Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja II

Tarea 2

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(1.5) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) La función

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}$$

tiene una singularidad aislada en $z = \infty$.

b) El cociente de dos funciones analiticas en cierta región Ω es una función meromorfa.

c) Si z_0 es un polo simple entonces el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent en la corona $0 < |z - z_0| < R$ viene dado por

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - a) f(z)$$

Demostración:

a) *Falso.*

Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $z = n\pi$ es una singularidad de f, por lo que para todo $r > 0$, tomando $n > r$ se tendrá que $n\pi \in D(\infty, r)$, con lo que no existe ninguna vecindad de infinito tal que esta sea la única singularidad.

■

b) *Falso.*

Considere la función del inciso anterior y notemos que $z = 0$ es una singularidad removible, pues

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin(z)} \cdot z = 1 \cdot 0 = 0$$

y entonces $z = 0$ no es un polo.

■

c) *Verdadero.*

Como z_0 es un polo simple, entonces su serie de Laurent alrededor de z_0 tiene la forma

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in C_r^R(z_0)$$

con lo que

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+1}$$

y como la convergencia es uniforme en cualquier subcorona, tendremos

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+1} = a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{z \to z_0} a_k (z - z_0)^{k+1} = a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 = a_{-1}$$

■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica. Considere el conjunto

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0 \wedge f^{(n)}(z) = 0, \ \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Demuestre que Ω_1 es abierto.

Demostración: Sea $z_0 \in \Omega_1$ PD $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega_1$.

Como f es analítica en Ω (en particular en Ω_1), por el teorema visto en clase, existe $R > 0$ y f_n analítica en $D(z_0, R) \subseteq \Omega$ tal que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + f_n(z_0)(z - z_0)^n = f_n(z_0)(z - z_0)^n$$

pues $z_0 \in \Omega_1$ y donde $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|<R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^n (w - z)} dw$ con $z \in D(z_0, R)$.

PD: R es la buscada, es decir, que $\forall z \in D(z_0, R)$, $f(z) = 0$. Tenemos que

$$|f(z)| = |f_n(z_0)(z - z_0)^n| = |(z - z_0)^n| \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|<R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^n (w - z)} dw \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} R^n \int_{|z-z_0|<R} \left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^n (w - z)} \right| |dw| = \frac{1}{2\pi} R^n \int_{|z-z_0|<R} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^n |w - z|} |dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi} R^n \int_{|z-z_0|<R} \frac{|f(w)|}{R^n |w-z|} |dw| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|<R} \frac{M}{|w|-|z|} |dw| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R-|z|} \int_{|z-z_0|<R} |dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|<R} \frac{M}{|w-z_0+z_0|-|z|} |dw| \le \int_{|z-z_0|<R} \frac{M}{|w-z_0|-|z_0|-|z|} |dw|$$

$$= \int_{|z-z_0|<R} \frac{M}{R-|z_0|-|z|} |dw| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R-|z_0|-|z|} 2\pi R = \frac{MR}{R-|z_0|-|z|}$$

donde dado que f es continua en $\overline{D(z_0, R)}$ se tendrá que es acotada por un $M \in \mathbb{R}^+$.

Con ello se tiene que $|f(z)| \le \frac{MR}{R-|z_0|-|z|}$, pero notemos que $R \le |z-z_0| \le |z| + |z_0|$ $\Rightarrow R - |z| - |z_0| \le 0$ y como $M, R > 0$ tendremos que $0 \le |f(z)| \le 0 \therefore |f(z)| = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0$, quedando demostrado.

■

Problema 3. –

vale(2.0) Pruebe que si f es meromorfa en plano complejo extendido, entonces f es una función racional

Demostración: Como f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, por teorema visto en clase f tiene un numero finito de polos, digamos, $z_1, \dots, z_k$ de orden $m_1, \dots, m_k$ respectivamente.

Sea $g(z) := f(z)(z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_k)^{m_k}$ y veamos que z_i es una singularidad removible $\forall i$.

En efecto, como z_i es polo de orden m_i se tendrá que existe $\lim_{z \to z_i} f(z)(z-z_i)^{m_i}$ por lo que

$$\lim_{z \to z_i} g(z)(z-z_i) = \lim_{z \to z_i} f(z)(z-z_i)^{m_i} (z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_i) \cdots (z-z_k)^{m_k}$$

$$= \lim_{z \to z_i} f(z)(z-z_i)^{m_i} \cdot \lim_{z \to z_i} (z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_i) \cdots (z-z_k)^{m_k}$$

$$= \lim_{z \to z_i} f(z)(z-z_i)^{m_i} \cdot 0 = 0$$

por lo que z_i es singularidad removible $\forall i$. Por lo que existe una función analítica G en todo $\mathbb{C}$ que extiende a la función. Y además como f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ se tendrá que $z = \infty$ es a lo sumo un polo, por lo que también será a lo sumo un polo de la función g por lo que, por un teorema visto en clase, se tendrá que $g(z) = P(z)$ con $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, de esta manera

$$g(z) = P(z) \iff f(z)(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k} = P(z) \iff f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k}}$$

con lo que efectivamente, f es una función racional.

■

Problema 4. –

vale(3.0) Para cada una de las siguientes funciones encuentre todas las singularidades en $\mathbb{C}$. Determine el tipo de singularidad en cada punto singular y halle el residuo para cada singularidad:

a) $f(z) = (1-z^3)e^{\frac{1}{z}}$

b) $f(z) = \dfrac{e^z}{1-z^2}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{(\sin z)^2}$

Demostración:

a)

∗ Singularidades:

Hay una única singularidad en $z = 0$.

∗ Tipos:

Se tiene una singularidad esencial pues

$$\lim_{z\to 0} f(z) \text{ no existe ya que } \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} \text{ no existe}$$

∗ Residuos:

Recordemos que la serie de Taylor para la función exponencial alrededor de $z=0$ es $\sum \frac{1}{n!}z^n$, por lo que

$$\begin{aligned}(1-z^3)e^{\frac{1}{z}} &= e^{\frac{1}{z}} - z^3e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n+3}\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} - z^3 - z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}z^{-n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!}]z^{-n} - z^3 - z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{5}{6}\end{aligned}$$

con lo que $a_{-1} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} = \frac{23}{24}$

■

b)

$*$ Singularidades:

Tenemos que las únicas singularidades son cuando $1 - z^2 = 0 \iff z = \pm 1$.

$*$ Tipos:

Veamos que ambas singularidades son polos simples. En efecto, se tiene que

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{(1-z)(1+z)}(z-1) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{-(1+z)} = -\frac{e}{2} \neq 0$$

y

$$\lim_{z\to -1} f(z)(z-(-1)) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z}{(1-z)(1+z)}(z+1) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z}{1-z} = \frac{e^{-1}}{2} \neq 0$$

con lo que son polos simples.

$*$ Residuos:

Dado que son polos simples, tendremos por el problema 1c) de esta tarea que el residuo vendrá dado por los mismo limites calculados anteriormente, es decir, $\text{Res}(f,1) = -\frac{e}{2}$ y $\text{Res}(f,-1) = \frac{e^{-1}}{2}$

■

c)

$*$ Singularidades:

Las singularidades se dan cuando $\sin(z) = 0 \iff z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

$*$ Tipos:

Tendremos que las singularidades son polos de orden 2, pues

$$\lim_{z\to n\pi} f(z)(z-n\pi)^2 = \lim_{z\to n\pi} \frac{(z-n\pi)^2}{\sin^2(z)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\sin^2(t-n\pi)} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t}{\pm\sin(t)}\right)^2 = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)}\right)^2 = 1 \neq 0$$

$*$ Residuos:

Notemos que la función $z \to 1\big/\sin^2(z)$ es una función par, y además analítica en cualquier corona $C_0^R(0)$ por lo que necesariamente su expansión en serie de Laurent debe de tener únicamente los términos con exponentes pares, ya que de existir alguno que no, sería una contradicción a que la función sea par.

Con esto necesariamente tendremos que $\text{Res}(f, n\pi) = a_{-1} = 0$.

■

Problema 5. –

vale(1.5) Encuentre la parte principal de la serie de Laurent para

$$\frac{1}{e^z - 1}$$

alrededor de $z = 0$

Demostración: Notemos que $z = 0$ es un polo simple, ya que

$$\lim_{z \to 0} f(z)(z-0) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} \underset{L'Hopital}{=} \lim_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1 \neq 0$$

y con ello se tiene que $a_{-1} = 1$, con todo esto la parte principal esta truncada en el primer término y tiene la forma $\frac{a_{-1}}{z} = \frac{1}{z}$.

■