Lezione 27 - 02/12/2022

Definizione - Funzione lineare

Siano U, W **spazi vettoriali**. Una funzione $f : V \to W$ è **lineare** se

$$f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v') \quad \begin{aligned} &\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \\ &\forall v, v' \in V \end{aligned}$$

<u>Osservazioni</u>:

1. Notiamo che f è in particolare un **omomorfismo di gruppi**, quindi necessariamente

   $$f(0_V) = 0_W$$

   Dunque se $f(0_v) \neq 0_W$, f **non è lineare**.
   Però $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ è tale che $f(0) = 0$, ma non è lineare, infatti:

   $$\begin{gathered} f(1+1) = f(2) = 4 \\ f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2 \end{gathered}$$

2. $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ è lineare se e solo se

   $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ p_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

   ove i $p_i(\underline{x})$ sono **polinomi omogenei di primo grado** in $x_1, ..., x_m$ con **termine noto nullo**.

   <u>Esempi</u>:

- Esempio valido:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ x_2 + 4x_3 - x_1 \\ x_3 \\ x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

  L'esempio è valido in quanto sono tutti **polinomi omogenei di grado 1.**

- **Esempio non valido**:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

  Non è valido in quanto x_1x_2 non è un polinomio di primo grado.

Esempi:

1. Sia $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ e $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$L_A(X) = AX$$

   è lineare:

$$L_A(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \alpha L_A(X) + \beta L_A(Y)$$

2. Sia $V = \mathbb{K}[t]$ e $F(p(t)) = p'(t)$ (derivata)

$$(\alpha p(t) + \beta q(t)) = \alpha p'(t) + \beta q'(t)$$

Nomenclatura - Operatore lineare

Un'applicazione lineare $V \to V$ è chiamata **operatore lineare**:

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W | f \text{ è lineare}\}$$
$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$$

> ⚠️ End sta per **endomorfismi**.

Osservazione: $\mathrm{Hom}(V, W)$ è a sua volta un **sottospazio vettoriale**. Infatti ponendo

$$\begin{aligned} &(f+g)(v) = f(v) + g(v) && f, g \in \mathrm{Hom}(V, W) \\ &(\alpha f)(v) = \alpha f(v) && \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

si dota $\mathrm{Hom}(V, W)$ di una **struttura di spazio vettoriale**.
Bisogna verificare che $f + g, \alpha f$ **sono lineari** (esercizio).

Ker e Im per le applicazioni lineari

Come nel caso dei gruppi, ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ si possono associare due **sottospazi vettoriali**:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{v \in V \mid f(v) = 0_w\} \\ \mathrm{Im}(f) &= \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\} \end{aligned}$$

Esercizio: dimostriamo che $\mathrm{Ker}\ f, \mathrm{Im}\ f$ sono **sottospazi**:

- $\mathrm{Ker}\ f$: siano $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\ f,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

  Tesi: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathrm{Ker}\ f$

  $$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{f(v_2)}_{=0} = 0$$

- $\mathrm{Im}\ f$: siano $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\ f,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

  Ipotesi: $w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2)$

  Tesi: $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in \mathrm{Im}\ f$

  $$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

Teorema - Teorema di nullità più rango

Sia V uno **spazio vettoriale di dimensione finita** e $f : V \to W$ un'**applicazione lineare**. Allora

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f$$

Dimostrazione: sia $\{v_1, ..., v_k\}$ una **base** di $\mathrm{Ker}\ f$. Completiamola con vettori $\{v_{k+1}, ..., v_n\}$ a una base di V ($\dim V = n$). Poniamo

$$w_{k+1} = f(v_{k+1}), ..., w_n = f(v_n)$$

Dico che $B = \{w_{k+1}, ..., w_n\}$ è una **base** di $\text{Im } f$. Se questi è vero ho concluso perché

$$\dim \text{Im } f = |B| = n - k = \dim V - \dim \text{Ker } f$$

Ora resta da dimostrare che B è un **insieme di generatori per** $\text{Im } f$ e **un insieme indipendente**.

1. B è un **insieme di generatori per** $\text{Im } f$**:**

   $w \in \text{Im } f$. Allora $v \in V : f(v) = w$. Ma $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, quindi

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + ... + \alpha_n v_n$$
$$\begin{aligned} w &= f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \ldots + \alpha_k \underbrace{f(v_k)}_{=0} + \alpha_{k+1} \underbrace{f(v_{k+1})}_{=w_{k+1}} + \ldots + \alpha_n \underbrace{f(v_n)}_{=w_n} \end{aligned}$$

2. B è un **insieme indipendente**

$$\beta_{k+1} w_{k+1} + ... + \beta_n w_n = 0$$
$$\beta_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \beta_n f(v_n) = 0$$
$$f(\beta_{k+1} v_{k+1} + ... + \beta_n v_n) = 0$$
$$\beta_{k+1} v_{k+1} + ... + \beta_n v_n \in \text{Ker } f$$
$$\beta_{k+1} v_{k+1} + ... + \beta_n v_n = \gamma_1 v_1 + ... + \gamma_k v_k$$
$$\gamma_1 v_1 + ... + \gamma_k v_k - \beta_{k+1} v_{k+1} ... - \beta_n v_n = 0$$

   Ma B è una **base** di V, quindi

$$\gamma_1 = ... = \gamma_n = \beta_{k+1} = ... = \beta_n = 0$$

Iniettività e suriettività delle applicazioni lineari

1. $f : V \to W$ lineare è **iniettiva** $\iff \text{Ker } f = \{0\}$
2. $f : V \to W$ lineare è **suriettiva** $\iff \text{Im } f = W$

Dimostrazione di 1.: se $\text{Ker } f = \{0\}$ e $f(v) = f(w)$ allora $f(v) - f(w) = 0$ e $f(v - w) = 0$ cioè $v - w \in \text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$.
Viceversa se f è **iniettiva** e $v \in \text{Ker } f$, allora

$$f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow v = 0$$

Corollario del teorema di nullità più rango

Sia $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$:

1. Se $\dim V > \dim W$, f non può essere **iniettiva**;
2. Se $\dim V < \dim W$, f non può essere **suriettiva**;
3. Se $\dim V = \dim W$, allora f è **iniettiva** se e solo se è **suriettiva**.

Dimostrazioni: $3.$ segue da $1.$ e da $2.$

1. se f è **iniettiva**, $\dim \mathrm{Ker}\ f = 0$

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim \mathrm{Im}\ f \leq \dim W$$

   contro l'ipotesi.

2. se f è **suriettiva**, $\dim \mathrm{Im}\ f = \dim W$

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\ f + \dim W \geq \dim W$$

   contro l'ipotesi.

Spazi vettoriali quoziente

Sia V uno **spazio vettoriale** e $W \subset V$ un **sottospazio**. W è un **sottogruppo** di V, normale perché V è abeliano, quindi possiamo considerare il **gruppo quoziente** V/W che dotiamo di una struttura di **spazio vettoriale** ponendo

$$\alpha(x + W) = \alpha x + W$$

La definizione è **ben posta**: se $x + W = y + W$, allora $\alpha x + W = \alpha y + W$. Infatti

$$x + W = y + W \Longleftrightarrow x - y \in W$$

$\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y \in W$, cioè $\alpha x + W = \alpha y + W$.

Proposizione

Se V ha **dimensione finita** e W è un **sottospazio** di V, allora

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

Dimostrazione: sia $\{w_1, ..., w_k\}$ una **base** di W. Completiamola con vettori $u_{k+1}, ..., u_n$ a una base di V. Dico che $\{u_{k+1} + W, ..., u_n + W\}$ è una base di V/W. In effetti questo è un **caso particolare del teorema di nullità più rango** "applicato??" a

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\pi} V/W \\ x &\mapsto x + W \end{aligned}$$

Teorema - Teorema di omomorfismo per spazi vettoriali

Sia $f : V \to W$ lineare.
Esiste un unico **isomorfismo** $\overline{f} : V/\mathrm{Ker}\ f \to \mathrm{Im}\ f$ tale che, se $\pi : V \to V/\mathrm{Ker}\ f$

$$f = \overline{f} \circ \pi$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im}\ f \subseteq W \\ V/_{\mathrm{Ker}\ f} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\overline{f}(x + \mathrm{Ker}\ f) = f(x)$

$$\begin{aligned} \overline{f}(\alpha(x + \mathrm{Ker}\ f) + \beta(y + \mathrm{Ker}\ f)) &= \overline{f}(\alpha x + \beta y + \mathrm{Ker}\ f) = \\ &= f(\alpha x + \beta y) = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) = \\ &= \alpha \overline{f}(x + \mathrm{Ker}\ f) + \beta \overline{f}(y + \mathrm{Ker}\ f) \end{aligned}$$