Lezione 21 - 18/11/2022

Ripasso scorsa lezione

- $W \subset V, W \neq \emptyset$ è un **sottospazio vettoriale** di V se e solo se

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W \quad \begin{array}{l} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \\ \forall w_1, w_2 \in W \end{array}$$

- $v_1, ..., v_k \in V$, $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k | \alpha_i \in \mathbb{K}\}$
- $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$ è un **sottospazio** di V

Ripasso matrici

$A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ è una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice inoltre può essere "affettata" per righe e colonne

$$A = (A^1 \dots A^n) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

Ricordiamo anche la seguente notazione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} A_1 &= (1\ 2\ 3) \quad & A^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ A_2 &= (4\ 5\ 6) \quad & A^2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & & A^3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prodotto righe per colonne

$$\begin{aligned} M_{mk}(\mathbb{K}) \times M_{kn}(\mathbb{K}) &\to M_{mn}(K) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

Dove si ha che

$$(AB)_{ij} = \sum_{h=1}^{k} (A)_{ih}(B)_{hj} \quad \begin{aligned} 1 \leq i \leq m \\ \\ 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

<u>Esempio</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$$

e come si può vedere la prima matrice 2×3 moltiplicata per la seconda matrice 3×2 da vita alla matrice 2×2.

Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Un **sistema lineare di m equazioni in n incognite** è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Risolvere il sistema significa **trovare i vettori** $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ per cui **tutte le equazioni sono verificate**. Se il sistema ammette soluzioni allora si dice **compatibile**.

Esempio:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

non è compatibile.

In generale dovremo affrontare i seguenti problemi:

1. Decidere se un **sistema è compatibile**;
2. Se compatibile, **trovare tutte le soluzioni**;
3. Se compatibile, capire “da quanti parametri” **dipendono le soluzioni**.

Trasformazione di un sistema in matrici

Vediamo ora come trasformare un sistema nel suo equivalente sotto forma di matrici:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

diventa

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{K}^m$$

che a sua volta diventa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

che si scrive: $AX = b$, dove:

- A è la **matrice dei coefficienti**;
- X è il **vettore delle incognite**;
- b è il **vettore dei termini noti**.

Inoltre viene chiamata $(A|b) \in M_{mn+1}(\mathbb{K})$ la **matrice completa del sistema**.

Esempio: si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa del sistema avrà la seguente forma:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Quest’ultima forma ci da moltissime informazioni sul sitema quali: compatibilità, da quanti coefficienti dipende.

Osservazione importante

Il sistema $AX = b$ si può riscrivere nella forma $x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b(*)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

che si riscrive:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Proposizione

Il sistema $AX = b$ è compatibile se e solo se $b \in \mathrm{Span}(A^1, ..., A^n)$.

La relazione $(*)$ dimostra questa proposizione.

Nomenclatura - Sistema omogeneo

Un sistema lineare $AX = b$ con $b = 0_{\mathbb{K}^n}$ si dice **omogeneo**.

<u>Osservazione</u>: un sistema omogeneo è **sempre compatibile** perchè $X = 0_{\mathbb{K}^n}$ è soluzione: $A \cdot 0 = 0$.

Proposizione

L'insieme $\mathrm{Sol}(A|b) = \{X \in \mathbb{K}^n | AX = b\}$ è un **sottospazio vettoriale** di $\mathbb{K}^n$ se e solo se $b = 0$.

<u>Dimostrazione</u>: se $b \neq 0$, $0_{\mathbb{K}^n} \notin \mathrm{Sol}(A|b)$, quindi $\mathrm{Sol}(A|b)$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.
Viceversa, sia $b = 0$. Dimostriamo che $\mathrm{Sol}(A, 0)$ è un sottospazio.
Prendiamo $X_1, X_2 \in \mathrm{Sol}(A, 0),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in \mathrm{Sol}(A, 0)$.
Per **ipotesi**, $AX_1 = 0,\ AX_2 = 0$.

$$A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \underbrace{AX_1}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{AX_2}_{=0} = 0$$

Teorema

Supponiamo che $AX = b$ sia compatibile e sia $X_0 \in \mathrm{Sol}(A|b)$. Allora

$$\mathrm{Sol}(A|b) = X_0 + \mathrm{Sol}(A|0) \quad (\blacksquare)$$

<u>Dimostrazione</u>: dimostro la doppia inclusione in $(\blacksquare)$.

Prendiamo $X \in \mathrm{Sol}(A|b)$, che posso **riscrivere come**

$$X = X_0 + (X - X_0)$$

Basta vedere che $X - X_0 \in \mathrm{Sol}(A|0)$.

Per ipotesi $AX = b$ e $AX_0 = b$, quindi

$$A(X - X_0) = AX - AX_0 = b - b = 0$$

Quindi ho dimostrato l'inclusione $\subseteq$.
Per dimostrare $\supseteq$, scelgo $\overline{X} \in \mathrm{Sol}(A|0)$ e faccio vedre che $X_0 + \overline{X} \in \mathrm{Sol}(A|b)$

$$A(X_0 + \overline{X}) = AX_0 + A\overline{X} = b + 0 = b$$

Matrice a scala o a gradini

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Sottoforma di matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

⚠️ Come si può vedere, gli 1 incontrari su ogni riga leggendole da sinistra verso destra formano dei “gradini”.

Le matrici di questa permettono di risolvere il sistema in modo semplice:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_x = 1 - 18 - 15 = -32 \\ x_2 = x_3 + 4 = 5 + 4 = 9 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Basta sostituire dal basso verso l'alto per risolverlo.

Idea: cambiare il sistema senza cambiare le soluzioni ed arrivare ad una matrice a scala.

Operazioni che non cambiano le soluzioni

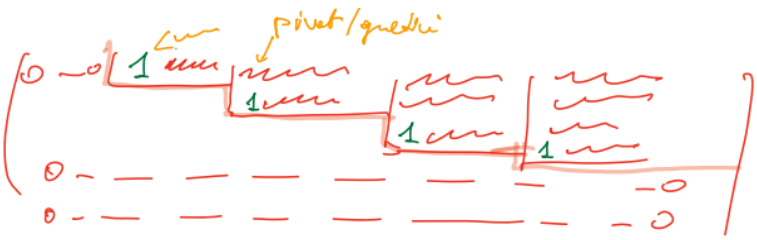
1. **Scambiare** due equazioni;
2. **Moltiplicare** un'equazione per $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
3. **Sommare** a un'equazione un multiplo di un'altra.

A livello di matrice completa dell sistema, 1. 2. e 3. diventano:

1. $A_i \leftrightarrow A_j$
2. $A_i \to \alpha A_i \quad \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
3. $A_i \to A_i + \beta A_j \quad \beta \in \mathbb{K}$

Definizione - Matrice a scala

Una **matrice a scala** è una matrice del tipo:



ℹ️ Gli 1 vengono chiamati **gradini** o **pivot**.

Correzione dell'esercitazione del 15/11