Lezione 33 - 19/12/2022

Ripasso lezione precedente

$T \in \mathrm{End}(V)$, V **spazio vettoriale** e $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

- T è **diagonalizzabile** se esiste una **base** di V formata da **autovettori** per f;
- $v \in V$, $v \neq 0$ è un **autovettore** per f di **autovalore** λ se $f(v) = \lambda v$. Abbiamo anche definito il seguente autospazio:

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}$$

- λ autovalore se $f - \lambda \mathrm{Id}_V$ non è **invertibile**.
  B base di V, $A = {}_B(f)_B$

$$p_A(t) = \det(A - tI_n)$$
$$\lambda \text{ autovalore} \Longleftrightarrow p_A(\lambda) = 0$$

  Gli autovalori λ hanno associati due valori:
  - $m_a(\lambda) = \text{molteplicità di } \lambda \text{ come radice di } p_A(t)$
  - $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$

  Si ha inoltre che $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda) \geq 1$.
- **Autovettori** relativi ad **autovalori** distinti sono **linearmene indipendenti**.

Teorema

$T \in \mathrm{End}(V)$ è **diagonalizzabile** su $\mathbb{K}$ se e solo se

1. $\sum_{\lambda \text{ autovalori di } T} m_a(\lambda) = \dim V$
2. $\forall \lambda$ autovalore di T, $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

Dimostrazione: siano $\lambda_1, ..., \lambda_k$ i **distinti autovalori** di T.
Osserviamo che T è **diagonalizzabile** se e solo se

$$(*) \qquad V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$$

Se T è **diagonalizzabile** allora vale $(*)$ e quindi

$$\dim V = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) \leq \dim V$$

Quindi i $\leq$ sono $=$ e quindi vale la condizione $1.$ e anche la $2.$

> ⚠️ $0 \leq a_i \leq b_i, \ \sum a_i = \sum b_i \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i$

Viceversa supponiamo che valgono $1.$ e $2.$ Sia

$$W = \sum_{i=1}^{k} V_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i} \subset V$$

Si ha che

$$\dim W = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) \overset{2.}{=} \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda) \overset{1.}{=} \dim V$$

Dunque $W \subset V, \dim W = \dim V \Rightarrow V = W$.

Dunque $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ per $(*)$ T è **diagonalizzabile**.