Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Tarea-Guía 1

Problema 1. Calcule el módulo, el argumento y el conjugado de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i$ *b)* $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ *c)* $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ *d)* $z_4 = -5 - 5i$

Problema 2. Sean $z = -1 - i$ y $w = 2 - 2i$, calcule:

a) $z + w$ *b)* $\overline{z} - \overline{w}$ *c)* zw *d)* z/w

Problema 3. Determina la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $\overline{\left(\dfrac{a+bi}{1+7i}\right)}$ *b)* $\left(\dfrac{2+i}{x-iy}\right)^2$ *c)* $\left|\overline{\left(\dfrac{-5-i}{2+2i}\right)}^{3}\right|$

Problema 4. Encuentre $z, w \in \mathbb{C}$ tales cumplan las siguientes tres propiedades.

a) $z + w = 5$ *b)* z/w es imaginario puro *c)* $|z| = 2|w|$

Problema 5. Encuentre los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ tales que:

a) $(3x - i)(2 + i) + (x - yi)(1 + 2i) = 5 + 6i$

b) $3yi + 2x - y + 5xi = 5 + 7i$

c) $(x - yi)(4 - 10i) = i^5$

Problema 6. Encuentra:

a) $\sqrt{i}$ *b)* $\sqrt{-8}$ *c)* $\sqrt{3 - 2i}$ *d)* $\sqrt{-2 - 2i}$

NOTA: Recuerda que sí $z = a + ib$, con $b \neq 0$, entonces

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

Problema 7. Encuentra las soluciones a las siguientes ecuaciones:

a) $iz^2 - 3 = 0$ *b)* $z^2 + 3iz + 5$ *c)* $-3iz^2 - 2iz + 1 + i = 0$

Problema 8. Prueba que sí $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $z/\overline{z}$ está en el circulo unitario, es decir su modulo es 1.

Problema 9. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Da una prueba en caso de que el enunciado sea verdadero, y un contraejemplo en caso de que sea falso.

a) $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$

b) $|z + \overline{z}| = 2|\operatorname{Re} z|$

c) $|z - w| = |z| - |w|$

Problema 10. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ prueba los siguientes:

a) $z\overline{w} + \overline{z}w$ es un número real

b) $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$

c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

Problema 11. Para $z \neq 1$, y $n \geq 2$,

a) Demuestra que $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$

b) Prueba que si γ es raíz n-ésima de la unidad (es decir $\gamma^n = 1$) entonces

$$1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{n-1} = 0$$

c) Encuentra el valor de $i + i^2 + \cdots + i^{100}$

Problema 12. Expresa los siguientes números complejos en la forma $a + ib$

a) $3\sqrt{2}\operatorname{CiS}(\frac{5\pi}{4})$ *b)* $2\operatorname{CiS}(\frac{3\pi}{2})$ *c)* $4\operatorname{CiS}(-\frac{\pi}{6})$ *d)* $3\operatorname{CiS}(\frac{\pi}{2})$

Problema 13. Escribe las siguientes en forma polar:

a) $8i$ *b)* $7 + 7i$ *c)* $-3 + 3\sqrt{3}i$ *d)* $\dfrac{1}{\sqrt{3} - i}$

Problema 14. Prueba que la fórmula de Moivre funciona también para enteros negativos, es decir, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ entonces, **Hint:** Recuerda cuanto es $z^{-1} = 1/z$

$$z^{-n} = r^{-n}\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Problema 15. Simplifique las siguientes expresiones de la forma que considere conveniente:

a) $\dfrac{(\sqrt{3} + i)^5}{(-1 - \sqrt{3}i)^{10}}$ *b)* $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^8$ *c)* $\dfrac{1}{(2\sqrt{3} - 2i)^4}$

Problema 16. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 = 1 - i$ *b*) $z^6 = 2 - 2\sqrt{3}i$ *c*) $z^5 = -32$