Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja II

Tarea 8

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Una continuacón analítica por cadenas o a lo largo de una curva siempre puede transformarse en una en una continuación analítica directa.

b) Sea $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \neq \emptyset$. Si (f_2, Ω_2) es una extensión analítica de (f_1, Ω_1) y (f_3, Ω_3) es una extensión analítica de (f_2, Ω_2), entonces (f_3, Ω_3) es una extensión analítica de (f_1, Ω_1).

c) La función $f(z) = \sin z$ es la única función entera cuya restricción al eje real es la función $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

d) los puntos regulares de la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1$$

son $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Demostración:

(*a*) Falso.

Pues podemos tener $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ y $\Omega_2 \cap \Omega_3 \neq \varnothing$ pero $\Omega_1 \cap \Omega_3 = \varnothing$ por lo que no podríamos hablar de una extensión de Ω_1 a Ω_2.

(*b*) Verdadero.

Dem: Tenemos que:

$(f_2, \Omega_2) \longrightarrow (f_1, \Omega_1) \iff \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ y $f_2(z) = f_1(z) \ \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ *

$(f_3, \Omega_3) \longrightarrow (f_2, \Omega_2) \iff \Omega_3 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ y $f_3(z) = f_2(z) \ \forall z \in \Omega_3 \cap \Omega_2$ *

Pero como $\emptyset \neq \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_3 \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_3 \neq \emptyset$

Así $f_1(z) = f_3(z)$ en $\overset{*}{\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3}$ subconjunto abto de $\Omega_1 \cap \Omega_3$ ent. por el principio de continuación analítica $f_1(z) = f_3(z) \ \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_3$ ▨

(c) Verdadero.

Consideremos a $g:\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $g(z)=\sin_{\mathbb{R}}(z)$ y $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $f(z)=\sin_{\mathbb{C}}(z)$, tenemos que $(f,\mathbb{C})$ es extensión analítica de $(g,\mathbb{R})$. En efecto, sabemos que cada par es un par analítico y además $\mathbb{R}\cap\mathbb{C}\neq\varnothing$ en dónde $f(z)=g(z)$. Por lo que, por el principio de continuación analítica esta extensión es única.

(d) Falso.

(d) Falso

Los puntos regulares de $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, $|z|<1$ son $\mathbb{C}\setminus\{i\}$

Dem: Tenemos que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\frac{1}{1-(-z^2)}=\frac{1}{1+z^2}$ en $|z|<1$ pero $\frac{1}{1+z^2}$ tiene singularidades en $z=\pm i$ $\therefore$ los puntos regulares de f son $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ ■

■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>0\}$. Demuestre que la función

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

es analítica en Ω

Demostración: Tomemos la rama principal.

Definamos $g:\Omega\times(0,a)\to\mathbb{C}$ dada por $g(z,t)=t^{z-1}e^{-t}$. Notemos que g es continua en $\Omega\times(0,a)$ para toda $a>0$, pues como $t>0$ entonces t^{z-1} es continua y e^{-t} también, más aun la función $g(z,t)$ es analítica respecto a z pues lo es t^{z-1}. Y análogamente considerando $\partial_z g(z,t)=t^{z-1}\ln(t)e^{-t}$ esta también es una función continua en $\Omega\times(0,a)$, además:

1) $\Gamma(z)=\int_0^\infty g(z,t)dt$ converge apara $z=1$ pues $\Gamma(1)=\int_0^\infty g(1,t)dt=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$

2) $\int_0^\infty \partial_z g(z,t)dt$ converge uniformemente.

En efecto, tenemos que $\partial_z g(z,t)$ es integrable respecto a t para cada $z\in\Omega$, y además

$$\left|\int_0^\infty \partial_z g(z,t)dt\right|\le\int_0^\infty\left|\partial_z g(z,t)\right|dt=\int_0^\infty\left|t^{z-1}\ln(t)e^{-t}\right|dt=\int_0^\infty\left|t^{z-1}\right|\left|\ln(t)\right|\left|e^{-t}\right|dt$$

$$\underset{z=x+iy}{=}\int_0^\infty t^{x-1}\left|\ln(t)\right|\left|e^{-t}\right|dt\le\int_0^\infty t^{x-1}t\cdot e^{-t}dt=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt$$

y para esta integral tenemos que

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \int_0^1 t^x e^{-t} dt + \int_1^\infty t^x e^{-t} dt$$

• Para la primera, cómo $x > 0$ y $t \in [0,1] \Rightarrow e^{-t} \leq 1$ por lo que $\int_0^1 t^x e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$ por lo que $\int_0^1 t^x e^{-t} dt$ converge.

• Para la segunda, notemos que $t^x \leq t^{[x]}$ por lo que vista como función de t es un polinomio de grado $[x]$ y sabemos que la función exponencial le gana a cualquier polinomio a partir de un momento, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x > N$ se tiene que $t^x < e^{\frac{1}{2}t}$, con esto

$$\int_1^\infty t^x e^{-t} dt = \int_1^N t^x e^{-t} dt + \int_N^\infty t^x e^{-t} dt \leq \int_1^N t^x e^{-t} dt + \int_N^\infty e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

y ambas integrales convergen, por lo que $\int_1^\infty t^x e^{-t} dt$ converge $\therefore \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$ converge. Con esto tenemos por el criterio de Weierstrass $\int_0^\infty \partial_z g(z,t) dt$ converge uniformemente.

Por lo que por (1) y (2) tenemos que $\Gamma(z) = \int_0^\infty g(z,t) dt$ es analítica en Ω y además $\Gamma'(z) = \int_0^\infty \partial_z g(z,t) dt$ (teorema visto en clase).

■

Problema 3. –

vale(2.0) Demuestre que el radio de convergencia de una serie de potencias es una función continua del punto alrededor del cual se desarrolla.

Demostración:

Dem: Sea $R(z) = \sup\{ r \mid f$ es analitica en $D(z,r)\}$ el radio de convergentia de f en z. Sea z_0 con radio de convergencia $R(z_0)$.

S.p. $R(z)$ no es continua, ent. $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$ si $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |R(z) - R(z_0)| \geq$

Asi para δ suficientemente pequeño $D(z_0, \delta) \subseteq D(z, R(z))$ (S.p.g $R(z) \geq R(z_0)$)

Pero ent. f sera analitica en $D(z, R(z))$! pues $R(z_0)$ es el supremo

$\therefore R(z)$ es continua.

Problema 4. –
vale(2.0) Encuentre una continuación analítica de

$$f(z) = \mathrm{Ln} z = (z-1) + \frac{(-1)}{2}(z-1)^2 + \cdots$$

a lo largo de la curva $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Determine explicitamente la serie de potencias para cada t. Cual es la relación entre f_0 y $f_{2\pi}$?

Demostración: Consideremos $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n+1}(z-1)^n$ definida en $D(1,1)$.

Ahora consideremos la expansión en series del logaritmo principal para cada punto de la curva, siendo

$$f_t(z) = \mathrm{Ln}(e^{it}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e^{it})^{-n}(-1)^{n+1}(z-e^{it})^n \text{ si } t \in [0,\pi) \cup (\pi, 2\pi] \text{ analítica en } D(e^{it},1)$$

$$f_\pi(z) = \ln_0(-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{-n}(-1)^{n+1}(z-(-1))^n = i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(z+1)^n$$

analitica en $D(-1,1)$, esto para evitar el corte de rama

Entonces notemos que $\bigcup_{i \in I} D(e^{it},1)$ con $I = [0, 2\pi]$ es una cubierta abierta de la circunferencia unitaria, y al ser esta compacta existirá una subcubierta finida que la cubre. Veamos que obtenemos una cadena.

En efecto, sean $(f_{t_1}, D(e^{it_1},1)), (f_{t_2}, D(e^{it_2},1)), \ldots, (f_{t_k}, D(e^{it_k},1))$ los pares analíticos de la subcubierta finita que encontramos, veamos que $(f_{t_j}, D(e^{it_j},1))$ es extensión analítica de $(f_{t_{j+1}}, D(e^{it_{j+1}},1))$ para cada j. En efecto por construcción se tiene que $D(e^{it_j},1) \cap D(e^{it_j},1) \neq \emptyset$ pues si no fuera así no se cubriría la curva, además si pasara que $(f_{t_{j+1}}, D(e^{it_{j+1}},1)) = (f_\pi, D(-1,1))$ entonces el termino anterior viviría en el semiplano superior, por lo que al ser $\mathrm{Ln}(z) = \ln_0(z)$ en ese semiplano tendremos que se sigue cumpliendo. Además, como los demás son series del logaritmo principal coincidirán, por lo que efectivamente es una cadena. (igual a lo visto en clase)

Siendo por tanto $f_{2\pi}$ extensión directa de $f_0 = f$.

■

Problema 5. –
vale(2.0) Muestre que la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

es analítica en el disco $D(0,1)$ y no puede extenderse analíticamente a otro conjunto abierto mas grande.

Demostración:

Dem: Tenemos que $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} < \infty$ pues $|z^2| < 1$.

$\therefore$ $f(z)$ es analítica en $D(0,1)$ y tiene radio de convergencia $R = 1$.

Ahora, notemos que f no es regular en $z=1$ pues:

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} \geq \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{N} r^{2^n} = \sum_{n=0}^{N} 1 = N \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+ \quad \therefore \lim_{r \to 1^-} f(r) = \infty$$

$\therefore$ $z=1$ no es un punto regular.

Obs: Sea $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f(z^{2^m}) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{2^m})^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^m \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{m+n}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} - \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} = f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n}$

$\therefore f(z^{2^m}) = f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n}$ $\therefore f(z) = f(z^{2^m}) + \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n}$ $\forall z \in D(0,1)$ y $m \in \mathbb{Z}^+$. *

Así, dado w raíz 2^m-ésima de la unidad p.a $m \in \mathbb{Z}^+$ ($w^{2^m} = 1$) se tendrá que:

$$\lim_{r \to 1^-} f(rw) \overset{*}{=} \lim_{r \to 1^-} \left[f((rw)^{2^m}) + \sum_{n=0}^{m-1} (rw)^{2^n} \right] = \lim_{r \to 1^-} f(r^{2^m} \cdot w^{2^m}) + \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{m-1} (rw)^{2^n}$$

$$= \lim_{r \to 1^-} f(r^{2^m}) + \sum_{n=0}^{\infty} w^{2^n} \overset{*}{=} \lim_{r \to 1^-} \left(f(r) - \sum_{n=0}^{m-1} r^{2^n}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} w^{2^n}$$

$$= \lim_{r \to 1^-} \underbrace{f(r)}_{\infty} - (m-1) + \sum_{n=0}^{m-1} w^{2^n} \longrightarrow \infty$$

$\therefore \lim_{r \to 1^-} f(rw) = \infty$ $\therefore$ w no es regular $\forall m \in \mathbb{Z}^+$.

Por lo tanto toda raíz 2^m-ésima de la unidad no es regular.

Así el cjt. de todas las raices 2^m-ésimas de la unidad forma un cjto. denso de $\partial D(0,1)$ con lo cual si existiera una extensión analítica sobre Ω. t.q $\partial D(0,1) \subseteq \Omega$, ent. Ω tendría puntos no regulares, a saber, raices 2^m-ésimas de la unidad, lo cual no puede suceder ■