MATRICI

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$(AB)C = A(BC)$

$(B+C)A = BA + CA$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AA'+BC') & (AB'+BD') \\ (CA'+DC') & (CB'+CD') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot I = I \cdot A = A$$

SIMMETRICA: $A = A^T$

$\downarrow$

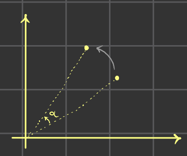
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A = a_{(n,m)}$

$A^T = a_{(m,n)}$

MATRICE DI ROTAZIONE:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



ho il punto (x,y) per farlo ruotare di α gradi:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

(x', y') è il punto ruotato

DETERMINANTE:

- $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = AD - BC$

1. SCELGO UNA RIGA O COLONNA
2. PER OGNI ELEMENTO DI QUELLA COLONNA FACCIO: $\cdot(\cdot\cdot - \cdot\cdot)$ mettendo segni alternati

- $\det \begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$A(B'C'' - C'B'') - A'(BC'' - CB'') + A''(BC' - CB')$

segno: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

(MINORE COMPLEMENTARE: seleziono un a_{ij} in A e cancello tutta la riga i e la colonna j (es $3{\times}3 \rightarrow 2{\times}2$))

TEOREMI

- il determinante si può fare solo per matrici quadrate $n \times n$
- riga di $\emptyset$: $\det = \emptyset$
- se scambio una riga/colonna ad un altra della stessa matrice il det cambia di segno
- se A ha 2 righe/colonne uguali (o multiple) $\det = \emptyset$
- $\det\begin{pmatrix} \lambda\cdot & \lambda\cdot & \lambda\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det\begin{pmatrix} \lambda\cdot & \lambda\cdot & \lambda\cdot \\ \lambda\cdot & \lambda\cdot & \lambda\cdot \\ \lambda\cdot & \lambda\cdot & \lambda\cdot \end{pmatrix} = \lambda^3 \det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
- se A è TRIANGOLARE : $\det\begin{pmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \emptyset & \bullet & \cdot \\ \emptyset & \emptyset & \bullet \end{pmatrix} = \bullet \times \bullet \times \bullet$ $\qquad$ det = moltiplico diagonale

BINET:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

es $\det(A \cdot B)$?
- trovo $\det A$, $\det B$
- $\det A \cdot \det B$

SARRUS:

$$\begin{bmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{bmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \quad 3 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} A & A' & A'' & A & A' \\ B & B' & B'' & B & B' \\ C & C' & C'' & C & C' \end{bmatrix} = 1 + 2 + 3 - 1 - 2 - 3$$

INVERSA:

$\exists A^{-1}$ se $\det A \neq \emptyset$, $A \cdot A^{-1} = I$

- $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{..} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{..} \\ +A_{..} & -A_{..} & +A_{..} \end{pmatrix}^T$$

A_{11} = determinante di A ma cancellando 1° colonna e 1° riga

(MATRICE DEI DETERMINANTI DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI)

↳ senza moltiplicare per a_{11}

METODO POLITO

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \longrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = 0 \\ x + 5z = 0 \\ y + 5t = 1 \end{cases}$

- $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ (BINET)

  $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$ $\quad (A \cdot A^{-1} = I)$

es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $\det A = \ldots\ldots = -2$ $\quad (\neq 0)$
2) M con i determinanti
3) M^T
4) $\frac{M^T}{\det A}$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 9 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{-2} & \frac{-4}{-2} & \frac{9}{-2} \\ \frac{0}{-2} & \frac{2}{-2} & \frac{-3}{-2} \\ \frac{0}{-2} & \frac{0}{-2} & \frac{-1}{-2} \end{pmatrix}$$

es)

inversa della matrice di rotazione:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\cos^2 a + \sin^2 a}\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$\exists\, AB^{-1}$ se $\begin{matrix}\det A \neq 0 \\ \det B \neq 0\end{matrix}$? sí, Binet: $\det(AB) = \underbrace{\det A \cdot \det B}_{\neq 0}$

- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

INVERSA 2×2:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}}$$

PoliTo:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \qquad (AB + BA \neq 2AB)$$

RANGO:

$rg(A)$ = quante righe non nulle ha dopo averla ridotta (quante colonne/righe sono indipendenti)

$$0 \leq rg(A) \leq \min(\text{righe}, \text{colonne})$$

MINORE ORDINE K: determinante della sottomatrice grande (k,k)

TEOREMA (DI KRONECKER O DEGLI ORLATI)

AFFINCHE' UNA MATRICE $m \times m$ ABBIA RANGO K E' NECESSARIO E SUFFICIENTE CHE VALGANO LE SEGUENTI 2 PROPRIETA':

- ESISTE UN MINORE DI ORDINE K NON NULLO
- SONO NULLI TUTTI I MINORI DI ORDINE K+1 OTTENUTI DAL PRECEDENTE ORLANDO LA CORRISPONDENTE SOTTOMATRICE CON UNA QUALUNQUE ALTRA RIGA O COLONNA

ESERCIZIO 1: DETERMINARE IL RANGO DELLA SEGUENTE MATRICE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- IL RANGO E' ALMENO 1 (CI SONO TERMINI $\neq 0$) E ≤ 4 (MATRICE 4X4)
- SI NOTA CHE $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ → IL RANGO E' ALMENO 2
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ → SE ANCHE GLI ALTRI MINORI DI ORINE 3 OTTENUTI DA $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ AGGIUNGENDO UNA QUALUNQUE ALTRA RIGA O COLONNA SONO NULLI IL RANGO E' 2
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ → IL TEOREMA DEGLI ORLATI MI ASSICURA CHE IL RANGO E' 2

$\det = 0 \qquad rg < n$