Lezione 31 - 15/12/2022

Ripasso matrice invertibile
Determinante
Proprietà chiave del determinante
Proposizione
Teorema
Sviluppi di Laplace
Proposizione
Proprietà del determinante
Relazioni tra rango e determinante
Definizione - Minore di ordine k
Teorema
Correzione esercizi ottava scheda

Ripasso matrice invertibile

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ricordo che A si dice **invertibile** se esiste $B \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$AB = BA = I_n$$

<u>Esercizio</u>: A è **invertibile** se e solo se $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è **invertibile**.

Introdurremo una funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ con la fondamentale proprietà che

$$A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Alla fine enunceremo le seguenti equivalenze:

1. $\det A \neq 0$
2. $\text{rk } A = n$
3. Le **righe** di A sono **indipendenti**
4. Le **colonne** di A sono **indipendenti**
5. A è **invertibile**

Determinante

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

$$(*) \qquad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

dove $p(\sigma)$ sta ad indicare la **parità della permutazione**.

Esempio:

- $n = 1,\ \det(a_{11}) = a_{11}$
- $n = 2$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} (-1)^{p(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

In generale si ha

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Proprietà chiave del determinante

Vigliamo trovare proprietà che caratterizzano **univocamente** il **determinante**. Quindi consideriamo funzioni $d : M_n \to \mathbb{K}$ **pensate come funzioni delle righe**:

$$d(A) \leftrightsquigarrow d(A_1, ..., A_n)$$

Le proprietà chiave sono le seguenti:

a. $d(A_1, ..., A_n) = 0$ se $A_i = A_j$ con $i \neq j$
b. $d(A_1, ..., \alpha A_i, ..., A_n) = \alpha d(A_1, ..., A_i, ..., A_n)$ (α “esce”)
c. $d(A_1, ..., A_i' + A_i'', ..., A_n) = d(A_1, ..., A_i', ..., A_n) + d(A_1, ..., A_i'', ..., A_n)$
d. $d(I_n) = 1 = d(e_1^t, ..., e_n^t)$

Proposizione

Se d verifica le proprietà a, b, c, allora

1. Se A ha una **riga nulla** allora $d(A) = 0$
2. $d(..., A_i + \lambda A_j, ..., A_n) = d(A_1, ..., A_n),\ \forall i \neq j,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $d(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n) = -d(A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n)$
4. Se S è ottenuta da A per **riduzione di Gauss** con s **scambi di riga** allora

$$d(A) = (-1)^s d(S)$$

5. Se le righe di A sono **dipendenti** allora $d(A) = 0$

Dimostrazioni:

1. Segue dalla proprietà $b.$ con $\alpha = 0$;
2. Segue da una combinazione delle proprietà a, b, c

$$d(..., A_i + \lambda A_j, ...) \overset{c.}{=} d(..., A_i, ...) + d(..., \lambda A_j, ..., A_j, ...) =$$
$$\overset{b.}{=} d(..., A_i, ...) + \lambda \underbrace{d(..., A_j, ..., A_j, ...)}_{=0 \text{ per } a.} = d(A)$$

3. Segue da una combinazione delle proprietà a, c

$$0 \overset{a.}{=} d(..., \overbrace{A_i + A_j}^{\text{posizione } i}, ..., \overbrace{A_i + A_j}^{\text{posizione } j}, ...) =$$
$$\overset{c.}{=} d(..., A_i, ..., Ai + A_j) + d(..., A_j, ..., A_i + A_j) =$$
$$= \underbrace{d(..., A_i, .., A_i, ...)}_{=0 \text{ per } a.} +$$
$$d(..., A_i, ..., A_j, ...) +$$
$$d(..., A_j, ..., A_i, ...) +$$
$$\underbrace{d(..., A_j, ..., A_j, ...)}_{=0 \text{ per } a.}$$

4. Segue dai punti $1.$ e $3.$
5. Se le **righe** di A sono **dipendenti**, qualsiasi **forma a gradini** di A ha una riga di 0.
   Dunque tutto segue dai punti $4.$ e $1.$

Teorema

Esiste un'unica funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che verifica le proprietà a, b, c, d.
In particolare $\det(A)$ coincide con $(*)$.

Esercizio: calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Svolgimento:

$$
\begin{aligned}
d(a_{11}e_1^t + a_{12}e_2^t, a_{21}e_1t + a_{22}e_2^t) = & a_{11}d(e_1^t, a_{21}e_1^t + a_{22}e_2^t) + \\
& a_{12}d(e_2^t, a_{21}e_1^t + a_{22}e_2^t) = \\
& \underbrace{a_{11}a_{21}d(e_1^t, e_1^t)}_{=0} + \\
& a_{11}a_{22}d(e_1^t, e_2^t) + \\
& a_{12}a_{21}d(e2^t, e_1^t) + \\
& \underbrace{a_{12}a_{22}d(e_2^t, e_2^t)}_{=0} = \\
= & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})d(e_1^t, e_2^t) = \\
= & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})d(I_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

Utilizzando allo stesso modo le proprietà è facile vedere che:

$$
\det \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = a_1 ... a_n
$$

e inoltre

$$
\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ & \ddots & a_5 & a_6 \\ & & \ddots & a_7 \\ & & & a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & \ddots & & \\ a_3 & a_4 & \ddots & \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_n \end{pmatrix} = a_1 ... a_n
$$

ovvero il **determinate** delle **matrici triangolari superiori e inferiori** è $a_1 ... a_n$.

Sviluppi di Laplace

Sia A_{ij} la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j.

Proposizione

- **Sviluppo di Laplace per riga**:

  Fissato $i, \ 1 \leq i \leq n$

$$
\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}
$$

- **Sviluppo di Laplace per colonne**:

  Fissato $j, \ 1 \leq j \leq n$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

<u>Esempio</u>: sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Sviluppo lungo la **prima riga**:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \underbrace{\det A_{11}}_{a_{22}} + (-1)^{1+2} a_{12} \underbrace{\det A_{12}}_{a_{21}} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: calcolare il determinante di

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Iniziamo sviluppando lungo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$- 3(4\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}) =$$

$$= 12\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot 30 - 2 \cdot 25 - 20 -$$

$$- 3(4 \cdot 18 - 2 \cdot 25 + 8) =$$

$$= 12 \cdot 28 + 120 - 50 - 20 - 3(72 - 50 + 8) = 260$$

⚠️ Quando si calcola il determinante, le matrici vengono rappresentante usando delle **barre verticali** invece di **parentesi**.

Proprietà del determinante

1. **Teorema di Binet**

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

2. $\det A^t = \det A$

Relazioni tra rango e determinante

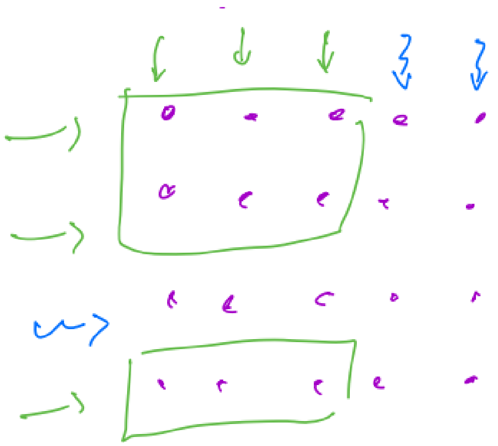
Definizione - Minore di ordine k

Sia $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$. Un **minore** di ordine k in A è il **determinante** di una **sottomatrice quadrata** ottenuta scegliendo k righe e k colonne di A.

Teorema

$\text{rk}\ A$ è l'ordine massimo dei minori non nulli di A.

Ad esempio, dire che $A \in M_{45}(\mathbb{R})$ ha **rango** 3, significa dire che esiste un **minore** di **ordine** 3 diverso da 0 e tutti i **minori di di ordine** 4 **sono nulli**:



Teorema degli orlati:

Basta che siano nulli i minori 4×4 ottenuto aggiungendo una riga e una colonna alla **sottomatrice** 3×3 con **determinante non nullo**.

Corollario: In una matrice il **massimo numero di righe linearmente indipendenti** è uguale al **massimo numero di colonne linearmente indipendenti**.

Correzione esercizi ottava scheda