



# Firmware Multiplier

Prof. Alberto Borghese  
Dipartimento di Informatica  
[borgnese@di.unimi.it](mailto:borgnese@di.unimi.it)

Università degli Studi di Milano

Riferimenti sul Patterson 5a ed.: B.6 & 3.4



## Sommario

**Il moltiplicatore firmware**

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware



## L'approccio firmware



Nell'approccio firmware, viene inserita nella ALU una micro-architettura costituita da una unità di controllo, dei componenti di calcolo e dei registri.

L'unità di controllo attiva opportunamente le unità di calcolo e il trasferimento da/verso i registri. Approccio "*controllore-datapath*" in piccolo.

Viene inserito un microcalcolatore dentro la ALU.

Il primo microprogramma era presente nell'IBM 360 (1964).



## L'approccio firmware vs hardware



La soluzione HW è più veloce ma più costosa per numero di porte e complessità dei circuiti. Inoltre è rigida («hard») e non si può adattare a implementare funzioni diverse.

La soluzione HW viene utilizzata per le operazioni frequenti: la velocizzazione di operazioni complesse che vengono utilizzate raramente non aumenta significativamente le prestazioni (legge di Amdahl) -> Si preferisce un'implementazione Firmware o Software.

La soluzione firmware risolve l'operazione complessa mediante una sequenza di operazioni semplici. E' meno veloce, ma più flessibile e, potenzialmente, adatta ad inserire nuove procedure, modificando solamente l'unità di controllo.



## Approcci tecnologici alla ALU

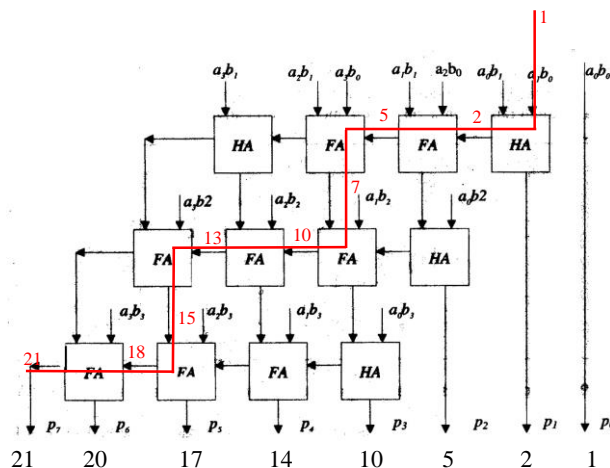


Quattro approcci tecnologici alla costruzione di una ALU (e di una CPU):

- **Approccio hardware mediante porte logiche.** E' un approccio esaustivo (tabellare). Per ogni funzione, per ogni ingresso viene memorizzata l'uscita. E' utilizzabile per funzioni molto particolari (ad esempio di una variabile). Non molto utilizzato.
- **Approccio hardware programmabile** (e.g. PLA, FPGA). Ad ogni operazione corrisponde un circuito combinatorio specifico.
- **Approccio firmware** (firm = stabile), o microprogrammato. Si dispone di circuiti specifici solamente per alcune operazioni elementari (tipicamente addizione e sottrazione). Le operazioni più complesse vengono sintetizzate collegando opportunamente i componenti, a partire dall'algoritmo che le implementa.



## Circuito hardware della moltiplicazione



*Come possiamo renderlo più flessibile? Come arrivare a un circuito che serva anche la divisione intera?*



## Algoritmo firmware per la moltiplicazione



Il razionale degli algoritmi firmware della moltiplicazione è il seguente.

Moltiplicando

1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore

1 0 1 =

Si analizzano sequenzialmente i bit del moltiplicatore e si creano i **prodotti parziali**:

- 1) Si **mette 0** (su n bit) nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 0).
- 2) Si mette una **copia del moltiplicando** (su n bit) nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 1).

Prodotto

1 1 0 1 1 +  
0 0 0 0 0 -  
-----  
1 1 0 1 1  
1 1 0 1 1 - -  
-----  
1 0 0 0 0 1 1 1

27 x 5 = 135

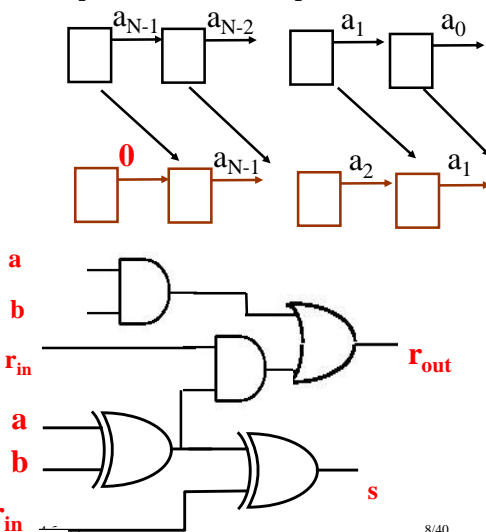


## Shift (scalamento) e somma



Dato A su 32 bit:  $a_j = a_{j-k}$  k shift amount ( $>$ ,  $=$ ,  $<$  0).

Esempio. shift dx 1 di una parola su N bit:



Il bit  $a_0$  si “perde”.

Il bit  $a_{N-1} = 0$ .

$a_k = a_{k+1}$  per  $k=0,1,2,\dots,N-2$

Somma di 2 bit

Utilizzo del riporto in ingresso

Produzione del riporto in uscita



## Moltiplicazione utilizzando somma e shift



Analizzo sequenzialmente **ogni bit  $b_k$  del moltiplicatore**:

1 1 0 1 1 x A  
0 1 0 1 1 = B

A0) Genero il primo e il secondo prodotto parziale

1 1 0 1 1 + A \* 2<sup>0</sup>  
1 1 0 1 1 - = A \* 2<sup>1</sup>

A1) Sommo il primo prodotto parziale al secondo e ottengo la prima somma parziale,

1 0 1 0 0 0 1 + S<sub>1</sub> ParzSum  
0 0 0 0 0 - - = 0 \* 2<sup>2</sup>

A2) Sommo il moltiplicando alla somma parziale corrente se  $b_k = 1$ .

1 0 1 0 0 0 1 + S<sub>2</sub> ParzSum  
1 1 0 1 1 - - - = A \* 2<sup>3</sup>

A2) Sommo 0 al prodotto alla somma parziale se  $b_k = 0$ .

1 0 0 1 0 1 0 0 1 + S<sub>3</sub> ParzSum  
0 0 0 0 0 - - - = 0 \* 2<sup>4</sup>

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando a ogni passo ( $A' = A * 2$ ).

$$27 \times 11 = 297$$

$$27 + 54 + 0 + 216 = 297$$

1 0 0 1 0 1 0 0 1 P Prodotto  
 $1x2^8 + 1x2^5 + 1x2^3 + 1x2^0 =$   
 $256 + 32 + 8 + 1 = 297$



## Moltiplicazione utilizzando somma e shift



Analizzo sequenzialmente **ogni bit  $b_k$  del moltiplicatore** e applico ad ogni passo le stesse operazioni.

1 1 0 1 1 x A  
0 1 0 1 1 = B

Per ogni bit della parola (5 bit):

A1) Sommo il moltiplicando alla somma parziale corrente, P, se  $b_k = 1$ .

0 0 0 0 0 0 0 0 0 + Initial P=0  
1 1 0 1 1 = A \* 2<sup>0</sup>

A2) Sommo 0 alla somma parziale corrente se  $b_k = 0$ .

0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 + S<sub>1</sub> = P + A \* 2<sup>1</sup>  
1 1 0 1 1 - = A \* 2<sup>1</sup>

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando ( $A' = A * 2$ ).

0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 + S<sub>2</sub> = S<sub>1</sub> + A \* 2<sup>2</sup>  
0 0 0 0 0 - - = 0 \* 2<sup>2</sup>

0 0 1 0 1 0 0 0 1 + S<sub>3</sub> = S<sub>2</sub>  
1 1 0 1 1 - - - = A \* 2<sup>3</sup>

$$27 \times 11 = 297$$

P contiene le somme parziali, al termine conterrà la somma totale, cioè il risultato del prodotto.

1 0 0 1 0 1 0 0 1 + S<sub>4</sub> = S<sub>3</sub> + A \* 2<sup>4</sup>  
0 0 0 0 0 - - - = 0 \* 2<sup>4</sup>

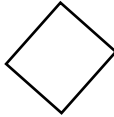
1 0 0 1 0 1 0 0 1 Final P = S<sub>4</sub> + 0



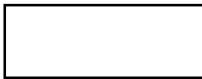
## Diagrammi di flusso (flow chart)



Inizio / terminazione



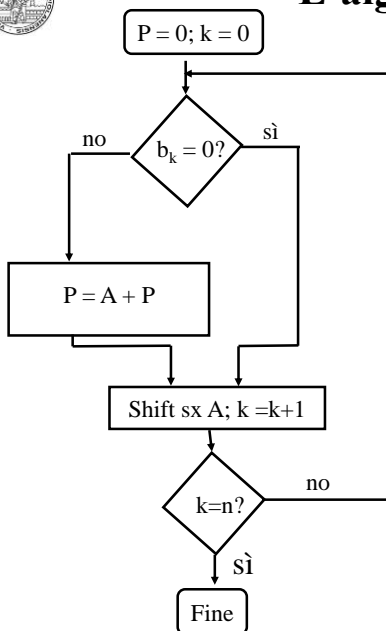
Test



Processo (esecuzione)



## L'algoritmo



A  $\longrightarrow$   
B  $\longrightarrow$

1 1 0 1 1 x  
0 1 0 1 1 =

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 + Initial P=0  
1 1 0 1 1 = A \* 2<sup>0</sup>

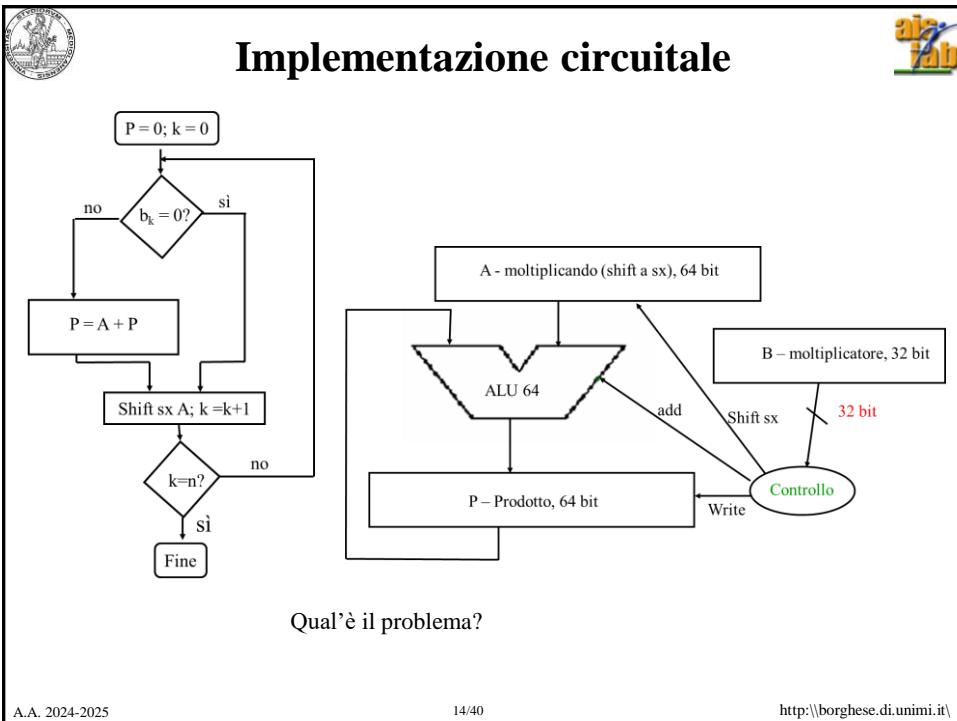
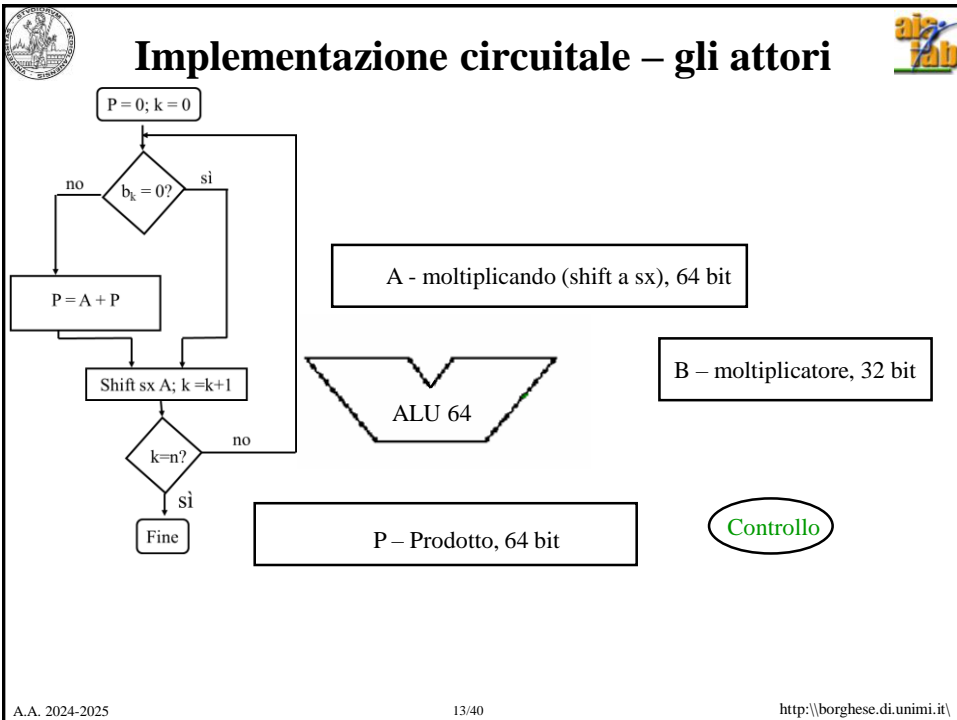
0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 + S<sub>1</sub>=P+A  
1 1 0 1 1 - = A \* 2<sup>1</sup>

0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 + S<sub>2</sub>=S<sub>1</sub>+A  
0 0 0 0 0 - - = 0 \* 2<sup>2</sup>

0 0 1 0 1 0 0 0 1 + S<sub>3</sub>=S<sub>2</sub>+0  
1 1 0 1 1 - - - = A \* 2<sup>3</sup>

1 0 0 1 0 1 0 0 1 + S<sub>4</sub>=S<sub>3</sub>+A  
0 0 0 0 0 - - - = 0 \* 2<sup>4</sup>

1 0 0 1 0 1 0 0 1 Final P=S<sub>4</sub>+0





## Esempio su 4 bit



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000

$A \rightarrow 1010 \times 10_{10} \times$   
 $B \rightarrow 1011 = 11_{10} =$

-----

$00000000 + P$   
 $1010 = A^0$

-----

$00001010 + S_1$   
 $1010 = A^1$

-----

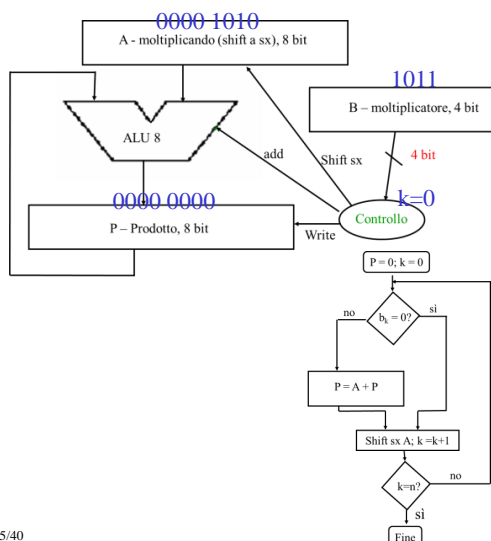
$00011110 + S_2$   
 $0000 = A^2$

-----

$00011110 + S_3$   
 $1010 = A^3$

-----

$P \rightarrow 01101110 \quad 110_{10}$

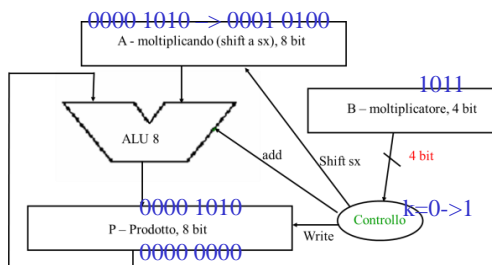
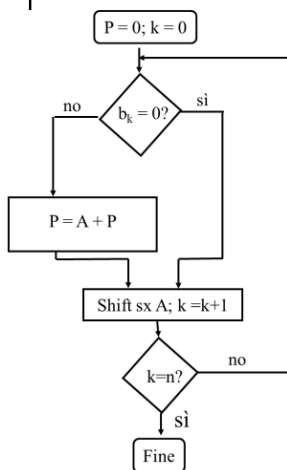


## Esempio – passo 1



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1 -> P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010

$10 \times 1 + 0 = 10$





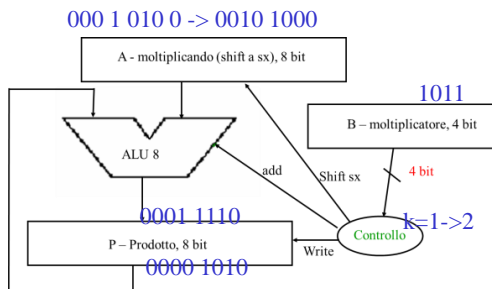
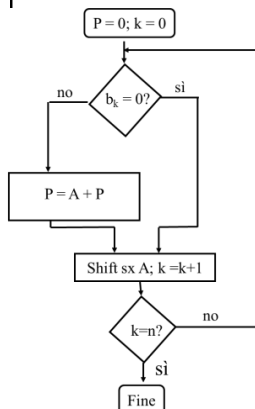


## Esempio – passo 2



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b <sub>1</sub> =1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110

$$10 \cdot 2 + 10 = 30$$

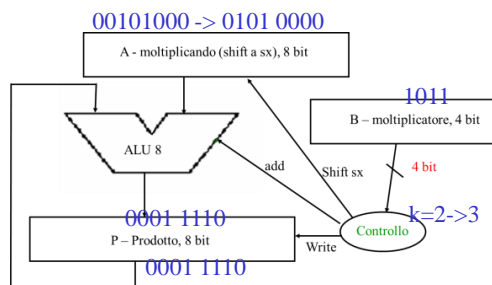
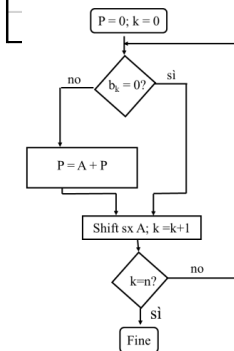


## Esempio – passo 3



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b <sub>1</sub> =1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b <sub>2</sub> =0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110

$$0 + 30 = 30$$



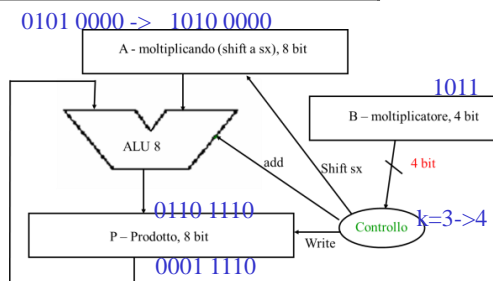
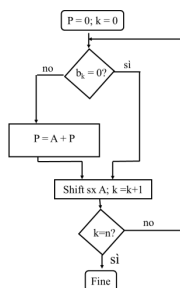


## Esempio – passo 4



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b <sub>1</sub> =1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b <sub>2</sub> =0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	b <sub>3</sub> =1->P=P+A	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110

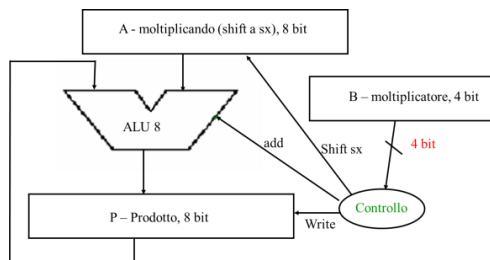
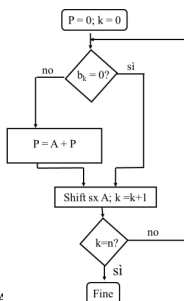
$$10 \cdot 8 + 30 = 110$$



## Esempio – riassunto



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b <sub>1</sub> =1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b <sub>2</sub> =0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	b <sub>3</sub> =1->P=P+A	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110





## Esercizi



Costruire il circuito HW che esegui la moltiplicazione  $7 \times 9$  in base 2 su 4 bit.

Eseguire la stessa moltiplicazione secondo l'algoritmo visto, indicando passo per passo il contenuto dei 3 registri: A che contiene il moltiplicando, B che contiene il moltiplicatore e P che contiene somme parziali ed il risultato finale.



## Sommario



I moltiplicatori firmware

**Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware**



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	$b_0=1 \rightarrow P=P+A$	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando $\ll 1$	1011	0001 0100	0000 1010
2	$b_1=1 \rightarrow P=P+A$	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando $\ll 1$	1011	0010 1000	0001 1110
3	$b_2=0 \rightarrow$ Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando $\ll 1$	1011	0101 0000	0001 1110
4	$b_3=1 \rightarrow P=P+A$	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando $\ll 1$	1011	1010 0000	0110 1110



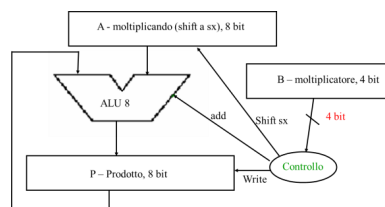
## Ottimizzazione

- Inizializzo B (ho tutti i bit di B)
- A ogni passo leggo B, ma utilizzo solo 1 bit,  $b_k$
- Utilizzo  $b_k$  a ogni iterazione, **poi non serve più**.
- Non è necessario conservare tutti i bit di B per tutta la durata dell'operazione.

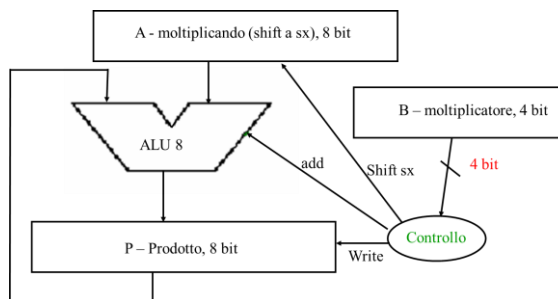
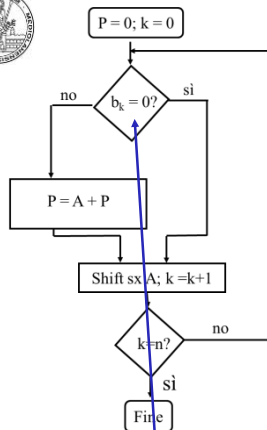
Situazione del tipo: **produttore-consumatore**.

Produco dei dati: la parola B.

Consumo i dati: 1 bit della parola B a ogni iterazione (consume = utilizzo una tantum e non riutilizzo in seguito).



## Razionale - I



Per scegliere,  $b_k$ , a ogni passo k, serve un mux all'interno dell'unità di controllo.

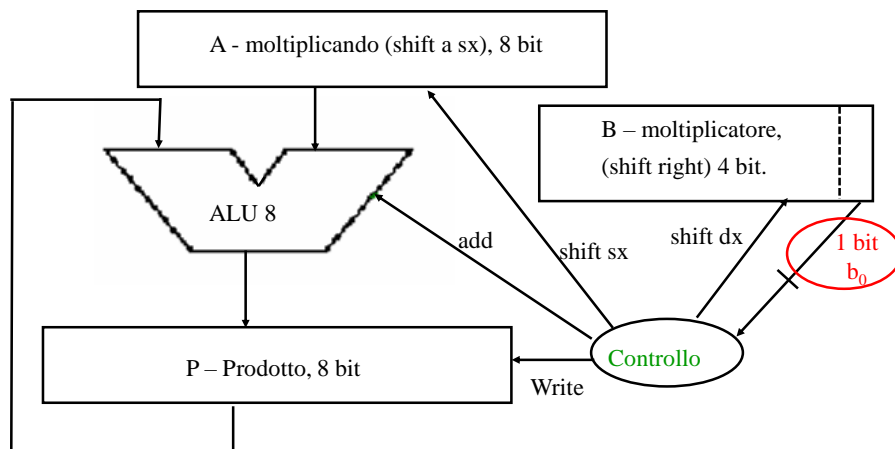
Posso ottenere lo stesso effetto in altro modo:

- Leggo  $b_0$
- Shift a dx di una posizione di B

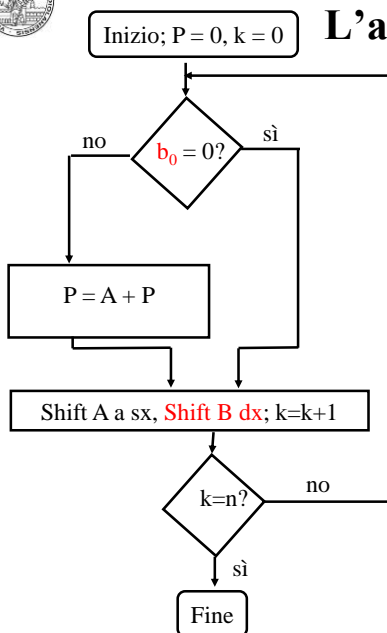
Espongo così all'unità di controllo  $b_k$  a ogni iterazione.



## Implementazione circuitale ottimizzata - I



## L'algoritmo - I



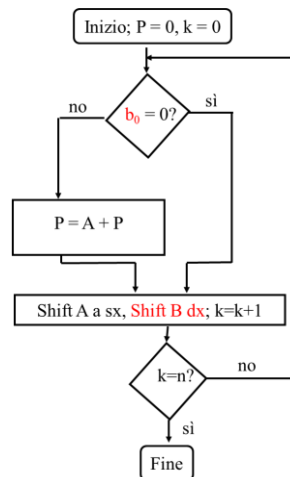
$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & 1010x \\ B & \longrightarrow & 1011= \\ & & \hline & & 00000000+ \quad P \\ A = A * 2^0 & & 1010= \quad A^0 \\ & & \hline & & 00001010+ \quad P_1 \\ A^1 = A * 2^1 & & 1010- \quad A^1 \\ & & \hline & & 00011110+ \quad P_2 \\ A^2 = A * 2^2 & & 0000- - \quad A^2 \\ & & \hline & & 00011110+ \quad P_3 \\ A^3 = A * 2^2 & & 1010- - - \quad A^3 \\ & & \hline P & \longrightarrow & 01101110 \end{array}$$



## Esecuzione - I



Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101 1	000 1010 0	0000 1010
2	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	0 101 1	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b <sub>0</sub> =0->Nulla	00 10 11	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	000 1 011	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110



## Razionale per una seconda implementazione



Meta' dei bit del registro moltiplicando vengono utilizzati a ogni iterazione.

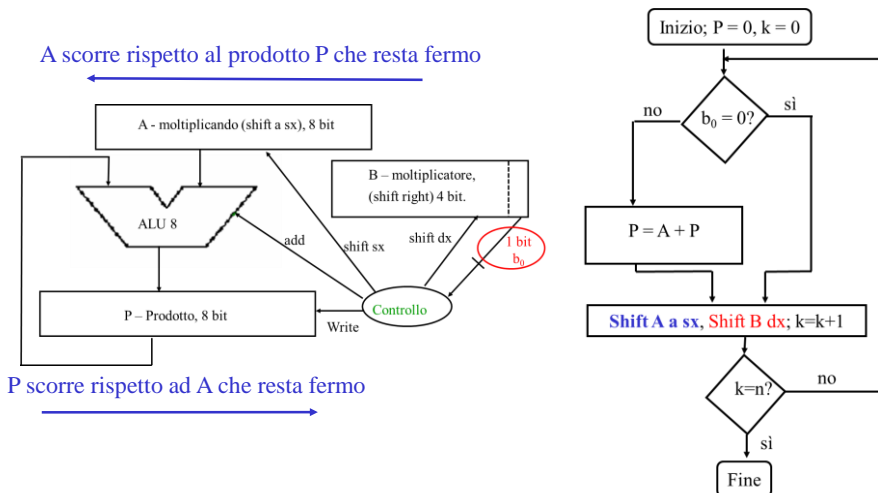
Gli N bit del moltiplicando sommati al registro prodotto vengono incolonnati di una posizione più a sinistra a ogni iterazione. Occupano N bit.

Ad ogni iterazione 1 bit del registro prodotto viene calcolato definitivamente.

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101	000 1010 0	0000 1010
2	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	0 101	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b <sub>0</sub> =0->Nulla	00 10	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	000 1	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110



## Analisi dello shift



## Razionale per una seconda implementazione



Ad ogni iterazione **sommo N cifre** (pari al numero di cifre del moltiplicando).

Spostamento di A a sx rispetto al registro prodotto, P.

Spostamento di P a dx rispetto al registro moltiplicando, A

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1010	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101	000 1010 0	0000 1010
2	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	0 100	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b <sub>0</sub> =0->Nulla	00 10	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	000 0	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110

1 0 1 0 x

1 0 1 1 =

00000000+ P

1010 = A<sup>0</sup>

00001010+ P<sub>1</sub>

1010 - A<sup>1</sup>

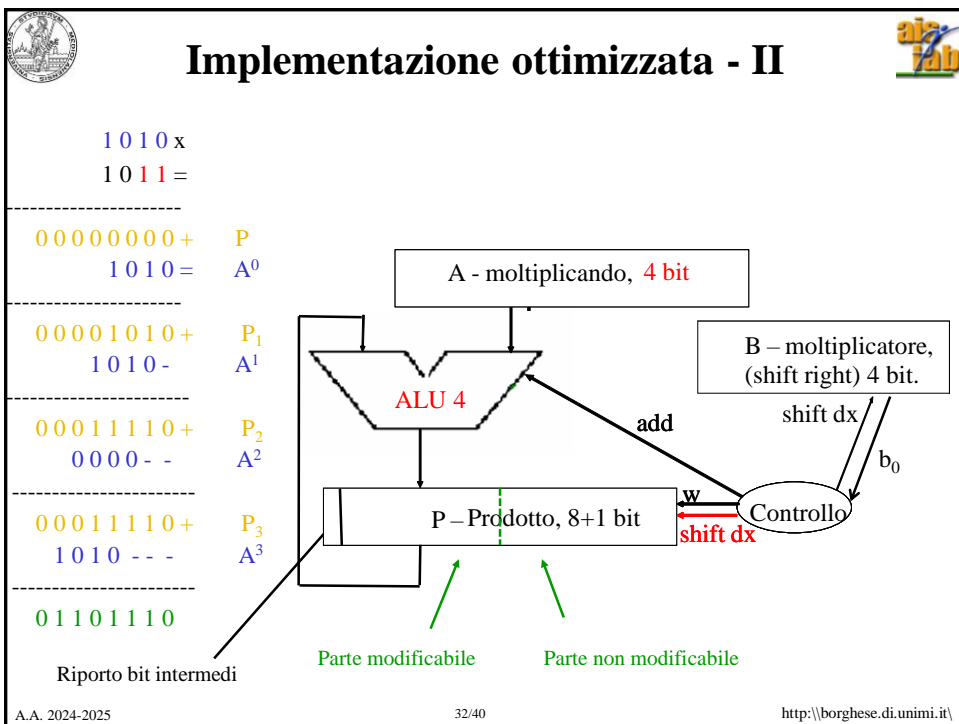
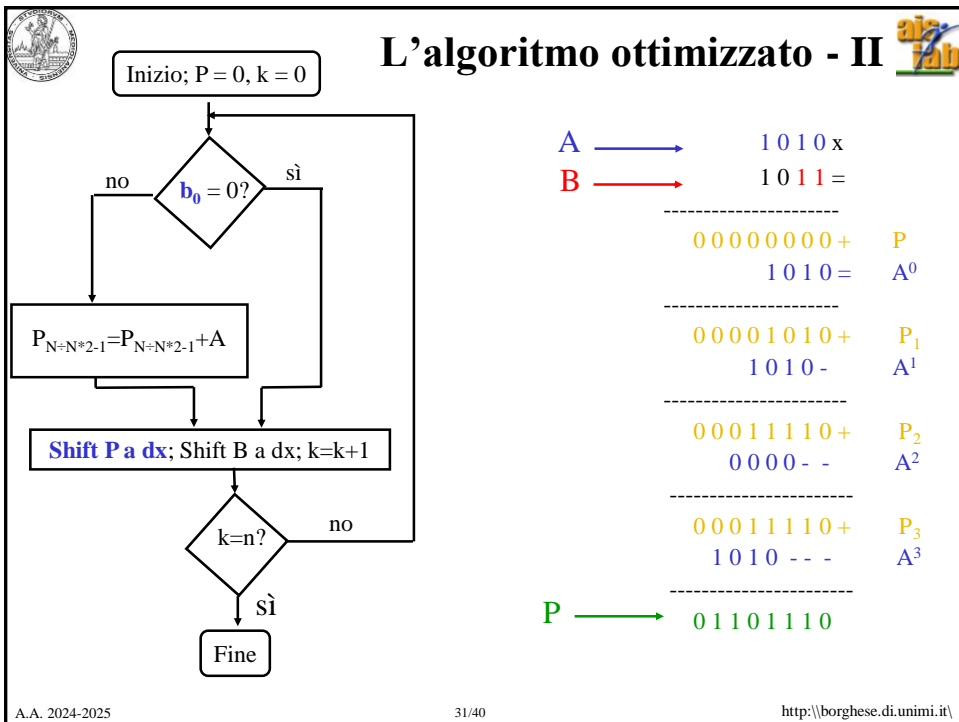
00011110+ P<sub>2</sub>

0000 - A<sup>2</sup>

00011110+ P<sub>3</sub>

1010 - - A<sup>3</sup>

01101110



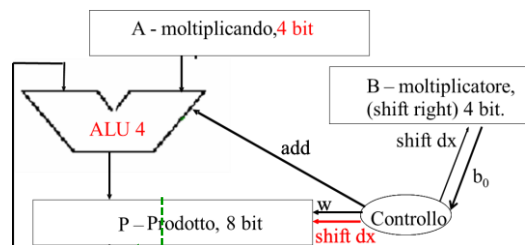




## Esecuzione - II



Iterazione	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	1010	1010 0000
	Prodotto >> 1	1011	1010	0 1010 000
	Moltiplicatore >> 1	0 101	1010	0 1010 000
2	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	0 101	1010	0 1010 000
	Prodotto >> 1	0 101	1010	0 11110 00
	Moltiplicatore >> 1	00 10	1010	0 11110 00
3	b <sub>0</sub> =0->Nulla	00 10	1010	0 11110 00
	Prodotto >> 1	00 10	1010	0 011110 0
	Moltiplicatore >> 1	000 1	1010	0 011110 0
4	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	000 1	1010	1 101110 0
	Prodotto >> 1	0000	1010	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010	0111 1110



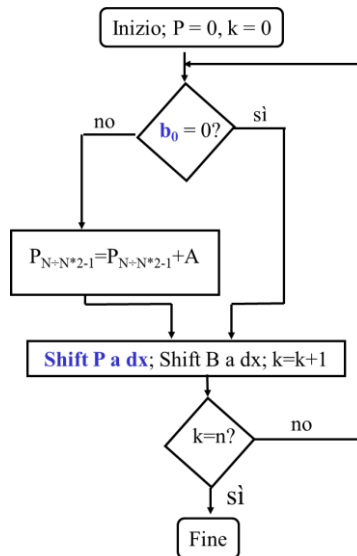
Parte modificabile

Parte non modificabile

A.A. 2024-2025

33/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Razionale dell'implementazione - III



Il numero di bit del registro **prodotto** corrente (somma dei prodotti parziali) più il numero di bit da esaminare nel registro **moltiplicatore** rimane **costante** ad ogni iterazione (pari a 8 bit).

Si può perciò eliminare il registro moltiplicatore.

Iterazione	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	1010	0000 0000
1	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	1011	1010	1010 0000
	Prodotto >> 1	1011	1010	0 1010 000
	Moltiplicatore >> 1	0 101	1010	0 1010 000
2	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	0 101	1010	1 1110 000
	Prodotto >> 1	0 101	1010	0 11110 00
	Moltiplicatore >> 1	00 10	1010	0 11110 00
3	b <sub>0</sub> =0->Nulla	00 10	1010	0 11110 00
	Prodotto >> 1	00 10	1010	0 011110 0
	Moltiplicatore >> 1	000 1	1010	0 011110 0
4	b <sub>0</sub> =1->P=P+A	000 1	1010	1 101110 0
	Prodotto >> 1	0000	1010	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010	0111 1110

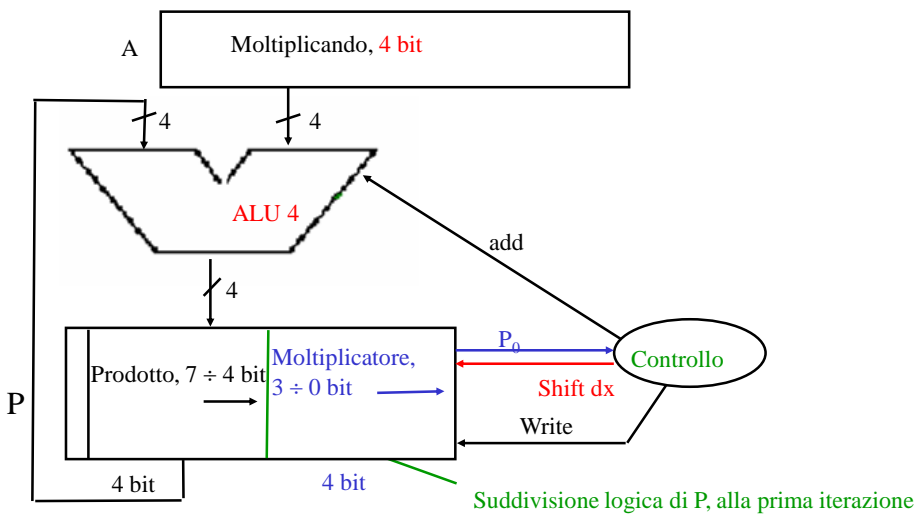
A.A. 2024-2025

34/40

<http://borghese.di.unimi.it/>



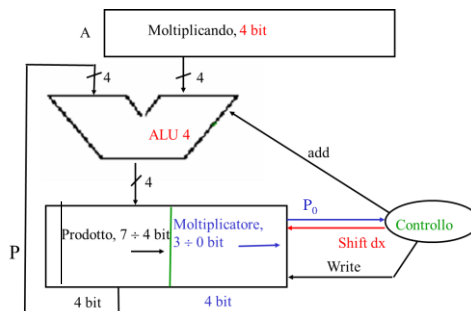
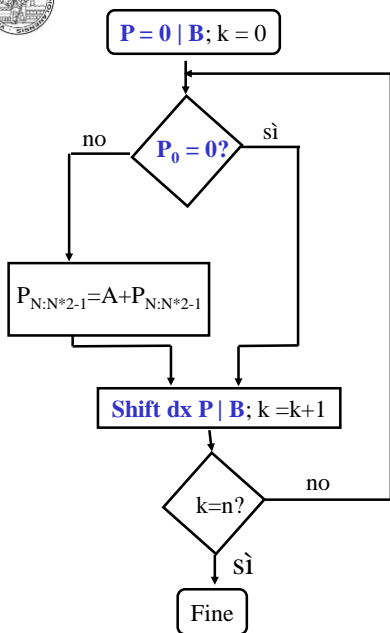
## Circuito ottimizzato - III

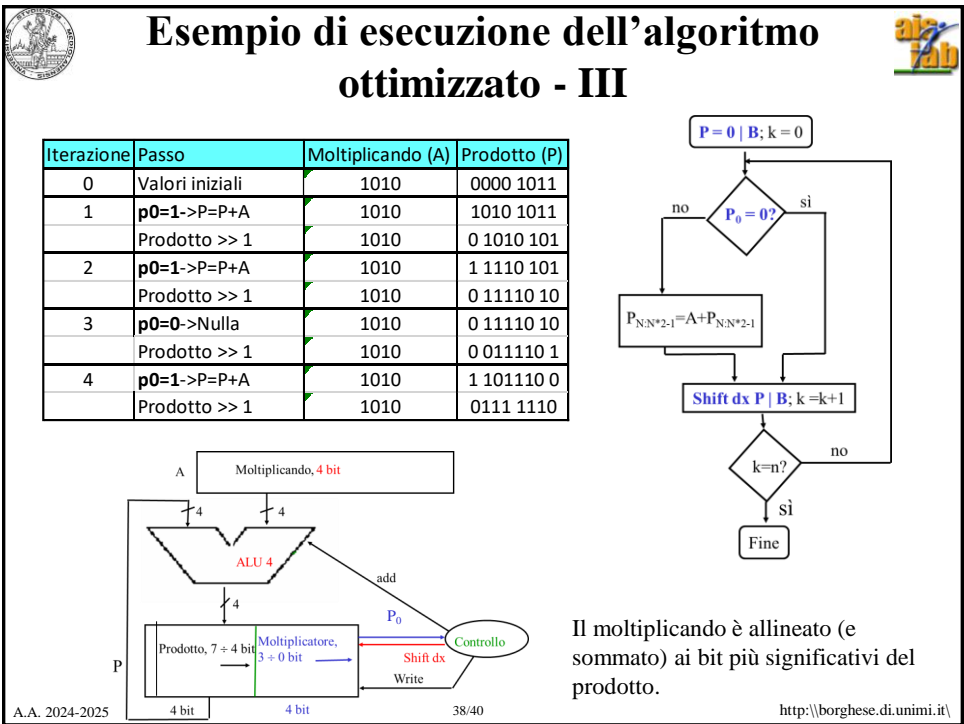
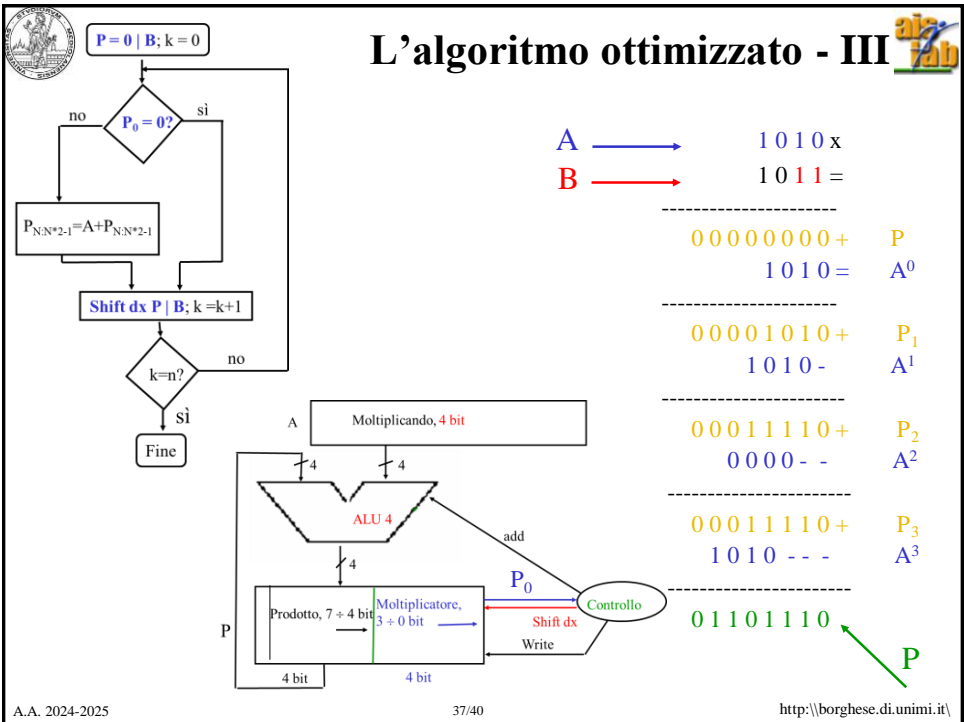


Il moltiplicando è allineato sempre ai 4 bit più significativi del prodotto. Ad ogni iterazione, il prodotto si allarga, il moltiplicatore si restringe.



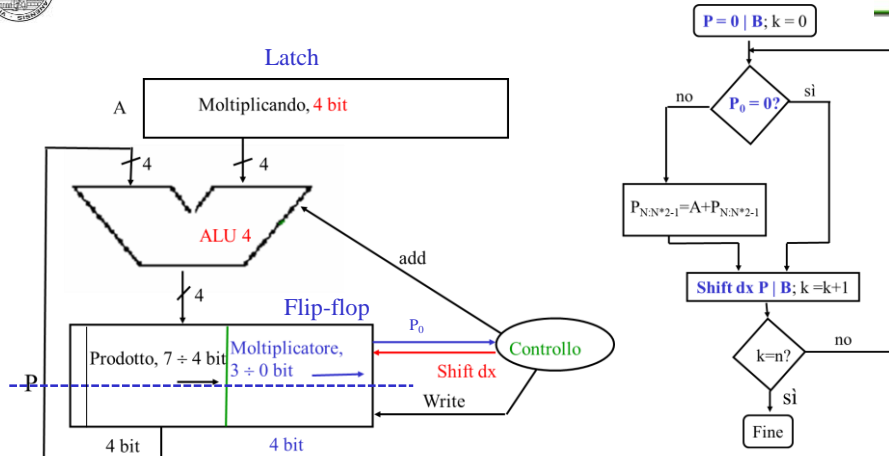
## Algoritmo ottimizzato







## Complessità



- Registro moltiplicando ( $4 \times 4 = 16$ ) – latch. Viene solo letto.
- Registro Prodotto ( $(8+1) \times 8 = 72$ ) – Flip flop perchè registro a scorrimento e perchè il suo contenuto viene letto e scritto.
- ALU4 ( $5 \times 4 = 20$ )
- UC ?

(Moltiplicatore HW aveva complessità 65 porte logiche), ma questo circuito può essere utilizzato anche per la divisione...

mi.it\



## Sommario



I moltiplicatori firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware