Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Tarea-Guía 1

Problema 1. Calcule el módulo, el argumento y el conjugado de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i$ *b*) $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ *c*) $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ *d*) $z_4 = -5 - 5i$

Problema 2. Sean $z = -1 - i$ y $w = 2 - 2i$, calcule:

a) $z + w$ *b*) $\overline{z} - \overline{w}$ *c*) zw *d*) z/w

Problema 3. Determina la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $\overline{\left(\frac{a+bi}{1+7i}\right)}$ *b*) $\left(\frac{2+i}{x-iy}\right)^2$ *c*) $\left|\overline{\left(\frac{-5-i}{2+2i}\right)}^3\right|$

Problema 4. Encuentre $z, w \in \mathbb{C}$ tales cumplan las siguientes tres propiedades.

a) $z + w = 5$ *b*) z/w es imaginario puro *c*) $|z| = 2|w|$

Problema 5. Encuentre los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ tales que:

a) $(3x - i)(2 + i) + (x - yi)(1 + 2i) = 5 + 6i$

b) $3yi + 2x - y + 5xi = 5 + 7i$

c) $(x - yi)(4 - 10i) = i^5$

Problema 6. Encuentra:

a) $\sqrt{i}$ *b*) $\sqrt{-8}$ *c*) $\sqrt{3 - 2i}$ *d*) $\sqrt{-2 - 2i}$

NOTA: Recuerda que sí $z = a + ib$, con $b \neq 0$, entonces

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

Problema 7. Encuentra las soluciones a las siguientes ecuaciones:

a) $iz^2 - 3 = 0$ *b*) $z^2 + 3iz + 5$ *c*) $-3iz^2 - 2iz + 1 + i = 0$

Problema 8. Prueba que sí $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $z/\overline{z}$ está en el circulo unitario, es decir su modulo es 1.

Problema 9. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Da una prueba en caso de que el enunciado sea verdadero, y un contraejemplo en caso de que sea falso.

a) $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$

b) $|z + \overline{z}| = 2|\operatorname{Re} z|$

c) $|z - w| = |z| - |w|$

Problema 10. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ prueba los siguientes:

a) $z\overline{w} + \overline{z}w$ es un número real

b) $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$

c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

Problema 11. Para $z \neq 1$, y $n \geq 2$,

a) Demuestra que $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$

b) Prueba que si γ es raíz n-ésima de la unidad (es decir $\gamma^n = 1$) entonces

$$1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{n-1} = 0$$

c) Encuentra el valor de $i + i^2 + \cdots + i^{100}$

Problema 12. Expresa los siguientes números complejos en la forma $a + ib$

a) $3\sqrt{2}\operatorname{CiS}(\frac{5\pi}{4})$ *b)* $2\operatorname{CiS}(\frac{3\pi}{2})$ *c)* $4\operatorname{CiS}(-\frac{\pi}{6})$ *d)* $3\operatorname{CiS}(\frac{\pi}{2})$

Problema 13. Escribe las siguientes en forma polar:

a) $8i$ *b)* $7 + 7i$ *c)* $-3 + 3\sqrt{3}i$ *d)* $\dfrac{1}{\sqrt{3} - i}$

Problema 14. Prueba que la fórmula de Moivre funciona también para enteros negativos, es decir, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ entonces, **Hint:** Recuerda cuanto es $z^{-1} = 1/z$

$$z^{-n} = r^{-n}\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Problema 15. Simplifique las siguientes expresiones de la forma que considere conveniente:

a) $\dfrac{(\sqrt{3} + i)^5}{(-1 - \sqrt{3}i)^{10}}$ *b)* $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^8$ *c)* $\dfrac{1}{(2\sqrt{3} - 2i)^4}$

Problema 16. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 = 1 - i$

b) $z^6 = 2 - 2\sqrt{3}i$

c) $z^5 = -32$

Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera
Ayudante: Ninive Atenea Tello Arcos

Tarea-Guía 2

Problema 1. Da una prueba de las siguientes afirmaciones, en caso de ser falsa da un contraejemplo: Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sucesión.

a) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$

b) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z)$

c) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \arg(z_n) = \arg(z)$

d) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = \overline{z}$

e) Si $\{|z_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge entonces $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también.

f) Si $|z| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0$

g) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{z_n} = \sqrt{z}$

Problema 2. Determina si los siguientes limites convergen (con sus condiciones necesarias) y encuentra su valor.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n$ *b)* $\lim_{n\to\infty} (2-ai)^n,\ a \in \mathbb{R}$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2in^2 - i}{n^2 + 3i}$ *d)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{ni + n^2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n} + i}$ *f)* $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{3}(1+i)^n\right|$

Problema 3. Para $z \neq 1$, y $n \geq 2$,

a) Demuestra que $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

b) Prueba que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$

c) Prueba que $\sum_{n=m}^{\infty} z^n = \dfrac{z^m}{1-z}$ si $|z| < 1$

Problema 4. Encuentra el valor exacto de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n+3^{n+1}}{2\cdot 5^{n+2}i}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{3}{4-4\sqrt{3}i}\right|^n$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{(1+i)^{2n}}$

Problema 5. Determina si convergen o divergen las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{1+\frac{1}{in}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}i)$

Problema 6. Determina para que valores de $z\in\mathbb{C}$ converge las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)^n}{(2+i)^n}$

Problema 7. Resuelve las siguientes:

a) Evalué $f(z)=z^2\overline{z}-2i$ para $z=1+i$; $z=3-2i$

a) Si $f(z)=\dfrac{2z-5}{z+4}$, encuentra los valores de $z\in\mathbb{C}$ tales que $f(z)=3i$

Problema 8. Obtén la parte real e imaginaria de:

a) $f(z)=z^2+4z\overline{z}-5\,\mathrm{Re}(z+i)+\mathrm{Im}(z+1)$

b) $f(z)=\dfrac{iz+1}{1+\overline{z}}$

c) $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z+1}$

Problema 9. Exprese la función en términos de z y $\overline{z}$:

a) $f(z)=4y^2+i(4x^2)$

b) $f(z)=2x^2-2y^2+3y+i(4xy-3x)$

c) $f(z)=x^2+y^2$

d) $f(z)=\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}+i\dfrac{x}{x^2+y^2}$

Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera
Ayudante: Ninive Atenea Tello Arcos

Tarea-Guía 3

Problema 1. Escribe las siguientes funciones en su forma cartesiana, separando en parte real e imaginaria:

a) $f(z) = \frac{1}{z} + z$ *b)* $f(z) = \frac{iz+1}{i+z}$ *c)* $f(z) = z^2 - \overline{z}$

Problema 2. Escribe las siguientes funciones en su forma compleja, simplifica.

a) $f(x+iy) = 4y^2 + i(4x^2)$ *b)* $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} + iy$ *c)* $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$

Problema 3. Encuentra la imagen de cada función del conjunto correspondiente.

a) $f(z) = z^2$, el circulo con centro en el origen y de rario r

b) $f(z) = \frac{1}{z}$, la recta que une el origen con $1+i$

c) $f(z) = \frac{2}{\overline{z}}$, el circulo con centro en el origen y de radio 5

OBS.- En clase se probo que el producto de dos series convergentes en una serie convergente, sin importar la forma en que se toman los productos, en particular se cumple el llamado **"Producto de Cauchy",** el cual nos dice que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Dado esto, resuelve lo siguiente.

Problema 4. Prueba las siguientes:

a) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ usando el producto de cauchy y usando la ecuación de Euler.

b) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

c) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

d) $\left|e^z\right| = e^{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema 5. Resuelve las siguientes.

a) Calcula $\log(i)$ con la rama 0.

b) Calcula $\log(1+i)$ con la rama principal $(-\pi)$

c) Resuelve $e^{z^2} = i$

d) Resuelve $e^{2z} + e^z = i$

OBS.- Recuerden que el seno y el coseno complejos se definen como

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Problema 6. Resuelve las siguientes:

a) Prueba que $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$ y $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$

b) Prueba que $\sin(-z) = -\sin(z)$ y $\cos(-z) = \cos(z)$

c) Prueba que $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$

d) $\left|e^z\right| = e^{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

e) Encuentra los complejos tales que $\sin z = 0$ y $\cos z = 0$

e) Encuentra los complejos tales que $\cos z = 2i \sin z$

OBS.- Recuerden la definición del seno y coseno hiperbólicos:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Problema 7. Resuelve las siguientes:

a) Prueba que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

b) Prueba que $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$

c) Prueba que $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i \sinh(y)\cos(x)$

d) Prueba que $\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) + i \sin(x)\sinh(y)$

e) Prueba que $\left|\cos(x + iy)\right| = \cos^2 x + \sinh^2 y$

Problema 8. Determina si las siguientes funciones son analíticas y en caso de serlo calcula su derivada.

a) $f(z) = \sin z$ usando las ecuaciones de cauchy Riemann.

b) $f(z) = (\overline{z} + 2i)^2 - 1$

c) $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

d) $f(x+iy) = \cosh(x)\sin(y) - i\sinh(x)\cos(y)$

e) $f(x+iy) = e^{2xy}(\cos(y^2 - x^2) + i\sin(y^2 - x^2))$

Problema 9. Determina las relaciones entre las constantes a, b y c para que las siguientes funciones sean enteras y calcula su derivada.

a) $f(z) = a(x^2 + y^2) + c + bxyi$

b) $f(z) = e^x\cos(ay) + ie^x\sin(y+b) + c$

Problema 10. Determina la región donde son analíticas las siguientes funciones.

a) $f(z) = \sin(\dfrac{1}{z^2+1})$.

b) $f(z) = \cosh(z^2 + 3iz)$.

c) $f(z) = \dfrac{z+i}{\cos(iz)}$.

d) $f(z) = \log(z+1)$ con la rama $\pi/2$.

e) $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ con la rama principal.

f) $f(z) = \log(3z-2)$ con la rama 0.