Examen 2

Problema 1. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ distintos del vacío. Definimos la distancia entre A y B como,

$$d(A,B) = \inf\left\{\left|z_1 - z_2\right| : z_1 \in A,\ z_2 \in B\right\}$$

Prueba que, si A es cerrado y B compacto, entonces existen $z \in A$, $w \in B$ tales que $d(A,B) = \left|z - w\right|$.

Problema 2. Determina si los siguientes limites existen, y si es necesario dar sus condiciones.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \ z \in \mathbb{C}$ *b)* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a - i}{1 + i}\right)^n, \ a \in \mathbb{R}$

Problema 3. Determina si convergen o no las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-5i)^n - 4^{n+1}}{(7i)^{n-3} i}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}$

Problema 4. Determina para que valores de $z \in \mathbb{C}$ convergen las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i + z}\right)^n$

Examen 2

Problema 1. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ distintos del vacío. Definimos la distancia entre A y B como,

$$d(A,B) = \inf\left\{\left|z_1 - z_2\right| : z_1 \in A,\ z_2 \in B\right\}$$

Prueba que, si A es cerrado y B compacto, entonces existen $z \in A$, $w \in B$ tales que $d(A,B) = \left|z - w\right|$.

Problema 2. Determina si los siguientes limites existen, y si es necesario dar sus condiciones.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \ z \in \mathbb{C}$ *b)* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a - i}{1 + i}\right)^n, \ a \in \mathbb{R}$

Problema 3. Determina si convergen o no las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-5i)^n - 4^{n+1}}{(7i)^{n-3} i}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}$

Problema 4. Determina para que valores de $z \in \mathbb{C}$ convergen las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i + z}\right)^n$

Examen 2

Problema 1. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ distintos del vacío. Definimos la distancia entre A y B como,

$$d(A,B) = \inf\left\{\left|z_1 - z_2\right| : z_1 \in A,\ z_2 \in B\right\}$$

Prueba que, si A es cerrado y B compacto, entonces existen $z \in A$, $w \in B$ tales que $d(A,B) = \left|z - w\right|$.

Problema 2. Determina si los siguientes limites existen, y si es necesario dar sus condiciones.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \ z \in \mathbb{C}$ *b)* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a - i}{1 + i}\right)^n, \ a \in \mathbb{R}$

Problema 3. Determina si convergen o no las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-5i)^n - 4^{n+1}}{(7i)^{n-3} i}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}$

Problema 4. Determina para que valores de $z \in \mathbb{C}$ convergen las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i + z}\right)^n$

Examen 2

Problema 1. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ distintos del vacío. Definimos la distancia entre A y B como,

$$d(A,B) = \inf\left\{\left|z_1 - z_2\right| : z_1 \in A,\ z_2 \in B\right\}$$

Prueba que, si A es cerrado y B compacto, entonces existen $z \in A$, $w \in B$ tales que $d(A,B) = \left|z - w\right|$.

Problema 2. Determina si los siguientes limites existen, y si es necesario dar sus condiciones.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \ z \in \mathbb{C}$ *b)* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a - i}{1 + i}\right)^n, \ a \in \mathbb{R}$

Problema 3. Determina si convergen o no las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-5i)^n - 4^{n+1}}{(7i)^{n-3} i}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}$

Problema 4. Determina para que valores de $z \in \mathbb{C}$ convergen las siguientes series:

a) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i + z}\right)^n$

Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera
Ayudante: Ninive Atenea Tello Arcos

Examen 3

Problema 1. Escribe las siguientes funciones en su forma cartesiana, separando en parte real e imaginaria:

a) $f(z) = z\sin z$ *b)* $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$

Problema 2. Escribe las siguientes funciones en su forma compleja, simplifica.

a) $f(x+iy) = 2yx + i(x^2y)$ *b)* $f(x+iy) = \dfrac{1}{x+y^2} + i\dfrac{x}{y}$

Problema 3. Resuelve las siguientes.

a) Calcula $\log((1-i)^3)$

b) Calcula $\log(-i)$

c) Determina para cuales $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $\log(z^2) = 2\log(z)$

Problema 4. Resuelve las siguientes:

a) Prueba que $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$

d) $\left|e^z\right| \leq e^{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

e) Encuentra los complejos tales que $\sin z = i$

e) Encuentra los complejos tales que $\cos z = \sin z$

Problema 5. Determina las relaciones entre las constantes a, b y c para que las siguientes funciones sean holomorfas y calcula su derivada.

a) $f(z) = a(x^2 + y^2) + c + bxyi$ *b)* $f(z) = e^x\cos(ay) + ie^x\sin(y+b) + c$

Problema 6. Determina la región donde son holomorfas las siguientes funciones y encuentra su derivada.

a) $f(z) = \sin(\dfrac{1}{z^2+1})$ *b)* $f(z) = \dfrac{z+i}{\cos(iz)}$.

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$

Examen 4

Pro 1. Determina donde son diferenciables, y calcula su derivada.

a) $f(x+iy) = x^3 + i(1-y)^3$ *b)* $f(z) = \sinh(\frac{\cos(z)}{z^2+2})$

Pro 2. Encuentra el valor en cada caso:

a) $\arcsin(1+i)$ *b)* $\log(i^i)$ *c)* $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln(3))$

Pro 3. Deriva la función $f(z) = \sin(z)^{z+\ln z}$

Pro 4. Prueba que $\arcsin\mathrm{h}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$