MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Seminario Curvas Algebraicas

Tarea 3

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

Ejercicio 1. *Calcula la multiplicidad de intersección en el punto $p = (0,0)$ de las curvas*

1. $V((x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = 0)$.
2. $V((x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = 0)$.

Demostración: Sean $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2$ y $g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2$ y sean $\Gamma_f = V(f)$, $\Gamma_g = V(g)$.

Por teorema visto en clase tendremos que

$$mult_p(\Gamma_f \cap \Gamma_g) = mult_p(\Gamma_f \cap \Gamma_h)$$

donde $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y) = 3x^2y^2$, por lo que al tomar $f(x,y) = y^4 + (-2x^2)y^2 + x^4 \in [K[x]][y]$ y $h(x,y) = (3x^2)y^2 \in [K[x]][y]$ tendremos

$$\mathrm{Res}(f,h) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2x^2 & 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2x^2 & 0 & x^4 \\ 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 81x^{16}$$

de donde $\mathrm{Res}(f,h) = 0 \iff x = 0$, por lo tanto, $mult_p(\Gamma_f \cap \Gamma_g) = mult_p(\Gamma_f \cap \Gamma_h) = 16$.

$\blacksquare$

Problema 2. –

Ejercicio 2. *Encuentra los puntos singulares y las rectas tangentes en los puntos singulares de cada una de las siguientes curvas en* $\mathbb{C}^2$.

1. $y^3 - y^2 + x^3 - x^2 + 3y^2x + 3x^2y + 2xy = 0$.
2. $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$.
3. $y^3 = x^3 - x$.
4. $(x^2 + y^2 + 2y)^2 - (x^2 + y^2) = 0$.

Demostración:

1) Tenemos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff 3x^2 - 2x + 3y^2 + 6xy + 2y = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 3y^2 - 2y + 3x^2 + 6xy + 2x = 0$

Restando la segunda a la primera tenemos que

$$\begin{gathered} 3x^2 - 2x + 3y^2 + 6xy + 2y - (3y^2 - 2y + 3x^2 + 6xy + 2x) = 0 \\ \iff -4x + 4y = 0 \iff x = y \end{gathered}$$

por lo que sustituyendo tenemos que

$$3x^2 - 2x + 3x^2 + 6xx + 2x = 0 \iff 6x^2 + 6x^2 = 0 \iff x = 0$$

por lo tanto, el único punto singular es $(0,0)$. Y además

$$T_{(0,0)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0\right\} = \mathbb{C}^2$$

■

2) Tenemos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff 4x^3 - 2y^2x = 0 \iff 4x^3 = 2y^2x \iff 8x^3y = 4y^3x$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 4y^3 - 2x^2y = 0 \iff 4y^3 = 2x^2y \iff 4y^3x = 2x^3y$

Sustituyendo lo primero en lo segundo

$$8x^3y = 2x^3y \iff 6x^3y = 0 \iff x^3y = 0 \iff x = 0 \text{ o } y = 0$$

pero necesariamente ambos tienen que ser cero para cumplir las igualdades a cero, por lo tanto, el único punto singular es $(0,0)$. Y además

$$T_{(0,0)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y = 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : \ 0\cdot x + 0\cdot y = 0\right\} = \mathbb{C}^2$$

■

3) Tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff -3x^2+1=0 \iff x = \pm\sqrt{1/3}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 3y^2 = 0 \iff y = 0$

por lo tanto, los puntos singulares son $(\sqrt{1/3},0)$ y $(-\sqrt{1/3},0)$. Pero notemos que estos puntos no pertenecen a la curva pues no cumplen la ecuación. Por lo que no hay puntos singulares.

■

4) Tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff 4x^3+4xy^2+8xy-2x=0 \iff 4x(x^2+y(y+2)) = 2x$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 4y^3+12y^2+4x^2y+6y+4x^2 = 0 \iff 4(y+1)(x^2+y(y+2)) = 2y \iff 4x(x^2+y(y+2)) = \frac{2xy}{y+1}$

Igualando tenemos

$$2x = \frac{2xy}{y+1} \iff 2xy+2x = 2xy \iff x = 0$$

por lo que sustituyendo tenemos que

$$4(y+1)(0+y(y+1)) = 2y \iff 4(y+1)y(y+2) = 2y \iff y=0 \text{ o } 2(y+1)(y+2)=1 \iff y = 0 \text{ o } y = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$$

Pero los segundos puntos no pertenecen a la curva por lo que el único punto singular es $(0,0)$

$$T_{(0,0)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y = 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : \ 0\cdot x + 0\cdot y = 0\right\} = \mathbb{C}^2$$

■

Problema 4. –

Ejercicio 4. *Encuentra los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que las siguientes curvas en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ son no singulares.*

1. $x^3+y^3+z^3+3\lambda xyz = 0.$

2. $x^3+y^3+z^3+\lambda(x+y+z)^3 = 0.$

Demostración:

1) Tenemos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \iff 3x^2+3\lambda yz=0 \iff x^3=-\lambda xyz$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff 3y^2+3\lambda xz=0 \iff y^3=-\lambda xyz$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y)=0 \iff 3z^2+3\lambda xy=0 \iff z^2+\lambda xy=0$

Igualando la primera con la segunda tenemos que

$$x^3=y^3 \iff x=y$$

Sustituyendo en la segunda tenemos que

$$y^3=-\lambda yyz \iff y^3=-\lambda y^2 z \iff y^2(y+\lambda z)=0 \iff y=0 \text{ o } y=\lambda z$$

En el primer caso tendremos que $x=y=0$ y sustituyendo en la tercera ecuación llegamos a que $z=0$. En el segundo caso tenemos que $x=y=\lambda z$, y sustituyendo en la tercera

$$z^2+\lambda(\lambda z)(\lambda z)=0 \iff z^2+\lambda^3 z^2=0 \iff z^2(1+\lambda^3)=0 \iff z=0 \text{ o } \lambda=e^{\pi i/3+2\pi ik/3}, k=0,1,2$$

por lo que la curva es singular cuando $\lambda=e^{\pi i/3+2\pi ik/3}, k=0,1,2$. Entonces será no singular para cualquier valor que no sea ninguno de los tres anteriores.

■

2) Tenemos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \iff 3x^2+3\lambda(x+y+z)^2=0 \iff x^2=-\lambda(x+y+z)^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff 3y^2+3\lambda(x+y+z)^2=0 \iff y^2=-\lambda(x+y+z)^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y)=0 \iff 3z^2+3\lambda(x+y+z)^2=0 \iff z^2=-\lambda(x+y+z)^2$

por lo que $x=y=z,\ x=y=-z,\ x=-y=z$ o $x=-y=-z$. Sustituyendo en cada caso en la primera ecuación tenemos

* $x^2=-\lambda(x+y+z)^2 \iff x^2=-\lambda 9x^2 \iff 9\lambda+1=0 \iff \lambda=\dfrac{1}{9}$
* $x^2=-\lambda(x+y+z)^2 \iff x^2=-\lambda x^2 \iff \lambda+1=0 \iff \lambda=-1$
* $x^2=-\lambda(x+y+z)^2 \iff x^2=-\lambda x^2 \iff \lambda+1=0 \iff \lambda=-1$
* $x^2=-\lambda(x+y+z)^2 \iff x^2=-\lambda x^2 \iff \lambda+1=0 \iff \lambda=-1$

por lo que la curva es singular si $\lambda=-1$ o $1/9$ entonces será no singular para cualquier otro complejo distinto de estos.

■

Para los problemas 6, 7 y 8 usaremos parametrización polar y la sustitución de Weierstrass, pues al ser cuarticas esta es mas sencilla que usar la resultante.

Problema 6. –

Da una parametrización racional de la flor de tres pétalos $V((x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3)$

Demostración: Tenemos la ecuación $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$ por lo que cambiando a polares

$$r^4+3r^3\cos^2\theta\sin(\theta)-r^3\sin^3\theta=0 \iff r=\sin^3\theta-3\cos^2\theta\sin\theta$$
$$\iff r=\sin^3\theta-3[1-\sin^2\theta]\sin\theta=4\sin^3\theta-3\sin\theta$$

por lo que tendremos

$$x=r\cos\theta=[4\sin^3\theta-3\sin\theta]\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta=[4\sin^3\theta-3\sin\theta]\sin\theta$$

y haciendo la sustitución de Weierstrass $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ tendremos que

$$x=\left[4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3-3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=\frac{-2t(1-t^2)(3-10t^2+3t^4)}{(1+t^2)^4}$$
$$y=\left[4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3-3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=\frac{-4t^2(3-10t^2+3t^4)}{(1+t^2)^4}$$

son una parametrización racional.

∎

Problema 7. –

Da una parametrización racional del ovoide $V((x^2+y^2)^2-x^3)$.

Demostración: Tenemos la ecuación $(x^2+y^2)^2-x^3=0$ por lo que cambiando a polares

$$r^4-r^3\cos^3\theta=0 \iff r=\cos^3\theta$$

por lo que tendremos

$$x=r\cos\theta=\cos^4\theta$$
$$y=r\sin\theta=\cos^3\theta\sin\theta$$

y haciendo la sustitución de Weierstrass $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ tendremos que

$$x=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4=\frac{(1-t^2)^4}{(1+t^2)^4}$$

$$y = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{2t(1-t^2)^3}{(1+t^2)^4}$$

son una parametrización racional.

■

Problema 8. –

Da una parametrización racional de la Folium de Descartes $V(x^3 + x^2 - y^2)$.

Demostración: Tenemos la ecuación $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ por lo que cambiando a polares

$$r^3 \cos^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 0 \iff r = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta}$$

por lo que tendremos

$$x = r\cos\theta = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta - 1$$
$$y = r\sin\theta = \frac{\sin^3 \theta - \sin\theta \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta} = \tan^3 \theta - \tan\theta$$

y haciendo la sustitución de Weierstrass $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ tendremos que

$$x = \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^3 - 1 = \frac{-1 + 3t^2 + 8t^3 - 3t^4 + t^6}{(1-t^2)^3}$$
$$y = \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^3 - \left(\frac{2t}{1-t^2}\right) = \frac{2t - 12t^3 + 2t^5}{(1-t^2)^3}$$

son una parametrización racional.

■