Metodi Probabilistici

Dr. Federico Fuschio

Primo Appello - 9 Gennaio 2025

> Rispondere alle domande in questi tre fogli; è possibile usare fogli di brutta, che però *non vanno consegnati*. Ogni risposta corretta alle domande a risposta chiusa vale un punto, ogni risposta errata vale -0.25 punti.

Nome e Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

1. Quale è il valore atteso di una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p?

   A. np B. $1/p$ C. p D. $np(1-p)$ E. $p(1-p)$

2. Quale è la varianza di una variabile aleatoria geometrica di parametro p?

   A. $(1-p)/p^2$ B. $1/p$ C. p D. $np(1-p)$ E. $p(1-p)$

3. Un dado a sei facce viene lanciato ripetutamente. Quale è la probabilità che i lanci dal primo al terzo diano tutti lo stesso risultato? A. $1/1296$ B. $5/6$ C. $1/36$ D. $5/216$ E. $1/6$

4. Un test a crocette è composto da 6 domande, ognuna delle quali ha 6 possibili risposte, di cui una sola è corretta. Una risposta corretta riceve 4 punti, mentre una sbagliata causa la perdita di b punti. Per fare in modo che il punteggio atteso dello studente che sceglie le sue risposte uniformemente a caso sia 0, dovremmo imporre $b =$ A. $4/3$ B. $4/5$ C. $5/6$ D. 1 E. $6/5$

5. Un professore deve mandare n mail diverse a n studenti. Trattandosi di un professore molto distratto, invia ogni mail ad un indirizzo estratto indipendentemente ed uniformemente a caso dalla lista degli n studenti, senza ripetizione. Quale è la probabilità che la prima mail raggiunga il destinatario corretto?

   A. 1 B. $(n-1)/n$ C. $2/n$ D. $1/2$ E. Nessuna delle precedenti

6. Sia $\phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3) \wedge (x_2 \vee x_4)$, e consideriamo un'assegnazione casuale delle variabili (ogni x_i è vera o falsa con uguale probabilità, indipendentemente dalle altre). Il numero atteso di clausole di ϕ che non vengono soddisfatte dall'assegnazione casuale è A. 1 B. $3/2$ C. $17/8$ D. $3/4$ E. 2

7. Consideriamo un campionato ideale in cui ogni regione italiana è rappresentata da esattamente 2 squadre. Un girone di 10 squadre viene scelto uniformemente a caso tra le 40 squadre. La probabilità che nessuna squadra sarda o sicialiana sia nel girone è

   A. $\frac{36!}{40!}$ B. $\frac{38!}{40!}$ C. $\frac{\binom{38}{10}}{\binom{40}{10}}$ D. $\frac{\binom{36}{10}}{\binom{40}{10}}$ E. $\frac{1}{\binom{40}{10}}$

8. Consideriamo un algoritmo randomizzato che dà come output o "sì" o "no". Quando risponde "sì", la risposta è sempre corretta; quando risponde "no", la risposta è corretta con probabilità almeno $1/n$, dove n è la dimensione dell'input. Quante volte dovremmo ripetere l'algoritmo (asintoticamente) per essere sicuri di ottenere l'output corretto con probabilità almeno $1 - 1/e$?

   A. e B. $\ln n$ C. n D. n^2 E. e^n

9. Sia T la risposta all'esercizio precedente. Se volessimo una probabilità di correttezza almeno $1 - e^{100}$, allora dovremmo ripetere l'algoritmo - più o meno -

   A. $T + 100$ volte B. eT volte C. $(\ln 100)T$ volte D. $100T$ volte E. $e^{100}T$ volte

10. Consideriamo l'algoritmo di Quicksort Randomizzato, e denotiamo con T la variabile aleatoria che conta il numero di confronti operati su un input di dimensione n. Nel caso peggiore, T appartiene a*

A. $O(n)$ B. $O(1)$ C. $O(n^2 \log n)$ D. $O(n^2)$ E. $O(n \log n)$

11. Sia T come nell'esercizio precedente. Il valore atteso di T appartiene a*

A. $O(n)$ B. $O(1)$ C. $O(n^2 \log n)$ D. $O(n^2)$ E. $O(n \log n)$

12. Sia T come negli esercizi precedenti. Con alta probabilità, T appartiene a*

A. $O(n)$ B. $O(1)$ C. $O(n^2 \log n)$ D. $O(n^2)$ E. $O(n \log n)$

13. Quale è la probabilità che un grafo $G_{3,p}$ sia disconnesso?

A. $(1-p)^2[3p-1]$ B. $(1-2p)^2[4p+1]$ C. $(1-p)^2[1+2p]$ D. p^3 E. Nessuna delle precedenti

14. n palle vengono lanciate in n cestini (modello balls and bins). Se n tende ad infinito, la probabilità che il primo cestino sia vuoto è A. $1/3n$ B. e^{-3} C. e^{-1} D. $e^{-1/3}$ E. $3/n$

15. Consideriamo la catena di Markov su 3 stati caratterizzata dalla seguente matrice di transizione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sapendo che lo stato iniziale è $X_0 = 1$, quale è la probabilità che $X_3 = 3$?

A. $1/4$ B. $1/2$ C. $3/8$ D. $3/4$ E. $1/8$

*Selezionare l'insieme più piccolo tra quelli a cui appartiene

17. *(5+2 points)* *Una coda è una fila dove clienti attendono di essere serviti. Ad ogni istante di tempo, esattamente uno dei seguenti eventi accade:*

- *Se la coda ha meno di n clienti, allora con probabilità $p \leq 1/2$ un nuovo cliente si mette in coda.*
- *Se la coda non è vuota, allora con probabilità p il primo cliente viene servito e lascia la coda.*
- *Con probabilità $1 - 2p$, la coda non cambia, se non è vuota e contiene meno di n clienti.*

Modellare questo problema come una catena di Markov, motivando perché è possibile farlo. Descrivere gli stati, la matrice delle probabilità di transizione e il grafo associato. Dire se la catena rispetta le ipotesi del Teorema Ergodico.

[2 punti Bonus] Trovare una distribuzione stazionaria, se esiste .

18. (5 points) Supponiamo di osservare una sequenza di oggetti che arrivano uno dopo l'altro, di cui ne possiamo mantenere solo k contemporaneamente in memoria. Ogni nuovo elemento può essere scartato o salvato in memoria (eventualmente rimuovendo un elemento salvato precedentemente per fargli spazio); elementi scartati o rimossi sono persi per sempre e non possono essere più considerati.

Algorithm 1 Campionamento online di k elementi

```
S ← ∅, t ← 0
for ogni nuovo elemento e che arriva do
    t ← t + 1
    if |S| < k then
        Inserire e in S
    else
        Lanciare una moneta con probabilità di testa k/t
        if testa then Rimuovere un elemento uniformemente a caso da S ed inserire e al suo posto
```

Per ogni istante di tempo t, sia N_t l'insieme dei primi t elementi della sequenza e sia S_t la versione di S alla fine dell'iterazione del ciclo for relativo al t^o elemento della sequenza. Dimostrare che, per ogni t, l'insieme S_t è estratto uniformemente a caso tra tutti i sottinsiemi di N_t di k elementi. Formalmente, dimostrare che

$$\mathbb{P}(S_t = X) = \binom{t}{k}^{-1}, \forall t \geq k, \forall X \subseteq N_t, |X| = k.$$