Lezione 25 - 28/11/2022

Proposizione - Base insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

Se $B = \{v_1, ..., v_n\}$ è una **base** dello **spazio vettoriale** V, allora B è un **insieme massimale** di vettori **linearmente indipendenti**.

Dimostrazione: devo verificare che per ogni $v \in V$ $v, v_1, ..., v_n$ sono **linearmente dipendenti**. Poiché B è una base, è in particolare un **insieme di generatori**, dunque esistono **scalari** $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Pertanto $\{v, v_1, ..., v_n\}$ sono **linearmente dipendenti**.

Lemma

Sia B un **sottoinsieme finito** dello **spazio vettoriale** V. Se $\mathrm{Span}\ B$ contiene un sistema di generatori per V, allora $V = \mathrm{Span}\ B$, cioè B è **esso stesso un insieme di generatori**.

Dimostrazione: sia $A \subset \mathrm{Span}\ B$ tale che $\mathrm{Span}\ A = V$. Sia $A = \{w_1, ..., w_s\}$ allora ogni $v \in V$ è del tipo

$$v = \sum_{i=1}^{s} a_i w_i$$

Ma $A \subset \mathrm{Span}\ B$, per cui se $B = \{v_1, ..., v_r\}$,

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} v_j$$

e dunque

$$v = \sum_{i=1}^{s} a_i w_i = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} a_i b_{ij} v_j$$

Proposizione

Sia $A = \{v_1, ...v_k\}$ un **insieme di generatori** per lo **spazio vettoriale** V. Sia $B \subseteq A$ un **insieme massimale di vettori linearmente indipendenti**. Allora B è una **base** di V.

Corollario

Se V è **finitamente generato**, allora **esiste una base** di V.

Dimostrazione: a meno di cambiare l'ordine dei vettori, possiamo assumere che $B = \{v_1, ..., v_r\}, r \leq k$ (ovvero i primi r vettori di A). Basta vedere che $\mathrm{Span}\ B = V$. Per il **lemma**, basta vedere che $A \subseteq \mathrm{Span}\ B$.
Sia $w \in A$, che possiamo assumere **non** in B. Per **massimalità**, $w, v_1, .., v_r$ sono **linearmente dipendenti**, quindi esistono **scalari non tutti nulli** $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_r$ tali che

$$\alpha w + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = 0$$

Se $\alpha = 0$, si ha $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = 0$ che implica $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$ per l'**indipendenza lineare** dei $v_1, ..., v_r$. Ma questo non è possibile, quindi $\alpha \neq 0$ e

$$w = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 ... - \frac{\alpha_r}{\alpha} v_r \in \mathrm{Span}\ B$$

come volevamo.

Costruzione di una base

Sia $A = \{v_1, ..., v_r\}$ e $\mathrm{Span}\ A = V$.

Se $V = 0$ allora OK.

Se $V \neq 0$ allora $\exists v_i \in A, v_i \neq 0$. Se $\{v_i, v_j\}$ sono **linearmente dipendenti** $\forall j$, $\{v_j\}$ è una **base**. Altrimenti esiste $v_j \in A$ tale che $\{v_i, v_j\}$ è **linearmente dipendente**. Se $\{v_i, v_j, v_k\}$ sono **linearmente dipendenti** $\forall k$ allora $\{v_i, v_j\}$ è una **base**. E così via.

> ⚠️ N.B.: Sia $A = \{v_1, ..., v_n\}$ un **insieme di generatori**. Se sono **linearmente indipendenti**, sono una base. Altrimenti sono **linearmente dipendenti** ed esiste v_i tale che $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$. Ma $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_n) = \mathrm{Span}(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$. Se ora $v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n$ sono **linearmente indipendenti**, sono una **base**. Altrimenti esiste $v_j = \mathrm{Span}(v_1, .., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n)$ e così via.

Teorema - Teorema del completamento a base

Sia $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una **base** di uno **spazio vettoriale** V e siano $w_1, ..., w_p,\ p \leq n$ vettori **linearmente indipendenti**. Allora esistono $n - p$ vettori di B che insieme a $w_1, ..., w_p$ formano una base di V.

Dimostrazione: procediamo per **induzione** su p.
Sia $p = 1$. Poiché $v_1, ..., v_n$ è una base di V, esistono **scalari** $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tali che

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \quad (*)$$

Per ipotesi $\{w_1\}$ è **indipendente**, cioè $w_1 \neq 0$, quindi gli α_i **non sono tutti nulli** e possiamo assumere $\alpha_1 \neq 0$, quindi

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

Dunque $B \subset \mathrm{Span}(w_1, v_2, ..., v_n)$. Per il **lemma**, $\{w_1, v_2, ..., v_n\}$ è un **insieme di generatori**. Dimostriamo che sono **linearmente indipendenti**. Sia

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n v_n = 0$$

Dobbiamo dimostrare che $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0$. Per faremo usiamo $(*)$. Otteniamo

$$\beta_1(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n = 0$$
$$\beta_1\alpha_1 v_1 + (\beta_1\alpha_1 + \beta_2)v_2 + ... + (\beta_1\alpha_n + \beta_n)v_n = 0$$

Ma $\{v_1, ..., v_n\}$ è un insieme **linearmente indipendente**, quindi

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_1\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_1\alpha_n + \beta_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_n = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora la **tesi vera** per $p-1$ vettori e dimostriamola per p vettori.

Per **ipotesi induttiva**, possiamo trovare $n-(p-1) = n-p+1$ vettori, che a meno di cambiare nome possiamo assumere essere $v_p, ..., v_n$, tali che

$$\{w_1, ..., w_{p-1}, v_p, ..., v_n\}$$

è una **base** di V. Come prima

$$w_p = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{p-1}w_{p-1} + \alpha_p v_p + ... + \alpha_n v_n$$

Gli α_i con $p \leq i \leq n$ **non sono tutti nulli**, altrimenti troveremo una relazione di **dipendenza** tra $w_1, ..., w_p$. Supponiamo allora $\alpha_p \neq 0$ e scriviamo

$$v_p = \frac{1}{\alpha_p}w_p - \frac{\alpha_1}{\alpha_p}w_1 ... - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}w_{p-1} - \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}v_{p+1} ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_p}v_n$$

Dunque $v_p \in \mathrm{Span}(w_s, ..., w_p, v_{p+1}, ..., v_n)$, pertanto tali vettori sono un insieme di **generatori**. Per provare l'**indipendenza lineare**, scriviamo

$$\beta_1 w_1 + ... + \beta_p w_p + \beta_{p+1}v_{p+1} + ... + \beta_n v_n = 0$$

dove $w_p = \alpha_p v_p + \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{p-1}w_{p-1} + \alpha_{p+1}v_{p+1} + ... + \alpha_n v_n$. Quindi

$$\begin{aligned}(\beta_1 + \beta_p\alpha_1)w_1 + ... + (\beta_{p-1} + \beta_p\alpha_{p-1})w_{p-1} + \beta_p\alpha_p v_p \\ + (\beta_{p+1} + \beta_p\alpha_{p+1})v_{p+1} + ... + (\beta_n + \beta_p\alpha_n)v_m n = 0\end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva $w_1, ..., w_{p-1}, v_p, v_{p+1}, ..., v_n$ sono una base di V, pertanto

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_p\alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} + \beta_p\alpha_{p-1} = 0 \\ \beta_p\alpha_p = 0 \overset{\alpha_p \neq 0}{\Rightarrow} \beta_p = 0 \\ \vdots \\ \beta_n + \beta_p\alpha_n = 0 \end{cases} \quad \text{Risostituendo} \quad \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} = 0 \\ \beta_p = 0 \\ \vdots \\ \beta_n = 0 \end{cases}$$

Teorema

Se V è uno **spazio vettoriale** finitamente generato, due qualsiasi basi hanno lo **stesso numero di elementi**.

Definizione - Dimensione

Il **numero di elementi** di una qualsiasi **base** di uno **spazio vettoriale** V **finitamente generato** si chiama **dimensione** di V e si denota con $\dim V$.

<u>Dimostrazione (Teorema)</u>: Siano B_1, B_2 due **basi** di V, con $|B_1| = h, |B_2| = k$. Se per assurdo $h > k$, il **teorema** dice che esistono $h - k$ vettori di B_1 che aggiunti a B_2 danno una base. Ma B_2 è **già una base**, quindi un **insieme massimale** di vettori linearmente indipendenti.

Corollari

1. Se $\dim V = n$, n **vettori indipendenti** sono una base.
2. Se $\dim V = n$, n generatori sono una base.
3. Se $\dim V = n$, $w_1, ..., w_p \in V$. Se $p > n, w_1, ..., w_p$ sono **linearmente dipendenti**.

Osservazione

La notazione di **dipendenza** e **indipendenza lineare** dipende in modo **essenziale** da $\mathbb{K}$. In effetti è più corretto scrivere che i vettori $v_1, ..., v_n$ sono **linearmente indipendenti su** $\mathbb{K}$ se

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{K})$$

In particolare la **dimensione** di V dipende da $\mathbb{K}$ ed è più corretto scriverle come $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Esempio:

- $V = \mathbb{C},\ \mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una **base** può essere data da $\{1\}$:

$$\underbrace{z}_{\text{vettore}} = \underbrace{z}_{\text{scalare}} \cdot \underbrace{1}_{\text{vettore}}$$

- $V = \mathbb{C},\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Una **base** di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$ è data da $\{1, i\}$:

$$z = \underbrace{a}_{\text{scalare reale}} \cdot \underbrace{1}_{\text{vettore}} + \underbrace{b}_{\text{scalare reale}} \cdot \underbrace{i}_{\text{vettore}}$$

  Si ha: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1,\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Similarmente $\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4,\ \dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{C}) = 8$:

- Su $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} i & 2 \\ 3 & 4i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Su $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} i & 2 \\ 3 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + ib & * \\ * & * \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + ...$$