Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera
Ayudante: Ninive Atenea Tello Arcos

Tarea-Guía 2

Problema 1. Da una prueba de las siguientes afirmaciones, en caso de ser falsa da un contraejemplo: Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sucesión.

a) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$

b) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \text{Re}(z_n) = \text{Re}(z)$

c) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \arg(z_n) = \arg(z)$

d) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = \overline{z}$

e) Si $\{|z_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge entonces $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también.

f) Si $|z| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0$

g) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{z_n} = \sqrt{z}$

Problema 2. Determina si los siguientes limites convergen (con sus condiciones necesarias) y encuentra su valor.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$ *b)* $\lim_{n\to\infty} (2-ai)^n$, $a \in \mathbb{R}$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2in^2 - i}{n^2 + 3i}$ *d)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ni + n^2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + i}$ *f)* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{3}(1+i)^n\right|$

Problema 3. Para $z \neq 1$, y $n \geq 2$,

a) Demuestra que $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

b) Prueba que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$

c) Prueba que $\sum_{n=m}^{\infty} z^n = \frac{z^m}{1-z}$ si $|z| < 1$

Problema 4. Encuentra el valor exacto de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n+3^{n+1}}{2\cdot 5^{n+2}i}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{3}{4-4\sqrt{3}i}\right|^n$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{(1+i)^{2n}}$

Problema 5. Determina si convergen o divergen las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{1+\frac{1}{in}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}i\right)$

Problema 6. Determina para que valores de $z\in\mathbb{C}$ converge las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)^n}{(2+i)^n}$

Problema 7. Resuelve las siguientes:

a) Evalué $f(z)=z^2\overline{z}-2i$ para $z=1+i$; $z=3-2i$

a) Si $f(z)=\dfrac{2z-5}{z+4}$, encuentra los valores de $z\in\mathbb{C}$ tales que $f(z)=3i$

Problema 8. Obtén la parte real e imaginaria de:

a) $f(z)=z^2+4z\overline{z}-5\,\mathrm{Re}(z+i)+\mathrm{Im}(z+1)$

b) $f(z)=\dfrac{iz+1}{1+\overline{z}}$

c) $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z+1}$

Problema 9. Exprese la función en términos de z y $\overline{z}$:

a) $f(z)=4y^2+i(4x^2)$

b) $f(z)=2x^2-2y^2+3y+i(4xy-3x)$

c) $f(z)=x^2+y^2$

d) $f(z)=\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}+i\dfrac{x}{x^2+y^2}$