Laboratorio di Architetture degli Elaboratori I
Corso di Laurea in Informatica, A.A. 2023-2024
Università degli Studi di Milano

Introduzione alla rappresentazione dei numeri

Turno A: Gabriella Trucco, Cognomi A-D, gabriella.trucco@unimi.it
Turno B: Massimo W. Rivolta, Cognomi E-O, massimo.rivolta@unimi.it
Turno C: Matteo Re, Cognomi P-Z, matteo.re@unimi.it

Riferirsi al sito Ariel del docente di teoria per i dettagli organizzativi

Informazioni

- Sito web del corso:

https://nbasilicoae1.ariel.ctu.unimi.it/v5/home/Default.aspx

https://aborgheseae1.ariel.ctu.unimi.it/v5/home/Default.aspx

- Esame: prova in laboratorio

Rappresentazione dei numeri: notazione posizionale

- Base B: numero di simboli usati per rappresentare i numeri nel sistema posizionale.
  - $B = 10$, simboli $\{0, 1, \ldots, 9\}$
  - $B = 16$, simboli $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- Notazione posizionale:
  - ogni simbolo ha una posizione, descritta con un intero i
  - ad ogni posizione i si associa un peso p_i
  - al simbolo in posizione i viene associato il valore dato da:

$$\left[\text{VALORE DEL SIMBOLO IN POSIZIONE } i\right] \times p_i$$

  - di solito $p_i = B^i$
  - più è alto il peso associato a un simbolo, più significativo è quel simbolo

Rappresentazione dei numeri: notazione posizionale

Esempio: $(147)_{10}$

cifre	1	4	7
posizioni i	2	1	0
pesi p_i	10^2	10^1	10^0

$$(147)_{10} = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

In generale, dato un N intero non negativo scritto con n cifre come $(c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_0)_B$, il valore rappresentato è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot B^i = c_0 \cdot B^0 + c_1 \cdot B^1 + \ldots + c_{n-2} \cdot B^{n-2} + c_{n-1} \cdot B^{n-1}$$

Da base B a base decimale

- PROBLEMA: Scrivere in base $B = 10$ un numero dato in base $B \neq 10$ ($B = 2$ o $B = 16$)
- SOLUZIONE: applicare il metodo **polinomiale**

Esempio 1:

$$(1010)_2 = (10)_{10}$$

Esempio 2:

$$(3AC)_{16} = (940)_{10}$$

Da base decimale a base B

- PROBLEMA: Scrivere in base $B \neq 10$ ($B = 2$ o $B = 16$) un numero dato in base $B = 10$
- SOLUZIONE: applicare il metodo **iterativo** (divisioni)

Procedimento

Abbiamo un numero $(N)_{10}$ da convertire nella base B:

1. dividere N per B (con una divisione intera);
2. il resto della divisione diventa la prima cifra meno significativa che resta da calcolare del numero in base B;
3. se il quoziente è 0 abbiamo finito;
4. se il quoziente è diverso da zero si torna al passo **1** considerando il quoziente come dividendo;

Da base decimale a base B

Esempio 1: $(13)_{10} = (?)_2$

$$
\left.\begin{array}{rll}
13 : 2 = 6 & \text{resto} = 1 & \text{LSD} \\
6 : 2 = 3 & \text{resto} = 0 & \\
3 : 2 = 1 & \text{resto} = 1 & \\
1 : 2 = 0 & \text{resto} = 1 & \text{MSD}
\end{array}\right| \quad (13)_{10} = (1101)_2
$$

Esempio 2: $(4021)_{10} = (?)_{16}$

Da base B = 2 a base B = 16 e vice versa

- PROBLEMA: Scrivere in base $B = 2$ ($B = 16$) un numero dato in base $B = 16$ ($B = 2$)
- SOLUZIONE: **raggruppamento** dei simboli e **lookup table**

Esempio 1: $(111001)_2 = (?)_{16}$
$16 = 2^4$, raggruppo i bit partendo da destra a gruppi di 4:

$$0011 \mid 1001$$

Con 4 bit ho 2^4 valori, uno per ogni simbolo della base $B = 16$.

0	0000	4	0100	8	1000	C	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	E	1110
3	0011	7	0111	B	1011	F	1111

Ispezionando la tabella:

$$(0011 \mid 1001)_2 = (39)_{16}$$

Da base B = 2 a base B = 16 e vice versa

Esempio 2: $(EA0)_{16} = (?)_2$

$$E \mid A \mid 0$$

0	0000	4	0100	8	1000	C	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	E	1110
3	0011	7	0111	B	1011	F	1111

$$(E \mid A \mid 0)_{16} = (1110\ 1010\ 0000)_2$$

Somma di interi non negativi

Come la somma in decimale, ricordare che quando sommiamo singole cifre binarie:

$$
\begin{array}{rl}
0+0=0 & \text{riporto} = 0 \\
0+1=1 & \text{riporto} = 0 \\
1+0=1 & \text{riporto} = 0 \\
1+1=0 & \text{riporto} = 1 \\
1+1+1=1 & \text{riporto} = 1
\end{array}
$$

Esempio 1: $(1101)_2 + (111)_2$
Esempio 2: $(111010)_2 + (1101110010)_2$

Interi con numero finito di bit

1	0	1

n=3

- Le architetture degli elaboratori lavorano con un numero finito di bit
- Dati n bit:
  - Ci sono 2^n simboli
  - I numeri positivi rappresentabili risiedono nell'intervallo $[0, 2^n-1]$

MSB s_2	s_1	LSB s_0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$2^3=8$ simboli

Interi: complemento a 2

- Rappresentazione in **complemento a 2** (C2)
  - Dati n bit, un numero positivo N è rappresentato in modo standard (come abbiamo visto per i non negativi)
  - $-N$, invece si rappresenta come $2^n - N$
- Metodo operativo per rappresentare $-N$:
  - Rappresentare il modulo N in modo standard
  - Complementare a 1 tutti i bit ($1 \leftarrow 0$, $0 \leftarrow 1$)
  - Sommare 1

Interi: complemento a 2

- In complemento a 2, con n bit, possiamo rappresentare gli interi nell'intervallo: $[-2^{n-1}; 2^{n-1} - 1]$
- Esempio: con 3 bit rappresentiamo i numeri in ... $[-4; 3]$

$N_{(10)}$	$N_{(C2)}$
-4	100
-3	101
-2	110
-1	111

$N_{(10)}$	$N_{(C2)}$
0	000
$+1$	001
$+2$	010
$+3$	011

- Il primo bit indica ancora il segno
- Lo zero ha una sola codifica

Interi: complemento a 2

Esempio 1: $(-18)_{10} = (?)_{C2}$
Esempio 2: $(9)_{10} = (?)_{C2}$
Esempio 3: $(-6)_{10} = (?)_{C2}$

Somma di interi

- Rappresentare i numeri in C2
- Effettuare la somma in modo standard
- Non considerare l'eventuale riporto oltre il bit di segno

Esempio 1: $(60)_{10} - (54)_{10} = (60)_{10} + (-54)_{10}$

Somma di interi: overflow

- Sommiamo due interi in C2 rappresentati con n bit, quindi appartenenti a $[-2^{n-1}; 2^{n-1}-1]$
- Può succedere che il risultato cada al di fuori dell'intervallo
- Overflow: n bit in C2 bastano per rappresentare gli operandi, ma non per rappresentare il risultato
- Come riconoscerlo?
  - può succedere solo quando si sommano due operandi dello stesso segno: **se il segno del risultato è diverso da quello degli operandi** è avvenuto un overflow
  - **gli ultimi due riporti sono diversi** tra loro (01 o 10)

Somma di interi: esempio di overflow

Esempio: $(100)_{C2} + (101)_{C2}$

$$\begin{array}{llllll} \text{riporto} & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & + \\ & & 1 & 0 & 1 & = \\ \hline \text{somma} & (1) & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

- Sto sommando su 3 bit -4 e -3, il risultato sarebbe: $-7 < -2^{3-1}$, non rappresentabile in C2 su 3 bit.

Somma di interi: esempi

Esempio 1: $-(1101)_2 - (111)_2$
Esempio 2: $-(1101)_2 - (111)_2$ Stesso esempio di prima, ma con l'aggiunta di un bit: anziché lavorare su 5 bit, ne considero 6. Come cambia il risultato?

Interi: complemento a 2

Come passare da C2 a base 10?

- Procedimento inverso:
  - Sottrarre 1
  - Complementare a 1
  - Convertire da binario a decimale e aggiungere il segno
- Metodo facilitato di verifica:
  - convertire in decimale con l'algoritmo standard assegnando al bit più significativo peso negativo
  - Esempio: $(10100)_{C2} = -1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 = (-12)_{10}$

Esercizi

- Convertire da base 10 a base 8: 112; 23; 89; 254
- Convertire da base 10 a base 2: 45; 64; 321; 76
- Convertire da base 2 a base 10: 101100; 11101
- Determinare la base per cui è esatta la seguente operazione: sqrt(232)=14
- Eseguire in ca2: 44+12; 36-11; 48+59; 16-9