Lezione 29 - 12/12/2022

Principio di estensione per linearità

Proposizione

Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una **base** di V e siano $w_1, ..., w_n$ arbitrari **vettori** di W. Allora esiste un'unica **applicazione lineare** $F : V \to W$ tale che

$$F(v_i) = w_i \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

<u>Dimostrazione</u>: sia $v \in V$, con

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

poniamo

$$F(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

È chiaro che F verifica la relazione (1). Dobbiamo vedere che F è **lineare**, ovvero che

$$F(\alpha v + \beta v') = \alpha F(v) + \beta F(v')$$

Siano

$$v = \sum_i a_i v_i \qquad v' = \sum_i a'_i v_i$$

Si ha che

$$\alpha v + \beta v' = \alpha \sum_i a_i v_i + \beta \sum_i a'_i v_i = \sum_i (\alpha a_i + \beta a'_i) v_i$$

quindi

$$F(\alpha v + \beta v') = \sum_i (\alpha a_i + \beta a'_i) w_i$$
$$\alpha F(v) + \beta F(v') = \alpha \sum_i a_i w_i + \beta \sum_i a'_i w_i$$

Come si può vedere $F(\alpha v + \beta v') = \alpha F(v) + \beta F(v')$.

Dimostriamo infine che se $G : V \to W$ è lineare e $G(v_i) \overset{(1)}{=} w_i, 1 \leq i \leq n$, allora $F = G$.

Sia $v = \sum_i a_i v_i$

$$F(v) = \sum_i a_i w_i \overset{(1)}{=} \sum_i a_i G(v_i) \overset{(*)}{=} G(\sum_i a_i v_i) = G(v)$$

In $(*)$ è stato usato il fatto che G è **lineare**.

Osservazioni su Hom

Ricordiamo la definizione di Hom:

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W | f \text{ è lineare}\}$$

<u>Osservazioni</u>:

1. $\mathrm{Hom}(V, W)$ è uno **spazio vettoriale**

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v)$$
$$\alpha \in \mathbb{K} \qquad (\alpha S)(v) = \alpha S(v)$$

2. $S \in \mathrm{Hom}(U, V),\ T \in \mathrm{Hom}(v, W)$ allora $T \circ S \in \mathrm{Hom}(U, W)$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend right, "T \circ S"'] & V \arrow[r, "T"] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\alpha u_1 + \beta u_2) &= T(S(\alpha u_1 + \beta u_2)) = T(\alpha S(u_1) + \beta S(u_2)) = \\ &= \alpha T(S(u_1)) + \beta T(S(u_2)) = \\ &= \alpha (T \circ S)(u_1) + \beta (T \circ S)(u_2)\end{aligned}$$

3. Esercizio: sia $T : V \to W$ **lineare biunivoca**. Allora $T^{-1} : W \to V$ è lineare.
4. Ricordiamo che un **isomorfismo** $V \to W$ è un'**applicazione lineare** biunivoca.

Proposizione

Siano U, V **spazi vettoriali finitamente generati**. Allora $U \cong V$ se e solo se $\dim U = \dim V$.

Lemma

1. Se $f : U \to V$ è **lineare e iniettiva** e $u_1, ..., u_k$ sono **linearmente indipendenti**, allora $f(u_1), ..., f(u_k)$ sono **linearmente indipendenti**.
2. Se $f : U \to V$ è **lineare e suriettiva** e $u_1, ..., u_k$ sono **generatori** per U, allora $f(u_1), ..., f(u_k)$ sono **generatori** per V.
3. Se $f : U \to V$ è **lineare biunivoca** e $\{u_1, ..., u_k\}$ è una **base** di U, allora $\{f(u_1), ..., f(u_k)\}$ è una **base** di V (in altri termini, un **isomorfismo** manda basi in basi).

Dimostrazioni:

1. Devo dimostrare che

$$\alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_k f(u_k) = 0 \Rightarrow \alpha_1, ..., \alpha_k = 0$$

ma $\alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_k f(u_k) = f(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k) = 0$ è equivalente a dire

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k \in \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

che è vero perché f è iniettiva, quindi

$$\begin{gathered}\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0\end{gathered}$$

L'implicazione è data dal fatto che gli u_i sono **linearmente indipendenti**.

2. Sia $v \in V$, poiché f è **suriettiva**, esiste $u \in U$ tale che $v = f(u)$. Ma $u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k$ poiché $u_1, ..., u_k$ sono **generatori** per U, quindi

$$v = f(u) = f(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k) = \alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_k f(u_k)$$

3. Segue da $1)$ e $2)$.

<u>Dimostrazione delle proposizione</u>: dal lemma, se $U \cong V$ e $\phi : U \to V$ è un **isomorfismo**, ϕ manda **basi in basi**, quindi $\dim U = \dim V$.

Viceversa, sia $\dim U = \dim V = n$. Fissiamo **basi** $B = \{u_1, ..., u_n\}$ su U e $B' = \{v_1, ..., v_n\}$ su V. Abbiamo isomorfismi

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi_{B'}^{-1} \circ \varphi_B"] \arrow[dr, "\varphi_B"'] & & V \arrow[dl, "\varphi_{B'}"] \\ & \mathbb{K}^n & \end{tikzcd}$$

Applicazioni lineari e matrici

Abbiamo appena visto che se V è **finitamente generato** e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, ho un isomorfismo $\phi_B : V \to \mathbb{K}^n$

$$\phi_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (v)_B \quad \text{se} \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

Vedremo adesso che fissando **due basi**, una $B = \{v_1, ..., v_n\}$ in V e una $C = \{w_1, ..., w_m\}$ in W, un'**applicazione lineare** $f : V \to W$ si può rappresentare tramite una matrice $A \in M_{mn}$, dipendente da B, C. In altri termini, costruiamo un **isomorfismo**

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong M_{mn}(\mathbb{K})$$

Come sopra, sia $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V, $C = \{w_1, ..., w_m\}$ una base di W, $f : V \to W$ lineare

Definizione

La matrice di f rispetto a B presa come **base di partenza** in V e a C presa come **base di arrivo** in W è la matrice le cui colonne sono le **coordinate** rispetto a C delle immagini tramite f dei **vettori** di B.

Notazione: ${}_C(f)_B$

$$ {}_C(f)_B = (a_{ij}) \qquad f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j \qquad 1 \leq i \leq n$$

Esempio: $V = \mathbb{R}_2[t],\ W = \mathbb{R}_3[t],\ f : V \to W$

$$f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$$

Trovare ${}_C(f)_B$ con $B = \{1, t, t^2\},\ C = \{1, t, t^2, t^3\}$

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ f(t) &= t^2 = t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ f(t^2) &= t^2 \cdot 2(t+1) = 2t^3 + 2t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 2 \cdot t^2 + 2 \cdot t^3 \end{aligned}$$

Quindi

$$ {}_C(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con f definita nel modo seguente

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_3-x_1\\x_1+2x_2+x_3\end{pmatrix}$$

Siano le basi $B=C=\{e_1,e_2,e_3\}$. Dobbiamo calcolare

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora prendere i coefficienti, ovvero, prendendo come esempio il primo caso

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\underline{1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(\underline{-1})\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\underline{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

> ⚠️ Avendo preso la base standard, i coefficienti sono proprio le colonne del risultato della funzione.

Quindi, in conclusione

$${}_B(f)_B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}=A$$

<u>N.B.</u>: In questo caso $f=L_A$, infatti

$$L_A(X)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\-x_1+x_3\\x_1+2x_2+x_3\end{pmatrix}=f(X)$$

Proviamo ora cambiando base:

$$B=C=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

e la f definita sempre nello stesso modo.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

⚠️ Attenzione! Dobbiamo trovare quegli α, β, γ che risolvono il sistema, ovvero, nell'esempio del primo caso, dobbiamo trovare:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Nel nostro caso sono stati trovati “a mano”, altrimenti andrebbero messi a sistema e risolverlo.

Quindi

$$_B(f)_B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-4&-4\\1&3&4\end{pmatrix}$$

Cambio di base

Cosa significa concettualmente trovare $_C(f)_B$?

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_B"', "\cong"] & W \arrow[d, "\varphi_C", "\cong"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Chiamiamo $A = {}_C(f)_B$.

Supponiamo ora di avere $g \circ f$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[d, "\varphi_B"', "\cong"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_C", "\cong"'] & U \arrow[d, "\varphi_D", "="'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right, "L_C"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "L_B"] & \mathbb{K}^s \end{tikzcd}$$

Chiamiamo $B = {}_D(g)_C$. Si ha proprio che $L_C = L_B \circ L_A$.

Questo significa che

$$\begin{aligned} L_C(X) = L_B(L_A(X)) \qquad & \forall X \\ CX = BAX \qquad & \forall X \\ C = BA \qquad & \end{aligned}$$

Questo spiega il **prodotto righe per colonne** che è la naturale reincarnazione della composizione di funzioni.

Domanda: sia data $f : V \to W$ **lineare** e siano B, B' **basi** di V e C, C' **basi** di W. Che relazione c'è tra ${}_C(f)_B$ e ${}_{C'}(f)_{B'}$?
Si capisce bene tramite il **diagramma commutativo**:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\varphi_{B'}"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_B"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\varphi_C"'] & W \arrow[d, "\varphi_{C'}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "L_D"] \arrow[rrr, bend right, "L_F"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "L_E"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

Abbiamo:

- $A = {}_C(f)_B$
- $D = {}_B(\mathrm{Id}_V)_{B'}$
- $E = {}_C(\mathrm{Id}_W)_{C'}$
- $F = {}_{C'}(f)_{B'}$

Dal diagramma risulta

$$
\begin{aligned}
L_F &= L_E \circ L_A \circ L_D \\
&= L_{EAD} \\
F &= EAD
\end{aligned}
$$

Che da vita a

Formula del cambiamento di base

$$ {}_{C'}(f)_{B'} = {}_{C'}(\mathrm{Id}_W)_C \ {}_C(f)_B \ {}_B(\mathrm{Id}_V)_{B'} $$

Caso speciale: $f : V \to V,\ B = C,\ B' = C'$. La formula scritta sopra diventa:

$$ {}_{B'}(f)_{B'} = {}_{B'}(\mathrm{Id}_V)_B \ {}_B(f)_B \ {}_B(\mathrm{Id}_V)_{B'} $$

Poniamo $N = {}_{B'}(\mathrm{Id}_V)_B$. Dimostriamo che N è **invertibile** e $N^{-1} = {}_B(\mathrm{Id}_V)_{B'}$ per cui

$$ {}_{B'}(f)_{B'} = N \ {}_B(f)_B \ N^{-1} $$

Definizione - Matrici quadrate simili

Due **matrici quadrate** A, B si dicono **simili** se esiste una **matrice invertibile** N tale che

$$A = NBN^{-1}$$

Questo dimostra il seguente teorema:

Teorema - Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso operatore lineare

Due **matrici** $n \times n$ sono **simili** se e solo se rappresentano lo **stesso operatore lineare** su uno **spazio vettoriale** di **dimensione** n.

Esercizio:

$$_B(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$_{B'}(f)_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Poniamo ora $N = {}_{B'}(\mathrm{Id}_V)_B$, abbiamo quindi

$$_{B'}(f)_{B'} = N {}_B(f)_B N^{-1}$$

Calcoliamo N^{-1} e N:

$$N^{-1} = {}_B(\mathrm{Id}_V)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine abbiamo:

$$\overset{N}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{{}_B(f)_B}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{N^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$