



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Facultad de Ciencias**



**VARIABLE COMPLEJA III**

**TAREA 3**

**Por:** Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

---

**Problema 1.** –

**vale(1.5)** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Sea  $\{z_n\}$  sucesión en  $\overline{\mathbb{D}}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in \partial\mathbb{D}.$$

Bajo las hipótesis del teorema 1 (septiembre 14), dado  $N \in \mathbb{Z}^+$  suficientemente grande, entonces para todo  $n \geq N$  existe  $w_n \in \mathbb{D}$  tal que

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n}, \quad |\tilde{g}(z_n) - g(w_n)| < \frac{1}{n},$$

- b) Considere la función  $\tilde{g}$  definida en la clase del 14 de septiembre (Definición 1).  $\tilde{g}$  es sobreyectiva.  
c) Considere la región  $R_\epsilon$  en la demostración del teorema 2 (septiembre). Esto es, la región en  $\mathbb{D}$  acotada por la circunferencia de radio  $\epsilon$ , centro  $z = -1$  ( $\partial D(-1, \epsilon)$ ) y los segmentos rectilíneos que unen a  $z = -1$  con los puntos de intersección entre  $\partial\mathbb{D}$  y  $\partial D(-1, \epsilon)$ . Bajo las hipótesis del teorema 2 (septiembre), el área de la región  $g(R_\epsilon)$  podría ser infinita.

Demostración:

(a) Verdadero.

Por hipótesis para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n \in \overline{\mathbb{D}}$  entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $r > 0$ ,  $B_r(z_n) \cap \overline{\mathbb{D}} \neq \emptyset$ , en particular para  $1/n > 0$ ,  $B_{1/n}(z_n) \cap \overline{\mathbb{D}} \neq \emptyset$ , con ello podemos tomar  $\bar{w}_n \in B_{1/n}(z_n) \cap \overline{\mathbb{D}} \neq \emptyset$ .

Ahora, si pasara que  $\bar{w}_n \in \partial\overline{\mathbb{D}} = \partial\mathbb{D}$  dado que el disco es conexo existiría  $w_n$  tal que  $w_n \in B_{1/n}(z_n) \cap D$  para  $n$  suficientemente grande, con lo que podemos considerar a la sucesión  $w_n \in B_{1/n}(z_n) \cap D$ , de esta manera tendremos que

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n} \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

Por otro lado como  $z_n \in \overline{\mathbb{D}}$ , entonces  $\tilde{g}(z_n) \in g(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \bar{\Omega}$  y como  $w_n \in D \Rightarrow \tilde{g}(w_n) = g(w_n)$  serán tales que

$$|\tilde{g}(z_n) - g(w_n)| < \frac{1}{n}$$

pues si  $z_n \in D$  entonces por continuidad e inyectividad de  $g$  se tendrá de forma inmediata y si pasara que  $z_n \in \partial D$  tendremos que es un punto de frontera simple, lo tendríamos por la convergencia de la curva. ■

**(b) Verdadero.**

Sea  $w \in \bar{\Omega}$  PD]  $\exists z \in \bar{D}$  tal que  $\tilde{g}(z) = w$ .

**Caso 1:**  $w \in \Omega$ , en este caso como  $g : D \rightarrow \Omega$  es una biyección tendremos que existirá  $z \in D$  tal que  $g(z) = w$  y como  $z \in D \Rightarrow \tilde{g}(z) = g(z) = w$ .

**Caso 2:**  $w \in \partial\Omega$  PD]  $\exists z \in \partial D$  tal que  $\tilde{g}(z) = w$  PD]  $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$  tal que  $z_n \rightarrow z \in \partial D$  y  $\tilde{g}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = w$ .

Consideremos una sucesión  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$  tal que  $w_n \rightarrow w$  y sea  $z_n := g^{-1}(w_n) \subseteq D$ . Veamos que esta es la sucesión buscada. En efecto, siguiendo el mismo procedimiento hecho por el profesor en el teorema 2 (iii) (septiembre 9) tenemos que el límite debe de existir (en este caso tomamos  $z_n$  la sucesión definida), mas aun, por el inciso (i) del teorema 2 (septiembre 9) sabemos que como el límite existe este tendrá que ser un punto de la frontera de  $\Omega$  por lo tanto tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = z \in \partial\Omega$  con lo que

$$\tilde{g}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(g^{-1}(w_n)) \underset{g \text{ invertible}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$$

terminando la prueba. ■

**(c) Falso.**

Consideremos  $g : R_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$  función de clase  $C^1$  real (pues es analítica) cuyo conjunto de discontinuidades es de contenido cero (ya que únicamente son 3 puntos, -1, y las intersecciones de las circunferencias) entonces tenemos que  $g$  es integrable en  $R_\varepsilon$ , por lo que existe

$$\iint_{R_\varepsilon} g(x, y) dx dy = \iint_{g(R_\varepsilon)} 1 dx dy = \text{Area}(g(R_\varepsilon))$$

por lo que el área debe de ser finita. ■

**Problema 2. –**

**vale(2.0)** Una región  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  es convexa si dados 2 puntos  $x, y \in \Omega$ , la recta que los une queda contenida en  $\Omega$ . Demuestre que todos los puntos de la frontera de una región convexa son simples.

Demostración: Sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$  tal que  $z_n \rightarrow z$ . Ahora como cada  $z_n \in \Omega$  y  $\Omega$  es convexo

tendremos que la recta que une a  $z_n$  con  $z_{n+1}$ ,  $\gamma_n = [z_n, z_{n+1}]$ , se queda totalmente contenida en  $\Omega$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de esta manera sea  $\gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n$  y  $t_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y veamos que estas son la curva y la sucesión buscadas.

Primeramente, escribamos de formas mas explicita a la curva  $\gamma$ , tenemos que

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_n(t) & \text{si } t \in [\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \\ \vdots & \vdots \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Y para cada  $n \in \mathbb{N}$  tendremos que  $\gamma_n(t) = \lambda_n(t)z_{n+1} + [1 - \lambda_n(t)]z_n$  donde  $\lambda_n : [\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\lambda_n(t) = (n+1)(n+2)t - n(n+2)$ , de esta manera efectivamente  $\gamma_n$  es la recta que une  $z_n$  con  $z_{n+1}$ . Con lo anterior tenemos que  $\gamma$  efectivamente es una curva tal que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$  y  $\gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$ , además  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que es una sucesión creciente y

$$\gamma(t_n) = \gamma\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lambda_n\left(\frac{n}{n+1}\right)z_{n+1} + [1 - \lambda_n\left(\frac{n}{n+1}\right)]z_n = 0z_{n+1} + [1 - 0]z_n = z_n$$

y por ultimo

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

por lo tanto  $z \in \partial\Omega$  es un punto simple. ■

### Problema 3. –

Sean  $a_n, b_n, n = 1, \dots, N$  constantes dadas y

$$g(t) := \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

a) **vale(1.5)** Demuestre que para todo  $0 \leq r < 1$  y  $0 < \alpha < 2\pi$  se cumple que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{1 - |z|^2}{|e^{ti} - z|^2} dt = \sum_{n=1}^N r^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$

donde  $z = re^{i\alpha}$

b) **vale(1.0)** Determine la función armónica  $u$  en  $\mathbb{D}$  tal que en la frontera  $\partial\mathbb{D}$  coincide con

$$\phi(t) = u(e^{it}) = 1 - \cos t + \sin 2t$$

Escriba la solución en coordenadas cartesianas.

Demostración:

(a) Sean  $r \in [0,1)$  y  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) K(e^{it}, z) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^N a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right] K(e^{it}, z) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) + b_n \frac{1}{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) \right] dt \\
 &= \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} a_n \frac{1}{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) + b_n \frac{1}{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) dt \\
 &= \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} a_n \frac{1}{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) dt + \int_0^{2\pi} b_n \frac{1}{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) dt \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) dt + \frac{1}{2\pi} b_n \int_0^{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) dt \\
 &= \sum_{n=1}^N a_n \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) dt \right) + b_n \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) dt \right)
 \end{aligned}$$

por otro lado, para  $1 \leq n \leq N$  consideremos  $u_n, v_n : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $u_n(z) = \operatorname{Re}(z^n)$  y  $v_n(z) = \operatorname{Im}(z^n)$ , funciones continuas en  $\bar{D}$  y armónicas en  $D$  (pues son parte real e imaginaria de una función analítica), entonces por el corolario 2 (septiembre 2) tendremos que

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{it}) K(e^{it}, z) dt \quad \text{y} \quad v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_n(e^{it}) K(e^{it}, z) dt \quad \text{para todo } z \in D$$

tomando  $z = re^{i\alpha}$  y desarrollando

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \operatorname{Re}(r^n e^{i\alpha n}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(e^{itn}) K(e^{it}, z) dt \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(r^n e^{i\alpha n}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(e^{itn}) K(e^{it}, z) dt \\
 \Rightarrow r^n \cos(n\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) dt \quad \text{y} \quad r^n \sin(n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) dt
 \end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt &= \sum_{n=1}^N a_n \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) K(e^{it}, z) dt \right) + b_n \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) K(e^{it}, z) dt \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N a_n (r^n \cos(n\alpha)) + b_n (r^n \sin(n\alpha)) = \sum_{n=1}^N r^n (a_n \cos(n\alpha) + b_n \sin(n\alpha))
 \end{aligned}$$

(b) Por el teorema 1 (septiembre 9) sabemos que la función buscada para cada  $z \in D$  viene dada por

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{it}) K(e^{it}, z) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(t) + \sin(2t)] K(e^{it}, z) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(e^{it}, z) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\cos(t) + \sin(2t)] K(e^{it}, z) dt \end{aligned}$$

sabemos que la primera integral es igual a  $2\pi$  por el teorema 1 (septiembre 5) y para la segunda integral sean  $a_1 = -1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  y  $b_2 = 1$  entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} (2\pi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^2 a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right] K(e^{it}, z) dt$$

por lo que, usando el inciso anterior (y usando  $z = re^{ia} \in D$ )

$$\begin{aligned} u(re^{ia}) &= 1 + \sum_{n=1}^2 r^n (a_n \cos(n\alpha) + b_n \sin(n\alpha)) = 1 + r(a_1 \cos(\alpha) + b_1 \sin(\alpha)) + r^2(a_2 \cos(2\alpha) + b_2 \sin(2\alpha)) \\ &= 1 + r(-\cos(\alpha)) + r^2(\sin(2\alpha)) = 1 - r \cos(\alpha) + r^2 \sin(2\alpha) = 1 - r \cos(\alpha) + 2r^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \end{aligned}$$

y su representación en coordenadas cartesianas será

$$u(x, y) = 1 - x + 2xy$$

■

#### Problema 4. –

**vale(2.0)** Termine la demostración del teorema 2 (septiembre 9).

Demostración:

#### Problema 5. –

**vale(2.0)** Termine la demostración del teorema 2 (septiembre 14). (Explicar detalladamente).

Demostración: Sea el desarrollo del teorema 2.

Supongamos que  $g \not\equiv 0$  en  $D$  y consideremos  $Z(g) = \{z \in D : g(z) = 0\}$ , entonces  $Z(g) \subseteq D$  y como  $g \not\equiv 0$  y es analítica tendremos que  $Z(g)$  es a lo sumo numerable por lo que necesariamente tendrá un punto de acumulación. Además, para cada  $z \in Z(g) \Rightarrow h(z) = 0$  pues  $g(z)$  es uno de los productos en  $h(z)$ . Con todo lo anterior tenemos que  $g$  y  $h$  son analíticas en  $D$  y tales que  $g(z) = h(z) \forall z \in Z(g)$  conjunto con un punto de acumulación, por lo tanto por el teorema de identidad tendremos que  $h(z) = g(z)$  en  $D$  !!! pero esto contradice que  $h \equiv 0$  por lo que necesariamente  $g \equiv 0$  en  $D$ .

■

