

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica



Tesi di Laurea Triennale

**Estensione delle leggi di Coulomb e  
Biot-Savart al caso non statico:  
equazioni di Jefimenko**

**Relatore:**  
Prof. Lorenzo Mattera

**Candidato:**  
Lorenzo Turco

ANNO ACCADEMICO 2017-2018

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Soluzioni non statiche <i>con</i> l'uso dei potenziali</b>	<b>4</b>
2.1	Equazioni di Maxwell per i potenziali . . . . .	4
2.2	Derivazione dei potenziali ritardati . . . . .	6
2.3	Derivazione dei campi dai potenziali ritardati . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Soluzioni non statiche <i>senza</i> l'uso dei potenziali</b>	<b>10</b>
3.1	Soluzioni tramite la funzione di Green ritardata . . . . .	10
3.1.1	Calcolo mediante integrazione diretta della funzione di Green ritardata . . . . .	11
3.1.2	Calcolo mediante trasformata di Fourier delle sorgenti . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Carica puntiforme in movimento</b>	<b>15</b>
4.1	Campi di Liénard-Wiechert . . . . .	15
4.2	Radiazione da una carica puntiforme accelerata . . . . .	19
4.2.1	Potenza dissipata a basse velocità . . . . .	20
4.2.2	Potenza dissipata ad alte velocità . . . . .	20
4.2.3	Distribuzione angolare per velocità e accelerazione collineari . .	21
4.3	Campi generati da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme .	22
<b>5</b>	<b>Appendici</b>	<b>25</b>
5.1	Introduzione alle funzioni di Green . . . . .	25
5.2	Funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}^2$ . . . . .	26
5.3	Funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}^2 + k^2$ . . . . .	27
5.4	Funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_{\mathbf{x},t} = \square_{\mathbf{x},t}$ . . . . .	28
5.5	Commenti sulla scelta di gauge . . . . .	29
	<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Le leggi empiriche di Coulomb e di Biot-Savart forniscono rispettivamente il campo elettrico e quello magnetico generati da sorgenti statiche note, cioè  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0$ , dove  $\rho$  è la densità di carica elettrica e  $\mathbf{J}$  è la densità di corrente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \wedge \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

in cui  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$  e  $V$  è la regione di spazio in cui è localizzata la sorgente ( $V$  sarà in generale diverso a seconda della sorgente che si considera). Lo scopo di queste pagine è quello di estendere queste leggi al caso non statico ricavando quelle note come **equazioni di Jefimenko**.

A tal fine si farà ricorso a due diversi metodi, anche se le equazioni differenziali che ne deriveranno saranno caratterizzate dallo stesso approccio risolutivo. Il primo metodo, più didattico del secondo, si basa sull'utilizzo dei potenziali, proponendo cioè di estendere le leggi di Coulomb e di Biot-Savart scritte per i potenziali al caso non statico e provvedendo solo successivamente al calcolo dei veri e propri campi. Con il secondo, invece, si risolveranno direttamente le equazioni di Maxwell per i campi senza passare per i potenziali. Quest'ultimo sarà suddiviso in due ulteriori approcci, ma esclusivamente per la scrittura finale dei campi; infatti le equazioni dalle quali essi derivano e la loro risoluzione saranno comuni ad entrambi. Le appendici, utili per la risoluzione delle equazioni in gioco, tratteranno invece prevalentemente aspetti matematici necessari ai nostri scopi.

Nel contesto dell'elettrostatica e della magnetostatica è facile definire e ricavare le espressioni per i potenziali dai quali i campi derivano, per cui questo semplificherà l'estensione al caso dinamico mediante il primo metodo.

Innanzitutto mostriamo che il campo elettrostatico è irrotazionale, cioè  $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ , dove l'operatore rotore agisce solo sulle coordinate  $\mathbf{x}$  e non sulle  $\mathbf{x}'$ . Basta quindi calcolare il seguente termine:

$$\nabla \wedge \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = \nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = \frac{1}{R^3} \nabla \wedge \mathbf{R} + \nabla \left( \frac{1}{R^3} \right) \wedge \mathbf{R}$$

Si calcola agevolmente, ad esempio in coordinate cartesiane, il primo termine scoprendo che  $\nabla \wedge \mathbf{R} = 0$ . Poi:



$$\nabla \left( \frac{1}{R^3} \right) = -\frac{3\nabla R}{R^4} = -\frac{3\mathbf{R}}{R^5}$$

Quindi abbiamo proprio che:

$$\nabla \wedge \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = 0 \implies \nabla \wedge \mathbf{E} = 0$$

Da quest'ultima equazione si deduce un importante fatto, ovvero<sup>1</sup>:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \iff \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$\phi$  è detto **potenziale scalare**. Usando la prima equazione di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , nota anche come legge di Gauss, e la scrittura di  $\mathbf{E}$  in termini di  $\phi$  si ottiene:

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

nota come **equazione di Poisson**, dove si è usato il fatto che  $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2$ , detto *operatore di Laplace*. L'equazione è risolta da <sup>2</sup>:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R}$$

Per quanto riguarda il campo magnetico non si ha l'irrotazionalità bensì il fatto che sia solenoidale, cioè  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , infatti:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \mathbf{J}(\mathbf{x}') \wedge \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{x}')) \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right)$$

Avendo enfatizzato il fatto che  $\nabla$  agisca solo sulle coordinate  $\mathbf{x}$  con la notazione  $\nabla_{\mathbf{x}}$ . Pertanto possiamo subito dire che  $\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ , mentre il secondo termine è stato calcolato sopra e si è rivelato essere anch'esso nullo. Quindi:

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J}(\mathbf{x}') \wedge \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Similmente al campo elettrico anche quello magnetico si può scrivere in termini di un potenziale <sup>3</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$  è chiamato **potenziale vettore**. Utilizzando la legge di Ampère nel caso statico, cioè  $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , e l'espressione di  $\mathbf{B}$  appena scritta otteniamo:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

<sup>1</sup>L'implicazione " $\Leftarrow$ " è assicurata dal fatto che il rotore di un gradiente è identicamente nullo, l'implicazione " $\Rightarrow$ " è invece vera se il dominio è semplicemente connesso; tuttavia questa condizione topologica è continuamente assunta per lo spazio fisico.

<sup>2</sup>Per una possibile dimostrazione si veda l'appendice 5.2.

<sup>3</sup>L'implicazione " $\Leftarrow$ " è assicurata dal fatto che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, l'implicazione " $\Rightarrow$ " è invece vera se il dominio è 2-connesso; tuttavia, anche in questo caso, questa condizione topologica è continuamente assunta per lo spazio fisico.



Utilizzando l'invarianza di gauge della teoria <sup>4</sup>, in particolare la **gauge di Coulomb**  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , si ottiene un'equazione di Poisson vettoriale per  $\mathbf{A}$  del tutto analoga a quella per il potenziale scalare:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

dove  $\nabla^2 \mathbf{A}$  è il Laplaciano vettore di  $\mathbf{A}$  che, in coordinate cartesiane, assume la forma:  $\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$ . Di conseguenza la soluzione sarà :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{R}$$

---

<sup>4</sup>Si vedano l'*appendice 5.5* e la *sezione 2.1*.

# Capitolo 2

## Soluzioni non statiche *con* l'uso dei potenziali

### 2.1 Equazioni di Maxwell per i potenziali

Consideriamo ora le equazioni di Maxwell nella loro forma completa:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Si vuole cercare un insieme di equazioni per i potenziali sfruttando le riscritture dei campi sopracitati. Bisogna tuttavia notare che, mentre il campo magnetico continua ad essere solenoidale, cioè  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , anche nel caso non statico, per cui possiamo scriverlo come rotore di un potenziale vettore <sup>1</sup>, il campo elettrico invece non è più irrotazionale, cioè  $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ , e sarà pertanto impossibile scriverlo come solo gradiente di un potenziale scalare. Infatti inserendo  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  nella terza equazione si ottiene:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{A}) \implies \nabla \wedge \mathbf{E} = -\nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \implies \nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Ne segue che:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \implies \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Non ci rimane che sostituire i campi che abbiamo appena scritto in termini dei potenziali nelle due equazioni di Maxwell rimanenti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \nabla \cdot \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \end{cases}$$

dove  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  è la velocità della luce nel vuoto.

Abbiamo quindi riscritto le equazioni di Maxwell per i potenziali, che non sembrano

---

<sup>1</sup>In tutta la discussione si assume che non esistano monopoli magnetici; se così non fosse  $\mathbf{B}$  non sarebbe solenoidale in presenza di tali sorgenti  $\rho_m$  in quanto varrebbe  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$ .



essere però di facile risoluzione come speravamo. Possiamo tuttavia osservare che applicando ai potenziali una trasformazione del tipo <sup>2</sup>:

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla f \end{cases}$$

dove  $f$  è una funzione liscia del tempo e delle coordinate spaziali, i campi vengono lasciati invariati, infatti:

$$\mathbf{B} \longrightarrow \nabla \wedge (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

e

$$\mathbf{E} \longrightarrow -\nabla \left( \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla f) = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

Questa importante proprietà dell'elettromagnetismo è chiamata **invarianza di gauge** e sarà indispensabile per risolvere le equazioni scritte sopra. La scelta della gauge è arbitraria <sup>3</sup>, tuttavia, per i nostri scopi, sarà necessario usare quella chiamata **gauge di Lorentz**:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

È sempre possibile realizzare questa condizione, infatti sfruttando la definizione della trasformazione si ottiene:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) = 0 \implies \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}$$

che è l'**equazione delle onde non omogenea** per  $f$  la quale, in presenza di condizioni al contorno, ammette un'unica soluzione.

Inserendo questa gauge nelle equazioni di Maxwell per i potenziali scritte sopra se ne ottengono di molto più simmetriche:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases}$$

Talvolta è comodo definire il seguente operatore vettoriale:  $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  detto *d'Alambertiano*. Con questa definizione possiamo riscrivere le equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases}$$

Notiamo che nel limite statico il termine contenente la derivata temporale si annulla e quindi ritroviamo:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Il segno "−" relativo a  $\phi$  è puramente convenzionale, l'importante è che i segni siano opposti per  $\mathbf{A}$  e  $\phi$ .

<sup>3</sup>Per altre possibili scelte di gauge si veda l'*appendice 5.5*.



che sono proprio le equazioni di Poisson dalle quali derivano le leggi di Coulomb e di Biot-Savart.

## 2.2 Derivazione dei potenziali ritardati

Vogliamo ora risolvere esplicitamente le equazioni di Maxwell per i potenziali:

$$\begin{cases} \square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases}$$

Le 4 equazioni scalari (una vettoriale per  $\mathbf{A}$  e una scalare per  $\phi$ ) sono formalmente identiche. Ci basterà quindi risolvere un'equazione del tipo:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{x}, t) = -a S(\mathbf{x}, t)$$

dove  $a$  è uguale a  $1/\epsilon_0$  o a  $\mu_0$  ed  $S(\mathbf{x}, t)$  è la densità di carica o una componente della densità di corrente rispettivamente per  $\phi$  e per  $\mathbf{A}$ . Vogliamo applicare la *trasformata di Fourier* alla coordinata temporale; così facendo giungeremo ad un'equazione di Helmholtz non omogenea per la trasformata di  $f$ . Si useranno le seguenti notazioni e convenzioni di fattori e segni:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) \equiv (\mathcal{F}f)(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-i\omega t} f(\mathbf{x}, t)$$

Più in generale:

$$\tilde{h}(\mathbf{k}) \equiv (\mathcal{F}h)(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} h(\mathbf{x})$$

e

$$h(\mathbf{x}) \equiv (\mathcal{F}^{-1}\tilde{h})(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{h}(\mathbf{k})$$

dove  $\mathcal{F}$  è l'operatore di Fourier,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  ed  $n \in \mathbb{N}$ . Ricordiamo un'utile proprietà di  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} f\right) = (i\omega)^n \mathcal{F}f$$

ricavabile integrando per parti in modo ricorsivo. In particolare  $\widetilde{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} = -\omega^2 \tilde{f}$ . Appliciamo quindi  $\mathcal{F}$  all'equazione per  $f$  ricordando che, visto che l'unica variabile in gioco nella trasformata è  $t$ , si ha  $\widetilde{\nabla^2 f} = \nabla^2 \tilde{f}$ :

$$\nabla^2 \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) = -a \tilde{S}(\mathbf{x}, \omega)$$

detta **equazione d'onda di Helmholtz non omogenea**. Per la risoluzione di questa equazione facciamo ricorso alla nozione di *funzione di Green* di un operatore differenziale lineare  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ <sup>4</sup>. Nel caso in questione abbiamo che  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \equiv \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$  e il termine non omogeneo corrisponde a  $-a \tilde{S}(\mathbf{x}, t)$ . Questo operatore differenziale è talvolta chiamato *operatore di Helmholtz*. Ci basterà dunque trovare la funzione di Green  $G$

<sup>4</sup>Si veda l'appendice 5.1.





associata a questo operatore per ricavare  $f$ . L'equazione che definisce questa funzione di Green è quindi:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Si può interpretare fisicamente la funzione di Green suddividendo la regione in cui è localizzata la sorgente in volumetti elementari, in ognuno dei quali è presente una sorgente infinitesima rappresentata dalla delta di Dirac.  $G$  è dunque il campo generato da un certo volumetto indicizzato da  $\mathbf{x}'$ . Per linearità delle equazioni, il campo generato dall'intera sorgente sarà la sovrapposizione su tutti gli  $\mathbf{x}'$  dei campi generati da ogni volumetto.

Definiamo per comodità il numero d'onda  $k$  associato alla pulsazione  $\omega$  tale per cui  $k = \omega/c$ . La soluzione di tale equazione è <sup>5</sup> <sup>6</sup>:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R}$$

dove  $R \equiv |\mathbf{R}| \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Quindi, sfruttando le definizioni scritte sopra, si giunge a:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{a}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{e^{-ikR}}{R} \tilde{S}(\mathbf{x}', \omega)$$

Ricordando che queste sono funzioni trasformate solo rispetto a  $t$ , possiamo anti-trasformare trovando:

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \left[ \frac{a}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{e^{-ikR}}{R} \tilde{S}(\mathbf{x}', \omega) \right]$$

Riorganizzando i termini:

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{a}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega(t - \frac{R}{c})} \tilde{S}(\mathbf{x}', \omega) \right]$$

Abbiamo concluso in quanto il termine in parentesi è proprio la funzione  $S$  originaria valutata temporalmente in  $t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ :

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{a}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{S(\mathbf{x}', t - \frac{R}{c})}{R}$$

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell per i potenziali sono quindi:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{R}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{R}$$

<sup>5</sup>Per la dimostrazione si veda l'appendice 5.3.

<sup>6</sup>La scelta del segno "−" nell'esponenziale è legata al principio di causalità. La soluzione con il segno positivo porterebbe infatti a valutare le sorgenti nel *tempo avanzato*  $t_a = t + R/c$ . Questo violerebbe appunto il principio di causalità in quanto i potenziali risentirebbero nel *presente* di variazioni delle sorgenti che avverrebbero nel *futuro*.



dove  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  sono valutati in  $\mathbf{x}'$  e in  $t_r = t - R/c$  detto *tempo ritardato*. Quest'ultimo tiene conto del fatto che, essendo la velocità della luce una quantità finita, un "segnale" elettromagnetico impiega un tempo  $R/c$  per percorrere la distanza  $R$ . Si ha quindi che i potenziali risentono in  $\mathbf{x}$  e al tempo  $t$  degli effetti delle sorgenti in  $\mathbf{x}'$  al tempo  $t - R/c$ .

Queste soluzioni nel caso non statico sono dette **potenziali ritardati**.

## 2.3 Derivazione dei campi dai potenziali ritardati

Non ci rimane che sostituire i suddetti potenziali ritardati nelle formule che danno i campi in termini di essi  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$  e  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ .

Il calcolo del termine  $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$  è facile, in quanto l'unica dipendenza da  $t$  è nella densità di corrente  $\mathbf{J}$  attraverso  $t_r$ :

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t_r)}{R}$$

dove con il puntino sopra si intende la derivata rispetto al tempo  $\dot{\mathbf{J}} \equiv \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$ <sup>7</sup>. Calcoliamo ora il termine  $\nabla\phi$ , ricordando che l'operatore gradiente agisce sulle coordinate  $\mathbf{x}$  e non su quelle primarie. Nello specifico, è necessario calcolare  $\nabla \left( \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{R} \right)$ , osservando che il numeratore dipende dalle coordinate non primarie attraverso  $t_r$ :

$$\nabla \left( \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{R} \right) = (\nabla\rho) \frac{1}{R} + \rho \nabla \left( \frac{1}{R} \right)$$

Il secondo termine risulta essere:

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\nabla R}{R^2} = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

Passiamo ora al calcolo del primo:

$$\nabla\rho = \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \hat{\mathbf{R}}$$

Ne segue che:

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( -\frac{\dot{\rho} \hat{\mathbf{R}}}{c R} - \rho \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right)$$

Possiamo infine sommare i due termini ottenendo:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{R^2} \hat{\mathbf{R}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{x}', t_r)}{cR} \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{c^2 R} \right)}$$

Abbiamo quindi ricavato l'estensione della legge di Coulomb al caso non statico.

Per quanto riguarda il campo magnetico, dobbiamo calcolare unicamente  $\nabla \wedge \mathbf{A}$ , in particolare  $\nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{R} \right)$  per gli stessi motivi discussi nel calcolo di  $\nabla\phi$ :

<sup>7</sup>Notare che  $\partial/\partial t = \partial/\partial t_r$  visto che  $t_r = t - \frac{R}{c}$  e, in questo contesto,  $R$  non dipende da  $t$ .



$$\nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{J}}{R} \right) = (\nabla \wedge \mathbf{J}) \frac{1}{R} + \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{J}$$

Considerato che il secondo termine è stato calcolato precedentemente, non ci rimane che concentrarci sul primo <sup>8</sup>:

$$(\nabla \wedge \mathbf{J})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j J_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial t_r}{\partial x_j} \partial_{t_r} J_k = -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \frac{\partial R}{\partial x_j} \dot{J}_k = -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \hat{R}_j \dot{J}_k$$

oppure, scritto esplicitamente:

$$\nabla \wedge \mathbf{J} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{J}} \wedge \hat{\mathbf{R}}$$

Infine si ottiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{R^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t_r)}{cR} \right) \wedge \hat{\mathbf{R}}$$

Quella appena ricavata è la generalizzazione della legge di Biot-Savart.

Abbiamo quindi raggiunto il nostro scopo tramite il calcolo diretto a partire dai potenziali ritardati. Le espressioni appena scritte per  $\mathbf{E}$  e per  $\mathbf{B}$  sono infatti note come **equazioni di Jefimenko**. Tali equazioni si riducono alle leggi di Coulomb e di Biot-Savart nel limite statico; infatti i termini contenenti le derivate temporali svaniscono e viene meno la dipendenza da  $t_r$ .

È interessante notare che, per quanto riguarda i potenziali, la loro estensione al caso non statico si limita a valutare le sorgenti in  $t_r$ , mentre per i campi si sono trovati nuovi termini aggiuntivi. Questi ultimi sono legati alla radiazione elettromagnetica, in particolare i termini che vanno come  $1/R$ , detti *campi di radiazione* <sup>9</sup>, in quanto sono dominanti a grandi distanze rispetto a quelli che vanno come  $1/R^2$ .

Sfruttando l'equazione di continuità, si dimostra che il termine con  $\dot{\rho}$  del campo elettrico si può scrivere come somma di un campo di radiazione e di un termine con andamento  $1/R^2$ .

Studiando i campi di radiazione a grandi distanze, sviluppando cioè le sorgenti in serie di  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$  <sup>10</sup>, si possono ottenere i contributi dipolari, quadrupolari, etc...

Tuttavia, come applicazione delle equazioni di Jefimenko, invece della suddetta generale radiazione, si è deciso di studiare quella della carica puntiforme in moto arbitrario ed i relativi campi.

<sup>8</sup>Da non confondere il pedice  $r$  di  $t_r$  con gli indici vettoriali indicati con  $i, j$  e  $k$ , infatti  $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$  e  $\partial_{t_r} \equiv \partial/\partial t_r$ .

<sup>9</sup>Si veda la *sezione 4.2* per il caso particolare della carica puntiforme in moto.

<sup>10</sup>A grandi distanze si ha  $R = (|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}'|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^{1/2} \simeq |\mathbf{x}|(1 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'/|\mathbf{x}|^2)^{1/2}$ .

## Capitolo 3

# Soluzioni non statiche *senza* l'uso dei potenziali

### 3.1 Soluzioni tramite la funzione di Green ritardata

Questa sezione si propone di ricavare le equazioni di Jefimenko senza fare uso dei potenziali ritardati, bensì riscrivendo le equazioni di Maxwell per i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  e risolvendole esplicitamente. Per fare ciò applicheremo l'operatore rotore alle due equazioni vettoriali. Per quanto riguarda il campo elettrico abbiamo:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \mathbf{B}) \implies \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \implies \\ \implies \square \mathbf{E} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\end{aligned}$$

Analogamente per il campo magnetico:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} &= \mu_0 \nabla \wedge \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \mathbf{E}) \implies -\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \wedge \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \implies \\ \implies \square \mathbf{B} &= \mu_0 \nabla \wedge \mathbf{J}\end{aligned}$$

Quelle appena trovate sono 6 equazioni d'onda non omogenee scalari tutte della forma:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t)$$

Appoggiandoci alle *appendici 5.1* ed alle *appendici 5.4*, possiamo scrivere:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G_r(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

dove  $G_r$  è la funzione di Green associata all'operatore  $\square$ . La soluzione di tale equazione risulta essere <sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Per la dimostrazione si veda l'*appendice 5.4*.



$$G_r(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Avendo chiamato la sorgente  $S$  otteniamo:

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' G_r(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') S(\mathbf{x}', t')$$

Prendiamo ora il caso specifico di nostro interesse in cui  $f$  è una generica componente di  $\mathbf{E}$  o di  $\mathbf{B}$  ed  $S(\mathbf{x}, t)$  di  $-\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho(\mathbf{x}, t) - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  o di  $\mu_0 \nabla \wedge \mathbf{J}$ . Si ha quindi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \frac{1}{\epsilon_0} (\nabla' \rho)(\mathbf{x}', t') + \mu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right)(\mathbf{x}', t') \right)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mu_0 (\nabla' \wedge \mathbf{J})(\mathbf{x}', t')$$

dove  $(\nabla')_i \equiv \frac{\partial}{\partial x'_i}$  e si identificano le grandezze  $t_r = t - \frac{R}{c}$  e  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .

### 3.1.1 Calcolo mediante integrazione diretta della funzione di Green ritardata

Analizziamo prima l'espressione del campo elettrico. L'integrazione della delta di Dirac in  $t'$  fornisce:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\epsilon_0} [\nabla' \rho]_r + \mu_0 [\mathbf{J}]_r \right)$$

La notazione  $[\cdot \cdot \cdot]_r$  indica che la quantità all'interno delle parentesi è valutata temporalmente nel tempo ritardato  $t_r$ . Utilizziamo questa notazione in quanto, data una generica funzione  $\psi$  dipendente dal tempo e da  $\mathbf{x}'$ ,  $[\nabla' \psi]_r \neq \nabla' [\psi]_r$  a causa del fatto che  $t_r$  dipende sia da  $t$  sia da  $R$ . Una scrittura del tipo  $(\nabla' \psi)(\mathbf{x}', t_r)$  anziché  $\nabla' \psi(\mathbf{x}', t_r)$  sarebbe quindi troppo pesante.

Vogliamo ora scrivere  $[\nabla' \rho]_r$  in termini di  $\nabla' [\rho]_r$ :

$$\nabla' [\rho]_r = [\nabla' \rho]_r + \frac{\partial [\rho]_r}{\partial t_r} \nabla' \left( t - \frac{R}{c} \right) = [\nabla' \rho]_r + [\dot{\rho}]_r \frac{\hat{\mathbf{R}}}{c}$$

avendo nuovamente usato il fatto che  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$  e che  $\nabla' R = -\hat{\mathbf{R}}$ . Ne segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( -\frac{\nabla' [\rho]_r}{R} + \frac{[\dot{\rho}]_r}{cR} \hat{\mathbf{R}} - \frac{[\mathbf{J}]_r}{c^2 R} \right)$$

Integrando per parti il primo termine, essendo nulli i termini di superficie considerato che la distribuzione di carica è limitata, si ottiene:

$$-\int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\nabla' [\rho]_r}{R} = \int_V d^3\mathbf{x}' [\rho]_r \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{[\rho]_r}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

Quindi, esplicitando tutte le dipendenze e ri assemblando i termini, si ricava:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{R^2} \hat{\mathbf{R}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{x}', t_r)}{cR} \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{c^2 R} \right)$$

esattamente l'espressione del campo elettrico ottenuto tramite il primo metodo.

Per quanto riguarda il campo magnetico, analogamente al caso elettrico, integrando rispetto a  $t'$ , ricaviamo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{[\nabla' \wedge \mathbf{J}]_r}{R}$$

Questa volta il calcolo del rotore di  $\mathbf{J}$  valutato in  $\mathbf{x}'$  e in  $t_r$  fornisce:

$$\nabla' \wedge [\mathbf{J}]_r = [\nabla' \wedge \mathbf{J}]_r + \nabla' \left( t - \frac{R}{c} \right) \wedge \frac{\partial [\mathbf{J}]_r}{\partial t_r} = [\nabla' \wedge \mathbf{J}]_r + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{c} \wedge [\dot{\mathbf{J}}]_r$$

Di conseguenza:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{\nabla' \wedge [\mathbf{J}]_r}{R} + \frac{[\dot{\mathbf{J}}]_r}{cR} \wedge \hat{\mathbf{R}} \right)$$

Possiamo riscrivere il primo termine nel seguente modo:

$$\frac{\nabla' \wedge [\mathbf{J}]_r}{R} = \nabla' \wedge \left( \frac{[\mathbf{J}]_r}{R} \right) + [\mathbf{J}]_r \wedge \nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$$

Integrando per parti il primo termine, essendo anche qui nulli i termini di superficie a causa del fatto che la distribuzione di corrente è limitata, si avrà:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( [\mathbf{J}]_r \wedge \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{[\dot{\mathbf{J}}]_r}{cR} \wedge \hat{\mathbf{R}} \right)$$

Usando la relazione  $\nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$  ed esplicitando le dipendenze otteniamo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{R^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t_r)}{cR} \right) \wedge \hat{\mathbf{R}}$$

Anche questa volta abbiamo ritrovato il campo magnetico, soluzione non statica delle equazioni di Maxwell, con un approccio diverso rispetto al primo che richiedeva l'uso dei potenziali ritardati.

### 3.1.2 Calcolo mediante trasformata di Fourier delle sorgenti

Iniziando nuovamente dal campo elettrico, riprendiamone l'espressione fornita dalla funzione di Green ritardata:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta \left( t' - \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \frac{1}{\epsilon_0} (\nabla' \rho)(\mathbf{x}', t') + \mu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right)(\mathbf{x}', t') \right)$$



A meno delle costanti, scriviamo il secondo addendo integrando la delta come fatto nella *sezione 3.1.1*:

$$\int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'}\right)(\mathbf{x}', t') = \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{1}{R} [\dot{\mathbf{J}}]_r$$

Fino a questo punto non c'è stata alcuna differenza con la *sezione 3.1.1* ma sarà però presente nel calcolo del primo termine. Scriviamo infatti la densità di carica  $\rho$  in termini della sua trasformata di Fourier rispetto al tempo:

$$\rho(\mathbf{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t'} \tilde{\rho}(\mathbf{x}', \omega)$$

Ricordiamo inoltre la seguente proprietà riguardante il gradiente della trasformata temporale:

$$\widetilde{(\nabla' \rho)}(\mathbf{x}', \omega) = \nabla' \tilde{\rho}(\mathbf{x}', \omega)$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{d^3\mathbf{x}'}{R} \int_{\mathbb{R}} dt' \delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) (\nabla' \rho)(\mathbf{x}', t') = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_V \frac{d^3\mathbf{x}'}{R} \int_{\mathbb{R}} dt' \delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t'} (\nabla' \tilde{\rho})(\mathbf{x}', \omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{e^{-i\omega R/c}}{R} (\nabla' \tilde{\rho})(\mathbf{x}', \omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \nabla' \left( \frac{e^{ikR}}{R} \tilde{\rho} \right)(\mathbf{x}', \omega) - \tilde{\rho}(\mathbf{x}', \omega) e^{-ikR} \frac{ikR\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = \\ &= - \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{x}', \omega) e^{i\omega(t-R/c)}}_{\rho(\mathbf{x}', t-R/c)} + \\ &\quad - \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{x}', \omega) (i\omega) e^{i\omega(t-R/c)}}_{\dot{\rho}(\mathbf{x}', t-R/c)} \end{aligned}$$

dove nell'integrazione per parti svolta nella penultima uguaglianza si è usato il fatto che il termine di superficie fosse nullo a causa della limitatezza spaziale della sorgente. Si ottiene quindi:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{[\rho]_r}{R^2} \hat{\mathbf{R}} + \frac{[\dot{\rho}]_r}{cR} \hat{\mathbf{R}} - \frac{[\dot{\mathbf{J}}]_r}{c^2 R} \right)}$$

con la notazione delle parentesi quadre introdotta nella *sezione 3.1.1*. Il calcolo per il campo magnetico è analogo; basta infatti riprenderne l'espressione scritta nella *sezione 3.1.1*, trasformare temporalmente la densità di corrente e sfruttare la proprietà per la quale la trasformata temporale del rotore è uguale al rotore della trasformata:



$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mu_0 (\nabla' \wedge \mathbf{J})(\mathbf{x}', t') \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t'} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', \omega) \\ \widetilde{(\nabla' \wedge \mathbf{J})}(\mathbf{x}', \omega) &= \nabla' \wedge \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', \omega)\end{aligned}$$

Ed inoltre

$$\widetilde{(\mathbf{J} \wedge \hat{\mathbf{R}})}(\mathbf{x}', \omega) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', \omega) \wedge \hat{\mathbf{R}}$$

A meno di costanti, abbiamo:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_V \frac{d^3\mathbf{x}'}{R} \int_{\mathbb{R}} dt' \delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t'} (\nabla' \wedge \tilde{\mathbf{J}})(\mathbf{x}', \omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{e^{-i\omega R/c}}{R} (\nabla' \wedge \tilde{\mathbf{J}})(\mathbf{x}', \omega) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \nabla' \wedge \left( \frac{e^{ikR}}{R} \tilde{\mathbf{J}} \right)(\mathbf{x}', \omega) + e^{-ikR} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', \omega) \wedge \frac{ikR\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = \\ &= - \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \wedge \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', \omega) e^{i\omega(t-R/c)} \right)}_{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t-R/c)} + \\ & \quad - \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \wedge \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', \omega) (i\omega) e^{i\omega(t-R/c)} \right)}_{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t-R/c)}\end{aligned}$$

Anche in questo calcolo, il termine di superficie derivante dall'integrazione per parti è zero in quanto la densità di corrente è spazialmente limitata. Di conseguenza ne risulta:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \left( \frac{[\mathbf{J}]_r}{R^2} + \frac{[\dot{\mathbf{J}}]_r}{cR} \right) \wedge \hat{\mathbf{R}}}$$

In questo capitolo si sono quindi trovate le estensioni dinamiche delle leggi di Coulomb e di Biot-Savart con due approcci, senza avere mai fatto uso dei potenziali elettrodinamici  $\phi$  ed  $\mathbf{A}$ . Nonostante siano stati usati diversi metodi per derivare tali estensioni, le equazioni che abbiamo effettivamente risolto hanno richiesto gli stessi metodi matematici di quelle del primo metodo, cioè trasformate di Fourier e funzioni di Green.



# Capitolo 4

## Carica puntiforme in movimento

### 4.1 Campi di Liénard-Wiechert

In questa sezione ci poniamo l'obiettivo di ricavare il campo elettromagnetico generato da una sorgente puntiforme di carica  $q$  in moto arbitrario. Il metodo più comune è quello di passare per i *potenziali di Lienard-Wiechert*, casi particolari dei potenziali ritardati per una carica puntiforme in moto lungo una certa traiettoria  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_s(t)$ . Tuttavia in queste pagine affronteremo il problema direttamente dalle equazioni di Jefimenko senza passare per i potenziali, anche se l'approccio matematico è per certi aspetti il medesimo. Per scrivere la densità di carica di un punto dobbiamo discretizzarla utilizzando la funzione generalizzata delta di Dirac:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t))$$

Omettiamo l'apice  $n$  nella delta  $n$ -dimensionale per non appesantire ulteriormente la notazione. Per quanto riguarda la densità di corrente avremo quindi:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = q \frac{d\mathbf{x}_s(t)}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t))$$

Definiamo inoltre:

$$\boldsymbol{\beta}(t) \equiv \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}_s(t)}{dt} \equiv \frac{\mathbf{v}_s(t)}{c}$$

e  $\beta \equiv |\boldsymbol{\beta}|$ . In questa sezione saranno riprese le notazioni come quella delle parentesi quadre riguardante la dipendenza temporale:  $[\psi]_r \equiv \psi(t - \frac{R}{c})$ . Utilizziamo quindi le espressioni appena scritte per  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  direttamente nelle equazioni di Jefimenko. Iniziamo per comodità scrivendo il campo elettrico e magnetico nella seguente forma:

$$\mathbf{E} \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)$$

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mu_0 q}{4\pi} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$$

dove l'ordine degli addendi è definito dalle espressioni per i campi scritte nei capitoli precedenti. Iniziamo calcolando il primo termine del campo elettrico:

$$\mathbf{E}_1 = \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_s(t_r))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$



Ricordando che il tempo ritardato dipende sia da  $t$  sia da  $R$ , si evince che questo integrale è di difficile risoluzione. Sfruttiamo quindi nuovamente la delta di Dirac per riscrivere quell'espressione e per poi maneggiarla con più facilità:

$$\mathbf{E}_1 = \int_V d^3\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \delta(t' - t_r) \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_s(t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

In questa forma possiamo integrare la delta tridimensionale, cosa che prima non potevamo fare con facilità:

$$\mathbf{E}_1 = \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta(t' - t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t'))$$

dove in questo frangente  $t_r = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|}{c}$ . Anche questa volta l'integrale è non banale in quanto  $t_r$  dipende a sua volta da  $t'$ . Effettuiamo quindi la seguente sostituzione che ci permetta di semplificare il calcolo:

$$u = t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|}{c}$$

Differenziando e osservando che  $dt = 0$ , in quanto il tempo  $t$  di osservazione è fissato, si ottiene:

$$du = dt' + \frac{1}{c} \frac{d|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|}{dt'} dt'$$

Notando che  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|$  è una funzione composta e che le coordinate spaziali dell'osservatore  $\mathbf{x}$  sono fisse, la derivata rispetto a  $t'$  risulta essere:

$$\frac{d|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|}{dt'} = \nabla_s |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')| \cdot \frac{d\mathbf{x}_s(t')}{dt'}$$

dove il pedice  $s$  indica che le derivate vanno effettuate rispetto alle coordinate  $\mathbf{x}_s$ . Il termine nel quale interviene il gradiente è già stato calcolato precedentemente:

$$\nabla_s |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')| = - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t')|}$$

mentre nel termine di derivata di  $\mathbf{x}_s$  rispetto a  $t'$  riconosciamo la velocità della carica puntiforme. Otteniamo quindi:

$$du = dt' (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})$$

avendo utilizzato la solita definizione  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$  e ricordando che  $\mathbf{x}_s$  presenta una dipendenza temporale, in questo caso da  $t'$ . Ne segue pertanto:

$$\mathbf{E}_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \frac{\delta(u)}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

Abbiamo ommesso le altre dipendenze per non appesantire la notazione, ma va ricordato che tutte le quantità dipendono da  $t'$  che a sua volta dipende da  $u$ . L'integrazione della delta in  $u$  fornisce le altre quantità valutate in  $u = 0$  cioè, in termini di  $t'$ :

$$0 = u = t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}{c} \implies t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}{c} = t_r$$

Definiamo infine la quantità adimensionale:



$$K \equiv 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}$$

Per poter scrivere più semplicemente il risultato:

$$\mathbf{E}_1 = \left[ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} \right]_r$$

I termini  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$  seguono esattamente dagli stessi calcoli riguardanti  $\mathbf{E}_1$ :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR} \right]_r$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{KR} \right]_r$$

In modo del tutto analogo si ottengono:

$$\mathbf{B}_1 = \left[ \frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \hat{\mathbf{R}}}{KR^2} \right]_r$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \hat{\mathbf{R}}}{KR} \right]_r$$

Riassemblando i termini risulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \left[ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} \right]_r + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR} \right]_r - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{KR} \right]_r \right)$$

per quanto riguarda il campo elettrico.

E

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left( \left[ \frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \hat{\mathbf{R}}}{KR^2} \right]_r + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \hat{\mathbf{R}}}{KR} \right]_r \right)$$

relativamente al campo magnetico.

Vogliamo ora esplicitare le derivate temporali, ricordando nuovamente che  $t_r$  dipende da  $t$  sia esplicitamente sia implicitamente attraverso  $\mathbf{x}_s$ . Nei calcoli seguenti delle quantità fondamentali quali  $\mathbf{R}$ ,  $K$ , etc... si abbandonerà la notazione delle parentesi quadre per non appesantire la lettura, ma va tenuto a mente che tutte le quantità sono sempre temporalmente valutate nel tempo ritardato:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{x}_s(t_r)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t_r} \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) = -c\boldsymbol{\beta} \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{2R} \left( 2\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) = -c \left( \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \left( R \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t} \mathbf{R} \right) = \frac{c}{R} \left( (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta} \right) \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}(t_r)}{\partial t_r} \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) = \dot{\boldsymbol{\beta}} \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right)$$



$$\frac{\partial KR}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = c \left( -\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} + \beta^2 - \frac{1}{c} \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right)$$

Abbiamo già calcolato il termine  $\frac{\partial t_r}{\partial t}$  effettuando la sostituzione di  $t'$  con  $u$  nell'integrale per  $\mathbf{E}_1$  e vale:

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \equiv \frac{1}{K}$$

Ricordando che tutte le quantità sono sempre valutate nel tempo ritardato  $t_r$  si ha che, a meno della costante  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ , il campo elettrico vale:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}}{KR} \right) &= \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} + \frac{1}{cK^2R^2} \left( KR \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) - (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \frac{\partial KR}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} + \frac{1}{cK^2R^2} \left( c(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})\hat{\mathbf{R}} - c\boldsymbol{\beta} - R\dot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{c}{K} (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \left( \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2 + \frac{R}{c} \hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right) = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{K^2R^2} - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{KR^2} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{K^2R^2} - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cK^2R} + \frac{\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}}{K^3R^2} \left( 1 - K - \beta^2 + \frac{R}{c} \hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{R}}}{K^2R^2} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{K^2R^2} - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cK^2R} + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{K^3R^2} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{K^3R^2} - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{K^2R^2} + \\ &\quad + \frac{\boldsymbol{\beta}}{K^2R^2} - \frac{\beta^2\hat{\mathbf{R}}}{K^3R^2} + \frac{\beta^2\boldsymbol{\beta}}{K^3R^2} + \frac{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\hat{\mathbf{R}}}{cK^3R} - \frac{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta}}{cK^3R} = \\ &= -\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cK^2R} + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{K^3R^2} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{K^3R^2} - \frac{\beta^2\hat{\mathbf{R}}}{K^3R^2} + \frac{\beta^2\boldsymbol{\beta}}{K^3R^2} + \frac{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\hat{\mathbf{R}}}{cK^3R} - \frac{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta}}{cK^3R} = \\ &= \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{K^3R^2} + \frac{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{cK^3R} - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cK^2R} \end{aligned}$$

Si può notare che gli ultimi 2 termini si possono riscrivere nella seguente forma più compatta:

$$\frac{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{cK^3R} - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cK^2R} = \frac{\hat{\mathbf{R}} \wedge ((\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cK^3R}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} \wedge ((\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) &= \hat{\mathbf{R}} \wedge (\hat{\mathbf{R}} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \\ &= \hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \dot{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{\beta}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - K\dot{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

da cui segue la scrittura esposta sopra.

Abbiamo dunque che il campo elettrico generato da un corpo puntiforme carico in moto arbitrario è:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{K^3R^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}} \wedge ((\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cK^3R} \right]_r}$$

dove  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t}$  e  $K = 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}$ , tutto valutato temporalmente in  $t_r = t - R/c$  riprendendo la notazione delle parentesi quadre e ricordando che  $\mathbf{x}_s$



dipende dal tempo.

In maniera del tutto analoga si trova l'espressione per il campo magnetico:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{c(1 - \beta^2)(\boldsymbol{\beta} \wedge \hat{\mathbf{R}})}{K^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}} \wedge \left( \hat{\mathbf{R}} \wedge \left( (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right)}{K^3 R} \right]_r \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{[\hat{\mathbf{R}}]_r}{c} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

Questi sono detti **campi di Liénard-Wiechert** e sono stati ricavati senza mai passare per gli omonimi potenziali. Ovviamente l'utilizzo di questi ultimi avrebbe portato agli stessi risultati.

Si osserva che i campi sono sempre ortogonali fra loro ed inoltre che il campo magnetico è sempre ortogonale ad  $[\mathbf{R}]_r$ .

## 4.2 Radiazione da una carica puntiforme accelerata

Come accennato nella *sezione 2.3* i termini che presentano un andamento  $1/R$  sono detti campi di radiazione in quanto, dominando a grandi distanze su quelli che vanno come  $1/R^2$ , contribuiscono alla radiazione elettromagnetica<sup>1</sup>. Nel caso particolare del campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto arbitrario, si riconosce subito il termine di radiazione:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\hat{\mathbf{R}} \wedge \left( (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)}{cK^3 R} \right]_r$$

Possiamo calcolare la potenza  $P$  dissipata dal corpo in movimento, attraverso una superficie  $\Sigma$ , tramite il flusso del *vettore di Poynting*  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \wedge \mathbf{B}_{rad} \longrightarrow P = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

Quindi:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \wedge \left( \frac{[\hat{\mathbf{R}}]_r}{c} \wedge \mathbf{E}_{rad} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_{rad}|^2 [\hat{\mathbf{R}}]_r$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata l'identità del prodotto vettoriale triplo ed il fatto che  $[\hat{\mathbf{R}}]_r \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0$ .

Il vettore di Poynting ha le dimensioni di un'energia per unità di area per unità di tempo. Possiamo quindi scrivere la distribuzione angolare della radiazione come  $\mathbf{S} \cdot [\hat{\mathbf{R}}]_r$  moltiplicata per un'area, in particolare per  $[R^2]_r$  scegliendo la sfera di raggio  $[R]_r$  come superficie  $\Sigma$ , per poi ricavare la potenza totale dissipata integrando su tutto l'angolo solido:

$$\frac{dP}{d\Omega} = [R^2]_r \mathbf{S} \cdot [\hat{\mathbf{R}}]_r \implies P = \int_{\Sigma} d\Omega \frac{dP}{d\Omega}$$

<sup>1</sup>La motivazione sarà più chiara una volta introdotto il vettore di Poynting ed il suo legame con la potenza dissipata.



Notiamo che, se nel calcolo del vettore di Poynting si fosse considerato anche il primo termine del campo elettrico,  $|\mathbf{S}|$  avrebbe presentato andamenti  $1/[R^4]_r$ ,  $1/[R^3]_r$  e  $1/[R^2]_r$ . L'integrazione sulla sfera avrebbe quindi fornito un contributo indipendente dal raggio, dovuto proprio a  $\mathbf{E}_{rad}$ , dominante a grandi distanze rispetto a quelli rimanenti (questi ultimi con andamenti  $1/[R^2]_r$  e  $1/[R]_r$ ). Considerando che  $\mathbf{E}_{rad}$  è nullo nel caso di accelerazione nulla, se ne conclude che una carica puntiforme in moto a velocità costante non irradia.

#### 4.2.1 Potenza dissipata a basse velocità

Effettuiamo inizialmente il calcolo nel limite non relativistico, cioè  $\beta \ll 1$ , per generalizzare successivamente il risultato. In questo limite possiamo trascurare il ritardo, rimuovendo quindi le parentesi quadre, e approssimare inoltre  $K$  a 1. Ne segue che:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^2} \left| \frac{1}{R} \hat{\mathbf{R}} \wedge (\hat{\mathbf{R}} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2 = \frac{\mu_0 c q^2}{16\pi^2} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \hat{\mathbf{R}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{R^2} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{R^2}$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  ed  $\hat{\mathbf{R}}$  mentre  $a = c\dot{\beta}$ . Riprendendo le definizioni scritte sopra si deduce che l'integrazione di  $R^2|\mathbf{S}|$  su tutto l'angolo solido fornisce la potenza totale dissipata dalla carica in moto accelerato:

$$P = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 |\mathbf{S}| = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{8\pi c} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (1 - \cos^2 \theta)$$

L'integrale in  $d(\cos \theta)$  fornisce un fattore  $4/3$ . Abbiamo quindi:

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

nota come *formula di Larmor*. Essa fornisce la potenza totale irradiata da una carica puntiforme non relativistica avente accelerazione  $a$ .

#### 4.2.2 Potenza dissipata ad alte velocità

L'estensione relativistica si fonda sull'utilizzo di  $\alpha_\mu \alpha^\mu$  invece che di  $a^2$ , dove  $\alpha^\mu$  è la 4-accelerazione della carica. Per definizione  $\alpha^\mu = d\eta^\mu/d\tau$ , in cui  $\tau$  è il tempo proprio del corpo,  $\eta^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$  è la sua 4-velocità, e si è anche definito  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Possiamo inoltre scrivere  $\alpha^\mu = (\alpha^0, \boldsymbol{\alpha})$ . Sfruttando il fatto che  $dt/d\tau = \gamma$  si trova:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \frac{d\eta^0}{d\tau} = \gamma \frac{d\eta^0}{dt} = c\gamma \frac{d\gamma}{dt} = c\gamma \frac{d}{dt} \left( 1 - \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \right)^{-1/2} = \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \\ \boldsymbol{\alpha} &= \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\tau} = \gamma \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} = \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\alpha_\mu \alpha^\mu = -\gamma^8 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} + \gamma^8 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} \beta^2 + \gamma^4 a^2 + 2\gamma^6 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} = \gamma^6 \left( \frac{a^2}{\gamma^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} \right)$$

Possiamo riscrivere l'ultima espressione scomponendo  $\mathbf{a}$  nella sua componente parallela ed ortogonale a  $\mathbf{v}$ :



$$\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}}{v^2} + \frac{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{v}}{v^2} \implies a^2 = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}|^2}{v^2} + \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|^2}{v^2}$$

Osservando inoltre che:

$$\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1 + \gamma^2 \beta^2}{\gamma^2} = (1 - \beta^2) \left( 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) = 1$$

si ottiene:

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \gamma^6 \left( a^2 - \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|^2}{c^2} \right)$$

generalizzazione relativistica della formula di Larmor, alla quale si riduce nel limite di basse velocità  $v \ll c$ .

### 4.2.3 Distribuzione angolare per velocità e accelerazione collineari

Nel caso particolare in questione abbiamo che  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = 0$  e chiamiamo  $x$  l'asse in cui giacciono  $\mathbf{v}$  ed  $\mathbf{a}$ . Il calcolo del modulo del vettore di Poynting nel limite non relativistico è riportato nella *sezione 4.2.2*. Conseguentemente la distribuzione angolare della radiazione per  $\beta \ll 1$  varrà:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ , o  $\boldsymbol{\beta}$ , ed  $\hat{\mathbf{R}}$ . Rimuovendo il limite di basse velocità non possiamo più approssimare  $K$  ad 1, infatti  $K = 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta \cos \theta$ . Riprendiamo quindi l'espressione del modulo del campo elettrico di radiazione nel caso di velocità ed accelerazione collineari:

$$|\mathbf{E}_{rad}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{|\hat{\mathbf{R}} \wedge (\hat{\mathbf{R}} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})|}{K^3 R} \right]_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{|(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\hat{\mathbf{R}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}|}{K^3 R} \right]_r = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{|\sin \theta|}{K^3 R} \right]_r$$

Ne segue che:

$$|\mathbf{S}| = \frac{|\mathbf{E}_{rad}|^2}{\mu_0 c} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{K^6 R^2} \right]_r$$

La quantità appena scritta moltiplicata per  $[R^2]_r$  è quindi l'energia per unità di tempo  $t$ , cioè  $P = P(t)$ , mentre a noi interessa in termini di  $t_r$ . È pertanto sufficiente moltiplicare la quantità  $[R^2]_r |\mathbf{S}|$  per  $\partial t / \partial t_r = K^{-2}$ . Ne deriva l'espressione della distribuzione angolare relativistica:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

che si riduce a quella non relativistica nel limite  $\beta \rightarrow 0$ . Inoltre la sua integrazione su tutto l'angolo solido fornisce proprio la potenza totale dissipata trovata nella *sezione*

<sup>2</sup>Chiamando  $\varepsilon$  l'energia di radiazione, si ha che  $d\varepsilon = P(t_r)dt_r = P(t)dt$ . Quindi  $P(t_r) = P(t) \frac{\partial t}{\partial t_r}$ .

4.2.2, nel caso particolare in cui  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = 0$ . Infatti l'integrale in  $d\Omega$  del fattore dipendente da  $\theta$  fornisce  $8\pi\gamma^6/3$  da cui segue il risultato. Il grafico seguente<sup>3</sup> (effettuato con il software *Mathematica*) riporta tale distribuzione angolare per tre valori di  $\beta$ , dove l'angolo  $\theta$  è crescente procedendo in senso antiorario.

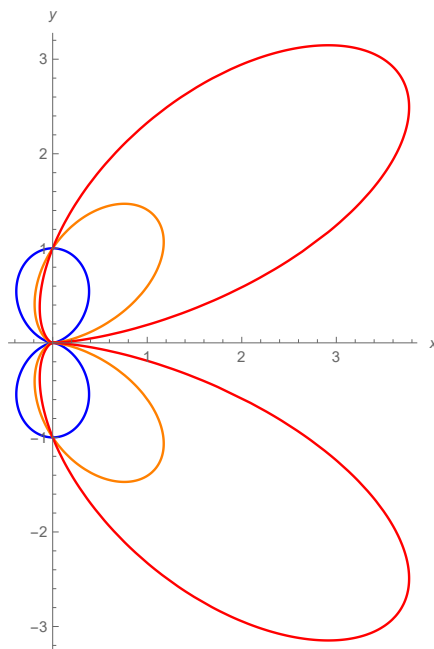


Figura 4.1: Grafico della distribuzione angolare della radiazione sul piano polare nel caso  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = 0$ :  $\beta = 0$  (blu),  $\beta = 0.3$  (arancione),  $\beta = 0.5$  (rosso).

### 4.3 Campi generati da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme

Vogliamo ora specializzarci ulteriormente studiando il campo generato da una carica puntiforme, non in moto arbitrario come nella *sezione 4.1*, ma in moto rettilineo uniforme. Questo implica che  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$  e quindi che  $\boldsymbol{\beta}$  è un vettore costante. Ci basterà inserire questa condizione nella più generale forma del campo elettrico trovata sopra per ottenere il nostro risultato, cioè il campo in funzione del vettore *presente*  $\mathbf{R}$  invece che di quello *ritardato*  $[\mathbf{R}]_r$  (il campo magnetico si ricaverà facilmente una volta scritto quello elettrico):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(1 - \beta^2)R(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{(KR)^3} \right]_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \left[ \frac{\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}}{(KR)^3} \right]_r$$

Ricordiamo che nella definizione di tempo ritardato che interviene nell'espressione scritta sopra,  $\mathbf{R}$  dipende da  $t_r$  ed inoltre  $t_r = t - \frac{[R]_r}{c}$ . Possiamo quindi scrivere  $[R]_r$  in termini di  $t - t_r$ :

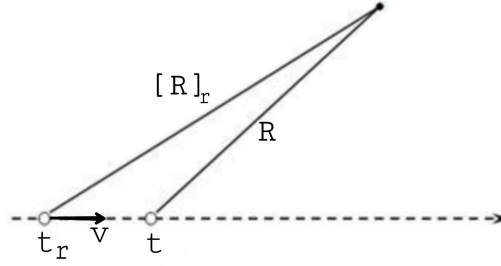
$$[R]_r = c(t - t_r)$$

Per scrivere il campo elettrico in termini delle coordinate presenti occorre esprimere  $\mathbf{R}$  in funzione di  $[\mathbf{R}]_r$ . Per un corpo che si muove a velocità costante si ha quindi che:

<sup>3</sup>Effettuato con il fattore non dipendente da  $\theta$  uguale a 1.



$$[\mathbf{R}]_r = \mathbf{R} + (t - t_r)\mathbf{v}$$


 Figura 4.2: Posizione *presente* e *ritardata*

Di conseguenza:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}]_r - [R]_r \boldsymbol{\beta} = [\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}]_r$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che  $\boldsymbol{\beta}$  è un vettore costante. Abbiamo quindi riscritto il numeratore di  $\mathbf{E}$  in termini di  $\mathbf{R}$ , in particolare è proprio uguale ad  $\mathbf{R}$ . Calcoliamo ora il denominatore:

$$[(KR)^2]_r = ([R]_r - [\mathbf{R}]_r \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = [R]_r^2 - 2[R]_r([\mathbf{R}]_r \cdot \boldsymbol{\beta}) + ([\mathbf{R}]_r \cdot \boldsymbol{\beta})^2$$

Per calcolare il termine  $[\mathbf{R}]_r \cdot \boldsymbol{\beta}$  dobbiamo osservare che, se chiamiamo  $x$  l'asse del moto e  $y$  l'asse ortogonale tale che il punto di osservazione stia nel piano  $xy$  (Fig. 4.2), le proiezioni dei vettori  $\mathbf{R}$  e  $[\mathbf{R}]_r$  sull'asse  $y$  sono uguali, infatti:

$$|\mathbf{R} \wedge \hat{\mathbf{v}}| = |[\mathbf{R}]_r \wedge \hat{\mathbf{v}}|$$

Ne segue che:

$$R^2 - (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{v}})^2 = |\mathbf{R} \wedge \hat{\mathbf{v}}|^2 = |[\mathbf{R}]_r \wedge \hat{\mathbf{v}}|^2 = [R]_r^2 - ([\mathbf{R}]_r \cdot \hat{\mathbf{v}})^2$$

Quindi:

$$([\mathbf{R}]_r \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = [R]_r^2 \beta^2 - R^2 \beta^2 + (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2$$

Dal legame fra  $\mathbf{R}$  e  $[\mathbf{R}]_r$  si ricava l'ultima relazione fra queste quantità:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}]_r - [R]_r \boldsymbol{\beta} \implies R^2 = [R]_r^2 - 2[R]_r([\mathbf{R}]_r \cdot \boldsymbol{\beta}) + [R]_r^2 \beta^2$$

Inserendo queste ultime due relazioni in quella che fornisce  $[(KR)^2]_r$  scritta sopra si ottiene:

$$\begin{aligned} [(KR)^2]_r &= [R]_r^2 + R^2 - [R]_r^2 - [R]_r^2 \beta^2 + [R]_r^2 \beta^2 - R^2 \beta^2 + (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = \\ &= R^2 (1 - \beta^2 + \beta^2 \cos^2 \theta) = R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

dove questa volta si è definito  $\theta$  l'angolo fra il vettore velocità  $\mathbf{v}$  e il vettore posizione *presente*  $\mathbf{R}$ . Abbiamo pertanto trovato l'espressione del campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme con velocità  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

Ci occuperemo ora del campo magnetico. Riprendendo nuovamente la relazione fra  $\mathbf{R}$  e  $[\mathbf{R}]_r$ , notiamo che:

$$[\hat{\mathbf{R}}]_r \equiv \frac{[\mathbf{R}]_r}{[R]_r} = \frac{\mathbf{R}}{[R]_r} + \boldsymbol{\beta}$$

Considerato che, nel caso più generale di moto arbitrario, si ha:

$$\mathbf{B} = \frac{[\hat{\mathbf{R}}]_r}{c} \wedge \mathbf{E}$$

sarà non nullo solo il termine  $\boldsymbol{\beta}$  nel prodotto vettore con il campo elettrico. Allora, scrivendo  $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$  come  $\mu_0$ , otteniamo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{v} \wedge \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

dove  $\mathbf{R}$  è il vettore posizione *presente*.

Il campo magnetico è ortogonale sia all'asse del moto della carica sia al campo elettrico, quindi si avvolge attorno all'asse  $x$ . I campi sono ancora invarianti per rotazioni attorno all'asse  $x$  ma non sono più totalmente isotropi a causa del fatto che il corpo si stia muovendo lungo un certo asse, da noi chiamato  $x$ .

Nel limite  $\beta \rightarrow 0$ , cioè il limite statico, riotteniamo le leggi di Coulomb e di Biot-Savart, in quanto il termine moltiplicativo contenente  $\beta$  tende a 1. Nel limite opposto invece i campi tendono a concentrarsi lungo l'asse  $y$  aumentando in modulo e a svanire lungo l'asse  $x$ . Si ricorda però che il campo magnetico è sempre nullo sull'asse  $x$ .

Per una rappresentazione visiva di quanto appena detto sono riportati di seguito i grafici <sup>4</sup> sul piano polare del modulo del campo elettrico e magnetico (effettuati con il software *Mathematica*), dove l'angolo  $\theta$  è crescente procedendo in senso antiorario.

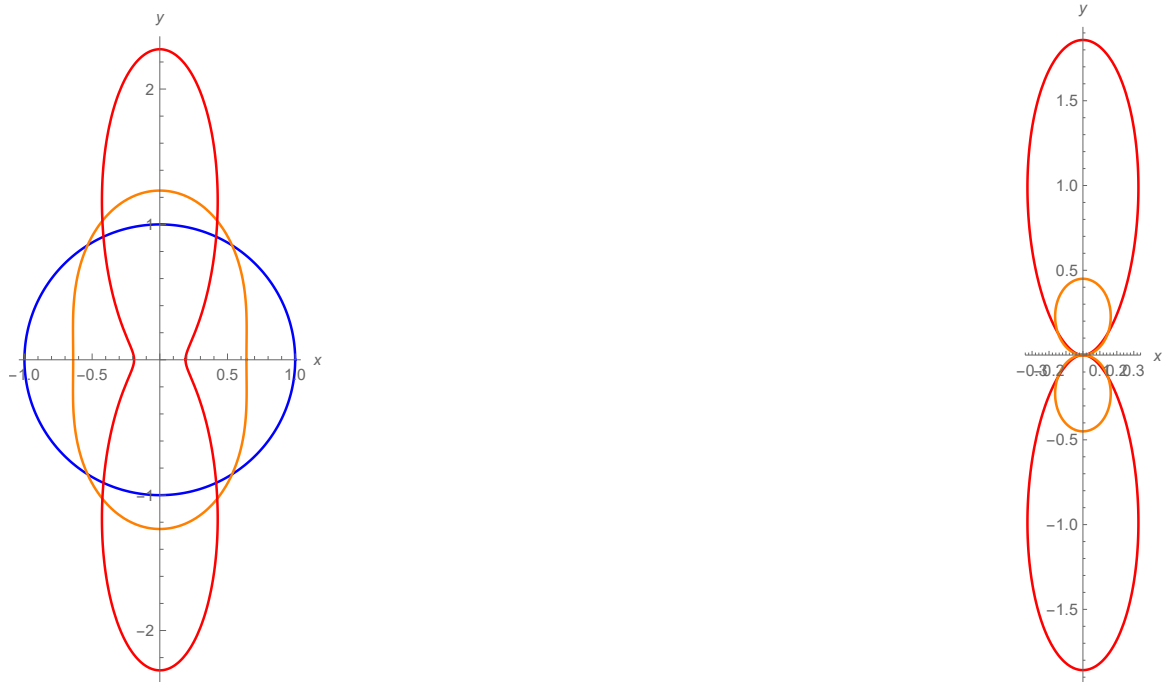


Figura 4.3: Grafici del modulo del campo elettrico (a sinistra) e magnetico (a destra) sul piano polare:  $\beta = 0$  (blu),  $\beta = 0.6$  (arancione),  $\beta = 0.9$  (rosso).

<sup>4</sup>Sono stati entrambi effettuati con  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = R = c = 1$  ad  $R$  fissato.

# Capitolo 5

## Appendici

### 5.1 Introduzione alle funzioni di Green

**Definizione:** Sia dato un operatore differenziale lineare  $\mathcal{L}_{x_1, \dots, x_n}$ , delle coordinate  $x_1, \dots, x_n$ , relativo all'equazione differenziale:

$$\mathcal{L}_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$$

Si definisce *funzione di Green*  $G$  associata all'operatore  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$  la soluzione dell'equazione:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

dove  $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x}' \equiv (x'_1, \dots, x'_n)$  e  $\delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \prod_{i=1}^n \delta(x_i - x'_i)$ . Si ricorda inoltre la definizione della delta di Dirac:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

e la sua azione su una funzione di prova  $\Psi$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}') = \Psi(\mathbf{x})$$

**Teorema:** Sia  $G$  una funzione di Green 2n-dimensionale associata all'operatore differenziale lineare  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$  definito sopra, allora:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g(\mathbf{x}')$$

**Dimostrazione:** Ricordiamo che  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$  è un operatore differenziale lineare delle sole coordinate  $x_1, \dots, x_n$ , quindi:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' (\mathcal{L}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) g(\mathbf{x}') = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}') = g(\mathbf{x})$$

□



## 5.2 Funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}^2$

Sia dato l'operatore di Laplace  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}^2$  in 3 dimensioni, la funzione di Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  è quindi definita da:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Anche qui, desideriamo adottare l'approccio della trasformata di Fourier, questa volta applicata alla variabile tridimensionale  $\mathbf{x}$ . In perfetta analogia con la trasformata unidimensionale abbiamo che, se  $u = u(\mathbf{x})$ , allora:

$$(\mathcal{F}\nabla_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{k}) = i\mathbf{k}(\mathcal{F}u)(\mathbf{k})$$

e

$$(\mathcal{F}\nabla_{\mathbf{x}}^2 u)(\mathbf{k}) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}(\mathcal{F}u)(\mathbf{k})$$

Applicando quindi  $\mathcal{F}$  all'equazione per  $G$ , definendo sempre  $\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') \equiv (\mathcal{F}G)(\mathbf{k}, \mathbf{x}')$  e  $k \equiv |\mathbf{k}|$ , otteniamo:

$$-k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') = \mathcal{F}(\delta^3)(\mathbf{k}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}$$

Di conseguenza

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}}{k^2}$$

Antitrasformando e usando le solite definizioni di  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  e  $R \equiv |\mathbf{R}|$  si trova:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[ -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}}{k^2} \right] = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}}{k^2}$$

Passando alle coordinate sferiche  $\{k, \theta, \varphi\}$  e notando l'invarianza per rotazioni in  $\varphi$ , possiamo calcolare esplicitamente la funzione di Green:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{e^{ikR \cos \theta}}{k^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{ikR} = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{R} \int_0^{+\infty} dk \frac{\sin(kR)}{k} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{R} \int_{\mathbb{R}} dk \frac{\sin(kR)}{k} \end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione  $\zeta = kR \implies d\zeta = Rdk$  e sfruttando il fatto che:

$$\int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{\sin \zeta}{\zeta} = \pi$$

si ottiene:

$$G(R) = -\frac{1}{4\pi R}$$



Da osservare che prendendo l'equazione di Poisson  $\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$  e usando la funzione di Green appena trovata risulta:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left( -\frac{\rho(\mathbf{x}')}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R}$$

che è proprio la legge di Coulomb dell'elettrostatica.

### 5.3 Funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_x = \nabla_x^2 + k^2$

La funzione di Green associata a questo operatore è definita da:

$$(\nabla_x^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

dove in questo contesto  $k$  è una costante. Bisogna osservare che, visto che non ci sono superfici di bordo,  $G$  è una funzione a simmetria sferica, cioè  $G = G(R)$ . Così facendo possiamo scrivere l'operatore di Helmholtz in coordinate sferiche e risolvere esplicitamente l'equazione:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) G(R) + k^2 G(R) = \delta^3(\mathbf{R})$$

Studiamo l'equazione per tutti i valori di  $R$  non nulli ed effettuiamo la sostituzione  $u(R) = RG(R)$ :

$$\left( \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} + k^2 \right) \frac{u(R)}{R} = 0$$

Calcoliamo esplicitamente i termini  $\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{u(R)}{R} \right)$  e  $\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left( \frac{u(R)}{R} \right)$ , così facendo giungeremo ad un'equazione di più facile risoluzione per la funzione  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{u}{R} \right) &= \frac{1}{R^2} (u'R - u) \\ \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left( \frac{u}{R} \right) &= \frac{1}{R^4} [R^2 (u''R + u' - u') - 2R(u'R - u)] \end{aligned}$$

dove con  $u'$  si intende la derivata di  $u$  rispetto al suo unico argomento  $R$ . Possiamo quindi scrivere l'equazione d'onda di Helmholtz per  $u$ :

$$\frac{2}{R^2} u' - \frac{2}{R^3} u + \frac{u''}{R} - \frac{2}{R^2} u' + \frac{2}{R^3} u + \frac{k^2}{R} u = 0 \iff u''(R) + k^2 u(R) = 0$$

Ne è risultata l'equazione dell'oscillatore armonico classico, la cui soluzione è:

$$u^{(\pm)}(R) = A e^{\pm i k R}$$

dove  $A$  è una costante. Ne segue che:

$$G^{(\pm)}(R) = A \frac{e^{\pm i k R}}{R}$$

Il valore di  $A$  è fissato dal limite  $R \rightarrow 0$ , o più precisamente  $kR \ll 1$ , infatti:

$$G^{(\pm)}(R) \simeq A \frac{(1 \pm i k R)}{R} = A \left( \frac{1}{R} \pm i k \right)$$



Pertanto, trascurando gli ordini superiori, si ha:

$$(\nabla_{\mathbf{x}}^2 + k^2) G^{(\pm)}(R) \simeq A \left[ \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{(kR)^2}{R^3} \pm i \frac{(kR)^3}{R^3} \right] \simeq A \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left( \frac{1}{R} \right)$$

Ricordando che il termine a sinistra è uguale a  $\delta^3(\mathbf{R})$ . Abbiamo calcolato sopra che  $\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$ . Se ne deduce che:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \left( -\frac{1}{R^2} \right) \right) = 0$$

Tuttavia, se proviamo ad integrare  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \left( \frac{1}{R} \right)$ , non troviamo zero. Infatti:

$$\int_V d^3\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left( \frac{1}{R} \right) = \int_{\partial V} da \hat{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{R} \right) = - \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin \theta \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = -4\pi$$

Questo implica che  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{R})$ . Confrontando con l'espressione trovata prima deduciamo che  $A = -\frac{1}{4\pi}$ . Possiamo infine scrivere:

$$G^{(\pm)}(R) = -\frac{e^{\pm i k R}}{4\pi R}$$

## 5.4 Funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_{\mathbf{x},t} = \square_{\mathbf{x},t}$

L'operatore d'Alambertiano  $\square_{\mathbf{x},t}$  è stato introdotto nella *sezione 2.1* ed è definito come segue:  $\square_{\mathbf{x},t} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_{\mathbf{x}}^2$ .

L'equazione che definisce la funzione di Green associata ad  $\mathcal{L}_{\mathbf{x},t}$  è quindi la seguente:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 \right) G(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

Vogliamo applicare la trasformata di Fourier rispetto alla coordinata temporale  $t$ . Riprendendo i calcoli svolti nelle pagine precedenti possiamo scrivere:

$$\left( -\frac{\omega^2}{c^2} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\mathcal{F}\delta)(\omega, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\omega t'}$$

Definendo  $k \equiv \omega/c$ , e ricordando che  $\nabla_{\mathbf{x}}^2$  agisce solo sulle coordinate  $\mathbf{x}$  e che  $k^2$  si limita ad essere un termine moltiplicativo, ci è consentito riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$(\nabla_{\mathbf{x}}^2 + k^2) \left( -\sqrt{2\pi} e^{i\omega t'} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}', t') \right) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Questa è esattamente l'equazione che definisce la funzione di Green dell'operatore di Helmholtz studiata in precedenza. Riprendendo i risultati dell'*appendice 5.3* abbiamo quindi:

$$-\sqrt{2\pi} e^{i\omega t'} \tilde{G}^{(\pm)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}', t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i k R}}{R} \implies \tilde{G}^{(\pm)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\pm i k R}}{4\pi R} e^{-i\omega t'}$$

Antitrasformando si trova:



$$G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4\pi R} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega(t-t' \pm \frac{R}{c})}$$

Osserviamo il fatto che  $G$  non dipende da tutte le coordinate separatamente bensì da  $R$  e  $t - t'$ .

Sfruttando il fatto che <sup>1</sup>:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega\eta} = \delta(\eta)$$

e che <sup>2</sup>:

$$\delta(\eta) = \delta(-\eta)$$

si giunge al risultato:

$$G^{(\pm)}(R, t - t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - (t \mp \frac{R}{c}))}{R}$$

## 5.5 Commenti sulla scelta di gauge

Riprendiamo le equazioni di Maxwell per i potenziali senza l'utilizzo di alcuna scelta di gauge <sup>3</sup>

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi) \end{cases}$$

Come detto nella *sezione 2.1*, tale scelta è arbitraria. Una possibilità è di imporre quella chiamata *gauge di Coulomb*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Questa gauge semplifica notevolmente l'equazione per  $\phi$  riconducendola all'equazione di Poisson  $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ , la cui soluzione è la legge di Coulomb. Tale condizione può essere sempre imposta in quanto, supponendo di avere un potenziale vettore che non la soddisfi, possiamo sfruttare l'invarianza di gauge ottenendo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) = 0 \implies \nabla^2 f = -\nabla \cdot \mathbf{A}$$

Essa è l'equazione di Poisson per  $f$  con sorgente  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  che, in presenza di condizioni al contorno, possiede teoremi di esistenza ed unicità della soluzione:

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

dove  $(\nabla')_i \equiv \frac{\partial}{\partial x'_i}$ .

Un'ulteriore possibilità è porre:

<sup>1</sup> $(\mathcal{F}\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-i\omega t} \delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \implies \delta(t) = \left( \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \right)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t}.$

<sup>2</sup>Sostituendo  $x = -\eta$  si ottiene  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \delta(-\eta) = -\int_{+\infty}^{-\infty} dx \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1 \implies \delta(\eta) = \delta(-\eta).$

<sup>3</sup>Per la definizione della trasformazione di gauge si veda la *sezione 2.1*.



$$\phi = 0$$

detta *gauge temporale*. Una condizione anch'essa sempre realizzabile. Applicando infatti la trasformazione di gauge, risulta:

$$\phi - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Anche questa equazione ammette un'unica soluzione una volta specificata la condizione al contorno:

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^t dt' \phi(\mathbf{x}, t')$$

Pure questa scelta di gauge è quindi utilizzabile.

Ancora un'altra opzione rilevante è la *gauge di radiazione*, che consiste nell'imporre simultaneamente la gauge di Coulomb e quella temporale. Così facendo si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases}$$

La gauge di radiazione semplifica l'equazione per  $\mathbf{A}$ , tuttavia è applicabile solo in assenza di sorgenti. Essa fornisce un'equazione d'onda omogenea per il potenziale vettore:

$$\square \mathbf{A} = 0$$

Nel nostro contesto però è più utile fare uso della *gauge di Lorentz*. Quest'ultima consiste nel porre uguale a zero il termine sul quale agisce il gradiente nell'equazione per  $\mathbf{A}$  scritta sopra:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Inserendo questa condizione nelle equazioni originarie, si ottengono due equazioni d'onda non omogenee e disaccoppiate per i potenziali. I calcoli relativi alla suddetta gauge di Lorentz sono del tutto analoghi ai precedenti e si trovano svolti nella *sezione 2.1*.



# Bibliografia

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed.
- [2] L. D. Landau e Evgenij M. Lifshits, *Corso di Fisica Teorica Volume 2 Teoria dei Campi*.
- [3] D. J. Griffith, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed.
- [4] M. A. Heald e J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3rd ed.
- [5] K. T. McDonald, *The Relation Between Expressions for Time-Dependent Electromagnetic Fields Given by Jefimenko and by Panofsky and Phillips*.
- [6] R. de Melo e Souza, M. V. Cougo-Pinto e C. Farina, *Multipole radiation fields from the Jefimenko equation for the magnetic field and the Panofsky-Phillips equation for the electric field*.