Lezione 32 - 16/12/2022

Autovettori e autovalori

Tratteremo d'ora in poi solo il caso di **operatori lineari** $T : V \to V$ con $\dim_{\mathbb{K}} V = +\infty$.

Problema: posso trovare una rappresentazione matriciale di T "ottimale", ovvero la più facile possibile (la matrice diagonale)?

Definizione

Sia $T \in \mathrm{End}(V)$. Un **vettore** $v \neq 0$ si dice **autovettore** per T di **autovalore** $\lambda \in \mathbb{K}$ se

$$T(v) = \lambda v$$

Diciamo poi che $\lambda \in \mathbb{K}$ è **autovalore** per T se $\exists v \neq 0$, tale che $T(v) = \lambda v$.

Nomenclatura: $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ è detto **autospazio** di T relativo all'**autovalore** λ.

N.B.: gli elementi di V_λ sono gli **autovettori** di T di **autovalore** λ e **zero**.

Esercizio: V_λ è un **sottospazio vettoriale** di V.

Siano $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Vogliamo vedere che

$$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda$$
$$T(v_1) = \lambda v_1 \qquad T(v_2) = \lambda v_2$$

Svogliamo i calcoli:

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

Osservazione

Notiamo che $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_V)$

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{Id}_V) &\Leftrightarrow (T - \lambda\mathrm{Id}_V)(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(v) - \lambda\mathrm{Id}_V(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(v) - \lambda v = 0 \\ &\Leftrightarrow T(v) = \lambda v \end{aligned}$$

Quindi gli **autovalori** di T sono gli **scalari** di λ per cui $T - \lambda\mathrm{Id}_v$ **non è invertibile**.

Proposizione

Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ e B una **base** di V. Allora B è composta da **autovettori** per T se e solo se ${}_B(T)_B$ è **diagonale**.

Dimostrazione: supponiamo che $B = \{v_1, ..., v_n\}$ sia una **base** di V formata da **autovettori** per T. Allora

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 0 \cdot v_n \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 \cdot v_3 + ... + 0 \cdot v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= \lambda_n v_n = 0 \cdot v_1 + ... + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Questo significa che ${}_B(T)_B$ è diagonale

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Il **viceversa** si dimostra allo stesso modo.

Definizione - Diagonalizzabilità

Diciamo che $T \in \mathrm{End}(V)$ è **diagonalizzabile** se esiste una **base** di V formata da **autovettori** per T.

Osservazione: ricordiamo che due matrici rappresentano lo **stesso operatore lineare** in basi diverse se e solo se sono **simili**.
Pertanto T è **diagonalizzabile** se la sua matrice rispetto a una qualsiasi base presa in **partenza** e in **arrivo** è **simile** a una **matrice diagonale**.

Proposizione

$T \in \mathrm{End}(V),\ B = \{v_1, ..., v_n\}$ **base** di V, $A = {}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$. Allora

1. La funzione $p_T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definita come

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

   non dipende dalla **base** $\mathbb{B}$.

2. p_T è un **polinomio** di grado n dove:
   - il **coefficiente direttore** è $(-1)^n$
   - il **coefficiente** di λ^{n-1} è $(-1)^{n-1} \cdot \mathrm{tr}(A)$ (traccia di A)
   - il **termine noto** è $\det A$

3. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è **autovalore** di T se e solo se $p_T(\lambda_0) = 0$

Dimostrazioni:

1. devo vedere che se A, B sono simili, allora

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n)$$

   Se A, B sono **simili**, esiste N **invertibile** tale che $B = NAN^{-1}$

   > ⚠️ Osservazione: se A è **invertibile**, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
   >
   > $$\begin{array}{ccc} & AA^{-1} = I_n & \\ \det(AA^{-1}) & = & \det(I_n) = 1 \\ \| & & \\ \det(A)\det(A^{-1} & \rightsquigarrow & \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\det(B-\lambda I_n) &= \det(NAN^{-1}-\lambda I_n) = \\
&= \det(N(A-\lambda I_n)N^{-1}) = \\
&= \det N \cdot \det(A-\lambda I_n)\cdot \det(N^{-1}) = \\
&= \cancel{\det N} \cdot \det(A-\lambda I_n)\cdot \frac{1}{\cancel{\det N}} = \det(A-\lambda I_n)
\end{aligned}
$$

2. Sia

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

con:

- $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $tr A = a_{11} + a_{22}$

Si ha che

$$
\begin{aligned}
det(\lambda I_2 - A) &= \det(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 \underbrace{-(a_{11}+a_{12})}_{-\mathrm{tr}A} + \underbrace{a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}}_{\det A}
\end{aligned}
$$

In generale si procede per **induzione** su n.

3. Supponiamo che $T(v) = \lambda_0 v,\ v \neq 0$. Dobbiamo passare in coordinate:

$$
X = (v)_B \qquad A = {}_B(T)_B \qquad X \neq 0
$$

$$
\begin{aligned}
(T(v))_B &= (\lambda_0 v)_B \\
{}_B(T)_B\ (v)_B &= \lambda_0 (v)_B \\
AX &= \lambda_0 X \\
(A - \lambda_0 I_n)X &= 0
\end{aligned}
$$

Quindi il **sistema lineare omogeneo** di matrice $A - \lambda_0 I_n$ ha una soluzione **non banale**. Ma allora la matrice $A - \lambda_0 I_n$ **non ha rango massimo**. Dunque

$$\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$$

cioè $p_A(\lambda_0) = 0$. Il **viceversa** si dimostra ripercorrendo la dimostrazione al contrario.

Esempio: sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando i calcoli si ha

$$\begin{aligned}
&(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) + 6 + 6 - 3(4-\lambda) - 6(3-\lambda) - 2(5-\lambda) = 0 \\
&(12 - 7\lambda + \lambda^2)(5-\lambda) - 28 + 19\lambda = 0 \\
&60 - 35\lambda + 5\lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 - 28 + 11\lambda = 0 \\
&-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0 \\
&\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0 \leftarrow 2 \text{ è soluzione con Ruffini} \\
&(\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = 0 \\
&(\lambda - 2)^2(8 - \lambda) = 0
\end{aligned}$$

Gli **autovalori** sono quindi $2, 8$.

Definizione - Molteplicità algebrica e geometrica

Sia λ un **autovalore** di $T \in \operatorname{End}(V)$.
Definiamo la **molteplicità algebrica** di λ, $m_a(\lambda)$ come la **molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico**.
Definiamo la **molteplicità geormetrica** di λ, $m_g(\lambda)$ come

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$$

Ricordiamo che λ è **radice** di molteplicità m del polinomio $p(t)$ e

$$p(t) = (t - \lambda)^m q(t) \qquad q(\lambda) \neq 0$$

Proposizione

$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$ per ogni **autovalore** λ di $T \in \mathrm{End}(V)$.

<u>Dimostrazione</u>: $1 \le m_g(\lambda)$ vuol dire che $\dim V_\lambda > 0$, cioè che $V_\lambda \neq \{0\}$, cioè che λ è **autovalore**.

Sia $\{v_1, ..., v_k\}$ una **base** di V_λ. Completiamola con vettori $\{v_{k+1}, ..., v_n\}$ a una base di V.
Costruiamo ${}_B(T)_B$: $T(v_1) = \lambda v_1, ..., T(v_n) = \lambda v_n, ...$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \overbrace{\quad * \quad}^{n-k} \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ \hline & & & C \end{array}\right) \Big\} {\scriptstyle n-k}$$

Il determinante sarà quindi:

$$\det(A - tI_n) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & & & C - tI_{n-k} \end{array}\right)$$

$$= (\lambda - t)^k \det(C - tI_{n-k})$$

dunque $m_a(\lambda) \ge k = m_g(\lambda)$.

<u>Esempio</u>: siano $\dim V = 4,\ \dim V_\lambda = 2,\ \{v_1, v_2\}$ **base** di V_λ, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ **base** di V.

$$\begin{array}{ll} T(v_1) = \lambda v_1 & T(v_3) = \dots \\ T(v_2) = \lambda v_2 & T(v_4) = \dots \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a & e \\ 0 & \lambda & b & f \\ 0 & 0 & c & g \\ 0 & 0 & d & h \end{pmatrix}$$

$$\det(A - tI_n) = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 & a & e \\ 0 & \lambda - t & b & f \\ 0 & 0 & e - t & g \\ 0 & 0 & d & h - t \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppo (di Laplace) lungo la **prima colonna** in quanto ha la **quantità maggiore di** 0:

$$(\lambda - t) \begin{vmatrix} \lambda - t & b & f \\ 0 & c - t & 0 \\ 0 & d & h - t \end{vmatrix} = 0$$

sviluppo nuovamente lungo la **prima colonna** per lo stesso motivo:

$$(\lambda - t)^2 \det \begin{pmatrix} c - t & g \\ d & h - t \end{pmatrix} = 0$$

Teorema - Diagonalizzabilità

$T \in \mathrm{End}(V)$ è **diagonalizzabile** se e solo se

1. $\sum_{\lambda \text{ autovalori di } T} m_a(\lambda) = \dim V$
2. $\forall \lambda$ autovalore di T, $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

<u>Osservazioni</u>:

1. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la $1.$ è **sempre verificata**
2. Se $m_a(\lambda) = 1$ $\forall \lambda$ la $2.$ è verificata.

> ⚠️ <u>Attenzione</u>: il fatto che gli **autovalori** siano distinti è condizione solo **sufficiente** per la diagonalizzabilità.
> Controesempio: $T = Id_V$

Inoltre possiamo dedurre che è **sufficiente** verificare la condizione $2.$ solo per gli **autovalori** λ con $m_a(\lambda) \geq 2$.

Proposizione

Autovettori relativi a **autovalori** distinti sono **linearmente indipendenti**.

<u>Dimostrazione</u>: siano $v_1, ..., v_n$ **autovettori** relativi ad **autovalori** $\lambda_1, ..., \lambda_k$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, ..., f(v_k) = \lambda_k v_k$$
$$(1) \qquad a_1 v_1 + ... + a_k v_k = 0$$
$$f(a_1 v_1 + ... + a_k v_k) = f(0) = 0$$
$$a_1 f(v_1) + ... + a_k f(v_k) = 0$$
$$(2) \qquad a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_k \lambda_k v_k = 0$$

Procediamo per **induzione** su k:

Se $k = 1$ allora $v_1 \neq 0$ (perché è **autovettore**), quindi $\{v_1\}$ è **indipendente**.

Moltiplico (1) per λ_1 ottenendo

$$(3) \qquad \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_1 a_2 v_2 + ... + \lambda_1 a_k v_k = 0$$

Sottraggo ora (3) da (2) ottenendo

$$(\lambda_1 - \lambda_2) a_2 v_2 + ... + (\lambda_1 - \lambda_2) a_k v_k = 0$$

Questa è una combinazione lineare eguagliata a zero di $v_2, ..., v_k$, che per **induzione** sono **indipendenti**, quindi

$$(\lambda_1 - \lambda_2) a_2 = 0, ..., (\lambda_1 - \lambda_2) a_k = 0$$

Ma $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ se $i \neq 1$, quindi

$$a_2 = ... = a_k = 0$$

Sostituisco ora in (1) e trovo

$$a_1 v_1 = 0$$

Ma $v_1 \neq 0$, quindi $a_1 = 0$.