Lezione 22 - 21/11/2022

Formula per contare il numero di cicli

In generale $\lambda = (1^{a_1}\ 2^{a_2}\ 3^{a_3}\ ...)$ si ha

$$|C_\lambda| = \frac{n!}{\prod j^{a_j}(a_j!)}$$

Esempio: si vogliono contare il numero di permutazioni formate dalla partizione $2^1 3^3 4^2$, avremo

$$44332$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ |\ 5\ 6\ 7\ 8\ |\ 9\ 10\ 11\ |\ 12\ 13\ 14\ |\ 15\ 16\ 17\ |\ 18\ 19$$

abbiamo diviso la partizione in gruppi di numeri distinti che andiamo a contare:

- Abbiamo che $n = 4^2 3^3 2^1 = 19$
- Quindi

$$|C_\lambda| = \frac{19!}{4^2 \cdot 3^3 \cdot 2^1 \cdot 3! \cdot 2!}$$

> ⚠️ Il $2!$ e il $3!$ al denominatore escono dal fatto che in questo caso i due gruppi da 4 elementi e i tre gruppi da 3 elementi **commutano**.

Risoluzione di sistemi lineari

Sistema di equazioni in n incognite $\rightsquigarrow AX = b$.

- $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$
- $X \in \mathbb{R}^n = M_{n1}(\mathbb{K})$
- $b \in \mathbb{K}^m = M_{m1}(\mathbb{K})$

Abbiamo osservato che **tutte le informazioni** sono contenute nella **matrice completa** del sistema $(A|b) \in M_{mn+1}(\mathbb{K})$. Prendiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = -2 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad AX = b$$

Creiamo ora la **matrice** A e i **vettori** X e b:

- Matrice A dei **coefficienti**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vettore X delle **incognite**:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Vettore b **dei termini noti**:

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La **matrice completa del sitema** è:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora **modificare** la matrice completa del sistema in modo tale da **non cambiare le soluzioni del sistema**. Ciò può essere ottenuto tramite le **operazioni elementari sulle righe**. Ricordiamo quali sono:

1. $A_i \leftrightarrow A_j$
2. $A_i \to \alpha A_i \quad \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
3. $A_i \to A_i + \beta A_j \quad \beta \in \mathbb{K}$

Definizione - Matrice a gradini o a scala

Una matrice A è in **forma a gradini** se è del tipo:

Più formalmente, A **è a gradini** se

1. $A_i = 0 \Rightarrow A_j = 0 \; \forall j \geq i$
2. $A_i \neq 0$, il primo elemento non nullo di A_i è 1
   (se $j = \min\{k | a_{ik} \neq 0\}, a_{ij} = 1$)
3. Il pivot della riga i appare nella colonna j, il pivot della riga $j+1$, se esiste, appare nella colonna $h > j$.

> ⚠️ Se nella forma a gradini, c'è un 1 nell'ultima riga e colonna, allora il sistema non è compatibile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Algoritmo di Gauss per la digressione a gradini

1. Si individua il **primo elemento non nullo** scorrendo la matrice per colonne dall’**alto verso il basso** (a serpente). Se il primo elemento trovato appartiene alla riga i, scambio la riga i con la prima;
2. Rendiamo 1 tale elemento con operazioni di tipo 2;
3. Se il pivot appare nella colonna j, rendiamo 0 tutti gli elementi della colonna j, dalla riga 2 alla riga n con operazioni di tipo 3;
4. Iteriamo operando sulle righe di indice > 1 e sullo colonne di indice $> j$.

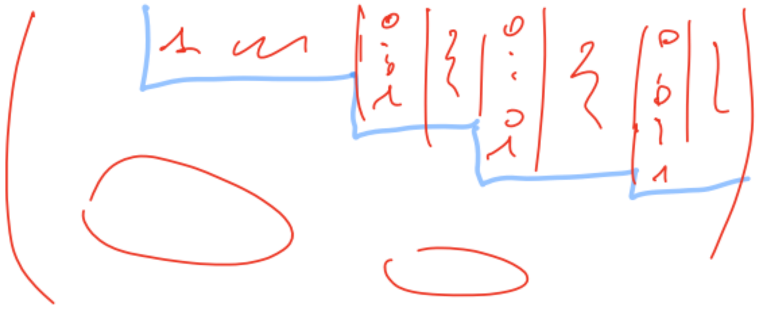
<u>Esempio</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ \underline{1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \to A_2 - A_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \to -A_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 \to A_3 - A_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 \to \frac{A_3}{3}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ora la matrice è in forma a gradini.

Definizione - Matrice a scala ridotta

Una matrice è a **scala ridotta** se è del tipo



ovvero nelle colonne dei pivot appaiono tutti 0 al di sopra del pivot.

Algoritmo per passare dalla forma a scala alla forma a scala ridotta

1. Partendo dal pivot che giace nella colonna più a destra, rendiamo 0 tutte le entrate di tale colonna sopra al pivot con operazioni di tipo 3;
2. Iteriamo procedendo da destra verso sinistra.

<u>Esempio</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2 \to A_2 + 2A_3 \\ A_1 \to A_1 + 2A_3}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_1 \to A_1 - A_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Che risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

che in forma di matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che risolve il sistema originale nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 & t - t - 2(-2) = 4 \\ x_1 - x_3 = 0 & t - t = 0 \\ x_2 + x_4 = -2 & 0 + (-2) = -2 \end{cases}$$

<u>Esercizio completo</u>: trasformare la seguente matrice in forma a gradini e risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Trasformazione in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_1}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{A_3 \to A_3 - A_2}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{A_3 \to \frac{A_3}{2}}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- Trasfomrazione in forma a scala ridotta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{A_1 \to A_1 + A_3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{A_1 \to A_1 - 2A_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Se si pensa questa matrice come **matrice completa del sistema**, il sistema corrispondente è:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

le soluzioni sono dunque:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definzione - Rango

Il **rango** di una matrice è il **numero di pivot** di una sua forma a scala.

Notazione

$$\mathrm{rk}(A)$$

Teorema - Teorema di Rouchè-Capelli

Il sistema lineare $AX = b$, con $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ e $X \in \mathbb{K}^n, b \in \mathbb{K}^m$ è **compatibile** se e solo se

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$$

In tal caso esiste una **corrispondenza biunivoca** tra

$$\mathrm{Sol}(A|b) \to \mathbb{K}^{n-\mathrm{rk(A)}}$$

Tale corrispondenza si esplicita nel sistema **poratando al secondo memebro le incognite che non corrispondono a gradini e dando ad esse valori arbitrari e indipendenti**.