Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Seminario Curvas Algebraicas

Tarea 2

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 6b. –

Ejercicio 6. *Sea $P = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(K)$.*

a) Muestra que el conjunto $\{(a,b,c) \in \mathbb{A}^2(K) : ax + by + xz = 0\}$ es un plano, es decir un subespacio vectorial de dimensión 2.

b) Muestra que para cualquier conjunto finito de puntos en $\mathbb{P}^2(K)$, existe una línea proyectiva que no pasa por ninguno de ellos.

Demostración: El problema es equivalente a ver que para cualquier conjunto finito de puntos $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{A}^3(K)$ existe un plano tal que no pasa por ninguno de los puntos. O dicho de otra forma existen constantes $a,b,c \in K$ tales que $p_i \bullet (a,b,c) \neq 0$ (el vector (a,b,c) seria el vector normal del plano buscado y esta propiedad me dice que los puntos no están en el plano).

Supongamos por contradicción para cualesquiera $a,b,c \in K$ se tiene que $p_i \bullet (a,b,c) = 0$ para algún $i = 1,..,n$. Entonces con esto tendremos que el polinomio

$$f(x,y,z) = \prod_{i=1}^{n} p_i \bullet (x,y,z) = 0$$

por lo que $p_i \bullet (x,y,z) = 0$ para alguna $i = 1,..,n$ y esto es si y solo si $p_i = 0$ para alguna $i = 1,..,n$!!! Pero esto contradice que p_i se un punto.

■

Problema 8d. –

Ejercicio 8. *Las ecuaciones*

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad y = \frac{2t}{1-t^2},$$

definen una parametrización de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

d) La técnica del inciso c) se puede utilizar para entender lo que sucede cuando t tiende a infinito. En la parametrización $(z,y,z) = (1+t^2, 2t, 1-t^2)$ sustituye $t = \frac{1}{u}$. Elimina denominadores y haz tender u a infinito. ¿ Cuál es el punto de la hipérbola que se obtiene?

Solución: Haciendo $t = 1/u$ tenemos que

$$(x,y,z)=(1+t^2,2t,1-t^2) \;\rightarrow\; (1+\frac{1}{u^2},\frac{2}{u^2},1-\frac{1}{u^2})$$
$$\Rightarrow\; u\rightarrow\infty \;\Rightarrow\; (x,y,z)=(1+0,0,1-0)=(1,0,1)$$

obtenemos el vértice en el plano $z=1$

∎

Problema 9,1. –

Ejercicio 9. *Con este ejercicio se analiza el comportamiento en el infinito de la hipérbola* $x^2-y^2=1$.

1. *Describe la cerradura proyectiva* H *de la hipérbola* $x^2-y^2=1$.

Solución: Tenemos que $H:=V(x^2-y^2-1)$, entonces sabemos que la cerradura proyectiva es conjunto de ceros de la homogeneización del polinomio de dentro. Por lo que si $f(x,y)=x^2-y^2-1 \;\Rightarrow\; F(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$ es el polinomio homogéneo, y así $\widehat{H}=V(x^2-y^2-z^2)$ es la cerradura proyectiva.

∎

Problema 10d. –

Ejercicio 10. *Considera la parábola* $y=x^2$.

a) *¿ Cuál es la ecuación que hace a la parábola en una curva proyectiva* P*?.*

b) *Encuentra los puntos al infinito de* P.

c) *Encuentra coordenadas adecuadas que permitan explicar porque la parábola* P *es tangente a la recta al infinito.*

d) *Muestra que en las coordenadas* (y,z) *la curva* P *es una hipérbola.*

Solución: Consideremos la homogeneización de $f(x,y)=y-x^2$ que es $F(x,y,z)=yz-x^2$ entonces la curva de nivel cortada por el plano y,z será tomando $x=c$ constante, por lo que tendremos que $0=yz-c^2 \;\Leftrightarrow\; yz=c^2 \;\Leftrightarrow\; y=\frac{c^2}{z}$ que es una hipérbola.

∎