



# Firmware Multiplier

Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Informatica  
[borghese@di.unimi.it](mailto:borghese@di.unimi.it)

Università degli Studi di Milano

Riferimenti sul Patterson 5a ed.: B.6 & 3.4



## Sommario

Il moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware



## L'approccio firmware



Nell'approccio firmware, viene inserita nella ALU una micro-architettura costituita da una unità di controllo, dei componenti di calcolo e dei registri.

L'unità di controllo attiva opportunamente le unità di calcolo e il trasferimento da/verso i registri. Approccio “*controllore-datapath*” in piccolo.

Viene inserito un microcalcolatore dentro la ALU.

Il primo micropogramma era presente nell'IBM 360 (1964).



## L'approccio firmware vs hardware



La soluzione HW è più veloce ma più costosa per numero di porte e complessità dei circuiti. Inoltre è rigida («hard») e non si può adattare a implementare funzioni diverse.

La soluzione HW viene utilizzata per le operazioni frequenti: la velocizzazione di operazioni complesse che vengono utilizzate raramente non aumenta significativamente le prestazioni (legge di Amdahl) -> Si preferisce un'implementazione Firmware o Software.

La soluzione firmware risolve l'operazione complessa mediante una sequenza di operazioni semplici. E' meno veloce, ma più flessibile e, potenzialmente, adatta ad inserire nuove procedure, modificando solamente l'unità di controllo.



# Approcci tecnologici alla ALU

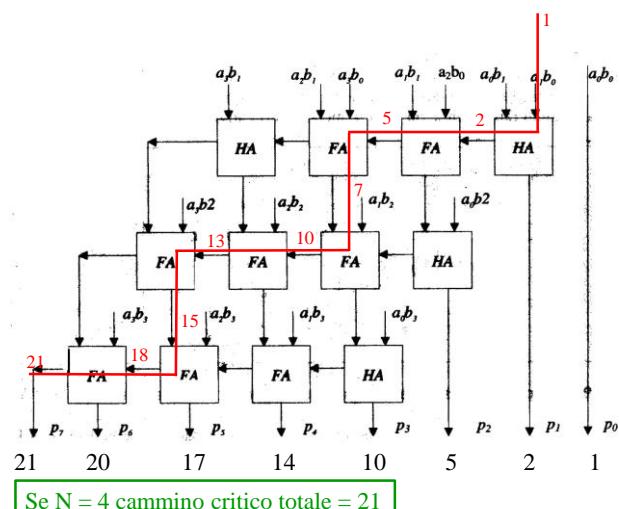


Quattro approcci tecnologici alla costruzione di una ALU (e di una CPU):

- **Approccio hardware mediante porte logiche.** E' un approccio esaustivo (tabellare). Per ogni funzione, per ogni ingresso viene memorizzata l'uscita. E' utilizzabile per funzioni molto particolari (ad esempio di una variabile). Non molto utilizzato.
- **Approccio hardware programmabile** (e.g. PLA, FPGA). Ad ogni operazione corrisponde un circuito combinatorio specifico.
- **Approccio firmware** (firm = stabile), o microprogrammato. Si dispone di circuiti specifici solamente per alcune operazioni elementari (tipicamente addizione e sottrazione). Le operazioni più complesse vengono sintetizzate collegando opportunamente i componenti, a partire dall'algoritmo che le implementa.



# Circuito hardware della moltiplicazione



*Come possiamo renderlo più flessibile? Come arrivare a un circuito che serva anche la divisione intera?*



# Algoritmo firmware per la moltiplicazione



Il rationale degli algoritmi firmware della moltiplicazione è il seguente.

Moltiplicando

1 1 0 1 1 x

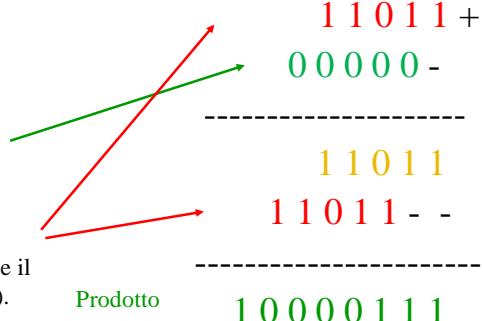
Moltiplicatore

1 0 1 =

-----

Si analizzano sequenzialmente i bit del moltiplicatore e si creano i **prodotti parziali**:

- 1) Si mette **0** (su n bit) nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 0).
- 2) Si mette una **copia del moltiplicando** (su n bit) nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore è = 1).



$$27 \times 5 = 135$$

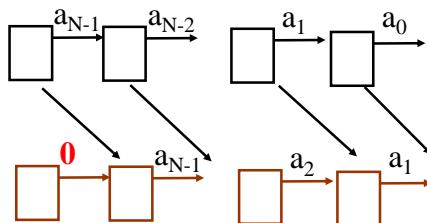


# Shift (scalamento) e somma



Dato A su 32 bit:  $a_j = a_{j-k}$  k shift amount ( $>, =, < 0$ ).

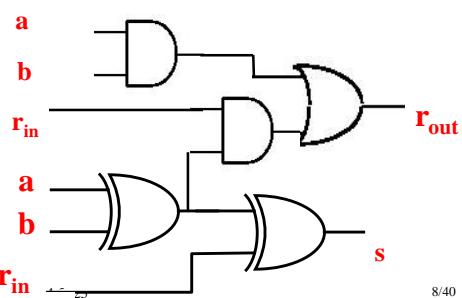
Esempio. shift dx 1 di una parola su N bit:



Il bit  $a_0$  si "perde".

Il bit  $a_{N-1} = 0$ .

$a_k = a_{k+1}$  per  $k=0,1,2,\dots,N-2$



Somma di 2 bit  
Utilizzo del riporto in ingresso  
Produzione del riporto in uscita



## Moltiplicazione utilizzando somma e shift



Analizzo sequenzialmente **ogni bit  $b_k$  del moltiplicatore**:

A0) Genero il primo e il secondo prodotto parziale

$$\begin{array}{r} 11011 \times \\ 01011 = \end{array}$$

A  
B

A1) Sommo il primo prodotto parziale al secondo e ottengo la prima somma parziale,

$$\begin{array}{r} 11011 + \\ 11011 - = \end{array}$$

$A * 2^0$   
 $A * 2^1$

A2) Sommo il moltiplicando alla somma parziale corrente se  $b_k = 1$ .

$$\begin{array}{r} 1010001 + \\ 00000 - - = \end{array}$$

$S_1$  ParzSum  
 $0 * 2^2$

A2) Sommo 0 al prodotto alla somma parziale se  $b_k = 0$ .

$$\begin{array}{r} 1010001 + \\ 11011 - - = \end{array}$$

$S_2$  ParzSum  
 $A * 2^3$

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando a ogni passo ( $A' = A * 2$ ).

$$\begin{array}{r} 100101001 + \\ 00000 - - - = \end{array}$$

$S_3$  ParzSum  
 $0 * 2^4$

$$\begin{aligned} 27 \times 11 &= 297 \\ 27 + 54 + 0 + 216 &= 297 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 100101001 \\ 1x2^8 + 1x2^5 + 1x2^3 + 1x2^0 = \\ 256 + 32 + 8 + 1 = 297 \end{array}$$

P Prodotto



## Moltiplicazione utilizzando somma e shift



Analizzo sequenzialmente **ogni bit  $b_k$  del moltiplicatore** e applico ad ogni passo le stesse operazioni.

Per ogni bit della parola (5 bit):

A1) Sommo il moltiplicando alla somma parziale corrente, P, se  $b_k = 1$ .

$$\begin{array}{r} 11011 \times \\ 01011 = \end{array}$$

A  
B

$$\begin{array}{r} 00000000000 + \\ 11011 = \end{array}$$

Initial P=0  
 $A * 2^0$

A2) Sommo 0 alla somma parziale corrente se  $b_k = 0$ .

$$\begin{array}{r} 0000011011 + \\ 11011 - = \end{array}$$

$S_1 = P + A * 2^1$   
 $A * 2^1$

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando ( $A' = A * 2$ ).

$$\begin{array}{r} 0001010001 + \\ 00000 - - = \end{array}$$

$S_2 = S_1 + A * 2^2$   
 $0 * 2^2$

$$27 \times 11 = 297$$

$$\begin{array}{r} 001010001 + \\ 11011 - - = \end{array}$$

$S_3 = S_2$   
 $A * 2^3$

P contiene le somme parziali, al termine conterrà la somma totale, cioè il risultato del prodotto.

$$\begin{array}{r} 00000 - - - = \\ 100101001 + \end{array}$$

$S_4 = S_3 + A * 2^4$   
 $0 * 2^4$

$$\begin{array}{r} 100101001 \\ 100101001 + \end{array}$$

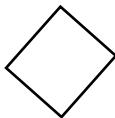
Final P =  $S_4 + 0$



## Diagrammi di flusso (flow chart)



Inizio / terminazione



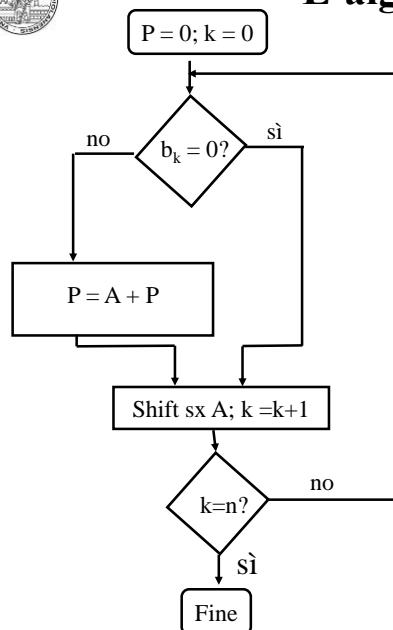
Test



Processo (esecuzione)



## L'algoritmo



A →  
B →

$$\begin{array}{r} 11011x \\ 01011 = \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0000000000 + \\ 11011 = \\ \hline \end{array}$$

Initial P=0      A \* 2<sup>0</sup>

$$\begin{array}{r} 0000011011 + \\ 11011 - = \\ \hline \end{array}$$

S<sub>1</sub>=P+A      A \* 2<sup>1</sup>

$$\begin{array}{r} 0001010001 + \\ 00000 - - = \\ \hline \end{array}$$

S<sub>2</sub>=S<sub>1</sub>+A      0 \* 2<sup>2</sup>

$$\begin{array}{r} 001010001 + \\ 11011 - - = \\ \hline \end{array}$$

S<sub>3</sub>=S<sub>2</sub>+0      A \* 2<sup>3</sup>

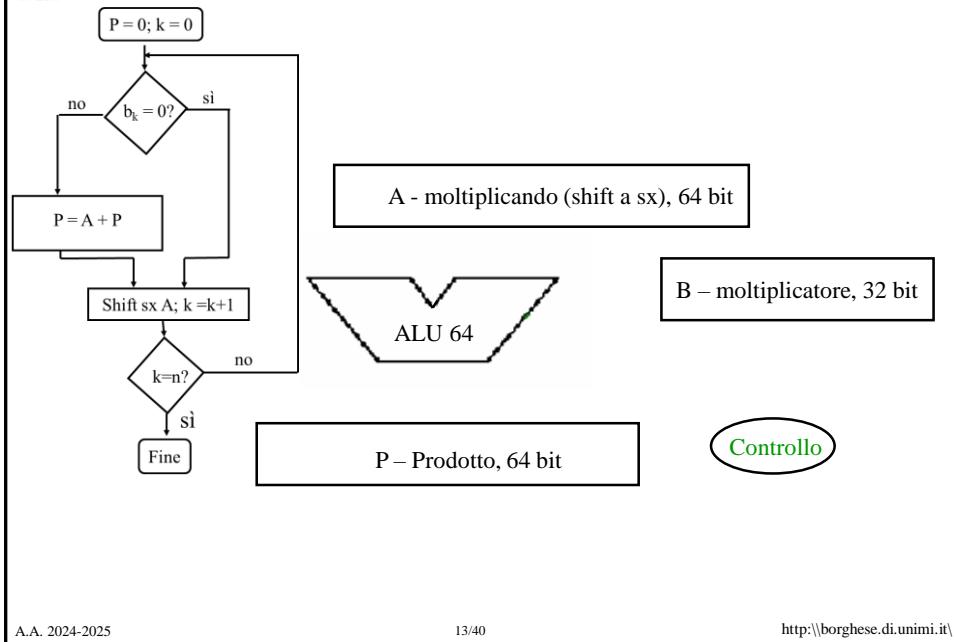
$$\begin{array}{r} 100101001 + \\ 00000 - - - = \\ \hline \end{array}$$

S<sub>4</sub>=S<sub>3</sub>+A      0 \* 2<sup>4</sup>

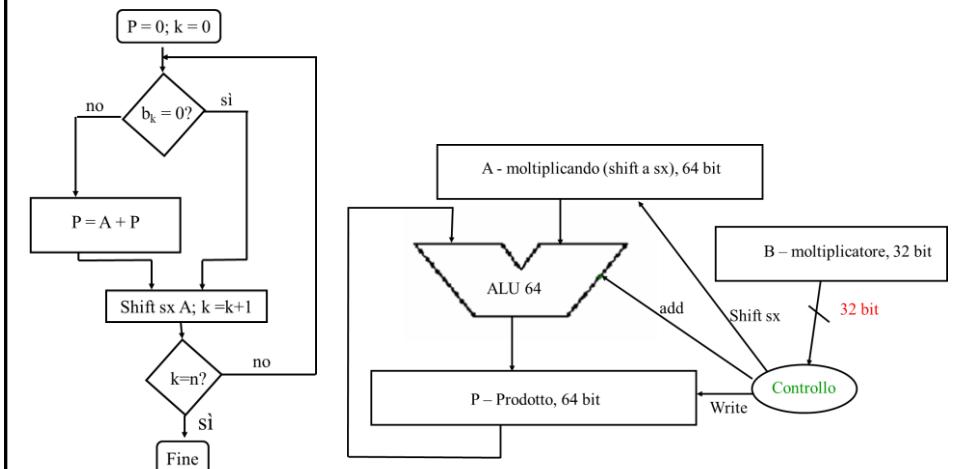
$$100101001 \quad \text{Final P=}S_4+0$$



## Implementazione circuitale – gli attori



## Implementazione circuitale



Qual'è il problema?



## Esempio su 4 bit

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
	$A \rightarrow 1010 \times 10_{10} \times$			
	$B \rightarrow 1011 = 11_{10}$			
	$-----$			
	$00000000 +$			
	$A = A * 2^0 \quad 1010 = A^0$			
	$-----$			
	$00001010 +$			
	$A^1 = A * 2^1 \quad 1010 - A^1$			
	$-----$			
	$00011110 +$			
	$A^2 = A * 2^2 \quad 0000 - A^2$			
	$-----$			
	$00011110 +$			
	$A^3 = A * 2^2 \quad 1010 - A^3$			
	$-----$			
	$P \rightarrow 01101110 \quad 110_{10}$			

A.A. 2024-2025

15/40



## Esempio – passo 1

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
				$10 * 1 + 0 = 10$

A.A. 2024-2025

16/40

<http://borgheze.di.unimi.it/>

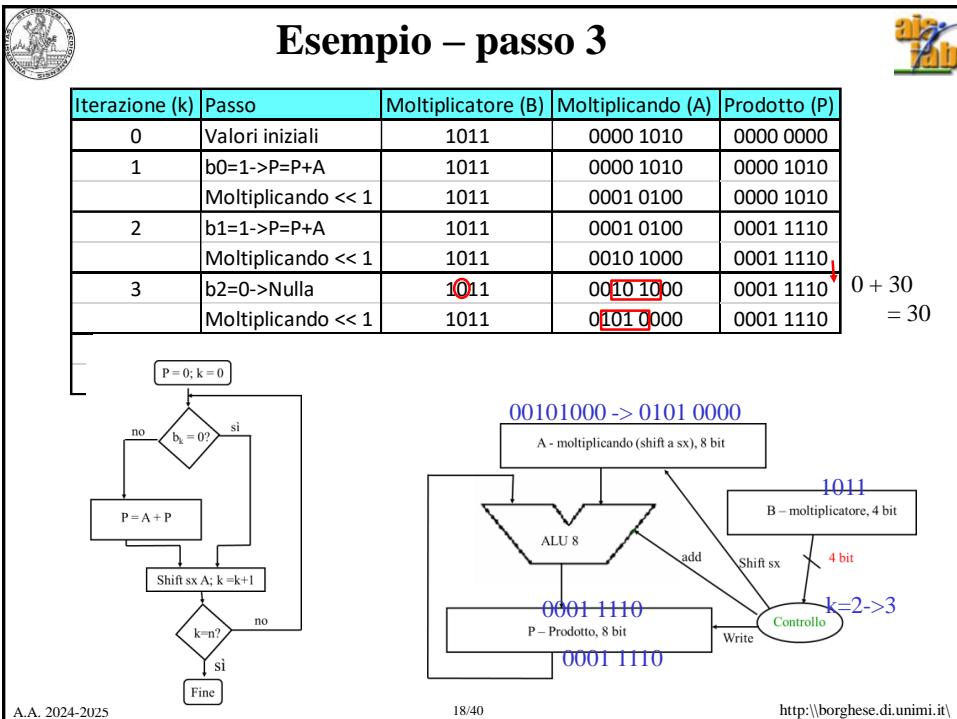
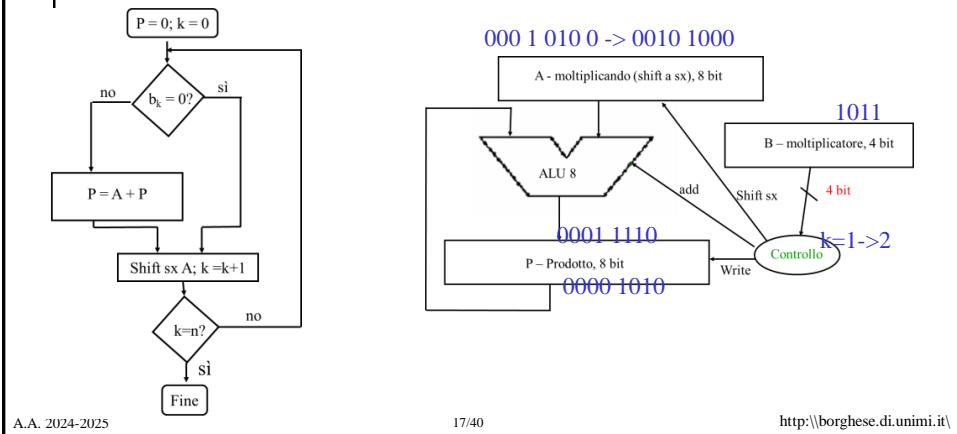


## Esempio – passo 2



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	$b_1=1 \rightarrow P=P+A$	1001	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110

$$10*2+10 = 30$$





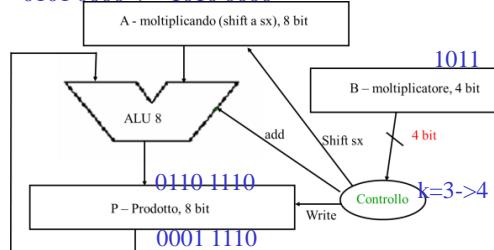
## Esempio – passo 4



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b1=1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b2=0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	b3=1->P=P+A	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110

$$10*8 + 30 = 110$$

0101 0000 -> 1010 0000



A.A. 2024-2025

19/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Esempio – riassunto



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b1=1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b2=0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	b3=1->P=P+A	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110

A.A.

20/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Esercizi



Costruire il circuito HW che esegui la moltiplicazione  $7 \times 9$  in base 2 su 4 bit.

Eseguire la stessa moltiplicazione secondo l'algoritmo visto, indicando passo per passo il contenuto dei 3 registri: A che contiene il moltiplicando, B che contiene il moltiplicatore e P che contiene somme parziali ed il risultato finale.



## Sommario



I moltiplicatori firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware



## Ottimizzazione

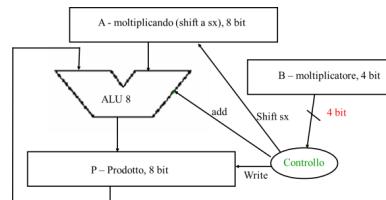
Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1010	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	$b_1=1 \rightarrow P=P+A$	1001	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	$b_2=0 \rightarrow \text{Nulla}$	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	$b_3=1 \rightarrow P=P+A$	0111	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110

- Inizializzo B (ho tutti i bit di B)
- A ogni passo leggo B, ma utilizzo solo 1 bit,  $b_k$
- Utilizzo  $b_k$  a ogni iterazione, **poi non serve più**.
- Non è necessario conservare tutti i bit di B per tutta la durata dell'operazione.

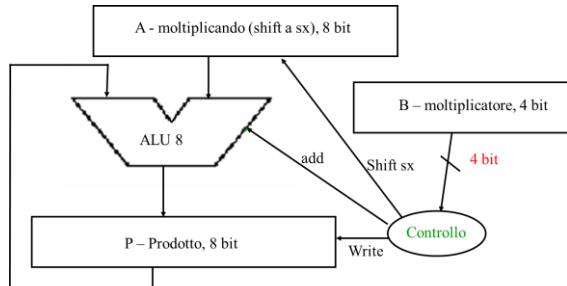
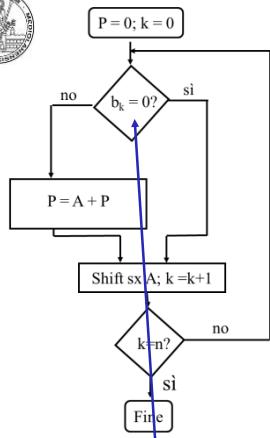
Situazione del tipo: **produttore-consumatore**.

Producio dei dati: la parola B.

Consumo i dati: 1 bit della parola B a ogni iterazione (consume = utilizzo una tantum e non riutilizzo in seguito.



## Razionale - I



Per scegliere,  $b_k$ , a ogni passo k, serve un mux all'interno dell'unità di controllo.

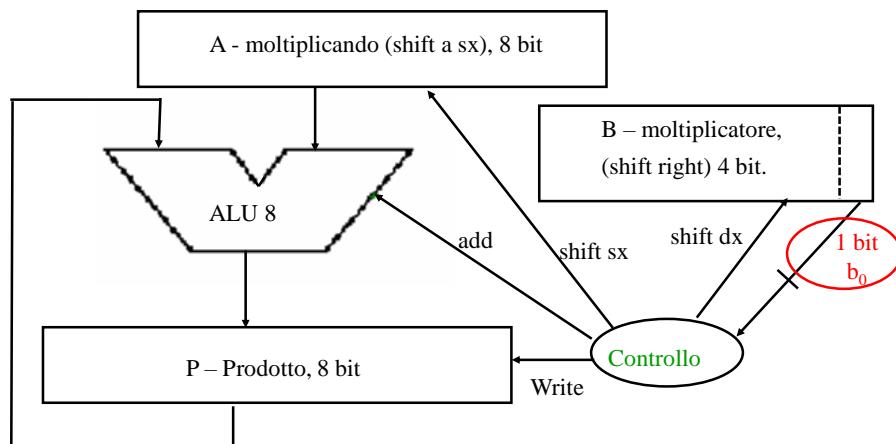
Posso ottenere lo stesso effetto in altro modo:

- Leggo  $b_0$
- Shift a dx di una posizione di B

Espongo così all'unità di controllo  $b_k$  a ogni iterazione.

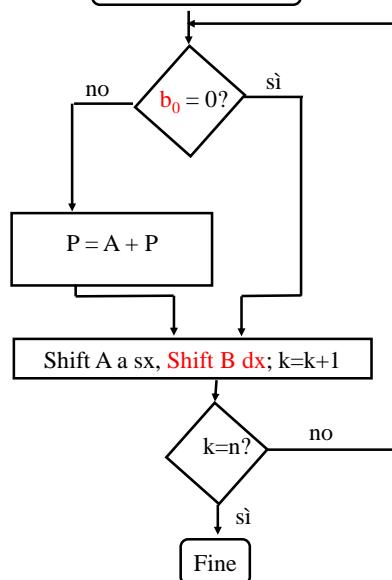


# Implementazione circuitale ottimizzata - I



Inizio; P = 0, k = 0

## L'algoritmo - I



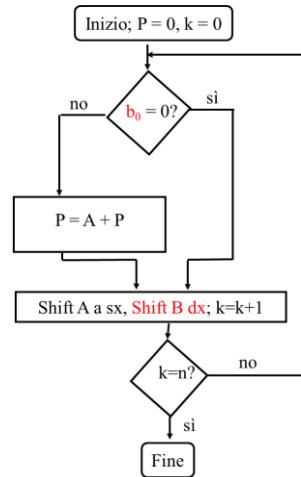
$$\begin{array}{rcl}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1010x \\
 B & \xrightarrow{\quad} & 1011 = \\
 \hline
 & & 00000000 + \\
 A = A * 2^0 & & 1010 = A^0 \\
 \hline
 & & 00001010 + \\
 A^1 = A * 2^1 & & 1010 - A^1 \\
 \hline
 & & 00011110 + \\
 A^2 = A * 2^2 & & 0000 - A^2 \\
 \hline
 & & 00011110 + \\
 A^3 = A * 2^3 & & 1010 - - - A^3 \\
 \hline
 P & \xrightarrow{\quad} & 01101110
 \end{array}$$



## Esecuzione - I



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	10 <del>1</del> 1	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	→ 0 101 1	000 1010 0	0000 1010
2	b0=1->P=P+A	0 10 <del>1</del> 1	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	→ 00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b0=0->Nulla	00 10 11	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	→ 000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b0=1->P=P+A	000 1 011	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110



## Razionale per una seconda implementazione



Metà' dei bit del registro moltiplicando vengono utilizzati a ogni iterazione.

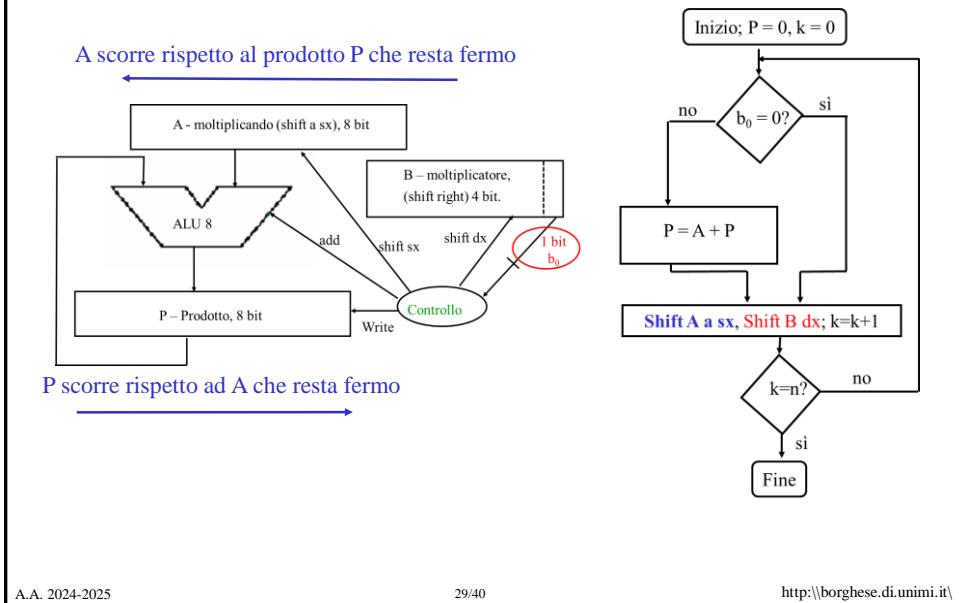
Gli N bit del moltiplicando sommati al registro prodotto vengono incolonnati di una posizione più a sinistra a ogni iterazione. Occupano N bit.

Ad ogni iterazione 1 bit del registro prodotto viene calcolato definitivamente.

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	10 <del>1</del> 1	0000 1010 → 0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101	000 1010 0	0000 1010
2	b0=1->P=P+A	→ 0 10 <del>1</del>	000 1010 0 → 0001 1110	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b0=0->Nulla	→ 00 10	00 1010 00 → 0001 1110	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b0=1->P=P+A	→ 000 1	0 1010 000 → 0110 1110	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110



## Analisi dello shift



## Razionale per una seconda implementazione



Ad ogni iterazione sommo N cifre (pari al numero di cifre del moltiplicando).

$$\begin{array}{r} 1010x \\ 1011 = \\ \hline \end{array}$$

Spostamento di A a sx rispetto al registro prodotto, P.

$$\begin{array}{r} 00000000+ \\ 1010 = \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} P \\ A^0 \end{array}$$

Spostamento di P a dx rispetto al registro moltiplicando, A

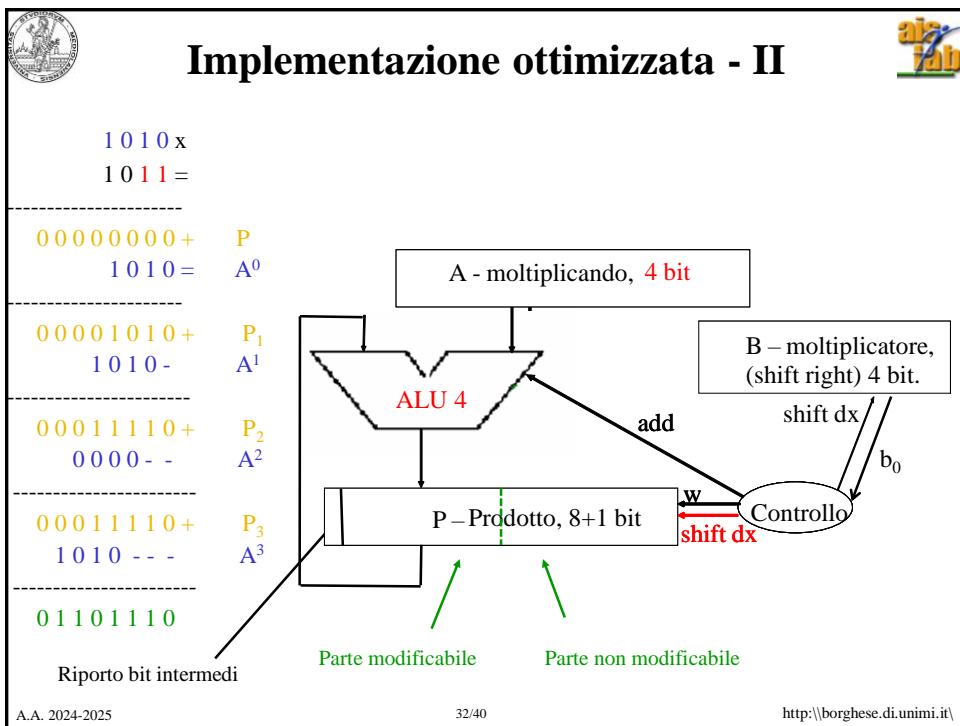
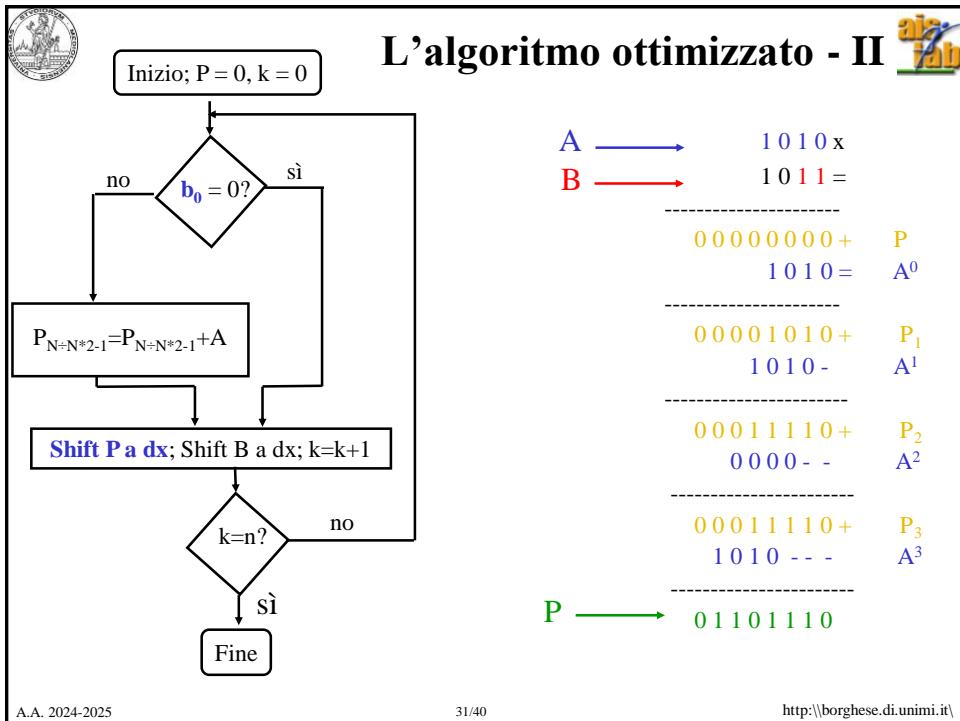
$$\begin{array}{r} 00001010+ \\ 1010 - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} P_1 \\ A^1 \end{array}$$

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1010	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101	000 1010 0	0000 1010
2	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	0 101	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	$b_0=0 \rightarrow \text{Nulla}$	00 10	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	0000	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110

$$\begin{array}{r} 00011110+ \\ 1010 --- \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} P_2 \\ A^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 00011110+ \\ 1010 --- \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} P_3 \\ A^3 \end{array}$$

$$01101110$$

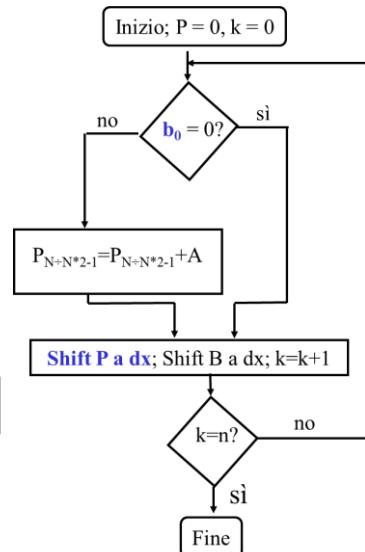




## Esecuzione - II



Iterazione	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1011	1010	1010 0000
	Prodotto >> 1	1011	1010	0 1010 0000
	Moltiplicatore >> 1	0 101	1010	0 1010 0000
2	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	0 101	1010	0 1010 0000
	Prodotto >> 1	0 101	1010	0 1110 0000
	Moltiplicatore >> 1	00 10	1010	0 1110 0000
3	$b_0=0 \rightarrow$ Nulla	00 10	1010	0 1110 0000
	Prodotto >> 1	00 10	1010	0 0111 0000
	Moltiplicatore >> 1	000 1	1010	0 0111 0000
4	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	000 1	1010	1 1011 0000
	Prodotto >> 1	0000	1010	0 110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010	0 111 1110



A.A. 2024-2025

33/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Razionale dell'implementazione - III



Il numero di bit del registro **prodotto** corrente (somma dei prodotti parziali) più il numero di bit da esaminare nel registro **moltiplicatore** rimane **costante** ad ogni iterazione (pari a 8 bit).

Si può perciò eliminare il registro moltiplicatore.

Iterazione	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1011	1010	1010 0000
	Prodotto >> 1	1011	1010	0 1010 0000
	Moltiplicatore >> 1	0 101	1010	0 1010 0000
2	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	0 101	1010	1 1110 0000
	Prodotto >> 1	0 101	1010	0 1110 0000
	Moltiplicatore >> 1	00 10	1010	0 1110 0000
3	$b_0=0 \rightarrow$ Nulla	00 10	1010	0 1110 0000
	Prodotto >> 1	00 10	1010	0 0111 0000
	Moltiplicatore >> 1	000 1	1010	0 0111 0000
4	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	000 1	1010	1 1011 0000
	Prodotto >> 1	0000	1010	0 110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010	0 111 1110

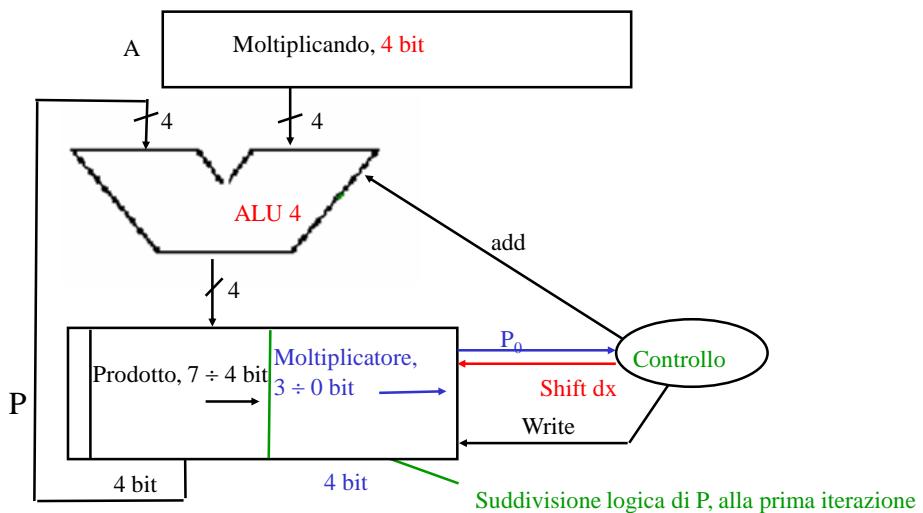
A.A. 2024-2025

34/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Circuito ottimizzato - III

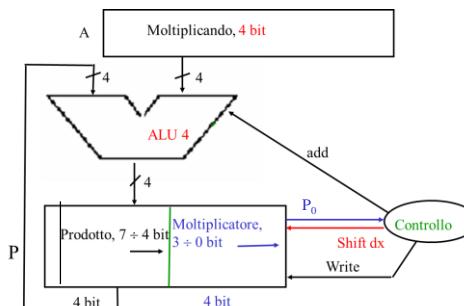
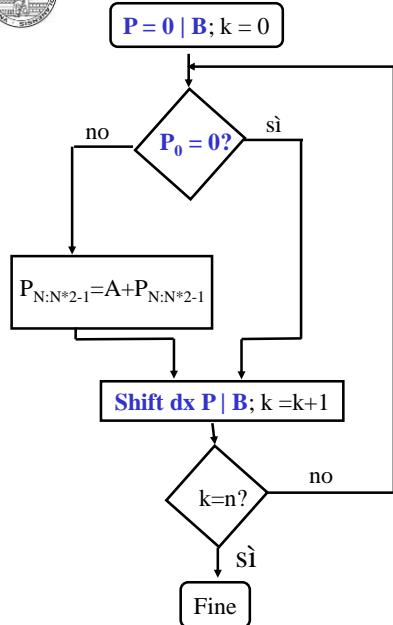


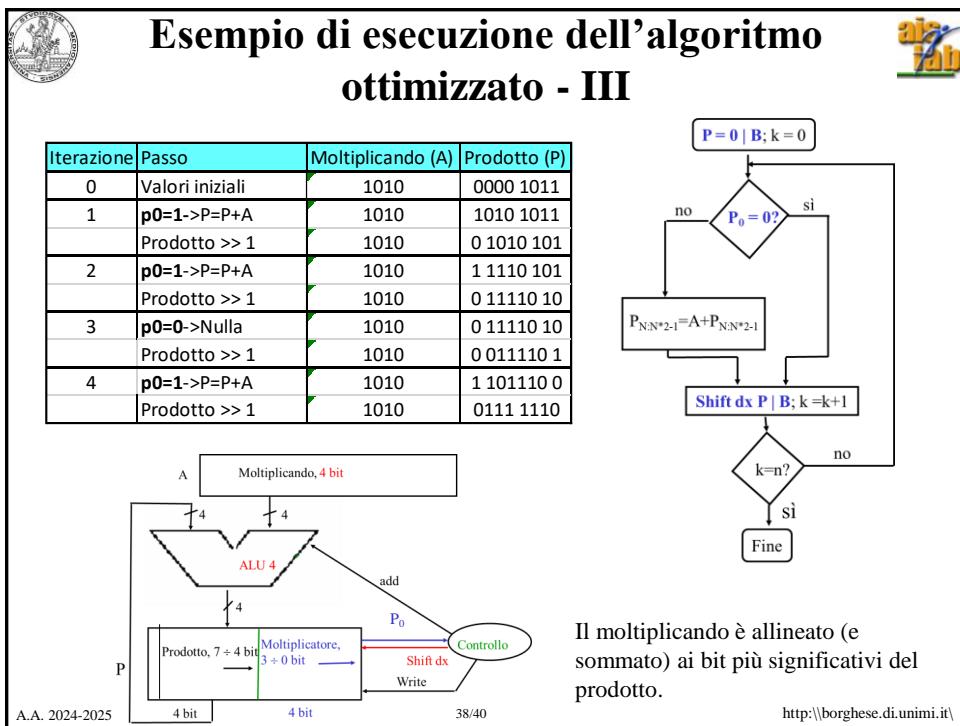
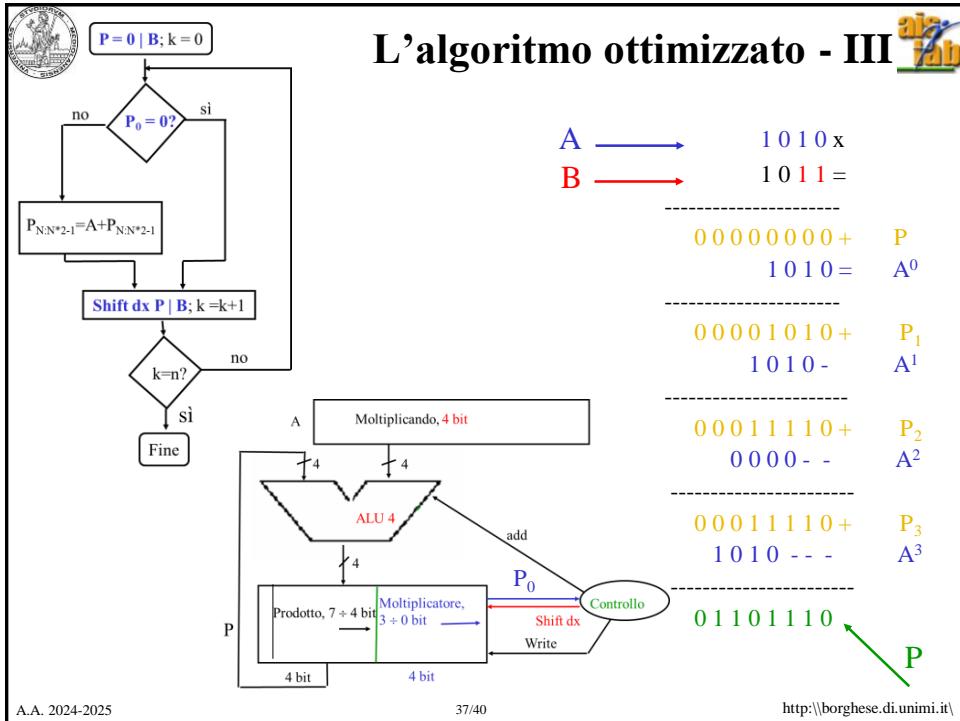
Il moltiplicando è allineato sempre ai 4 bit più significativi del prodotto.

Ad ogni iterazione, il prodotto si allarga, il moltiplicatore si restringe.



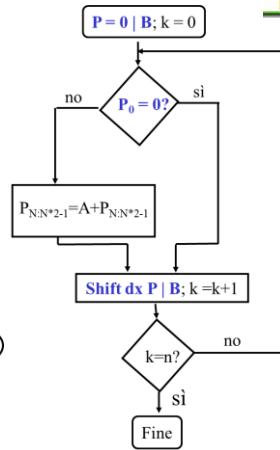
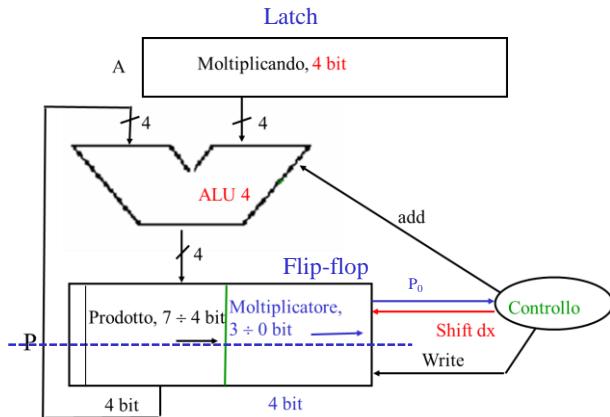
## Algoritmo ottimizzato







# Complessità



- Registro moltiplicando ( $4 \times 4 = 16$ ) – latch. Viene solo letto.
- Registro Prodotto ( $(8+1) \times 8 = 72$ ) – Flip flop perchè registro a scorrimento e perchè il suo contenuto viene letto e scritto.
- ALU4 ( $5 \times 4 = 20$ )
- UC ?

(Moltiplicatore HW aveva complessità 65 porte logiche), ma questo circuito può essere utilizzato anche per la divisione...

mi.it\|



# Sommario



I moltiplicatori firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware