Lezione 04 - 07/10/2022

Relazione d’ordine (parziale)
- Grafo di Hasse

Costruzione di Z a partire da N
- Proposizione
- Lemma
- Proposizione

Costruzione di Q a partire da Z

Relazione d’ordine (parziale)

Definizione: una relazione d’ordine $\leq$ su X è un sottoinsieme **non vuoto** di $X \times X$ che verifica le seguenti proprietà:

- **Riflessiva**: $x \leq x, \ \forall x \in X$
- **Antiriflessiva**: $x \leq y, \ y \leq x \Rightarrow x = y$
- **Transitiva**: $x \leq y, \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Esempi:

1. Usuale $\leq$ su $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
   Nota: In questo caso, dati due elementi x, y risulta

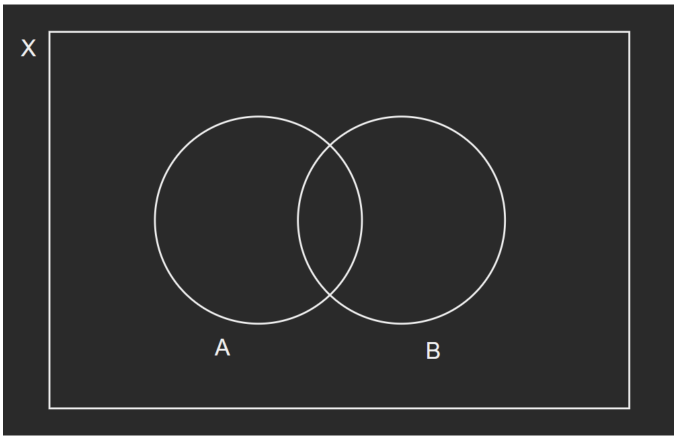
$$x \leq y \text{ oppure } y \leq x$$

   Una relazione d’ordine con questa proprietà si dice **totale**.

2. Sia X insieme, $\mathcal{P}(X)$ l’insieme delle parti di X e $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$A \leq B \text{ se } A \subseteq B$$

   Guardando il seguente diagramam di Venn



Si ha che $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$, quindi **non è una relazione d'ordine**.

3. Sia $X = \mathbb{N}$ e la relazione $\leq = |$ "divide"

$$a \mid b \Leftrightarrow b \text{ è un multiplo di } a, \text{cioè } \exists c \in \mathbb{N} \text{ t.c. } b = ac$$

Esempi: $2 \nmid 5, 2 \mid 6$

- **Riflessiva**:

$$a \mid a, \;\; a = 1a \checkmark$$

- **Antisimmetrica**:

$$\begin{aligned} a \mid b, b \mid a \\ b = ca \\ a = db \\ (b \neq 0) \; 1 = cd \Rightarrow c = d = 1, \;\; \text{quindi } a = b \checkmark \end{aligned}$$

> ⚠️ In $\mathbb{Z}$, $cd = 1 \not\Rightarrow c = 1 = d$, in quanto potrebbe anche essere che $c = d = -1$, quindi la divisibilità non è una **relazione d'ordine** su $\mathbb{Z}$.

- **Transitiva**: $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$

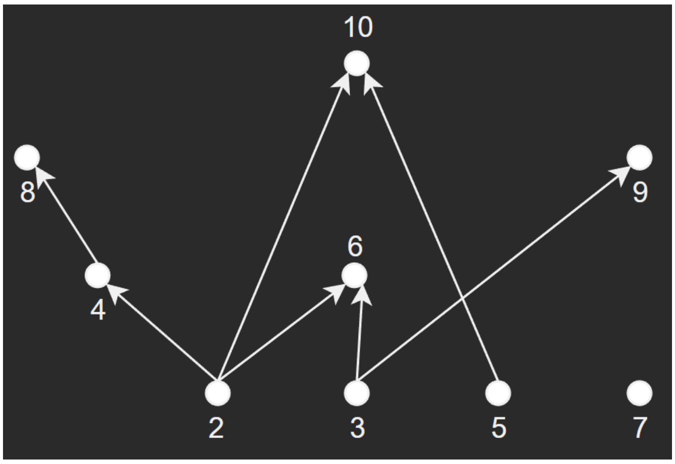
$$\begin{aligned} a \mid b \Rightarrow b = ka \\ b \mid c \Rightarrow c = hb \\ c = hb = hka = (hk)a \Rightarrow a \mid c \checkmark \end{aligned}$$

Grafo di Hasse

Un insieme X dotato di una **relazione d'ordine parziale** è usualmente chiamato **POSET** (Partially - Ordered - Set). Spesso quando X è un insieme finito, un POSET viene rappresentato tramite il suo **grafo di Hasse**:

- **Vertici**: elementi di X
- **Lati orientati**: x → y se $x \leq y$ e $x \leq t \leq y \Rightarrow x = t \text{ oppure } y = t$, ovvero **non ci sono altri nodi di mezzo**.

<u>Esempio</u>: $X = \{2, 3, ..., 10\}$, con la relazione $\leq = |$



Costruzione di Z a partire da N

Siano $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e ρ è la seguente relazione

$$(n, m)\rho(n', m') \Longleftrightarrow n + m' = m + n'$$

Verifichiamo che si una relazione d'equivalenza:

- **Riflessiva**: $(n, m)\rho(n, m)$ vera in quanto $n + m = m + n$✓
- **Simmetrica**:

$$(n, m)\rho(n', m') \text{ ipotesi } n + m' = m + n'$$
$$(n', m')\rho(n, m) \text{ tesi } n' + m = m' + n \checkmark$$

- **Transitiva**:

$$
\begin{align}
&(n,m)\rho(n'm') \text{ e} \tag{1}\\
&(n',m')\rho(n",m") \tag{2}\\
&\text{tesi } (n,m)\rho(n",m") \tag{3}
\end{align}
$$

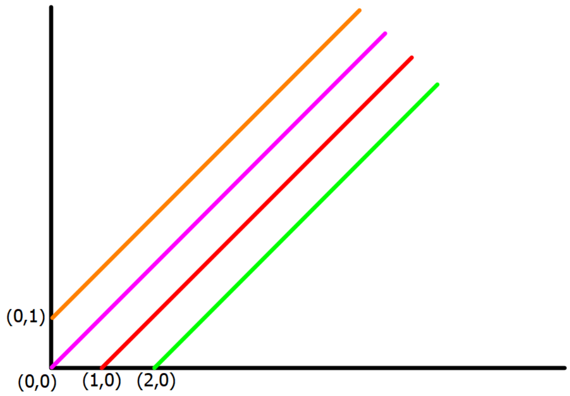
Da (1), (2) e (3) seguono le seguenti cose:

1. $n + m' = m + n'$
2. $n' + m" = m' + n"$
3. $n + m" = m + n"$

Dimostriamo che $n + m" = m + n"$

$$
\begin{aligned}
n + m" &= \underbrace{n + m'}_{1.} - m' + m" = \\
&= m + n' - m' + m" = \\
&= m - m' + \underbrace{n' + m"}_{2.} = \\
&= m - m' + m' + n" = \\
&= m + n"
\end{aligned}
$$

<u>Definizione</u>: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{/\rho}$



<u>Esempi</u>:

$$
\begin{aligned}
[(1,0)] &= \{(n,m) : (n,m) \sim (1,0)\} \\
&= \{(n,m) : m + 1 = n\}
\end{aligned}
$$

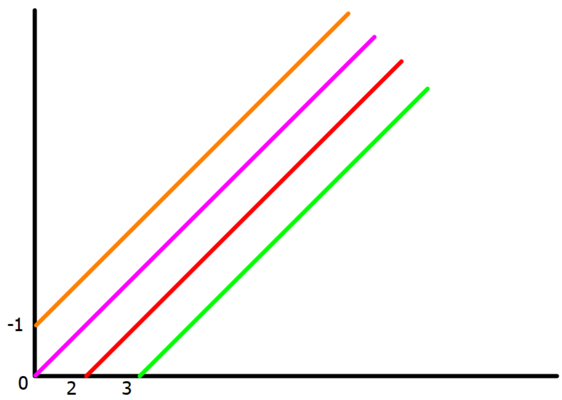
$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(n,m) : (n,m) \sim (0,0)\} \\
&= \{(n,m) : (n,m)\}
\end{aligned}
$$

Poniamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_+ &= \{[(n,0)] : n \neq 0\} \\
\mathbb{Z}_- &= \{[(0,n)] : n \neq 0\} \\
0 &= [(0,0)]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \\
n &= [(n,0)] \\
-n &= [(0,n)] \\
0 &= [(0,0)]
\end{aligned}
$$



Definiamo le operazioni su $\mathbb{Z}$:

- Operazione $+$:

$$[(n,m)] + [(n',m')] = [(n+n', m+m')]$$

<u>Osservazione</u>:

$$
\begin{aligned}
2+3 &= [(2,0)] + [(3,0)] = [(5,0)] = 5 \\
2+(-2) &= [(2,0)] + [(0,2)] = [(2,2)] = [(0,0)] = 0 \\
2+(-3) &= [(2,0)] + [(0,3)] = [(2,3)] = [(0,1)] = -1
\end{aligned}
$$

- Operazione $\cdot$:

$$[(n,m)][(n',m')] = [(nn'+mm', n'm+m'n)]$$

<u>Osservazione</u>:

$$n \cdot m = [(n,0][(m,0)] = [(nm,0)] = nm,\ n,m > 0$$
$$n \cdot 0 = [(n,0)][(n,n)] = [(n^2,n^2)] = [(0,0)] = 0$$

Verifica che la definizione dell'addizione è ben posta, cioè che non dipende dal rappresentante scelto:

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+n', n+m')]$$
$$[(m,n)] = [(a,b)],\ [(m',n')] = [(a',b')]$$
$$\Rightarrow [(m+m', n+n')] = [(a+a', b+b')]$$

Ipotesi:

1. $m+b = n+a$
2. $m'+b' = n'+a'$

Tesi:

3. $m+m\text{'} = b+b',\ n+n' = a+a'$

Sommando membro a membro 1. e 2. si ottiene 3.

Proposizione

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un **annello commutativo con unità**.

Lemma

Sia A un anello commutativo con unità:

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,\ \forall a$
2. $(-a)b = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$

<u>Dimostrazione</u>:

1. $0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$$
\begin{aligned}
&(0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0)=(a\cdot 0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0)\\
\text{(assoc.)}\ &0+(a\cdot 0+(-a\cdot 0))=a\cdot 0+(a\cdot 0+(-a\cdot 0))\\
&0+0=a\cdot 0+0\\
&0=a\cdot 0
\end{aligned}
$$

2. $0 \overset{1.}{=} 0\cdot b=(a+b(-a)b=ab+(-a)b$

   Che è quello che si vuole: $(-a)b$ è l'elemento che devo sommare ad ab per ottenere 0. $-ab=(a)b$
3. $(-a)(-b) \overset{2.}{=} -(a(-b)) \overset{2.}{=} -(-ab)=ab$

Proposizione

Se $a,b\in\mathbb{Z}, ab=0$ se e solo se $b=0$ oppure $a=0$

Dimostrazione: Si usa il fatto che gli interi hanno un segno

$$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_+\cup\mathbb{Z}_-\cup\{0\}$$

Se $a,b>0$ per la definizione di prodotto $ab>0$

Se $a,b<0$ per il lemma:

$$ab=(\overset{>0}{-a})(\overset{>0}{-b})>0$$

Se $a>0,b<0$ allora $-b>0$ e per il lemma

$$0<a(-b)=-ab\Rightarrow ab>0$$

Costruzione di Q a partire da Z

Siano $X=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ e ρ una relazione di equivalenza su X definita nel seguente modo:

$$(m,n)\rho(m',n')\Leftrightarrow mn'=nm'$$

Idea:

$$\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}$$

Bisogna dimostrare che:

1. ρ è una relazione di equivalenza
2. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}_{/\rho}$
3. $\mathbb{Q}$ è un campo, quindi vanno definite le operazioni

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(mn' + nm', nn')]$$

questo perché

$$\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} = \frac{nm' + n'm}{mm'}$$

Poi

$$\begin{aligned} [(m,n)][(m',n')] &= [(mm',nn')] \\ -[(m,n)] &= [(-n,m)] \\ [(m,n)]^{-1} &= [(n,m)] \\ 0 &= [(0,1)] \\ 1 &= [(1,1)] \end{aligned}$$