Lezione 23 - 24/11/2022

Riassunto Span

Ricrodiamo: V **spazio vettoriale**, $v_1, ...v_k \in V$

$$\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k | \alpha_i \in \mathbb{K}\}$$

Più in generale, se $S \subseteq V$, poniamo:

$$\mathrm{Span} S = \text{insieme delle combinazioni lineari di tutti i sottoinsiemi finiti di } S$$

Definizione - Insieme di generatori

Diciamo che S è un **insieme di generatori** per V se $V = \mathrm{Span} S$. Diciamo che V è **finitamente generato** se esiste un **insieme finito di generatori** per V.

In altri termini, V è finitmente generato se esistono vettori $v_1, ..., v_n \in V$ tali che ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$.

Esempi:

1. $V = \mathbb{K}^n$, poniamo

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{posto } i$$

Faccio vedere che $V = \text{Span}(e_1, ..., e_n)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$
$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

2. $V = M_{mn}(\mathbb{K})$, poniamo

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero e_{ij} rappresenta un 1 all'**i-esima riga** e **j-esima colonna**.

$V = \text{Span}\{e_{ij} | 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n\}$

$A = (a_{ij})$

$$A = \sum_{\substack{i=1...m \\ j=1...n}} a_{ij} \cdot e_{ij}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = e_{11} + 2e_{12} + 3e_{13} + 4e_{21} + 5e_{22} + 6e_{23}$$

3. $V = \mathbb{K}[t]$, $V = \text{Span}\{t^i | 0 \leq i\}$

   Infatti, dato $p(t) \in V$,

$$p(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i$$

> ℹ️ Intepretriamo questa espressione come combinazione lineare di $1, t, t^2, ..., t^N$ con coefficienti $a_0, a_1, ..., a_n$.

<u>Esempio</u>: $1 + 3t + 5t^7 - 9t^{12}$

Osserviamo che V **non è finitamente generato**. Infatti, se $\deg p(t)$ denota il **grado** di $p(t)$, il grado

$$\deg(\alpha p(t) + \beta q(t)) \leq \max\{\deg p(t), \deg q(t)\}$$

Pertanto non può esistere un insieme finito di generatori per V, perché se

$$S = \{p_1(t), ..., p_s(t)\}$$
$$h = \max_{1 \leq k \leq s} \deg p_k(t)$$

si ha che $t^{h+1} \notin \text{Span } S$.

> ⚠️ Abbiamo dimostato che V non è finitamente generato perchè, se prendo due polinomi, qual è il grado della loro combinazione lineare? È minore o uguale del massimo dei gradi dei fattori, quindi se si ha una combinazione lineare finita di vettori, un polinomio più grande del massimo numero finito che si ha non si trova.

Nomenclatura

Se A è un **matrice**, la **trasposta** di A (notazione A^t o ${}^tA$) è la matrice ottenuta **scambiando righe e colonne**:

$$({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$$
$$A \in M_{mn}(\mathbb{K}), \ {}^tA \in M_{nm}(\mathbb{K})$$

<u>Esempi</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà delle trasposte

1. $A^{tt} = A$
2. $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$

Nomenclatura

- **Matrici simmetriche**

$$S_n^+ = \{A \in M_n(\mathbb{K}) | A = A^t\}$$

- **Matrici antisimmetriche**

$$S_n^- = \{A \in M_n(\mathbb{K}) | A = -A^t\}$$

> ⚠️ Questo vale solamente per le matrici simmetriche.

<u>Esercizio svolto</u>: $S_n^{\pm}$ sono **sottospazi** di $M_n(\mathbb{K})$.

Dobbiamo dimostrare che se $A, B \in S_n^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ allora $\alpha A + \beta B \in S_n^+$.

- **Ipotesi**: $A = A^t, B = B^t$

$$(\alpha A + \beta B)^t \stackrel{2.}{=} \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B$$

Similarmente se $A, B \in S_n^-, A^t = -A, B = -B^t$

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B)$$

Esercizi svolti

4. Trovare generatori per S_2^+, S_2^-

- S_n^+

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \to b = c$$

quindi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_2^+$ se e solo se è del tipo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= ae_{11} + b(e_{12} + e_{21}) + de_{22} \end{aligned}$$

Quindi $S_2^+ = \mathrm{Span}(e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22})$.

- S_2^-

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \end{cases} \to \begin{cases} 2a = 0 \\ b = -c \\ 2d = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$$

quindi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_2^-$ se e solo se è del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $S_2^- = \mathrm{Span}(e_{12} - e_{21})$.

Procedimento generale:

- Dimostro che è un sottospazio;
- Quando so che è lo è cerco di capire quali sono le condizioni che ho per avere un elemento in quel sottospazio;
- Quasi sempre la trasposta viene trasferita in un sistema lineare;

- Cerco di capire come esprimerla tramite elementi fissati, quindi separo le lettera.

5. $\mathbb{K}_d[t] = \{p(t) \in \mathbb{K}[t] | \deg p(t) \leq d\}$.
   $\mathbb{K}_d[t]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[t]$ e $\mathbb{K}_d[t] = \mathrm{Span}(1, t, t^2, ..., t^d)(*)$
   Il fatto che $\mathbb{K}_d[t]$ sia un sottospazio è chiaro dalla relazione

$$\deg(\alpha p(t) + \beta q(t)) \leq \max\{\deg p(t), \deg q(t)\}$$

   La relazione $(*)$ è data dal fatto che $p(t) \in \mathbb{K}_d[t]$ si scrive come

$$p(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$$

Osservazioni varie

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$.
   Devo vedere che ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è **combinazione lineare** di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   A sua volta, questo significa che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ esistono x_1, x_2 tali che

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   che è il **sistema lineare di matrice completa**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix}$$

   Risolviamolo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

   che rappresenta il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a+b}{2} \\ x_2 = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

2. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$.

Devo vedere che:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Scriviamo la marice completa e risolviamo il sistema ottenuto:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 0 & b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & -1 & b-1\end{pmatrix}\rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{a-b}{2}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a+b}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{a-b}{2}\end{pmatrix}$$

Che forma il seguente sistema:

$$\begin{cases}x_1=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}t\\ x_2=\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}t\\ x_3=t\end{cases}$$

Vettori linearmente indipendenti e linearmente dipendenti

Definzione - Vettori linearmente indipendenti

I **vettori** $v_1,...,v_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se

$$\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n=0_V\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0_{\mathbb{K}}$$

In altri termini, l'unica combinazione lineare che esprime 0_V in termini di $v_1,...,v_n$ è quella **banale** (ovvero $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0_{\mathbb{K}}$)

Definizione - Vettori linearmente dipendenti

I **vettori** $v_1,...,v_n$ sono **linearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti, ovvero se **esistono scalari non tutti nulli** $\alpha_1,...,\alpha_n$ tali che $\alpha_1+v_1+...+\alpha_nv_n=0_v$.

<u>Osservazioni facili</u>:

1. Se un insieme di vettori **contiene il vettore nullo** è **linearmente dipendente**.
   Supponiamo che sia il primo $\{v_1 = 0, v_2, ..., v_k\}$. Allora posso scrivere:

$$\underbrace{1 \cdot v_1}_{=0} + 0_{\mathbb{K}} v_2 + ... + 0_{\mathbb{K}} v_k = 0_{\mathbb{K}}$$

2. Se un insieme di vettori **contiene due vettori proporzionali** allora è **linearmente dipendente**.
   Supponiamo di avere $\{v_1, v_2 = \alpha v_1, v_3, ..., v_k\}$. Allora posso prendere:

$$-\alpha v_1 + \underbrace{1 v_2}_{\alpha v_1} + 0 v_3 + ... + 0 v_k = 0$$

3. Se $\{v_1, ..., v_k\}$ sono **linearmente dipendenti**, anche $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ sono **linearmente dipendenti**. (esercizio)

Proposizione

$v_1, ..., v_k$ sono **linearmente dipendenti** se e solo se **uno di essi è combinazione lineare degli altri**.

Dimostrazione: supponiamo $v_1, ..., v_k$ sono **linearmente dipendenti**. Allora esistono scalari non tutti nulli $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tali che $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0$.
Sia $\alpha_i \neq 0$:

$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 ... - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} ... - \alpha_k v_k$$
$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 ... - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k$$

quindi $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_k)$ $(*)$.

Viceversa supponiamo che valga $(*)$. Allora

$$v_i = \beta_1 v_1 + ... + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta i + 1 v_{i+1} + ... + \beta_k v_k$$
$$\beta_1 v_1 + ... + \beta_{i-1} v_{i-1} - v_i + \beta i + 1 v_{i+1} + ... + \beta_k v_k = 0$$

gli scalari di questa combinazione linerare sono $\beta_1, ..., \beta_{i-1}, -1, \beta_{i+1}, ..., \beta_k$, quindi **non sono tutti nulli**, pertanto $v_1, ..., v_k$ sono linearmente dipendenti.

Proposizione

Se $v_1, ..., v_k$ sono **linearmente dipendenti**, allora

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k \ (\blacksquare)$$

implica $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_k = \beta_k$.

Dimostrazione: La (■) so riscrive

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0$$

Poichè $v_1, ..., v_k$ sono **linearmente indipendenti**, risulta

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = ... = \alpha_k - \beta_k = 0$$

da cui $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_k = \beta_k$.

Definizione

Un sottoinsieme $S \subset V$ si dice **indipendente** se ogni **sottoinsieme finito** è composto da **vettori linearmente indipendenti**.

Definizione - Base di uno spazio vettoriale

Una **base** di uno **spazio vettoriale** V è un **insieme indipendente di generatori**.

Teorema - Ogni spazio vettoriale ammette base

Ogni **spazio vettoriale** ammette **una base**.

> ⚠️ Faremo vedere che se V è **finitamente generato** da un **sistema finito di generatori** si può estrarre una base; inoltre dimostreremo che **tutte le basi** hanno lo **stesso numero di elementi**, che sarà detto **dimensione** dello spazio vettoriale.

Proposizione

Sia V uno **spazio vettoriale finitamente generato**. $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V se e solo se ogni vettore di V si scrive **in modo unico** come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$.

Dimostrazione: se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base e $v \in V$, risulta $v \in \mathrm{Span}(v_1, ..., v_n)$ perché $\{v_1, ..., v_n\}$ è un **insieme di generatori**; inoltre, per la proposizione precedente, essendo $v_1, ..., v_n$ **linearmente indipendenti**

$$x_1v_1 + ... + x_nv_n = y_1v_1 + ... + y_nv_n \Rightarrow x_i = y_i \ \forall i$$

Viceversa se $\{v_1, ..., v_n\}$ ha le **proprietà descritte nell'enunciato**, è chiaro che $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_n) = V$. Facciamo vedere che $v_1, ..., v_n$ sono **linearmente indipendenti**

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$$
$$0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_n = 0_V$$

Poichè la scrittura di ogni vettore come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ è **unica**, deduciamo $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0$.

<u>Osservazione</u>: fissata la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ di V, ogni vettore v si scive in modo unico come $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$.
Quindi è ben definita una funzione $F : V \to \mathbb{K}^n$

$$F(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{vettore delle coordinate di } V \text{ rispetto a } B$$

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^2,\ B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ \overline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$F_B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad F_{\overline{B}} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Osservazioni

Gli esempi di insiemi di genertori visiti nei casi $1. \to 5.$ sono in realtà basi per gli spazi in questione.

1. $V = \mathbb{K}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ sono **linearmente dipendenti** quindi sono una **base** e $\dim \mathbb{K}^n = n$.

   Suppongo $x_1 e_1 + ... + x_n e_n = 0$.
   Devo vedere che $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

$$x_1 e_1 + ... + x_n e_n = 0 \to x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = 0 \; \forall i$.

2. $V = M_{mn}(\mathbb{K}),\ \{e_{ij} | 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ sono **linearmente indipendenti**, quindi $\dim V = m \cdot n$ (in particolare $\dim M_n = n^2$)

$$\sum_{i,j} a_{ij} e_{ij} = 0$$

quindi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

5. $\{1, t, ..., t^d\}$ sono una base di $\mathbb{K}_d[t]$, dunque $\dim \mathbb{K}_d[t] = d + 1$

$$\begin{aligned} a_0 \cdot 1 + a_1 t + ... + a_d t^d = 0_{\mathbb{K}[t]} \\ \Rightarrow a_0 = a_1 = ... = a_d = 0 \end{aligned}$$

4. $\dim S_2^+ = 3 \qquad \dim S_2^- = 1$.