Lezione 18 - 11/11/2022

Ultima dimostrazione della lezione precedente

Ricordiamo: $N \leq G$ è **normale** se

$$xN = Nx \; \forall x \in G$$

Dimostrazione:

- $4. \Rightarrow 1.$

  Ricordiamo che la classe di coniugio di $z \in G$ è

  $$\mathrm{cl}(z) = \{xzx^{-1} : x \in G\}$$

  Per ipotesi sappiamo che

  $$N = \dot{\bigcup_{n \in I \subset N}} \mathrm{cl}(n)$$

  Devo dimostrare che $xN = Nx$, ovvero che:

  - dato $n_1 \in N, \; \exists n_2 : xn_1 = n_2 x$ e
  - dato $n_1' \in N \; \exists n_2' \in N : n_1' x = xn_2'$

  Ora $n_1 \in \mathrm{cl(n)}$ per qualche $n \in I$, dunque

  $$yn_1y^{-1} = n \rightsquigarrow n_1 = y^{-1}ny$$
  $$xn_1x^{-1} = xy^{-1}nyx^{-1} = xy^{-1}n(xy^{-1})^{-1} \in \mathrm{cl}(n)$$

  e quindi $xn_1x^{-1} \in N$ ovvero $xn_1x^{-1} = n_2$ per qualche $n_2 \in N$, ovvero $xn_1 = n_2x$.
  Ripetendo allo stesso modo l'argomento per n_1' otteniamo che $n_1'x = xn_2'$

Perchè abbiamo introdotto i sottogruppi normali

Se $N \trianglelefteq G$, l'insieme delle classi laterali (destre o sinistre), denotato con G/N, si può dotare della **struttura di gruppo**.

Teorema - G/N è un gruppo

G/N (G modulo N) con l'**operazione binaria**

$$NxNy = Nxy$$

è un **gruppo**. Se G è finito

$$|G/N| = |G|/|N|$$

Dimostrazione: verifichiamo anzitutto che l'operazione è **ben posta**, ovvero

$$Nx = Nx',\ Ny = Ny' \Rightarrow Nxy = Nx'y'$$

questo **segue** dal fatto che $N \trianglelefteq G$. Infatti

$$Nxy = NxNy = Nx'Ny' = NNx'y' = Nx'y'$$

Mostriamo ora che ha le proprietà del gruppo:

- **Associatività**:

$$(NxNy)Nz = NxyNz = N(xy)z = Nx(yz) = NxNyz = Nx(NyNz)$$

- **Elemento neutro**:

$$NxNe = Nxe = Nx, \quad NeNx = Nex = Nx$$

- **Inverso**: $(Nx)^{-1} = Nx^{-1}$

$$\begin{gathered} NxNx^{-1} = Nxx^{-1} = Ne = N \\ Nx^{-1}Nx = Nx^{-1}x = Ne = N \end{gathered}$$

Proiezione al quoziente

Se $N \trianglelefteq G$ c'è un **omomorfismo suriettivo**

$$\begin{gathered} \pi : G \to G/N \\ \pi(x) = Nx \end{gathered}$$

È chiaro che π è **suriettiva**; è un omomorfismo

$$\pi(xy) = Nxy = NxNy = \pi(x)\pi(y)$$

Inoltre $\operatorname{Ker} \pi = N$. Infatti

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \pi = \{g \in G : \pi(g) = Ne\} = \\ = \{g \in G : Ng = N\} = N \end{aligned}$$

Omomorfismo

Siano $(G_1, *_1),\ (G_2, *_2)$ gruppi, $f : G_1 \to G_2$ è un **omomorfismo** se

$$f(g *_1 g') = f(g) *_2 f(g')$$

<u>Esempio</u>: $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8,\ f(\overline{x}) = 4\overline{x}$. Si ha

- $f(\overline{0}) = \overline{0}$
- $f(\overline{1}) = \overline{4}$
- $f(\overline{2}) = \overline{0}$
- $f(\overline{3}) = \overline{4}$

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_4 \quad f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y}) \quad \begin{aligned} &\text{e}\ \mathrm{Ker} f = \{\overline{0}, \overline{2}\} \\ &\mathrm{Im} f = \{\overline{0}, \overline{4}\} \end{aligned}$$

<u>Esempio</u>:

$$f : S_n \to \mathbb{Z}_2 \qquad f(w) = \begin{cases} \overline{0} & \text{se } w \text{ pari} \\ \overline{1} & \text{se } w \text{ dispari} \end{cases}$$

Per le **proprietà dei segni delle permutazioni** f è un omomorfismo

$$\mathrm{Ker} f = \{w \in S_n : f(w) = \overline{0}\} = \{w \in S_n : w \text{ è pari}\} = A_n$$

Lemma

Se $f : G \to G'$ è un **isomorfismo**,

$$\mathrm{Ker} f \trianglelefteq G$$

<u>Dimostrazione</u>: Il modo **più comodo per dimostrarlo è usando la condizione** $3.$ (negli esercizi va fatto proprio così) dell'ultima proposizione della lezione precedente.
Devo quindi far vedere che se $g \in \mathrm{Ker} f$ e $x \in G$, allora $xgx^{-1} \in \mathrm{Ker} f$;

- **Ipotesi**: $f(g) = e'$
- **Tesi**: $f(gxg^{-1}) = e'$

$$f(xgx^{-1}) = f(x)\overbrace{f(g)}^{=e}f(x^{-1}) = f(x)\overbrace{f(g)}^{=e}f(x)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e'$$

Teorema - Teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi

Siano G, G' **gruppi** e $f : G \to G'$ un **omomorfismo**. Allora esiste un **unico isomorfismo**

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$$

tale che $f = \overline{f} \circ \pi$, dove $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}f$ è la **proiezione canonica**

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im} f \subset G' \\
G/\mathrm{Ker} f \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione: poniamo $N = \mathrm{Ker}f$. Definiamo $\overline{f} : G/N \to \mathrm{Im}f$ come

$$\overline{f}(Nx) = f(x)$$

Devo vedere che:

1. $\overline{f}$ è **ben posta**
2. $\overline{f}$ è **iniettiva**
3. $\overline{f}$ è **suriettiva**
4. $\overline{f}$ è un **omomorfismo**

Verifiche:

1. significa che

$$\begin{aligned}
&Nx = Ny \Rightarrow \overline{f}(Nx) = \overline{f}(Ny) \\
&Nx = Ny \Rightarrow f(x) = f(y) \\
&xy^{-1} \in N \\
&xy^{-1} \in \mathrm{Ker}f \\
&f(xy^{-1}) = e' \qquad f(x)f(y^{-1}) = e' \\
&f(x)f(y)^{-1} = e' \quad\; f(x) = f(y)
\end{aligned}$$

2. $\overline{f}(Nx) = \overline{f}(Ny) \Rightarrow Nx = Ny$ cioè $f(x) = f(y) \Rightarrow Nx = Ny$

   Basta seguire al **contrario** le implicazioni di 1.

   $$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x)f(y^{-1}) = e' \Rightarrow f(xy^{-1}) = e' \Rightarrow xy^{-1} \in \mathrm{Ker}f = N \Rightarrow Nx = Ny$$

3. Dato $y \in \mathrm{Im}f,\ \exists x \in G : y = f(x) = \overline{f}(Nx)$
4. $\overline{f}(NxNy) = \overline{f}(Nxy) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(Nx)\overline{f}(Ny)$

Applicazione

Proposizione

Sia G un **gruppo ciclico**, se G è **infinito** allora $G \cong \mathbb{Z}$, se G è **finito** $G \cong \mathbb{Z}_n$ per qualche n.

Dimostrazione: Sia $G =< g >$. Consideriamo

$$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = g^k$$

f è chiaramente **suriettiva** ed è un **omomorfismo**:

$$f(k+h) = g^{k+h} = g^k g^h = f(k)f(h)$$

Se G è **infinito** sappiamo che $g^h \neq g^k$ per $h \neq k$, dunque f è **iniettiva**, quindi un **isomorfismo** $\mathbb{Z} \cong G$.

Se $G =< g >$ è **ciclico** di ordine n, allora $\mathrm{Ker} f = n\mathbb{Z}$ e per il **teorema di omomorfismo**

$$G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$$