Lezione 20 - 17/11/2022

Correzione sesto foglio esercizi

Spazio vettoriale

Definizione - Sottospazio

Definizone - Combinazione lineare

Definizione - Span

Proposizione

Correzione sesto foglio esercizi

Spazio vettoriale

Ricordiamo la definizione di **spazio vettoriale su campo** \mathbb{K} . È un **insieme non vuoto** V dotato di operazioni:

$$egin{aligned} V imes V &
ightarrow V, & \mathbb{K} imes V
ightarrow V \ (a,b) &\mapsto a+b, & (lpha,v) &\mapsto lpha v \end{aligned}$$

tali che (V,+) è un **gruppo abeliano** e

$$egin{aligned} lpha(v+w) &= lpha v + lpha w & orall lpha \in \mathbb{K}, orall v, w \in V \ (lpha + eta) v &= lpha v + eta v & orall lpha, eta \in \mathbb{K}, orall v \in V \ (lpha eta) v &= lpha(eta v) & orall lpha, eta \in \mathbb{K}, orall v \in V \ 1v &= v & orall v \in V \end{aligned}$$

Esempi:

- 1. \mathbb{K}^n , vettori riga
- 2. $M_{mn}(\mathbb{K})$, matrici m imes n a coefficienti in \mathbb{K}
- 3. $\mathbb{K}[t]$, polinomi a coefficienti in \mathbb{K} nella variabile t
- 4. V spazio vettoriale, I insieme

$$V^I = \{f: I o V\}$$

 ${\cal V}^I$ è uno spazio vettoriale.

$$egin{aligned} f,g \in V^I & (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in V} + \underbrace{g(x)}_{\in V} & x \in I \ lpha \in \mathbb{K}, f \in V^I & (lpha f)(x) = lpha f(x) \end{aligned}$$

N.B.:

$$egin{aligned} I &= \{1,...,n\}, \ V &= \mathbb{K} \ V^I &= \mathbb{K}^{\{1,...,n\}} \equiv \mathbb{K}^n \ f &\longleftrightarrow f(1),...,f(n) &\longleftrightarrow egin{pmatrix} f(1) \ dots \ f(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

Definizione - Sottospazio

Un sottoinsieme non vuoto $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni indotte da V.

Osservazione: In altri termini $W \subset V, \emptyset
eq W$ è un sottospazio se

$$w_1 + w_2 \in W \quad \forall w_1, w_2 \in W \ \alpha w \in W \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in W$$

<u>Criterio</u>: $\emptyset
eq W \subset V$ è un **sottospazio** se e solo se

$$egin{aligned} lpha_1w_1+lpha_2w_2\in W & orall lpha_1,lpha_2\in \mathbb{K} \ & orall w_1,w_2\in W \end{aligned}$$

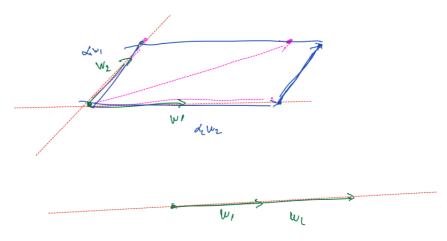
Definizone - Combinazione lineare

 $lpha_1w_2+lpha_2w_2$ si chiama **combinazione lineare** dei **vettori** w_1,w_2 con **scalari** $lpha_1,lpha_2.$

Esempio: Siamo interessati a considerare

Lezione 20 - 17/11/2022 2

$$\{lpha_1w_1+lpha_2w_2|lpha_1,lpha_2\in\mathbb{K}\}$$



Qualsiasi multiplo prendo, posso ottenre tutti il piano

Definizione - Span

Sia V uno **spazio vettoriale**. La **combinazione lineare** dei vettori $v_1,...,v_k$ con scalari $\alpha_1,...,\alpha_k$ è il vettore

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$$

Poniamo

$$\mathrm{Span}(v_1,...,v_k)=\{lpha_1v_1+...+lpha_kv_k|lpha_1,lpha_k\in\mathbb{K}\}$$

Proposizione

 $\operatorname{Span}(v_1,...,v_k)$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Dimostrazione</u>: Dobbiamo dimostrare che se $x,y\in \mathrm{Span}(v_1,...,v_k)$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ allora $\alpha x+\beta y\in \mathrm{Span}(v_1,...,v_k)$:

Poniamo:

- $\bullet \ \ x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$
- $y = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$

Sostituendo x e y si ha che:

$$egin{aligned} lpha x + eta y &= lpha (lpha_1 v_1 + ... + lpha_k v_k) + eta (eta_1 v_1 + ... + eta_k v_k) = \ &= lpha lpha_1 v_1 + ... + lpha lpha_k v_k + eta eta_1 v_1 + ... + eta eta_k v_k = \ &= (lpha lpha_1 + eta eta_1) v_1 + (lpha lpha_2 + eta eta_2) v_2 + ... + (lpha lpha_k + eta eta_k) \end{aligned}$$

Lezione 20 - 17/11/2022 3

che **per definizione** questo vettore appartiene a $\mathrm{Span}(v_1,...,v_k)$.

Lezione 20 - 17/11/2022