



# Architettura degli Elaboratori I

Corso di Laurea Triennale in Informatica

Università degli Studi di Milano

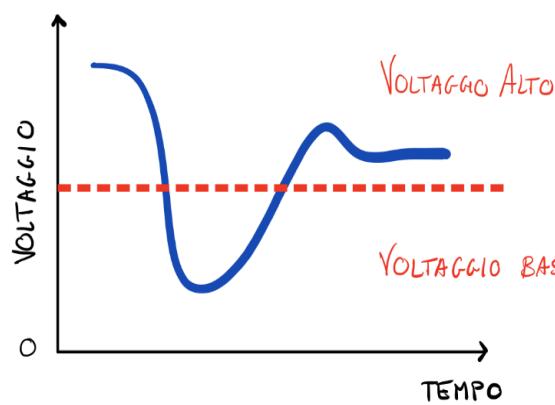
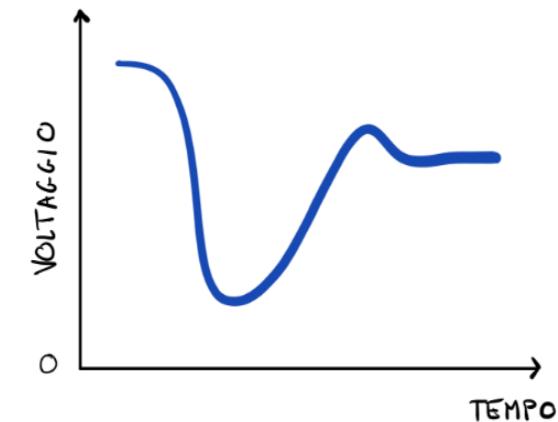
Dipartimento di Informatica “Giovanni Degli Antoni”

Edizione 2 (Cognomi H-Z), A.A. 2024-2025, Nicola.Basilico@unimi.it

# Codifica dell'informazione

# L'elaborazione digitale

- Per poter svolgere la sua funzione un elaboratore deve poter rappresentare l'informazione su cui lavora attraverso una grandezza fisica: **valori di tensione elettrica**
- Consideriamo un segnale di tensione che varia nel tempo
- Rappresenta un fenomeno fisico, ad esempio una misurazione di temperatura in una stanza, peso di un oggetto, vibrazione di una corda, ...
- I valori che il segnale può assumere sono strettamente legati, o **in analogia**, con il fenomeno rappresentato. Per questo si chiama **segnale analogico o continuo**



- Mappiamo i valori del segnale su un insieme di  $n$  range di valori a cui associamo  $n$  simboli o cifre (le cifre sono simboli associati a valori numerici di base)
- Elaborazione digitale: rappresentare il fenomeno con un dato numero di cifre (in inglese *digits*)
- Si possono rappresentare sia misurazioni di fenomeni fisici (la temperatura) che altre informazioni più astratte (ad esempio, un punteggio)
- Esempio:  $n = 2$ , 2 range di valori, 2 simboli (alto/basso, 0/1, vero/falso, A/B, ...)

# L'elaborazione digitale

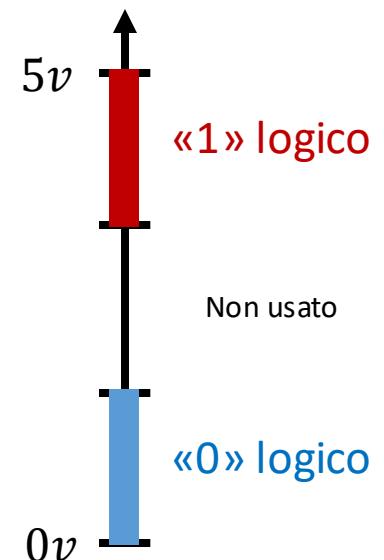
- Il tipo di informazione più importante trattata da un elaboratore è quella numerica

**Supponiamo di dover rappresentare il valore diciotto**

**Analogico:** il valore del segnale  
(voltaggio) rappresenta il valore 18

**Digitale:** il valore del segnale  
rappresenta una cifra del valore 18.  
Servono più segnali, uno per ogni cifra!

- I computer moderni utilizzano rappresentazioni binarie, con due simboli che, per convenzione, chiamiamo 0 e 1
- La memoria digitale è fatta da miliardi di componenti (basati su transistor) in grado di mantenere al loro interno un segnale che può rappresentare il simbolo 0 o il simbolo 1, le due cifre binarie (binary digits, **bit**)
- Come si costruisce la corrispondenza tra un valore (*diciotto*) e la sua rappresentazione digitale? Come si possono fare operazioni tra numeri rappresentati in quel modo?
- Le risposte stanno nella teoria dei **sistemi di numerazione**



# Sistema di numerazione

There are only 10 types of people in the world: those who understand binary, and those who don't.

- Un sistema di numerazione è composto da due ingredienti fondamentali: la **base** e la **notazione**
- **Base:** insieme di simboli (cifre) che possiamo usare per rappresentare un numero; ogni simbolo è associato ad una quantità numerica elementare
- $B_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  base 10, quelle che usiamo noi, sistema decimale
- $B_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ , base 8, sistema ottale
- $B_{16} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F\}$ , base 16, sistema esadecimale
- $B_2 = \{0,1\}$ , base 2, sistema binario, quello usato dagli elaboratori
- Avendo a disposizione  $n$  cifre in base  $B$  ogni cifra può assumere  $B$  valori diversi e in totale si possono scrivere  $B^n$  stringhe diverse
- **Esercizio:** quanti numeri diversi posso scrivere con **4** cifre in base **16**?
  - Risposta:  $16^4 = 65.536$
- **Esercizio:** quante cifre della base  $B$  servono per poter scrivere almeno  $p$  stringhe diverse?
  - Risposta:  $\lceil \log_B p \rceil$

# Sistema di numerazione: base

- Quali sono i valori di base associati ai simboli? Indico con  $val(i)$  il valore associato al simbolo  $i$  della base
- Scegliamo dei simboli che ci aiutino a ricordare immediatamente il valore:
  - Di solito la cifra « $i$ » è associata, in tutte le basi in cui compare, al valore  $i$  in base 10. Ad esempio «9» rappresenta il valore 9 nelle basi decimale ed esadecimale
  - Nella base 16 le cifre non bastano: le lettere «A», «B», «C», «D», «E», «F» rappresentano i valori 10, 11, 12, 13, 14, 15 (in base 10)
- **Attenzione:** conta solo il numero dei simboli e i loro valori associati, non i simboli scelti! Altre scelte possibili:  $B_2 = \{\top, \perp\}$ ,  $B_7 = \{I, V, X, L, C, D, M\}$ ,  $B_3 = \{\triangle, \square, \square\}$

## Esercizi

- Che aspetto ha un numero scritto in base 16?
- Risposta: 9F3A o in alternativa 0x9F3A, 9F3A hex
- Il numero 10011001 in quale base è scritto?
- Risposta: base 2, base 8, base 16 o base 10

# Sistema di numerazione: notazione

- **Notazione:** regole con cui si calcola il valore rappresentato a partire dalla sequenza di simboli che lo rappresenta
- Una notazione fondamentale è quella **posizionale:** si fa la somma pesata dei valori associati ai simboli; i pesi dipendono dalla base utilizzata e dalla posizione del simbolo nella sequenza
- Le posizioni si indicano con valori interi ordinati, partendo da 0 e **da destra a sinistra**

Esempio con $B = 10, n = 4$ : «1984»									
...					1	9	8	4	cifre di
...	9	8	7	6	5	4	3	2	1
...	9	8	7	6	5	4	3	2	1   0   posizioni $i$

$$\begin{aligned} & \text{val}(4)B^0 + \text{val}(8)B^1 + \text{val}(9)B^2 + \text{val}(1)B^3 \\ &= 4 \times 10^0 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^3 \\ &= 4 + 80 + 900 + 1000 = 1984 \end{aligned}$$

Valore rappresentato da una stringa di  $n$  cifre in base  $B$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \text{val}(d_i)B^i$$

- La cifra più a sinistra è detta **Most Significant Digit (MSD)**, quella più a destra **Least Significant Digit (LSD)**

**Esercizio:** Quanto vale «10100» e quali sono il successivo e precedente nelle basi 10, 8 e 2?

- $B_{10}$ : val. 10100, succ. «10101» (10101), prec. «10099» (10099)
- $B_8$ : val. 4160, succ. «10101» (4161), prec. «10077» (4159)
- $B_2$ : val. 20, succ. «10101» (21), prec. «10011» (19)

- A seconda del tipo di numeri che vogliamo rappresentare (naturali, interi, reali) useremo notazioni diverse
- La notazione impatta ovviamente anche su come vengono svolte le operazioni tra i numeri e quindi anche su come deve essere fatto l'hardware in grado di interpretare e manipolare i numeri rappresentati in un certo sistema di numerazione

Codifica dei Naturali N

# Numeri naturali $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$

- I numeri naturali si scrivono in notazione posizionale pura (come nell'esempio precedente)
- **Da base B a base 10:** calcolo della somma pesata

$$(111011)_2 = \sum_{i=0}^5 b_i 2^i = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = (59)_{10}$$

- **Da base 10 a base B:** algoritmo iterativo delle divisioni

Dato  $(N)_{10}$  da convertire nella base B:

1. dividere N per B (con una divisione intera);
2. il resto della divisione diventa la prima cifra meno significativa che resta da calcolare del numero in base B;
3. se il quoziente è 0 abbiamo finito;
4. se il quoziente è diverso da 0 si torna al passo 1 considerando il quoziente come dividendo N;

```
R ← 0, D ← N
do{
    q ← div(D, B)
    r ← mod(D, B)
    R ← < r, R >
    if q = 0
        return R
    D ← q
} while q ≠ 0
```

# Numeri naturali $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$

- **Esercizio:** convertire il numero  $(113)_{10}$  nelle basi 2, 8 e 16

**Base 2**

$$113 : 2 = 56 \text{ resto di } 1$$

$$56 : 2 = 28 \text{ resto di } 0$$

$$28 : 2 = 14 \text{ resto di } 0$$

$$14 : 2 = 7 \text{ resto di } 0$$

$$7 : 2 = 3 \text{ resto di } 1$$

$$3 : 2 = 1 \text{ resto di } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ resto di } 1$$

**Risultato:** 1 1 1 0 0 0 1

**Base 8**

$$113 : 8 = 14 \text{ resto di } 1$$

$$14 : 8 = 1 \text{ resto di } 6$$

$$1 : 8 = 0 \text{ resto di } 1$$

**Risultato:** 1 6 1

**Base 16**

$$113 : 16 = 7 \text{ resto di } 1$$

$$7 : 16 = 0 \text{ resto di } 7$$

**Risultato:** 7 1

# Numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

**Da base 2 a base 16 e vice versa**

- È un caso particolare della conversione tra due basi  $B_1$  e  $B_2$  dove una è una potenza dell'altra, cioè  $B_2 = B_1^m$  per un qualche  $m$  intero positivo
- In questo caso  $B_1 = 2$ ,  $B_2 = 16$  e quindi  $m = 4$
- La cifra in posizione  $i$  di un numero in base  $B^m$  corrisponde all'  $i$ -esimo gruppo di  $m$  cifre del numero in base  $B$
- Nel nostro caso abbiamo 16 possibili gruppi diversi di 4 cifre binarie, possiamo costruire una tabella che mette in corrispondenza ogni **cifra esadecimale** con una stringa di 4 bit

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011

4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

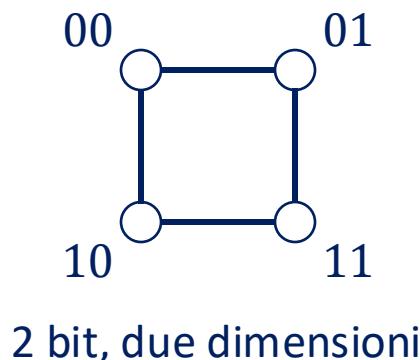
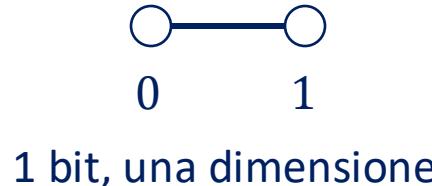
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011

C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

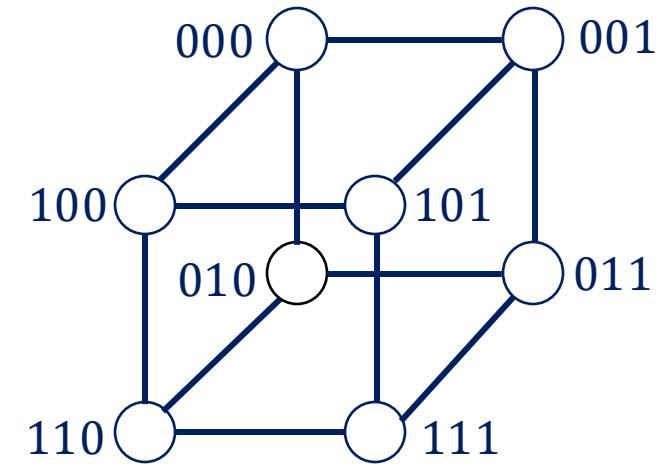
- Per le conversioni è sufficiente ispezionare la tabella e trovare le corrispondenze  
*(nota: non dovrebbe servire impararla a memoria!)*
- **Esercizio:** convertire  $(A\ 8\ F\ B)_{16}$  in base 2  
Soluzione: Ispezionando, simbolo per simbolo, la tabella ottengo  $(1010\ 1000\ 1111\ 1011)_2$

# Rappresentazione grafica numeri binari

- Un numero binario su  $n$  bit può essere interpretato come un punto in uno spazio  $n$ -dimensionale



2 bit, due dimensioni



3 bit, tre dimensioni

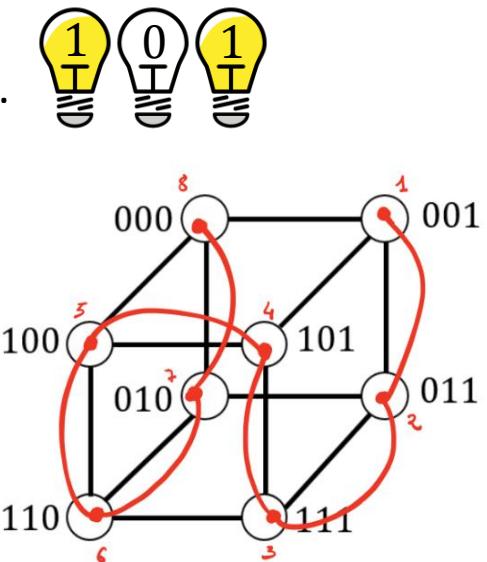
- In tutti i casi, numeri adiacenti (collegati) differiscono solo di un bit
- Dati  $n_1$  e  $n_2$  il numero di posizioni in cui un bit ha valore diverso tra un numero e l'altro si chiama **distanza di Hamming**
- Misura la distanza tra due codifiche, la differenza tra due rappresentazioni di due numeri che è diversa, in generale, dalla differenza tra i due valori rappresentati
- **Esercizio:** quanto è la distanza di Hamming tra 10111010 e 10010111?
- Risposta: se evidenzio i bit diversi ho **10111010** e **10010111** quindi la distanza di Hamming è pari a 4 (numero di bit che devo complementare per trasformare un numero nell'altro)

# Codice di Grey

- Supponiamo di avere  $n = 3$  bit
- Quanti numeri naturali possiamo scrivere in base  $B = 2$ ? Risposta:  $B^n$ , in questo caso  $2^3 = 8$

Numero decimale	Codifica binaria (posizionale)	Codifica binaria (Grey)
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

- Nella codifica posizionale, le distanze di Hamming tra codifiche di numeri successivi sono, nell'ordine, 1,2,1,3,1,2,1
- Nel codice di Grey le distanze sono **sempre pari a 1!**
- Svantaggio: più complicato calcolare il valore di un numero a partire dalla sua codifica
- Vantaggi? Esperimento degli interruttori...
- I codici che hanno questa proprietà sono detti codici a distanza unitaria. Come trovarli? Percorso Hamiltoniano sulla rappresentazione grafica (percorso che visita tutti i punti una volta sola percorrendo i collegamenti)



# Operazioni aritmetiche

- Si usano le stesse regole della base 10 con somme e riporti (differenze e prestiti), che valgono indipendentemente dalla base utilizzata

$b_1$	$b_2$	Somma	Riporto
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$b_1$	$b_2$	Differenza	Prestito
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Tutte le operazioni che producono un risultato a partire da uno o più operandi possono causare un **overflow**
- Vuol dire che il risultato dell'operazione è **troppo grande** per essere rappresentato su  $n$  bit, ne servono almeno  $n + 1$
- Quale è il numero **naturale** più grande che posso rappresentare con  $n$  bit? Risposta:  $2^n - 1$
- Esercizio:** sommare 0101 e 1011 su 4 bit

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1 \\
 0\ 1\ 0\ 1 \\
 + \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 1 \\
 = \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

- I due operandi valgono 5 e 11, la somma dovrebbe essere 16, ma se mi limito a lavorare con 4 bit leggo 0
- Devo usare un bit in più. Sulla carta si può sempre fare, ma in hardware è impossibile: si lavora con  $n$  bit fissati, se non bastano si deve segnalare un errore.

# Il problema dell'overflow

Base europea di Kourou (Guyana Francese)

Primo lancio dell'Ariane 5 (ESA), 4 Giugno 1996 ([video](#))

- Dopo 39s dal lancio il sistema di navigazione inerziale misura un elevato ma normale valore di velocità orizzontale
- Il software converte il dato letto in binario su 16 bit, è un'eredità di Ariane 4, il razzo precedente **più lento**
- Il valore della velocità è troppo grande per essere rappresentato su 16 bit, si genera un **overflow**
- Il sistema inerziale va in crash, il controllo passa al sistema inerziale di backup che, dopo pochi millisecondi, va in crash per lo stesso motivo
- L'unità inerziale a questo punto è fuori controllo, trasmette dati completamente errati
- Il computer di bordo, interpreta le stringhe di bit come dati di volo e aziona una manovra correttiva non necessaria flettendo completamente gli ugelli del motore principale
- Il missile guadagna un angolo di attacco di 20 gradi e subisce un carico aerodinamico insostenibile: si disintegra completamente (perdita stimata 370M USD)



Codifica degli Interi  $\mathbb{Z}$

# Numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

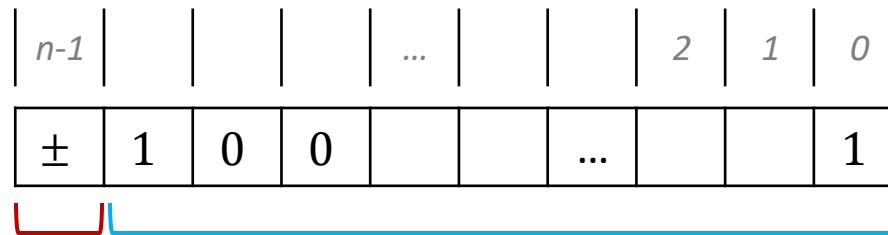
- I numeri naturali sono sufficienti se dobbiamo solo contare (o ordinare), ma utilizzare solo quelli sarebbe fortemente limitante (ad esempio, non potremmo svolgere differenze arbitrarie tra numeri naturali)
- Consideriamo i numeri **interi** che presentano una caratteristica in più: **il segno**, che dobbiamo rappresentare in qualche modo
- Ci sono diverse soluzioni che presentano vantaggi e svantaggi per un elaboratore, ne vediamo due:
  - Modulo e segno (molto semplice, ma non molto vantaggiosa)
  - Complemento a 2 (più complicata, ma vantaggiosa e quindi molto usata)

# Modulo e segno

- Supponiamo di avere a disposizione  $n$  bit

MSD indica il segno:

- 0 per positivo (+)
- 1 per negativo (-)



Restanti  $n - 1$  bit indicano il modulo con la stessa notazione dei numeri naturali (spesso chiamata *unsigned*)

- Esempio:** il numero 10011, se interpretato come naturale vale 19, se invece lo interpretiamo come un intero in notazione modulo e segno vale  $-3$
- Per un essere umano è il metodo più naturale: è una rappresentazione che ricalca il modo in cui noi pensiamo i numeri ma ...
- ... per un elaboratore è piuttosto inefficiente
  - Ridondanza:** lo zero ha due codifiche  $+0$  e  $-0$
  - Complessità:** Alcune operazioni aritmetiche, come la somma algebrica, risultano laboriose e richiedono diversi passaggi sequenziali: (a) Controllare il segno degli operandi (b) Se i segni sono diversi, sottrarre il valore minore dal maggiore (c) Se i segni sono uguali, sommare i valori (d) Determinare il segno del risultato. Questa sequenza di operazioni non può essere eseguita simultaneamente, ma richiede una serie di passaggi consecutivi. Di conseguenza, il circuito necessario per implementare queste operazioni diventa più complesso.

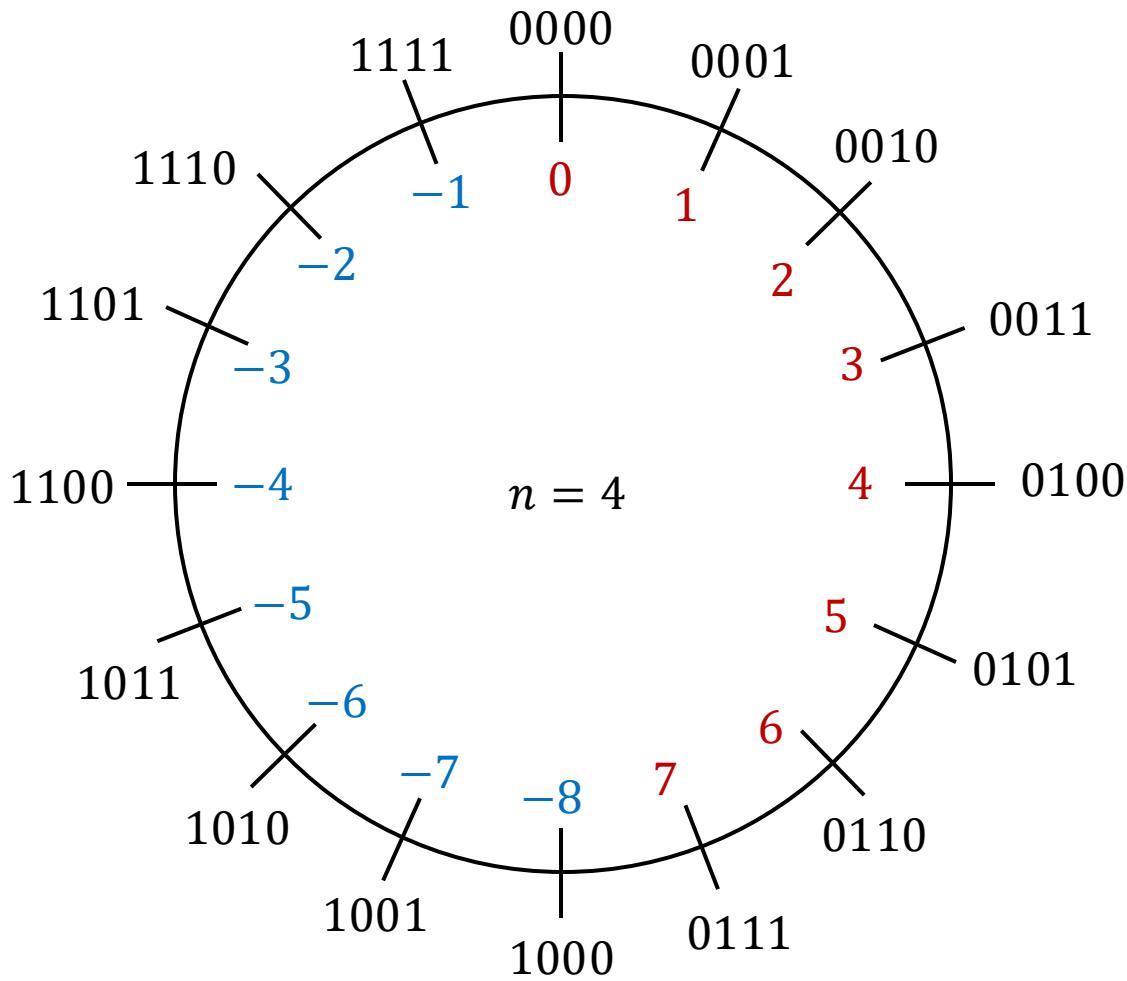
# Complemento a 2

- Esiste un modo di rappresentare i numeri interi che ci permetta di fare la somma algebrica in modo semplice, analogamente a quanto succedeva con i naturali (così da avere, come per  $\mathbb{N}$ , hardware semplice)? Sì, il **complemento a 2** (C2)
- Supponiamo, come prima, di avere a disposizione  $n$  bit e un numero intero  $N$  da codificare
- Se  $N$  è **positivo o nullo** lo codifico come il naturale di valore  $N$  (come prima) su  $n - 1$  bit e pongo MSD a 0
- Se  $N$  è **negativo** lo codifico come il naturale  $2^n - |N|$  su  $n$  bit cioè il valore che mancherebbe a  $|N|$  per arrivare a  $2^n$  (il suo complemento a  $2^n$  )
- **Attenzione!** In **entrambi** i casi devo stare molto attento al **problema della rappresentabilità**

# Complemento a 2

- **Esercizi:** suppongo di avere  $n = 4$  bit
- $N = 5 \rightarrow$  converto 5 su 3 bit (metodo delle divisioni iterative) e aggiungo uno **0** a sinistra  $\rightarrow$  **0101**
- $N = -5 \rightarrow$  converto  $2^4 - 5 = 16 - 5 = 11$  su 4 bit  $\rightarrow 1011$
- $N = 8 \rightarrow$  converto 8 su 3 bit  $\rightarrow$  **overflow**, i 4 bit non bastano ne servono almeno 5
- $N = -1 \rightarrow$  converto  $2^4 - 1 = 15$  su 4 bit  $\rightarrow 1111$
- $N = -8 \rightarrow$  converto  $2^4 - 8 = 8$  su 4 bit  $\rightarrow 1000$
- $N = -11 \rightarrow$  converto  $2^4 - 11 = 5$  su 4 bit  $\rightarrow 0101$ 
  - **5  $\rightarrow$  0101  $\leftarrow$  -11**
  - **Attenzione all'intervallo rappresentabilità!**

# Complemento a 2



- Con  $n$  bit posso scrivere  $2^n$  stringhe binarie, le rappresento su una ruota in ordine orario crescente secondo il valore che avrebbero se fossero naturali
- Per i **positivi** devo usare  $n - 1$  bit e aggiungere 0 a sinistra:
  1. l' $N$  più grande è  $2^{n-1} - 1$
  2. Tutti i positivi e lo zero iniziano con 0
- Le stringhe restanti sono assegnate ai **negativi** che si dispongono «all'inverso» seguendo la regola del complemento: il numero  $-N$  è assegnato alla stringa che avrebbe valore  $2^n - N$  nei naturali
  1. l' $N$  più piccolo è  $-2^{n-1}$
  2. Tutti i negativi iniziano con 1
- Chi sta fuori dall'intervallo  $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$  non può essere rappresentato su  $n$  bit in complemento a 2
- Prima buona proprietà: lo zero ha una sola codifica

# Complemento a 2

Cambio  
di segno

- Metodo alternativo per convertire  $-N$  in C2 su  $n$  bit:
  1. Verifico la rappresentabilità su  $n$  bit (va sempre fatto)
  2. Converto  $N$  in binario
  3. Faccio il complemento a 1 (inverto tutti i bit)
  4. Sommo 1 in binario (regole dei naturali)
- **Esercizio:** convertire  $-6$  su 3 bit
  1. Il numero più piccolo su 3 bit è  $-2^2 = -4$ ,  
**non si può fare!**
- **Esercizio:** convertire  $-6$  su 4 bit
  1. Il numero più piccolo su 4 bit è  $-2^3 = -8$ , **ok!**
  2. 6 in binario su 4 bit è 0110
  3. Complemento a 1: 1001
  4. Sommo 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1001 + \\ 0001 = \\ \hline 1010 \end{array} \quad \text{risultato}$$

- Per convertire **da C2 a base 10** basta usare la regola posizionale **dando al bit più significativo un peso negativo**
$$(111011)_{C2} = -b_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i = -1 \times 2^5 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 = (-5)_{10}$$
- Il bit più significativo è un bit di segno a tutti gli effetti: può essere esteso senza modificare il valore assoluto:  $(111111111111111111011)_{C2}$  è sempre  $(-5)_{10}$
- Altra buona proprietà: le somme algebriche si fanno con lo stesso procedimento dei naturali ignorando l'ultimo riporto

**Esercizio:** eseguire  $4 - 5$  (su 4 bit)  
 $(4)_{10} = (0100), (-5)_{10} = (1011),$   
faccio  $4 + (-5)$

$$\begin{array}{r} 0100 + \\ 1011 = \\ \hline 1111 \end{array}$$

**Esercizio:** eseguire  $7 - 1$  (su 4 bit)  
 $(7)_{10} = (0111)_{C2}, (-1)_{10} = (1111)_{C2},$   
faccio  $7 + (-1)$

$$\begin{array}{r} 0111 + \\ 1111 = \\ \hline 10110 \end{array}$$

# Complemento a 2

- Il problema dell'overflow si ripropone anche per le somme in C2
- Il risultato di una somma di due numeri in C2 su  $n$  bit potrebbe cadere fuori dall'intervallo di rappresentabilità  $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$

$$\begin{array}{r} \textcolor{blue}{111} \\ 00110010 + \textcolor{teal}{(80)_{10}} \\ 01010000 = \textcolor{teal}{(50)_{10}} \\ \hline 10000010 \end{array}$$

Il numero più grande su 8 bit è 127!

Mi aspetto  $(130)_{10}$  ma  
il risultato in C2  
rappresenta  $(-126)_{10}$

$$\begin{array}{r} \textcolor{blue}{1} \\ 10000000 + \textcolor{teal}{(-128)_{10}} \\ \hline \textcolor{blue}{1} \quad \textcolor{teal}{11111111} = \textcolor{teal}{(-1)_{10}} \\ \hline 01111111 \end{array}$$

Il numero più piccolo su 8 bit è -128!

Mi aspetto  $(-129)_{10}$   
ma il risultato in C2  
rappresenta  $(127)_{10}$

- Può succedere solo quando si sommano numeri dello stesso segno
- Si riconosce facilmente:
  1. Sommo due numeri **positivi** (bit di segno **0**) e ho un risultato **negativo** (bit di segno **1**)
  2. Sommo due numeri **negativi** (bit di segno **1**) e ho un risultato **positivo** (bit di segno **0**)
- Alternativa: controllare gli ultimi due riporti generati, se sono diversi c'è stato overflow

Codifica dei Reali R

# Rappresentazione dei numeri reali $\mathbb{R}$

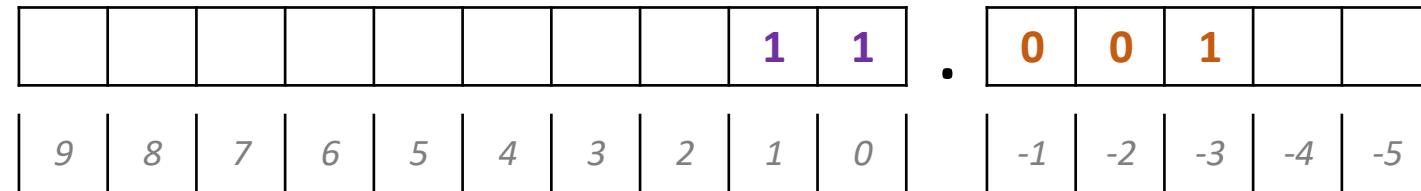
- Sono i numeri «veri e propri» quelli che descrivono fenomeni del mondo, esempi:  
 $0.45, \pi, 2.71828182845904523536, 6.626 \times 10^{-34}$
- Presentano due fondamentali differenze con i naturali e gli interi:
  - Non li usiamo per contare ma per **misurare**, un processo che di solito richiede di poter rappresentare numeri piccolissimi (vicini allo zero, e.g., la massa atomica dell'ossigeno  $\cong 2.6 \times 10^{-23} \text{ g}$ ) e numeri molto grandi (e.g., diametro dell'universo osservabile  $\cong 8.8 \times 10^{23} \text{ km}$ )
  - A differenza dei Naturali e degli Interi non sono enumerabili, non si possono contare: tra due reali qualsiasi ci sono infiniti reali
- Come li rappresentiamo su  $n$  bit?
- **Non possiamo rappresentare i numeri reali**, possiamo solo approssimarli con dei numeri **razionali** a precisione finita, quindi anch'essi approssimazioni di  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- I numeri razionali sono il risultato di una divisione tra interi, lo sviluppo decimale è infinito ma periodico (e.g.,  $0.5000 \dots, 1.3333 \dots, 0.285714285714 \dots$ )



Possiamo rappresentare solo questi

# Rappresentazione dei numeri reali $\mathbb{R}$

- Primo problema: come estendiamo la notazione posizionale per poter rappresentare una frazione di un numero?
- Introduco la virgola e associo alle posizioni alla sua destra indici negativi, la formula della somma pesata si estende naturalmente



$$(11.001)_2 = \sum_{i=0}^2 b_i 2^i + \sum_{i=-3}^{-1} b_i 2^i = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = (3.125)_{10}$$

- Con questo procedimento posso convertire **da base 2 a base 10** un numero con parte frazionaria
- Assumiamo per semplicità che le parti intere siano sempre naturali, anche se possiamo facilmente generalizzare agli interi pensandole codificate in C2

# Rappresentazione dei numeri reali $\mathbb{R}$

- Da base 10 a base 2: algoritmo iterativo delle moltiplicazioni (il «duale» di quello delle divisioni)

Dato  $(I.F)_{10}$  da convertire nella base  $B = 2$ :

1. I si converte in binario naturale;
2. Moltiplicare  $.F$  per 2
3. La parte intera del risultato diventa la prima cifra più significativa che resta da calcolare;
4. Tornare a 2 considerando la parte frazionaria del risultato al posto di  $.F$ ;

Si termina quando:

1. la parte frazionaria del risultato è 0
  - In questo caso il numero frazionario può essere rappresentato con un numero finito di cifre senza perdita di approssimazione. Succede solo ai numeri del tipo  $p(2^{-q})$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ , ad esempio  $7(2^{-2}) = \frac{7}{4} = 1.75$
2. Abbiamo finito i bit: troncamento o arrotondamento

**Esercizio** convertire in binario  $(4.4375)_{10}$

Parte intera 100, parte frazionaria:

$$\begin{array}{ll} .4375 \times 2 = .875 & \text{parte intera } 0 \\ .875 \times 2 = 1.75 & \text{parte intera } 1 \\ .75 \times 2 = 1.5 & \text{parte intera } 1 \\ .5 \times 2 = 1.0 & \text{parte intera } 1 \end{array}$$

Risultato:  $(100.0111)_2$  

**Esercizio** convertire in binario  $(10.76)_{10}$

parte intera 1010, parte frazionaria:

$$\begin{array}{ll} .76 \times 2 = 1.52 & \text{parte intera } 1 \\ .52 \times 2 = 1.04 & \text{parte intera } 1 \\ .04 \times 2 = .08 & \text{parte intera } 0 \\ .08 \times 2 = .16 & \text{parte intera } 0 \\ .16 \times 2 = .32 & \text{parte intera } 0 \end{array}$$

:

Risultato:  $(1010.11000\dots)_2$  

# Troncamento e arrotondamento

- Alcuni numeri frazionari richiedono un numero di cifre dopo la virgola molto alto, in certi casi anche infinito. Noi però abbiamo sempre a disposizione un numero finito e limitato di bit
  - **Troncamento:** genero cifre fino a quando esaurisco i bit e lascio così
  - Esempio di prima:  $(10.76)_{10} \rightarrow (1010.11000010100 \dots)_2$  se in totale avessi 6 bit  $\rightarrow 1010.11\textcolor{red}{000010100\dots}$
  - Esempio in base 10:  $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939 \dots \rightarrow 3.1415$
  - Il troncamento è sempre un arrotondamento **verso lo zero** (per difetto sui positivi, per eccesso sui negativi)
- 
- **Arrotondamento:** scarto le cifre come nel troncamento, ma scelgo se arrotondare per eccesso o per difetto cercando di minimizzare l'errore di approssimazione
  - **Esercizio** arrotondare  $(101.110\textcolor{green}{11010100})_2$ : per eccesso  $101.110 + 000.001 = 101.111$
  - **Esercizio** arrotondare  $(0.00101\textcolor{green}{0011010100})_2$ : per difetto 0.00101 (come troncamento)

# Rappresentazione dei numeri reali $\mathbb{R}$

- Abbiamo visto come funziona la notazione posizionale in base 2 per i numeri con parte frazionaria, ma per avere un sistema di numerazione non basta: dobbiamo prendere una decisione fondamentale su come organizzare gli  $n$  bit di cui disponiamo
- Come ripartisco gli  $n$  bit tra parte intera e frazionaria?

$$n = n_I + n_F$$

- La risposta a questa domanda ha implicazioni forti sulla rappresentazione dei Reali e sta alla base dei due metodi principali che vediamo:
  - Rappresentazione in **virgola fissa**
  - Rappresentazione in **virgola mobile**

# Virgola fissa

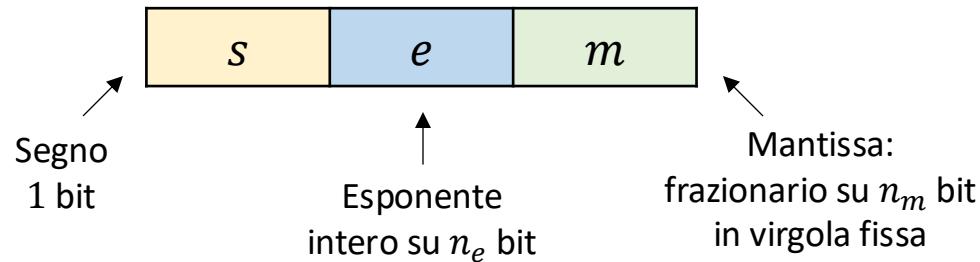
- Assegno un numero di bit  $n_I$  alla parte intera, i restanti  $n - n_I = n_F$  a quella frazionaria e mantengo questa ripartizione
- Nell' esempio con il numero 11.001 abbiamo usato  $n_I = 2$  bit per la parte intera e  $n_F = 3$  bit per la parte frazionaria
- La virgola non cambia mai posizione. Ha sempre  $n_I$  cifre alla sua sinistra e  $n_F$  alla sua destra, essendo implicita può essere omessa (non uso bit per indicare la sua posizione nel numero)
- **Domanda:** quale è il numero massimo rappresentabile? Risposta:  $2^{n_I} - 1 + \sim 1 \cong 2^{n_I}$  nell'esempio sopra è  $(11.111)_{C_2} = (3.875)_{10}$ , cioè quasi 4 ( $\cong 4$ )
- **Domanda:** quale è il numero più vicino allo 0 rappresentabile?
- Risposta:  $2^{-n_F}$
- $2^{-n_F}$  è il contributo più piccolo possibile dato da un bit nella nostra codifica, è anche la differenza di valore tra due rappresentazioni numeriche successive (due tacche): viene anche chiamato **precisione**



- Più cifre dedichiamo alla parte frazionaria, più piccola è la precisione e più fitte sono le tacche: otteniamo una approssimazione migliore

# Virgola mobile

- Nella rappresentazione in virgola mobile la virgola **non ha un posizione prefissa**, ci permette di rappresentare nella stessa codifica i numeri: 11.011 e -0.0001111; queste due scritture non possono coesistere nello stesso codice a virgola fissa
- La posizione della virgola non è più implicita, dobbiamo «consumare» bit per dire dove sta
- Dati  $n$  bit, la notazione del numero è suddivisa in tre campi:
  - 1 bit per il **segno**  $s$  del numero (0 per dire positivo, 1 per dire negativo)
  - $n_e$  bit che codificano un numero intero con segno detto **esponente**  $e$
  - $n_m$  bit che codificano un numero frazionario positivo in virgola fissa detto **mantissa**  $m$



$$\text{In totale } 1 + n_e + n_m = n$$

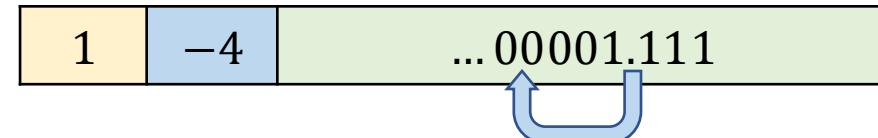
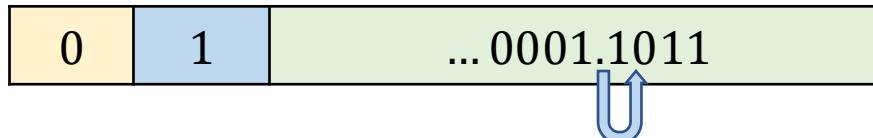
Come si calcola il valore che questi tre campi rappresentano?

Con questa formula:  $(-1^s) \times m \times 2^e$

L'esponente fa muovere la virgola!

Questa notazione è anche detta «scientifica»

I due esempi precedenti (esponente scritto in base 10):



# Virgola mobile

- Per semplicità e convenienza di notazione introduciamo la **forma normalizzata**
- Il numero in virgola mobile è normalizzato se **la parte intera della mantissa ha una sola cifra significativa**
- In base 2 implica che la mantissa è sempre fatta così  $1.10110 \dots$ , significa anche che 1. è implicito
- Rende più semplici alcune operazioni, come i confronti:
- **Domanda**: chi è il maggiore tra  $1101 \times 2^{-1}$  e  $10.11 \times 2^1$  (non normalizzati)
- **Domanda** riformulata: chi è il maggiore tra  $1.101 \times 2^2$  e  $1.011 \times 2^2$  (normalizzati)
- Nel secondo caso è più facile rispondere. Basta confrontare gli esponenti (ordini di grandezza) e, se sono uguali, si confrontano le mantisse

# Confronto tra virgola fissa e mobile

- Supponiamo di avere  $n = 6$  cifre decimali e un bit di segno che trascuriamo, per la virgola fissa assegniamo 3 cifre alla parte intera e 3 a quella frazionaria es: 123.447, 003.012, etc ... Per la virgola mobile 4 cifre alla mantissa (di cui 1 per la parte intera) e 2 all'esponente con segno es  $1.122 \times 10^{-21}$ ,  $0.043 \times 10^4$ , etc ...

- Numero massimo?**

- Virgola fissa:  $999.999 \cong 10^3$ , virgola mobile  $9.999 \times 10^{99} \cong 10^{100}$ , oltre: **overflow**

- Numero più vicino allo zero?**

- Virgola fissa:  $000.001 = 10^{-3}$ , virgola mobile  $0.001 \times 10^{-99} = 10^{-102}$ , più vicino allo zero: **underflow**

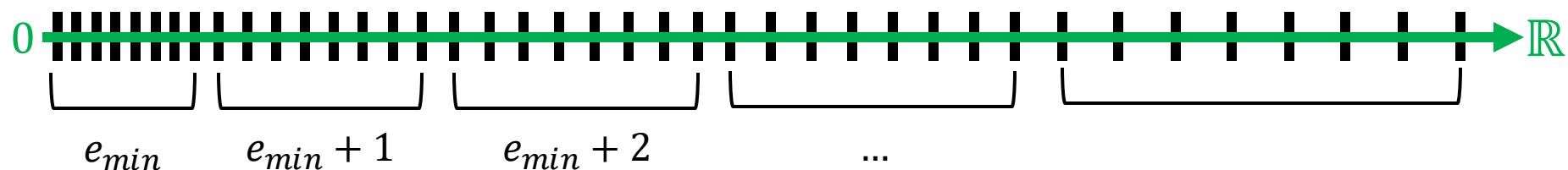
- La rappresentazione in virgola mobile, a differenza di quella in virgola fissa, ci consente di scrivere numeri molto grandi e molto piccoli! Ma come è possibile se abbiamo solo 6 cifre e quindi il numero di numeri diversi (le tacche) è lo stesso \*?

- La differenza sta in **come le tacche sono distribuite** sulla linea!

- Virgola fissa: precisione costante



- Virgola mobile: precisione variabile (con l'esponente)



# Lo standard IEEE 754

- L'implementazione della rappresentazione in virgola mobile dentro i calcolatori moderni è regolata da uno standard: l'**IEEE-SA Standard n. 754 for Floating-Point Arithmetic** (in breve, IEEE 754)
- Formato a precisione singola (detto «float») su 32 bit (quello che vediamo)
- Formato a precisione doppia (detto «double») su 64 bit
- **Regola:** in precisione singola un numero in virgola mobile è fatto così

S: 1 bit	E (esponente) su 8 bit								m (mantissa) su 23 bit																								
	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	5	3	2	1	0	

- Questi 32 bit possono rappresentare:
  1. Numeri in virgola mobile normalizzati
  2. Numeri in virgola mobile non normalizzati (detti sub-normalizzati o de-normalizzati)
  3. Codici speciali

# Lo standard IEEE 754: Numeri normalizzati

- Se  $0 < E < 255$  (binario naturale) allora i 32 bit stanno codificando un numero normalizzato, questo implica che i 3 campi vadano interpretati in questo modo:
- $s$  è il segno del numero (0 per dire **positivo**, 1 per dire **negativo**)
- $m$  è la parte frazionaria della mantissa assunta in forma normalizzata:  $(1.m)_2$ , dove «1.» è implicito (ricordiamoci che siamo in base 2)
- $E$  è il valore dell'esponente **a cui è stato sommato 127**, si dice «in eccesso» 127, quindi il vero esponente è  $e = E - 127$
- Il valore rappresentato è  $(-1)^s \times 1.m \times 2^e$
- **Esercizio:** cosa rappresenta il seguente numero in formato IEEE 754 a precisione singola?

$s:$ 1 bit	E (esponente) su 8 bit								m (mantissa) su 23 bit																						
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	5	3	2	1	0

- Risposta:
  - $E = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^0 = 128 + 1 = 129$  quindi siamo di fronte ad un numero normalizzato
  - Esponente  $e = E - 127 = 2$ , mantissa 1.01100
  - Spostamento della virgola  $-1.01100 \times 2^2 = -101.1$ , in base 10:  $-1(1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}) = -1\left(4 + 1 + \frac{1}{2}\right) = -5.5$

# Lo standard IEEE 754: Numeri normalizzati

- **Esercizio:** rappresentare il valore 3.25 in formato IEEE 754 a precisione singola
- Converto in binario la parte intera 11 e la parte frazionaria .01
- Normalizzo  $11.01 = 1.101 \times 2^1$
- $s = 0, E = 1 + 127 = 128 = (10000000)_2, m = 101000 \dots$

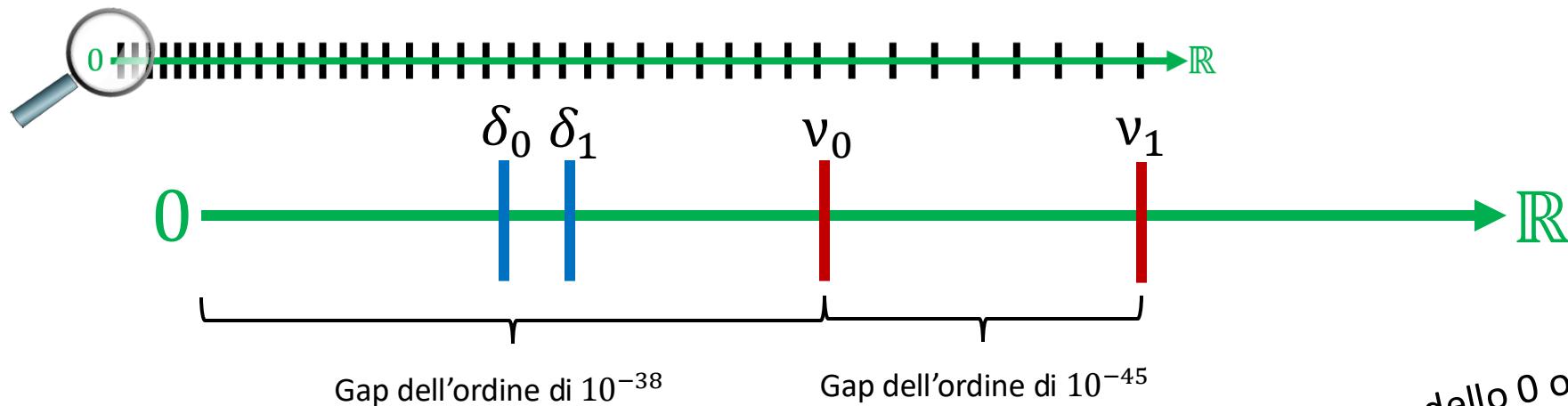
$s:$ 1 bit	E (esponente) su 8 bit								m (mantissa) su 23 bit																						
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	5	3	2	1	0

# Lo standard IEEE 754: Numeri de-normalizzati

- Se  $E = 0$  e  $m \neq 0$  allora i 32 bit stanno codificando un numero **sub-normalizzato**. Di conseguenza dobbiamo interpretare i 3 campi in questo modo:
- $s$  è il segno del numero (0 per dire **positivo**, 1 per dire **negativo**)
- $m$  è la parte frazionaria del numero la cui parte intera è assunta essere 0:  $(0.m)_2$ , dove 0. è implicito
- $E$  viene scartato e si assume  $e = -126$  (**ATTENZIONE:** Non  $-127$ )
- Il valore rappresentato è  $(-1)^s \times 0.m \times 2^{-126}$
- I de-normalizzati ci aiutano a infoltire la rappresentazione nelle vicinanze dello 0, ma non solo ...

# Lo standard IEEE 754: risoluzione

- **Esercizio:** numero normalizzato più vicino allo 0?
- Risposta:  $v_0 = 1.000 \dots \times 2^{-126} = 2^{-126} \cong 1.17 \times 10^{-38}$
- **Esercizio:** chi è il successivo?
- Risposta:  $v_1 = 1.00 \dots 001 \times 2^{-126} = (1 + 2^{-23}) \times 2^{-126} = 2^{-126} + 2^{-149} \cong 1.17 \times 10^{-38} + 1.4 \times 10^{-45}$



- **Esercizio:** numero de-normalizzato più vicino allo 0?
- Risposta:  $\delta_0 = 0.000 \dots 1 \times 2^{-126} = 2^{-149} \cong 1.4 \times 10^{-45}$
- **Esercizio:** chi è il successivo?
- Risposta:  $\delta_1 = 0.00 \dots 010 \times 2^{-126} = 2 \times \delta_0 = 2^{-148} \cong 2.8 \times 10^{-45}$

Nelle vicinanze dello 0 otteniamo  
una risoluzione maggiore e  
localmente costante!

# Lo standard IEEE 754: codici speciali

Valore di $E$	Valore di $m$	Cosa rappresentano i 32 bit in IEEE 754?
$0 < E < 255$	qualsiasi	Numero normalizzato
$E = 0$	$m \neq 0$	Numero de-normalizzato
$E = 0$	$m = 0$	$\pm 0$ (a seconda di $s$ )
$E = 255$	$m = 0$	$\pm \infty$ (a seconda di $s$ )
$E = 255$	$m \neq 0$	<i>NaN</i> («Not a Number»)

- Due codifiche per lo 0, ma con i reali potrebbe non essere ridonante...
- *NaN* è un simbolo che indica il risultato di una operazione non permessa, ad esempio  $\frac{12.45}{0}$ ,  $\sqrt{-9}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\log(-5)$ ,  $\frac{0}{0}$  ...

# Lo standard IEEE 754: considerazioni

- Perché quel formato? Perché sommare 127 al vero valore dell'esponente?
- Riduce la complessità dell'hardware che deve manipolare questi numeri, facilitando alcune operazioni frequenti
- **Esempio:** confronto fra due numeri in IEEE 754, chi è il maggiore?
  - Se i segni sono diversi è immediato (il maggiore è quello con  $s = 0$ )
  - Se i segni sono uguali basta confrontare i restanti bit come si faceva con i naturali! L'esponente, in posizione più alta, domina i bit della mantissa e il segno non va gestito perché non è codificato esplicitamente (eccesso 127)
- Per un numero generico di bit  $n$ , l'**eccesso** è un valore ben definito che si calcola come  $K = 2^{n-1} - 1$ , l'eccesso- $K$  è un altro modo di rappresentare numeri interi
- In generale le operazioni in virgola mobile richiedono hardware più complesso delle corrispettive svolte su numeri naturali e interi. Sono però anche le più frequenti che ci serve svolgere, visto che molti fenomeni del mondo sono descritti da numeri reali (che noi approssimiamo)
- Negli elaboratori di solito c'è una unità dedicata a queste operazioni (floating-point unit, o co-processore in virgola mobile) e il numero di operazioni in virgola mobile che una CPU può svolgere in un intervallo di tempo è una metrica della sua **potenza di calcolo: FLOPS** (Floating-point Operations per Second)

# Considerazioni finali

- Abbiamo visto modi di rappresentare l'informazione numeri utilizzando simboli binari, 1 e 0, che gli elaboratori sanno rappresentare e manipolare in hardware
- In diversi linguaggi di programmazione, il programmatore ha accesso alla scelta della rappresentazione da usare mediante la specifica del tipo.
- Ad es. in C `int` significa di solito 32 bit in C2, `unsigned int` 32 bit in naturale, `float` IEEE 754 precisione singola, `double` IEEE 754 precisione doppia. In Go è analogo, in JavaScript i «Number» sono IEEE 754 in doppia precisione