Lezione 04 - 07/10/2022

Relazione d'ordine (parziale)
Grafo di Hasse
Costruzione di Z a partire da N
Proposizione
Lemma
Proposizione
Costruzione di Q a partire da Z

Relazione d'ordine (parziale)

Definizione: una relazione d'ordine $\leq$ su X è un sottoinsieme **non vuoto** di $X \times X$ che verifica le seguenti proprietà:

- **Riflessiva**: $x \leq x, \ \forall x \in X$
- **Antiriflessiva**: $x \leq y, \ y \leq x \Rightarrow x = y$
- **Transitiva**: $x \leq y, \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Esempi:

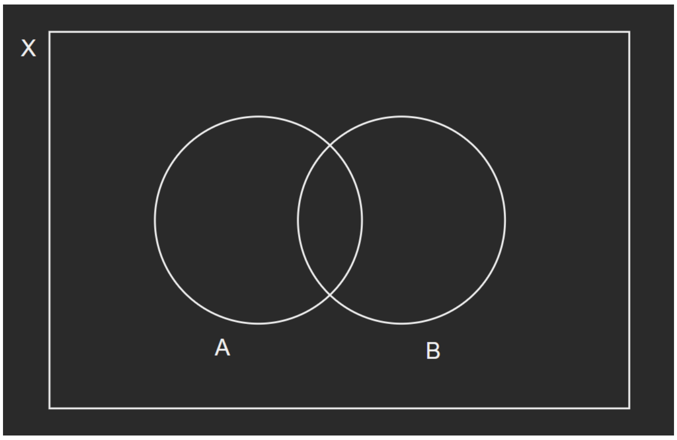
1. Usuale $\leq$ su $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
   Nota: In questo caso, dati due elementi x, y risulta

   $$x \leq y \text{ oppure } y \leq x$$

   Una relazione d'ordine con questa proprietà si dice **totale**.
2. Sia X insieme, $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X e $A, B \in \mathcal{P}(X)$

   $$A \leq B \text{ se } A \subseteq B$$

   Guardando il seguente diagramam di Venn



Si ha che $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$, quindi **non è una relazione d'ordine**.

3. Sia $X = \mathbb{N}$ e la relazione $\leq = |\ \text{"divide"}$

$$a \mid b \Leftrightarrow b \text{ è un multiplo di } a, \text{cioè } \exists c \in \mathbb{N} : b = ac$$

Esempi: $2 \nmid 5, 2 \mid 6$

- **Riflessiva**:

$$a \mid a,\ a = 1a \checkmark$$

- **Antisimmetrica**:

$$\begin{aligned} a \mid b, b \mid a \\ b = ca \\ a = db \\ (b \neq 0)\ 1 = cd \Rightarrow c = d = 1,\ \text{quindi } a = b \checkmark \end{aligned}$$

> ⚠️ In $\mathbb{Z}$, $cd = 1 \not\Rightarrow c = 1 = d$, in quanto potrebbe anche essere che $c = d = -1$, quindi la divisibilità non è una **relazione d'ordine** su $\mathbb{Z}$.

- **Transitiva**: $a \mid b,\ b \mid c \Rightarrow a \mid c$

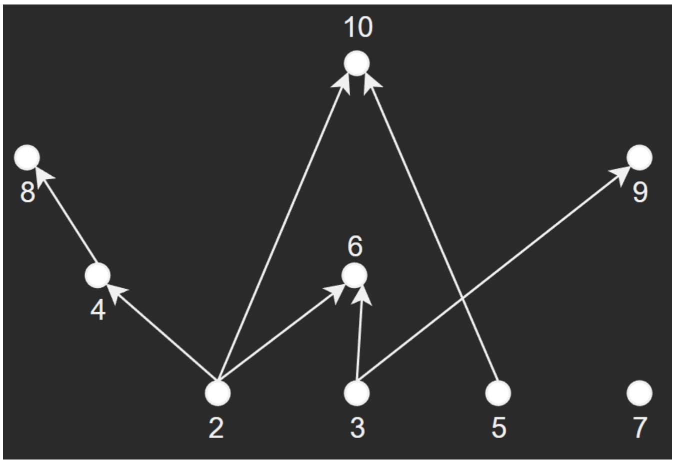
$$\begin{aligned} a \mid b \Rightarrow b = ka \\ b \mid c \Rightarrow c = hb \\ c = hb = hka = (hk)a \Rightarrow a \mid c \checkmark \end{aligned}$$

Grafo di Hasse

Un insieme X dotato di una **relazione d'ordine parziale** è usualmente chiamato **POSET** (Partially - Ordered - Set). Spesso quando X è un insieme finito, un POSET viene rappresentato tramite il suo **grafo di Hasse**:

- **Vertici**: elementi di X
- **Lati orientati**: x → y se $x \leq y$ e $x \leq t \leq y \Rightarrow x = t \text{ oppure } y = t$, ovvero **non ci sono altri nodi di mezzo**.

<u>Esempio</u>: $X = \{2, 3, ..., 10\}$, con la relazione $\leq = |$



Costruzione di Z a partire da N

Siano $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e ρ è la seguente relazione

$$(n, m)\rho(n', m') \iff n + m' = m + n'$$

Verifichiamo che si una relazione d'equivalenza:

- **Riflessiva**: $(n, m)\rho(n, m)$ vera in quanto $n + m = m + n$✓
- **Simmetrica**:

$$\begin{array}{lll} (n, m)\rho(n', m') & \text{ipotesi} & n + m' = m + n' \\ (n', m')\rho(n, m) & \text{tesi} & n' + m = m' + n \checkmark \end{array}$$

- **Transitiva**:

$$
\begin{aligned}
&(n,m)\rho(n'm') \text{ e} && (1)\\
&(n',m')\rho(n",m") && (2)\\
&\text{tesi } (n,m)\rho(n",m") && (3)
\end{aligned}
$$

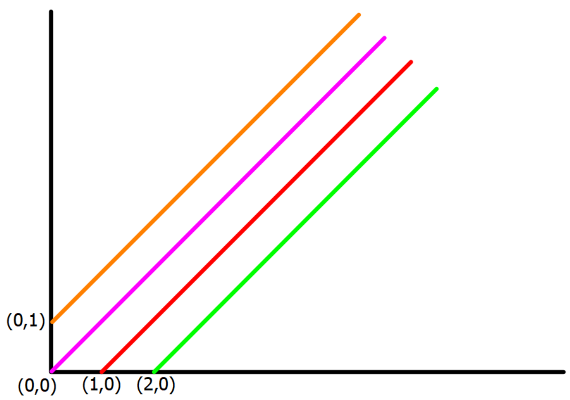
Da (1), (2) e (3) seguono le seguenti cose:

1. $n + m' = m + n'$
2. $n' + m" = m' + n"$
3. $n + m" = m + n"$

Dimostriamo che $n + m" = m + n"$

$$
\begin{aligned}
n + m" &= \underbrace{n + m'}_{1.} - m' + m" = \\
&= m + n' - m' + m" = \\
&= m - m' + \underbrace{n' + m"}_{2.} = \\
&= m - m' + m' + n" = \\
&= m + n"
\end{aligned}
$$

<u>Definizione</u>: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\rho}$



<u>Esempi</u>:

$$
\begin{aligned}
[(1,0)] &= \{(n,m) : (n,m) \sim (1,0)\} \\
&= \{(n,m) : m + 1 = n\}
\end{aligned}
$$

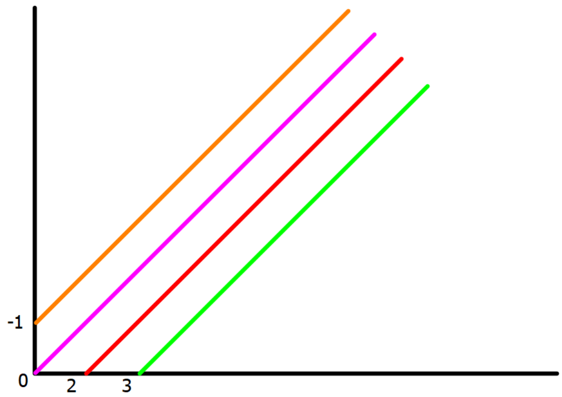
$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(n,m) : (n,m) \sim (0,0)\} \\
&= \{(n,m) : (n,m)\}
\end{aligned}
$$

Poniamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_+ &= \{[(n,0)] : n \neq 0\} \\
\mathbb{Z}_- &= \{[(0,n)] : n \neq 0\} \\
0 &= [(0,0)]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \\
n &= [(n,0)] \\
-n &= [(0,n)] \\
0 &= [(0,0)]
\end{aligned}
$$



Definiamo le operazioni su $\mathbb{Z}$:

- Operazione $+$:

$$
[(n,m)] + [(n',m')] = [(n+n', m+m')]
$$

<u>Osservazione</u>:

$$
\begin{aligned}
2+3 &= [(2,0)] + [(3,0)] = [(5,0)] = 5 \\
2+(-2) &= [(2,0)] + [(0,2)] = [(2,2)] = [(0,0)] = 0 \\
2+(-3) &= [(2,0)] + [(0,3)] = [(2,3)] = [(0,1)] = -1
\end{aligned}
$$

- Operazione $\cdot$:

$$[(n,m)][(n',m')] = [(nn'+mm', n'm+m'n)]$$

  Osservazione:

$$n \cdot m = [(n,0][(m,0)] = [(nm,0)] = nm,\ n,m > 0$$
$$n \cdot 0 = [(n,0)][(n,n)] = [(n^2,n^2)] = [(0,0)] = 0$$

Verifica che la definizione dell'addizione è ben posta, cioè che non dipende dal rappresentante scelto:

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+n', n+m')]$$
$$[(m,n)] = [(a,b)],\ [(m',n')] = [(a',b')]$$
$$\Rightarrow [(m+m', n+n')] = [(a+a', b+b')]$$

Ipotesi:

1. $m+b = n+a$
2. $m'+b' = n'+a'$

Tesi:

3. $m + m\text{'} = b+b',\ n+n' = a+a'$

Sommando membro a membro 1. e 2. si ottiene 3.

Proposizione

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ è un **anello commutativo con unità**.

Lemma

Sia A un anello commutativo con unità:

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,\ \forall a$
2. $(-a)b = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$

Dimostrazione:

1. $0 + a\cdot 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a\cdot 0 + a \cdot 0$

$$
\begin{aligned}
(0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) \\
\text{(assoc.) } 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \\
0 + 0 &= a \cdot 0 + 0 \\
0 &= a \cdot 0
\end{aligned}
$$

2. $0 \stackrel{1.}{=} 0 \cdot b = (a + (-a))b = ab + (-a)b$

   Che è quello che si vuole: $(-a)b$ è l'elemento che devo sommare ad ab per ottenere 0

$$-ab = (a)b$$

3. $(-a)(-b) \stackrel{2.}{=} -(a(-b)) \stackrel{2.}{=} -(-ab) = ab$

Proposizione

Se $a, b \in \mathbb{Z},\ ab = 0$ se e solo se $b = 0$ oppure $a = 0$

Dimostrazione: Si usa il fatto che gli interi hanno un segno

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$$

Se $a, b > 0$ per la definizione di prodotto $ab > 0$

Se $a, b < 0$ per il lemma:

$$ab = (\overset{>0}{-a})(\overset{>0}{-b}) > 0$$

Se $a > 0, b < 0$ allora $-b > 0$ e per il lemma

$$0 < a(-b) = -ab \Rightarrow ab > 0$$

Costruzione di Q a partire da Z

Siano $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e ρ una relazione di equivalenza su X definita nel seguente modo:

$$(m, n)\rho(m', n') \Leftrightarrow mn' = nm'$$

Idea:

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$$

⚠️ Il professore ha definito X come il prodotto cartesiano di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ privato dello 0, quindi il primo elemento della tupla dovrebbe essere il numeratore della frazione mentre il secondo elemento il denominatore, in quanto non può assumere il valore 0. Subito dopo però nella definizione di ρ ha messo il numeratore nella prima posizione e il numeratore nel secondo, ovvero ha invertito i ruoli di numeratore e denominatore.

Bisogna dimostrare che:

1. ρ è una relazione di equivalenza
2. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}/_\rho$
3. $\mathbb{Q}$ è un campo, quindi vanno definite le operazioni

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(mm', mn' + nm')]$$

questo perché

$$\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} = \frac{nm' + n'm}{mm'}$$

Poi

$$\begin{aligned} [(m,n)][(m',n')] &= [(mm', nn')] \\ -[(m,n)] &= [(-n,m)] \\ [(m,n)]^{-1} &= [(n,m)] \\ 0 &= [(0,1)] \\ 1 &= [(1,1)] \end{aligned}$$