Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Variable Compleja II
Tarea 9

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(1.0) Sea $x > 1$ fijo. Demuestre que la integral

$$\int_0^1 t^{x-1} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1}\, dt$$

converge uniformemente.

Demostración: Sea $x > 1$ fijo.

Obs.- Sea $f(t) = e^t - t - 1$ con $t \in [0,1]$, entonces $f'(t) = e^t - 1$ por lo que $f' \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1 \Leftrightarrow t > 0$, entonces $f(t) = e^t - t - 1$ es creciente en $t \in [0,1]$ y además $f(0) = 0$ por lo que $f(t) \geq 0$ para $t \in [0,1]$, es decir, $e^t - 1 \geq t$ en este intervalo.

Ahora sea $g(t) = t^{x-1} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1}$ y veamos que $\int_0^1 g(t)dt$ converge uniformemente.

- $|g(t)| = \left|t^{x-1} \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\right| = \left|t^{x-1}\right| \left|\frac{e^{-kt}}{e^t-1}\right| \underset{t\geq 0}{\overset{obs}{\leq}} t^{x-1} \left|\frac{e^{-kt}}{t}\right| = t^{x-1} \frac{e^{-kt}}{t} \underset{-kt<0}{\leq} \frac{t^{x-1}}{t} = t^{x-2}$
- Sea $M(t) = t^{x-2}$ entonces $\int_0^1 M(t)dt = \int_0^1 t^{x-2}dt \underset{x-2>-1}{=} [\frac{1}{x-1} t^{x-1}]_0^1 = \frac{1}{x-1} - \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{x-1} y^{x-1} = \frac{1}{x-1}$

por tanto $\int_0^1 M(t)dt$ converge.

Por los dos puntos anteriores tenemos por el Criterio de Weierstrass que la integral converge uniformemente.

■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea $0 < \epsilon < 2\pi$ y C_ϵ la misma curva del teorema 3 mayo 25. Demuestre que la función

$$f(z,\epsilon) := \int_{C_\epsilon} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1}\, dw$$

es independiente de $\epsilon \in (0, 2\pi)$. Para la función potencia usamos el logaritmo respecto a 0:

$$w^{z-1} = e^{(z-1)\mathrm{Ln}_0 w}$$

Demostración: Tomemos la rama principal.

Definamos $g : \Omega \times (0,a) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z,t) = t^{z-1}e^{-t}$. Notemos que g es continua en $\Omega \times (0,a)$

Problema 3. –

vale(4.0) Considere la función gama definida como

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du$$

analítica en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

a) Sea $\mathrm{Re}\, z > 0$ fijo. Demuestre que la transfromada de laplace $F(s)$ de $f(t) = t^{z-1}$, $t \in \mathbb{R}^+$ viene dada por

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}$$

y es analítica en $s \in \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > 0\}$. (Hint:Demuestre el resultado para $s \in \mathbb{R}^+$ usando la sustitución u=st en la definición de la función gamma.)

b) Demuestre que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \tag{1}$$

(Hint: Use el inciso a) y aplique la formula $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ a la función $f(t) = t^z$.)

c) Use la relación (1) para mostrar que la función gamma puede extenderse analíticamete al conjunto

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > -1\} \setminus \{0\}$$

y que $z = 0$ es un polo simple.

d) Sea $m \in \mathbb{Z}^+$. Use la ecuación (1) para calcular $\Gamma(z+m+1)$ en términos de $\Gamma(z)$ y use esta relación para extender analíticamente la función Γ definida en $\Omega_0 = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ al conjunto

$$\Omega_{m+1} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > -1 - m\} \setminus \{0, -1, -2, \cdots, -m\}.$$

Demuestre que $z = n$, $n \in \{0, -1, -2, \cdots, -m\}$ es un polo simple y que ademas

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Concluya que la función gamma es meromorfa con polos en el conjunto $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

Demostración:

(*a*) Lo demostraremos para $s \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^{z-1}dt \text{ sea } u=st \Rightarrow \tfrac{1}{s}du=dt \text{ entonces}$$
$$F(s)=\int_0^\infty e^{-u}(\tfrac{u}{s})^{z-1}\tfrac{1}{s}du=\frac{1}{s^z}\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du=\frac{1}{s^z}\Gamma(z)$$
$$\therefore\ F(s)=\frac{1}{s^z}\Gamma(z) \text{ con } s\in\mathbb{R}^+$$

ahora sea $g(z)=\frac{1}{s^z}\Gamma(z)$ con $z\in\mathbb{C}$, como la función gamma es analítica en Ω y $\frac{1}{s^z}$ es entera, tendremos que $g(z)$ es analítica en Ω y mas aun, se tiene que $F(z)=g(z)\ \forall z\in\Omega\cap\mathbb{R}^+$, por lo tanto al ser este un abierto, tendremos que las funciones son iguales, en todo Ω. Por lo que $F(s),\ s\in\mathbb{C}$ es analítica en Ω.

■

(b) Sea $z>0$ y usando el hecho de que $£(f')=s£(f)-f(0)$ a la función $f(t)=t^{z-1}$ tenemos que por el inciso anterior que $£(f')=£(zt^{z-1})=z£(t^{z-1})=z\frac{\Gamma(z)}{s^z}$ y por otro lado $s£(f)-f(0)=s£(t^z)-0=s\frac{\Gamma(z+1)}{s^{z+1}}=\frac{\Gamma(z+1)}{s^z}$, por lo tanto

$$£(f')=s£(f)-f(0) \Leftrightarrow z\frac{\Gamma(z)}{s^z}=\frac{\Gamma(z+1)}{s^z} \Leftrightarrow z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$$

■

(c) Sea $g(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ y notemos que como $\Gamma(z+1)$ es analítica en $\Omega'=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z+1)>0\}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\}$ y $\frac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ entonces $g(z)$ es analítica en $\Omega_1=\Omega'\cap\mathbb{C}\setminus\{0\}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\}\setminus\{0\}$. Además, como $\lim_{z\to 0}zg(z)=\lim_{z\to 0}\Gamma(z+1)=\Gamma(1)=1$ tendemos que $z=0$ es polo simple.

En resumen, tenemos la función $g(z)$ analítica en Ω_1 y la función gamma analítica en Ω tales que $g(z)=\Gamma(z)\ \forall z\in\Omega=\Omega\cap\Omega_1$ con lo cual $(g(z),\Omega_1)$ es una extensión analítica de (Γ,Ω).

■

(d) Sea $m\in\mathbb{Z}^+$. Veamos que $\Gamma(z+m+1)=(z+m)(z+m-1)\cdots z\cdot\Gamma(z)$.
Para $m=1$ ya fue probado en el inciso $c)$. Supongamos que es válido para algún $m>1$, entonces tenemos que $\Gamma(z+m+2)=\Gamma([z+m+1]+1)$ usando el caso base obtenemos que $\Gamma(z+m+2)=(z+m+1)\Gamma(z+m+1)\underset{H.I}{=}(z+m+1)(z+m)(z+m-1)\cdots z\cdot\Gamma(z)$ quedando demostrado por inducción.

Sea $g(z)=\frac{\Gamma(z+m+1)}{(z+m)(z+m-1)\cdots z}$ y notemos que como $\Gamma(z+m+1)$ es analítica en $\Omega_m=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z+m+1)>0\}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1-m\}$ y $\frac{1}{(z+m)(z+m-1)\cdots z}$ es analítica en

$\mathbb{C}\backslash\{0,-1,\ldots,-m\}$ entonces $g(z)$ es analítica en $\Omega_{m+1}=\Omega'\cap\mathbb{C}\backslash\{0,-1,\ldots,-m\}$ $=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)>-1-m\right\}\backslash\{0,-1,\ldots,-m\}$. Además, como para $k\in\{0,-1,..,-m\}$, $k=-n$:

$$\lim_{z\to -n}(z+n)g(z)=\lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)(z+n+1)\cdots(z+m-1)(z+m)}=\lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n+1)\cdots(z+m-1)(z+m)}$$

$$\frac{\Gamma(-n+m+1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)(-n+n+1)\cdots(-n+m-1)(-n+m)}=\frac{((-n)+m)((-n)+m-1)\cdots(-n+n+1)(-n+n)}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)(-n+n+1)\cdots(-n+m)}$$

$$=\frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)}=\frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)}=\frac{(-1)^n}{(n)(n-1)\cdots(1)}=\frac{(-1)^n}{n!}\neq 0$$

por lo que tendemos que $z=k$ es polo simple $\forall k\in\{0,-1,..,-m\}$. Mas aun $\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=\frac{(-1)^n}{n!}$.

En resumen, tenemos la función $g(z)$ analítica en Ω_m y la función gamma analítica en Ω_0 tales que $g(z)=\Gamma(z)\ \forall z\in\Omega_0=\Omega_0\cap\Omega_m$ con lo cual $(g(z),\Omega_m)$ es una extensión analítica de (Γ,Ω_0). Entonces la función gamma es meromorfa pues por lo anterior las únicas singularidades serán $n\in\mathbb{Z}^-\cup\{0\}$, las cuales son polos simples.

■

Problema 4. –

vale(3.0) Sea $s\in(0,1)$. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{t+1}\,dt=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Use el resultado arriba para demostrar la relación

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\qquad z\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}^-\cup\{0\})$$

y concluya que la función Γ no tiene ceros. (Hint: Demuestre la relación para $z=s\in(0,1)$. Para ello use la definición de la función gamma con variable de integración t para el factor $\Gamma(s)$ y variable de integración u para el factor $\Gamma(1-s)$. A continuación exprese el producto como una integral doble y resuelva con la sititución $x=t+u$ y $y=t/u$.)

Demostración: Tomemos la rama principal.

Definamos $g:\Omega\times(0,a)\to\mathbb{C}$ dada por $g(z,t)=t^{z-1}e^{-t}$. Notemos que g es continua en $\Omega\times(0,a)$