Lezione 20 - 17/11/2022

Correzione sesto foglio esercizi

Spazio vettoriale

Ricordiamo la definizione di **spazio vettoriale su campo** $\mathbb{K}$. È un **insieme non vuoto** V dotato di operazioni:

$$\begin{aligned} V \times V \to V, \qquad & \mathbb{K} \times V \to V \\ (a,b) \mapsto a+b, \qquad & (\alpha, v) \mapsto \alpha v \end{aligned}$$

tali che $(V,+)$ è un **gruppo abeliano** e

$$\begin{array}{ll} \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V \\ (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V \\ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V \\ 1v = v & \forall v \in V \end{array}$$

Esempi:

1. $\mathbb{K}^n$, vettori riga
2. $M_{mn}(\mathbb{K})$, matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$
3. $\mathbb{K}[t]$, polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ nella variabile t
4. V spazio vettoriale, I insieme

$$V^I = \{f : I \to V\}$$

V^I è uno spazio vettoriale.

$$f, g \in V^I \qquad (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in V} + \underbrace{g(x)}_{\in V} \quad x \in I$$

$$\alpha \in \mathbb{K}, f \in V^I \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

N.B.:

$$I = \{1, ..., n\},\ V = \mathbb{K}$$
$$V^I = \mathbb{K}^{\{1,...,n\}} \equiv \mathbb{K}^n$$
$$f \rightsquigarrow f(1), ..., f(n) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Definizione - Sottospazio

Un **sottoinsieme non vuoto** $W \subset V$ è un **sottospazio vettoriale** di V se è uno **spazio vettoriale rispetto alle operazioni indotte da** V.

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r] & V \\ W \times W \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r, dashed] & W \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \times V \arrow[r] & V \\ \mathbb{K} \times W \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r, dashed] & W \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

Osservazione: In altri termini $W \subset V, \emptyset \neq W$ è un sottospazio se

$$w_1 + w_2 \in W \quad \forall w_1, w_2 \in W$$
$$\alpha w \in W \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in W$$

Criterio: $\emptyset \neq W \subset V$ è un **sottospazio** se e solo se

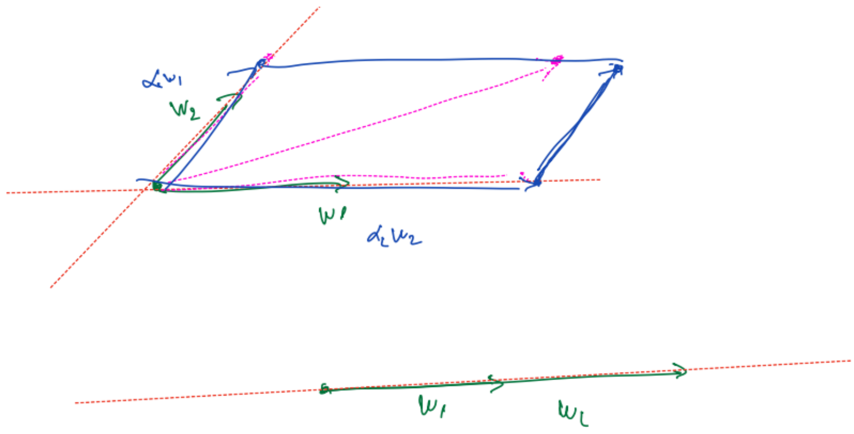
$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$$
$$\forall w_1, w_2 \in W$$

Definizone - Combinazione lineare

$\alpha_1 w_2 + \alpha_2 w_2$ si chiama **combinazione lineare** dei **vettori** w_1, w_2 con **scalari** α_1, α_2.

Esempio: Siamo interessati a considerare

$$\{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$



Qualsiasi multiplo prendo, posso ottenre tutti il piano

Definizione - Span

Sia V uno **spazio vettoriale**. La **combinazione lineare** dei vettori $v_1, ..., v_k$ con scalari $\alpha_1, ..., \alpha_k$ è il vettore

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$$

Poniamo

$$\text{Span}(v_1, ..., v_k) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k | \alpha_1, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

Proposizione

$\text{Span}(v_1, ..., v_k)$ è un **sottospazio vettoriale** di V.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che se $x, y \in \text{Span}(v_1, ..., v_k)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ allora $\alpha x + \beta y \in \text{Span}(v_1, ..., v_k)$:

Poniamo:

- $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$
- $y = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$

Sostituendo x e y si ha che:

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= \alpha(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k) + \beta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k) = \\ &= \alpha\alpha_1 v_1 + ... + \alpha\alpha_k v_k + \beta\beta_1 v_1 + ... + \beta\beta_k v_k = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)v_2 + ... + (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)\end{aligned}$$

che **per definizione** questo vettore appartiene a $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$.