Lezione 26 - 01/12/2022

Ricordiamo il vettore delle coordinate

Ricordiamo che se V è uno **spazio vettoriale** di **dimensione** n su $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ è una **base** di V, ogni vettore di V si scrive in modo **unico** come

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n \quad x_i \in \mathbb{K}$$

e pertanto è definita una funzione

$$\begin{aligned}\phi_B : V &\to \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{Vettore delle coordinate di } V \text{rispetto a } B\end{aligned}$$

Definizione - Applicazione lineare

Siano V, V' **spazi vettoriali** su $\mathbb{K}$. Un'**applicazione lineare** (o omomorfismo di spazi vettoriali) da V a V' è un'**applicazione** $F : V \to V'$ tale che

$$F(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2) = \alpha_1F(v_1) + \alpha_2F(v_2) \quad \begin{aligned}&\forall v_1, v_2 \in V \\ &\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

Diciamo che F è un **isomorfismo** se F è **biunivoca**.

<u>Esempio</u>: $\phi_B : V \to \mathbb{K}^n$ è un **isomorfismo**. Abbiamo già visto che è biunivoca.
Se $v = \alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n$ e $w = \beta_1v_1 + ... + \beta_nv_n$

$$\begin{aligned}\alpha v + \beta w &= \alpha(\alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n) + \beta(\beta_1v_1 + ... + \beta_nv_n) = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_B(\alpha v+\beta w) &= (\alpha v+\beta w)_B = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\beta\beta_1 \\ \alpha\alpha_2+\beta\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n+\beta\beta_n \end{pmatrix} = \\ &= \alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix} = \alpha\phi_B(v)+\beta\phi_B(w)\end{aligned}$$

Trovare basi

$U \underbrace{\subseteq}_{\text{sottospazio}} \mathbb{K}^n$, $U = \mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$. Come trovo una **base** di U?

- 1° metodo:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \overset{\text{riduzione}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Allora $\{v'_1, ..., v'_k\}$ è una **base** di U. Infatti, le operazioni di riga non cambiano lo Span e abbiamo già dimostrato che le righe non nulle di una matrice a scala sono **linearmente indipendenti**.

  Esempio:

  Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\3&1&-2&5\\1&0&-1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-2&-2&2\\0&-1&-1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Una base di U può essere $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

- 2° metodo: Costruisco la matrice A che ha i v_i per colonne e riduco per righe. La base cercata è data dalle **colonne** di A **corrispondenti ai pivot**.

  Rivediamo l'esempio precedente utilizzando questo metodo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base possibile è quindi quella formata dalla **prima**, **seconda** e **quarta** colonna(della matrice originale) in quanto sono le **colonne dei pivot nella matrice in forma a scala**.

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

In generale, si fissa una base di V e si **lavora con le corrispondenti coordinate**.
Esempio: $V = \mathbb{R}_3[t],\ U = \text{Span}(t + t^2, t + t^3, 2t + t^2 + t^3)$.
Fisso $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ come base di V. Allora si ha

$$(p_1)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (p_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (p_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una **base** di U è data dai **polinomi** p_4, p_5 le cui coordinate rispetto a B sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⚠️ Queste sono le **coordinate**! Quindi l'esercizio non è finito in quanto dobbiamo trovare i **polinomi**.

I polinomi sono:

$$p_4 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = t + t^2$$
$$p_5 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + (-1) \cdot t^3 = t^2 - t^3$$

Somma e intersezione di sottospazi

V **spazio vettoriale** su $\mathbb{K}$. U, W **sottospazi** di V.

Proposizione

$U \cap W$ e $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ sono **sottospazi** di V.

Dimostrazione: siano $v_1, v_2 \in U \cap W,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

Devo dimostrare che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U \cap W$ $(*)$.

Per ipotesi U è un **sottospazio**, quindi, poiché $v_1, v_2 \in U$

$$(1) \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U$$

Similarmente, W è **sottospazio**, quindi poiché $v_1, v_2 \in W$

$$(2) \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W$$

Mettendo insieme $(1), (2)$ otteniamo $(*)$.

Per dimostrare che $U + W$ è un **sottospazio**, prendiamo $v_1, v_2 \in U + W$ e scalari $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ e mostriamo che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U + W$$

Per **ipotesi**:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + w_1 \quad u_1 \in U, w_1 \in W \\ v_2 &= u_2 + w_2 \quad u_1 \in U, w_2 \in W \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &= \alpha_1(u_1 + w_1) + \alpha_2(u_2 + w_2) = \\ &= \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2}_{u_3 \in U} + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}_{w_3 \in W} \in U + W \end{aligned}$$

Proposizione

Se $U = \text{Span}(u_1, ..., u_k),\ W = \text{Span}(w_1, ..., w_h)$ allora

$$U + W = \text{Span}(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_h)$$

> ⚠️ N.B.: Non è vero che se $\{u_1, ..., u_k\}$ è una **base** di U, $\{w_1, ..., w_h\}$ è una **base** di W allora $\{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_h\}$ è una **base** di $U + W$: è solo, in generale, un **insieme di generatori**.

Dimostrazione: Dato $x \in U + W,\ x = u + w,\ u \in U,\ w \in W$ con $u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k$ e $w = \beta_1 w_1 + ... + \beta_h w_h$

$$y = u + w = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + ... + \beta_h w_h$$

Teorema - Teorema di Grassmann

Sia V uno **spazio vettoriale** di **dimensione finita** e siano U, W due suoi **sottospazi**. Allora

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Dimostrazione: Sia $\{v_1, ..., v_s\}$ una **base** di $U \cap W$. Posso completarla con vettori $u_{s+1}, ..., u_k$ a una base di U e con vettori $w_{s+1}, ..., w_h$ a una **base** di W ($\dim U \cap W = s, \dim U = k, \dim W = h$).
Dico che $B = \{v_1, ..., v_s, u_{s+1}, ..., u_k, w_{s+1}, ..., w_h\}$ è una **base** di $U + W$. Questo conclude perché, se questo è vero

$$\begin{aligned} \dim U + W &= s + k - s + h - s = k + h - s = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

1. B è un **insieme di generatori** per $U+W$.

   Prendo $v \in U+W$, allora $v = u + w, u \in U, w \in W$

$$
\begin{aligned}
u =& \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_s v_s + \alpha_{s+1} u_{s+1} + ... + \alpha_k u_k \\
w =& \beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s + \beta_{s+1} w_{s+1} + ... + \beta_h w_h \\
u + w =& (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + ... + (\alpha_s + \beta_s) v_s + \alpha_{s+1} u_{s+1} + \\
& + \alpha_k u_k + \beta_{s+1} w_{s+1} + ... + \beta_h w_h
\end{aligned}
$$

2. B è un **insieme indipendente**.

$$x_1 v_1 + ... + x_s v_s + y_{s+1} u_1 + ... + y_k u_k + z_{s+1} w_1 + ... + z_h w_h = 0$$

   Questo mi dice che il vettore:

$$(*)\ \underbrace{a = x_1 v_1 + ... + x_s v_s + y_{s+1} u_1 + ... + y_k u_k}_{a \in V} = \underbrace{-z_{s+1} w_1 ... - z_h w_h}_{a \in W}$$

   Questo implica proprio che $a \in U \cap W$. Inoltre

$$
\begin{aligned}
& a = x_1 v_1 + ... + x_s v_s + y_{s+1} u_1 + ... + y_k u_k \\
& \Rightarrow y_{s+1} = ... = y_k = 0
\end{aligned}
$$

   Allora $(*)$ diviene $x_1 v_1 + ... + x_s v_s = -z_{s+1} w_1 ... - z_h w_h$ il che significa

$$x_1 v_1 + ... + x_s v_s + z_{s+1} w_1 + ... + z_h w_h = 0$$

   Ma $\{v_1, ..., v_s, w_{s+1}, ..., w_h\}$ sono una **base** di W quindi

$$x_1 = ... = x_s = z_{s+1} = ... = z_h = 0$$

Esercizio

Siano

- $U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
- $W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

Trovare basi per $U, W, U \cap W$.

- Base per U

  Il sistema sotto forma di matrice è già in forma a gradini, quindi risolviamo semplicemente il sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = s \end{cases}$$

  Quindi

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \\ s \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una **base** di U è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Base per W

  Rendiamo la matrice associata al sistema in forma a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

  Risolviamo ora il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t - 2s \\ x_2 = -2t + 3s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \to t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Una **base** per W è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Base per $U \cap W$

  $U \cap W$ è descritto dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

  Portiamo ora la matrice associata in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  E risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases} \quad U = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane

Sia U un **sottospazio** di $\mathbb{K}^n$. Diciamo che U è descritto da **equazioni cartesiane** se

$$U = \{x \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0\}$$

per qualche matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

Trovare equazioni cartesiane

Se U è assegnato tramite una sua base $\{u_1, ..., u_k\}$ basta imporre che

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix} = k$$

> ℹ️ Ricordiamo che rk indica il **rango** della matrice.

<u>Esempi</u>:

1. Sia $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ con $\dim U = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & {\scriptscriptstyle x_1 - x_2} & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & {\scriptscriptstyle x_3 + x_2 - x_1} \end{pmatrix}$$

   Il **rango** è 2 se e solo se $x_3 + x_2 - x_1 = 0$. $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 | \ x_3 + x_2 - x_1 = 0\}$.

2. Sia $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & {\scriptscriptstyle x_2 - 2x_1} & {\scriptscriptstyle x_3 - x_1} \end{pmatrix}$$

   Quindi $\begin{cases} x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases}$.

3. Sia $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & x_2 & {\scriptscriptstyle x_3 - x_1} & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & {\scriptscriptstyle x_3 - x_1 - x_2} & {\scriptscriptstyle x_4 + x_2} \end{pmatrix}$$

   Quindi $\begin{cases} x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_2 = 0 \end{cases}$.

Definizione - Somma diretta

Siano U, W **sottospazi** dello **spazio vettoriale** V. Diciamo che la somma $U+W$ è **diretta** (notazione $U \oplus W$) se $U \cap W = \{0\}$.

Osservazioni:

1. Dalla formula di **Grassmann**:

$$\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$$

   In questo caso (e solo in questo!) l'unione di una base di U e l'unione di una base di W è una base di $U + W$.

2. In $U \oplus W$, ogni vettore di $U+W$ si scrive in **modo unico** come $u+w, u \in U, w \in W$

   Infatti, se

$$u + w = u' + w' \quad \begin{array}{l} u, u' \in U \\ w, w' \in W \end{array}$$

   Si ha che

$$\begin{gathered} u - u' = w - w' \in U \cap W = \{0\} \\ \Rightarrow u = u' \text{ e } w = w' \end{gathered}$$

Proposizione

Sia V uno **spazio vettoriale**, U un **sottospazio** di V. Esiste un **sottospazio** U di V tale che

$$V = U \oplus U'$$

> ⚠️ U' prende il nome di **complementare**.

Dimostrazione: sia $\{u_1, ..., u_k\}$ una base di U. **Copletiamola** con vettori $\{u_1', ..., u_h'\}$ a una base di V. Posto

$$U' = \text{Span}(u_1', ..., u_h')$$

risulta $V = U \oplus U'$.

Come si completa un insieme indipendente a una base

Sia $\{u_1, ..., u_k\}$ un **insieme indipendente di vettori** di $\mathbb{K}^n$. Allora la matrice A che ha $u_1, ..., u_k$ per **righe** ha esattamente k **pivot**. Per completare $u_1, ..., u_k$ a una base basta **ridurre a scala** A e aggiungere a $u_1, ..., u_k$ gli $n-k$ **vettori** della **base canonica non** corrispondenti a pivot.

Esempio:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

> ⚠️ I due vettori al di fuori delle parentesi sono quelli che sono stati aggiunti e sono e_2 ed e_4 mentre i primi 3 vettori sono rispettivamente u_1, u_2 e u_3.

$\{u_1, u_2, u_3, e_2, e_4\}$ è una **base** di $\mathbb{R}^5$.

Osservazione: Per dimostrare che $V = U \oplus W$ si deve far vedere che

1. $V = U + W$
2. $U \cap W = \{0\}$

Definizione

Sia V uno **spazio vettoriale** e $U_1, ..., U_s$ siano **sottospazi** di V. Diciamo che V è **somma diretta** di $U_1, ..., U_s$

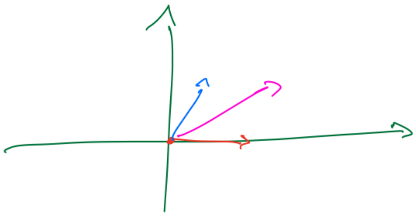
$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_s$$

se ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = u_1 + ... + u_s \quad u_i \in U_i \quad 1 \leq i \leq s$$

Osservazioni:

1. $\{u_1, ..., u_s\}$ è una base di $U \iff U = \mathbb{K}_{u_1} \oplus \mathbb{K}_{u_2} \oplus ... \oplus \mathbb{K}_{u_s}$
2. I **complementari** non sono unici!



$$U \oplus U' = U \oplus U''$$
$$\not\Rightarrow U' = U''$$