

Lezione 29 - 12/12/2022

Principio di estensione per linearità

Proposizione

Osservazioni su Hom

Proposizione

Lemma

Applicazioni lineari e matrici

Definizione

Cambio di base

Formula del cambiamento di base

Definizione - Matrici quadrate simili

Teorema - Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso operatore lineare

Principio di estensione per linearità

Proposizione

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una **base** di V e siano w_1, \dots, w_n arbitrari **vettori** di W . Allora esiste un'unica **applicazione lineare** $F : V \rightarrow W$ tale che

$$F(v_i) = w_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

Dimostrazione: sia $v \in V$, con

$$v = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

poniamo

$$F(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

È chiaro che F verifica la relazione (1). Dobbiamo vedere che F è **lineare**, ovvero che

$$F(\alpha v + \beta v') = \alpha F(v) + \beta F(v')$$

Siano

$$v = \sum_i a_i v_i \quad v' = \sum_i a'_i v_i$$

Si ha che

$$\alpha v + \beta v' = \alpha \sum_i a_i v_i + \beta \sum_i a'_i v_i = \sum_i (\alpha a_i + \beta a'_i) v_i$$

quindi

$$\begin{aligned} F(\alpha v + \beta v') &= \sum_i (\alpha a_i + \beta a'_i) w_i \\ \alpha F(v) + \beta F(v') &= \alpha \sum_i a_i w_i + \beta \sum_i a'_i w_i \end{aligned}$$

Come si può vedere $F(\alpha v + \beta v') = \alpha F(v) + \beta F(v')$.

Dimostriamo infine che se $G : V \rightarrow W$ è lineare e $G(v_i) \stackrel{(1)}{=} w_i, 1 \leq i \leq n$, allora $F = G$.

Sia $v = \sum_i a_i v_i$

$$F(v) = \sum_i a_i w_i \stackrel{(1)}{=} \sum_i a_i G(v_i) \stackrel{(*)}{=} G\left(\sum_i a_i v_i\right) = G(v)$$

In $(*)$ è stato usato il fatto che G è **lineare**.

Osservazioni su Hom

Ricordiamo la definizione di Hom:

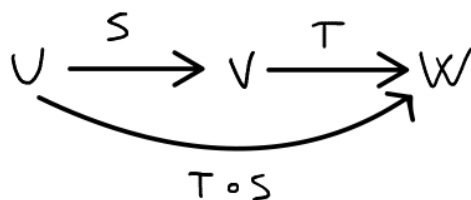
$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ è lineare}\}$$

Osservazioni:

1. $\text{Hom}(V, W)$ è uno **spazio vettoriale**

$$\begin{aligned} (S + T)(v) &= S(v) + T(v) \\ \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha S)(v) &= \alpha S(v) \end{aligned}$$

2. $S \in \text{Hom}(U, V)$, $T \in \text{Hom}(V, W)$ allora $T \circ S \in \text{Hom}(U, W)$



$$\begin{aligned} (T \circ S)(\alpha u_1 + \beta u_2) &= T(S(\alpha u_1 + \beta u_2)) = T(\alpha S(u_1) + \beta S(u_2)) = \\ &= \alpha T(S(u_1)) + \beta T(S(u_2)) = \\ &= \alpha (T \circ S)(u_1) + \beta (T \circ S)(u_2) \end{aligned}$$

3. Esercizio: sia $T : V \rightarrow W$ **lineare biunivoca**. Allora $T^{-1} : W \rightarrow V$ è lineare.

4. Ricordiamo che un **isomorfismo** $V \rightarrow W$ è un'**applicazione lineare** biunivoca.

Proposizione

Siano U, V **spazi vettoriali finitamente generati**. Allora $U \cong V$ se e solo se $\dim U = \dim V$.

Lemma

1. Se $f : U \rightarrow V$ è **lineare e iniettiva** e u_1, \dots, u_k sono **linearmente indipendenti**, allora $f(u_1), \dots, f(u_k)$ sono **linearmente indipendenti**.
2. Se $f : U \rightarrow V$ è **lineare e suriettiva** e u_1, \dots, u_k sono **generatori** per U , allora $f(u_1), \dots, f(u_k)$ sono **generatori** per V .
3. Se $f : U \rightarrow V$ è **lineare biunivoca** e $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una **base** di U , allora $\{f(u_1), \dots, f(u_k)\}$ è una **base** di V (in altri termini, un **isomorfismo** manda basi in basi).

Dimostrazioni:

1. Devo dimostrare che

$$\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k) = 0 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$$

ma $\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k) = f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = 0$ è equivalente a dire

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \in \text{Ker}(f) = \{0\}$$

che è vero perché f è iniettiva, quindi

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \dots = \alpha_k = 0\end{aligned}$$

L'implicazione è data dal fatto che gli u_i sono **linearmente indipendenti**.

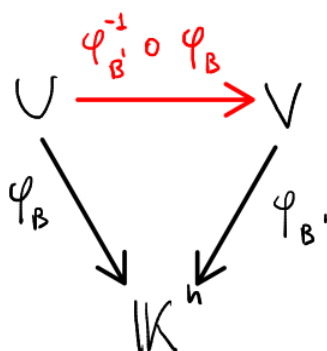
2. Sia $v \in V$, poiché f è **suriettiva**, esiste $u \in U$ tale che $v = f(u)$. Ma $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ poiché u_1, \dots, u_k sono **generatori** per U , quindi

$$v = f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k)$$

3. Segue da 1) e 2).

Dimostrazione delle proposizioni: dal lemma, se $U \cong V$ e $\phi : U \rightarrow V$ è un **isomorfismo**, ϕ manda **basi in basi**, quindi $\dim U = \dim V$.

Viceversa, sia $\dim U = \dim V = n$. Fissiamo **basi** $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ su U e $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ su V . Abbiamo isomorfismi



Applicazioni lineari e matrici

Abbiamo appena visto che se V è **finitamente generato** e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , ho un isomorfismo $\phi_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n$

$$\phi_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (v)_B \quad \text{se} \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

Vedremo adesso che fissando **due basi**, una $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ in V e una $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ in W , un'**applicazione lineare** $f : V \rightarrow W$ si può rappresentare

tramite una matrice $A \in M_{mn}$, dipendente da B, C . In altri termini, costruiamo un **isomorfismo**

$$\text{Hom}(V, W) \cong M_{mn}(\mathbb{K})$$

Come sopra, sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V , $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W , $f : V \rightarrow W$ lineare

Definizione

La matrice di f rispetto a B presa come **base di partenza** in V e a C presa come **base di arrivo** in W è la matrice le cui colonne sono le **coordinate** rispetto a C delle immagini tramite f dei **vettori** di B .

Notazione: ${}_C(f)_B$

$${}_C(f)_B = (a_{ij}) \quad f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j \quad 1 \leq i \leq n$$

Esempio: $V = \mathbb{R}_2[t]$, $W = \mathbb{R}_3[t]$, $f : V \rightarrow W$

$$f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$$

Trovare ${}_C(f)_B$ con $B = \{1, t, t^2\}$, $C = \{1, t, t^2, t^3\}$

$$f(1) = 0 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$f(t) = t^2 = t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$f(t^2) = t^2 \cdot 2(t+1) = 2t^3 + 2t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 2 \cdot t^2 + 2 \cdot t^3$$

Quindi

$${}_C(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con f definita nel modo seguente

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Siano le basi $B = C = \{e_1, e_2, e_3\}$. Dobbiamo calcolare

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora prendere i coefficienti, ovvero, prendendo come esempio il primo caso

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\underline{-1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Avendo preso la base standard, i coefficienti sono proprio le colonne del risultato della funzione.

Quindi, in conclusione

$${}_B(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

N.B.: In questo caso $f = L_A$, infatti

$$L_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = f(X)$$

Proviamo ora cambiando base:

$$B = C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e la f definita sempre nello stesso modo.

$$\begin{aligned}
f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Attenzione! Dobbiamo trovare quegli α, β, γ che risolvono il sistema, ovvero, nell'esempio del primo caso, dobbiamo trovare:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

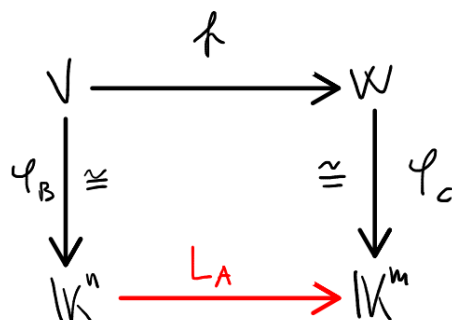
Nel nostro caso sono stati trovati "a mano", altrimenti andrebbero messi a sistema e risolverlo.

Quindi

$${}_B(f)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

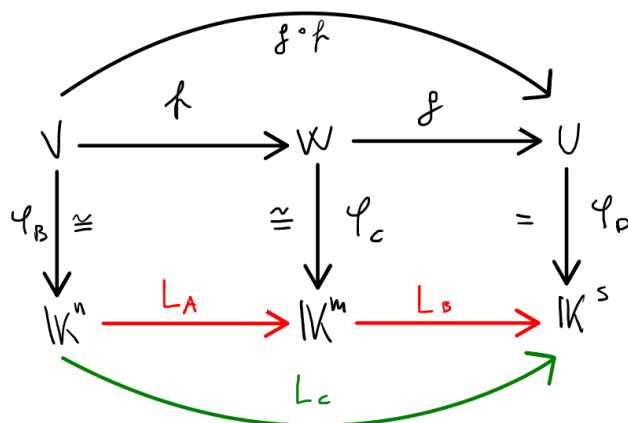
Cambio di base

Cosa significa concettualmente trovare ${}_C(f)_B$?



Chiamiamo $A = {}_C(f)_B$.

Supponiamo ora di avere $g \circ f$:



Chiamiamo $B = {}_D(g)_C$. Si ha proprio che $L_C = L_B \circ L_A$.

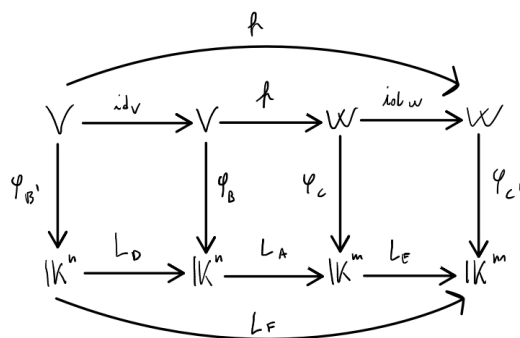
Questo significa che

$$\begin{aligned}
 L_C(X) &= L_B(L_A(X)) & \forall X \\
 CX &= BAX & \forall X \\
 C &= BA
 \end{aligned}$$

Questo spiega il **prodotto righe per colonne** che è la naturale reincarnazione della composizione di funzioni.

Domanda: sia data $f : V \rightarrow W$ lineare e siano B, B' basi di V e C, C' basi di W . Che relazione c'è tra ${}_C(f)_B$ e ${}_{C'}(f)_{B'}$?

Si capisce bene tramite il **diagramma commutativo**:



Abbiamo:

- $A = {}_C(f)_B$
- $D = {}_B(\text{Id}_V)_{B'}$
- $E = {}_C(\text{Id}_W)_{C'}$
- $F = {}_{C'}(f)_{B'}$

Dal diagramma risulta

$$\begin{aligned} L_F &= L_E \circ L_A \circ L_D \\ &= L_{EAD} \\ F &= EAD \end{aligned}$$

Che da vita a

Formula del cambiamento di base

$${}_{C'}(f)_{B'} = {}_{C'}(\text{Id}_W)_C {}_C(f)_B {}_B(\text{Id}_V)_{B'}$$

Caso speciale: $f : V \rightarrow V$, $B = C$, $B' = C'$. La formula scritta sopra diventa:

$${}_{B'}(f)_{B'} = {}_{B'}(\text{Id}_V)_B {}_B(f)_B {}_B(\text{Id}_V)_{B'}$$

Poniamo $N = {}_{B'}(\text{Id}_V)_B$. Dimostriamo che N è **invertibile** e $N^{-1} = {}_B(\text{Id}_V)_{B'}$ per cui

$${}_{B'}(f)_{B'} = N {}_B(f)_B N^{-1}$$

Definizione - Matrici quadrate simili

Due **matrici quadrate** A, B si dicono **simili** se esiste una **matrice invertibile** N tale che

$$A = NBN^{-1}$$

Questo dimostra il seguente teorema:

Teorema - Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso operatore lineare

Due **matrici** $n \times n$ sono **simili** se e solo se rappresentano lo **stesso operatore lineare** su uno **spazio vettoriale** di **dimensione** n .

Esercizio:

$$\begin{aligned} {}_B(f)_B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & B &= \{e_1, e_2, e_3\} \\ {}_{B'}(f)_{B'} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} & B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Poniamo ora $N = {}_{B'}(\text{Id}_V)_B$, abbiamo quindi

$${}_{B'}(f)_{B'} = N {}_B(f)_B N^{-1}$$

Calcoliamo N^{-1} e N :

$$\begin{aligned} N^{-1} &= {}_B(\text{Id}_V)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine abbiamo:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} N \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} {}_B(f)_B \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} N^{-1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \\ = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$