



Macchine a Stati finiti

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimento al Patterson: Sezione B.10
(per approfondimenti, D.3 e D.4)



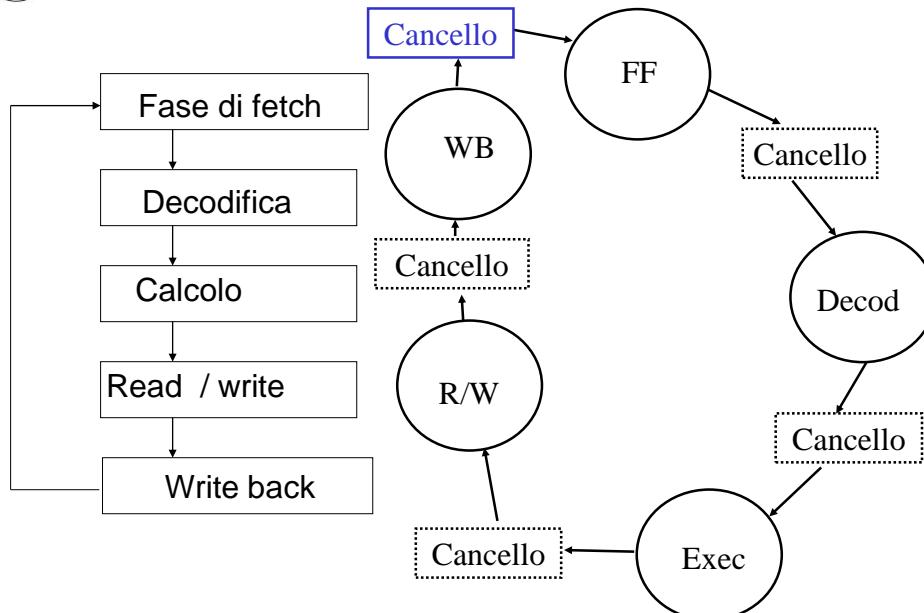
Sommario

Macchine a stati finiti

Esempio: sintesi di un controllore per venditore di bibite.



La CPU come macchina sequenziale



Controllore di una macchina venditrice di bibite



Voglio costruire un controllore di una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.

Accetta in **input**: {0c, 10c, 20c} e non dà resto.

Questo controllore produrrà in **output** 2 informazioni:

- N = No Caffè
- C = Caffè.

Noi vediamo solamente i dati di input e di output.

NB L'uscita non dipende dalla moneta inserita al tempo t, ma dipende dal totale!
Il totale richiede di tenere conto anche delle monete inserite in precedenza.

Il totale è la **situazione** della pancia della macchina -> **stato della macchina**

Lo stato è interno alla macchina.

Come?



Una macchina venditrice di bibite - I



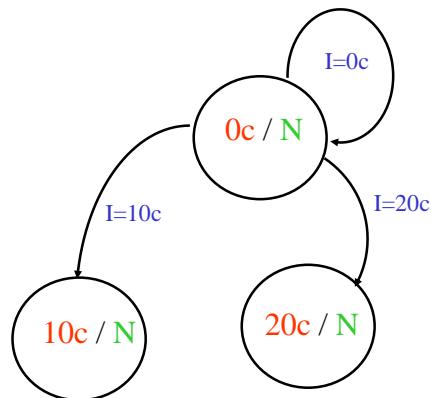
Voglio costruire un controllore di una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.

Accetta: {0c, 10c, 20c} e non dà resto.

N = No Caffè

C = Caffè.

Approccio costruttivo.



Una macchina venditrice di bibite - II



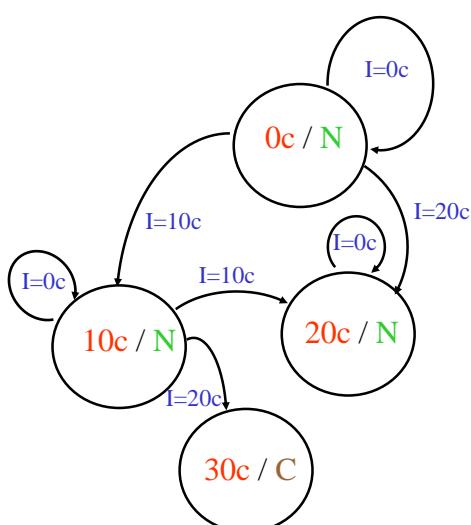
Voglio costruire un controllore di una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.

Accetta: {0c, 10c, 20c} e non dà resto.

N = No Caffè

C = Caffè.

Approccio costruttivo.





Una macchina venditrice di bibite - III

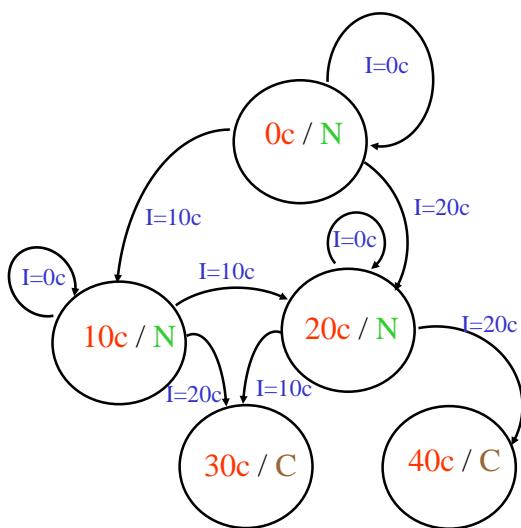


Voglio costruire una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.

Accetta: {0c, 10c, 20c} e non dà resto.

N = No Caffè
C = Caffè.

Approccio costruttivo.



Una macchina venditrice di bibite - IV

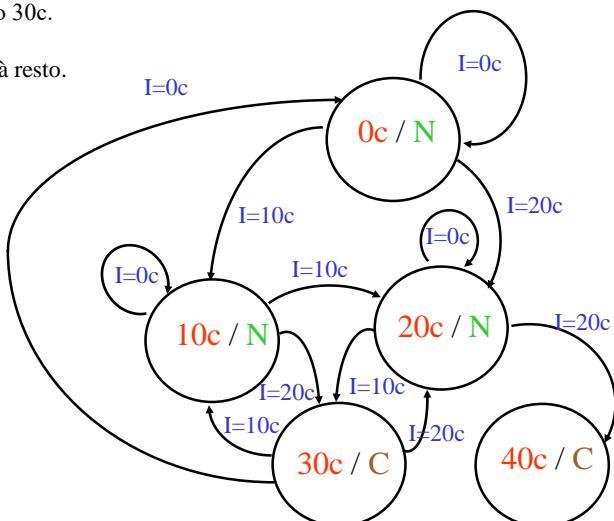


Voglio costruire una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.

Accetta: {0c, 10c, 20c} e non dà resto.

N = No Caffè
C = Caffè.

Approccio costruttivo.





Una macchina venditrice di bibite - V



Voglio costruire una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.

Accetta: {0c, 10c, 20c} e non dà resto.

N = No Caffè
C = Caffè.

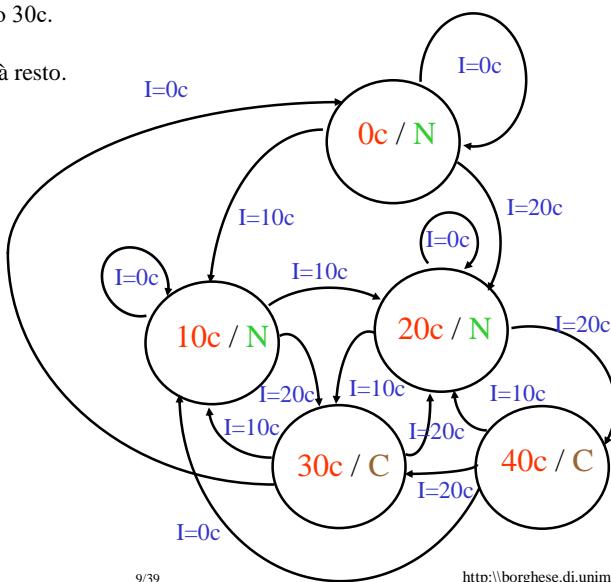
Approccio costruttivo.

Si suppone che la cifra in eccesso rimanga nella pancia della macchina.

A.A. 2024-2025

9/39

<http://borghese.di.unimi.it/>



State transition graph



Un grafo è un insieme di elementi detti **nodi** che possono essere collegati fra loro da linee chiamate **archi**.

Il totale è la situazione della pancia della macchina -> **stato della macchina**, i **nodi** del grafo.

La moneta inserita correntemente nella macchina rappresenta **l'input alla macchina**, un **arco** del grafo.

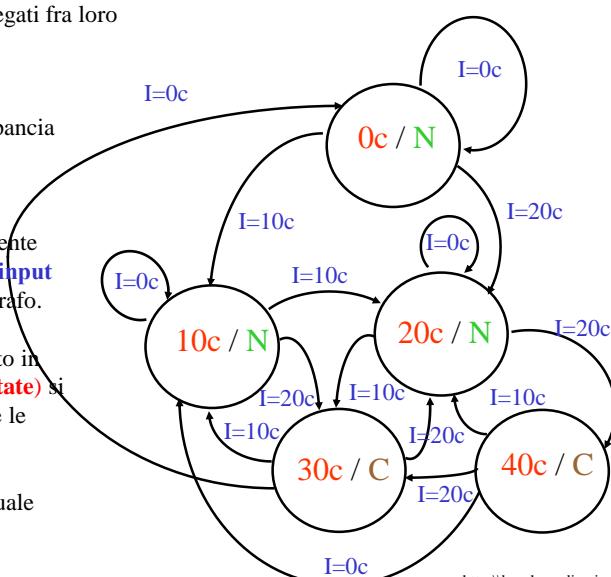
Per ogni stato, viene esaminato in quale **stato prossimo (next state)** si troverà la macchina. Descrivono le **transizioni di stato**.

Per ogni **stato** si determina quale sarà l'**uscita** della macchina.

A.A. 2024-2025

10/39

<http://borghese.di.unimi.it/>





Macchina a Stati Finiti (di Moore)



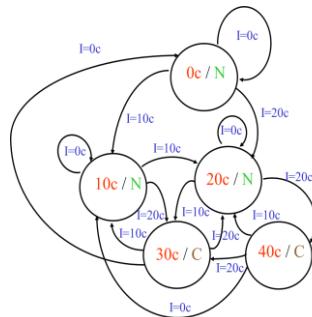
La Macchina di (Edward) Moore è definita, in teoria degli automi, dalla sestupla:

$$\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} \rangle$$

X: insieme degli stati (in numero finito).

I: insieme di ingresso: tutti i simboli che si possono presentare in ingresso.

Y: insieme di uscita: tutti i simboli che si possono produrre in uscita.



f(·): funzione stato prossimo: $X^* = f(X, I)$. Definisce l'evoluzione della macchina nel tempo. L'evoluzione è deterministica.

g(·): funzione di uscita: $Y = g(X)$, è **funzione solamente dello stato attuale** nelle macchine di Moore. Non è funzione dello stato prossimo, X^* .

Stato iniziale: X_{ini} . Per il buon funzionamento della macchina è previsto uno stato iniziale, al quale la macchina può essere portata mediante un comando di reset.



La nostra macchina di Moore



La Macchina di Moore è definita, in teoria degli automi, dalla sestupla:

$$\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} \rangle$$

X: insieme degli stati (in numero finito): $\{0c, 10c, 20c, 30c, 40c\}$

I: insieme di ingresso: tutti i simboli che si possono presentare in ingresso: $\{0c, 10c, 20c\}$

Y: insieme di uscita: tutti i simboli che si possono generare in uscita: $\{\text{Niente}, \text{Caffè}\}$.

f(·): funzione stato prossimo: $X^* = f(X, I)$. Definisce l'evoluzione della macchina nel tempo. L'evoluzione è deterministica.

g(·): funzione di uscita: $Y = g(X)$, è **funzione solamente dello stato attuale** nelle macchine di Moore. Non è funzione dello stato prossimo, X^* .

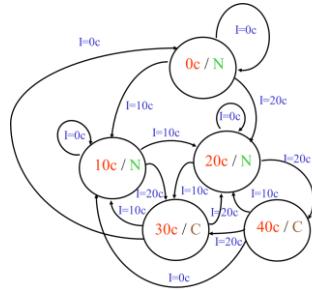
Stato iniziale: X_{ini} . Per il buon funzionamento della macchina è previsto uno stato iniziale, al quale la macchina può essere portata mediante un comando di reset.



Descrizione di una macchina di Moore



STG: State Transition Graph (Diagramma degli stati o Grafo delle transizioni). Ad ogni nodo è associato uno stato. Un arco orientato da uno stato x_i ad uno stato x_j , contrassegnato da un simbolo (di ingresso) α , rappresenta una transizione (passaggio di stato) che si verifica quando la macchina, essendo nello stato x_i , riceve come ingresso il simbolo α .



STT: State Transition Table (Tabella degli Stati). Per ogni coppia, (Stato presente – Ingresso), si definisce l’Uscita e lo Stato Prossimo. La forma è tabellare e ricorda le tabelle della verità da cui è derivata.



Sommario



Macchine a stati finiti

Esempio: sintesi di un controllore per venditore di bibite.



STG di una macchina venditrice di bibite (Semplificata)



Voglio costruire una macchinetta che eroga caffè quando l'utente ha inserito 30c.
Accetta solamente monete da 10c.

$$I = \{0c, 10c\}$$

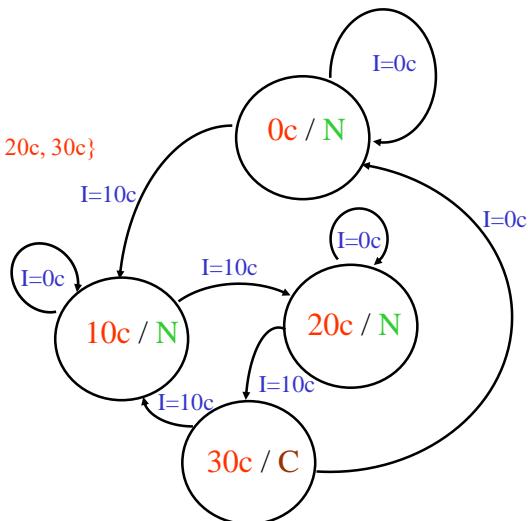
$$Y = \{\text{Nulla, Caffè}\}$$

$$X = \text{"Monete accumulate"} = \{0, 10c, 20c, 30c\}$$

$$X^* = f(X, I)$$

$$Y = g(X)$$

$$X_o = 0c$$



La Macchina di Moore è definita,
in teoria degli automi, dalla
 $\text{sestupla: } < X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} >$

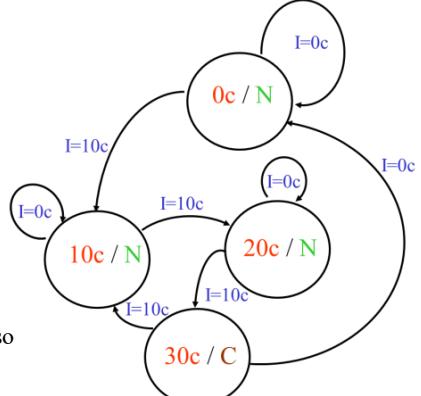


STT della vendor machine - I



X	I	I
0c	0c	10c
10c	10c	20c
20c	20c	30c
30c	0c	10c

$$X^*$$



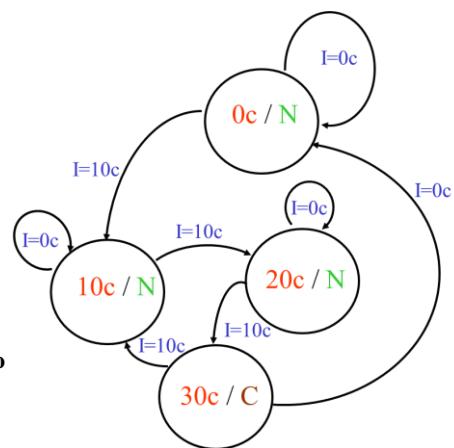
Il controllore controlla a ogni iterazione l'ingresso
e a ogni iterazione aggiorna lo **stato prossimo**,
 $X^* = f(X, I)$.



STT della vendor machine - II



X	Y
0c	Nulla
10c	Nulla
20c	Nulla
30c	Caffè



Il controllore controlla a ogni iterazione lo **stato attuale** aggiorna l'**uscita**, $Y = g(X)$

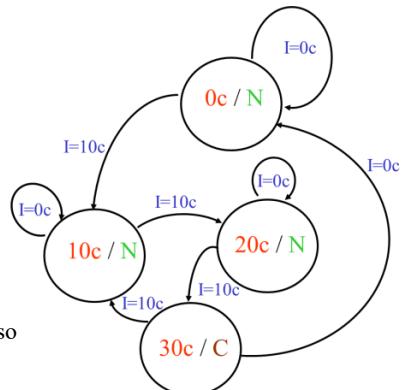


STT della vendor machine - III



I X	0c	10c	Y
0c	0c	10c	Nulla
10c	10c	20c	Nulla
20c	20c	30c	Nulla
30c	0c	10c	Caffè

X*



Il controllore controlla a ogni iterazione l'ingresso e a ogni iterazione aggiorna lo **stato prossimo**,
 $X^* = f(X, I)$ e l'**uscita**, $Y = g(X)$



Dal linguistico al numerico



X	I	I	Y
	0c	10c	
0c	0c	10c	Nulla
10c	10c	20c	Nulla
20c	20c	30c	Nulla
30c	0c	10c	Caffè

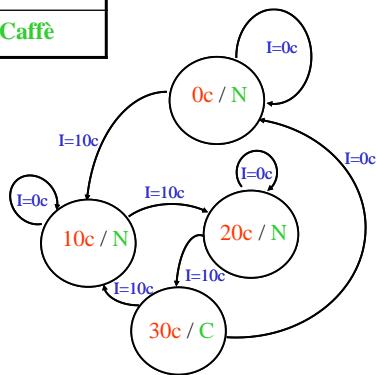
$I = \{0c, 10c\}$
 $Y = \{\text{Nulla}, \text{Caffè}\}$
 $X = \text{"Monete accumulate"} = \{0, 10c, 20c, 30c\}$

Occorre codificare ingresso, stato ed uscita.

=

Assegnare un **codice numerico** ad ogni possibile stato, ingresso, uscita.

Abbiamo definito: $\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} \rangle$



Codifica della STT della vendor machine



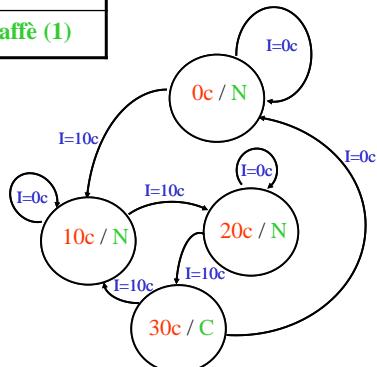
X	I	I	Y
	0c (0)	10c (1)	
0c (0)	0c (0)	10c (1)	Nulla (0)
10c (1)	10c (1)	20c (2)	Nulla (0)
20c (2)	20c (2)	30c (3)	Nulla (0)
30c (3)	0c (0)	10c (1)	Caffè (1)

$$\begin{aligned}
 I &= \{0c, 10c\} = & \{0, 1\} \\
 Y &= \{\text{Nulla}, \text{Caffè}\} = & \{0, 1\} \\
 X &= \{0, 10c, 20c, 30c\} = & \{0, 1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X^* &= f(X, I) \\
 Y &= g(X)
 \end{aligned}$$

da sintetizzare
da sintetizzare

Abbiamo definito: $\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} \rangle$





Significato della codifica



X	I	I	Y
	0c (0)	10c (1)	
0c (0)	0c (0)	10c (1)	Nulla (0)
10c (1)	10c (1)	20c (2)	Nulla (0)
20c (2)	20c (2)	30c (3)	Nulla (0)
30c (3)	0c (0)	10c (1)	Caffè (1)

$$I = \{0c, 10c\} = \{0, 1\}$$

$$Y = \{\text{Nulla}, \text{Caffè}\} = \{0, 1\}$$

$$X = \{0, 10c, 20c, 30c\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

if (stato == 3) the Y = 1

if (stato = 0 and I = 1) then stato_prossimo = 1

if (stato = 0 and I = 0) then stato_prossimo = 0

if (stato = 1 and I = 1) then stato_prossimo = 2

if (stato = 1 and I = 0) then stato_prossimo = 1

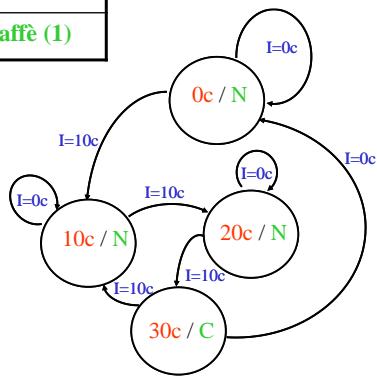
if (stato = 2 and I = 1) then stato_prossimo = 3

if (stato = 2 and I = 0) then stato_prossimo = 2

if (stato = 3 and I = 1) then stato_Prossimo = 1

if (stato = 3 and I = 0) then stato_Prossimo = 0

21/39



<http://borghese.di.unimi.it/>



Codifica binaria della STT



X	I	I	Y
	0c (00)	10c (01)	
0c (00)	0c (00)	10c (01)	Nulla (0)
10c (01)	10c (01)	20c (10)	Nulla (0)
20c (10)	20c (10)	30c (11)	Nulla (0)
30c (11)	0c (00)	10c (01)	Caffè (1)

$$I = \{0c, 10c\} =$$

$$\{0, 1\}$$

$$Y = \{\text{Nulla}, \text{Caffè}\} =$$

$$\{0, 1\}$$

$$X = \{0, 10c, 20c, 30c\} =$$

$$\{00, 01, 10, 11\}$$

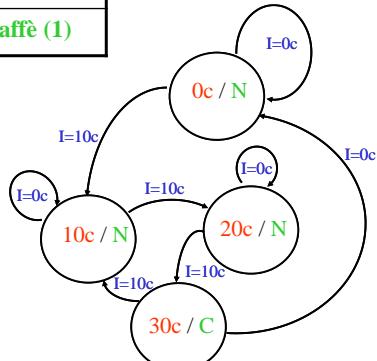
$$X^* = f(X, I)$$

da sintetizzare

$$Y = g(X)$$

da sintetizzare

Abbiamo definito: $\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} \rangle$



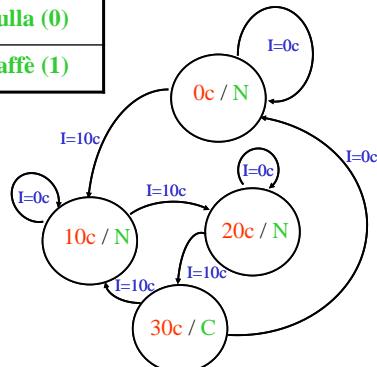


Significato della Codifica binaria della STT -

X	I	I	Y
	0c (0)	10c (1)	
0c (00)	0c (00)	10c (01)	Nulla (0)
10c (01)	10c (01)	20c (10)	Nulla (0)
20c (10)	20c (10)	30c (11)	Nulla (0)
30c (11)	0c (00)	10c (01)	Caffè (1)

$I = \{0c, 10c\} = \{0, 1\}$
 $Y = \{\text{Nulla, Caffè}\} = \{0, 1\}$
 $X = \{0, 10c, 20c, 30c\} = \{00, 01, 10, 11\}$

if ($X_1 == 1$ and $X_0 == 1$) the $Y = 1$

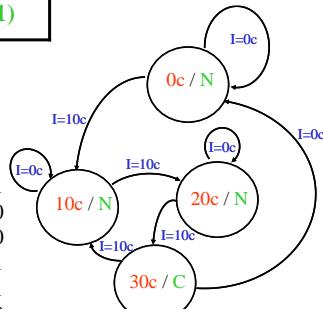


Significato della Codifica della STT - X_0^*

X	I	I	Y
	0c (0)	10c (1)	
0c (00)	0c (00)	10c (01)	Nulla (0)
10c (01)	10c (01)	20c (10)	Nulla (0)
20c (10)	20c (10)	30c (11)	Nulla (0)
30c (11)	0c (00)	10c (01)	Caffè (1)

$I = \{0c, 10c\} = \{0, 1\}$
 $Y = \{\text{Nulla, Caffè}\} = \{0, 1\}$
 $X = \{0, 10c, 20c, 30c\} = \{00, 01, 10, 11\}$

if ($(X_1 == 0$ and $X_0 == 0)$ and $I = 1$) then $\text{LSB_stato_prossimo} = X_0^* = 1$
 if ($(X_1 == 0$ and $X_0 == 0)$ and $I = 0$) then $\text{LSB_stato_prossimo} = X_0^* = 0$
 if ($(X_1 == 0$ and $X_0 == 1)$ and $I = 1$) then $\text{LSB_stato_prossimo} = X_0^* = 0$
 if ($(X_1 == 0$ and $X_0 == 1)$ and $I = 0$) then $\text{LSB_stato_prossimo} = X_0^* = 1$
 if ($(X_1 == 1$ and $X_0 == 0)$ and $I = 1$) then $\text{LSB_stato_prossimo} = X_0^* = 1$
 if ($(X_1 == 1$ and $X_0 == 0)$ and $I = 0$) then $\text{LSB_stato_prossimo} = X_0^* = 0$
 if ($(X_1 == 1$ and $X_0 == 1)$ and $I = 1$) then $\text{LSB_stato_Prossimo} = X_0^* = 1$
 if ($(X_1 == 1$ and $X_0 == 1)$ and $I = 0$) then $\text{LSB_stato_Prossimo} = X_0^* = 0$



Significato della Codifica della STT - S_1^*

The table shows the relationship between input I , state X , and output Y :

X	I		Y
	$0c\ (0)$	$10c\ (1)$	
$0c\ (00)$	$0c\ (00)$	$10c\ (01)$	Nulla (0)
$10c\ (01)$	$10c\ (01)$	$20c\ (10)$	Nulla (0)
$20c\ (10)$	$20c\ (10)$	$30c\ (11)$	Nulla (0)
$30c\ (11)$	$0c\ (00)$	$10c\ (01)$	Caffè (1)

Below the table:

- $I = \{0c, 10c\} = \{0, 1\}$
- $Y = \{\text{Nulla, Caffè}\} = \{0, 1\}$
- $X = \{0, 10c, 20c, 30c\} = \{00, 01, 10, 11\}$

X^* indicates the next state transition.

The state transition graph shows four states: $0c / N$, $10c / N$, $20c / N$, and $30c / C$. Transitions are labeled with inputs $I=0c$ and $I=10c$.

http://borgheze.di.unimi.it/

Macchina a Stati Finiti (di Moore)

La Macchina di Moore è definita, in teoria degli automi, dalla sestupla:

$$\langle X, I, Y, f(\cdot), g(\cdot), X_{\text{ini}} \rangle$$

X: insieme degli stati (in numero finito).

I: insieme di ingresso: tutti i simboli che si possono presentare in ingresso. In caso di codifica binaria, se abbiamo n linee in ingresso (variabili binarie), avremo 2^n possibili simboli da leggere in ingresso (configurazioni).

Y: insieme di uscita: tutti i simboli che si possono generare in uscita. In caso di codifica binaria, se abbiamo m linee in uscita (variabili binarie), avremo 2^m possibili simboli in uscita (configurazioni).

f(·): funzione stato prossimo: $X' = f(X, I)$. Definisce l'evoluzione della macchina nel tempo. L'evoluzione è deterministica. La funzione è una funzione logica.

g(·): funzione di uscita: $Y = g(X)$ nelle macchine di Moore. E' una funzione logica.

Stato iniziale: X_{ini} : Per il buon funzionamento della macchina è previsto uno stato iniziale, al quale la macchina può essere portata mediante un comando di reset.

A.A. 2024-2025 26/39 http://borgheze.di.unimi.it/



Codifica binaria della FSM della Vendor Machine

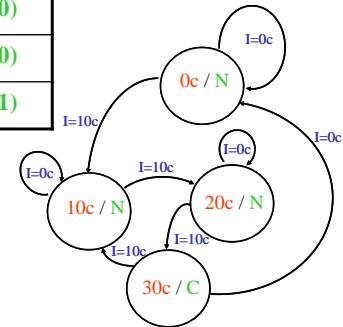


I	I	Y
X - X₁X₀	0c (0)	10c (1)
0c (00)	0c (00)	10c (01)
10c (01)	10c (01)	20c (10)
20c (10)	20c (10)	30c (11)
30c (11)	0c (00)	10c (01)

X è su 2 cifre =>
2 bit X₁ e X₀

$$\begin{aligned} I &= \{0c, 10c\} = & \{0, 1\} \\ Y &= \{\text{Nulla, Caffè}\} = & \{0, 1\} \\ X &= \{0, 10c, 20c, 30c\} = & \{00, 01, 10, 11\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^* &= f(X, I) && \text{da sintetizzare} \\ Y &= g(X) && \text{da sintetizzare} \end{aligned}$$



Abbiamo definito: < X, I, Y, f(.), g(.), X_{ini} >



Sintesi della funzione di uscita della FSM della Vendor Machine

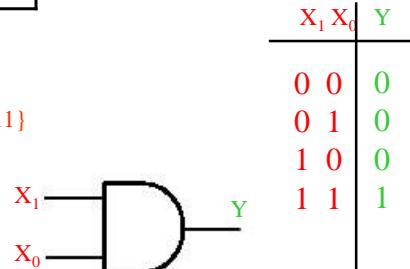


I	Y
X - X₁X₀	
(0c) 00	(Nulla) 0
(10c) 01	(Nulla) 0
(20c) 10	(Nulla) 0
(30c) 11	(Caffè) 1

X è su 2 cifre =>
2 bit X₁ e X₀

$$\begin{aligned} I &= \{0c, 10c\} = & \{0, 1\} \\ Y &= \{\text{Nulla, Caffè}\} = & \{0, 1\} \\ X &= \{0, 10c, 20c, 30c\} = & \{00, 01, 10, 11\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^* &= f(X, I) && \text{a sintetizzare} \\ Y &= g(X) && \text{da sintetizzare} \end{aligned}$$





Sintesi della funzione stato prossimo della FSM della Vendor Machine



I	I	
$X - X_1 X_0$	0c (0)	10c (1)
0c (00)	0c (00)	10c (01)
10c (01)	10c (01)	20c (10)
20c (10)	20c (10)	30c (11)
30c (11)	0c (00)	10c (01)

$$I = \{0, 1\}$$

$$Y = \{0, 1\}$$

$$X = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$X^* = f(X, I)$$

$$Y = g(X) = X_1 X_0$$

X è su 2 cifre => 2 bit: X_1 e X_0

Devo sintetizzare:

$$X_1^{t+1} = f_1(X_0^t, X_1^t, I)$$

$$X_0^{t+1} = f_0(X_0^t, X_1^t, I)$$

$X_1 X_0 I$	$X^*_1 X^*_0$
0 0 0	0 0
0 0 1	0 1
0 1 0	0 1
0 1 1	1 0
1 0 0	1 0
1 0 1	1 1
1 1 0	0 0
1 1 1	0 1

<http://borghese.di.unimi.it/>

A



Sintesi della funzione stato prossimo della FSM della Vendor Machine



I	I		Y
$X_1 X_0$	0	1	
0 0	00	01	0
0 1	01	10	0
1 0	10	11	0
1 1	00	01	1

$$I = \{0, 1\}$$

$$Y = \{0, 1\}$$

$$X = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$X^* = f(X, I) \Rightarrow X^*_0 = I \bar{X}_1 \bar{X}_0 + \bar{I} \bar{X}_1 X_0 + I \bar{X}_1 \bar{X}_0 + I X_1 X_0 =$$

$$I(X_1 + X_0) + I X_1 X_0$$

$$X^*_1 = \dots$$

X è su 2 cifre => 2 bit: X_1 e X_0

Devo sintetizzare:

$$X_1^{t+1} = f_1(X_0^t, X_1^t, I)$$

$$X_0^{t+1} = f_0(X_0^t, X_1^t, I)$$

$X_1 X_0 I$	$X^*_1 X^*_0$
0 0 0	0 0
0 0 1	0 1
0 1 0	0 1
0 1 1	1 0
1 0 0	1 0
1 0 1	1 1
1 1 0	0 0
1 1 1	0 1

<http://borghese.di.unimi.it/>

I 2 bit di stato prossimo vengono sintetizzati separatamente. Sono entrambi funzione dei 2 bit di stato all'istante attuale e del bit di ingresso



Sintesi della funzione stato prossimo della FSM della Vendor Machine



$X_1 X_0$	I	I
	0	1
0 0	00	01
0 1	01	10
1 0	10	11
1 1	00	01

I = {0, 1}

Y = {0, 1}

X = {00, 01, 10, 11}

$$X^* = f(X, I) \Rightarrow X_0^* = I \bar{X}_1 \bar{X}_0 + \bar{I} \bar{X}_1 X_0 + I \bar{X}_1 X_0 + I X_1 X_0 =$$

$$I(X_1 + X_0) + I X_1 X_0$$

$$X_1^* = X_1 \bar{X}_0 + \bar{X}_1 X_0 I$$

$$X^* = \{X_1^* \ X_0^*\}$$

$X_1 \ X_0 \ I$	$X_1^* \ X_0^*$
0 0 0	0 0
0 0 1	0 1
0 1 0	0 1
0 1 1	1 0
1 0 0	1 0
1 0 1	1 1
1 1 0	0 0
1 1 1	0 1

I 2 bit di stato prossimo vengono sintetizzati separatamente. Sono entrambi funzione dei 2 bit di stato all'istante attuale e del bit di ingresso

<http://borgheze.di.unimi.it/>

X è su 2 cifre => 2 bit: X₁ e X₀

Devo sintetizzare:

$$X_1^{t+1} = f_1(X_0^t, X_1^t, I)$$

$$X_0^{t+1} = f_0(X_0^t, X_1^t, I)$$



Sintesi della funzione stato prossimo della FSM della Vendor Machine



$X_1 X_0$	I	I	Y
	0	1	
0 0	00	01	0
0 1	01	10	0
1 0	10	11	0
1 1	00	01	1

I = {0, 1}

Y = {0, 1}

X = {00, 01, 10, 11}

$$X^* = f(X, I) \Rightarrow X_0^* = I (X_1 + \bar{X}_1 \bar{X}_0) + \bar{I} \bar{X}_1 X_0 = \\ -I(X_1 + X_0) + I X_1 X_0$$

$$X_1^* = X_1 X_0 + X_1 X_0 I$$

$$Y = g(X) = X_1 X_0$$

X è su 2 cifre => 2 bit: X₁ e X₀

Devo sintetizzare:

$$X_1^{t+1} = f_1(X_0^t, X_1^t, I)$$

$$X_0^{t+1} = f_0(X_0^t, X_1^t, I)$$

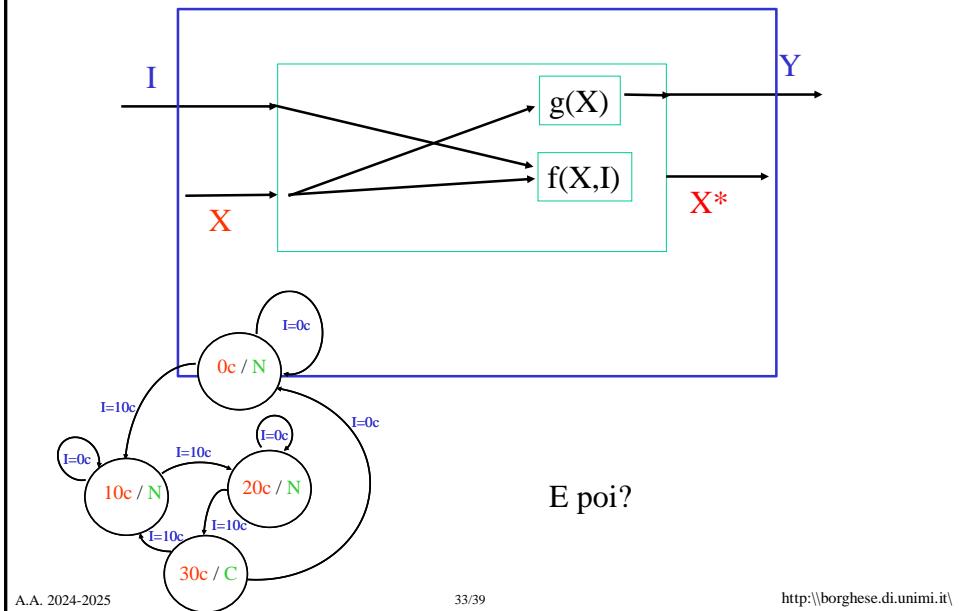
$X_1 \ X_0 \ I$	$X_1^* \ X_0^*$
0 0 0	0 0
0 0 1	0 1
0 1 0	0 1
0 1 1	1 0
1 0 0	1 0
1 0 1	1 1
1 1 0	0 0
1 1 1	0 1

I 2 bit di stato prossimo vengono sintetizzati separatamente. Sono entrambi funzione dei 2 bit di stato all'istante attuale e del bit di ingresso

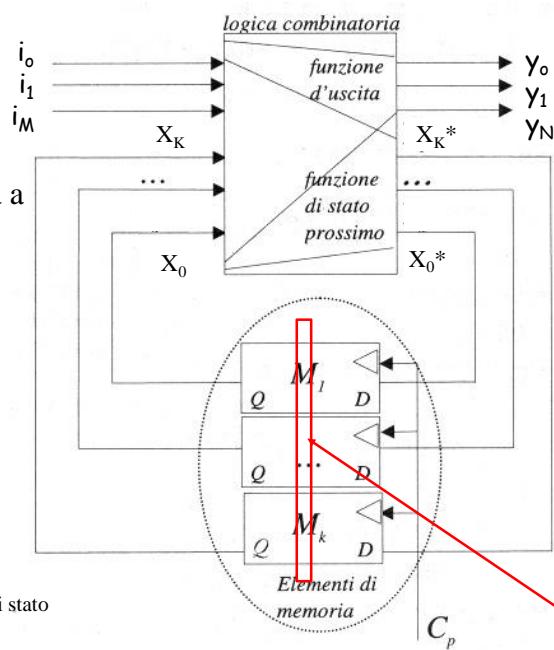
<http://borgheze.di.unimi.it/>



La situazione



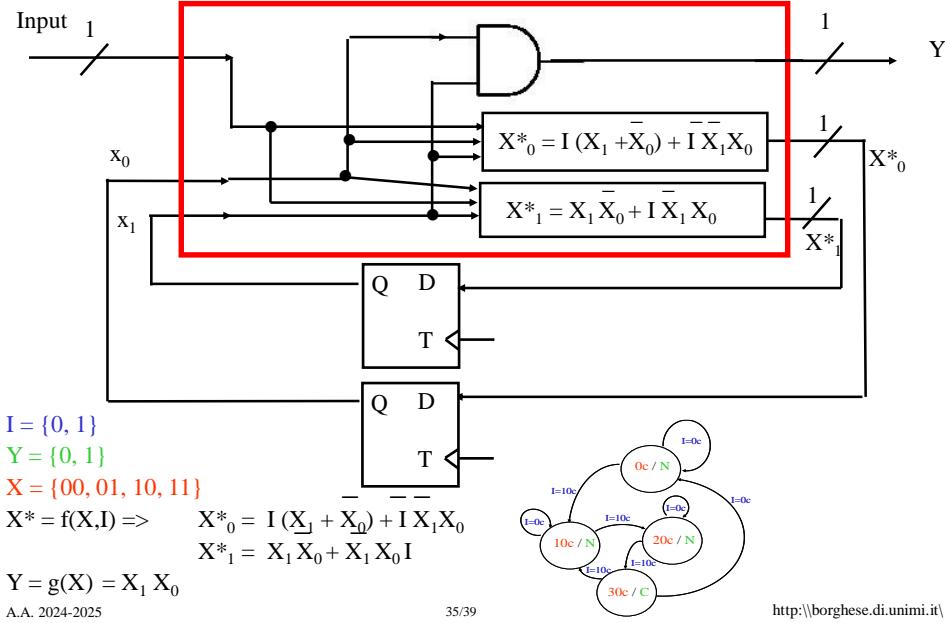
Macchina a
stati finiti
binaria



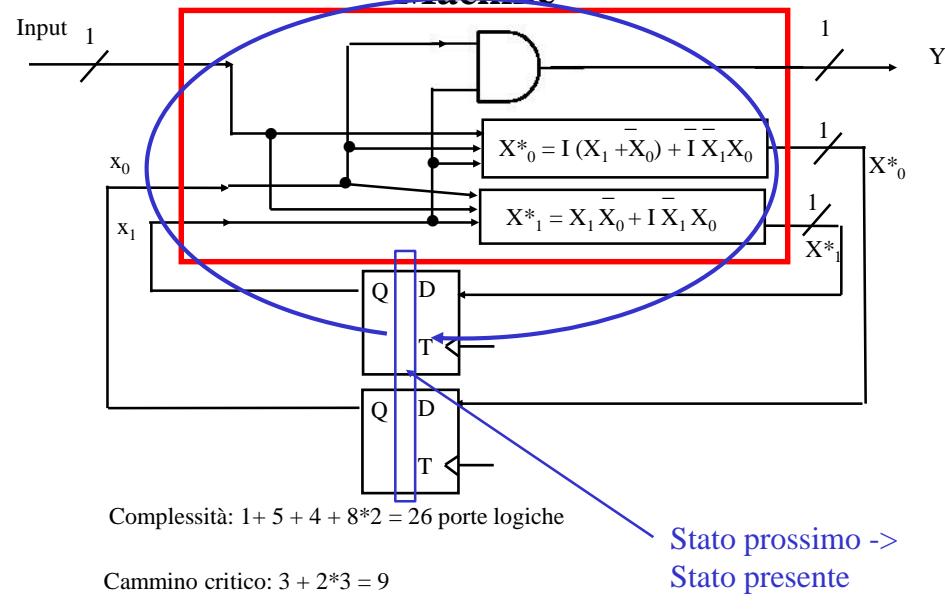
Macchina di Huffman



Sintesi del circuito della FSM della Vendor Machine



Sintesi del circuito della FSM della Vendor Machine

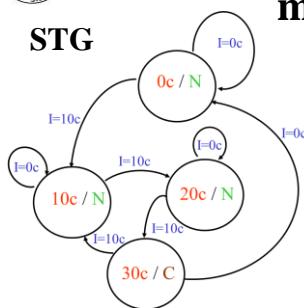




I passi per la progettazione di una macchina di Huffman



STG



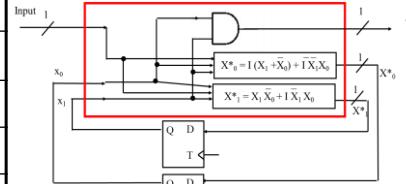
I	Y		
X	0c	10c	Y
0c	0c	10c	Nulla
10c	10c	20c	Nulla
20c	20c	30c	Nulla
30c	0c	10c	Caffè

STT

STT codificata

I	Y		
X - X ₁ X ₀	0c (0)	10c (1)	Y
0c (00)	0c (00)	10c (01)	Nulla (0)
10c (01)	10c (01)	20c (10)	Nulla (0)
20c (10)	20c (10)	30c (11)	Nulla (0)
30c (11)	0c (00)	10c (01)	Caffè (1)

Macchina di Huffman



Una vending machine più completa.



Monete diverse dai 10c.

Scelta di bevande diverse.

Bevande diversi con costi diversi.

Periodo di refrattarietà nella quale non si possono inserire monete (periodo di preparazione del caffè).

.....



Sommario



Macchine a stati finiti.

Esempio: sintesi di un controllore per venditore di bibite.