno spazio vettoriale  $\mathbb{F}$  di funzioni test in  $\mathbb{C}$ :

$$T : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{C} \quad T[\phi] \text{ oppure } \langle T, \phi \rangle \quad \phi \in \mathbb{F} \quad (16.0.1)$$

Tale che:

$$\langle T, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \alpha \langle T, \phi_1 \rangle + \beta \langle T, \phi_2 \rangle \quad (16.0.2)$$

Per continuità si intende quella derivata dalla nozione di "convergenza" nello spazio  $\mathbb{F}$ .

Ovvero  $T$  è continua se:

$$\phi_n \xrightarrow{\mathbb{F}} \phi \implies \langle T, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \quad (16.0.3)$$

**Definizione 16.2.** L'insieme delle distribuzioni così definita viene indicata con  $\mathbb{F}'$  ed è detta spazio duale

Si distinguono 3 classi principali di distribuzioni:

- **Distribuzioni su funzioni infinitamente derivabili (o a supporto compatto):**

L'insieme delle funzioni test è

$$F = C^\infty \equiv \mathcal{E} \quad (16.0.4)$$

La nozione di convergenza significa che:

$$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0 \implies \frac{d^k \phi_n}{dx^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (16.0.5)$$

uniformemente su ogni  $K$  compatto  $\subset \mathbb{R}$ .

L'insieme delle distribuzioni  $\epsilon$  si indica con  $\mathcal{E}'$ .

- **Distribuzioni temperate:**

Insieme delle funzioni test è:

$$\mathbb{F} = \left\{ \phi : \phi \in C^\infty, \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^h \frac{d^k \phi}{dx^k} \right| < +\infty, \forall h, k \in \mathbb{N} \right\} \equiv S \quad (16.0.6)$$

Queste funzioni di test si dicono funzioni  $C^\infty$  a decrescenza rapida.

Con la nozione di convergenza:

$$\phi_n \xrightarrow{S} 0 \implies \forall h, k \in \mathbb{N} : x^h \frac{d^k \phi_n}{dx^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente in } \mathbb{R} \quad (16.0.7)$$

L'insieme delle distribuzioni  $S$  si indica con  $S'$ .

- **Distribuzioni di Schwartz:**

Insieme delle funzioni test è:

$$\mathbb{F} = C_0^\infty = \{ \phi : \phi \in C^\infty \text{ e a supporto compatto } \} \equiv D \quad (16.0.8)$$

Con la nozione di convergenza si intende che:

$$\begin{aligned} \phi_n \xrightarrow{D} 0 \implies \exists K \text{ compatto tale che } K_n \equiv \text{supp}(\phi_n) \subset K \forall n \\ \text{tale che } \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{d^k \phi_n}{dx^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente in } \mathbb{K} \end{aligned} \quad (16.0.9)$$

Dove con  $\text{supp}$  si indica il supporto della funzione.

L'insieme delle distribuzioni  $D$  si indica con  $D'$ .

Dalle definizioni segue che

$$D \subset S \subset \mathcal{E} \quad (16.0.10)$$

e anche:

$$\phi_n \xrightarrow{D} 0 \implies \phi_n \xrightarrow{S} 0 \implies \phi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0 \implies \mathcal{E}' \subset S' \subset D' \quad (16.0.11)$$

## 16.1 Esempi

### 16.1.1 Distribuzione $T_U$

La distribuzione associata alla funzione  $u(x)$  viene definita come:

$$\langle T_u | \phi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx \quad (16.1.1)$$

Dato uno spazio di funzioni test  $\phi \in F$  è necessario che  $u(x)$  soddisfi certi requisiti affinché  $T_U$  sia ben definita come distribuzione appartenente allo spazio duale  $F'$ .

- ad ogni  $u(x)$  che sia localmente sommabile ( $u(x) \in L^1_{loc}$ ) è associata una distribuzione di Schwartz  $T_u \in D'$ , definita come:

$$\langle T_u | \phi \rangle \equiv \int_{supp(\phi)} u(x) \phi(x) dx \quad (16.1.2)$$

Essendo  $supp(\phi)$  il supporto di  $\phi(x) \in D$ .

L'integrale risulta quindi ben definito e la linearità è ovvia.

Per dimostrare la continuità, si considera una successione  $\phi_n \xrightarrow{D} 0$  e detto  $K$  un insieme compatto tale che  $supp(\phi_n) \subset K$  si ha che:

$$|\langle T_u | \phi_n \rangle| \equiv \left| \int_K u(x) \phi_n(x) dx \right| \leq \int_K |u(x)| |\phi_n(x)| dx \leq \max_{x \in K} |\phi_n(x)| \int_K |u(x)| dx \rightarrow 0 \quad (16.1.3)$$

Tuttavia se  $u(x) \in L^1_{loc}$  non è detto che  $T_U \in S'$ , ad esempio con  $u(x) = e^x$  l'integrale non risulta ben definito con funzioni a decrescenza rapida.

- per ogni funzione  $u(x)$  limitata ( $\sup_{x \in \mathbb{R}} u(x) < \infty$ ) è associata una distribuzione temperata  $T_u \in S'$ . Difatti l'integrale nella definizione è ben definito  $\forall \phi \in S$  e quindi rappresenta un funzionale lineare e continuo in  $S$ . Difatti:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| |\phi(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| dx \quad (16.1.4)$$

Con  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x) < \infty$ .

Ma:

$$\phi(x) \in S \implies |\phi(x)| < A, \quad x^2 |\phi(x)| \leq B, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad A > 0, B > 0 \quad (16.1.5)$$

Sommando le disuguaglianze si trova che:

$$|\phi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \quad (16.1.6)$$

Per una successione  $\phi_n \xrightarrow{S} 0$ , dato  $\epsilon > 0$ :

$$\exists N_\epsilon : |\phi_n(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists N'_\epsilon : x^2 |\phi_n(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N'_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R} \quad (16.1.7)$$

Per cui

$$(1+x^2) |\phi_n(x)| < 2\epsilon \quad \forall n \geq N''_\epsilon = \max\{N_\epsilon, N'_\epsilon\}, \forall x \in \mathbb{R} \implies |\phi_n(x)| < \frac{2\epsilon}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \quad (16.1.8)$$

Si può ottenere

$$|\langle T_u | \phi_n \rangle| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(x)| dx = 2\pi M \epsilon \rightarrow 0 \quad (16.1.9)$$

- Prendendo  $u(x) = cte$ , oppure  $u(x) = \sin(x)$ ,  $u(x) = \cos(x)$ , o ancora  $u(x) = \Theta(x)$ , si ha  $T_u \in S'$ .
- Si dimostra che in generale che se  $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , o  $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$  oppure  $u(x) = P(x)$  polinomio di  $x$  allora  $T_U \in S'$

**Definizione 16.3.** Si dice che " $T = 0$  in  $\Omega$  (aperto)  $\subset \mathbb{R}$ " se  $\langle T, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{F}$  con  $\text{supp}(\phi) \subset \Omega$ . Detto  $\Omega_0 = \text{sup}(\Omega)$  il più grande di tali inisemi, il suo complementare  $\Omega_0^c \equiv \mathbb{R}/\Omega_0$  viene detto "supporto della distribuzione  $T$ " e si indica con  $\text{Supp}(T) \equiv \Omega_0^c$ .

In particolare

$$T = T_u \Rightarrow \text{Supp}(T_u) = \text{supp}(u) \quad (16.1.10)$$

**Osservazione:** Si dimostra che le distribuzioni  $T \in \mathcal{E}'$  sono tutte e sole le Distribuzioni a supporto compatto.

Infatti

$$T \in \mathcal{E}' \iff \text{Supp}(T) \text{ è compatto} \quad (16.1.11)$$

Ma allora in base agli esempi sopra, se  $u(x)$  è una costante, una funzione trigonometrica o la  $\Theta(x)$ , allora  $T_u \in \mathcal{S}'$ , ma  $T_u \notin \mathcal{E}'$  (poichè  $\text{Supp}(T_u) = \text{supp}(u)$  non è compatto).

### 16.1.2 Distribuzioni non associate a funzioni

Non tutte le distribuzioni sono associate a una  $u(x)$ . Per esempio la *distribuzione singolare* Delta (di Dirac).

**Definizione 16.4.** La distribuzione "Delta di Dirac" (con centro in  $x_0$ ), che si indica con  $\delta_{x_0}$  o  $\delta(x - x_0)$ , è definita come:

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle \equiv \phi(x_0) \quad \forall \phi \in \mathcal{F} \quad (16.1.12)$$

Questo è un funzionale lineare e continuo in  $\mathcal{E}'$  (e quindi anche in  $\mathcal{S}'$  e  $\mathcal{D}'$ ).

Spesso la  $\delta$  viene scritta come:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0) \quad (16.1.13)$$

**Nota Bene**  $\text{Supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$ , è possibile dimostrare che la  $\delta_{x_0}$  e le sue derivate sono le uniche distribuzioni a supporto puntiforme.

## 16.2 Appendix

**Teorema 16.1.**  $u(x) \in L^1(\mathbb{R}) \implies T_U$  è una distribuzione temperata.

*Dimostrazione.* Per definizione:

$$\langle T_u | \phi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S} \quad (16.2.1)$$

L'integrale esiste poichè  $\phi \in \mathcal{S}$  e quindi  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| < \infty$ , per cui:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| |\phi(x)| dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx < \infty \quad (16.2.2)$$

$T_u$  è un funzionale lineare di  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{C}$ , si dimostra la continuità:

$$|\langle T_u | \phi_n \rangle - \langle T_u | \phi \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) (\phi_n(x) - \phi(x)) dx \right| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (16.2.3)$$

Poichè  $\phi_n - \phi \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  uniformemente in  $\mathbb{R}$ :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : |\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R} \quad (16.2.4)$$

Da cui:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) (\phi_n(x) - \phi(x)) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx \epsilon \equiv \epsilon' \quad \forall n \geq N_\epsilon \quad (16.2.5)$$

Per cui  $\langle T_u | \phi_n \rangle \rightarrow \langle T_u | \phi \rangle$ . ■

**Teorema 16.2.**  $u(x) \in L^2(\mathbb{R}) \implies T_U$  è una distribuzione temperata.

*Dimostrazione.* Si ha:

$$\langle T_u | \phi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx = (u^*, \phi)_{L^2} < \infty \quad \forall \phi \in S \quad (16.2.6)$$

Poiché  $\phi \in S \implies \phi \in L^2(\mathbb{R})$  ed usando la disuguaglianza di Schwarz  $|(u^*, \phi)_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} < \infty$ .  
Di conseguenza:

$$|\langle T_u | \phi_n \rangle - \langle T_u | \phi \rangle| = |\langle T_u | \phi_n - \phi \rangle| = |(u^*, \phi_n - \phi)_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2} \|\phi_n - \phi\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (16.2.7)$$

Poiché le funzioni  $|\phi_n - \phi|^2$  possono essere maggiorate da una funzione sommabile grazie alla decrescenza rapida, quindi applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e concludere che:

$$\phi_n \xrightarrow{S} \phi \implies \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n - \phi|^2 dx \rightarrow 0 \quad (16.2.8)$$

In altre parole le funzioni  $\phi_n(x)$  risultano convergere a  $\phi(x)$  anche in senso  $L^2(\mathbb{R})$  ■



## Sulla convergenza debole tra distribuzioni

Detta  $T_n$  una successione di distribuzioni di  $F'$ , si dice che  $T_n$  converge a  $T \in F$  per  $n \rightarrow \infty$  se:

$$\langle T_n, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in F \quad (17.0.1)$$

Si considerano alcuni casi particolari:

1.

Se  $u_n(x)$  è una successione di funzioni in  $\mathbb{L}^2$  convergente a  $u(x)$  nel senso della norma  $\mathbb{L}^2$  o nel senso della convergenza debole in  $\mathbb{L}^2$ , si verifica che

$$T_{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_u \quad \text{in } S' \quad (17.0.2)$$

*Dimostrazione.*  $\phi \in S \Rightarrow \phi \in \mathbb{L}^2$ . Allora:

$$\langle T_{u_n}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x) \phi(x) dx = (u_n^*, \phi)_{\mathbb{L}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u^*, \phi)_{\mathbb{L}^2} = \langle T_u, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (17.0.3)$$

Avendo usato la convergenza debole in  $\mathbb{L}^2$ .

Volendo essere più pedanti si può usare la convergenza in norma  $\mathbb{L}^2$  per mostrarlo:

$$\begin{aligned} |\langle T_{u_n}, \phi \rangle - \langle T_u, \phi \rangle| &= |\langle T_{u_n} - T_u, \phi \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (u_n(x) - u(x)) \phi(x) dx \right| = \\ &= |(u_n^* - u^*, \phi)|_{\mathbb{L}^2} \leq \|u_n^* - u^*\|_{\mathbb{L}^2} \|\phi\|_{\mathbb{L}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \phi \in S \end{aligned} \quad (17.0.4)$$

Dove si è fatto uso della disuguaglianza di Schwartz. ■

2.

Se  $u_n(x)$  è una successione di funzioni in  $\mathbb{L}^1$  e  $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$  puntualmente quasi ovunque ed è soddisfatta la *condizione di convergenza dominata* di Lebesgue:

$$|u_n(x)| \leq F(x) \in \mathbb{L}^1 \quad \forall n \quad (17.0.5)$$

allora si ha:

$$T_{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_u \quad \text{in } S' \quad (17.0.6)$$

*Dimostrazione.* Si ha:

$$\langle T_{u_n}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \quad (17.0.7)$$

dove

$$f_n(x) = u_n(x) \phi(x) \in \mathbb{L}^1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = u(x) \phi(x) \quad [q.o.] \quad (17.0.8)$$

e inoltre risulta:

$$|f_n(x)| = |u_n(x)| |\phi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| F(x) \in \mathbb{L}^1 \quad (17.0.9)$$

Da cui è possibile applicare il teorema di Lebesgue:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{u_n}, \phi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx = \langle T_u, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \end{aligned} \quad (17.0.10)$$

3.

Se  $u_n(x)$  è una successione di funzioni limitate ( $|u_n(x)| \leq M$ ) che convergono puntualmente a  $u(x)$ , allora si ha:

$$T_{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_u \quad \text{in } S' \quad (17.0.11)$$

*Dimostrazione.* Infatti

$$\langle T_{u_n}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \quad (17.0.12)$$

con

$$f_n(x) = u_n(x) \phi(x) \in \mathbb{L}^1 \quad ; \quad |f_n(x)| \leq M |\phi(x)| \equiv F(x) \in \mathbb{L}^1 \quad (17.0.13)$$

da cui, applicando il Th. di Lebesgue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{u_n}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx = \langle T_u, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (17.0.14)$$

■

4.

In tutti gli esempi precedenti si è considerato successioni di distribuzioni associate a funzioni  $u_n$  che convergessero debolmente a distribuzioni associate alla funzione  $u$ .

Si considera ora il caso di una successione di distribuzioni  $T_{u_n}$  che converge ad una distribuzione  $T$  non associata ad una funzione.

Si verifica ad esempio che

$$T_{f_{\tau,a}} \xrightarrow{\mathcal{E}'} \delta_a \quad (17.0.15)$$

dove  $f_{\tau,a}$  è la funzione a gradino:

$$f_{\tau,a} \equiv \begin{cases} 1/2\tau & \text{per } |x-a| \leq \tau \\ 0 & \text{per } |x-a| > \tau \end{cases} \quad (17.0.16)$$

(si noti che  $\text{Supp}(T_{f_{\tau,a}}) = \text{Supp}(f_{\tau,a}) = [-\tau, \tau]$ )

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \langle T_{f_{\tau,a}}, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tau,a}(x) \phi(x) dx = \frac{1}{2\tau} \int_{a-\tau}^{a+\tau} \phi(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\tau} 2\tau \phi(\bar{x}_\tau \in [a-\tau, a+\tau]) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} \phi(a) = \langle \delta_a, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{E} \equiv C^\infty \end{aligned} \quad (17.0.17)$$

Ossia

$$T_{f_{\tau,a}} \xrightarrow{\mathcal{E}'} \delta_a \quad (17.0.18)$$

Altri esempi di successioni di distribuzioni che tendono alla distribuzione  $\delta$  sono ad esempio le  $T_{u_k}$  con  $u(x)$ :

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2} \quad u_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \quad u_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\pi x} \quad n \rightarrow \infty \quad (17.0.19)$$

Oppure equivalentemente:

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad u_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}} \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (17.0.20)$$

Si verifica infatti

• Per

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2} \quad (17.0.21)$$

risulta

$$\langle T_{u_n}, \phi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \phi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy \quad (17.0.22)$$

A questo punto si vede che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{1+y^2} \phi(0)$$

Ed inoltre

$$\left| \frac{1}{1+y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) \right| = \frac{1}{1+y^2} \left| \phi\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| \frac{1}{1+y^2} \equiv F(y) \quad (17.0.23)$$

E  $F(y) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ .

Perciò si può applicare il Th. di Lebesgue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{u_n}, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy \quad (17.0.24)$$

$$= \frac{\phi(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\phi(0)}{\pi} \pi = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \quad (17.0.25)$$

Da cui, in conclusione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} = \delta_0 \quad (17.0.26)$$

Passaggi analoghi portano a dimostrare la versione con  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

• Per

$$u_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \quad (17.0.27)$$

si procede come prima.

$$\langle T_{u_n}, \phi \rangle = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy \quad (17.0.28)$$

Da cui

$$\left| e^{-y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leq \left| \phi\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \quad (17.0.29)$$

Per cui è possibile applicare la convergenza dominata e trovare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-y^2} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \frac{\phi(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \phi(0)$$

Da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} = \delta_0 \quad (17.0.30)$$

## 17.1 Derivata delle distribuzioni

Per definire la derivata ( $DT$ ) di una distribuzione  $T$  si parte dalla richiesta che se  $T_u$  è una distribuzione associata alla funzione  $u(x)$  derivabile, allora (ponendo  $DT_u \equiv T'_u$ )

$$\langle DT_u, \phi \rangle \equiv \langle T'_u, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x) \phi(x) dx = u(x) \phi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi'(x) dx = - \langle T_u, \phi' \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{F}$$

Avendo usato che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) \phi(x) = 0 \quad (17.1.1)$$

come segue dalla richiesta che  $T_u$  sia ben definita.

In generale:

**Definizione 17.1.** si definisce la Derivata di una distribuzione come

$$\langle DT, \phi \rangle \equiv - \langle T, \phi' \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{F} \quad (17.1.2)$$

Ne segue che ogni distribuzione è infinitamente derivabile:

$$\langle D^k T, \phi \rangle \equiv (-1)^k \langle T, D^k \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{F} \quad (17.1.3)$$

In quanto le funzioni di test sono  $C^\infty$ .

### 17.1.1 Derivata di $\Theta(x)$

La funzione a scalino ( $\Theta(x)$ ) non è derivabile in  $x = 0$ , ma la distribuzione associata  $T_\Theta \in S'$  è derivabile e usando la 17.1.2:

$$\langle DT_\Theta, \phi \rangle = - \langle T_\Theta, \phi' \rangle \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \phi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \quad (17.1.4)$$

$$= -[\phi(\infty) - \phi(0)] = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (17.1.5)$$

Questo implica:

$$DT_\Theta = \delta_0 \quad (17.1.6)$$

### 17.1.2 Derivate della $\delta$

Anche la  $\delta_{x_0}$  è derivabile e dalla definizione segue:

$$\langle D^k \delta_{x_0}, \phi \rangle \equiv (-1)^k \langle \delta_{x_0}, \phi^{(k)} \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(x_0) \quad \forall \phi \in \mathcal{E} \quad (17.1.7)$$

### 17.1.3 Esempio sulle derivate di distribuzioni

Si consideri  $T_u$  con  $u$  derivabile  $\forall x$  tranne che in  $x_0$ , dove

$$\exists \sigma = \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x) \quad , \quad |\sigma| < +\infty$$

Ossia  $u(x)$  ha in  $x_0$  una discontinuità finita.

Risulta allora

$$\langle DT_u, \phi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{x_0} u(x) \phi'(x) dx - \int_{x_0}^{\infty} u(x) \phi'(x) dx = \quad (17.1.8)$$

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} u(x) \phi'(x) dx - \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \lim_{R' \rightarrow \infty} \int_{x_0 + \varepsilon'}^{R'} u(x) \phi'(x) dx = \quad (17.1.9)$$

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ u(x) \phi(x) \Big|_{-R}^{x_0 - \varepsilon} - \int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} u'(x) \phi(x) dx \right] - \quad (17.1.10)$$

$$- \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \lim_{R' \rightarrow \infty} \left[ u(x) \phi(x) \Big|_{x_0 + \varepsilon'}^{R'} - \int_{x_0 + \varepsilon'}^{R'} u'(x) \phi(x) dx \right] = \quad (17.1.11)$$

$$= (u(x_0^+) - u(x_0^-)) \phi(x_0) + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} + \int_{x_0 + \varepsilon'}^{\infty} \right\} u'(x) \phi(x) dx = \quad (17.1.12)$$

$$= \sigma \phi(x_0) + \langle T_{\{u'\}}, \phi \rangle = \sigma \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle + \langle T_{\{u'\}}, \phi \rangle = \langle \sigma \delta_{x_0} + T_{\{u'\}}, \phi \rangle \quad (17.1.13)$$

Da cui perciò

$$DT_u = \sigma \delta_{x_0} + T_{\{u'\}} \quad (17.1.14)$$

### 17.1.4 Altro esempio sulle derivate di distribuzioni

Si consideri la successione di distribuzioni associate alle funzioni

$$g_n(x) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{nx} h(t') dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt} = \frac{n \int_{-\infty}^x h(nt) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt} \quad (17.1.15)$$

con  $h(x)$  funzione continua e integrabile, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx \neq 0 \quad (17.1.16)$$

Si verifica che  $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta(x)$  o, nel senso delle distribuzioni:

$$T_{g_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_\theta \quad (17.1.17)$$

E si verifica anche che l'operatore di derivazione  $D$  sulle distribuzioni è un operatore continuo. Ossia vale il seguente:

**Teorema 17.1 (Di continuità dell'operatore  $D$ ).**

$$T_n \rightarrow T \implies D^k T_n \rightarrow D^k T \quad (17.1.18)$$

*Dimostrazione.* Si ha infatti:

$$\langle DT_n, \phi \rangle \equiv - \langle T_n, \phi' \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \langle T, \phi' \rangle \equiv \langle DT, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{F} \implies DT_n \xrightarrow{\mathcal{F}'} DT \quad (17.1.19)$$

■

Si può a questo punto riconsiderare la (17.1.17) e applicare il (17.1), trovando:

$$DT_{g_n} \rightarrow DT_\theta = \delta_0 \quad (17.1.20)$$

E si vede che, essendo  $h(x)$  continua:

$$g'_n(x) = \frac{nh(nx)}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt} \equiv u_n(x) \implies DT_{g_n} \equiv T_{g'_n} = T_{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_0 \quad (17.1.21)$$

# Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate

Analogamente alla costruzione fatta per definire la derivata di una distribuzione, si prova a definire la *trasformata di Fourier*  $\mathcal{F}(t)$  di una distribuzione  $T$ , partendo dalla richiesta che se  $u(x)$  è Fourier-trasformabile, allora  $\mathcal{F}(T_u) \equiv T_{\mathcal{F}(u)}$ . Ossia:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T_u), \phi \rangle &\equiv \langle T_{\mathcal{F}(u)}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha) \phi(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \phi(\alpha) \left( \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\alpha x} dx \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \phi(\alpha) e^{i\alpha x} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \tilde{\phi}(x) = \langle T_u, \mathcal{F}(\phi) \rangle \quad \forall \phi \end{aligned} \quad (18.0.1)$$

Ma perchè questa definizione sia valida  $\mathcal{F}(\phi)$  deve appartenere allo stesso spazio di funzioni test a cui appartiene  $\phi$ .

Questo non è generalmente verificato per le distribuzioni di Schwartz  $D'$ . Infatti dal momento che  $\phi \in D$  ha supporto compatto,  $\mathcal{F}(\phi)(\omega)$  è una funzione intera in  $\omega$ , quindi ha al più degli zeri isolati e non può avere quindi un supporto compatto.

Si può invece definire la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata  $T \in S'$ , dal momento che vale il:

**Lemma 18.1.**  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$  sono operatori lineari che mappano lo spazio delle funzioni test temperate  $S$  in se stesso.

Inoltre sono operatori continui rispetto alla convergenza introdotta in S.

Da cui, generalizzando la (18.0.1) si trova:

**Definizione 18.1.**

$$\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle \equiv \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (18.0.2)$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \phi \rangle \equiv \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\phi) \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (18.0.3)$$

Segue immediatamente che

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = T_{e^{i\omega x_0}} \quad (18.0.4)$$

## 18.1 Esempi

Si dimostra che

$$\mathcal{F}(e^{-iax}) = 2\pi\delta(\omega - a) \quad (18.1.1)$$

Ossia dal punto di vista delle distribuzioni

$$\mathcal{F}(T_{e^{-iax}}) = 2\pi\delta_a \quad (18.1.2)$$

Infatti risulta:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T_{e^{-iax}}), \phi \rangle &= \langle T_{e^{-iax}}, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iax} \tilde{\phi}(x) = 2\pi\phi(a) = 2\pi \langle \delta_a, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \\ &\Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{-iax}}) = 2\pi\delta_a \end{aligned} \quad (18.1.3)$$

In cui si è utilizzata la *rappresentazione di Fourier della  $\delta$* :

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \quad (18.1.4)$$

Si dimostra che

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{ib\omega}) = \delta(x - b) \quad (18.1.5)$$

Ossia dal punto di vista delle distribuzioni

$$\mathcal{F}^{-1}(T_{e^{ib\omega}}) = \delta_b \quad (18.1.6)$$

Infatti risulta:

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}^{-1}(T_{e^{ib\omega}}), \phi \rangle = \langle T_{e^{ib\omega}}, \mathcal{F}^{-1}(\phi) \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ibx} \mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = \phi(b) = \langle \delta_b, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \\ & \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(T_{e^{ib\omega}}) = \delta_b \end{aligned} \quad (18.1.7)$$

## 18.2 Continuità degli operatori

**Teorema 18.2.**  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$  sono operatori continui in  $S'$ , cioè:

$$T_n \xrightarrow{S'} T \Rightarrow \mathcal{F}(T_n) \xrightarrow{S'} \mathcal{F}(T) \quad e \quad \mathcal{F}^{-1}(T_n) \xrightarrow{S'} \mathcal{F}^{-1}(T) \quad (18.2.1)$$

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di convergenza debole e di trasformata di una distribuzione.

$$T_n \xrightarrow{S'} T \iff \langle T_n, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (18.2.2)$$

Per cui è

$$\langle \mathcal{F}(T_n), \phi \rangle \equiv \langle T_n, \mathcal{F}(\phi) \rangle \rightarrow \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle \equiv \langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (18.2.3)$$

Ossia

$$\mathcal{F}(T_n) \xrightarrow{S'} \mathcal{F}(T) \quad (18.2.4)$$

E stesso procedimento per l'antitrasformata. ■

**Esempio Importante:** Si è visto che  $\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = T_{e^{i\omega x_0}}$  e in particolare che  $\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$ .

Un altro modo per ricavare questo risultato è considerare le distribuzioni  $T_{f_\tau}$  associate alle funzioni a gradino (14.3.3), ricordando che

$$\mathcal{F}(T_{f_\tau}) \equiv T_{\tilde{f}_\tau} \xrightarrow[\mathcal{E}']{\tau \rightarrow 0} \mathcal{F}(\delta_0) \quad (18.2.5)$$

Ma risulta che

$$\tilde{f}_\tau(\omega) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 1 \Rightarrow \mathcal{F}(\delta_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} T_{\tilde{f}_\tau} = T_1 \quad (18.2.6)$$

## 18.3 La distribuzione "Parte Principale"

La funzione  $u(x) = 1/x$  non ammette una distribuzione associata ben definita.

È invece ben definita come *distribuzione temperata* ( $S'$ ), la seguente distribuzione, nota come *parte principale*:

$$\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \phi \rangle \equiv \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^R \right\} \frac{\phi(x)}{x} dx \quad \forall \phi \in S \quad (18.3.1)$$

Si può verificare che questa espressione è ben definita.

Per  $a$  fissato e arbitrario  $\epsilon < a < R$  si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx & \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^R \right\} \frac{\phi(x)}{x} dx = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-a} + \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a + \int_a^R \right\} \frac{\phi(x)}{x} dx = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^{-a} + \int_a^R \right\} \frac{\phi(x)}{x} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a \right\} \frac{\phi(x)}{x} dx \end{aligned} \quad (18.3.2)$$

Il limite a infinito esiste sicuramente per la proprietà di decrescenza rapida della  $\phi$ .  
Nel secondo invece si opera come segue:

$$\psi(x) \equiv \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \phi'(0) \quad (18.3.3)$$

Da cui si ricava che  $\psi(x)$  è continua e si può allora riscrivere:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a \right\} \frac{\phi(x)}{x} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a \right\} \frac{\phi(0) + x\psi(x)}{x} dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a \right\} \frac{\phi(0)}{x} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a \right\} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx < \infty \end{aligned} \quad (18.3.4)$$

Dove si è usato il fatto che l'integrale contenente  $\phi(0)$  è un integrale dispari su un dominio pari.

**Nota:** La (18.3.1) può essere riscritta:

$$\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \phi \rangle \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle T_{u_{\epsilon,R}}, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (18.3.5)$$

Dove  $T_{u_{\epsilon,R}}$  è la distribuzione associata alla funzione:

$$u_{\epsilon,R}(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{per } |x| < \epsilon \text{ o } |x| > R \\ \frac{1}{x} & \text{per } \epsilon < |x| < R \end{cases} \quad (18.3.6)$$

$u_{\epsilon,R} \in \mathbb{L}^1$  per cui è Fourier-trasformabile e la trasformata appartiene a  $S'$ .

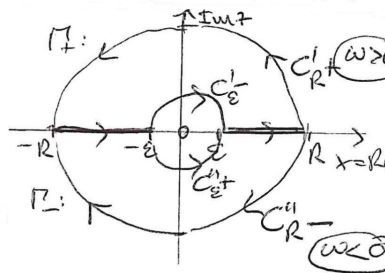
Dal momento che il doppio limite in (18.3.5) esiste finito, si trova che la successione  $T_{u_{\epsilon,R}} \in S'$  è debolmente convergente in  $S'$ . Dal momento che  $S'$  è completo, ne risulta che la distribuzione parte principale è temperata.

Se ne può allora calcolare la Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(T_{u_{\epsilon,R}}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T_{\mathcal{F}(u_{\epsilon,R})} \quad (18.3.7)$$

Per calcolare la trasformata si applica il Lemma di Jordan (12.3) calcolando l'integrale sul contorno in Figura (18.3):

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(u_{\epsilon,R}) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^R \right\} \frac{e^{i\omega x}}{x} dx = \\ &= \begin{cases} i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{i\omega z}}{z}, z=0 \right] = i\pi & \text{per } \omega > 0 \\ -i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{i\omega z}}{z}, z=0 \right] = -i\pi & \text{per } \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (18.3.8)$$



Da cui riassumendo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{\epsilon,R}) = i\pi \varepsilon(\omega) \quad (18.3.9)$$

dove  $\varepsilon(\omega)$  è la funzione segno

$$\varepsilon(\omega) \equiv \begin{cases} +1 & \text{per } \omega > 0 \\ -1 & \text{per } \omega < 0 \end{cases} \quad (18.3.10)$$

Da cui in ultima istanza si può scrivere quanto trovato come:

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right) = T_{i\pi \varepsilon(\omega)} \iff \mathcal{F}\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right) = i\pi \varepsilon(\omega) \quad (18.3.11)$$



## 18.4 Esempi

Si consideri la funzione  $u_n(x) \equiv \frac{\sin(nx)}{\pi x}$ .

Utilizzando la (18.3.11) si può dimostrare che:

$$u_n(x) \equiv \frac{\sin(nx)}{\pi x} \implies \mathcal{F}(u_n) = \Theta(\omega + n) - \Theta(\omega - n) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq n \\ 0 & |\omega| > n \end{cases} \quad (18.4.1)$$

Per cui esiste il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = 1 = \mathcal{F}(\delta_0) \quad (18.4.2)$$

Per la continuità degli operatori, questo implica che  $T_{u_n} \xrightarrow{S'} \delta_0$ .

Per dimostrarlo, basta scrivere il seno in notazione complessa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} e^{i\omega x} dx = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} e^{i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega+n)x}}{x} dx - \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega-n)x}}{x} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \mathcal{F} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} \right) (\omega + n) - \mathcal{F} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} \right) (\omega - n) \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \{ i\pi \varepsilon(\omega + n) - i\pi \varepsilon(\omega - n) \} = \frac{1}{2} \{ \varepsilon(\omega + n) - \varepsilon(\omega - n) \} = \\ &= \theta(\omega + n) - \theta(\omega - n) = \begin{cases} 1 & \text{per } |\omega| < n \\ 0 & \text{per } |\omega| > n \end{cases} \end{aligned} \quad (18.4.3)$$

Avendo usato la relazione:

$$\varepsilon(x) = 2\theta(x) - 1 \quad (18.4.4)$$

## Proprietà e due esempi importanti

Si elencano due proprietà:

$$\mathcal{F}(D^k T) = (-i\omega)^k \mathcal{F}(T) \quad (19.0.1)$$

$$D^k(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}((ix)^k T) \quad (19.0.2)$$

Le dimostrazioni, lasciate al lettore, sfruttano il fatto che, detto  $P(x)$  un polinomio in  $x$ :

$$\langle P(x)T, \phi \rangle = \langle T, P(x)\phi \rangle \quad \forall T \in S', \forall \phi \in S \quad (19.0.3)$$

Tali proprietà permettono di ottenere 2 esempi importanti:

•

$$\mathcal{F}(\delta^{(k)}(x)) = (-i\omega)^k \quad (19.0.4)$$

Si ha infatti

$$\mathcal{F}(\delta_0^{(k)}) = \mathcal{F}(D^k \delta_0) = (-i\omega)^k \mathcal{F}(\delta_0) = (-i\omega)^k \quad (19.0.5)$$

•

$$\mathcal{F}(x^k) = (-i)^k 2\pi \delta^{(k)}(\omega) \quad (19.0.6)$$

Infatti

$$\mathcal{F}(e^{-iax}) = 2\pi \delta(\omega - a) \quad (19.0.7)$$

e prendendo  $a = 0$  si trova

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi \delta(\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(T_1) = 2\pi \delta_0 \quad (19.0.8)$$

Ma per le proprietà sopra:

$$\mathcal{F}((ix)^k T) = D^k \mathcal{F}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(x^k T) = (-i)^k D^k \mathcal{F}(T) \quad (19.0.9)$$

Da cui, prendendo  $T = 1$

$$\mathcal{F}(x^k) = \mathcal{F}(x^k T_1) = (-i)^k D^k \mathcal{F}(T_1) = (-i)^k 2\pi D^k \delta_0 \quad (19.0.10)$$

Ossia

$$\mathcal{F}(x^k) = (-i)^k 2\pi \delta^{(k)}(\omega) \quad (19.0.11)$$

Facendo l'antitrasformata dei risultati appena trovati si ottiene:

•

$$\mathcal{F}^{-1}(\omega^k) = i^k \delta^{(k)}(x) \quad (19.0.12)$$

•

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta^{(k)}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} (ix)^k \quad (19.0.13)$$

### 19.1 Esercizi

1.

Si verifica la relazione:

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad (19.1.1)$$

*Dimostrazione.* Utilizzando che per ogni polinomio e  $\forall \phi \in \mathcal{E} \equiv C^\infty$  vale:

$$\langle P(x)T, \phi \rangle \equiv \langle T, P(x)\phi \rangle \quad (19.1.2)$$

e che:

$$\langle D^k \delta_{x_0}, \phi \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(x_0) \quad (19.1.3)$$

Si ha:

$$\langle x\delta'_0, \phi \rangle = \langle \delta'_0, x\phi \rangle = -D(x\phi) \big|_{x=0} = [-x\phi' - \phi] \big|_{x=0} = -\phi_0 = -\langle \delta_0, \phi \rangle \quad (19.1.4)$$

Ossia:

$$x\delta'_0 = -\delta_0 \quad (19.1.5)$$

■

2.

Si verifica che vale in generale

$$x^c D^k \delta_0 = 0 \quad \forall c > k \quad (c, k \in \mathbb{N}) \quad (19.1.6)$$

*Dimostrazione.* Infatti

$$\langle x^c D^k \delta_0, \phi \rangle = \langle D^k \delta_0, x^c \phi \rangle = \langle D^k \delta_0, x^c \phi \rangle = (-1)^k D^k (x^c \phi) \big|_{x=0} = 0 \quad \forall c > k \quad (19.1.7)$$

In particolare prendendo  $c = 1$  e  $k = 0$  si trova:

$$x\delta_0(x) = 0 \quad (19.1.8)$$

■

Dal momento che le uniche distribuzioni a supporto puntiforme sono la delta e le sue derivate, si trova che la soluzione più generale dell'equazione

$$xT = 0 \quad \Rightarrow \quad T = c\delta(x) \quad c \in \mathbb{C} \quad (19.1.9)$$

E allo stesso modo si trova

$$x^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = c_1 \delta(x) + c_2 \delta'(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad (19.1.10)$$

E in generale

$$x^c T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \sum_{k=0}^{c-1} b_k D^k \delta_0 \quad c \geq 1, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (19.1.11)$$

3.

Si trovi la soluzione più generale dell'equazione

$$xT = 1 \quad (19.1.12)$$

*Dimostrazione.* Si verifica che

$$T_p = \mathcal{P} \frac{1}{x} \quad (19.1.13)$$

è una soluzione particolare. Infatti:

$$\begin{aligned} \langle x \mathcal{P} \frac{1}{x}, \phi \rangle &= \langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, x\phi \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right\} \frac{1}{x} x\phi(x) dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right\} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \phi(x) dx = \langle T_1, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \end{aligned} \quad (19.1.14)$$

Ovvero con notazione *lasca*:

$$x \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1 \quad (19.1.15)$$

Per trovare la soluzione più generale si somma ora la soluzione dell'omogenea associata

$$xT_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = c\delta(x) \quad (19.1.16)$$

Perciò la soluzione più generale della (19.1.12) è:

$$T = T_p + T_0 = \mathcal{P}\frac{1}{x} + c\delta(x) \quad (19.1.17)$$

■

4. \_\_\_\_\_

Si trovi la soluzione più generale dell'equazione

$$xT = aT \quad a \in \mathbb{R} \quad (19.1.18)$$

*Dimostrazione.* Scrivendo

$$(x - a)T = 0 \quad (19.1.19)$$

Si trova che  $T$  deve avere supporto puntiforme in  $a$ , da cui la soluzione più generale è

$$T = c\delta(x - a) \quad c \in \mathbb{C} \quad (19.1.20)$$

■

## 19.2 Esercizi sulle distribuzioni

Si risolvono in trasformata di Fourier le seguenti equazioni con distribuzioni:

1. \_\_\_\_\_

$$xT = 0 \quad (19.2.1)$$

In cui  $T$  è l'incognita. Prendendo la trasformata e sfruttando la (19.0.2) si trova:

$$\mathcal{F}(xT) = -i\mathcal{F}(iT) = -iD\mathcal{F}(T) = 0 \quad (19.2.2)$$

Ossia

$$D\mathcal{F}(T) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(T) = c \Rightarrow T = \mathcal{F}^{-1}(c) = c\mathcal{F}^{-1}(1) = c\delta(x) \quad (19.2.3)$$

2. \_\_\_\_\_

$$xT = aT \iff (x - a)T = 0 \quad (19.2.4)$$

con  $a \in \mathbb{R}$ .

Trasformando:

$$\mathcal{F}(xT) = -iD\mathcal{F}(T) \quad \mathcal{F}(aT) = a\mathcal{F}(T) \quad (19.2.5)$$

Perciò

$$-iD\mathcal{F}(T) = a\mathcal{F}(T) \iff D\mathcal{F} = ia\mathcal{F}(T) \quad (19.2.6)$$

Da cui in sintesi

$$\mathcal{F}(T) = ce^{ia\omega} \Rightarrow T = \mathcal{F}^{-1}(ce^{ia\omega}) = c\mathcal{F}^{-1}(e^{ia\omega}) = c\delta(x - a) \quad (19.2.7)$$

3. \_\_\_\_\_

$$x^2T = 1 \quad (19.2.8)$$

Se si osserva che

$$x^2D\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = -1 \quad (19.2.9)$$

si può scrivere la soluzione più generale nella forma

$$T = -D\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) + c_1\delta(x) + c_2\delta'(x) \quad (19.2.10)$$

La (19.2.9) fornisce una soluzione particolare, ora si dimostra che per l'omogenea vale:

$$x^2 T_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = c_1 \delta(x) + c_2 \delta'(x) \quad (19.2.11)$$

Se si fa la trasformata infatti:

$$\mathcal{F}(x^2 T_0) = -\mathcal{F}((ix)^2 T_0) = -D^2 \mathcal{F}(T_0) = 0 \quad (19.2.12)$$

Da cui

$$D \mathcal{F}(T_0) = c \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(T_0) = c\omega + c_1 \quad (19.2.13)$$

e antitrasformando

$$T_0 = \mathcal{F}^{-1}(c\omega + c_1) = c_1 \delta(x) + c \delta'(x) \quad (19.2.14)$$

## Le distribuzioni $\delta_+$ e $\delta_-$

Si usano comunemente in fisica le distribuzioni:

$$\delta_{\pm} \equiv \frac{1}{2}\delta(x) \pm \frac{1}{2\pi i}\mathcal{P}\frac{1}{x} \quad (20.0.1)$$

La cui trasformata è:

$$\mathcal{F}(\delta_{\pm}(x)) = \frac{1}{2}(1 \pm \varepsilon(\omega)) = \theta(\pm\omega) \quad (20.0.2)$$

Avendo usato le relazioni:

$$\theta(\omega) + \theta(-\omega) = 1 \quad \theta(\omega) - \theta(-\omega) = \varepsilon(\omega) \quad (20.0.3)$$

Sfruttando la relazione  $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\hat{P}\mathcal{F}$  con  $\hat{P}$  operatore di Parità spaziale. Si possono ricavare anche le seguenti:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{P}\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}i\pi\varepsilon(-x) = \frac{1}{2i}\varepsilon(x) \Rightarrow \mathcal{F}(\varepsilon(x)) = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\omega} \quad (20.0.4)$$

Da cui si ricava ancora:

$$\mathcal{F}(\theta(\pm x)) = \pm i\mathcal{P}\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega) \equiv 2\pi\delta_{\mp}(\omega) \quad (20.0.5)$$

### 20.1 Sulla trasformata di Fourier della $\theta$

Si vogliono dimostrare le seguenti relazioni (per  $a \in \mathbb{R}$ ):

•

$$\mathcal{F}(\theta(x)e^{-iax}) = i\mathcal{P}\frac{1}{\omega - a} + \pi\delta(\omega - a) \quad (20.1.1)$$

•

$$\mathcal{F}(\theta(x - a)) = e^{i\omega a}\mathcal{F}(\theta(x)) = e^{i\omega a}\left(i\mathcal{P}\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \quad (20.1.2)$$

Per dimostrarle si pensi alla  $\theta$  come al limite di una successione di funzioni  $u_n \in \mathbb{L}^1$  a cui sono associate le distribuzioni  $T_{u_n}$ :

$$T_{\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} \quad \text{con} \quad u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0, n) \\ 0 & \text{per } x < 0, x > n \end{cases} \quad (20.1.3)$$

Risulta infatti:

$$\langle T_{u_n}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)\phi(x)dx = \int_0^n \phi(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \phi(x)dx = \langle T_{\theta}, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (20.1.4)$$

Da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} = T_{\theta} \quad (20.1.5)$$

Conseguentemente si ha:

$$\mathcal{F}(T_{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_{u_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{F}(u_n)} \quad (20.1.6)$$

Per cui si può scrivere:

$$T_{\theta(x)e^{-iax}} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n(x)e^{-iax}} \quad (20.1.7)$$

Perciò

$$\mathcal{F}(T_{\theta(x)e^{-iax}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_{u_n(x)e^{-iax}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{F}(u_n(x)e^{-iax})} \quad (20.1.8)$$

Ma  $u_n(x) \in \mathbb{L}^1$  da cui

$$\mathcal{F}(u_n(x)e^{-iax}) = \tilde{u}_n(\omega - a) \quad (20.1.9)$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_{\theta(x)e^{-iax}})(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_{u_n(x)e^{-iax}})(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{F}(u_n(x)e^{-iax})}(\omega) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{F}(u_n(x))(\omega-a)} = \mathcal{F}(T_{\theta})(\omega-a) = i\mathcal{P}\frac{1}{\omega-a} + \pi\delta(\omega-a) \equiv 2\pi\delta_-(\omega-a)\end{aligned}\quad (20.1.10)$$

Analogamente per la seconda relazione si può usare la successione di funzioni:

$$v_n(x) = u_n(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (a, a+n) \\ 0 & \text{per } x < a, x > a+n \end{cases} \quad (20.1.11)$$

Che per  $n \rightarrow \infty$  riproduce la  $\theta(x-a)$ . Allora si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_{\theta(x-a)}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_{v_n(x)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{F}(v_n(x))} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{e^{i\omega a}\mathcal{F}(u_n(x))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\omega a} T_{\mathcal{F}(u_n(x))} = e^{i\omega a} \mathcal{F}(T_{\theta})\end{aligned}\quad (20.1.12)$$

Dove si è usato:

$$\begin{aligned}\langle T_{e^{i\omega a}\mathcal{F}(u_n(x))}, \phi(\omega) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega a} \tilde{u}_n(\omega) \phi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_n(\omega) [e^{i\omega a} \phi(\omega)] d\omega = \\ &= \langle T_{\tilde{u}_n}, e^{i\omega a} \phi(\omega) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(T_{\theta}), e^{i\omega a} \phi(\omega) \rangle = \langle e^{i\omega a} \mathcal{F}(T_{\theta}), \phi(\omega) \rangle \\ &\quad \forall \phi \in S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{e^{i\omega a}\mathcal{F}(u_n(x))} = e^{i\omega a} \mathcal{F}(T_{\theta})\end{aligned}\quad (20.1.13)$$

## 20.2 Su un limite notevole

Si ha:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \quad (20.2.1)$$

Si studiano separatamente i due casi.

Si ha:

$$\frac{1}{x+i\epsilon} = \mathcal{F}^{-1}(v_{\epsilon}(\omega)) \quad \text{con } v_{\epsilon}(\omega) = -2\pi i\theta(-\omega)e^{\epsilon\omega}, \quad \epsilon > 0 \quad (20.2.2)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(v_{\epsilon}(\omega)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\epsilon}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} \theta(-\omega) e^{\epsilon\omega} e^{-i\omega x} d\omega = \\ &= -i \int_{-\infty}^0 e^{(\epsilon-ix)\omega} d\omega = -i \frac{e^{(\epsilon-ix)\omega}}{\epsilon-ix} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{-i}{\epsilon-ix} = \frac{1}{x+i\epsilon}\end{aligned}\quad (20.2.3)$$

Perciò nel limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  si trova:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+i\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}^{-1}(v_{\epsilon}(\omega)) = -2\pi i \mathcal{F}^{-1}(\theta(-\omega)) = \\ &= -2\pi i \frac{1}{2\pi} \left[ i\mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi\delta(x) \right] = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\end{aligned}\quad (20.2.4)$$

E si procede analogamente per  $u_{\epsilon}(\omega)$  tale che  $\mathcal{F}^{-1}(u_{\epsilon}(\omega)) = \frac{1}{x-i\epsilon}$ .

Sommando e sottraendo le due relazioni trovate, è possibile trovare un'espressione per  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  e per  $\delta(x)$  come limiti di successioni:

•

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \quad (20.2.5)$$

•

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (20.2.6)$$

■

## 20.3 Sul prodotto e la convoluzione tra distribuzioni

Nel caso in cui una distribuzione sia associata a una funzione  $u(x)$  si definisce il prodotto come segue:

$$\langle T_u T, \phi \rangle \equiv \langle T, u\phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (20.3.1)$$

Se  $u\phi \in S$  (ossia è ancora una funzione test).

Questo è verificato se  $u(x)$  è un polinomio o un esponenziale, ma non nel caso della  $\theta$ .

Per esempio se  $T = \delta_{x_0}$  si trova:

$$\langle T_u \delta_{x_0}, \phi \rangle = \langle \delta_{x_0}, u\phi \rangle = u(x_0)\phi(x_0) = u(x_0) \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle \Rightarrow T_u \delta_{x_0} = u(x_0)\delta_{x_0} \quad (20.3.2)$$

Mentre per le derivate della  $\delta$  si trova,  $\forall \phi \in S$

$$\begin{aligned} \langle T_u \delta'_{x_0}, \phi \rangle &= \langle \delta'_{x_0}, u\phi \rangle = (-1)(u\phi)'(x_0) = (-1)[u'(x_0)\phi(x_0) + u(x_0)\phi'(x_0)] = \\ &= \langle -u(x_0)\delta_{x_0} + u(x_0)\delta'_{x_0}, \phi \rangle \Rightarrow T_u \delta'_{x_0} = -u'(x_0)\delta(x - x_0) + u(x_0)\delta'(x - x_0) \end{aligned} \quad (20.3.3)$$

E analogamente:

$$u(x)\delta''(x - x_0) = u''(x_0)\delta(x - x_0) - 2u'(x_0)\delta'(x - x_0) + u(x_0)\delta''(x - x_0) \quad (20.3.4)$$

Richiedendo che  $u(x)$  sia derivabile un numero di volte pari al gradi di derivazione della  $\delta$ .

### 20.3.1 Prodotto di convoluzione

Se  $u, v$  sono due funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$ , allora si definisce:

$$T_u * T_v \equiv T_{u*v} \quad (20.3.5)$$

Ossia:

$$\begin{aligned} \langle T_u * T_v, \phi \rangle &= \langle T_{u*v}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) (u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy u(x-y)v(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy v(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x-y)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy v(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx u(-(y-x))\phi(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy v(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx u_-(y-x)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy v(y) (u_- * \phi)(y) = \langle T_v, u_- * \phi \rangle \end{aligned} \quad (20.3.6)$$

Con  $u_-(t) \equiv u(-t)$ .

Ed è possibile estendere la definizione nei casi  $T_u * T$ :

$$\langle T_u * T, \phi \rangle \equiv \langle T, u_- * \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (20.3.7)$$

A condizione che  $u_- * \phi \in S$ .

Ad esempio è possibile definire  $T_u * \delta_0$ :

$$\begin{aligned} \langle T_u * \delta_0, \phi \rangle &\equiv \langle \delta_0, u_- * \phi \rangle = (u_- * \phi)(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt u_-(-t)\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt u(t)\phi(t) = \\ &\langle T_u, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \Rightarrow T_u * \delta_0 = T_u \end{aligned} \quad (20.3.8)$$

che a volte viene scritto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x')\delta(x - x')dx' = u(x) \quad (20.3.9)$$

Ogni volta che il prodotto di convoluzione ben definito valgono:

•

$$D(T_1 * T_2) = (DT_1) * T_2 = T_1 * (DT_2) \quad (20.3.10)$$

•

$$\mathcal{F}(T_1 * T_2) = \mathcal{F}(T_1)\mathcal{F}(T_2) \quad (20.3.11)$$

•

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{T}_1 * \tilde{T}_2) = 2\pi T_1 T_2 \quad (20.3.12)$$



## 20.4 Cambiamento di variabili nelle distribuzioni

Si vuole definire  $\delta(f(x))$  nel caso  $f(x)$  sia una funzione almeno  $C^1$  con solo zeri semplici.

Dal momento che la  $\delta$  si può definire come il limite di una successione di distribuzioni associate a funzioni come in (20.2.6), si estende la definizione a  $\delta(f(x))$ :

$$\delta(f(x)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{[f(x)]^2 + \epsilon^2} \quad (20.4.1)$$

Ossia in maniera estesa:

$$\langle \delta(f), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \delta_{\epsilon}(f), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{[f(x)]^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx \quad (20.4.2)$$

Si distinguono i contributi all'integrale dovuti a diversi tratti  $I$  dell'asse reale.

Sia  $I$  un tratto chiuso in cui  $f(x) \neq 0$ , si ha allora  $0 < m^2 \leq [f(x)]^2 \leq M^2$  per  $x \in I$ , da cui:

$$\frac{\epsilon}{\pi(M^2 + \epsilon^2)} \leq \frac{\epsilon}{\pi([f(x)]^2 + \epsilon^2)} \leq \frac{\epsilon}{\pi(m^2 + \epsilon^2)} < \frac{\epsilon}{\pi m^2} \quad (20.4.3)$$

Se ne deduce:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_I \frac{\epsilon}{\pi([f(x)]^2 + \epsilon^2)} \phi(x) dx = 0 \quad (20.4.4)$$

Siano  $I_i$  tratti chiusi, sufficientemente piccoli da contenere il solo zero  $x_i$ , con  $f(x_i)=0$ , e tale che  $f(x)$  sia monotona (quindi invertibile) in  $I_i$ , in accordo con l'ipotesi di zeri semplici.

In questo caso si può fare il cambio di variabile  $x \rightarrow y = f(x)$ :

$$\int_{I_i} \frac{\epsilon}{\pi([f(x)]^2 + \epsilon^2)} \phi(x) dx = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\epsilon}{\pi(y^2 + \epsilon^2)} \phi(f_i^{-1}(y)) \frac{dy}{|f'(f_i^{-1}(y))|} \quad (20.4.5)$$

Con  $\alpha, \beta > 0$ . Ponendo  $g(y) \equiv \frac{\phi(f_i^{-1}(y))}{f'(f_i^{-1}(y))}$  funzione continua, e con l'ulteriore cambio di variabili  $y = \epsilon t$  si trova:

$$\int_{I_i} \frac{\epsilon}{\pi([f(x)]^2 + \epsilon^2)} \phi(x) dx = \int_{-\alpha/\epsilon}^{\beta/\epsilon} \frac{g(\epsilon t)}{\pi(1 + t^2)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\epsilon t)}{\pi(1 + t^2)} \chi_{[-\frac{\alpha}{\epsilon}, \frac{\beta}{\epsilon}]}(t) dt \quad (20.4.6)$$

Con  $\chi_{[a,b]}$  funzione caratteristica del tratto  $[a,b]$ .

Il modulo dell'integrando è maggiorabile con una funzione  $L^1(\mathbb{R})$  (basta prendere il massimo di  $g$ ), per cui si può applicare il teorema della convergenza dominata e passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(f(x)) \phi(x) dx = g(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = g(0) = \frac{\phi(x_i)}{|f'(x_i)|} = \left\langle \frac{\delta_{x_i}}{|f'(x_i)|}, \phi \right\rangle \quad (20.4.7)$$

Sommando su tutti gli  $I_i$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (20.4.8)$$

## Esercizi sulle funzioni di Green

### 21.1 Primo esempio

Consideriamo il sistema lineare indipendente dal tempo descritto da:

$$y'(t) = f(t) \quad (21.1.1)$$

In cui  $f(t) \equiv INPUT$ ,  $y(t) \equiv OUTPUT$ . Per determinare la funzione di Green  $G(t)$  di tale sistema si pone come  $f(t) = \delta(t)$ , da cui  $y(t) = G(t)$ :

$$G'(t) = \delta(t) \quad (21.1.2)$$

Si passa in trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}(G'(t)) = (-i\omega)\tilde{G}(\omega) = \mathcal{F}(\delta(t)) = 1 \implies \omega\tilde{G}(\omega) = i \quad (21.1.3)$$

Usando come fatto noto che  $\omega P \frac{1}{\omega}$ , si ha come soluzione particolare:

$$\tilde{G}_P(\omega) = iP \frac{1}{\omega} \quad (21.1.4)$$

Mentre per la soluzione dell'omogenea:

$$\omega\tilde{G}_O(\omega) = 0 \implies \tilde{G}_O(\omega) = \tilde{c}\delta(\omega) \quad \tilde{c} \in \mathbb{C} \quad (21.1.5)$$

Per cui si ottiene la soluzione generale:

$$\tilde{G}(\omega) = \tilde{G}_P(\omega) + \tilde{G}_O(\omega) = iP \frac{1}{\omega} + \tilde{c}\delta(\omega) \quad (21.1.6)$$

Per cui antitrasformando e ricordando che  $\mathcal{F}^{-1}(P \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{2i}\epsilon(t)$  e  $\mathcal{F}^{-1}(\delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi}$ , si trova l'espressione:

$$G(t) = \frac{\epsilon(t)}{2} + \frac{\tilde{c}}{2\pi} = \Theta(t) + c \quad (21.1.7)$$

Con  $c \equiv \frac{\tilde{c}}{2\pi} - \frac{1}{2}$ . Quanto ottenuto risulta coerente con il fatto che  $D\Theta(t) = \delta(t)$ .

### 21.2 Secondo esempio:

Considero il sistema descritto dall'equazione differenziale:

$$y'(t) + ay(t) = f(t) \quad a \in \mathbb{R} \quad (21.2.1)$$

Si ottiene la funzione di Green del sistema:

$$G'(t) + aG(t) = \delta(t) \implies (a - i\omega)\tilde{G}(\omega) = 1 \implies \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{a - i\omega} \quad (21.2.2)$$

Antitrasformando troviamo  $G(t)$ :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{a - i\omega} d\omega \quad (21.2.3)$$

Tale integrale si può calcolare con il lemma di Jordan (12.3). La funzione  $g(z) = \frac{1}{-i(z+ia)}$  ha difatti un polo in  $z = -ia$  e risulta  $|g(z)| = \frac{1}{|z+ia|} \leq \frac{1}{|R-|a||} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ . Occorre tuttavia distinguere 2 casi in funzione del segno di  $a$ :

- $a > 0$ : Il polo risulta sul semiasse immaginario negativo, per cui dal lemma di Jordan:

$$G_p(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{i}{2\pi}(-2\pi i) \text{Res} \left[ \frac{e^{-izt}}{z+ia}, z = -ia \right] & t > 0 \end{cases} \implies G_p(t) = \Theta(t)e^{-at} \quad (21.2.4)$$

Tuttavia questa è solo una soluzione particolare dell'equazione differenziale di partenza. Occorre aggiungere una soluzione dell'equazione omogenea:

$$G'_O(t) + aG_O(t) = 0 \implies G_O(t) = ce^{-at} \quad c \in \mathbb{C} \quad (21.2.5)$$

Questa soluzione non è fourier-trasformabile, nemmeno nel senso delle distribuzioni ( $T_{e^{-at}} \in D'$  ma non  $\in S$ ), per questo motivo non era stata trovata in trasformata.

Per cui la soluzione generale:

$$G(t) = (\Theta(t) + c)e^{-at} \quad (21.2.6)$$

Se  $c = 0$  la soluzione è causale.

- $a < 0$ : Il polo risulta sul semiasse immaginario positivo, da cui

$$G_p(t) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi}(2\pi i) \text{Res} \left[ \frac{e^{-izt}}{z+ia}, z = -ia \right] & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \implies G_p(t) = -\Theta(-t)e^{-at} \quad (21.2.7)$$

Analogamente a prima si deve trovare anche una soluzione omogenea (identica a prima), per cui la soluzione generale risulta:

$$G(t) = (-\Theta(-t) + c)e^{-at} \quad (21.2.8)$$

Che risulta causale solo per  $c = 1$ .

Le 2 equazioni trovate rappresentano la soluzione più generale dell'equazione di partenza.

Inoltre le soluzioni particolari sono tali indipendentemente dal segno di  $a$ , come si può verificare. Tuttavia l'equazione di partenza poteva essere risolta direttamente senza ricorrere alle trasformate di Fourier:

$$G'(t) + aG(t) = 0 \text{ se } t < 0 \text{ o } t > 0 \implies G(t) \begin{cases} c_1 e^{-at} & t < 0 \\ c_2 e^{-at} & t > 0 \end{cases} \quad (21.2.9)$$

Ricordando che se  $u(x)$  è derivabile ovunque tranne che in  $x_0$ , dove presenta una discontinuità di prima specie pari a  $\sigma \equiv \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x)$ , si ha  $\sigma DT_u = \delta_{x_0} + T_{\{u'\}}$ .

Nel caso in esame  $DT_G + aT_G = \delta_0$ , per cui  $G(t)$  deve avere una discontinuità finita in  $t = 0$  pari a 1, per cui definitivamente:

$$G(t) = e^{-at}(\Theta(t) + c) \quad (21.2.10)$$

### 21.3 Terzo esempio

Si consideri il sistema descritto da:

$$y'(t) + iby(t) = f(t) \quad b \in \mathbb{R} \quad (21.3.1)$$

L'equazione differenziale per la funzione di Green diventa:

$$G'(t) + ibG(t) = \delta(t) \implies -i(\omega - b)\tilde{G}(\omega) = 1 \implies (\omega - b)\tilde{G}(\omega) = i \quad (21.3.2)$$

- **Omogenea :**

$$(\omega - b)\tilde{G}(\omega) = 0 \implies \tilde{G}_o(\omega) = \tilde{c} \delta(\omega - b) \quad (21.3.3)$$

- **Particolare :**

$$(\omega - b)\tilde{G}(\omega) = i \implies \tilde{G}_p(\omega) = \mathcal{P} \frac{i}{\omega - b} \quad (21.3.4)$$

Da cui:

$$\tilde{G}(\omega) = \tilde{G}_o(\omega) + \tilde{G}_p(\omega) = \tilde{c} \delta(\omega - b) + \mathcal{P} \frac{i}{\omega - b} \quad (21.3.5)$$

E antitrasformando:

$$G(t) = \left[ \frac{1}{2}(2\theta(t) - 1) + \frac{\tilde{c}}{2\pi} \right] e^{-ibt} = [\theta(t) + c]e^{-ibt} \quad (21.3.6)$$

Si sarebbe potuto risolvere in maniera analoga all'esempio precedente senza passare in trasformata di Fourier.

# La funzione di Green per l'equazione di Poisson

Si consideri l'equazione di Poisson

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (22.0.1)$$

Dove  $\Delta$  è il solito Laplaciano.

Si può considerare la (22.0.1) come un sistema lineare e invariante per traslazioni in cui  $\rho(\mathbf{x})$  è l'INPUT e  $\Phi(\mathbf{x})$  è l'OUTPUT.

La soluzione è nota ed è:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{|\mathbf{x}|} * \rho \quad (22.0.2)$$

Da cui si verifica che  $G_o(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{|\mathbf{x}|}$  è la funzione di Green del problema.

Difatti dovendo essere soluzione dell'eq (22.0.1) con  $\rho(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ , si ha:

$$\Delta G_0(\mathbf{x}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (22.0.3)$$

Risulta essere il potenziale generato da una carica puntiforme posta in  $\mathbf{x} = 0$ .

E' possibile dimostrarlo anche direttamente usando il seguente:

**Teorema 22.1 (di Green).** *Dato un volume (aperto e connesso) limitato dalla superficie  $S = \partial V$  e due funzioni  $\psi(\mathbf{x})$  e  $\phi(\mathbf{x})$  regolari in  $V$  si ha:*

$$\int_V (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi) d^3\mathbf{x} = \int_{S=\partial V} \left( \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS \quad (22.0.4)$$

con  $\partial/\partial n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$  la derivata lungo la direzione del versore normale  $\mathbf{n}$  orientato verso l'esterno del volume  $V$ .

*Dimostrazione.* Si parte dal **Th. della divergenza**, per cui, dato un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  racchiuso da una superficie  $S \equiv \partial V$  si ha:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3\mathbf{x} = \int_{S=\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S=\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (22.0.5)$$

Prendendo  $\mathbf{A} = \psi\nabla\phi$  risulta

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\psi\nabla\phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\Delta\phi \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (22.0.6)$$

Da cui sostituendo nella (22.0.5) si trova:

$$\int_V (\psi\Delta\phi + \nabla\psi \cdot \nabla\phi) d^3\mathbf{x} = \int_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds \quad (22.0.7)$$

Nota come *Prima identità di Green*.

Se si considera la stessa identità ma scambiando tra loro  $\phi$  e  $\psi$  poi le si sottraggono membro a membro si trova la tesi, nota come *Seconda identità di Green*. ■

Si utilizza ora il Th. per dimostrare che

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (22.0.8)$$

Nel senso delle distribuzioni si ha

$$\Delta T_{1/|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta_0^{(3)} \quad (22.0.9)$$

Lo si può fare prendendo il limite di una distribuzione adoperando le funzioni a scalino:

$$T_{1/|\mathbf{x}|} = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T_{u_{\varepsilon,R}(\mathbf{x})} \quad u_{\varepsilon,R}(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{x}|} & \varepsilon \leq |\mathbf{x}| \leq R \\ 0 & |\mathbf{x}| < \varepsilon \quad |\mathbf{x}| > R \end{cases} \quad (22.0.10)$$

Notare che, non essendo  $1/|\mathbf{x}|$  derivabile in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  non si può dire che  $\Delta T_{1/|\mathbf{x}|} = T_{\Delta u_{\varepsilon,R}}$ . Usando le proprietà di derivazione delle distribuzioni si trova:

$$\langle \Delta T_{1/|\mathbf{x}|}, \phi \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \Delta T_{u_{\varepsilon,R}}, \phi \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle T_{u_{\varepsilon,R}}, \Delta \phi \rangle \quad (22.0.11)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{\varepsilon \leq |\mathbf{x}| \leq R} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \phi \, d^3 \mathbf{x} \quad (22.0.12)$$

Detto  $V_{\varepsilon,R}$  il guscio sferico su cui avviene l'integrazione, si può usare il (22.1) con  $\psi(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|$ . Con questa scelta risulta  $\hat{n} = \hat{u}_r$ , con  $\hat{u}_r$  versore radiale uscente, per il guscio sferico  $S_R$ , mentre  $\hat{n} = -\hat{u}_r$ , versore radiale uscente dal guscio interno, per il guscio sferico  $S_\varepsilon$ . Per cui

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla = \hat{u}_r \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}$$

per  $S_R$ , mentre

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla = -\hat{u}_r \cdot \nabla = -\frac{\partial}{\partial r}$$

per  $S_\varepsilon$ .

E si trova:

$$\int_{V_{\varepsilon,R}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \phi \, d^3 \mathbf{x} = \int_{S_R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) ds - \int_{S_\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) ds \quad (22.0.13)$$

Avendo sfruttato che  $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = 0 \, \forall \mathbf{x} \neq 0$ .

Grazie al buon andamento a infinito delle funzioni test  $\phi \in S$  si ha (basta passare in coordinate sferiche con  $dr = R^2 d\Omega$ ):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) ds = 0 \quad (22.0.14)$$

Da cui

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_{\varepsilon,R}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \phi \, d^3 \mathbf{x} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) ds = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{\varepsilon^2} \phi \right) \varepsilon^2 d\Omega = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \phi \, d\Omega = -\phi(\mathbf{0}) \int d\Omega = -4\pi\phi(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (22.0.15)$$

Da cui si trova

$$\langle \Delta T_{1/|\mathbf{x}|}, \phi \rangle = -4\pi \langle \delta_{\mathbf{0}}^{(3)}, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S \quad (22.0.16)$$

## Funzioni di Green per sistemi con condizioni al contorno assegnate

In un generico sistema lineare

$$\text{INPUT } a(x) \rightarrow b(x) \text{ OUTPUT} \quad (23.0.1)$$

con condizioni al contorno assegnate per  $b(x)$  in punti fissati, la funzione di Green del sistema dipende separatamente da  $x$  e  $x'$ , anzichè solo dalla loro differenza  $x - x'$  (le condizioni al contorno rompono l'invarianza per traslazioni).

Ad esempio si consideri un sistema del tipo:

$$L_x[b(x)] = a(x) \quad (23.0.2)$$

Sia  $L_x$  operatore differenziale lineare e si abbiano condizioni al contorno assegnate  $b(\alpha) = b(\beta) = 0$ . La funzione di Green  $G(x, x')$  del sistema sarà la soluzione dell'equazione (23.0.2) con  $a(x) \rightarrow \delta(x - x')$  e con le dovute condizioni al contorno:

$$L_x[G(x, x')] = \delta(x - x') \quad G(\alpha, x') = G(\beta, x') = 0 \quad \forall x' \quad (23.0.3)$$

Si ha in tale caso:

$$b(x) = \int G(x, x')a(x')dx' \implies L_x[b(x)] = \int L[G(x, x')]a(x')dx' = \int \delta(x - x')a(x')dx' = a(x)$$

### 23.1 Esempio

Si consideri il sistema:

$$\frac{d^2b}{dx^2} = a(x) \quad b(0) = b(1) = 0 \quad (23.1.1)$$

Si determina la funzione di Green del sistema:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, x') = \delta(x - x') \quad G(0, x') = G(1, x') = 0 \quad (23.1.2)$$

Si ottiene:

$$G(x, x') = \begin{cases} Ax + B & 0 \leq x < x' \leq 1 \\ Cx + D & 0 \leq x' < x \leq 1 \end{cases} \quad (23.1.3)$$

Affinchè sia soluzione si deve avere:

$$\lim_{x \rightarrow x'-} G(x, x') = \lim_{x \rightarrow x'+} G(x, x') \implies Ax' + B = Cx' + D \quad (23.1.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x'+} \frac{d}{dx}G(x, x') - \lim_{x \rightarrow x'-} \frac{d}{dx}G(x, x') \implies C - A = 1 \quad (23.1.5)$$

Si osservi che  $A, B, C, D$  sono costanti rispetto ad  $x$ , ma sono in generale funzioni di  $x'$ :  $A = A(x')$ .

Si impongono anche le condizioni al contorno per  $G$ :

$$G(0, x') = B(x') = 0 \quad G(1, x') = C(x') + D(x') = 0 \quad \forall x' \quad (23.1.6)$$

Si ricava dunque:

$$\begin{cases} A(x') = C(x') - 1 = -D(x') - 1 \\ B(x') = 0 \\ C(x') = -D(x') \end{cases} \implies G(x, x') = \begin{cases} (-D(x') - 1)x & 0 \leq x < x' \leq 1 \\ D(x')(1 - x) & 0 \leq x' < x \leq 1 \end{cases} \quad (23.1.7)$$

Ma dalla condizione di continuità risulta che  $D(x') = -x'$ , per cui:

$$G(x, x') = \begin{cases} (x' - 1)x & 0 \leq x < x' \leq 1 \\ x'(x - 1) & 0 \leq x' < x \leq 1 \end{cases} \quad (23.1.8)$$

Ovvero risulta simmetrica rispetto a  $x \rightarrow x'$

## 23.2 Soluzione formale del problema elettrostatico dei valori al contorno mediante la funzione di Green

Si vuole ottenere la soluzione dell'equazione di Poisson:

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad (23.2.1)$$

All'interno di un volume  $V$ , con condizioni al contorno sulla superficie  $S = \partial V$ .

Si è già visto che  $G_0(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{|\mathbf{x}|}$  è una funzione di Green (ovvero  $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ ).

Di conseguenza detto  $\mathbf{x}_0$  un punto qualsiasi del volume  $V$ , si ha che:

$$\Delta G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (23.2.2)$$

Più in generale una qualsiasi funzione del tipo:

$$G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + h(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + h(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \quad (23.2.3)$$

Con  $h(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$  funzione armonica  $\forall \mathbf{x} \in V$ .

Anche  $G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$  è per cui una funzione di Green del problema. Data l'arbitrarietà della funzione  $h(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ , posso effettuare tale scelta in modo da soddisfare una determinata condizione al contorno su  $S \equiv \partial V$ .

La soluzione dell'equazione di Poisson (22.0.1) può allora essere ottenuta tramite il teorema di Green. Prendendo  $\phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$  e  $\psi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$  e scegliendo per essa una funzione di Green che soddisfa condizioni al contorno che non dipendono in modo dettagliato dalle condizioni al contorno soddisfatte da  $\Phi$  su  $S$ .

Utilizzando l'equazione (23.2.3) e prendendo un volume  $V_\epsilon \equiv V/C_\epsilon$  con  $C_\epsilon = \{x : |x| \leq \epsilon\}$  sfera di raggio  $\epsilon$ , racchiusa dalla superficie sferica  $S_\epsilon$  e facendo tendere  $\epsilon \rightarrow 0$  si trova, riordinando i termini e dividendo per  $4\pi$ :

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \int_V G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial n} - \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dS \quad (23.2.4)$$

Per cui la soluzione dell'equazione (22.0.1) in un volume  $V$  è definita univocamente, a meno di una costante additiva, assegnando i valori di  $\Phi|_S$ , sulla superficie  $S \equiv \partial V$  (detta condizione al contorno di Dirichlet), oppure assegnando i valori della derivata normale  $\left. \frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_S$  sulla superficie (condizione di Neumann).

Difatti date 2 soluzioni della (22.0.1) che soddisfano le medesime condizioni al contorno su  $S$ , si ha, utilizzando la prima identità di Green:

$$\int_V (\psi \Delta\phi + \nabla\psi \cdot \nabla\phi) d^3\mathbf{x} = \int_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS \quad (23.2.5)$$

Con  $\psi = \phi = U \equiv \Phi_2 - \Phi_1$ :

$$\int_V (U \Delta U + \nabla U \cdot \nabla U) d^3\mathbf{x} = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS \quad (23.2.6)$$

Essendo  $\Delta U = \Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = 0$  e  $U|_S = 0$  per le condizioni di Dirichlet, o  $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 0$  per le condizioni di Neumann.

In ogni caso si ha  $\left[ U \frac{\partial U}{\partial n} \right]_S = 0$ , per cui:

$$\int_V |\nabla U|^2 d^3\mathbf{x} = 0 \implies \nabla U = 0 \quad (23.2.7)$$

Il che implica  $U$  costante, ovvero  $\Phi_2 = \Phi_1 + \text{cost.}$

Nel caso di condizione al contorno di Dirichlet si ha che la costante vale 0, mentre le caso delle condizioni di Neumann, la soluzione è unica a meno di una costante inessenziale.

Per cui in generale non esiste una soluzione per cui sia  $\Phi$  che  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$  abbiano entrambi valori prefissati su  $S$  (condizioni di Cauchy), poichè il problema risulterebbe sovramisurato.

Tornando all'equazione (23.2.4), data l'arbitrarietà di  $h$ , armonica in  $V$ , in  $G = G_0 + h$  posso scegliere  $G$  in modo che l'integrale di superficie dipenda solo dalle condizioni al contorno scelte per  $\Phi$ :

- Per condizioni di Dirichlet si impone che:

$$G_D(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S \implies h(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (23.2.8)$$

Per cui l'equazione prende la forma:

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \int_V G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} - \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial n} dS \quad (23.2.9)$$

- Per condizioni di Neumann non è possibile imporre semplicemente:  $\frac{\partial G_n}{\partial n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S$  poichè sarebbe in contrasto con il teorema di Gauss:

$$\int_s \frac{\partial G_n}{\partial n} dS = \int_S \nabla G_n \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla G_n \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \nabla G_n d^3\mathbf{x} = \int_V \Delta G_n d^3\mathbf{x} = -4\pi \quad (23.2.10)$$

La condizione al contorno più semplice possibile per  $G_n$  è invece:

$$\frac{\partial G_n}{\partial n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{A} \quad (23.2.11)$$

Con  $A$  area totale della superficie.

L'integrale in tale caso prende la forma seguente:

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \int_V G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n} + \langle \Phi \rangle_S \right] dS \quad (23.2.12)$$

Con  $\langle \Phi \rangle \equiv \frac{1}{A} \int_S \Phi(\mathbf{x}) dS$  valore medio del potenziale sulla superficie.

- Usando il teorema di Green con  $\Phi(\mathbf{y}) \equiv G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$  e  $\psi(\mathbf{y}) \equiv G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  con  $\mathbf{y}$  variabile di integrazione, è possibile dimostrare la proprietà di simmetria per la funzione di Green con le condizioni al contorno di Dirichlet:

$$G_D(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (23.2.13)$$

Ovvero l'interscambiabilità fisica fra sorgente e punto di osservazione.

Per la funzione di Green con condizioni di Neumann la proprietà di Dirichlet non è automaticamente soddisfatta, ma può essere imposta come condizione aggiuntiva.

### 23.3 Esempio in 2 dimensioni

Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  dominio semplicemente connesso e  $z_0$  punto di  $D$ . Per il teorema di Riemann è possibile trovare una trasformazione conforme  $z \rightarrow z' = f(z; z_0)$  che mappa  $D$  nel cerchio unitario  $\{z' : |z'| \leq 1\}$  (e la sua frontiera su  $\{z' : |z'| = 1\}$ ) e il punto  $z_0$  nell'origine.

Si cerca dunque la funzione di Green per l'equazione di Poisson 2D:

$$\Delta_2 G_D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = -4\pi \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \mathbf{r} = (x, y), \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \quad (23.3.1)$$

Con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$G_D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \partial D \quad (23.3.2)$$

E' data da:

$$G_D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = -2 \log |f(z; z_0)| \quad (23.3.3)$$

Difatti  $f(z; z_0)$  è analitica in  $D$  con  $f'(z; z_0) \neq 0$ , per cui  $z_0$  zero di ordine 1 di  $f$ , inoltre non ci sono altri zeri di  $f$ , per cui è invertibile.

Di conseguenza definendo:

$$\phi(z; z_0) \equiv \frac{f(z; z_0)}{z - z_0} \quad (23.3.4)$$



Tale funzione è analitica in  $D$ , avendo in  $z_0$ :

$$\phi(z_0; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z; z_0)}{z - z_0} = f'(z_0; z_0) \neq 0 \quad (23.3.5)$$

Ed inoltre è non nulla in  $D$ .

Scrivendo  $f(z; z_0) = (z - z_0)\phi(z; z_0)$  si vede che:

$$\log|f(z; z_0)| = \log|z; z_0| + \log|\phi(z; z_0)| \implies -2\log|f(z; z_0)| = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - 2\log|\phi(z; z_0)| \quad (23.3.6)$$

Essendo  $G_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv -2\log(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = -2\log|z - z_0|$  una funzione di Green per l'eq di Poisson in 2D.

Invece  $h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \equiv -2\log|\phi(z; z_0)|$  funzione armonica in  $D$ , essendo la parte reale della funzione analitica  $-2\log(\phi(z; z_0))$ .

Per cui la combinazione:

$$-2\log|f(z; z_0)| = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \quad (23.3.7)$$

Rappresenta una funzione di Green per l'eq di Poisson in 2D.

Essendo  $|f(z; z_0)| = 1 \forall z \in \partial D$  si ha che tale funzione di Green soddisfa le condizioni al contorno di Dirichlet.

### 23.3.1 Sottoesempio

La funzione di Green per l'equazione di Poisson nel semipiano  $y = \text{Im}(z) > 0$ , con condizioni al contorno:

$$G_d(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{per} \quad y = 0 \quad (23.3.8)$$

è data da:

$$G_D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = -2\log|f(z, z_0)| = -2\log\left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right| = -2\log|z - z_0| + 2\log|z - z_0^*| = -2\log|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + 2\log|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|$$

Con  $\mathbf{r}_I$  posizione della carica immagine.



---

# 24

## Conclusione

---

Gli autori si augurano di aver creato una dispensa che sia stata di utilità a qualche lettore e che chiunque ne abbia fruito abbia sostenuto con successo l'esame.

Sentiamo dentro di noi la perpetua  
chiamata: "Lì c'è il problema, cerca la  
soluzione".

---

*David Hilbert*