Variable Compleja I

INTERSEMESTRAL

Profesor: Omar Vigueras Herrera
Ayudante: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera
Ayudante: Ninive Atenea Tello Arcos

Tarea-Guía 3

Problema 1. Escribe las siguientes funciones en su forma cartesiana, separando en parte real e imaginaria:

a) $f(z) = \frac{1}{z} + z$ *b*) $f(z) = \frac{iz+1}{i+z}$ *c*) $f(z) = z^2 - \overline{z}$

Problema 2. Escribe las siguientes funciones en su forma compleja, simplifica.

a) $f(x+iy) = 4y^2 + i(4x^2)$ *b*) $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} + iy$ *c*) $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$

Problema 3. Encuentra la imagen de cada función del conjunto correspondiente.

a) $f(z) = z^2$, el circulo con centro en el origen y de rario r

b) $f(z) = \frac{1}{z}$, la recta que une el origen con $1+i$

c) $f(z) = \frac{2}{\overline{z}}$, el circulo con centro en el origen y de radio 5

OBS.- En clase se probo que el producto de dos series convergentes en una serie convergente, sin importar la forma en que se toman los productos, en particular se cumple el llamado **"Producto de Cauchy",** el cual nos dice que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Dado esto, resuelve lo siguiente.

Problema 4. Prueba las siguientes:

a) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ usando el producto de cauchy y usando la ecuación de Euler.

b) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

c) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

d) $\left|e^z\right| = e^{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema 5. Resuelve las siguientes.

a) Calcula $\log(i)$ con la rama 0.

b) Calcula $\log(1+i)$ con la rama principal $(-\pi)$

c) Resuelve $e^{z^2} = i$

d) Resuelve $e^{2z} + e^z = i$

OBS.- Recuerden que el seno y el coseno complejos se definen como

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Problema 6. Resuelve las siguientes:

a) Prueba que $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$ y $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$

b) Prueba que $\sin(-z) = -\sin(z)$ y $\cos(-z) = \cos(z)$

c) Prueba que $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$

d) $\left|e^z\right| = e^{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

e) Encuentra los complejos tales que $\sin z = 0$ y $\cos z = 0$

e) Encuentra los complejos tales que $\cos z = 2i \sin z$

OBS.- Recuerden la definición del seno y coseno hiperbólicos:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Problema 7. Resuelve las siguientes:

a) Prueba que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

b) Prueba que $\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$

c) Prueba que $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\sinh(y)\cos(x)$

d) Prueba que $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) + i\sin(x)\sinh(y)$

e) Prueba que $\left|\cos(x+iy)\right| = \cos^2 x + \sinh^2 y$

Problema 8. Determina si las siguientes funciones son analíticas y en caso de serlo calcula su derivada.

a) $f(z) = \sin z$ usando las ecuaciones de cauchy Riemann.

b) $f(z) = (\overline{z} + 2i)^2 - 1$

c) $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

d) $f(x+iy) = \cosh(x)\sin(y) - i\sinh(x)\cos(y)$

e) $f(x+iy) = e^{2xy}(\cos(y^2 - x^2) + i\sin(y^2 - x^2))$

Problema 9. Determina las relaciones entre las constantes a, b y c para que las siguientes funciones sean enteras y calcula su derivada.

a) $f(z) = a(x^2 + y^2) + c + bxyi$

b) $f(z) = e^x\cos(ay) + ie^x\sin(y+b) + c$

Problema 10. Determina la región donde son analíticas las siguientes funciones.

a) $f(z) = \sin(\dfrac{1}{z^2+1})$.

b) $f(z) = \cosh(z^2 + 3iz)$.

c) $f(z) = \dfrac{z+i}{\cos(iz)}$.

d) $f(z) = \log(z+1)$ con la rama $\pi/2$.

e) $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ con la rama principal.

f) $f(z) = \log(3z-2)$ con la rama 0.