Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

RECREACIONES EN TEORÍA DE NÚMEROS

Traducción capítulo 3 "Perfección"

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Perfección

El hombre siempre ha buscado la perfección, pero inevitablemente esta escapa de él. Irónicamente ha buscado “números perfectos” a lo largo de los siglos y ha encontrado solo unos pocos (52 hasta 2021). Un número perfecto es aquel que es igual a la suma de sus divisores, es decir, todos los divisores incluyendo al 1 pero excluyendo al mismo número. La mayoría de los números son no-perfectos y a estos se les puede catalogar como “abundantes” o “deficientes” si la suma de sus divisores excede al número o si de lo contrario no lo sobrepasan, como 24, la suma de sus divisores es 36, o 15, cuya la suma de sus divisores solo es 9. Seis es el número perfecto más chico, la suma de sus divisores es exactamente 6, $1+2+3=6$.

Los números perfectos son pocos y distantes entre sí; después del 6 siguen 28; 496; 8128; y 33550336 en ese orden. No se conocen números perfectos impares. El 6 y el 28 fueron considerados por algunos comentaristas de la biblia como los números básicos del Arquitecto Supremo, la creación en seis días y el ciclo lunar de 28 días se señala para corroborarlo.

Euclides estudio los números perfectos como hicieron muchos otros griegos y hebreos. Incluso conocía una fórmula para los números perfectos. Euclides vivió hace unos 2300 años. Desde su época, se ha invertido una enorme cantidad de trabajo en los números perfectos y los campos que se abrieron al investigarlos. San Agustín dijo: “Seis es un número perfecto en sí mismo, y no porque Dios creó todas las cosas en seis días; más bien lo inverso es cierto; Dios creó todas las cosas en seis días porque este número es perfecto. Y permanecería perfecto incluso si el trabajo de los seis días no existiera”.

Nichomachus, un matemático que floreció alrededor de 100 A.C. y a quien a veces se le atribuye el descubrimiento de los números perfectos 28 y 496, escribió: “Pero sucede que, así como lo bello y lo excelente son raros y fáciles de contar, pero lo feo y lo malo son prolíficos, así también los números excesivos y defectuosos son muchísimos y están en desorden, siendo su descubrimiento no sistemático. Pero los perfectos se cuentan y se redactan fácilmente en un orden adecuado”.

Los seguidores de Pitágoras -el hombre que es responsable de “la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa”- consideraban al 6 como el símbolo del “matrimonio, la salud y la belleza debido a la integridad de sus partes y al acuerdo existente en él”.

Josef B. Jehuda Ankin, en el siglo XII, recomendó el estudio de los números perfectos en su libro *Healing of Souls*. En una obra italiana se atribuyó a Venus el número perfecto 6, “porque está formado por la unión de los dos sexos, es decir, de la tríada, que es masculina porque es impar, y de la diada, que es femenina porque es par”.

La fórmula para un número perfecto par, N, es:

$$N=(2^{n-1})(2^{n}-1)$$

donde n es cualquier entero mayor a 1 y donde el segundo factor $(2^n - 1)$ es un número primo. Esto es cierto cuando $n = 2, 3, 5, 7, 13,$ etc., desafortunadamente los valores de n no siguen una secuencia regular. Los números perfectos correspondientes para los valores anteriores son: 6; 28; 496; 8128; y 33550336.

Es un hecho notable que Euclides conocía la fórmula para números perfectos pares, y no fue hasta dos mil años después que el matemático Euler demostró que la fórmula de Euclides da todos los números perfectos pares. Nadie ha podido demostrar todavía si un número impar puede ser perfecto o no.

Si alguna vez se llegara a encontrar un número perfecto impar, N, este tendría que cumplir una serie de requisitos más estrictos que los que existen en un contrato legal y algunos son muy confusos. Estos son solo algunos:

1. N deja un residuo de 1 cuando se divide por 12 o un residuo de 9 cuando es dividido por 36.
2. Debe de tener al menos 6 divisores primos distintos.
3. Debe de ser de la forma $N = p^{4x+1} {q_1}^{2a_1} \cdots {q_n}^{2a_n}$, donde p es un primo de la forma $4k+1$ y las $q\acute{}s$ son cualesquiera otros primos impares.
4. Esto se puede matizar aún más al afirmar que si todas las $a\acute{}s$ excepto la primera son iguales a l, entonces a_1 no puede ser igual a 2; también si todos los $a\acute{}s$ excepto los dos primeros son iguales a l, entonces los dos primeros, a_1 y a_2, no pueden ser iguales a 2.
5. N no puede ser perfecto si todas las $a\acute{}s$ son iguales a 2.
6. Si a todos los exponentes de los primos $q\acute{}s$ se les suma 1, los exponentes resultantes no pueden tener como común divisor, 9, 15, 21 o 33.
7. Si el exponente $4x+1$ de p es 5, entonces ninguno de los $a\acute{}s$ es 1 o 2.
8. Si N no es divisible por 3, debe de tener al menos 9 divisores primos distintos, y si no es divisible por 21 debe de tener al menos 11 de esos divisores. Si no es divisible por 15, debe de tener al menos 14 divisores primos distintos, y si no es divisible por 105 debe al menos 27 de esos divisores. Esto requiere que N sea mayor que 10^{24}.
9. Si N tiene exactamente r divisores primos distintos, el más chico de ellos debe ser menor a $r+1$. Por lo tanto N (de existir) tiene 28 divisores primos distintos, y el más chico de ellos no debe de exceder de 23.

Para números perfectos pares, $(2^{n-1})(2^n - 1)$, el problema consistirá en encontrar los valores de n para que el segundo factor de $(2^{n-1})(2^n - 1)$ sea primo. W. W. R. Ball dio el nombre de "números de Mersenne" a los enteros de la forma $2^n - 1$ donde n es un primo, pues el matemático francés Mersenne hizo una declaración en su Cogitata en 1644 con respecto a los números de este tipo. Las conjeturas sobre la fuente de información de Mersenne y las discusiones subsiguientes han dado a esta investigación un estímulo tal que se han realizado trabajos de cálculo hercúleos para verificar o contradecir sus afirmaciones y, de paso, se han descubierto muchas propiedades importantes de los números. En los tiempos modernos, las computadoras digitales han realizado estas difíciles tareas.

Peter Bungus, que vivió en el siglo XVII, fue uno de los muchos matemáticos que combinaron números y disparates de alguna manera como los alquimistas combinaron química y alquimia. En un libro titulado Numerorum Mysteria, enumeró 24 números considerados perfectos, de los cuales Mersenne afirmó que solo 8 eran correctos, es decir, los enumerados en la Tabla. Mersenne agregó luego por su cuenta los tres valores $n =$ 67; 127; 257, y afirmó que estos dieron los siguientes tres números perfectos en orden. Investigaciones posteriores demostraron que se equivocó al admitir los valores 67 y 257 y que omitió los números perfectos correspondientes a 89 y l 07 para los cuales los números de Mersenne son primos. Pero se necesitaron 303 años, desde 1644 hasta 1947, para verificar y corregir completamente la declaración de Mersenne.

n	Números perfectos $= (2^{n-1})(2^n - 1)$	Numero de Mersenne correspondiente $M_n = 2^n - 1$
2	6	3
3	28	7
5	496	31
7	8128	127
13	33550336	8191
17	8589869056	131071
19	137438691328	524287
31	2305843008139952128	2147483647

Ha habido muchas conjeturas sobre cómo llegó Mersenne a sus resultados, y después de un lapso de más de 300 años no se ha encontrado respuesta. Debe haber descubierto o haber tenido disponible algún teorema que aún no se ha redescubierto, ya que difícilmente se podrían haber utilizado métodos empíricos: el número de Mersenne para $n = 257$ tiene 78 dígitos. Algunos han supuesto que el talentoso matemático Fermat le comunicó estos resultados.

Es inevitable que con un problema que tenga un atractivo tan universal se hayan hecho muchas afirmaciones falsas sobre el descubrimiento de un nuevo número perfecto. Que tales afirmaciones se hicieron en siglos pasados sin ningún fundamento, de hecho, era más o menos esperado, como cuando Peter Bungus dio sin pena 24 números perfectos y logró un promedio de acierto del 33%. Pero el siglo XX también trajo algunos pretendientes interesantes. A medida que los exploradores se sintieron atraídos por el Polo Norte, los matemáticos se han sentido atraídos por los números de Mersenne que tienen exponentes grandes, particularmente el de $n=257$.

El 27 de marzo de 1936, Associated Press publicó un interesante artículo sobre un “nuevo número perfecto”. Dr. S. l. Krieger de Chicago afirmó que había encontrado un número perfecto de 155 dígitos, siendo $(2^{256})(2^{257-1})$; esto es, había probado que $2^{257}-1$ es un primo.
Dijo el New York Herald Tribune:

LA PERFECCIÓN ES ACLAMADA POR UN NUMERO DE 155 DIGITOS TRABAJA 5 AÑOS PARA PROBAR UN PROBLEMA QUE DATA DESDE EUCLIDES

Chicago, 26 de marzo (AP). - El Dr. Samuel l. Krieger dejó caer su lápiz y papel hoy y afirmó que había resuelto un problema que había desconcertado a los matemáticos desde los días de Euclides: encontrar un número perfecto de más de diecinueve dígitos. Un número perfecto era aquel que era igual a la suma de sus divisores, explicó. Por ejemplo, 28 es la suma de 1, 2, 4, 7 y 14, todos los cuales lo pueden dividir. El número perfecto del Dr. Krieger contiene 155 dígitos. Aquí está: 26,815,615,859,885,194, 199,148,049,996,411,692,254,958,731,641,184,786,755,447,122,887,443,528,060,146,978,16 1,514,511,280,138,383,284,395,055,028,465, 118,831,722,842,125,059,853,256,384.

Su fórmula es 2 elevado a 513 menos 2 elevado a 256. El médico dijo que le tomó diecisiete horas resolverlo y cinco años demostrar que era correcto.

Dos expertos en la teoría de los números, M. Kraitchik y DH Lehmer, hombres de merecida alta reputación, encontraron que el numero era compuesto, el primero en 1922, el segundo en 1931. Sin embargo, su método, aunque revela el carácter del número, no reveló sus factores. ¿Quién tenía razón, el Dr. Krieger o los Sres. Kraitchik y Lehmer?

Posteriormente las revistas de matemáticas reprendieron a los periódicos y merecidamente, por haber sacrificado la precisión por el sensacionalismo. Antes de su publicación se conocían cuatro números perfectos con más de los 19 dígitos. Estos tienen 37, 54, 65 y 77 dígitos respectivamente; el de 37 dígitos, $2^{60}(2^{61}-1)$, fue descubierto ya en 1883. El Dr. Krieger dejo caer su afirmación prematuramente, pero el fantasma no se descubrió correctamente hasta 1952 cuando la Computadora Automática Occidental de la Oficina Nacional de Estándares “SWAC” confirmó que $2^{257}-1$ es de hecho compuesto. Más sobre esto más adelante.

La expresión 2^n-1 es siempre compuesto cuando n es compuesto. Porque, si n es un número compuesto par, digamos $n=2y$, la expresión se convierte en una diferencia de cuadrados, que siempre es factorizable de modo que $2^{2y}-1=(2^y+1)(2^y-1)$, por ejemplo:

$$(2^{14}-1)=(2^{7}+1)(2^{7}-1)=129\cdot 127=3\cdot 43\cdot 127$$

Si n es impar pero compuesto tendremos $2^{pq}-1$, y podemos escribir:

$$\begin{aligned}2^{pq}-1&=(2^{p})^{q}-1\\&=(2^{p}-1)((2^{p})^{q-1}+(2^{p})^{q-2}+\ldots+(2^{p})+1)\end{aligned}$$

como se explica en cualquier libro de algebra. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}2^{35}-1=(2^{7})^{5}-1&=(2^{7}-1)((2^{7})^{4}+(2^{7})^{3}+(2^{7})^{2}+(2^{p})+1)\\&=127\cdot 270549121\end{aligned}$$

Por lo tanto, $2^{35}-1$ es compuesto, ya que se ha resuelto en al menos dos factores. Sucede que el último factor también es compuesto, lo que finalmente da como resultado los factores primos $127\cdot 31\cdot 71\cdot 122921$.

Aunque $2^{n}-1$ siempre es compuesto cuando n es compuesto, es muy frecuente que sea compuesto cuando n es primo. Ciertos teoremas se pueden aplicar en algunos casos que pueden factorizar directamente el número o poner un límite razonable al número de divisores que se obtendrán al factorizarlo. El teorema de Fermat y sus corolarios son los más útiles aquí.

Este célebre teorema, al que volveremos a referirnos en el capítulo VI, establece que el número $a^{p-1}-1$ es siempre divisible por p si p es primo y si el número a no es múltiplo de p. Por ejemplo, $2^{6}-1$ es exactamente divisible entre 7. Puede ser que un exponente menor que $p-1$, digamos n, haga que $a^{n}-1$ sea divisible por p (por ejemplo, $2^{3}-1$ también es divisible por 7). Si n es el exponente más pequeño, tal que es un divisor de $p-1$, es decir, $p-1$ debe ser igual a, digamos, mn. Entonces $p=mn+1$.

En los números de Mersenne, es decir, números de la forma $2^{n}-1$, el exponente n es siempre primo y, por lo tanto, impar (excepto $n=2$, un caso trivial). Por tanto, dado que en el teorema de Fermat p también es primo e impar, se deduce que mn debe ser par y, por lo tanto, m debe ser par, igual a, digamos, $2r$, y luego $p=2rn+1$. Esto nos dice, por tanto, que si, por ejemplo, $2^{11}-1$ tiene un divisor primo, p (si tiene algún divisor, tiene un divisor primo, por supuesto), debe ser de la forma $2r\cdot 11+1=22r+1$, y de hecho cuando $r=1$, el primo 23 divide $2^{11}-1$. De manera similar, si $2^{17}-1$ tiene un divisor primo, debe ser de la forma $2r\cdot 17+1=34r+1$, pero en este caso el único divisor primo de este tipo es el número mismo porque $2^{17}-1$ resulta ser un primo. Cuando n se vuelve grande, el número de posibles divisores a probar, aunque limitado a la forma anterior, se vuelve tan grande que se deben alistar otras ayudas.

Sin embargo, una modificación del teorema de Fermat da divisores de ciertos números de Mersenne directamente. De este teorema sabemos que $2^{p-1}-1$ siempre es divisible por p cuando p es un primo. Como p es un número impar, $p-1$ es par y por lo tanto compuesto, porque es divisible por 2. Pero todos los números de Mersenne tienen exponentes primos, por lo que parece que el teorema de Fermat no puede ayudarnos a encontrar factores de estos números. Pero se puede demostrar que para la base 2, el exponente $p-1$ puede dividirse entre 2 sin afectar la divisibilidad entre p si p es un primo dejando 1 o 7 como resto cuando se divide por 8, o, como decimos, es de la forma 8r+1 o 8r + 7. Por lo tanto,

$$2^{[(8r+1)-1]/2} \text{ y } 2^{[(8r+7)-1]/2}$$

son respectivamente divisibles por los números primos de las formas dadas. En el primer caso tenemos que $2^{4r}-1$ es divisible por un primo de la forma $8r+1$, pero como el exponente $4r$ no es un primo, el número no es del tipo Mersenne. En el último caso, sin embargo, tenemos que $2^{4r+3}-1$, es divisible por un primo de la forma $8r+7$, de modo que si tanto $4r+3$ como $8r+7$ son primos, $8r+7$ siempre será divisor del número de Mersenne correspondiente.

Mersenne limitó sus comentarios a los números, 2^n-1, donde n no excede de 257; y hasta este límite, los valores de r y n que cumplen ambas condiciones se muestran en la siguiente tabla.

Divisores de los números de Mersenne

r	$n=4r+3$, un primo	$8r+7$, un primo y divisor de 2^n-1
2	11	23
5	23	47
20	83	167
32	131	263
44	179	359
47	191	383
59	239	479
62	251	503

Se han desarrollado métodos muy ingeniosos para reducir la cantidad de ensayos de divisores de números de Mersenne, incluida una máquina fotoeléctrica de factorización, de la que se hace mención en el capítulo XXI. Las computadoras digitales modernas han sido extremadamente efectivas para encontrar grandes números perfectos, a veces logrando en segundos lo que a una computadora humana le ha costado años calcular.

E. V. Lucas, un matemático francés, inventó un test para determinar la primalidad de un número de Mersenne. D. H. Lehmer mejoró esta prueba, haciéndola más efectiva y practica que él y otros investigadores pronto pudieron demostrar el carácter compuesto de muchos de los números de Mersenne previamente desconocidos. La prueba de Lucas, modificada por Lehmer, emplea la sucesión: 4, 14, 194, 37634, ..., $u_n = u_{n-1}^2 - 2$, donde cada término se obtiene elevando al cuadrado el término anterior y luego restando 2. Entonces si el término $n+1$ de esta sucesión es divisible por $N = 2^n - 1$, N es primo: en otro caso es compuesto. Por ejemplo, 37634 es el cuarto término de la sucesión, y $2^5 - 1 = 31$ lo divide exactamente, con lo que 31 es primo. Desafortunadamente, los términos de esta serie aumentan tan rápidamente que la prueba se vuelve casi impracticable para valores grandes de n a menos que este "objeto inamovible" se enfrente a una "fuerza imparable" como una computadora digital moderna. La computadora automática occidental "SWAC" de la Oficina Nacional de Estándares recibió este trabajo en 1953. La regla de Lucas tuvo que adaptarse a la capacidad de la computadora, requiriendo 184 comandos separados. Los cinco números perfectos correspondientes $a_n =$ 521, 607, 1279, 2203, y 2281 fueron encontrados por SWAC. El Dr. D. H. Lehmer, que había dedicado muchas horas a los números de Mersenne, vio que la máquina hacía en 48 segundos lo que le había llevado más de 700 horas de arduo trabajo con una calculadora de escritorio para demostrar 20 años antes: que $2^{257} - 1$ es compuesto. Mersenne había dicho que toda la eternidad no sería suficiente para saber si un número de 15 o 20 dígitos es primo. En unas pocas horas, SWAC probó 42 números, el más pequeño de los cuales tenía 80 dígitos. Tomó 13 minutos y medio determinar que $2^{1279} - 1$ es primo. Un ser humano en lugar de una computadora digital podría haber tardado 125 años en hacerlo. Es fatuo profetizar. Además, la capacidad de un simple humano no debe descartarse. H. S. Uhler, utilizando sólo una calculadora de escritorio, encontró los seis números de Mersenne compuestos para $n =$157, 167, 193, 199, 227 y 229.

El Dr. Lehmer afirmo que se necesitan aproximadamente $(p/100)^3$ segundos para un primo p, para ver si el número de Mersenne, M_p, es un número primo. En general, cada minuto del SWAC equivale a un año de trabajo de una persona con una calculadora de escritorio.

Los valores de los doce números perfectos correspondientes al límite de $n =$257 de los números de Mersenne se dan en la tabla 8 de abajo, así como el valor de los siguientes once números perfectos, para n entre 257 y 11213.

Perfección

La información más reciente (al menos hasta 1964) sobre los factores de los números de Mersenne, $M_n = 2^n - 1$, hasta el límite 257 es la siguiente: primos para los doce valores n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 y 127; compuesto y completamente factorizado para n = ll, 23, 29, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 67, 71, 73, 79, 83, 97, 103, 113, 151, 163, 179, 181; compuesto con dos o más factores conocidos para n =173, 191, 223, 229, 233, 239, 251; compuesto con un solo factor conocido para n =109, 131, 157, 167, 193, 197, 211 y 241; compuesto pero no se conoce un factor para n =10l, 137, 139, 149, 199, 227 y 257. Sin embargo, se sabe que para n =101 sólo hay dos factores primos. La Tabla de abajo da los factores de los números compuestos de Mersenne que tienen al menos un factor conocido.

Nota de traducción: en la actualidad (2021) se conocen todos los factores de los números de Mersenne desde 1 hasta 257 y se mostraran en la tabla siguiente

Factores de los números de Mersenne

n, primo	Números de Mersenne $2^n - 1$
11	$2047 = 23 \cdot 89$
23	$8388607 = 47 \cdot 178481$
29	$536870911 = 233 \cdot 1103 \cdot 2089$
37	$137438953471 = 223 \cdot 616318177$
41	$2199023255551 = 13367 \cdot 164511353$
43	$8796093022201 = 431 \cdot 9119 \cdot 2099863$
47	$2351 \cdot 4513 \cdot 13264529$
53	$119951 \cdot 3203431780337$
59	$119951 \cdot 3203431780337$
67	$193701121 \cdot 761838257287$
71	$228479 \cdot 48544121 \cdot 212885833$
73	$439 \cdot 2298041 \cdot 9361973132609$
79	$2687 \cdot 202029703 \cdot 1113491139767$
83	$167 \cdot 57912614113275649087721$
97	$11447 \cdot 13842607235828485645766393$
101	$7432339208719 \cdot 341117531003194129$
109	$745988807 \cdot 870035986098720987332873$
113	$3391 \cdot 23279 \cdot 65993 \cdot 1868569 \cdot 1066818132868207$
131	$263 \cdot 10350794431055162386718619237468234569$
151	$18121 \cdot 55871 \cdot 165799 \cdot 2332951 \cdot 7289088383388253664437433$
157	$852133201 \cdot 60726444167 \cdot 1654058017289 \cdot 2134387368610417$

163	150287 · 704161 · 110211473 · 27669118297 · 36230454570129675721
167	2349023 · 79638304766856507377778616296087448490695649
173	730753 · 1505447 · 70084436712553223 · 155285743288572277679887
179	359 · 1433 · 1489459109360039866456940197095433721664951999121
181	43441 · 1164193 · 7648337 · 7923871097285295625344647665764672671
191	383 · 7068569257 · 39940132241 · 332584516519201 · 87274497124602996457
193-251	Se conocen todos los factores, pero son números muy largos para escribirlos

La Tabla de abajo muestra la exasperante irregularidad de las funciones que involucran primos. Los 12 números primos de Mersenne están dentro del rango de los primeros 31 valores de primos, pero ni un solo número primo de Mersenne, M_n, ocurre en el rango de los siguientes 66 primos entre 131 y 521. Todos los 24 números de Mersenne entre $2^{127}-1$ y $2^{257}-1$ son compuestos, más los 42 números adicionales entre $2^{257}-1$ y $2^{521}-1$. Entre 521 y 607 solo hay 12 primos que hacen M_n compuesto, pero después de eso hay 95 primos entre 607 y 1279, luego una serie larga de 120 números antes de $2^{2203}-1$ son primos y, sin embargo, solo hay 10 primos entre 2203 y 2281, el siguiente exponente que convierte a M_n en primo. Luego hay otra serie larga de 116 primos antes de que se alcance el decimoctavo número perfecto para el cual $n=3217$. Los intervalos entre los últimos cinco primos de Mersenne enumerados en la tabla siguiente son 128, 19, 594, 30 y 131 primos respectivamente.

NÚMEROS DE MERSENNE Y PERFECTOS

n, primo	M_n primo	#Digitos	Numero perfecto	#Dígitos
2	3	1	6	1
3	7	1	28	2
5	31	2	496	3
7	127	3	8128	4
13	8191	4	33550336	8
17	131071	6	8589869056	10
19	524287	6	137438691328	12
31	2147483647	10	2305843008139952128	19
61	2305843009213693951	19	$2^{60}(2^{61}-1)$	37
89	618970019642690137449562111	27	$2^{88}(2^{89}-1)$	54
107	$2^{107}-1$	33	$2^{106}(2^{107}-1)$	65
127	$2^{127}-1$	39	$2^{126}(2^{127}-1)$	77

521	$2^{521}-1$	157	$2^{520}(2^{521}-1)$	314
607	$2^{607}-1$	183	$2^{606}(2^{607}-1)$	366
1279	$2^{1279}-1$	386	$2^{1278}(2^{1279}-1)$	770
2203	$2^{2203}-1$	664	$2^{2202}(2^{2203}-1)$	1327
2281	$2^{2281}-1$	687	$2^{2280}(2^{2281}-1)$	1373
3217	$2^{3217}-1$	969	$2^{3216}(2^{3217}-1)$	1937
4253	$2^{4253}-1$	1281	$2^{4252}(2^{4253}-1)$	2561
4423	$2^{4423}-1$	1332	$2^{4422}(2^{4423}-1)$	2663
9689	$2^{9689}-1$	2917	$2^{9688}(2^{9689}-1)$	5834
9941	$2^{9941}-1$	2993	$2^{9940}(2^{9941}-1)$	5985
11213	$2^{11213}-1$	3376	$2^{11212}(2^{11213}-1)$	6751

Es posible que algunos lectores deseen saber cómo se deriva la fórmula para números perfectos. En el Capítulo II se dio la fórmula para el número de divisores de un número:

$$N = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$$

La fórmula para la suma de los divisores de N es:

$$\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}$$

Por ejemplo, si $N = 240$ lo expresamos como producto de potencias de primos de la forma $2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Entonces la suma de los divisores de N, frecuentemente simbolizada por $S(N)$, es:

$$\frac{2^{4+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{1+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 31 \cdot 4 \cdot 6 = 744 \text{ (formula 2)}$$

El numero en sí mismo está incluido en esta suma.

Ahora estamos listos para derivar la fórmula de los números perfectos. Supongamos que hay un número perfecto par $N = 2^a q$ donde q representa el producto de todas las potencias primas impares. Demostraremos que q es de hecho un único primo y de una forma particular. Por conveniencia, para evitar escribir una expresión complicada, sea s la suma de todos los divisores de q (incluido el mismo q) y sea d la suma de sus divisores propios solamente (esto es sin incluir a q), de modo que $s = d + q$.

Por la fórmula 2, la suma de los divisores de 2^a es $(2^{a+1} - 1)\big/(2 - 1) = 2^{a+1} - 1$. Por tanto, la suma de todos los divisores de N es igual a $(2^{a+1} - 1) \cdot s$, pero como N es un numero perfecto, esta suma es el doble del número. Entonces tenemos

$$2N = 2(2^a q) = 2^{a+1} q = (2^{a+1} - 1) \cdot s = (2^{a+1} - 1)(q + d)$$
$$\Rightarrow \; 2^{a+1} q = (2^{a+1} - 1)(q + d) \;\Rightarrow\; 2^{a+1} q = 2^{a+1} q + 2^{a+1} d - q - d$$
$$\Rightarrow q = (2^{a+1} - 1)d \quad \Rightarrow \quad 2^{a+1} - 1 = \frac{q}{d}$$

Esto significa que d es un divisor propio de q y, como se definió anteriormente, también es igual a la suma de los divisores propios de q. Por lo que, d debe ser el único divisor propio de q. Entonces, el único valor posible de d es 1, y si la suma de los divisores propios de un número es 1, obviamente el número es primo.

Por lo tanto $q = 2^{a+1} - 1$ es un primo; y N, que era igual a $2^a q$, será $2^a (2^{a+1} - 1)$, siendo esta la formula dada anteriormente, completando la prueba.

* * *

Excepto por el número perfecto 6, donde $a = 1$, todo número perfecto par, $2^a (2^{a+1} - 1)$, es la suma de los cubos de los primeros $2^{a/2}$ números impares. Por ejemplo, para $a = 2$, el número perfecto $28 = 1^3 + 3^3$; para $a = 4$, el número perfecto $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$; para $a = 6$, el número perfecto $8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$, etc. Esta es una relación bastante inesperada entre cubos y números perfectos.

* * *

No contentos con números perfectos ordinarios, los matemáticos descubrieron multi-perfectos; números cuya suma de todos sus divisores es un múltiplo exacto del número. Los números perfectos ordinarios son llamados P_2 ya que sus divisores suman el doble del número. Los P_3 son aquellos cuyos divisores suman tres veces el número, etc. Un ejemplo de un P_3 es 120, cuyos divisores 1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+12 suman $360 = 3 \cdot 120$. Aquí hay algunos de muchos otros números perfectos múltiplos:

Números Multi-perfectos

Multiplicidad	Numero perfecto
3	672
4	30240
4	$2^{41} \cdot 3^{12} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 43 \cdot$ $103 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 191 \cdot 271 \cdot 307 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 617 \cdot 911 \cdot 2801 \cdot 5419 \cdot 30941$ $\cdot 398581 \cdot 797161$
5	14182439040
6	$2^{23} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2$ $\cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 241 \cdot 307 \cdot 467 \cdot 2801$
7	$2^{46} \cdot 3^{15} \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4$ $\cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 151 \cdot 193 \cdot 911 \cdot 2351 \cdot 4513 \cdot 442151 \cdot$ 13264529

El producto en lugar de la suma de los divisores propios de un número puede ser igual a la potencia del número, como se muestra en la Tabla 11.

Números tales que el producto de sus divisores propios es la potencia del numero

$N =$ numero	$\pi(d) =$ producto de los divisores propios	
12	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 =$	$144 = 12^2$
20	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 =$	$400 = 20^2$
45	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 =$	$1225 = 45^2$
24	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 =$	$13824 = 24^3$
40	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 20 =$	$64000 = 40^3$
48	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 24 =$	$5308416 = 48^4$
80	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 =$	$40960000 = 80^4$
405	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 27 \cdot 45 \cdot 81 \cdot 135 =$	$26904200625 = 405^4$

Aparte de los números perfectos, los números $2^n \pm 1$ también han sido investigados. Tales números se han factorizado parcial o completamente para muchos valores grandes de n. El Integrador Numérico Electrónico de Artillería del ejército y la computadora ENIAC se han utilizado para calcular dichos factores y también números compuestos n y sus factores primos, p, para los cuales $2^n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, n)$. Unos ejemplos son $n = 100463443$, $p = 7577$; y $n = 199674721$, $p = 4261$.

Perfección

Hay muy pocos números pares, m, que satisfacen la congruencia $2^m - m \equiv 0 (\bmod m)$. Uno es $161038 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$, y otros tres son 215326, 2568226, y 143742226.