Def.- Se define a la función Zeta de Riemann (ζ) como:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{con } s \in \mathbb{C}_+ + 1$$

Notaciones: $i\mathbb{R} = \{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) = 0 \}$

$\mathbb{C}_+ = \{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 0 \}$

$\forall s \in \mathbb{C}$, $\sigma = Re(s)$, $t = Im(s)$

Obs: ζ está bien definida.

Teorema.- La función ζ es analítica en $\mathbb{C}_+ + 1$

Dem.- Tenemos que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s \log n}$

Basta ver que $f_m(s) = \sum_{n=1}^{m} e^{-s \log n}$ converge normalmente en $\mathbb{C}_+ + 1$.

En efecto sea D compacto en Ω y consideremos la función $g(z) = Re(s)$ $\forall z \in D$.

Como g es continua en D (compacto) $\Rightarrow$ g alcanza su mínimo en D es decir $1 < \delta = Re(s_0) \leq Re(z)$

$\Rightarrow$

- $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{|n^{Re\, s} \cdot n^{i Im\, s}|} = \frac{1}{n^{Re\, s}} \leq \frac{1}{n^{\delta}} \quad \forall z \in D$

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta}}$ converge pues $\delta > 1$

$\therefore$ Por el criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente en D $\therefore$ converge normalmente en D y al ser $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s}$ analítica en $\mathbb{C}_+ + 1$ $\Rightarrow$ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es analítica en $\mathbb{C}_+ + 1$

Teorema: Se tiene que

$$\zeta(s) = \prod_{p\text{-primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Dem: ~~queremos que~~ sea $x \in \mathbb{R}$ fijo, entonces

$$\prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\leq x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k$$

$$= \prod_{p\leq x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{sk}} = \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} + R(x,s)$$

Ahora

$$|R(x,s)| \leq \sum_{n\geq x} \frac{1}{n^s}$$

pero como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sum_{n\geq x} \frac{1}{n^s} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} R(x,s) = 0$$

$$\therefore \zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Ayudante

Sabemos que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$$

¿Y después? ¿Cómo podemos saber los que siguen?

Def.- Definimos $S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m$

Obs: $(k+1)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} k^i$

por lo que $\sum_{k=1}^{n+1} k^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{m+1} \Rightarrow$

$$-0^{m+1} + 1^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} 0 + \binom{m+1}{2} 0^2 + \cdots + \binom{m+1}{m} 0^m$$

$$-1^{m+1} + 2^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} 1 + \binom{m+1}{2} 1^2 + \cdots + \binom{m+1}{m} 1^m$$

$$-2^{m+1} + 3^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} 2 + \binom{m+1}{2} 2^2 + \cdots + \binom{m+1}{m} 2^m$$

$\vdots$

$$-(n-1)^{m+1} + n^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1}(n-1) + \binom{m+1}{2}(n-1)^2 + \cdots + \binom{m+1}{m}(n-1)^m$$

$\Downarrow$

sumando

$\Downarrow$

$$n^{m+1} = S_0(n) + \binom{m+1}{1} S_1(n) + \binom{m+1}{2} S_2(n) + \cdots + \binom{m+1}{m} S_m(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} S_k(n) \binom{m+1}{k}$$

Nota: se debe definir $S_0(n) = n$

corregir ~~con~~ ~~$S_m(n) =$~~

$\therefore$ Despejando $S_m(n) = \dfrac{n^{m+1}}{m+1} - \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k(n)$

Obs.- $S_m(n)$ es un polinomio de grado $m+1$ y el termino principal es $\dfrac{n^{m+1}}{m+1}$

Obs.- $S_m(n)$ no tiene terminos constantes (visto como polinomio en la variable "n")

Ejemplos.-

- $S_1(n) = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$
- $S_2(n) = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$
- $S_3(n) = \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 + 0 \cdot n$

Bernoulli trabajo sobre los coeficientes del termino lineal en las expansiones de $S_m(n)$ estos son los llamados

Numeros de Bernoulli

$B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$

Obs.- Con lo anterior tendriamos que definiendo a los polinomios sig. de manera recursiva

$$S_m(X) = \frac{1}{m+1} X^{m+1} - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k(X)$$

Escaneado con CamScanner

Tendremos que

- $S_1'(x) = x - \frac{1}{2} = x + B_1 \Rightarrow S_1'(0) = B_1$
- $S_2'(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} = x^2 - x + B_2 \Rightarrow S_2'(0) = B_2$
- $S_3'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 0 \Rightarrow S_3'(0) = B_3$

$\therefore$ $S_m'(0) = B_m$

Proposición.- Se define $B_0 = 1$, entonces

$$B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k$$

Dem.- En efecto, tenemos que

$$S_m'(x) = x^m - \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}S_k(x)$$

$$\underset{x=0}{\Rightarrow} \quad B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k.$$

Obs *.- $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k = 0$

Lema.- Se tiene que

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k \quad \text{con } |z| < \pi$$

Dem.- Tenemos que $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ es analítica en $A_0^{\pi}(0)$ $\Rightarrow$ por el teo. de Laurent existe su representación como serie de Laurent en $A_0^{\pi}(0)$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{z^k}$$

pero como $z=0$ es singularidad removible

$p(r)$ $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, entonces $b_k = 0$, $\forall k = 1, \ldots$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

p.D) $a_k = \frac{B_k}{k!}$

Recordando que $e^z - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$$\Rightarrow z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)$$

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k\right)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a_k}{(k-i+1)!}\right) z^k$$

y como $a_0 = 1$ (calculando) por la igualdad

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{(k-i+1)!} = 0$$

por otro lado $0 = (k+1)! \cdot \frac{i!}{k!} \cdot 0 = \sum_{i=0}^{k} \frac{(n+1)!}{(k-i+1)!\, i!} \cdot a_i \cdot i!$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} i! \cdot a_i = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k$$

$\Rightarrow a_k = \frac{B_k}{k!}$

Lema.- para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$

Dem.- Vamos a considerar a la función $\coth(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ que tiene polos simples en $z = k\pi i$

$$\Rightarrow \coth(z) - 1 = \frac{2e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{-z}}{e^{-z}} \cdot \frac{2}{e^{2z} - 1} = \frac{2}{e^{2z} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

Tomando $z \in D_\pi(0)$ tenemos que

$$\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

$$= \frac{z}{2} + 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

Tenemos que $\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right)$ es par por lo que del lado derecho no puede haber factores con potencias impares, i.e, $B_{2n+1} = 0$

Lema. (1) para todo $z \in D(\pi, 0)$

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} \cdot 2^{2n} \cdot z^{2n-1}}{(2n)!}$$

Dem.- Recordemos que $\coth(z) - 1 = \dfrac{2}{e^{2z} - 1}$

$$\Rightarrow z\coth(z) - z = \frac{2z}{e^{2z} - 1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2z)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 2z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2z)^n$$

Lema

$$\Rightarrow \quad z\coth(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} \cdot z^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} \cdot 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad \blacksquare$$

Teorema.- (más adelante demostración): Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\operatorname{sen}(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$\operatorname{senh}(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) \quad \blacksquare$$

Lema.-② para todo $z \in D_\pi(0)$ se cumple que

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{\pi^{2n}} \zeta(2n)$$

Dem.- consideremos $f(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{z}$ y la extendemos a

$$g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ f(z) & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

Esta función se anula en $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ restringiendo a $D_\pi(0)$ tenemos que $g: D_\pi(0) \to \mathbb{C}$ es analítica en $D_\pi(0)$ y tal que $g(z) \neq 0$ en $D_\pi(0)$

$\therefore$ $\operatorname{Log}(g(z))$ es analítica en $D_\pi(0)$.

(Teorema.- Si $f: U \to \mathbb{C}$ analítica, U reg. simplemente conexa y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in U$ $\Rightarrow$ $\exists$ una rama para la cual $\operatorname{Log} f$ es analítica (e invertible))

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{senh}(z)}{z}\right) = \operatorname{Log}\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)\right) + 2k\pi i \quad \text{p.a } k \in \mathbb{Z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) + C$$

$\Rightarrow$ Derivando

$$\Rightarrow \quad \coth(z) - \frac{1}{z} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + \pi^2 n^2}$$

Obs.- $f_n(z) = \frac{z}{z^2 + \pi^2 n^2} \xRightarrow{\text{Taylor}} f_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{2m-1}}{\pi^{2m} n^{2m}}$

radio de convergencia π

$$\Rightarrow \coth(z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\pi^{2m}} \frac{z^{2m-1}}{n^{2m}}$$

$$= \frac{1}{z} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{2m-1}}{\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$$

$$= \frac{1}{z} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^{2m-1}}{\pi^{2m}} \zeta(2m)$$

Teorema.- $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}$$

Dem.- Corolario de Lemas (1) y (2)

Igualando las series de Laurent.

Corolario (del producto de Euler) ζ no se anula en $\mathbb{C}_+ + 1$

Dem.- Sea $s \in \mathbb{C}_+ + 1 \Rightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$. Así,

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right| = \prod_p \left|1 - \frac{1}{p^s}\right| \leq \prod_p 1 - \frac{1}{|p^s|} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \int_1^\infty \frac{dy}{y^\sigma} = \frac{1}{\sigma - 1}$$

$\Rightarrow |\zeta(s)| \geq \sigma - 1 > 0$ $\therefore$ $\zeta(s)$ no se anula en $\mathbb{C}_+ + 1$

Def.- Sea f una función aritmética y $a \in \mathbb{R}$. La serie de Dirichlet asociada a f y con dominio de convergencia $\mathbb{C}_+ + a$ es:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tal que converge absolutamente en $\mathbb{C}_+ + a$

Ejemplo: La serie de Dirichlet asociada a $u(n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es $\zeta(s)$

Teorema.- Sean f, g aritméticas con dominio $\mathbb{C}_+ + a$ y $\mathbb{C}_+ + b$ respectivamente y sean sus series de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

Entonces $F \cdot G$ con dominio de convergencia $\mathbb{C}_+ + \max\{a, b\}$ cumple que

$$F(s)\, G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}$$ ← Convolución de Dirichlet.

Dem.- Observemos que $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a)\, g(b)$

Tenemos lo siguiente:

Sea Sea

convrg. absoluta

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}\right)$$

Como tenemos convergencia absoluta podemos sumar de forma arbitraria y elegimos de tal forma que nm sea constante

$$\Rightarrow F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{nm=k} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s}$$

Def.- Definimos la función Λ de mangold como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k,\ p.\ a\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Proposición.- Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

Dem.- para $n=1$ es trivial. Entonces tomemos $n>1$ así $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$

$$\Rightarrow \log(n) = \sum_{i=1}^{k} \log(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \log(p_i)$$

por otro lado

$$\sum_{d|n} \Lambda(n) = \Lambda(p_1) + \Lambda(p_1^2) + \cdots + \Lambda(p_1^{\alpha_1}) + \Lambda(p_2) + \cdots + \Lambda(p_k^{\alpha_k})$$

$$= a_1 \log(p_1) + a_2 \log(p_2) + \cdots + a_k \log(p_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \log(p_k)$$

Obs: $\sum_{d|n} \Lambda(d) = (\Lambda * 1)(n)$

Si consideramos $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$

$\Rightarrow \zeta(s) G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Lambda * 1)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s}$

$\Rightarrow -\zeta(s) G(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s} = \zeta'(s)$

$\therefore \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$

Teorema.- En la región $\mathbb{C}_{+1}$ se cumple

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

Dem.- Recordemos que $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = 1 * 1$

Sabemos que $\zeta(s)$ converge abs. en $\mathbb{C}_{+1}$

$\Rightarrow \zeta^2(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 * 1)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$

Teo Dirichlet

$*$ convolución

Teorema Sea $A = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : f(1) \neq 0 \}$ entonces $(A, *)$ es un grupo abeliano

Dem.-

1) Cerrado

$(f * g)(1) = f(1) g(1) \neq 0$

2) Conmuta

$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a) g(b) = \sum_{ab=n} g(b) f(a) = (g * f)(n)$

3) Asociativa

Sean $f, g, h \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$((f*g)*h)(n) = \sum_{ab=n} (f*g)(a)\, h(b)$$

$$= \sum_{ab=n} \left(\sum_{c\cdot d=a} f(c)\, g(d) \right) h(b)$$

$$= \sum_{ab=n} \sum_{c\cdot d=a} f(c)\, g(d)\, h(b)$$

$$= \sum_{cdb=n} f(c)\, g(d)\, h(b)$$

por otro lado

$$(f*(g*h))(n) = \sum_{u\cdot v=n} f(u)\,(g*h)(v)$$

$$= \sum_{uv=n} f(u) \left(\sum_{rs=v} g(r)\, h(s) \right)$$

$$= \sum_{uv=n} \sum_{rs=v} f(u)\, g(r)\, h(s)$$

$$= \sum_{urs=n} f(u)\, g(r)\, h(s)$$

$\therefore \; (f*g)*h = f*(g*h)$

3) neutro

sea $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$\Rightarrow \; u \in A$ y $(u*f)(n) = f(n)$
$(f*u)(n) = f(n)$

$\therefore \; u$ es neutro

4) inversos

sea $f \in A$ P.D $\exists\, g \in A$ t.q $f*g = u$

Queremos $g*1$

• $(f*g)(1) = f(1)g(1) = u(1) = 1$

$\Rightarrow g(1) = \frac{1}{f(1)}$

• $(f*g)(2) = f(1)g(2) + f(2)g(1) = u(2) = 0$

$\Rightarrow f(1)g(2) + f(2)\frac{1}{f(1)} = 0$

$\Rightarrow g(2) = -\frac{1}{f(1)} f(2) g(1)$

• $(f*g)(3) = f(3)g(1) + f(3)g(1) = 0$

$\Rightarrow g(3) = -\frac{1}{f(1)} f(3) g(1)$

• $(f*g)(4) = f(1)g(4) + f(2)g(2) + f(4)g(1) = 0$

$\Rightarrow g(4) = -\frac{1}{f(1)} [f(2)g(2) + f(4)g(1)]$

∴ Sea $g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} & \text{si } n=1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum\limits_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} f(d)\, g(\frac{n}{d}) & \text{si } n>1 \end{cases}$

Dem.

* para $n=1$, $(f*g)(1) = f(1)g(1) = f(1)\cdot\frac{1}{f(1)} = 1 = u(1)$ ✓

* para $n>1$

$(f*g)(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)\, g(\frac{n}{d})$

$= f(1)g(n) + \sum\limits_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} f(d)\, g(\frac{n}{d})$

$= f(1)g(n) + \frac{-f(1)}{-f(1)} \sum\limits_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} f(d)\, g(\frac{n}{d})$

$= f(1)g(n) - f(1)g(n) = 0 = u(n)$

∴ ~~[illegible]~~ $g = f^{-1}$ ■

Def.- Sea f una función aritmética, $f \neq 0$, decimos que es **multiplicativa** si $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $(n,m)=1$ se tiene que

$$f(nm) = f(n) f(m)$$

Teorema.- Sea $F = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es multiplicativa} \}$
$\Rightarrow F < A$ (subgrupo propio)

Dem.-

- $F < A$

Sea $f \in F$. Como $f \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $f(n) \neq 0$

$\Rightarrow$ como f es multiplicativa $\Rightarrow f(n \cdot 1) = f(n) f(1)$

$\underset{f(n)\neq 0}{\Rightarrow} f(1) = 1 \neq 0$ $\therefore$ $f \in A$

- Cerrado

Sean $f, g \in F$ P.D. $(f * g) \in F$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $(m,n)=1$.

$$(f*g)(nm) = \sum_{d \mid m \cdot n} f(d)\, g\left(\frac{m \cdot n}{d}\right)$$

como $(n,m)=1 \Rightarrow$ si $d \mid m \cdot n \Rightarrow d = d_1 \cdot d_2$ con $d_1 \mid n$, $d_2 \mid m$ y $(d_1, d_2) = 1$ de forma única

$$\Rightarrow (f*g)(nm) = \sum_{\substack{d_1 \mid m \\ d_2 \mid n}} f(d)\, g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right)$$

$$= \sum_{d_1 \mid m} \sum_{d_2 \mid n} f(d_1 d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1} \frac{n}{d_2}\right)$$

$$= \sum_{d_1 \mid m} \sum_{d_2 \mid n} f(d_1) f(d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}\right) g\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

mult

$$= \sum_{d_1 | m} \mu(d_1) g\left(\frac{m}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2 | n} \mu(d_2) g\left(\frac{n}{d_2}\right) = (\mu * g)(m) \cdot (\mu * g)(n)$$

$\therefore$ $\mu * g$ es multiplicativa $\therefore$ $\mu * g \in F$.

- $u(nm) = u(n) \cdot u(m) \Rightarrow \exists\, u \in F$ (el neutro está)
- Inversos

Si $f \in F$ entonces sabemos que $f * f^{-1} = u \in F$

$\Rightarrow f * f^{-1} * f^{-1} \in F \Rightarrow f^{-1} \in F$

Usando que si $f * g$ es mult. y g es mult. entonces f es mult. (ver apostol)

Def.- Definimos la función de Möbius μ como

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } \exists\, p \text{ primo t.q. } p^2 | n \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \cdots p_k \end{cases}$$

Teorema.- La función μ es multiplicativa.

Dem.- Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$

$\Rightarrow$ • si $\mu(nm) = 1 \Rightarrow$ $mn = 1 \Rightarrow m = 1$ y $n = 1 \Rightarrow \mu(nm) = 1 = \mu(n)\mu(m)$

• si $\mu(nm) = 0 \Rightarrow \exists\, p$ primo t.q. $p^2 | mn \Rightarrow p^2 | n$ o $p^2 | m$

$\Rightarrow \mu(nm) = 0 = \mu(n)\mu(m)$

• si $\mu(nm) = (-1)^k$ p.a $k \in \mathbb{N} \Rightarrow nm = p_1 \cdots p_k$
y como $(n,m) = 1 \Rightarrow n = p_{i_1} \cdots p_{i_r}$ y $m = p_{j_1} \cdots p_{j_s}$

con $r + s = k$ y primos distintos $\Rightarrow \mu(n)\mu(m) = (-1)^r (-1)^s$
$= (-1)^k = \mu(nm)$

$\therefore$ es multiplicativa.

Teo.- Sea $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n>1 \end{cases} = u(n)$

Dem.- Notemos que $\sum_{d|n} \mu(d) = (\mu * 1)(n)$ PD $\mu * 1 = u$

Caso 1 si $n=1 \Rightarrow u(1) = 1 = 1(1)\mu(1)$ ✓

Caso 2 Sea $n>1 \Rightarrow$ por el TFA, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$

PD $(1 * \mu)(n) = 0$

Sabemos que 1 y μ son multiplicativas $\Rightarrow 1 * \mu$ es multiplicativa

$\Rightarrow (1 * \mu)(n) = (1 * \mu)(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k})$
$= (1 * \mu)(p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 * \mu)(p_k^{\alpha_k})$

Basta ver que $(1 * \mu)(p_i^{\alpha_i}) = 0$

Tenemos que $(1 * \mu)(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{d|p_i^{\alpha_i}} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \cdots + \mu(p^{\alpha_i})$
$= 1 - 1 + 0 + \cdots + 0$
$= 0$

$\therefore (1 * \mu)(n) = 0$

Corolario.- $(1)^{-1} = \mu$

Corolario.- Fórmula de inversión de Möbius

Sea f aritmética entonces $g = f * 1 \iff f = g * \mu$

i.e. $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu(\frac{n}{d})$

Teorema.- En $\mathbb{C}_+ + 1$ $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$

Dem.- Claramente $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ convergen absolutamente en $\mathbb{C}_+ + 1$

$$\Rightarrow \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 * \mu)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \blacksquare$$

Def.- Definimos $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ función φ de Euler como $\varphi(n) = |\{1 \leq m \leq n : (n,m) = 1\}|$

Teorema.- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ i.e $\varphi * 1 = id$

Teorema.- En $\mathbb{C}_+ + 2$ se cumple $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$

Dem.-

Ayudante

Def.- Definimos la función de Liouville de la sig manera

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^{a_1 + \dots + a_k} & \text{si } n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \end{cases}$$

Obs: La función de Liouville es multiplicativa

Teorema.- para todo $n \geq 1$

$$\sum_{d \mid n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es cuadrado} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dem:

Como λ es multiplicativa $\Rightarrow \sum_{d \mid n} \lambda(d)$ es multiplicativa

Sea p primo y $a \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \sum_{d \mid p^a} \lambda(d) = \sum_{k=0}^{a} \lambda(p^k) = \lambda(1) + \sum_{k=1}^{a} \lambda(p^k)$$

$$= \lambda(1) + \sum_{k=1}^{a} (-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{a} (-1)^k$$

$\Rightarrow$ si a es par $\sum_{d \mid p^a} \lambda(d) = 0$

si a impar $\Rightarrow \sum_{d \mid p^a} \lambda(d) = 0$

$\Rightarrow$ para $n = 1$, $\sum_{d \mid 1} \lambda(d) = 1$ y para $n > 1$

$$\sum_{d \mid n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \text{ es par } \forall i \\ 0 & \text{si algun } a_i \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{d \mid n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es cuadrado} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

Def.- Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, definimos la función potencia k-ésima como

$$p^k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es potencia k-ésima} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obs.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^k)^s} = \zeta(ks)$

Corolario.- $(\lambda * 1)(n) = p^2(n)$

Teorema.- En $\mathbb{C}_+ + 1$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

Dem.- Tenemos que la serie converge absolutamente pues está acotada por la función zeta

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda * 1)(n)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^s} = \zeta(2s)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \quad \blacksquare$$

Obs.- Si f es completamente multiplicativa $\Rightarrow f^{-1} = \mu f$

Obs.- λ es completamente multiplicativa

Teorema.- En $\mathbb{C}_+ + 1$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Dem.- Tenemos que $\lambda^{-1} = \lambda \cdot \mu = |\mu|$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)| * \lambda}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1$$

$$y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)| \ast \lambda(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}\right)$$

$$= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Def.- para α real o complejo y $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos la función la función divisor

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$$

Obs.- $\sigma_\alpha(n) = (1 \ast id^\alpha)(n)$

$\Rightarrow \sigma_\alpha$ multiplicativa

Obs.- $\sigma_\alpha(p^k) = 1 + p^\alpha + p^{2\alpha} + \cdots + p^{k\alpha}$

$$= \begin{cases} k+1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \dfrac{p^{\alpha(k+1)} - 1}{p^\alpha - 1} \end{cases}$$

Obs.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{id^\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-\alpha}} = \zeta(s-\alpha)$

en $\mathbb{C}_{+1+Re(\alpha)}$

Teorema: En $\mathbb{C}_{+1+Re(\alpha)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s)\,\zeta(s-\alpha)$$ $\square$

Def.- Sean $\{u_n\}_{n\in\mathbb{C}}$ definimos los productos parciales

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_n)$$

entonces $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ y si el límite existe, lo denotamos

$$p := \lim_{n\to\infty} p_n = \prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$$

Obs: • En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nos importa que tan rapido $a_n \to 0$

• En los productos nos va importar cuando $1+u_n \to 1$ de manera rapida $\iff u_n \to 0$

Lema.- Sea $\{u_n\} \subset \mathbb{C}$ y $\forall n\in\mathbb{N}$ definimos $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)$ y $p_n^* = \prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|)$, entonces

1) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad p_n^* \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|\right)$

2) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad |p_n - 1| \leq p_n^* - 1$

Dem.-

<u>Af:</u> $\forall x \geq 0$ se cumple $1+x \leq e^x$

1) Sea $n\in\mathbb{N}$ y $k\in\{1,\dots,n\}$, entonces de la afirmación

$$1+|u_k| \leq e^{|u_k|} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{|u_k|} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|\right)$$

2) Por inducción. Se tiene que $p_1 = 1+u_1$

$$\Rightarrow |p_1 - 1| = |1+u_1-1| = |u_1| = |u_1|+1-1 = p_1^* - 1$$

Ahora sup. que es cierto para $n\in\mathbb{N}$

Notemos lo siguiente $p_{n+1} - 1 = \prod_{k=1}^{n+1} (1+u_k) - 1$

$$= (1+u_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} (1+u_k) - 1 = (1+u_{n+1}) p_n - 1 = p_n + u_{n+1} p_n - 1$$

$$= p_n + u_{n+1} p_n - 1 + u_{n+1} - u_{n+1}$$

$= (P_n - 1)(u_{n+1} + 1) + u_{n+1}$

$$\Rightarrow |P_{n+1} - 1| \le |P_n - 1||u_{n+1} + 1| + |u_{n+1}|$$
$$\le |P_n - 1|(|u_{n+1}| + 1) + |u_{n+1}|$$
$$\underset{H.I}{\le} (P_n^* - 1)(|u_{n+1}| + 1) + |u_{n+1}|$$
$$= P_n^*(|u_{n+1}| + 1) - |u_{n+1}| - 1 + |u_{n+1}|$$
$$= P_{n+1}^* - 1$$

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $\forall n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ acotadas y $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge uniformemente en Ω, entonces:

1) $P = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_n)$ converge uniformemente en Ω

2) $P(s_0) = 0 \iff f_n(s_0) = -1$ p.a $n \in \mathbb{N}$ p.a $s_0 \in \Omega$

3) Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección entonces
$$P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_{\sigma(n)})$$

Dem: Iniciemos observando lo sig.

Sea $\{\sum_{k=1}^{n} |f_k|\}_{n \ge 1}$ dicha sucesión cumple lo siguiente

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{n} |f_n| : \Omega \to \mathbb{C}$ está acotada en Ω
- $\{\sum_{k=1}^{n} |f_k|\}_{n \ge 1}$ converge uniformemente en Ω

$\therefore$ dicha sucesión es ~~acotada~~ uniformemente acotada, esto es $\exists c > 0$ t.q
$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(s)| \le c \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in \Omega$$

Ahora, sea $s \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |p_n(s)| = \left|\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(s))\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(s)|)$

$\underset{\text{Lema}}{\leq} \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(s)|\right) \leq e^{c} := \tilde{c}$

$\Rightarrow |p_n(s)| \leq K \quad \forall s \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\ldots (*)$

$\Rightarrow \{p_n\}_{n \geq 1}$ está uniformemente acotada

Obs: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ converge uniformemente en Ω

$\Leftrightarrow \sup_{s \in \Omega}|R_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ con $R_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty}|f_n(s)|$

En particular $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n=N_0}^{\infty}|f_n(s)| < \varepsilon \quad \forall s \in \Omega \ldots (**)$

1) P.D. $p = \prod_{k=1}^{\infty}(1+f_n)$ converge uniform. en Ω

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$|p_N(s) - p_M(s)| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_0 \quad y \quad \forall s \in \Omega$

(criterio de Cauchy uniforme)

Podemos tomar $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ por $(**)$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. cumple $(**)$

Sean $N, M \geq N_0$, $s \in \Omega$ y s.p.d.g. $M > N$, entonces

$p_M(s) - p_N(s) = p_N(s)\left[\prod_{k=N+1}^{M}(1+f_n(s)) - 1\right]$

$\Rightarrow |p_M(s) - p_N(s)| = |p_N(s)|\left|\prod_{k=N+1}^{M}(1+f_n(s)) - 1\right|$

$\underset{(*)}{\leq} K\left[\prod_{k=N+1}^{M}(1+|f_n(s)|) - 1\right]$

$\underset{\text{Lema}}{\leq} K\left[\exp\left(\sum_{k=N+1}^{M}|f_n(s)|\right) - 1\right]$

$\underset{(**)}{\leq} K[e^{\varepsilon} - 1] \leq 2\varepsilon K$

2)

$\Leftarrow$) Sup que $\exists s_0 \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ t.q $f_n(s) = -1$

$\Rightarrow f_n(s_0) + 1 = 0 \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (f_n(s) + 1) = 0$

$\Rightarrow$) Sup. que $\exists s_0 \in \Omega$ t.q $p(s_0) = 0$

Tenemos que $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ (por lo anterior)

$|p_m(s_0) - p_N(s_0)| \leq 2\varepsilon \, |p_N(s_0)|$ para $N, m \geq N_0$

$\Rightarrow$ en particular con $N = N_0$

$|p_m(s_0)| - |p_{N_0}(s_0)| \leq 2\varepsilon \, |p_{N_0}(s_0)|$

$\Rightarrow (1 - 2\varepsilon) \, |p_{N_0}(s_0)| \leq |p_m(s_0)|$

Obs: $\varepsilon < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\varepsilon - 1 > 0$

Ahora, haciendo $n \to \infty \Rightarrow (1 - 2\varepsilon) \, |p_{N_0}(s_0)| \leq |p(s_0)| = 0$

$\Rightarrow p_{N_0}(s_0) = 0$

3) Tarea.

Teorema: Sea $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq [0,1)$, entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$$

Dem: Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos que $0 \leq u_n < 1$

$\Rightarrow 0 \leq 1-u_n < 1$, en particular $0 \leq 1-u_1 < 1$

$\Rightarrow 0 \leq (1-u_1)(1-u_2) < 1-u_2 \Rightarrow 0 \leq P_2 < P_1$

$\Rightarrow 0 \leq P_{n+1} < P_n$ (Inductivamente)

$\therefore \{P_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y está acotada inferiormente

$\therefore$ converge, digamos pues $P = \lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$

$\Leftarrow$] P.D. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$. Sea $f_n(s) = -u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$

tenemos que

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n está acotada ($|f_n(s)| = |-u_n| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(s)| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$

$\therefore$ la serie converge uniformemente

Ahora como $f_n(s) \neq 1 \overset{\text{Teo. Anterior}}{\Rightarrow} P(s) > 0$ $\forall s \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$

$\Rightarrow$] Sup. que $P = \prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$ y como $\{P_n\}$ es decreciente $\Rightarrow$ $0 < P \leq P_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Notemos que $1-x \leq e^{-x}$ $\forall x \geq 0$

$\Rightarrow 0 < P \leq P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$

$\therefore 0 < P \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$

Sup. que no se cumple, así, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$

si $n \to \infty$, $0 < P \leq 0$ $\otimes$

Def.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región abierta. Definimos lo sig.

1) $H(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ es holomorfa$\}$

2) Si $f \in H(\Omega)$ denotamos $Z(f) = \{ s \in \mathbb{C} \mid f(s) = 0 \}$

Teo.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región abierta y sea $f \in H(\Omega)$, $f(s_0) \neq 0$ con $s_0 \in \Omega \Rightarrow \exists!\, g \in H(\Omega)$ con $g(s_0) \neq 0$
y $f(s) = (s - s_0)^K g(s)$ $\forall s \in \Omega$ y denotamos
$m(f, s_0) = K$

Obs.- Por convención, si $f(s_0) \neq 0 \Rightarrow m(f, s_0) = 0$.

Teorema.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región abierta y $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{f_n\} \subseteq H(\Omega)$
t.q.

- $f_n \not\equiv 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ converge normalmente en Ω

Entonces

1) $f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ converge normalmente en Ω

2) $f \in H(\Omega)$

3) $m(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, s)$ $\forall s \in \Omega$.

Dem.-

1) Sea $g_n(s) = f_n(s) - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall s \in \Omega$ y $K \subseteq \Omega$ compacto

- g_n es acotada en K (f_n son continuas en un compacto)
- $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ converge uniformemente en K

$\underset{\text{Teo}}{\Rightarrow} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en K

$\therefore$ converge normalmente.

2) Por la convergencia normal de $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ y dado que el producto de holomorfas es holomorfa tendremos que $f \in H(\Omega)$.

3) Sea $s \in \Omega$

Caso 1 Sup. que $f(s) \neq 0 \Rightarrow m(f,s)=0$

Ahora por teo. tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(s) \neq 0$

$\Rightarrow f_n(s)-1 \neq -1 \Rightarrow f_n(s) \neq 0$

$\Rightarrow m(f_n,s)=0 \quad \therefore \quad m(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty} m(f_n,s)$

Caso 2 Sup. que ~~m(f,s)~~ $f(s)=0$

$\Rightarrow \exists k>0$, t.q. $m(f,s)=k$, notemos que solo un número finito de la sucesión $\{f_n(s)\}_{n\geq 1}$ se anula.

En efecto, sup. que no entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_{n_k}(s)=0$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |1-f_n| = \infty$ ↯

Ahora spg supongamos que $f_1(s)=f_2(s)=\dots=f_m(s)=0$ y $f_{m+1}(s) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces tenemos

$$f(s)=\underbrace{f_1(s)\cdots f_m(s)}_{\in H(\Omega)} \underbrace{\prod_{n=m+1}^{\infty} f_n(s)}_{\in H(\Omega)}$$

$\Rightarrow$ por teo $\prod_{n=m+1}^{\infty} f_n(s) \neq 0$

$\Rightarrow m(f,s)=\sum_{k=1}^{k} m(f_n,s) + m\left(\prod_{n=m+1}^{\infty} f_n, s\right)$

$\Rightarrow m(f,s)=\sum_{n=1}^{k} m(f_n,s)$ y como $m(f_m,s)=0$ para

$\Rightarrow m(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty} m(f_n,s)$ ■

Def.- (Factores elementales) Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos

o) $E_0(s) = 1 - s \quad \forall s \in \mathbb{C}$

oo) $E_n(s) = (1-s)\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}\right)$

Lema.- Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{C}$ t.q. $|s| \leq 1$ entonces

$$|1 - E_n(s)| \leq |s|^{n+1}$$

Dem:-

Caso 1) si $n = 0 \Rightarrow |1 - E_0(s)| = |s| \leq |s|^{0+1}$

Caso 2) Sea $g_n(s) = 1 - E_n(s)$.

Tenemos que $g_n(0) = 1 - E_n(0) = 1 - 1 = 0$

Claramente $g_n \in H(\mathbb{C})$ $\forall n$ y no es idénticamente cero

$\therefore \exists k > 0$ t.q. $m(g_n, 0) = k$

Derivamos g_n

$-g_n'(s) = E_n'(s) = (-1)\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}\right) + (1-s)\left(\sum_{k=1}^{n} s^{k-1}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\right.$

$= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}\right)\left(-1 + \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} s^k\right)$

$= -s^n \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}\right)$

$\therefore m(g_n', 0) = n \;\therefore\; m(g_n, 0) = n+1$

$\Rightarrow$ la función $\frac{g_n(s)}{s^{n+1}}$ $\forall s \in \mathbb{C}$ está bien definida

y es holomorfa

$\Rightarrow \frac{g_n(s)}{s^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ Notemos que $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $a_n > 0$

Ahora sea $|s| \leq 1 \Rightarrow |s|^{n+1} \leq 1$

$\therefore \left| \frac{g_n(s)}{s^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n |s|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{g_n(1)}{1^{n+1}} = 1$

$\Rightarrow |g_n(s)| \leq |s|^{n+1}$

Teorema.- Sea $\{s_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$, $\{r_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ t.q.

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n \neq 0$
ii) $|s_n| \to \infty$, $n \to \infty$
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|s_n|}\right)^{1+r_n} < \infty \quad \forall r > 0$

y sea $p(s) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right)$, entonces

1) $p \in H(\mathbb{C})$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(s_n) = 0$
3) $p(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{s_n\}_{n\geq 1}$

Dem.- ~~Consideramos~~

1) • Notemos que las funciones $f_n(s) = E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$ cumplen $f_n \in H(\mathbb{C})$

• Claramente $f_n \not\equiv 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

• P.D. $\forall K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ converge uniformemente en K.

Basta probarlo $\forall r > 0$ en $D_r(0)$. Sea $r > 0$ y $s \in D_r(0)$ de esta forma $|s| \leq r$ (*)

Ahora tenemos

$\therefore |1 - f_n(s)| = \left|1 - E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right)\right| \leq \left|\frac{s}{s_{n}}\right|^{r_n+1}$

para $n > n_0$ suficientemente grande, pues $|s_n| \to \infty$

$\Rightarrow |1 - f_n(s)| \leq \left|\frac{r}{s_n}\right|^{r_n+1}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|s_n|}\right)^{r_n+1} < \infty$ (iii)

$\therefore$ por el c. M de Weierstrass conv. unif.

$\therefore$ por Teo. anterior

$$p(s) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(s) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right) \in H(\mathbb{C})$$

2) Sea $n \in \mathbb{N}$, notemos que $f_n(s_n) = E_{r_n}\left(\frac{s_n}{s_n}\right) = E_{r_n}(1) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $p(s_n) = 0$

3) Sea $s \in \mathbb{C} \setminus \{s_n\}$ y sea $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right) = 0 \iff \frac{s}{s_n} = 1 \iff s = s_n$

$\therefore$ $E_r\left(\frac{s}{s_n}\right) \neq 0$ $\therefore$ $p(s) \neq 0$

Obs: El punto (...) del teo. anterior siempre se cumple.

Dem.- Sea $\{s_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{C}$ t.q. $|s_n| \to \infty$ y sea $r > 0$ entonces

$|s_n| < 2r$ para un número finito de n's

Sean $\{k, k+1, \ldots\}$ los números $\geq$ por los cuales ya no se cumple y sea $\ell \in \{k, k+1, \ldots\}$

$\Rightarrow$ $|s_\ell| \geq 2r$ $\Rightarrow$ $\frac{r}{|s_\ell|} \leq \frac{1}{2}$

y sea $r_n = n-1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{|s_\ell|}\right)^{r_\ell - 1} = \left(\frac{r}{|s_\ell|}\right)^{n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq \ell}^{\infty} \left(\frac{r}{|s_n|}\right)^{1+r_n} \leq \sum_{n \geq \ell} \frac{1}{2^n} < \infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|s_n|}\right)^{1+r_n} < \infty$$

Teorema: (Factorización canónica de Weierstrass)

Sea $f \in H(\mathbb{C})$ t.q. $f \not\equiv 0$ y

1) Tenga un cero en 0 de orden n

2) Sean $\{s_n\}_{n\geq 1}$ sus ceros de f enumerados de acuerdo a su multiplicidad (son infinitos)

Entonces $\exists\, g \in H(\mathbb{C})$ y $\{r_n\} \subseteq \mathbb{N}$ t.q.

$$f(s) = s^n e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right)$$

Dem: Empecemos notando lo sig.

Por (1) $\Rightarrow \exists\, h \in H(\mathbb{C})$ t.q. $f(s) = s^n h(s)$ t.q. $h(0) \neq 0$

Trabajamos con h.

Tomamos $\{r_n\} \subseteq \mathbb{N}$ como en la observación y sea $p(s) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{r_n}\left(\frac{s}{s_n}\right)$ donde $p \in H(\mathbb{C})$ cuyos únicos ceros son $\{s_n\}_{n\geq 1}$

Ahora h tiene los mismos ceros, así $\frac{h}{p}$ es una función entera (la extendemos analíticamente) pues en dado caso tiene singularidades removibles

Notemos que h/p nunca se anula $\Rightarrow \exists\, g \in H(\mathbb{C})$ t.q.

$$e^{g(s)} = \frac{h(s)}{p(s)}$$

$\therefore\ h(s) = e^{g(s)} p(s) \Rightarrow f(s) = s^n e^{g(s)} p(s)$ ■

Def: Definimos la función Gamma de Euler como

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\, e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$$

donde γ es la constante de Euler.

Obs: Está bien definida y es entera.

Dem: Consideramos la sucesión $\{-n\}_{n\geq 1}$. Claramente $|-n| \to \infty$ y consideramos $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_n = 1$.

Tenemos que $\forall r > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|-n|}\right)^{r_n - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^2 = r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$\therefore$ el producto $P(s) = \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{s}{-n}\right)$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$$

$\therefore$ La función inversa gamma tiene sentido y es entera.

Ayudante

Def: Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$.
Diremos que

$$f(x) = O(g(x))$$

si $\exists x_0, c > 0$ t.q. $|f(x)| \leq c \cdot g(x)$ $\forall x > x_0$

Propiedades

- Si $f(x) = O(g(x))$ y $g(x) = O(h(x))$
  $\Rightarrow f(x) = O(h(x))$

Escaneado con CamScanner

- $f(x) = O(f(x))$
- ~~[illegible]~~

Si $f = O(h_1(x))$ y $g(x) = O(h_2(x))$

$\Rightarrow$ $f(x)+g(x) = O(\max(h_1(x), h_2(x)))$

y $f(x)\,g(x) = O(h_1(x)\,h_2(x))$

Proposición.- Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ son t.q.

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

$\Rightarrow$ $f(x) = O(g(x))$

Teorema.- Si $f\in C^1[y,x]$, $0<y<x$, entonces

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x \{t\}\, f'(t)\,dt - f(x)\{x\} + f(y)\{y\}$$

Dem: Hay investigarlo (es larga y de flojera)

~~Lema (a) $\forall s>1$, s [illegible] tal que~~

$$\cancel{\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})}$$

Lema.-

(a) $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}) \quad \forall s>1$

(b) $\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\sum_{n\leq x} n = \frac{x^2}{2} + O(x)$

(d) $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1)$

(e) $\sum_{n\leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x\log x)$

Dem.-

a) Ocupamos la formula de sumación de Euler para $f(x) = x^{-s}$

$\Rightarrow \sum_{1\leq n\leq x} n^{-s} = \int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt$

$+ 1 - \frac{x-[x]}{x^s}$

Obs.- $-\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}} = \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}$

Por $\int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^{s+1}} dt = s x^{-s} \Rightarrow \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}} = O($

$\Rightarrow \sum_{1\leq n\leq x} n^{-s} = \frac{t^{1-s}}{1-s}\Big|_1^x - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}} + 1 + O(x^{-s})$

$= \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s-1}} + 2 + O(x^{-s})$

Si definimos $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt$

$\Rightarrow \sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s})$

y si $x \to \infty$ podemos darnos cuenta que $C(s) = \zeta(s)$

o, se tiene lo pedido.

(a).- $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt$ en $Re(s) > 1$

(b) Por lo anterior

$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^2} = -x^{-1} + \zeta(2) + O(x^{-2})$

$= \frac{\pi^2}{6} + (-x^{-1}) + O(x^{-2})$

pero $-x^{-1} = O(x^{-1}) \Rightarrow$ $x^{-1} + x^{-2}$ $= O(\max\{x^{-1}, x^{-2}\})$

$= O(x^{-1})$

$\Rightarrow \sum_{n \le x} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(x^{-1})$

~~Así $\sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n > x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} - \sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n^2}$~~

$\left| \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n^2} - \frac{6}{\pi^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right|$

$= \left| \sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| \le \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} \le \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \le x} \frac{1}{n^2} = O(x^{-1})$

$\Rightarrow \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\sum_{n \le x} n = \frac{[x]([x]+1)}{2} = \frac{[x]^2}{2} + \frac{[x]}{2}$

$= \frac{(x - \{x\})^2}{2} + \frac{[x]}{2}$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{2x\{x\}}{2} - \frac{\{x\}^2}{2} + \frac{[x]}{2}$

pero $\left| x\{x\} - \frac{\{x\}^2}{2} + \frac{[x]}{2} \right| \le x + \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = O(x)$

Escaneado con CamScanner

$$\Rightarrow \sum_{n \leq x} n = \frac{x^2}{2} + O(x)$$

(b)

Aplicando la f. de sumación de Euler a $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_1^x [t] \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$+ \frac{1}{x}\{x\} + \frac{1}{1}\cdot\{1\}$$

$$= \log x - \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}\, dt + \frac{x-[x]}{x} + 1$$

y tenemos que

$$\left| \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}\, dt \right| = \int_1^x \left|\frac{t-[t]}{t^2}\right| dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= 1 - x^{-1}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}\, dt = O(x^{-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + 1 + O(x^{-1})$$

$$= \log x + O(1)$$

pues $\frac{x-[x]}{x} = O(x^{-1})$

(c) $\sum_{n\le x} \phi(n) = \sum_{n\le x} \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \sum_{d\le x} \sum_{m\le \frac{x}{d}} \mu(d)\, m$

$$= \sum_{d\le x} \mu(d) \sum_{m\le \frac{x}{d}} m$$

Si $f(x) = \sum_{n\le x} n - \frac{x^2}{2} \Rightarrow |f(x)| \le C\cdot x$

$$\Rightarrow \sum_{n\le x} \varphi(n) = \sum_{d\le x} \mu(d)\left(\frac{x^2}{2d^2} - f\left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d\le x} \mu(d) f\left(\frac{x}{d}\right)$$

$$\le \frac{x^2}{2}\left(\frac{6}{\pi^2} + O(x^{-1})\right) - \sum_{d\le x} \mu(d)\, C\cdot\frac{x}{d}$$

$$\le \frac{x^2}{2}\left(\frac{6}{\pi^2} + O(x^{-1})\right) + Cx\sum_{d\le x}\frac{1}{d}$$

$$\le \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x) + Cx\left(\log x + O(1)\right)$$

$$= \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x) + O(x\log x) + O(x)$$

$$= \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log x)$$

Obs.- 1) $\frac{1}{\Gamma} \in H(\mathbb{C})$

2) Los únicos ceros de $\frac{1}{\Gamma}$ son $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y todos tienen orden 0

Obs.-

1) La función Γ es meromorfa en $\mathbb{C}$

$M(\mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f$ es holomorfa en un conjunto discreto y dichos puntos son polos$\}$

2) Γ tiene polos en $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y dichos polos son simples (orden 1)

Def.- Definimos el dominio de la función Γ como

$$D_\Gamma = \{ s \in \mathbb{C} \mid s \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \}$$

Lema 1.- Sea $s \in \mathbb{C}$, entonces $\lim_{m \to \infty} \frac{m^s}{(m+1)^s} = 1$

Lema 2.- Sea $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$m+1 = \prod_{h=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{h}\right)$$

Dem.- Para $m=1$, $1+1 = 1 + \frac{1}{1}$.

Sup. válido $m+1 = \prod_{h=1}^{m} (1+\frac{1}{h})$. Ahora

$$\prod_{h=1}^{m+1} \left(1+\frac{1}{h}\right) = \prod_{h=1}^{m} \left(1+\frac{1}{h}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) = (m+1)\left(1+\frac{1}{m+1}\right)$$

$$= m+2.$$

Proposición.- (Fórmula de Euler)

Sea $s \in D_\Gamma \Rightarrow \Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{k}\right)^{-1}$

Dem.- Tenemos por def. lo sig.

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\, e^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}$$

Vimos que $\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(s)} = s\lim_{m\to\infty} e^{s\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}$$

$$= s\lim_{m\to\infty} m^{-s}\cdot \cancel{e^{s\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}}}\cdot \cancel{e^{-s\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}}}\cdot\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$= s\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\cancel{m^{s}}}\cdot\frac{\cancel{m^{s}}}{(m+1)^{s}}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

Lema 1

$$= s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

Lema 2

$$= s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$\therefore\ \Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

Proposición.- Sea $s \in D_\Gamma$ entonces

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{n^{s}\, n!}{s+k}$$

Dem.- Tenemos que $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{k}\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{s}}{k^{s}}\cdot\frac{k}{k+s}$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{s}}{k^{s}}\cdot\frac{n!}{k+s} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{k=1}^{n}\frac{(n+1)^{s}\, n!}{s+k}$$

Lema 1 $= \frac{1}{s} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{n^s \cdot n!}{s+k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{n^s \cdot n!}{s+k}$ ∎

Proposición.- Sea $s \in D_\Gamma$

$\Rightarrow \Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$

Dem.- (increíble)

$$\Gamma(s+1) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{n^{s+1} n!}{s+1+k}$$

obs: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{s+1+n} = 1$.

$$\Rightarrow \Gamma(s+1) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n^{s} n!}{s+1+k} \cdot \frac{n}{s+1+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n^s n!}{s+1+k} \cdot 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{n^s n!}{s+k}$$

$$= s \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s} \prod_{k=1}^{n} \frac{n^s n!}{s+k}$$

$$= s \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{n^s n!}{s+k}$$

$= s\,\Gamma(s)$

Corolario.- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$\Gamma(n+1) = n!$

Dem.- para $n=1$

$\Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=0}^{m} \frac{m \cdot m!}{1+k} = \lim_{m\to\infty} \frac{m \cdot m!}{(m+1)!} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+1}$

$= 1 \quad \therefore \Gamma(1+1) = 1 \quad \therefore \Gamma(1+1) = 1!$

Sup. válido $\Gamma(n+1) = n!$

$\Rightarrow \Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)\,n! = (n+1)!$ ■

Lema.- Sea $s \in \mathbb{C}_+$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_0^1 (1-x)^n x^{s-1}\,dx = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{s+k}$$

Dem: para $n=1 \Rightarrow \int_0^1 (1+x)x^{s-1}\,dx$

$= \int_0^1 x^{s-1} \cancel{+} x^s\,dx = \frac{x^s}{s}\Big|_0^1 \cancel{+} \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{s} \cancel{+} \frac{1}{s+1} = \frac{s+1-s}{s(s+1)}$

$= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \prod_{k=0}^{1} \frac{1!}{s+k}$

Ahora sup. válido $\int_0^1 (1-x)^n x^{s-1}\,dx = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{s+k} \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{n+1} x^{s-1}\,dx = (1-x)^{n+1}\frac{x^s}{s}\Big|_0^1 - \int \frac{x^s}{s}\left[-(n+1)(1-x)^n\right]dx$

$= \frac{(n+1)}{s}\int_0^1 (1-x)^n x^s\,dx \underset{H.I}{=} \frac{(n+1)}{s}\prod_{k=0}^{n}\frac{n!}{s+1+k}$

$= \frac{1}{s}\prod_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{s+1+k} = \frac{1}{s}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)!}{s+k} = \prod_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{s+k}$ ■

Lema 1.- Sea $p \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha > 0$, entonces

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p(t)}{e^{\alpha t}} = 0$$

Dem.- ✓

Lema 2.- Sea $\alpha > 0$, entonces $\int_1^\infty e^{-\alpha t}\, dt < \infty$

Dem.- Tenemos que

$$\int_1^\infty e^{-\alpha t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_1^n e^{-\alpha t}\, dt = \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha t} \cdot -\frac{1}{\alpha}\Big|_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{e^{-\alpha n}}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} < \infty$$

Lema 3.- Sea $\alpha < 1$, entonces $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt < \infty$

Dem.- Tenemos por def. $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 t^{-\alpha}\, dt$

$$= \lim_{c \to 0^+} \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} < \infty \quad \alpha < 1,\ -\alpha+1 > 0$$

Proposición.- Sea $x \in (0,\infty)$ y sea $g(t) = e^{-t} t^{x-1}$

$\Rightarrow g \in L^1(0,\infty)$

$(L^1(0,\infty) = \{ f : (0,\infty) \to \mathbb{C} \mid \int_0^\infty |f(t)|\, dt < \infty \})$

Dem.- P.D.$\int_0^\infty |e^{-t} t^{x-1}|\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt < \infty$

Basta probar que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt < \infty$ y $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt < \infty$

1) Tenemos lo sig. $t > 0 \Rightarrow -t < 0 \Rightarrow e^{-t} < 1$

$\Rightarrow \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt < \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$

y como $x > 0 \Rightarrow 1-x < 1 \underset{\text{Lema 3}}{\Rightarrow} \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt <$

2) Tenemos que $\gamma > 0 \Rightarrow \gamma - 1 > -1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $N \geq \gamma - 1$.

Ahora, en $\int_1^n e^{-t} t^{\gamma-1} dt$, $t \geq 1 \Rightarrow \log(t) \geq 0$

$\Rightarrow N \log t \geq (\gamma - 1) \log t \underset{\exp}{\Rightarrow} t^N \geq t^{\gamma-1}$

Como $t^N \in \mathbb{R}[x] \underset{\text{Lema 1}}{\Rightarrow}$ para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lim_{t \to \infty} \frac{t^N}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0$

Ahora, de la def. de límite tenemos que para $\varepsilon = 1$, $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande t.q.

$$\frac{t^N}{e^{\frac{1}{2}t}} < 1 \quad \forall t \geq t_0$$

$\Rightarrow t^N < e^{\frac{1}{2}t} \quad \forall t \geq t_0 \Rightarrow t^{\gamma-1} < e^{\frac{1}{2}t} \quad \forall t \geq t_0$

$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt = \int_1^{t_0} e^{-t} t^{\gamma-1} dt + \int_{t_0}^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt$

Como $e^{-t} t^{\gamma-1}$ es continua en $[1, t_0]$ alcanza su máximo $\Rightarrow \int_1^{t_0} \sim < \infty$ y por otro lado

$\cancel{\int_{t_0}^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt = \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^n e^{-t} t^{\gamma-1} dt < \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^n e^{-t} e^{\frac{1}{2}t} dt}$

$\cancel{= \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^n e^{-\frac{1}{2}t} dt = \lim_{n \to \infty} -2e^{-\frac{1}{2}t} \Big|_{t_0}^n}$

$\int_{t_0}^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} < \int_{t_0}^\infty e^{-t} e^{\frac{1}{2}t} dt = \int_{t_0}^\infty e^{-\frac{1}{2}t} < \infty$ Lema 2

$\therefore \int_1^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt < \infty$

$\therefore \int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt < \infty$

Teorema.- Sea $s \in \mathbb{C}_+$ entonces.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$$

Dem.- Sea $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}_+$ fijos, por resultado anterior sabemos que

$$\int_0^1 (1-x)^n\, x^{s-1}\, dx = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{s+k}$$

Sea $x = \frac{t}{n}$, $\begin{matrix} x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ x \to 1 \Rightarrow t \to n \end{matrix}$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n x^{s-1}\, dx = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \left(\frac{t}{n}\right)^{s-1} \frac{1}{n}\, dt$$

$$= \frac{1}{n^s} \int_0^1 \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\, dt = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!\cdot n^s}{s+k}$$

$$\int_0^\infty \chi_{[0,n]}(t) \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\, dt = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!\, n^s}{s+k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \chi_{[0,n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\, dt = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{n!\, n^s}{s+k} \overset{\text{prop. anterior}}{=} \Gamma(s)$$

Queremos meter el límite.

Definimos $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, $f_n(t) = \chi_{[0,n]}(t) \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}$ son continuas.

1) Sea $t \in (0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = t^{s-1} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{s-1} e^{-t}$$

2) Sea $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(t)| = \left|\chi_{[0,n]}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\right|$$

$$\leq e^{-t}\, t^{Re(s)-1}$$

Escaneado con CamScanner

y como $g(t) = e^{-t} t^{Re(s)-1}$ cumple que $g \in L^1(0,\infty)$

$\Rightarrow$ por el teo. de convergencia dominada de Lebesgue

$\Rightarrow \Gamma(s) = \lim \int = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \chi_{[0,n]} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\, dt$

$= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt.$ ∎

Series de Fourier

Def.- Sea $a>0$. Definimos

1) para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, medible y a-periódica, definimos

$$\|f\|_{L^1_a} = \frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|\, dt$$

2) $L^1_a(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid$ f es medible, f a-periódica, $\|f\|_{L^1_a} < \infty \}$ / (casi en todas partes)

Teorema: $(L^1_a, \|\cdot\|_{L^1_a})$ es de Banach.

Obs.- $L^1_a(\mathbb{R}) \cong L^1([0,a])$

Def.- Sea $f \in L^1_a(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$. Definimos su k-ésimo coeficiente de Fourier como:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a} t}\, dt$$

Obs.- Está bien definido

Def.- Dada $f \in L_a^1(\mathbb{R})$, la serie de Fourier asociada a f es:

$$S(f)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i \frac{n}{a} t}$$

Teorema.- Sea $f \in L_a^1(\mathbb{R})$ y $A \subseteq [0,a]$ t.q. $\lambda[0,a] > 0$ t.q. que $\forall t \in A$ $\{S_n(f)(t)\}_{n\geq 1}$ converge

$$\Rightarrow f(t) = S(f)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i \frac{n}{a} t}$$

en casi todas partes, $t \in [0,a]$

Más aún, si en $t_0 \in A$, f es continua entonces

$$f(t_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i \frac{n}{a} t_0}$$

Def.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ medible, definimos $\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|$ y $L^1(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ medible y $\|f\|_{L^1} < \infty \}$

Def.- Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos su transformada de ~~Laplace~~ Fourier como:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i t s}\, dt \quad , \forall s \in \mathbb{R}$$

Teoría.-

1) Si $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ t.q. $f \to \hat{f}$ es función

donde $C_0(\mathbb{R}) = \{ f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \}$

2) teoría en $L^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

resulta que $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

se extiende

3) Clase de Schwartz

$$A(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N}_0,\ p \in \mathbb{R}[x] \\ f \cdot p \in L^\infty(\mathbb{R}) \end{array} \}$$

Obs: Se tiene que $A \subseteq L^1(\mathbb{R})$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2} |f(t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{1+t^2}\,dt = K\pi < \infty$

4) $F: A(\mathbb{R}) \to A(\mathbb{R})$ y es un homomorfismo isométrico

Ayudantía

Teorema: ~~Sean~~ Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, la probabilidad de que sean coprimos es de $\frac{6}{\pi^2}$

Dem.- Sea $N \in \mathbb{N}$, calcularemos la probabilidad de que $m, n \leq N$ sean coprimos.

La cantidad de posibles pares n, m son N^2 y sea para $n \in \mathbb{N}$ fijo

$$A_n = \{ (m,n) \mid 1 \leq m \leq n \leq N \ \ (m,n) = 1 \}$$

$$B_m = \{ (m,n) \mid 1 \leq n \leq m \leq N,\ (m,n) = 1 \}$$

$$\Rightarrow |A_n| = \phi(n), \quad |B_m| = \phi(m)$$

Queremos contar $A = \{ (m,n) \mid 1 \leq m, n \leq N,\ (m,n) = 1 \}$

$$\Rightarrow A = \Big(\bigcup_{n \leq N} A_n \Big) \cup \Big(\bigcup_{m \leq N} B_m \Big) - \{(1,1)\}$$

$$\Rightarrow |A| = 2 \sum_{n \leq N} \phi(n) - 1$$

$$\Rightarrow P_N = \frac{|A|}{N^2} = \frac{2\left[\frac{3}{\pi^2} N^2 + O(N \log N)\right] - 1}{N^2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2} + \frac{2}{N^2} O(N \log N) - \frac{1}{N^2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{\log N}{N}\right) - \frac{1}{N^2} \to \frac{6}{\pi^2}$$

Escaneado con CamScanner

Entonces la probabilidad buscada es cuando $N\to\infty$

$$\therefore \quad P = \lim_{N\to\infty} \frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{N^2} + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}$$

Teorema I: Sea (X, σ, μ) espacio de medida y $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : X \to \mathbb{C}$ medibles y definidas en casi todas partes de X t.q.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$$

$\Rightarrow$

1) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es def. c.t.p., medible y $f \in L^1(\mu)$

2) $\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Proposición.- Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a > 0$ definimos

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t - na)$$

$\Rightarrow$

1) F está def. c.t.p. en $[0,a]$, es medible, $F \in L^1([0,a])$

2) F es a-periódica

3) $F \in L^1_a(\mathbb{R})$

Dem:

Consideramos $\left([0,a], \mathbb{B}([0,a]), \frac{d\lambda}{a}\right)$

Sean $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,a] \to \mathbb{C}$ dadas por $t \mapsto f(t - na)$

f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, son medibles y def. c.t.p. $[0,a]$

$f(h \cdot n_a)$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a}\int_0^a |f(t+na)|\,dt \qquad \text{Sea } \tau = t-na,\ d\tau = dt$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-na}^{-(n+1)a} |f(\tau)|\,d\tau = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\,d\tau$$

$\frac{1}{a}\|f\|_{L^1} < \infty$

$\Rightarrow$ por teorema anterior tenemos que

1) $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t-na)$ es a-periódica, integrable en $[0,a]$ y $c)$ integrable y más, $F \in L^1([0,a])$

2) P.D. $F(t+a) = F(t)$

$$F(t+a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+a-na) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+(1-n)a)$$

Sea $m = 1-n \Rightarrow X = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+ma) = F(t)$

3) Se sigue de 1 y 2.

Teorema: Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a>0$ y $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+na)$ entonces

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \underbrace{\hat{F}(k)}_{\text{coeficiente}} = \frac{1}{a} \underbrace{\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)}_{\text{transformada}}$$

Dem: Como $F \in L^1_a(\mathbb{R})$ del teo. anterior tiene sentido

$$\Rightarrow \hat{F}(k) = \frac{1}{a}\int_0^a F(t)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t-na)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a} t}\, dt$$

Sea $\forall n \in \mathbb{N}$, las funciones $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g_n(t) = f(t-na)e^{-2\pi \dots}$

Claramente son def c.t.p, medibles.

Tenemos lo sig

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a}\int_0^a \left| f(t-na)\, e^{-2\pi i \frac{n}{a} t}\right| dt$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a}\int_0^a |f(t-na)| < \infty \quad \text{(prop. anterior in } n\text{'(final))}$$

Del teo. anterior

$$\hat{F}(k) = \frac{1}{a}\int_0^a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t-na)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a} t}$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^a f(t-na)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a} t}\, dt$$

Sea $\tau = t - na \Rightarrow d\tau = dt$

$$\Rightarrow * = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-na}^{-(n+1)a} f(\tau)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a}(\tau+na)}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a}\tau} \cdot e^{-2\pi i k n}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-2\pi i \frac{k}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) \blacksquare$$

Teorema: (Formula de sumacion de poisson)

Sea $f \in A(\mathbb{R})$, $a > 0$ y $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t - na)$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\hat{f}\left(\frac{n}{a}\right)}_{\text{trasformada}} e^{2\pi i \frac{n}{a} t}$$

Dem:

1) Veamos que la serie de fourier de F converge $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$S(F)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)\, e^{2\pi i \frac{n}{a} t}$$

pero por el teo. anterior

$$S(F)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2\pi i \frac{n}{a} t}$$

Basta ver que converge absolutamente. Como $f \in A(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \hat{f} \in A(\mathbb{R})$, consideramos $p(t) = 1 + t^2$

$\Rightarrow p \cdot \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, C > 0$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(t)|(1+t^2) \leq C$

En particular $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$|\hat{f}(\tfrac{n}{a})| < \frac{C}{1+(\frac{n}{a})^2} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(\tfrac{n}{a})\, e^{2\pi i \frac{n}{a} t}\right| < \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(\frac{n}{a})^2} < \infty$$

2) F es continua. Basta ver en $[0,a]$ pues F es periodica.

Tenemos que como $f \in A \Rightarrow f$ es continua $\Rightarrow f(t - na)$ es continua.

Sea $Q(t) = (a + 1 + t^2)^2$, como $f \in A \Rightarrow Q \cdot f \in L^\infty(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists M > 0$ t.q. $|f(t)|(a+1+t^2)^2 < M$

obs) $|t| < 1+t^2$

$\Rightarrow |f(t)|(a+|t|)^2 < M$

Usando esto tenemos que

$$|f(t-na)| < \frac{M}{(a+|t-na|)^2} < \frac{M}{a+|na|-|t|} = \frac{M}{a+a|n|-t} \; *$$

Tenemos que $0 \leq t \leq a \Rightarrow 0 \geq -t \geq -a$

$\Rightarrow 0 \leq a-t \Rightarrow a|n| \leq a|n| + a - t$

$$\Rightarrow * < \frac{M}{a^2|n|^2}$$

$\Rightarrow \cancel{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t-na)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M}{a^2|n|^2} < \infty}$

:.

Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M}{a^2|n|^2} < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t-na)$ conv. absoluta y uniformemente

y como $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(t-na)$ es continua

$\Rightarrow F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t-na)$ es continua

$\Rightarrow$ Teo. anterior de series de Fourier

$$F(t) = S(F)(t) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2\pi i \frac{n}{a} t}.$$

Corolario.- Sea $f \in A(\mathbb{R})$, entonces:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Dem.- Tomando $a=1$ y $t=0$ del teo. anterior

Def.- Definimos $\forall x>0$:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}$$

$$\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x n^2}$$

Obs.- Están bien definidas.

Proposición.- Sea $x>0$, entonces $\Theta(x) = 2w(x)+1$

Dem.- Directo.

Teorema.- Sea $x>0$ entonces

$$\Theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\Theta(x)$$

Dem.- Consideramos $f(t) = e^{-\pi x t^2}$

1) $f \in A(\mathbb{R})$

2) $\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi \frac{z^2}{x}}$ (Corolario de tarea) } Lema 5.9

$\Rightarrow$ por el Corolario $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi \frac{n^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \Theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\Theta(x)$

Corolario.- Sea $x>0$, ent.

$$w\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\, w(x)$$

Dem.-

$$w\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\theta\left(\frac{1}{x}\right)-1}{2} = \frac{\sqrt{x}\,\theta(x)-1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\,(2w(x)+1)-1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\, w(x)$$ ■

Lema del teo. ant.- Sea $x>0$, $f(t) = e^{-\pi x t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 1) $f \in A(\mathbb{R})$

2) $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi \frac{s^2}{x}}$

Dem.- Claramente $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

1) Sea $p \in \mathbb{R}[t]$, $p \cdot D$ $pf \in L^{\infty}(\mathbb{R})$

Observa $\lim_{t\to\infty} p(t) f(t) = 0 \Rightarrow pf \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in A(\mathbb{R})$ ✓

2) $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i s t}\, dt$

Obs 1.- $f'(t) = -2\pi t x\, e^{-\pi x t^2}$

$= -2t\pi x\, f(t)$

Obs 2.- Tenemos que $f' \in A(\mathbb{R})$ y además

$\hat{f'}(s) = 2\pi i s\, \hat{f}(s)$

Obs 3.- La función $g(t) = t \cdot f(t)$ cumple $g \in A(\mathbb{R})$

y $\hat{g}(s) = \frac{i}{2\pi}\left(\hat{f}(s)\right)'$

como $f'(t) = -2\pi t x f(t)$

trans. Laplace

$\Rightarrow 2\pi i s \hat{f}(s) = -2\pi x \cdot \frac{i}{2\pi} (\hat{f}(s))'$

$\Rightarrow [\hat{f}(s)]' = -\frac{s 2\pi}{x} \hat{f}(s)$

obs.- $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x t^2} dt$ sea $u = \sqrt{x\pi}\, t$

$\Rightarrow du = \sqrt{x\pi}\, dt \Rightarrow * = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}}$

planteamos el problema de cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{2\pi s}{x} y \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ existe una única solución y es

$$y = C \cdot e^{\int_{s_0}^{s} -\frac{2\pi s}{x} ds} = K \cdot e^{-\frac{\pi}{x} s^2}$$

y como $y(0) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\therefore$ $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x} s^2}$ ∎

Lema.- si $x > 1 \Rightarrow w(x) = O(e^{-\pi x})$

Dem.- $w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n x} = \frac{1}{e^{\pi x} - 1} = e^{-\pi x} \left(\frac{1}{1 - e^{-\pi x}} \right)$

Ahora como $x > 1$, $-x < -1 \Rightarrow -x\pi < -\pi$

$\Rightarrow e^{-x\pi} < e^{-\pi} \Rightarrow 1 - e^{-x\pi} > 1 - e^{-\pi}$

$\Rightarrow \frac{1}{1 - e^{-\pi x}} < \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = C \Rightarrow w(x) \leq e^{-\pi x} \cdot C$

$\Rightarrow w(x) = O(e^{-\pi x})$

Teorema.- Sea $s \in \mathbb{C}_{+1}$, entonces

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 1 + s(s-1)\int_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) w(x)\, dx$$

Dem.-

Sea $s \in \mathbb{C}_{+1}$, entonces:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t}\, dt, \quad \text{Hagamos } t = \pi n^2 x$$

$$\Rightarrow dt = \pi n^2 dx$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty (\pi n^2 x)^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} \pi n^2\, dx$$

$$= (\pi n^2)^{s/2-1} \pi n^2 \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

$$= \pi^{s/2} n^s \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

$$\Rightarrow \pi^{-s/2} \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

$$\Rightarrow \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

Sumando sobre n

~~Notemos que~~

Ahora definamos $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ donde $f_n(x) = x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x}$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n(x)| = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\frac{Re(s)}{2}} e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

$$= \pi^{-\frac{Re(s)}{2}} \Gamma\left(\frac{Re(s)}{2}\right) \zeta(Re(s))$$

$\Rightarrow$ por el teorema de convergencia dominada

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} \right) dx$$

$$= \int_0^\infty x^{s/2-1}\, w(x)\, dx$$

Notemos lo sig.

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} w(x)\, dx = \underbrace{\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} w(x)\, dx}_{I} + \int_1^\infty x^{s/2-1} w(x)\, dx$$

para I sea $x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{1}{y^2} dy$

$$\Rightarrow I = \int_\infty^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{s/2-1} w\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^\infty x^{-s/2+1} \left[w\left(\tfrac{1}{x}\right) \right] x^{-2}\, dx = \int_1^\infty x^{-s/2-1}\, w\left(\tfrac{1}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^\infty x^{-s/2-1} \left[\frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\, w(x) \right] dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{x^{-s/2-\frac{1}{2}}}{2}\, dx - \int_1^\infty \frac{x^{-s/2-1}}{2}\, dx + \int_1^\infty x^{-s/2-\frac{1}{2}} w(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}}{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \Bigg|_1^\infty - \frac{x^{-s/2}}{2\cdot\left(-\frac{s}{2}\right)} \Bigg|_1^\infty + \int_1^\infty x^{-s/2-\frac{1}{2}} w(x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{-s+1}{2}} + \frac{1}{-s} + \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} w(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} w(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{(s-1)s} + \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} w(x)\, dx$$

$$\therefore \int_0^\infty x^{s/2-1} w(x)\, dx = \frac{1}{(s-1)s} + \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} w(x)\, dx + \int_1^\infty x^{s/2-1} w(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{(s-1)s} + \int_1^\infty \left[x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} \right] w(x)\, dx$$

Escaneado con CamScanner

∴ multiplicando por $s(s-1)$ obtenemos el resultado ■

Def.- Definimos $\forall s \in \mathbb{C}$

$$\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) w(x)\,dx$$

Obs.- Está bien definida.

Basta ver que $\forall s \in \mathbb{C}$, $I = \int_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) w(x)\,dx$ existe.

Notemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}x}} = 0$$

$\Rightarrow \exists x_0$ suficientemente grande t.q.

$$\left|x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right| < e^{\frac{\pi}{2}x}$$

$$\Rightarrow |I| \leq \int_1^\infty \left|x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right| w(x)\,dx$$

$$\leq \int_1^\infty |\sim| C e^{-\pi x}\,dx$$

Lema

$$\leq C\int_1^{x_0} |\sim| e^{-\pi x}\,dx + C\int_{x_0}^\infty e^{\frac{\pi}{2}x} e^{-\pi x}$$

$$\leq \underline{\quad\quad} + C\int_{x_0}^\infty e^{-\frac{\pi}{2}x} < \infty$$

∴ existe.

Teorema.- Sea (X, σ, μ) espacio medible, $U \subset \mathbb{C}$ región y sea $f: X \times U \to \mathbb{C}$ t.q.

1) $\forall s \in U$, $f(\cdot, s) \in L^1(\mu)$

2) $\forall x \in X$, $f(x, \cdot)$ es holomorfa

3) $\exists h \in L^1(\mu)$ t.q. $|f(x,t)| \leq h(x)$ $\forall (x,s) \in X \times U$

$\Rightarrow F(s) = \int_X f(x,s)\, d\mu$ es holomorfa en U.

Corolario.- La función ξ es entera

Dem.- Basta tomar $f: (0,\infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t.q.

$f(x,s) = (x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\, w(x)$ y aplicar el teo. anterior

Obs: Con todo lo anterior tenemos que si $s \in \mathbb{C}_+ + 1$

$\Rightarrow s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \xi(s)$

$\Rightarrow \zeta(s) = \xi(s) \dfrac{1}{\Gamma(s/2)} \cdot \dfrac{1}{s(s-1)} \cdot \pi^{s/2}$

Lema.- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Dem.- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$ sea $x = \sqrt{2t} \Rightarrow dx = \sqrt{2}\, \frac{1}{2} t^{-1/2}$

$\Rightarrow I = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{2}}\, dx$ sea $u = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow u^2 = \frac{x^2}{2}$ $du = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$I = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

$\therefore \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Teorema: Sea $s \in \mathbb{C}$ entonces

- $\xi(s) = \xi(1-s)$
- $\overline{\xi(s)} = \xi(\bar{s})$

Dem.-

- $\xi(1-s) = 1 + (1-s)(1-s-1) \int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{-\frac{1+1-s}{2}}\right) w(x)\,dx$

$= 1 + s(s-1) \int_1^\infty \left(x^{-\frac{1-s}{2}} + x^{-1+s/2}\right) w(x)\,dx$

$= \xi(s)$

- $\overline{\xi(s)} = 1 + \bar{s}(\bar{s}-1) \int_1^\infty \overline{\left(x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)} w(x)\,dx$

$= 1 + \bar{s}(\bar{s}-1) \int_1^\infty \left(x^{\bar{s}/2-1} + x^{-\frac{1+\bar{s}}{2}}\right) w(x)\,dx$

$= \xi(\bar{s})$

Corolario.- La función zeta se extiende a todo el plano complejo excepto en $s=1$ donde tiene un polo simple t.q. $\mathrm{Re}(\zeta, 1) = 1$ y se cumple la ec. funcional

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Dem.- Ya demostramos que para $s \in \mathbb{C}_{+1}$

$s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \xi(s)$

$\Rightarrow \zeta(s) = \xi(s) \cdot \dfrac{\pi^{s/2}}{s-1} \cdot \dfrac{1}{s\Gamma(s/2)}$

Notemos que hay dos posibles singularidades: en $s=1$ y $s=0$ (pues ξ es entera y $\frac{1}{\Gamma}$ es entera)

1) en $s=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} = 0 \therefore \lim_{s\to 0} \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{\Gamma(s/2)}$ existe

2) $s=1$ no se puede evitar

$\Rightarrow \xi(z)$ se extiende a todo $\mathbb{C}$ con excepción de $s=1$

y $Re(\xi, 1) = \lim_{s\to 1} (s-1) \frac{\pi^{s/2}}{s-1} \cdot \frac{1}{s\,\Gamma(s/2)} \cdot \xi(s)$

$$= \pi^{1/2} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \xi(1) = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 = 1.$$

3) Por último tenemos que

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$
$$= \xi(1-s)$$
$$= (1-s)(1-s-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

$$\Rightarrow \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Teorema.- La función zeta se anula en $s=-2k$, $k\in\mathbb{N}$ llamados los ceros triviales.

Dem.- Ya sabemos que $\forall s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{s-1}\frac{1}{s\,\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Sea $k\in\mathbb{N}$ entonces

$$\zeta(-2k) = \frac{\pi^{-k}}{-2k-1}\cdot\frac{1}{-2k\,\Gamma(-k)}\xi(-2k) = \frac{\pi^{-k}}{-2k-1}\frac{1}{-2k}\cdot\xi(-2k)\cdot\underbrace{\frac{1}{\Gamma(-k)}}_{0\ \forall k\in\mathbb{N}}$$

$\Rightarrow \zeta(-2k) = 0$

Def.- Definimos la franja crítica de la función zeta de Riemann como

$$\mathcal{J} = \{ s\in\mathbb{C} \mid 0 \le Re(s) \le 1 \}$$

Def.- Los ceros no triviales de la función son los que no son los triviales

Teorema: Sea s cero no trivial de ξ entonces $s \in \mathcal{Z}$ y más aún $\xi(s) = 0$.

Dem: Sea $s \in \mathbb{C}$ cero no trivial

$\Rightarrow Re(s) \leq 1$ (pues en $\mathbb{C}_{+1}$ no se anula ξ)

Ahora como $\xi(s) = 0 = \xi(1-s)$ - *
$\Rightarrow 1-s$ es un cero

$\Rightarrow Re(1-s) \leq 1 \Rightarrow 1-Re(s) \leq 1 \Rightarrow Re(s) \geq 0$

$\therefore 0 \leq Re(s) \leq 1$ $\quad$ *(esto es pues si $\xi(s) = 0$ $\Rightarrow \frac{\pi^{s-1}}{s-1} \frac{1}{s\Gamma(s/2)} \xi(s) = 0 \Rightarrow \xi(s) = 0$) ∎

Corolario: Los ceros no triviales de la función Zeta están simétricamente distribuidos respecto a las rectas

$L_1 := \{ s \in \mathbb{C} \mid Im(s) = 0 \}$

$L_2 := \{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) = \frac{1}{2} \}$

Dem: Sea $s \in \mathcal{Z}$ cero no trivial

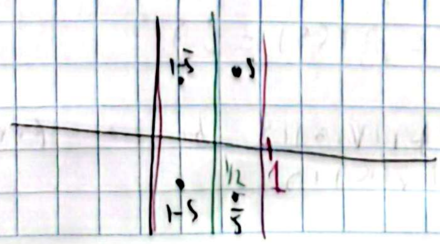
$\Rightarrow \xi(s) = 0 = \xi(1-s) \Rightarrow 1-s$ es cero

y además $\overline{\xi(s)} = 0 = \xi(\bar{s}) \Rightarrow \bar{s}$ es cero

y como $\overline{\xi(1-s)} = 0 = \xi(1-\bar{s}) \Rightarrow 1-\bar{s}$ es cero

que son todas las simetrías ∎

Obs: si $s \in \mathcal{Z}$ es cero entonces $1-s, \bar{s}, 1-\bar{s}$ son ceros.



Ayudantía

Obs.- Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, ent.

$$|\hat{f}(\gamma)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \gamma t}\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \underset{\text{pues } f \in L^1}{<} \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\gamma)| < \infty \Rightarrow \|\hat{f}\|_{\infty} < \infty$$

Teorema.- Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $f' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{f'}(\gamma) = 2\pi i \gamma\, \hat{f}(\gamma)$$

Dem.- Tenemos

$$\widehat{f'}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-2\pi i \gamma t}\, dt = e^{-2\pi i \gamma t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-2\pi i \gamma)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \gamma t}\, dt$$

$$= 0 + 2\pi i \gamma\, \hat{f}(\gamma)$$

Corolario.- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{f^{(n)}}(\gamma) = (2\pi i \gamma)^n\, \hat{f}(\gamma)$$

Lema.- Sea $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

$$\left|\frac{e^{-2\pi i x y} - 1}{y}\right| \leq 2\pi |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dem.- Tenemos que

$$\left|\frac{e^{-2\pi i x y} - 1}{y}\right| \leq \left|\frac{1 + \frac{(-2\pi i x y)}{1!} - 1}{y}\right| = 2\pi |x|$$

Teorema.- Sea $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dr}\hat{f}(r) = \widehat{(-2\pi i x f)}(r) = -2\pi i\, \widehat{(xf)}(x)$$

Dem.- Tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(r+h)-\hat{f}(r)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi i (r+h)t}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi i r t}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi i r t}\cdot\frac{e^{-2\pi i h t}-1}{h}\,dt$$

Ahora por el lema $\left|\frac{e^{-2\pi i h t}-1}{h}\right| \leq 2\pi|t|$

$$\Rightarrow \left|f(t)\,e^{-2\pi i r t}\cdot\frac{e^{-2\pi i h t}-1}{h}\right| \leq 2\pi\,|f(t)\,t|$$

$\Rightarrow$ por el teo de convergencia dominada

$$* = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0} f(t)\,e^{-2\pi i r t}\cdot\frac{e^{-2\pi i h t}-1}{h}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(-2\pi i t)\,e^{-2\pi i r t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}[-2\pi i t f(t)]\,e^{-2\pi i r t}$$

$$= \widehat{(-2\pi i x f)}(x).$$

Corolario.- Si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}^{(m)}(r) = (-2\pi i)^m\,\widehat{(x$

Teorema.- Sea $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Dem.- Basta probar que $\sup_{r\in\mathbb{R}} |r^p \hat{f}^{(m)}(r)| < \infty$

Sea $g(x) = (-2\pi i x)^m f'(x)$

$\Rightarrow g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ y además $\hat{g}(r) = \hat{f}(r)^m$

Ahora sea $h(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p}\, g^{(p)}(x)$

$\Rightarrow h \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ y $\sup_{r\in\mathbb{R}} |\hat{h}(r)| < \infty$

Escaneado con CamScanner

pero $\hat{h}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \widehat{g^{(p)}}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \cdot (-2\pi i x)^p \hat{g}(r) = r^p \hat{f}^{(n)}(r)$

Recordatorio: En $Q\,\&\,L_5$

- $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \frac{\pi^{s/2}}{s\Gamma(s/2)} \xi(s)$

- $\xi(s) = 1 + s(s-1) \int_1^\infty (x^{s/2+1} + x^{-\frac{1+s}{2}}) w(x)\,dx$

$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s\Gamma(s/2)} = \frac{1}{2} e^{\gamma s/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{s}{2n}) e^{-s/2n}$

- ¿ $\zeta(0)$?

$\zeta(0) = (-1)\, G(0)\, \xi(0) = -G(0) = -\frac{1}{2}$

- ¿ $\zeta(-1)$?

En este caso $\xi(-1)$ nos dará problemas, para ello recordemos la ec. funcional

$$\pi^{-s/2}\, \Gamma(s/2)\, \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\, \Gamma(\tfrac{1-s}{2})\, \zeta(1-s)$$

$\Rightarrow \quad s = -1$

$\Rightarrow \quad \pi^{1/2}\, \Gamma(-\tfrac{1}{2})\, \zeta(-1) = \pi^{-1}\, \Gamma(1)\, \zeta(2)$

$\Rightarrow \quad \zeta(-1) = \frac{\pi^{-1}}{\pi^{+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \Gamma(1) \frac{\pi^2}{6}$

$= \pi^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{-2\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot 0! \cdot \frac{\pi^2}{6}$

$\Rightarrow$ ~~$\zeta(-1) = \sqrt{\pi}\, \frac{1}{-2\sqrt{\pi}} \frac{\pi^2}{6}$~~

$\Rightarrow \quad \zeta(-1) = \pi^{-3/2} \frac{1}{-2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$

Def.- Sea $f \in H(\mathbb{C})$, decimos que tiene orden finito si existe:

1) $r_0 > 0$
2) $R_0 > 0$ (que depende de r_0) tales que

$$\max_{|s|=R} \{|f(s)|\} < e^{R^{r_0}} \quad , \forall R > R_0 \quad \ldots (1)$$

y denotamos su orden como

$$ord(f) = \inf\{r_0 > 0 \mid \text{cumple } (1)\}$$

Lema 1.- Sea $f \in H(\mathbb{C})$ y sean $\varepsilon \in (0,1)$, $\{R_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ t.q.

1) $R_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$
2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\max_{|s|=R_k} \{Re(f(s))\} \leq R_k^{1+\varepsilon}$

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{C}$ t.q. $f(s) = a + bs$

Dem.-

Como $f \in H(\mathbb{C})$ entonces existen $\{c_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ t.q.

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^m \quad , \forall s \in \mathbb{C}$$

Consideramos la función $g(s) = f(s) - c_0 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m s^m$

[illegible] afirmamos $\forall s \in \mathbb{C}$ que

$Re(g(s)) = Re(f(s)) - Re(c_0) \leq Re(f(s)) + |c_0|$

$\Rightarrow$ Ahora sea $\varepsilon \in (0,1)$ fijo y $K \in \mathbb{N}$ fijo

$\Rightarrow \max_{|s|=R_k} \{Re(g(s))\} \underset{\text{Hip}}{\leq} R_k^{1+\varepsilon} + |c_0| \quad \ldots (1)$

Hagamos $a_m = Re(c_m)$ y $b_m = Im(c_m)$, entonces

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + i b_m) s^m$$

Sea $s \in \mathbb{C}$ tal $|s| = R_k$ fijo. Sabemos que $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal $s = R_k e^{i\theta}$.

Ahora sustituyendo

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + i b_m) R_k^m e^{i\theta m} = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + i b_m) [\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(m\theta) - b_m \sin(m\theta)) + i(b_m \cos(m\theta) + a_m \sin(m\theta)) R_k^m$$

$$\therefore \; Re(g(s)) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\theta) - b_m \sin(m\theta)) R_k^m$$

1) $\int_{-\pi}^{\pi} Re(g(s)) \, d\theta = 0$

2) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo

$\Rightarrow$ • $\int_{-\pi}^{\pi} Re(g(s)) \cos(n\theta) \, d\theta = \pi a_n R_k^n$

• $\int_{-\pi}^{\pi} Re(g(s)) \sin(n\theta) \, d\theta = -\pi b_n R_k^n$

3) De lo anterior

$$\pi R_k^n (|a_n| + |b_n|) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |Re(g(s))| \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |Re(g(s))| \, d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} |Re(g(s))| \, d\theta \underset{1)}{=} 2\int_{-\pi}^{\pi} |Re(g(s))| + Re(g(s)) \, d\theta$$

$$\leq 2\int_{-\pi}^{\pi} \max_{|s|=R_k} \{|Re(g(s))| + Re(g(s))\} \, d\theta$$

$$\leq 4\int_{-\pi}^{\pi} \max_{|s|=R_k} \{Re(g(s))\} \, d\theta \leq 8\pi \max_{|s|=R_k} \{Re(g(s))\}$$

si $Re(s) \geq 0$

$$\leq 8\pi (R_k^{1+\varepsilon} + |c_0|)$$

$\therefore \ \pi R_k^n (|a_n| + |b_n|) \leq 8\pi [R_k^{1+\varepsilon} + |c_0|]$

$\Rightarrow |a_n| + |b_n| \leq 8 [R_k^{1+\varepsilon-n} + |c_0| R_k^{-n}]$

Obs: Si $n \geq 2 \Rightarrow -n \leq -2$ y $1+\varepsilon-n < 0$

$\Rightarrow$ Si $n \geq 2$ fijo $\Rightarrow |a_n| + |b_n| < 8 (R_k^{1+\varepsilon-n} + |c_0| R_k^{-n})$

$\to 0$ cuando $k \to \infty$

$\therefore \ \forall n \geq 2 \quad a_n = b_n = 0$

$\Rightarrow \forall n \geq 2 \ c_n = 0 \quad \Rightarrow f(z) = c_0 + c_1 z$

Ayudante

Notación: $\max\limits_{|z|=R} |f(z)| = M_f(R)$

Obs: Si $p = ord(f) \to$ para p no necesariamente existe R_p t.q $M_f(R) < e^{R^p} \ \forall R > R_p$

pero si tendremos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_\varepsilon$ t.q

$$M_f(R) < e^{R^{p+\varepsilon}} \quad \forall R > R_\varepsilon$$

Obs: Como $ord(f) = p$ es el ínfimo podemos encontrar $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números positivos tales que $R_n \to \infty$, de modo que

$$M_f(R_n) \geq e^{R_n^{p-\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Solo si $f \not\equiv 0$.

$\Rightarrow$ ~~log(log M_f(R~~

Obs: De las dos obs. anteriores tenemos tomando logaritmo que

- $\dfrac{\log(\log M_f(R))}{\log(R)} < \rho + \varepsilon \quad \forall R > R_\varepsilon$

- $\dfrac{\log(\log M_f(R_n))}{\log(R_n)} \geq \rho - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \limsup_{R\to\infty} \dfrac{\log(\log(M_f(R)))}{\log(R)} = \rho = \text{ord}(f)$

Teorema.- Sean $f, g \in H(\mathbb{C})$ t.q $\text{ord}(f), \text{ord}(g) \leq \rho$ entonces $\text{ord}(f+g), \text{ord}(f\cdot g) \leq \rho$

Dem.- por las obs. anteriores sabemos que (ya que $\text{ord} f, \text{ord} g \leq \rho$) si $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists R_\varepsilon > 0$ t.q

~~$M_f(R)$~~ • $M_f(R) < e^{R^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} \quad \forall R > R_\varepsilon$

• $M_g(R) < e^{R^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} \quad \forall R > R_\varepsilon$

Luego

$M_{f+g}(R) \leq M_f(R) + M_g(R) < 2 e^{R^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}$

$M_{f\cdot g}(R) \leq M_f(R)\cdot M_g(R) < e^{2R^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}$

Ahora, tenemos que

$\lim_{R\to\infty} \dfrac{c\cdot e^{kR^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}}{e^{R^{\rho+\varepsilon}}} = 0 \quad \forall c > 0 \quad \forall k > 0.$

$\Rightarrow \exists R_0 > 0$ t.q $c\cdot e^{kR^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} < e^{R^{\rho+\varepsilon}} \quad \forall R > R_0$

$\Rightarrow$ para $R > \max\{R_0, R_\varepsilon\}$ se tiene que

$M_{f+g}(R) < e^{R^{\rho+\varepsilon}}$ y $M_{f\cdot g}(R) < e^{R^{\rho+\varepsilon}}$

$\Rightarrow \text{ord}(f+g), \text{ord}(f\cdot g) \leq \rho$ ∎

Corolario.- Sean f y g enteras de orden ρ_1 y ρ_2 t.q. $\rho_1 < \rho_2$, entonces $ord(f+g) = \rho_2$

Dem.- Por el teo. anterior $ord(f+g) \leq max(\rho_1, \rho_2) = \rho_2$

P.D. $ord(f+g) = \rho_2$

Sup. que $ord(f+g) < \rho_2$.

Por el teo. anterior $ord((f+g)-f) \leq max\{\rho_1, ord(f+g)\} < \rho_2$

$\Rightarrow ord(g) < \rho_2$! pues por hip. $ord(g) = \rho_2$

$\therefore ord(f+g) = \rho_2$.

• Ejemplos:

• La función $f(z) = e^z$ tiene orden 1

Dem.-

Tenemos que $M_f(R) = \max_{|z|=R} |e^z| = \max_{|z|=R} e^{Re(z)} = e^R$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad M_f(R) = e^R < e^{R^{1+\varepsilon}}$.

$\therefore ord(f) = 1$.

• La función $f(z) = e^{z^k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ tiene orden k

Dem.-

Tenemos $M_f(R) = \max_{|z|=R} e^{Re(z^k)} = \max_{|z|=R} e^{|z|^k \cos(\theta)} = e^{R^k}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad e^{R^k} < e^{R^{k+\varepsilon}}$

$\Rightarrow ord(f) = k$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f(z) = z^n$, ent. $ord(f) = 0$

Dem =

$$M_f(R) = \max_{|z|=R} |z^n| = \max_{|z|=R} |z|^n = \max_{|z|=R} R^n = R^n$$

y $R^n < e^{R^\varepsilon}$ $\forall R > R_\varepsilon$ y $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow R^n < e^{R^{0+\varepsilon}}$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow ord(z^n) = 0$

Por lo anterior si $p(z) \in \mathbb{C}[X]$ ent.

~~$ord(p(z)) \leq \max_{0 \leq r \leq n} ord(z^r)$~~

$$ord(p(z)) \leq \max_{1 \leq r \leq n} ord(a_r z^r) = 0$$

$\therefore$ todo polinomio tiene orden cero.

Sea $f(z) = \sin(z)$, $\Rightarrow ord(f) = 1$

Dem = ~~Sea~~ tenemos

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz}$$

$$\Rightarrow M_f(R) = \max_{|z|=R} |\sin(z)|$$

y $|\sin(z)| \leq \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2}$, $z = x + iy$

$$\Rightarrow M_f(R) = \frac{e^{-R} + e^{R}}{2} \leq \frac{e^{*R} + 1}{2} < e^{R^{1+\varepsilon}} \quad \forall R > R_\varepsilon$$

$\Rightarrow ord(\sin(z)) = 1$

Escaneado con CamScanner

Obs.: $\operatorname{ord}(\cos) = \operatorname{ord}(\sinh) = \operatorname{ord}(\cosh) = 1$

Sea $f(z) = e^{e^z}$, f tiene orden infinito

Dem.: $|e^{e^z}| \leq e^{Re(e^z)} < e^{e^R}$ y no existe $R_0 > 0$ t.q. $\forall R > R_0$ $e^{e^R} < e^{R^k}$ $\forall k > 0$

pues $e^R > R^k$ a partir de un momento.

Teorema.- Si $p(z)$ es un polinomio de grado n, entonces $f(z) = e^{p(z)}$ tiene orden n.

Dem.- Sea $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$.

$\Rightarrow M_f(R) = \max\limits_{|z|=R} |e^{p(z)}| = \max e^{Re(p(z))}$

$= \max\limits_{|z|=R} e^{\sum_{k=0}^{n} \sigma_k R^k \cos(\alpha_k + k\theta)}$

donde $a_k = \sigma_k e^{i\alpha_k}$ y $z = Re^{i\theta}$

$\Rightarrow M_f(R)$

Lema 2.- Sea $f \in H(\mathbb{C})$ t.q. $\operatorname{ord}(f)=1$ y sea $N(R)$ la cantidad de sus ceros (contando multiplicidad) en $D(R,0)$, entonces $\forall \varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon>0$ t.q. $N(R)<C\cdot R^{1+\varepsilon}$

Dem.- SPG puedo suponer que $f(0)\neq 0$.

Sea $\varepsilon>0$, por def. de orden sabemos que $\exists R_0>0, r_0$ t.q. $r_0<1+\varepsilon$ y

$$\max_{|s|=\rho} |f(s)| < e^{\rho^{r_0}} \quad \forall \rho > R_0 \quad (\text{luego } r_0 \text{ es el ínfimo})$$

Sup SPG que $R_0>1$ suficientemente grande.

Sea $R>0$ fijo y denotamos $N:=N(R)$, definimos

$$F(s)=f(s)\prod_{h=1}^{N}\frac{1}{s-s_h}$$

donde s_n son los ceros de f ordenados por $0\leq |s_1|\leq|s_2|\leq\cdots$

Claramente F es función entera

Sea $s\in\mathbb{C}$ fijo t.q. $|s|=KR$ (con $K\in\mathbb{R}^+$), hacemos lo sig.

$$|s-s_h|\geq |s|-|s_h|\geq KR-R=(K-1)R$$

Ahora pidamos $M:=K-1$ ~~???~~ t.q. $MR>R_0$

$$\cancel{|F(s)|\leq\prod_{h=1}^{N}\frac{|f(s)|}{|s-s_h|}=\frac{|f(s)|}{M^N R^N}}$$

$$|F(s)|\leq|f(s)|\frac{1}{M^N R^N}$$

$$\Rightarrow \max_{|s|=MR}|F(s)|\leq\frac{\max_{|s|=MR}|f(s)|}{M^N R^N}<\frac{e^{(MR)^{r_0}}}{M^N R^N}$$

$$<\frac{e^{(MR)^{1+\varepsilon}}}{M^N R^N}$$

Obs: por el principio del modulo maximo

$$|F(0)|\leq\max_{|s|=MR}|F(s)|$$

$$\Rightarrow \quad |F(0)| < \frac{e^{(MR)^{1+\varepsilon}}}{M^N R^N}$$

$$\Rightarrow \quad |f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{|s_n|} < \frac{e^{(MR)^{1+\varepsilon}}}{M^N R^N}$$

$$y \quad |f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{|s_n|} \geq \frac{|f(0)|}{R^N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|f(0)|}{R^N} < \frac{e^{(MR)^{1+\varepsilon}}}{M^N R^N}$$

$$\Rightarrow \quad |f(0)| < \frac{e^{(MR)^{1+\varepsilon}}}{M^N} \Rightarrow M^N < \frac{e^{(MR)^{1+\varepsilon}}}{|f(0)|}$$

~~$\Rightarrow N \log |f(0)|$~~

$$\Rightarrow \quad N \log(M) < (MR)^{1+\varepsilon} - \log|f(0)|$$

esto tiene sentido pues podemos M muy grande

$$\Rightarrow \quad N \log M < C_1 (MR)^{1+\varepsilon}$$

$$\therefore \quad N < \frac{C_1 M^{1+\varepsilon}}{\log M} \cdot R^{1+\varepsilon} \quad y \text{ con } C = \frac{C_1 M^{1+\varepsilon}}{\log M}$$

terminamos

Corolario.- Sea $f \in H(\mathbb{C})$ con $f(0) \neq 0$ y sus ceros ordenados como $0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \cdots$ entonces $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon}} < \infty$$

Dem.- ~~por el teo. anterior sabemos que~~ Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall R > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0$ t.q. $N(R) < C R^{1+\varepsilon}$, así tenemos

$$n < C |s_n|^{1+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad n^{\frac{1}{1+\varepsilon/2}} < C^{\frac{1}{1+\varepsilon/2}} |s_n|$$

$\Rightarrow n^{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}} < C^{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}} |s_n|^{1+\varepsilon}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon}} < C^{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}}} < \infty$ pues $1+\frac{\varepsilon}{2} < 1+\varepsilon$

Teorema.- Sea $\{s_n\} \subseteq \mathbb{C}$ y $\{r_n\} \subseteq \mathbb{N}$ t.q

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n \neq 0$

ii) $|s_n| \to \infty$, $n \to \infty$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|s_n|}\right)^{r_n+1} < \infty \quad \forall r > 0$

entonces $p(s) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{r_n}(s/s_n)$ cumple que $p \in H(\mathbb{C})$ y $\{s_n\}$ son sus únicos ceros, donde

$$E_0(s) = 1-s \qquad E_n(s) = (1-s)\, e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}}$$

Teorema (Hadamard, $ord(f)=1$) Sea $f \in H(\mathbb{C})$ con $ord(f)=1$, ordenamos sus ceros no nulos $0<|s_1| \leq |s_2| \leq \cdots$

$\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{C}$ t.q

$$f(s) = s^k e^{a+bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s}{s_n}\right) e^{s/s_n}$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$ es el orden del cero en cero

Dem.- Sabemos que $f(s) = s^k g(s)$ donde $g \in H(\mathbb{C})$ t.q $g(0) \neq 0$.

Sea $p(s) = s^k \Rightarrow ord(p \cdot g) = ord(g)$

$\therefore$ SPG sup que f no se anula en 0

P.D. $f(s) = e^{a+bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) e^{s/s_n}$

Por un corolario tenemos que $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon}} < \infty$$

Sea $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = 1$, entonces $\forall r > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|s_n|}\right)^2 = r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^2} < \infty$$

∴ tenemos las hip. del teo. recordatorio

⇒ dada $p(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/s_n)\, e^{s/s_n}$

cumple que $p \in H(\mathbb{C})$ y sus únicos ceros son $\{s_n\}$

Sea entonces $F(s) = f(s)/p(s)$ es t.q. $F \in H(\mathbb{C})$

t.q. F nunca se anula ⇒ $\exists\, h \in H(\mathbb{C})$ t.q.

$$F(s) = \frac{f(s)}{p(s)} = e^{h(s)}$$

$$\therefore\ f(s) = e^{h(s)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/s_n)\, e^{s/s_n}$$

P.D. h es un polinomio de a lo más grado 1.

Para esto necesitaremos el Lema 1. Vamos a ello...

Consideremos los sig. intervalos:

$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = \left(|s_n| - \frac{1}{|s_n|^2},\ |s_n| + \frac{1}{|s_n|^2}\right)$

Sea $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|s_n|^2} < \infty$$

⇒ I no cubre a ningún intervalo de la forma (c, ∞), $c \in \mathbb{R}^+$. Entonces podemos crear una sucesión $\{R_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$ t.q. (pues hay infinitos huecos)

1) $R_k \to \infty$, cuando $k \to \infty$

2) $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $\big||s_n| - R_k\big| > \frac{1}{|s_n|^2}$ (esto me dice que $R_k \notin I$)

Ahora sea $\varepsilon \in (0,1)$ fijo

Como $\operatorname{ord}(f) = 1$ tenemos que $\exists\, R_\varepsilon > 1$ t.q.

$$\max_{|s|=R} |f(s)| < e^{R^{1+\varepsilon/10}} \quad \forall R > R_\varepsilon$$

Sea $R_k > R_\varepsilon$ (que puedo hallarlo pues $R_k \to \infty$) fijo y llamemos $R := R_k$. Definimos los sig. conjuntos:

$N_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid |s_n| < \frac{R}{2} \}$ y $N_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid R/2 \leq |s_n| \leq 2R \}$

y $N_3 = \{ n \in \mathbb{N} \mid |s_n| > 2R \}$

sea para $i \in \{1,2,3\}$

$$p_i(s) = \prod_{n \in N_i} (1 - \frac{s}{s_n}) e^{s/s_n}$$

(obs: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = p$)

Claramente $p(s) = p_1(s) p_2(s) p_3(s)$

obs: sea $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |e^z| = e^{Re(z)} \geq e^{-|z|}$

objetivo: queremos que $\forall i \in \{1,2,3\}$ $\exists C_i(\varepsilon) \geq 0$ t.q $\forall s \in \mathbb{C}$, con $|s| = R$

$$|p_i(s)| \geq e^{-C_i R^{1+\varepsilon/10}}$$

1) Sea $n \in N_1$; $s \in \mathbb{C}$, $|s| = R$

$\Rightarrow |s_n| < \frac{R}{2}$

por otro lado $|1 - s/s_n| \geq |s/s_n| - 1 = \frac{R}{|s_n|} - 1 \geq 2 - 1 = 1$

entonces:

$$|p_1(s)| = \prod_{n \in N_1} |1 - \frac{s}{s_n}| |e^{s/s_n}| \underset{obs}{\geq} \prod_{n \in N_1} 1 \cdot e^{-|s/s_n|} = \prod_{n \in N_1} e^{-R/|s_n|}$$

$$\geq \prod_{n \in N_1} e^{-(\frac{R}{|s_n|})^{1+\varepsilon/10}}$$

$$= e^{-\sum_{n \in N_1} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon/10}} \cdot R^{1+\varepsilon/10}} = e^{-C_1 R^{1+\varepsilon/10}}$$

$C_1 = \sum_{n \in N_1} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon/10}}$

2) Sea $n \in N_2$, $s \in \mathbb{C}$, $|s| = R$

$\Rightarrow \frac{R}{2} \leq |s_n| \leq 2R$

•) $\frac{R}{2} \leq |s_n| \Rightarrow \frac{R}{|s_n|} \leq 2 \Rightarrow -\frac{R}{|s_n|} \geq -2 \Rightarrow -\frac{|s|}{|s_n|} \geq -2$

••) $|1 - \frac{s}{s_n}| = |\frac{s_n - s}{s_n}| \geq \frac{||s_n| - |s||}{|s_n|} = \frac{||s_n| - R|}{|s_n|}$

pero tenemos que $||s_n| - |R|| \geq \frac{1}{|s_n|^2}$

$\Rightarrow |1 - \frac{s}{s_n}| \geq \frac{1}{|s_n|} \cdot \frac{1}{|s_n|^2} = \frac{1}{|s_n|^3} \geq \frac{1}{8R^3}$

8) Sea $N(2R)$ el numero de ceros en $D(2R, 0)$ entonces por el lema 2 existe $K_\varepsilon > 0$ t.q.

$$N(2R) < K_\varepsilon (2R)^{1+\frac{\varepsilon}{20}}$$

$$= K_1 R^{1+\frac{\varepsilon}{20}}$$

Es claro que $|N_2| < N(2R) < K_1 R^{1+\varepsilon/20}$

Así $|P_2(s)| = \prod_{n \in N_2} \left|1 - \frac{s}{s_n}\right| |e^{s/s_n}| \geq \prod_{n \in N_2} \frac{1}{8R^3} e^{-\frac{|s|}{|s_n|}}$ $\left(-\frac{|s|}{|s_n|} > -2\right)$

$$\geq \prod_{n \in N_2} \frac{1}{8R^3} \cdot \frac{1}{e^2} = \left(\frac{1}{8R^3 e^2}\right)^{|N_2|} = (8R^3 e^2)^{-|N_2|}$$

Sea $c = \frac{1}{8e^2} \Rightarrow |P_2(s)| \geq (cR^{-3})^{|N_2|} = e^{|N_2| \log(cR^{-3})}$

pero notemos que $\log(cR^{-3}) \leq 0$

$$\Rightarrow |N_2| \log(cR^{-3}) > \log(cR^{-3}) K_1 R^{1+\frac{\varepsilon}{20}}$$

$$\Rightarrow |P_2(s)| \geq (cR^{-3})^{K_1 R^{1+\frac{\varepsilon}{20}}}$$

$$= e^{K_1 R^{1+\frac{\varepsilon}{20}} \log(cR^{-3})}$$

$$= e^{K R^{1+\frac{\varepsilon}{20}} [\log(c) - 3\log(R)]}$$

$$= e^{-K_1 R^{1+\frac{\varepsilon}{20}} [\log(c^{-1}) + 3\log(R)]}$$

y notemos que $\log(c^{-1}) + 3\log(R) \leq K_2 \log(R)$

$\leq K_3 R^{\varepsilon/20}$ p.a $K_3 > 0$

$$\Rightarrow |P_2(s)| \geq e^{-K_4 R^{1+\frac{\varepsilon}{20}} \cdot R^{\varepsilon/20}}$$

$$= e^{-K_4 R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}} = e^{-K_2 R^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

llamamos $K_4 = c_2$.

g) Sea $n \in N_3$, $s \in \mathbb{C}$ t.q. $|s| = R$

En este caso sabemos que $|s_n| > 2R \Rightarrow \frac{|s|}{|s_n|} = \frac{R}{|s_n|} < \frac{1}{2}$

Ahora

$$P_3(s) = \prod_{n \in N_3} \left(1 - \frac{s}{|s_n|}\right) e^{s/s_n} = \prod_{n \in N_3} e^{\log\left(1 - \frac{s}{s_n}\right) + s/s_n}$$

$$\Rightarrow |P_3(s)| \geq \prod_{n \in N_3} e^{-\left|\log(1 - s/s_n) + s/s_n\right|}$$

como $|s/s_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow \log\left(1 - \frac{s}{s_n}\right) = \cancel{0} - \frac{s}{s_n} + O\left(\left|\frac{s}{s_n}\right|^2\right)$

$\Rightarrow \exists\, m > 0$ t.q. $\left|\log\left(1 - \frac{s}{s_n}\right) + s/s_n\right| < m \left|\frac{s}{s_n}\right|^2$

$$\Rightarrow |P_3(s)| \geq \prod_{n \in N_3} e^{-m\left|\frac{s}{s_n}\right|^2}$$

$$\geq \prod_{n \in N_3} e^{-m\, |s/s_n|^{1+\frac{\varepsilon}{10}}}$$

$$= e^{-m \sum_{n \in N_3} \left(\frac{R}{|s_n|}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{10}}}$$

$$= e^{-m R^{1+\frac{\varepsilon}{10}} \sum_{n \in N_3} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon/10}}}$$ } converge por un corolario

$$\Rightarrow |P_3(s)| \geq e^{-c_3 R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}}$$

~~$\therefore |P(s)| \geq e^{-c_1 R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}}$~~

$$\therefore |P(s)| = |P_1(s)|\,|P_2(s)|\,|P_3(s)| \geq e^{-(c_1 + c_2 + c_3) R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}} = e^{-c R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}}$$

Finalmente recordamos que $f(s) = e^{h(s)} P(s)$.

Ahora $\left|e^{h(s)}\right| = e^{Re(h(s))} \leq |f(s)|\, e^{c R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}}$

$$\leq e^{R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}} e^{c R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}} = e^{(1+c) R^{1+\frac{\varepsilon}{10}}} = e^{(1+c) R^{-\varepsilon\frac{9}{10}} \cdot R^{1+\varepsilon}}$$

$$\therefore e^{Re\, h(s)} < e^{(1+c) R^{-\varepsilon\frac{9}{10}} \cdot R^{1+\varepsilon}}$$

Y notamos que $R^{-\varepsilon\frac{9}{10}} \to 0$
$R \to \infty$

entonces para $R := R_k > R_0$ suficientemente grande

$$R^{-\varepsilon\frac{9}{10}} < \frac{1}{C+1}$$

$\Rightarrow$ tomando dichos R_k's tenemos que

$$e^{\operatorname{Re} h(s)} < e^{R^{1+\varepsilon}}$$

$\therefore$ $\operatorname{Re} h(s) < R^{1+\varepsilon}$ para R suficientemente grande

$\Rightarrow$ $\therefore$ por el lema 1, h es un polinomio de grado 1. $\therefore$ $h(s) = a + bs$, $a, b \in \mathbb{C}$

Recordemos:

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$
$$= 1 + s(s-1)\int_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) w(x)\,dx$$

donde $w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$, $x > 0$.

- ξ es entera
- $\xi(s) = \xi(1-s)$
- $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$
- $\xi(s)$ contiene a los ceros no triviales de la función zeta. (sí es que hay)

Objetivo: ver que $\operatorname{ord}(\xi) = 1$.

Lema.- Sea $x > 1$, entonces

$$w(x) < e^{-x}$$

Dem.- Sea $x>1$.

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = e^{-\pi x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)x}$$
$$= e^{-\pi x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n+1)(n-1)x}$$
$$= e^{-\pi x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi(n+2)n x}$$

además $1 < n+2 \Rightarrow -1 > -(n+2) \Rightarrow -\pi n x \geq -\pi n(n+2)x$

$$\Rightarrow w(x) \leq e^{-\pi x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n x} = e^{-\pi x}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi x}}$$

Ahora $e^{\pi x} > \pi x > \pi > 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} > e^{-\pi x} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -e^{-\pi x} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-e^{-\pi x}} < 2 \quad \therefore \ w(x) < 2e^{-\pi x} < e^{-x}$$

Proposición: Existe $c>0$ y $R_0>0$ t.q

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| < e^{cR\log R} \quad \forall R>R_0$$

Dem: Sea $s \in \mathbb{C}$, $\sigma = Re(s)$, $t = Im(s)$ t.q

$R = |s| > R_0 = 100$

1) $|s(s-1)| = |s^2 - s| \leq R^2 + R < 2R^2$

2) Es claro que $|\sigma| \leq R \Rightarrow -\sigma, \sigma \leq R$

i) $\sigma \leq R \Rightarrow \frac{\sigma}{2} \leq \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{\sigma}{2} - 1 \leq \frac{R}{2} - 1 \leq \frac{R}{2} < R$

ii) $-\sigma \leq R \Rightarrow -\frac{\sigma}{2} \leq \frac{R}{2} \Rightarrow -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{R}{2} - \frac{1}{2} < \frac{R}{2} < R$

Notemos que $(x \geq 1)$ $\left| x^{s/2-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} \right|$

$$\leq |x^{s/2-1}| + |x^{-\frac{1+s}{2}}| = x^{Re(\frac{s}{2}-1)} + x^{Re(-\frac{1+s}{2})}$$

$$= x^{\frac{\sigma}{2}-1} + x^{-\frac{1+\sigma}{2}} < 2x^R$$

Así

$$|\xi(s)| < 1 + 2R^2 \int_1^\infty 2x^R e^{-x}\,dx \quad \text{(usando 1) y 2) anterior)}$$

$$= 1 + 4R^2 \int_1^\infty x^R e^{-x}\,dx$$

$$< 1 + 4R^2 \int_1^\infty x^{\lfloor R\rfloor + 1} e^{-x}\,dx$$

$$= 1 + 4R^2\, \Gamma(\lfloor R\rfloor + 2)$$

$$= 1 + 4R^2 (\lfloor R\rfloor + 1)!$$

$$< 1 + 4R^2 (\lfloor R\rfloor + 1)^{\lfloor R\rfloor + 1}$$

$$= 1 + (2R)^2 (\lfloor R\rfloor + 1)^{\lfloor R\rfloor + 1}$$

$$= 1 + e^{2\log(2R)} e^{(\lfloor R \rfloor+1)\log(\lfloor R \rfloor+1)}$$

$$< 1 + e^{c_1 \log(R)} e^{c_2 R \log(R)} < e^{CR\log(R)}$$

$$\therefore \max_{|s|=R} |\xi(s)| \leq e^{CR\log(R)} \quad \forall R > R_0$$

Proposición.- Existe $C > 0$ tal para $k \in \mathbb{Z}_+$, $k > 1$

$$\xi(2k+2) \geq e^{k\log k - Ck}$$

Dem.- Sea $k \geq 100$

Tenemos que $\xi(2k+2) = (2k+2)(2k+1)\pi^{-k-1}\Gamma(k+1)\zeta(2k+2)$

Afi.- $2k+2 > k$, $2k+1 > k$, $\zeta(2k+2) > 1$.

$$\therefore \xi(2k+2) \geq \frac{k^2 \cdot k!}{\pi^{k+1}} = e^{2\log(k) + \log(k!) - (k+1)\log(\pi)}$$

Obs) $\log k! = \sum_{n=1}^{k} \log n > \int_2^k \log x\,dx = [x\log x - x]_2^k$

$$\therefore \log k! > k\log k - k - 2\log(2) + 2$$

$$\Rightarrow \xi(2k+2) \geq e^{2\log(k) + k\log k - 2\log 2 + 2 - (k+1)\log(\pi)}$$

$$> e^{k\log k - k + 2 - (k+1)\log \pi}$$

$$= e^{k\log k - [1+\log \pi]k - \log \pi + 2}$$

$$> e^{k\log k - [1+\log\pi]k} > e^{k\log k - Ck}$$

$$\therefore \xi(2k+1) \geq e^{k\log k - Ck}$$

~~Def.~~

Obs.- Sup $f \in H(\mathbb{C})$ de orden 1, esto pasa si y solo si

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_0 \geq 0$ (depende de ε) t.q.

$$\max_{|s|=R} |f(s)| < e^{R^{1+\varepsilon}}, \forall R > R_0$$

(2) $\forall \varepsilon \in (0,1)$ no se cumple que $\exists R_0 > 0$ t.q.

$$\max_{|s|=R} |f(s)| \leq e^{R^{1-\varepsilon}}, \forall R > R_0$$

Teorema.- Se tiene que $\operatorname{ord}(\xi) = 1$.

Dem.-

1) Veamos que $\operatorname{ord}(\xi) \leq 1$

Por proposición $\exists c > 0$, $R_0 = 100$ t.q.

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| < e^{cR\log R}, \forall R > R_0$$

Sea $\varepsilon > 0$, notemos que para R suficientemente grande $R^{\varepsilon} > c \cdot \log R$

$$\Rightarrow \max_{|s|=R} |\xi(s)| < e^{R \cdot R^{\varepsilon}} = e^{R^{1+\varepsilon}} \quad \text{para } R >> 100, \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(\xi) \leq 1$

2) Veamos que $\operatorname{ord}(\xi) \geq 1$

Vimos que $\exists c > 0$ t.q. la sucesión $\{2k+2\}_{k=0}^{n}$ tiene la propiedad de que

$$\xi(2k+2) > e^{k\log k - c \cdot k} \quad \text{para } k >> 1$$

$$= e^{k(\log k - c)}$$

Sea $\varepsilon \in (0,1)$, notemos que lo sig.

- $\log(k) - c$ es creciente
- $k^{-\varepsilon}$ es decreciente y más aún $k^{-\varepsilon} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \exists k_0$ t.q $\forall k > k_0$ $\log(k) - c > k^{-\varepsilon}$

$\Rightarrow$ $\xi(2k+2) \geq e^{k \cdot k^{-\varepsilon}} = e^{k^{1-\varepsilon}}$ $\forall k > k_0$

$\Rightarrow$ $\operatorname{ord}(\xi) \geq 1$

$\therefore \operatorname{ord}(\xi) = 1$!

Teorema.- La función zeta tiene infinitos ceros no triviales

Dem.- Notemos que los ceros no triviales de ξ son los mismos que los ceros de ξ

~~Ahora sup. que son finitos y son $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$~~

Caso 1.- Sup. que no hay y como $\xi(0) = 1$

Del teo. de Hadamar (como $\operatorname{ord}(\xi)=1$)
$\Rightarrow$ $\xi(s) = e^{a+bs}$, $a, b \in \mathbb{C}$

Caso 2.- Sup. que hay finitos ceros, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$

$\Rightarrow$ (Teo. Hadamar) $\xi(s) = e^{a+bs} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}$, $a, b \in \mathbb{C}$

- Para el caso 1 tenemos que,

$$|\xi(s)| = e^{\operatorname{Re}(a+bs)} = e^{\operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(bs)} \leq e^{\operatorname{Re}(a) + |bs|} < e^{C_0 |s|}$$

- Del caso 2, sea $s \in \mathbb{C}$ t.q $|s| > 1$

$$|\xi(s)| < e^{C_0|s|} \prod_{n=1}^{N} \left|1 - \frac{s}{\rho_n}\right| e^{\operatorname{Re}(s/\rho_n)}$$
$$< e^{C_0|s|} e^{\sum_{n=1}^{N} |s/\rho_n|} \prod_{n=1}^{N} |1 - s/\rho_n|$$

$$= e^{c_1|s|}\, e^{\sum_{n=1}^{N}\log\left|1-\frac{s}{\rho_n}\right|} < e^{c_1|s|}\, e^{\sum_{n=1}^{N}\left|1-\frac{s}{\rho_n}\right|}$$

$$= e^{c_1|s|}\, e^{N|s|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|\rho_n|}} < e^{c_2|s|}$$

En ambos casos concluimos que

$$|\xi(s)| < e^{c|s|}, \text{ con } c>0$$

Tomamos $|s| = 2k+2 >> 100$ de esto

$$\xi(2k+2) < e^{c_3(2k+2)}$$

pero sabemos que para $k>>1$

$$\xi(2k+2) > e^{k\log k - ck}$$

$$\Rightarrow e^{k\log k - kc} < e^{c_3(2k+2)}$$

$$\Rightarrow k[\log k - c] < c_3(2k+2) \;!$$

pero esto no se cumplirá a partir de cierta k

$\therefore$ ξ tiene infinitos ceros

$\therefore$ ξ tiene infinitos ceros no triviales. ■

Obs: puesto que ξ tiene infinitos ceros $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Denotamos $\beta_n = Re(\rho_n)$ y $\gamma_n = Im(\rho_n)$, ya vimos que $\beta_n \in [0,1]$ entonces ordenamos a los ρ_n en el siguiente sentido:

Ordenación creciente del valor absoluto de sus partes imaginarias (si ellos son iguales de forma arbitraria)

$$0 < |\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \cdots$$

Corolario.- $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1}\,\frac{\pi^{s/2}}{s\,\Gamma(s/2)}\, e^{bs} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}$$

donde el orden de los ρ_n es $0 \leq |\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \cdots$

Dem.- sabemos que si $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ ent.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{\pi^{s/2}}{s\,\Gamma(s/2)}\,\xi(s)$$

pero $\mathrm{ord}(\xi) \leq 1$ y tiene infinitos ceros por lo que por el tco. de Hadamar $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$ t.q.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{\pi^{s}}{s\,\Gamma(s/2)}\cdot e^{a+bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}$$

como $\xi(0)=1 \Rightarrow e^{a}=1 \Rightarrow e^{a+bs} = e^{a}\cdot e^{bs} = e^{bs}$

y como $\overline{\xi(s)} = \xi(\bar{s})$

$$\Rightarrow \overline{\xi(s)} = e^{\overline{bs}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\overline{\left(\frac{s}{\rho_n}\right)}\right)e^{\overline{(s/\rho_n)}} = e^{\bar{b}\bar{s}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}_n}\right)e^{\bar{s}/\bar{\rho}_n}$$

$$\text{y } \xi(\bar{s}) = e^{b\bar{s}}\left(1-\frac{\bar{s}}{\rho_n}\right)e^{\bar{s}/\rho_n}$$

y como sabemos que los ρ_n son simetricos

$\Rightarrow e^{b\bar{s}} = e^{\bar{b}\bar{s}} \Rightarrow b=\bar{b} \Rightarrow b \in \mathbb{R}$ $\blacksquare$

Recordamos:

- $$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\, e^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}$$

- $$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \log n\right)$$

- $$\zeta(s) = \underbrace{\frac{1}{s-1}}_{\text{polo}}\;\underbrace{\frac{\pi^{s/2}}{s\,\Gamma(s/2)}}_{\text{ceros triviales}}\;\underbrace{\xi(s)}_{\text{ceros no triviales}}$$

- $$\xi(s) = e^{bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}$$

$b \in \mathbb{R}$, $\{\rho_n\}$ los ceros no triviales y denotamos

$\beta_n = \mathrm{Re}(\rho_n)$, $\gamma_n = \mathrm{Im}(\rho_n)$

$\therefore$ Sustituyendo todo obtenemos

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1}\, \pi^{s/2}\, \frac{1}{2}\, e^{\gamma s/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \cdot e^{bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}$$

Teorema.- Sea $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $s \neq \rho_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $s \neq -2n$, $\sigma \in [-1,2]$, entonces:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + B$$

con $B = b + \log\sqrt{\pi} + \gamma/2$

Dem.- Sabemos que $\xi(s) \neq 0$ pues los únicos ceros con $\sigma \in [-1,2]$ son los triviales y por hip. $s \neq \rho_n$) y además es de la forma $\xi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ entonces (por tarea)

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(s)}{f_n(s)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{s-1}\right)'}{\frac{1}{s-1}} + \frac{\left(\pi^{s/2}\right)'}{\pi^{s/2}} + \frac{\left(\frac{1}{2}e^{\gamma s/2}\right)'}{\frac{1}{2}e^{\gamma s/2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{s}{2n}\right)'}{\left(1+s/2n\right)} + \frac{\left(e^{-s/2n}\right)'}{e^{-s/2n}}\right]$$

$$+ \frac{\left(e^{bs}\right)'}{e^{bs}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)'}{\left(1-s/\rho_n\right)} + \frac{\left(e^{s/\rho_n}\right)'}{e^{-s/\rho_n}}\right]$$

$$= \frac{-\frac{1}{(s-1)^2}}{\frac{1}{s-1}} + \frac{\frac{1}{2}\log\pi\, \pi^{s/2}}{\pi^{s/2}} + \frac{\frac{1}{2}\frac{\gamma}{2} e^{\gamma\frac{s}{2}}}{\frac{1}{2}e^{\gamma\frac{s}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{2n}}{\left(1+\frac{s}{2n}\right)} + \frac{-\frac{1}{2n}e^{-s/2n}}{e^{-s/2n}}\right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\frac{1}{\rho_n}}{1-\frac{s}{\rho_n}} + \frac{-\frac{1}{\rho_n}e^{+s/\rho_n}}{e^{s/\rho_n}}\right]$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \log\sqrt{\pi} + \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)$$

Teorema.- Existe una constante absoluta $C>0$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} < C\log(|t|+2)$$

con $\gamma_n = \operatorname{Im}(\rho_n)$.

Dem.- SPG basta suponer que $t \geq 0$ pues ρ_n es cero $\iff \bar{\rho}_n$ es cero

$\Rightarrow$ γ_n es parte imaginaria de un cero $\iff -\gamma_n$ lo es

entonces la suma es simétrica.

Iniciamos notando lo siguiente. Para $t \geq 0$ fijo

(s) $\Rightarrow$ $$\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = -\frac{1}{1+it} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} + \frac{1}{\beta_n+i\gamma_n}\right]}_{S(t)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2(n+1)+it} - \frac{1}{2n}\right]}_{\Sigma(t)} + B$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} + \frac{1}{1+it} - \Sigma(t) - B$$

$$\Rightarrow |S(t)| \leq \left|\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right| + \frac{1}{|1+it|} + |\Sigma(t)| + |B|$$

1) $|1+it|^2 = 1+t^2 \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{|1+it|} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+it} = O(1)$

2) como $\operatorname{Re}(2+it) > 1$ entonces

$$\left|\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} < A$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right| = O(1)$$

3) $|B| = O(1)$

4) $$\Sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)+it} - \frac{1}{2n} = \underbrace{\sum_{n<t+2}\left(\frac{1}{2(n+1)+it} - \frac{1}{2n}\right)}_{\Sigma_1(t)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n\geq t+2}\left(\frac{1}{2(n+1)+it} - \frac{1}{2n}\right)}_{\Sigma_2(t)}$$

- $$|\Sigma_1(t)| \leq \sum_{n<t+2}\left|\frac{1}{2(n+1)+it} - \frac{1}{2n}\right| \leq \sum_{n<t+2} \frac{1}{|2(n+1)+it|} + \frac{1}{|2n|}$$

Ahora $|2(n+1)+it|^2 = 4(n+1)^2 + t^2 \geq 4(n+1)^2 \geq 4n^2$

$$\therefore |\Sigma_1(t)| \leq \sum_{n<t+2} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \sum_{n<t+2} \frac{1}{n} \leq 1 + \log(t+2)$$

$\therefore \Sigma_1 = O(\log(t+2))$

- $$|\Sigma_2(t)| \leq \sum_{n\geq t+2}\left|\frac{1}{2(n+1)+it} - \frac{1}{2n}\right| = \sum_{n\geq t+2}\left|\frac{2n-2n-2-it}{[2(n+1)+it]2n}\right|$$

$$= \sum_{n\geq t+2} \frac{2+t}{|[2(n+1)+it]2n|}$$

Pero $|2(n+1)+it|^2 = 4(n+1)^2 + t^2 \geq 4(n+1)^2 \quad \therefore \frac{1}{|\cdot|} \leq \frac{1}{2(n+1)}$

$$\Rightarrow |\Sigma_2(t)| \leq \frac{2+t}{4}\sum_{n\geq t+2} \frac{1}{(n+1)n} = \frac{2+t}{4}\sum_{n\geq t+2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{2+t}{2+[t]} \leq \frac{1}{4}$$

$\therefore \Sigma_2(t) = O(1)$

$\therefore$ Tenemos que

$$S(t) = \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} + \frac{1}{1+it} - \Sigma(t) - B$$

$$= O(1) + O(1) + O(\log(t+2)) + O(1) + O(1) = O(\log(t+2))$$

$\therefore \exists\, c_1 > 0$ t.q. $|S(t)| < c_1 \cdot \log(t+2)$.

Escaneado con CamScanner

Ahora

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2-B_n) + i(t-\gamma_n)} + \frac{1}{B_n + i\gamma_n} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-B_n) - i(t-\gamma_n)}{(2-B_n)^2 + (t-\gamma_n)^2} + \frac{B_n - i\gamma_n}{B_n^2 + \gamma_n^2}$$

$$\Rightarrow |s(t)| \geq \operatorname{Re}(s(t))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-B_n}{(2-B_n)^2 + (t-\gamma_n)^2} + \frac{B_n}{B_n^2 + \gamma_n^2}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-B_n}{(2-B_n)^2 + (t-\gamma_n)^2} \quad \left(\text{pues } B_n \in [0,1]\right)$$

y como $0 \leq B_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 - B_n \leq 2$

$$\Rightarrow |s(t)| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2-B_n)^2 + (t-\gamma_n)^2}$$

y como $(2-B_n)^2 \leq 4$, $(t-\gamma_n)^2 \leq 4(t-\gamma_n)^2 \Rightarrow (2-B_n)^2 + (t-\gamma_n)^2 \leq 4[1+(t-$

$$\Rightarrow |s(t)| \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} \leq |s(t)| \leq C_1 \log(t+2)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} \leq C_1 \log(t+2)$$

Corolario 1.- $\exists C > 0$ absoluta t.q. $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{t \le \gamma_n \le t+1} 1 < C \log(|t|+2)$$

Dem.- Sea $t \in \mathbb{R}$. Es claro que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} \ge \sum_{t \le \gamma_n \le t+1} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} = (*)$$

Ahora tenemos que $t \le \gamma_n \le t+1$ es $-(t+1) \le -\gamma_n \le -t$

$\Rightarrow t-(t+1) \le t-\gamma_n \le 0 \Rightarrow -1 \le t-\gamma_n \le 0$

$\Rightarrow 0 \le -(t-\gamma_n) \le 1 \Rightarrow 0 \le (t-\gamma_n)^2 \le 1$

$\Rightarrow 1+(t-\gamma_n)^2 \le 2$

$\therefore (*) \ge \frac{1}{2} \sum_{t \le \gamma_n \le t+1} 1$ y terminamos ∎

Teorema.- $\exists C > 0$ absoluta t.q.

$$\sum_{|t-\gamma_n| \ge 1} \frac{1}{(t-\gamma_n)^2} < C \log(|t|+2)$$

Dem.- SPG $t \ge 0$. Tenemos dos casos $t-\gamma_n \ge 1$ ó $-(t-\gamma_n) \ge 1$

Sin pérdida de generalidad supo. $t-\gamma_n \ge 1$

$\Rightarrow (t-\gamma_n)^2 \ge 1 \Rightarrow 2(t-\gamma_n)^2 \ge 1+(t-\gamma_n)^2$

Tenemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} \ge \sum_{|t-\gamma_n| \ge 1} \frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} \ge \frac{1}{2} \sum_{|t-\gamma_n| \ge 1} \frac{1}{(t-\gamma_n)^2}$

despejando con la cota " conocida terminamos. ∎

Teorema.- Sea $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ t.q. $s \neq \rho_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in [-1, 2]$, entonces

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log(|t|+2))$$

Dem.- SPG consideramos $t \geq 0$ (por simetría)

Hagamos $\Sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)$

$$\rho(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)$$

De un teo. pasado tenemos que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \rho(s) + \Sigma(s) + B \quad , B = \gamma + \log\sqrt{\pi} + \gamma/2$$

- $\Sigma(s) = \underbrace{\sum_{n < t+2} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)}_{\Sigma_1(s)} + \underbrace{\sum_{n \geq t+2} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)}_{\Sigma_2(s)}$

* $|\Sigma_1(s)| \leq \sum_{n \leq t+2} \left|\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right| \leq \sum_{n \leq t+2} \frac{1}{|s+2n|} + \frac{1}{2n}$

y $|s+2n| \geq \operatorname{Re}(s+2n) = \sigma + 2n \underset{\sigma \in [-1,2]}{\geq} 2n-1 \geq n$

$\therefore |\Sigma_1(s)| \leq \sum_{n \leq t+2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 2 \sum_{n < t+2} \frac{1}{n} < C_0 \log(t+2)$

* $|\Sigma_2(s)| \leq \sum_{n \geq t+2} \left|\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right| = \sum_{n \geq t+2} \left|\frac{-s}{(2n+s)2n}\right|$

$$= \sum_{n \geq t+2} \frac{|\sigma + it|}{|\sigma + 2n + it| 2n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq t+2} \frac{|\sigma| + |t|}{n |\sigma + 2n + it|}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq t+2} \frac{t+2}{n|\sigma + 2n + it|}$$

Por otro lado $|\sigma + 2n + it| \geq \operatorname{Re}(-) = \sigma + 2n \geq 2n-1$
$\geq n \geq n-1$

$\therefore$

$$|\Sigma_2(s)| \leq \frac{t+2}{2} \sum_{n \geq t+2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{t+2}{2} \sum_{n \geq t+2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{t+2}{2} \cdot \frac{1}{[t]+1} \leq 1$$

$$\therefore \Sigma(s) = \Sigma_1(s) + \Sigma_2(s)$$

$$= O(\log(t+2)) + O(1) = O(\log(t+2))$$

$$\therefore \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + O(\log(t+2)) \quad \ldots (1)$$

Entonces tomando $s = 2+it$

$$\Rightarrow \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = -\frac{1}{1+it} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} + \frac{1}{\beta_n + i\gamma_n} \right) + O(\log(t+2))$$

y ya habíamos visto que

$$\times \quad \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = O(1)$$

$$\text{y} \quad -\frac{1}{1+it} = O(1)$$

$$\therefore \quad O(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} + \frac{1}{\beta_n+i\gamma_n} \right] + O(\log(t+2)) \quad \ldots (2)$$

De esto restando $(1)-(2)$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} \right] + O(\log(t+2))$$

Ahora: veamos las sig. estimaciones

$$* \quad \left| \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} \right| \leq \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)|}$$

pues $|(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)| \geq 2-\beta_n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad * \leq \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} 1 \leq \sum_{t-1 \leq \gamma_n \leq t} 1 + \sum_{t \leq \gamma_n \leq t+1} 1 \leq C_1 \log(t+2) \quad (a)$$

Corolario 1

$$* \left| \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} \right|$$

$$\leq \sum_{|t-\gamma_n|>1} \left| \frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)} \right|$$

$$= \sum_{|t-\gamma_n|>1} \left| \frac{(s-\rho_n)+(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)}{(s-\rho_n)((2-\beta_n)+i(t-\gamma_n))} \right|$$

pero $s-\rho_n = (\sigma-\beta_n)+i(t-\gamma_n)$

$$\Rightarrow * \leq \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{|2-\sigma|}{|(\sigma-\beta_n)+i(t-\gamma_n)|\,|(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)|}$$

pero $|(\sigma-\beta_n)+i(t-\gamma_n)| \geq |\operatorname{Im}(\sim)| = |t-\gamma_n|$

$|(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)| \geq |\operatorname{Im}(\sim)| = |t-\gamma_n|$

$$\Rightarrow * \leq \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{|2-\sigma|}{(t-\gamma_n)^2} \leq 3\sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{1}{(t-\gamma_n)^2} \leq 3\sum_{|t-\gamma_n|\geq 1} \frac{1}{(t-\gamma_n)^2}$$

$< C_2 \log(t+2)$ (b)

Teo. anterior

Concluimos que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)}\right] + O(\log(t+2))$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \sim + \sum_{|t-\gamma_n|>1} \sim + O(\log(t+2))$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n} - \underbrace{\sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{(2-\beta_n)+i(t-\gamma_n)}}_{(a)} + \underbrace{\sum_{|t-\gamma_n|>1}\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{\sim}}_{(b)} + O(\ldots$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n} + O(\log(t+1)) + O(\log(t+1)) + O(\log(\ldots$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n} + O(\log(t+1))$$

Teorema.- Sea $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$3+4\cos(\theta)+\cos(2\theta) \geq 0$$

Dem.- Tenemos

$$3+4\cos(\theta)+\cos(2\theta) = 3+4\cos(\theta)+2\cos^2(\theta)-1$$

$$= 2\cos^2(\theta)+4\cos(\theta)+2 = 2[\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)+1]$$

$$= 2[\cos(\theta)+1]^2 \geq 0$$ ■

Ayudantía

Teorema.- (Suma de Euler-Maclaurin)
Sea $f \in C^2[a,b]$ y definamos

$$p(x) = \frac{1}{2} - \{x\} \qquad \sigma(x) = \int_0^x p(t)\,dt$$

entonces

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + p(b)f(b) - p(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x) f''(x)\,dx$$

Dem.- Por la fórmula de sumación de Euler tenemos que

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\} + \int_a^b \{x\} f'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\} - \int_a^b -\{x\} f'(x) + \tfrac{1}{2}f'(x) - \tfrac{1}{2}f'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\} + \tfrac{1}{2}f(b) - \tfrac{1}{2}f(a) - \int_a^b p(x) f'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + f(b)p(b) - f(a)p(a) - \sigma(x)f'(x)\Big|_a^b + \int_a^b \sigma(x) f''(x)\,dx$$ ■

Teorema.- Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Dem.- Tenemos que

$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ y sea $x = nt$

$\Rightarrow n! = n^{n+1} \int_0^\infty t^n e^{-nt} dt$ y sea $t = 1 + \frac{s}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow n! = n^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n - s\sqrt{n}} ds$$

$$= n^n \sqrt{n} e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{n \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right) - s\sqrt{n}} ds$$

Recordando que $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$$\Rightarrow n \log\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = s\sqrt{n} - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{n}} - \dots$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n^n \sqrt{n} e^{-n}} = \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{n}} - \frac{s^4}{4n} + \dots\right)} ds$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{n}} - \frac{s^4}{4n} + \dots\right)} \chi_{[-\sqrt{n}, \infty)} ds$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{n} e^{-n}} = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad \text{(converge uniformemente)}$$

$$= \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{n} e^{-n} \sqrt{2\pi}} = 1$$

$$\therefore n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Obs.- Se vale para $x > 0$

$\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Escaneado con CamScanner

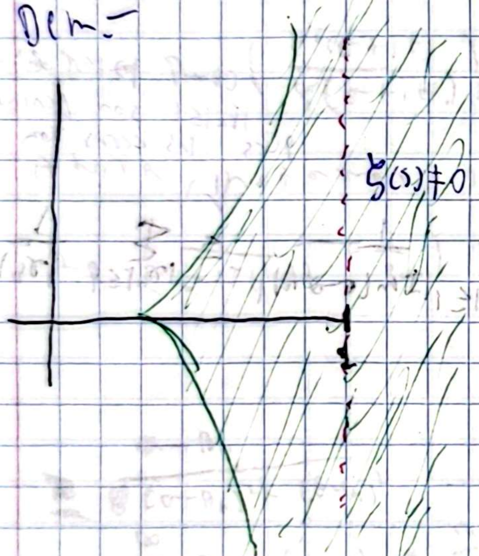
Corolario:-

Teorema:- (De la Vallée-Poussin) Existe una constante absoluta $0<c<1$ t.q. en la región

$$\mathcal{R} = \left\{\sigma+it : \sigma \ge 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}\right\}$$

se cumple que $\forall s \in \mathcal{R}$, $\zeta(s) \neq 0$

Dem:-

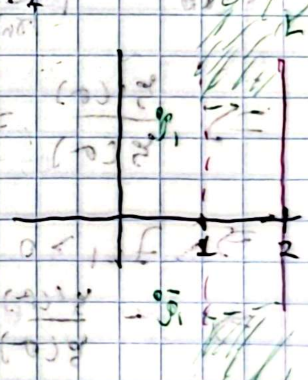


Sabemos que los ceros no triviales $\{\rho_n\}$ los ordenamos como

$$0<|\gamma_1| \le |\gamma_2| \le \cdots$$

Sea $s=\sigma+it \in \mathbb{C}$ fijo t.q.

- $\sigma \in (1,2]$
- $|t| \ge |\gamma_1|$



Afirmación Se cumple que

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \ge 0$$

Dem:- Notemos que

$$-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-\sigma} n^{-it} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, e^{-it\log n}\, n^{-\sigma}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma}\left[\cos(t\log n) + i\sin(t\log n)\right]$$

$$\therefore \mathrm{Re}\left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\cos(t\log n).$$

$\therefore$ usando un teo. anterior tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo

$$3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n) \ge 0.$$

multiplicando por $\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}$ y sumando hasta infinito obtenemos la afirmación.

Ahora veamos las sig. estimaciones

1) Recordemos que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log|t|+2)$$

Entonces en $s=\sigma$

$$\Rightarrow \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = -\frac{1}{\sigma-1} + \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{\sigma-\rho_n} + O(1)$$

Como $|z| \leq 1$ es compacto, $|\gamma_n| \leq 1$ son finitos pues los ceros son aislados

pero $\left| \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{\sigma-\rho_n} \right| \leq \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|\sigma-\rho_n|} \leq \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|\operatorname{Im}(\sigma-\rho_n)|} \leq \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|\gamma_n|}$

$$\Rightarrow \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = -\frac{1}{\sigma-1} + O(1)$$

$$\Rightarrow \exists c_1 > 0 \text{ t.q. } \left| \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \frac{1}{\sigma-1} \right| < c_1$$

$$\Rightarrow -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + c_1 \quad \ldots (1)$$

2) Igualmente por un teo pasado

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = -\frac{1}{\sigma+it-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma+it-2n} - \frac{1}{2n} \right) + [\ldots]$$

Del mismo teorema

$$= -\frac{1}{\sigma+it-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + O(\log(|t|+2))$$

pero

$|\sigma+it-1| \geq |\operatorname{Im}(\sigma+it-1)| = |t| \geq |\gamma_1|$ ← Así tomamos "s" al inicio

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma+it-1} = O(1)$$

$$\therefore \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + O(\log(|t|+2))$$

$\Rightarrow \exists\, C_2 > 0$ t.q.

$$A = \left| \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \right| < C_2 \log(|t|+2)$$

$$\Rightarrow \text{pero } A \geq \left| \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \right| = \square$$

$\Rightarrow \square \leq C_2 \log(|t|+2) \rightarrow$ desarrollando el valor absoluto

$$\Rightarrow -\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + C_2 \log(|t|+2)$$

Ahora, notamos que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = \underbrace{\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}}_{} + \underbrace{\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}}_{\geq 0}$$

$1 \leq \sigma \leq 2$

$-1 \leq -\beta_n \leq 0$

$\Rightarrow 0 < \sigma - \beta_n \leq 2$

$$\geq \frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(\sim) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}$$

Sea ρ un cero no trivial fijo $\Rightarrow (\rho = \beta + i\gamma)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(\sim) \geq \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}$$

(pues sumo puras cosas positivas, será mayor a sumar solo uno)

$$\Rightarrow -\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < -\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + C_2 \log(|t|+2) \quad \ldots (2)$$

3) $$-\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < -\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + C_2 \log(|t|+2)$$

usando la anterior

el primer término es positivo $\rightarrow$ $< C_2 \log(|2t|+2)$

$$< C_3 \log(|t|+2) \quad \ldots (3)$$

Tenemos lo sig. (visto al final del f

$$0 \leq -3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right)$$

(1),(2) y (3)

$$\leq \frac{3}{\sigma-1} - 4\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + C_4\log(|t|+2) = \Delta$$

Ahora consideremos que $\sigma \in (1,2]$ y $|t| \geq |\gamma_1|$

1) Sea $t=\gamma$ (pues como los γ_n están ordenados entonces $|\gamma| \geq |\gamma_1|$

$$\Rightarrow 0 < \Delta = \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + C_4\log(|\gamma|+2)$$

$\Rightarrow$ Despejando β tendremos que

$$\beta < \sigma - \frac{4}{\frac{3}{\sigma-1} + C_4\log(|\gamma|+2)}$$

2) Sea $\sigma = 1 + \dfrac{1}{2C_4\log(|\gamma|+2)}$, y así $\sigma \in (1,2]$

(tomo) $\therefore$ Sustituyendo en lo anterior obtenemos

$$\beta < 1 - \frac{1}{14C_4\log(|\gamma|+2)}$$

Ayudante

Teorema.- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ dada $x \geq 0$ denotamos

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n \qquad \text{si } x < 1 \text{ es } A(x) = 0$$

Si $f \in C^1[y,x]$ con $0 < y < x$ entonces

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) \cdot a_n = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t)\, dt$$

Dem.- Buscar

En $\mathbb{C}_{+1}$, $\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{[t]}{t^s}\, dt$.

Lema: Sea $b \geq 0$, $T \geq 2$. Definimos la curva $\gamma : [-T, T] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = b + it$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{a^s}{s} \, ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{a^b}{T|\log(a)|}\right) & a > 1 \\ O\left(\frac{a^b}{T|\log(a)|}\right) & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Dem:

Obs: Tomaremos la sig. notación (Vinogradov)

$f(x) = O(g(x)) \implies f(x) \ll g(x)$
se come las constantes

Teo (Fórmula de inversión de Perron) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ función aritmética. Definimos $\forall x - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_+$ (semienteros) i.e $x = N + \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}$, la suma parcial

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$$

Sup. lo sig.

1) La serie de Dirichlet asociada a f

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tiene dominio de convergencia $\mathbb{C}_{+1}$ (convergencia absoluta)

2) $\exists\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ t.q

a) g es monótona creciente

aa) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(n)| \leq g(n)$

3) $\exists \alpha > 0$ t.q
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} = O\left(\frac{1}{(\sigma-1)^{\alpha}}\right)$$

cuando $\sigma \to 1^+$

Entonces para $b_0 > 1$ (suficientemente pequeño) $T \geq 1$, $b \in (1, b_0]$ $f(b_0)$ se cumple la formula

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(s) \frac{x^s}{s} \, ds + O_{b_0}\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O_{b_0}\left(\frac{x\, g(2x) \log x}{T}\right)$$

donde $\gamma : [-T, T] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = b + it$ y la constante en el simbolo O depende unicamente de b_0.

Dem: Notemos lo sig. para el camino γ, $\gamma'(t) = i$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(s) \frac{x^s}{s} \, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{T} F(b+it) \frac{x^{b+it}}{b+it} \cdot i \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{b+it}} \frac{x^{b+it}}{b+it} \cdot i \, dt$$

Vamos a ver que cumple fubini:

$$\int_{-T}^{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^{b+it}} \frac{x^{b+it}}{b+it} i \right| dt = \int_{-T}^{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^b} \frac{x^b}{\sqrt{b^2+t^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^b} \cdot x^b \int_{-T}^{T} \frac{dt}{\sqrt{b^2+t^2}} < \infty$$

$\therefore$ Por fubini podemos intercambiar

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \int_{-T}^{T} \frac{(x/n)^{b+it}}{b+it} \, i \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \int_{\gamma} \frac{(x/n)^s}{s} \, ds$$

Tenemos que $\frac{x}{n} \neq 1$ (pues $x = N + \frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow L = \sum_{x/n < 1} f(n) \int_\gamma \frac{(x/n)^s}{s} ds + \sum_{x/n \geq 1} f(n) \int_\gamma \frac{(x/n)^s}{s} ds$$

Lema
$$= \sum_{x/n < 1} f(n)\, O\left(\frac{(x/n)^b}{T|\log (x/n)|} \right)$$

$$+ \sum_{x/n \geq 1} f(n) \left[1 + O\left(\frac{(x/n)^b}{T|\log (x/n)|} \right) \right]$$

$$\Rightarrow L = \sum_{n \leq x} f(n) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \underbrace{O\left(\frac{(x/n)^b}{T|\log (x/n)|} \right)}_{h_n(x)}$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ fijo ent.

$$|h_n(x)| \leq C \cdot \frac{(x/n)^b}{T|\log (x/n)|} \quad \text{donde } C = \max\{C_1, C_2\}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes correspondientes para los casos $(x/n) < 1$ y $(x/n) > 1$ del Lema

de esta manera

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) h_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| |h_n(x)|$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)| (x/n)^b}{T|\log (x/n)|} \quad (C \text{ no depende de } n)$$

$$\Rightarrow S(x) = L - \sum_{n=1}^{\infty} f(n) h_n(x)$$

$$= L + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{|f(n)| (x/n)^b}{T|\log (x/n)|}}_{R_n(x)} \right)$$

Solo falta ver que el último orden lo podemos ver como los órdenes que queremos

Hagamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(x) = \sum_{x/n \le \frac{1}{2}} R_n(x) + \sum_{x/n \ge 2} R_n(x) + \sum_{1/2 < x/n < 2} R_n(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)\frac{x^s}{s}\,ds + O\Big(\underbrace{\sum_{x/n \le 1/2} R_n(x) + \sum_{x/n \ge 2} R_n(x)}_{\Sigma_1(x)}\Big) + O\Big(\underbrace{\sum_{1/2 < x/n < 2} R_n(x)}_{\Sigma_2(x)}\Big)$$

I)

$$\Sigma_1(x) \ll \sum_{x/n \le 1/2} \frac{|f(n)|(x/n)^b}{T\,|\log(x/n)|} + \sum_{x/n \ge 2} \frac{|f(n)|(x/n)^b}{T\,|\log(x/n)|}$$

Obs.- sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x/n \le 1/2$ ó $x/n \ge 2$

$\Rightarrow |\log(x/n)| \ge \log 2$

$\ll$ se come la constante $\frac{1}{\log 2}$

$$\Rightarrow \Sigma_1(x) \ll \sum_{x/n \le \frac{1}{2}} \frac{|f(n)|(x/n)^b}{T} + \sum_{x/n \ge 2} \frac{|f(n)|(x/n)^b}{T}$$

$$\ll \frac{x^b}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^b} \ll \frac{x^b}{T(b-1)^\alpha} \quad \text{(Hip 3)}$$

$$\Rightarrow \Sigma_1(x) = O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right)$$

II)

$$\Sigma_2(x) \ll \sum_{\frac{1}{2} < x/n < 2} \frac{|f(n)|(x/n)^b}{T\,|\log(x/n)|}$$

pero por hip. 2, $|f(n)| < g(n)$ y como $\frac{1}{2} < x/n < 2$

$\Rightarrow n < 2x$ y como g es creciente $\Rightarrow g(n) < g(2x)$

$$\Rightarrow \Sigma_2(x) \ll \frac{g(2x)}{T}\sum_{1/2 < x/n < 2}\frac{(x/n)^b}{|\log(x/n)|}$$

pero como $\log(x/n) < \log 2 \Rightarrow b\log(x/n) < b\log(2) < b_0\log 2$

$\Rightarrow (x/n)^b < 2^{b_0}$

con esto la constante del término O depende de b_0

$$\Rightarrow \Sigma_2(x) \ll \frac{g(2x)\,2^{b_0}}{T}\sum_{1/2 < x/n < 2}\frac{1}{|\log(x/n)|}$$

$$\leq C \frac{g(2X)}{T} \sum_{1/2 < X/n < 2} \frac{1}{|\log(X/n)|}$$

Para esta última suma

$$\sum_{1/2 < X/n < 2} \frac{1}{|\log(X/n)|} \leq \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n < 2N+1} \frac{1}{\left|\log\left(\frac{2N+1}{2n}\right)\right|}$$ $(X = N + \frac{1}{2})$

$\frac{2N+1}{4} < n$

$\Rightarrow \frac{N+1}{2} \leq n$

$$\Rightarrow \Sigma_2(X) \leq C \frac{g(2X)}{T} \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq 2N} \frac{1}{\left|\log\left(\frac{2N+1}{2n}\right)\right|}$$

Ahora

$$\sum_{\frac{N+1}{2}} \cdots = \underbrace{\sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq N} \frac{1}{|\sim|}}_{\Sigma_3} + \underbrace{\sum_{N+1 \leq n \leq 2N} \frac{1}{|\sim|}}_{\Sigma_4}$$

$$\Rightarrow \Sigma_2(X) < C \frac{g(2X)}{T} \left[\Sigma_3(X) + \Sigma_4(X)\right]$$

* Obs Sea $y \in (0,1) \Rightarrow -\log(1-y) \geq y$

* Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{N+1}{2} \leq n \leq N \Rightarrow 2n \leq 2N < 2N+1$

$$\Rightarrow \frac{2N+1}{2n} > 1$$

$$\Rightarrow \Sigma_3(X) = \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq N} \frac{1}{\log\left(\frac{2N+1}{2n}\right)} = \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq N} \frac{1}{-\log\left(\frac{2n}{2N+1}\right)}$$

$$= \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq N} \frac{1}{-\log\left(1 - \frac{2N+1-2n}{2N+1}\right)}$$

Pero como $\frac{2N+1-2n}{2N+1} \in (0,1)$

$$\Rightarrow \Sigma_3(X) \leq \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq N} \frac{1}{\frac{2N+1-2n}{2N+1}} = \sum_{\frac{N+1}{2} \leq n \leq N} \frac{2N+1}{2N+1-2n}$$

$$\Rightarrow \Sigma_3(X) \ll 2N+1 \sum_{N+1\leq n\leq N} \frac{1}{2N+1-2n}$$

$$\ll 2N+1 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{recorriendo la suma}$$

$$\ll (2N+1)\log N$$

$$\ll N\log N \ll X\log(X) \quad \leftarrow \text{pues } X = N+\tfrac{1}{2}$$

* Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $N+1 \leq n \leq 2N \Rightarrow 2N+1 \leq 2N+2 \leq 2n$

$$\Rightarrow \frac{2N+1}{2n} \leq 1 \Rightarrow \log(\cdot) \leq 0$$

$$\Rightarrow \Sigma_4(X) = \sum_{N+1\leq n\leq 2N} \frac{1}{-\log\left(\frac{2N+1}{2n}\right)} = \sum_{N+1\leq n\leq 2N} \frac{1}{-\log\left(1-\frac{2n-(2N+1)}{2n}\right)}$$

Pero $\frac{2n-(2N+1)}{2n} \in (0,1)$

$$\Rightarrow \Sigma_4(X) \ll \sum_{N+1\leq n\leq 2N} \frac{2n}{2n-(2N+1)}$$

$$\ll \sum_{N+1\leq n\leq 2N} \frac{4N}{2n-(2N+1)} \quad \leftarrow \text{pues en la suma } n\leq 2N$$

$$\ll 4N \sum_{n=1}^{2N-1} \frac{1}{n} \ll 4N\log(2N-1) \ll N\log(N)$$

$$\ll X\log(X)$$

$$\therefore S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(s)\frac{X^s}{s}\,ds + \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(s)\frac{X^s}{s}\,ds + O\left(\frac{X^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{g(2X)}{T}\cdot X\log X\right)$$

Obs: La "mitad izquierda" del teo anterior es b_0.

- Recordemos que $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k, \ p\text{-primo}, \ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

es la función de Von-Mangoldt.

- Vimos que en $\mathbb{C}_{+1}$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Def.- Definimos a la función de Chebyschev como:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Teorema.- Sea $T \geq 1$, $x = N + \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} \, ds + O\left(\frac{x \log^2(x)}{T} \right)$$

donde $\gamma_x : [-T, T] \to \mathbb{C}$, $\gamma_x(t) = 1 + \frac{1}{\log x} + it$

Dem.- Usaremos la fórmula de inv. de Perron para Λ

1) $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ converge en $\mathbb{C}_{+1}$

2) Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tq (g creciente)

$$g(n) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ \log(n) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$\therefore \ |\Lambda(n)| \leq g(n)$

Sea $\sigma > 1$

3) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^\sigma} \ll \int_1^\infty \frac{\log(y)}{y^\sigma} dy$

$\ll \log(y) \frac{1}{1-\sigma} y^{-\sigma+1} \Big|_1^\infty - \frac{1}{1-\sigma} \int_1^\infty y^{-\sigma} dy$

int. partes

$\ll \frac{1}{\sigma-1} \frac{y^{-\sigma+1}}{-\sigma+1} \Big|_1^\infty \ll \frac{1}{(\sigma-1)^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} = O\left(\frac{1}{(\sigma-1)^2}\right)$ $(\alpha = 2)$

$\therefore$ de la for. de perro tomamos $b = 1 + \frac{1}{\log x}$

y $b_0 = 4$ (pues) $\log x > \log(1+\frac{1}{2}) = \log(1.5) \Rightarrow b < 1 + \frac{1}{\log(1.5)} \approx 3.4 < 4$

$\therefore$ de la for. de perron, $\gamma_x : [-T, T] \to \mathbb{C}$, $\gamma_x(t) = 1 + \frac{1}{\log x} + it$

$\Rightarrow \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+\frac{1}{\log x}}}{T\left[1 + \frac{1}{\log x} - 1\right]^2}\right)$

$+ O\left(\frac{x \log x \log x}{T}\right)$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x \, x^{1/\log x}}{T}\right) + O\left(\frac{x \log^2(x)}{T}\right)$

obs: $x^{\frac{1}{\log x}} = e^{\frac{1}{\log x} \log x} = e \Rightarrow O\left(\frac{x \log^2 x \, x^{1/\log x}}{T}\right) \Rightarrow O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right)$

$\therefore \psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right)$

Escaneado con CamScanner

Recordare: $\sum_{n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) + \int_1^x A(t) f'(t)\, dt$

Ayudante

Proposición: En $\mathbb{C}_+$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t^s}\, dt,$$

con polo simple en $s=1$

Dem: Se usa la fórmula de $\sum a_n f(x)$ demostrada por el ayudante.

Obs: $\lim_{s\to 1} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \gamma$

Teorema: Sea $M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(x)$, si

$$M(x) \leq \sqrt{x}$$

entonces la hip. de Riemann es cierta.

Dem: ($M(x) \leq \sqrt{x}$ es llamada conjetura de Mertens)

Consideremos

$a_n = \mu(n)$
$f(x) = \frac{1}{x^s}$

$$\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{M(x)}{x^s} + \int_1^\infty M(t)\left(-s\frac{1}{t^{s+1}}\right) dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = 0 - s \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{M(t)}{t^{s+1}}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = -s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}}\, dt$$

Tenemos que $\frac{M(t)}{t^{s+1}}$ es analítica y además

$$\left|\frac{M(t)}{t^{s+1}}\right| \leq \frac{\sqrt{t}}{t^{\sigma+1}} = \frac{1}{t^{\sigma+\frac{1}{2}}} \leftarrow \text{converge si } \sigma > \frac{1}{2}$$

Escaneado con CamScanner

$\therefore \; -s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}}\,dt$ es analítica en $\mathbb{C}_{+\frac{1}{2}}$

$\therefore$ es extensión analítica de $\frac{1}{\zeta(s)}$ a $\mathbb{C}_{+\frac{1}{2}}$

y como el lado derecho es finito $\Rightarrow$ $\zeta(s) \neq 0$

$\forall s \in \mathbb{C}_{+\frac{1}{2}}$ y $\therefore$ tampoco en $Re(s) < \frac{1}{2}$

$\therefore$ por simetría se cumple la hip. de Riemann ∎

Obs.- Lamentablemente la conjetura de Mertens es falsa.

Teorema.- Si $\forall \delta > 0$, ~~...~~ $\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ t.q.

$$|M(x)| \leq O(x^{1/2+\delta}\log^n(x))$$

ent. la hip. de Riemann es cierta

Dem.- Es parecida.

Esta es la llamada conjetura débil de Mertens. No se ha probado si es cierta o falsa.

Recordatorio:

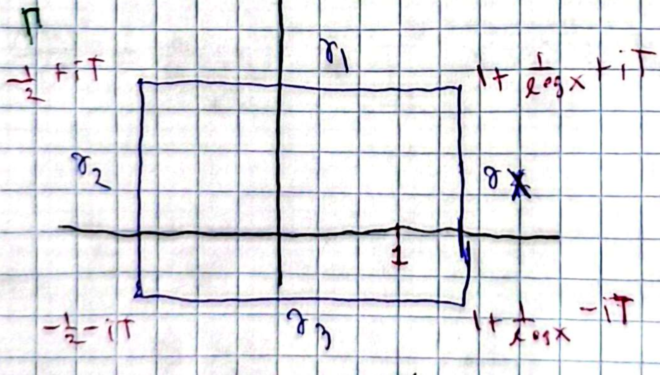
- $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right) + B$$

- Sea $s\in\mathbb{C}$, $s=\sigma+it$ con $\sigma\in[-\frac{1}{2},2]$ entonces:
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1}\frac{1}{s-\rho_n} + O(\log(|t|+2))$$

Teorema.- Sea $x=N+\frac{1}{2}$, $N\in\mathbb{N}$, $T\in[2,x]$ entonces
$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n|\leq T}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$$

Dem.- Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\forall n\in\mathbb{N}$
$$|T-\gamma_n| >> \frac{1}{\log x}$$ (Tarea) se usan las desigualdades de los ceros que vimos

Ahora, consideramos el contorno Γ



Sea $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}$

I) ¿Qué singularidades tiene f en int Γ?

1) En $s=0$ tenemos polo simple
2) En $s=1$, tenemos polo simple

3) $\forall \rho_n$ cero no trivial con $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $|\gamma_n| \leq T$ tenemos polos simples

II) ¿Que residuos tenemos en $\operatorname{int}\Gamma$?

1) $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$

2) $\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{s \to 1} (s-1) f(s) = -(-1) \cdot x^1 = x$

3) Sea ρ_n cero no trivial con $|\gamma_n| \leq T$. Sup. que ~~...~~ dicho cero tiene orden k.

$$\operatorname{Res}(f, \rho_n) = \lim_{s \to \rho_n} (s - \rho_n) f(s) = -k \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}$$

III) Del teo. de los residuos de Cauchy tenemos que

$$\int_\Gamma f(s)\, ds = \operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1) + \sum_{\rho_n \text{ t.q. } |\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}$$

$$= x - \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

De esto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} f(s)\, ds = x - \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_i} f(s)\, ds$$

Asi y por el teo. anterior

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\int_{\gamma_k} f(s)\, ds}_{I_k(x)} + O\left(\frac{x \log^2(x)}{T} \right)$$

Acotemos cada integral.

se recorre al revés

$k=1$ $\gamma_1 : [1 + \frac{1}{\log x}, -\frac{1}{2}] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(\sigma) = \sigma + iT$

$$I_1(x) = \int_{\gamma_1} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\, ds = \int_{1+\frac{1}{\log x}}^{-1/2} -\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\, d\sigma$$

$$= \int_{-1/2}^{1+1/\log x} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\, d\sigma$$

$$\Rightarrow |I_1(x)| \leq \int_{-1/2}^{1+1/\log x} \left| \frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)} \right| \frac{x^\sigma}{T}\, d\sigma$$

Y como $\sigma \in [-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{\log x}] \subseteq [-1/2, 2]$ en el por recordatorio

$$\Rightarrow \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|T-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log x)$$

$$(\log(T+2) \ll \log x)$$

Ahora $|s-1| \geq |T| = T \geq 2 \Rightarrow -\frac{1}{s-1} = O(1)$

Por otro lado

$$|s-\rho_n| \geq Im(s-\rho_n) = |T-\gamma_n| \geq \frac{1}{\log x}$$

Al inicio lo elegimos

De esta manera

visto

$$\sum_{|T-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} \ll \log x \sum_{|T-\gamma_n|\leq 1} 1 \ll \log x \cdot \log T$$

$$\ll \log^2(x)$$

$$\therefore \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1) + O(\log^2 x) + O(\log x) = O(\log^2 x)$$

$$\therefore |I_1(x)| \ll \frac{\log^2 x}{T} \int_{-1/2}^{1+\frac{1}{\log x}} x^\sigma\, d\sigma$$

$\int_a^b f = M(b-a)$, $M = \max f$

$$\ll \frac{\log^2 x}{T}\, e^{(1+\frac{1}{\log x})\log x} \underbrace{\left(1+\frac{1}{\log x}+\frac{1}{2}\right)}_{O(1)}$$

$$\ll \frac{\log^2 x}{T}\, x\, e \ll \frac{x\log^2(x)}{T}$$

K=3) Es análogo, $I_3(x) \ll \dfrac{x\log^2 x}{T}$

K=2) Sea $\gamma_2 : [T, -T] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = -1/2 + it$

De esta manera

$$I_2(x) = \int_{\gamma_2} f(s)\, ds = \int_T^{-T} -\frac{\zeta'(-\frac{1}{2}+it)}{\zeta(-\frac{1}{2}+it)} \frac{x^{-1/2+it}}{-1/2+it}\, i\, dt$$

$\Rightarrow |I_2(x)| \leq \int_{-T}^{T} \left| \frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)} \right| \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{t^2+1/4}}\, dt$

Ya vimos que como $s=-1/2+it$ con $-1/2 \in [-1,2)$ ent.

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log(|t|+2))$$

$$= - - - - - + O(\log x)$$

Notemos que

$|s-1| \geq |-1/2-1| = 3/2 \quad \Rightarrow -\frac{1}{s-1} = O(1)$

Por otro lado

$|s-\rho_n| \geq \cancel{\ldots} \geq |-\frac{1}{2} - \beta_n| = |\beta_n + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ($\mathrm{Re}(s-\rho_n)$)

$\therefore \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} \ll \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} 1 \ll \log(|t|+2) \ll \log x$

$\therefore \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log x)$

$\therefore I_2(x) \ll \log x \int_{-T}^{T} \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{1/4+t^2}}\, dt$

$\ll x^{-1/2} \log x \int \ldots$

$\ll \frac{\log x}{x^{1/2}} \ll \frac{x^{1/2}\log x}{x} \ll \frac{x\log^2(x)}{x} \leq \frac{x\log^2(x)}{T}$ $\quad T\leq x$

$\therefore I_1, I_2, I_3 = O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$

$\therefore \psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n|\leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{3} I_k(x) + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$

$\Rightarrow \psi(x) = - - - - + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right) + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$

$\therefore \psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n|\leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + O\left(\frac{x\log^2(x)}{T}\right)$ ∎

Teorema.- Existe una constante absoluta c t.q. para $x \geq 2$

$$\psi(x) = x + O\left(x\, e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

Dem.- Sin pérdida de generalidad sup. que $x - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^+$.

En efecto ya que $\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2})$ pues

$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$.

En este lado, vimos que

$$\psi(x) - x \ll \left| \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} \right| + \frac{x \log^2 x}{T} \ll \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{|x^{\rho_n}|}{|\rho_n|} + \frac{x \log^2 x}{T}$$

$$\ll \sum_{|\gamma_n| \leq 1} \frac{x^{\beta_n}}{|\gamma_n|} + \frac{x \log^2 x}{T} \quad \otimes$$

Obs.- por el teo. de De la Vallée-Poussin $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\exists c_1 > 0$ t.q. $\beta_n < \frac{c_1}{\log(|\gamma_n| + 2)}$

Ahora para $|\gamma_n| \leq T$ tenemos que $\log(|\gamma_n| + 2) \ll \log(T)$

$\Rightarrow \frac{1}{\log T} \ll \frac{1}{\log(|\gamma_n| + 2)}$ o sea $-\frac{1}{\log(|\gamma_n| + 2)} \ll -\frac{1}{\log T}$

De esta forma $\exists c > 0$ t.q. $\beta_n < 1 - \frac{c}{\log T}$

Así de $\otimes$

$$\psi(x) \ll \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{1 - \frac{c}{\log T}}}{|\gamma_n|} + \frac{x \log^2 x}{T} \ll x^{1 - \frac{c}{\log x}} \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{1}{|\gamma_n|} + \frac{x \log^2 x}{T}$$

Obs.- $\sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{1}{|\gamma_n|} \leq \sum_{0 < |\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|\gamma_n|} + \sum_{1 \leq |\gamma_n| \leq 2} \frac{1}{|\gamma_n|} + \dots + \sum_{\lfloor T \rfloor \leq |\gamma_n| \leq \lfloor T \rfloor + 1} \frac{1}{|\gamma_n|}$

$$\Rightarrow \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{1}{|\gamma_n|} \ll \sum_{k=1}^{\lfloor T \rfloor} \left(\sum_{k < |\gamma_n| \leq k+1} \frac{1}{|\gamma_n|} \right) \ll \sum_{k=1}^{\lfloor T \rfloor} \left(\sum_{k < |\gamma_n| \leq k+1} \frac{1}{k} \right)$$

$$\ll \sum_{k=1}^{\lfloor T \rfloor} \frac{1}{k} \Big(\underbrace{\sum_{k < |\gamma_n| \leq k+1} 1}_{\text{cardinalidad}} \Big) \ll \log T \sum_{k=1}^{\lfloor T \rfloor} \frac{1}{k} \ll \log T \log T$$

$$\ll \log^2 T \ll \log^2 x$$

$\therefore$

$$\psi(x) - x \ll x^{1-\frac{c}{\log T}} \log^2 x + \frac{x\log^2 x}{T} \ll x\log^2 x \left[x^{-\frac{c}{\log T}} + \frac{1}{T} \right]$$

$$\ll x \log^2 x \, x^{-\frac{c}{\log T}} \quad *$$

Ahora sea $T = e^{\sqrt{\log x}}$. Podemos tomarlo así ya que $T \in [2, x]$ y $\sqrt{\log x} \le \log x \Rightarrow e^{\sqrt{\log x}} \le x$

Así en $*$

$$\psi(x) - x \ll x \log^2 x \, x^{-\frac{c}{\sqrt{\log x}}} \ll x e^{\frac{c}{2}\sqrt{\log x}} x^{-\frac{c}{\sqrt{\log x}}}$$

$$\ll x e^{\frac{c}{2}\sqrt{\log x}} e^{-\frac{c}{\sqrt{\log x}} \log x} \ll x e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}$$

$\therefore$ $\psi(x) = x + O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$ ∎

Corolario.- $\psi(x) \sim x$

Dem.- Del teo anterior $\exists \, c_1, c > 0$ tq $|\psi(x) - x| \le c_1 x e^{-c\sqrt{\log x}}$

$\Rightarrow \left| \frac{\psi(x)}{x} - 1 \right| \le c_1 e^{-c\sqrt{\log x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left| \frac{\psi(x)}{x} - 1 \right| = 0$

$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \therefore \psi(x) \sim x$ ∎

Recordatorio

- $$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & , n = p^{\alpha} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- Se definen las funciones de Chebishev como

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad , \forall x \geq 1$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad , \forall x \geq 1$$

Def.- Se define a la función contadora de primos como

$$\pi_1(x) := \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \quad , \forall x \geq 2$$

Se define a la función $\pi_m(x)$ como

$$\pi_m(x) = \sum_{p^m \leq x} 1$$

Proposición.- Tenemos para $m \in \mathbb{N}$ fijo y $x \geq 2$ la sig. estimación

$$\pi_m(x) \leq \sqrt[m]{x}$$

Dem.- Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y p - primo t.q $\sqrt[m]{x} < p$ $p \in (1, x)$

$\Rightarrow x < p^m$!!! $\therefore \pi_m(x) \leq \sqrt[m]{x}$

Teorema: $\exists\, c>0$ constante absoluta t.q.

$$\vartheta(x) = x + O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

Dem: Sabemos ya que $\exists\, c>0$ t.q. $\psi(x) = x + O\underbrace{\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)}_{f(x)}$

~~por otro lado $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \sum_{p} \ldots$~~

Sea ahora $x \ge 2$ fijo y consideramos $\boxed{k = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor}$ (*)

obs: $\log x \ge \log 2 \Rightarrow \log x / \log 2 \ge 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \ge 1$

Ahora sea p un primo arbitrario

$$p^{k+1} \ge 2^{k+1} \overset{(*)}{>} 2^{\frac{\log x}{\log 2}} = x$$

concluimos que $p^{k+1} > x \Rightarrow$

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \sum_{p\le x} \log p + \sum_{m=2}^{k} \Big(\sum_{p^m \le x} \log p \Big)$$

$$= \vartheta(x) + \sum_{m=2}^{k} \Big(\sum_{p^m \le x} \log p \Big)$$

$$\therefore\ \vartheta(x) = \psi(x) - \sum_{m=2}^{k} \Big(\sum_{p^m \le x} \log p \Big) = x + f(x) - \sum \sum (\ldots)$$

$$\therefore\ |\vartheta(x) - x| = |f(x) - \sum(\ldots)|$$

$$\Rightarrow \vartheta(x) - x \ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + \sum_{m=2}^{k} \Big(\sum_{p^m \le x} \log p \Big)$$

$\log p \le \log x$ $$\ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + \log x \sum_{m=2}^{k} \Big(\sum_{p^m \le x} 1 \Big)$$

$$\ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + \log x \sum_{m=2}^{k} \pi_m(x)$$

proposición $\rightarrow$ $$\ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + \log x \sum_{m=2}^{k} \sqrt[m]{x}$$

$$\ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + \log x \cdot \sqrt{x} \sum_{m=2}^{k} 1$$

Ahora, pero $\sum_{m=2}^{k} 1 = k-1 \le k = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \le \log x$

$\therefore \quad \psi(x) - x \ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + \underbrace{\sqrt{x}\log^2(x)}_{g(x)}$

Ahora:

$$g(x) = \sqrt{x}\log^2 x = x\frac{\log^2 x}{\sqrt{x}}$$

Obs.- Consideramos el sig. limite

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^4}{e^{\frac{1}{2}y^2 - cy}} = 0$$

$\therefore \quad y^4 \ll e^{\frac{1}{2}y^2 - cy}$

Sea $y = \sqrt{\log x} \Rightarrow \log^2 x \ll e^{\frac{1}{2}\log x} e^{-c\sqrt{\log x}} \ll \sqrt{x}\, e^{-c\sqrt{\log x}}$

$\Rightarrow \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} \ll e^{-c\sqrt{\log x}} \quad \therefore \quad g(x) \ll x e^{-c\sqrt{\log x}}$

$\therefore$ ~~$\psi(x) - x$~~

$$\psi(x) - x \ll x e^{-c\sqrt{\log x}} \quad \blacksquare$$

Lema.- Sea $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ sucesión, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f \in C^1[a,b]$ y definimos

$$S(u) = \sum_{a<n\leq u} c_n, \quad \forall u \in [a,b]$$

Entonces

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b S(u) f'(u)\,du + S(b) f(b)$$

Visto con ayudante

Corolario.- $\psi(x) \sim x$

Dem.- Inmediato

Teo - (De los números primos). Existe $c > 0$ constante absoluta t.q

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-(\sqrt{c \log x})}\right), \quad x \geq 2$$

Dem - Sea $x \geq 2$ fijo. Usamos la formula de sumación con los sig. elementos

i) $c_n = \begin{cases} \log n, & \text{si } n \text{ - primo} \\ 0 & \text{p.o.c.} \end{cases}$

ii) Sea $f : [3/2, x] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{\log x}$.

Claramente $f \in C^1[3/2, x]$

iii) Tenemos que $\forall u \in [3/2, x]$ $S(u) = \sum_{3/2 < n \leq u} c_n = \sum_{p \leq u} \log p = \vartheta(u)$

Entonces de la formula de sumación $\Rightarrow$

$$\sum_{3/2 < n \leq x} c_n f(n) = -\int_{3/2}^x \vartheta(u) f'(u)\, du + \vartheta(x) f(x)$$

Obs 1.- $\sum_{3/2 < n \leq x} c_n f(n) = \sum_{p \leq x} \log p \frac{1}{\log p} = \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x)$

Obs 2.- $\forall u \in (3/2, 2)$, $\vartheta(u) = 0$ (No hay primos en $(3/2, 2)$)

$\therefore$ $\pi(x) = -\int_2^x \vartheta(u) f'(u)\, du + \vartheta(x) f(x)$

por otro lado vimos que $\vartheta(u) = u + \underbrace{O\left(u e^{-(\sqrt{c \log u})}\right)}_{g(u)}$

$$\Rightarrow \pi(x) = -\int_2^x u f'(u)\, du - \int_2^x g(u) f'(u)\, du + x f(x) + g(x) f(x)$$

$$= -u f(u)\Big|_2^x + \int_2^x f(u)\, du \cdot \cancel{x f(x)} \int_2^x - + x f(x) + g(x) f(x)$$

Escaneado con CamScanner

$$= -x\cancel{f(x)} + 2f(2) + \int_2^x \frac{du}{\log u} - \int_2^x g(u) f'(u)\, du + \cancel{x f(x)} + g(x) f(x)$$

$$= \underbrace{\int_2^x \frac{du}{\log u}}_{Li(x)} + 2f(2) - \int_2^x g(u) f'(u)\, du + g(x) f(x)$$

$$\Rightarrow \pi(x) - Li(x) \ll \int_2^x |f'(u)|\, |u e^{-c\sqrt{\log u}}|\, du + \frac{x e^{-c\sqrt{\log x}}}{\log x}$$

$\frac{1}{\log x} \ll 1$

$$\ll \int_2^x \frac{1}{u \log^2 u} \cdot u e^{-c\sqrt{\log u}}\, du + x e^{-c\sqrt{\log x}}$$

$\frac{1}{\log^2 u} \ll 1$

$$\ll \underbrace{\int_2^x e^{-c\sqrt{\log u}}\, du}_{H(x)} + x e^{-c\sqrt{\log x}}$$

Estimando $H(x)$:

$$H(x) = \underbrace{\int_2^{\sqrt{x}} e^{-c\sqrt{\log u}}\, du}_{h_1(x)} + \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^x e^{-c\sqrt{\log u}}\, du}_{h_2(x)}$$

- $h_1(x)$ es continua en un compacto:

$$h_1(x) \leq e^{-c\sqrt{\log(2)}} (\sqrt{x} - 2)$$

$$\Rightarrow h_1(x) \ll \sqrt{x} \ll x$$

- $h_2(x) \leq e^{-c\sqrt{\log \sqrt{x}}} (x - \sqrt{x})$

$$\therefore h_2(x) \ll x e^{-c_1 \sqrt{\log x}}$$

$$\therefore H(x) \ll h_1(x) + h_2(x) \ll x + x e^{-c_1\sqrt{\log x}}$$

$$\ll x e^{-c_1 \sqrt{\log x}}$$

Ahora

$$\pi(x) - Li(x) \ll x e^{-c\sqrt{\log x}} + x e^{-c\sqrt{\log x}}$$

$$\ll x e^{-c_2\sqrt{\log x}} \quad \text{con} \quad c_2 = \min\{c_1, c\}$$

■

Obs.- En el teo. anterior tenemos que $\exists\, c > 0$ t.q.

$$\pi(x) = Li(x) + O(x e^{-c\sqrt{\log x}})$$

Lema.- Se cumple la estimación

$$Li(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

Dem.- Integrando por partes $Li(x)$

$$Li(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u}$$

$$= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u}$$

$$\Rightarrow Li(x) \ll \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

pero $\int_2^x \sim = \int_2^{\sqrt{x}} \sim + \int_{\sqrt{x}}^x \sim \leq \frac{1}{\log^2(2)}(\sqrt{x}-2) + \frac{1}{\log^2\sqrt{x}}(x-\sqrt{x})$

$$\ll \sqrt{x} + \frac{x}{\log^2 x} \ll x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\log^2 x}\right)$$

Pero $\lim_{x\to\infty} \frac{1/\sqrt{x}}{1/\log^2(x)} = 0 \Rightarrow Li(x) \ll x\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{\log^2 x}\right)$

$$\ll \frac{x}{\log^2(x)}$$

■

Obs.- $x e^{-c\sqrt{\log x}} \not\to 0$ cuando $x \to \infty$ por lo que el TNP solo nos dice que el error no sobrepasa $x e^{-c\sqrt{\log x}}$.

Teorema: (TNP Gauss.) Se tiene que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Dem: Tenemos que por el TNP por de la Valle-Poussin

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

$$= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

$$\Rightarrow \pi(x) - \frac{x}{\log x} \ll \frac{x}{\log^2 x} + x e^{-c\sqrt{\log x}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\pi(x)}{x/\log x} - 1 \right| \ll \frac{1}{\log x} + \log x \, e^{-c\sqrt{\log x}}$$

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} + \log x \, e^{-c\sqrt{\log x}} = 0$

$$\Rightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \left(\text{pues } \lim \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1\right)$$

Hip. de Riemann: Los ceros no triviales ρ_n de la función zeta cumplen que

$$\rho_n = 1/2 + i\gamma_n$$

Teorema: Los sig. enunciados son equivalentes

1) La Hip. de Riemann es cierta
2) $\psi(x) = x + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right)$
3) $\vartheta(x) = x + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right)$
4) $\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right)$

Dem:-

(1) ⇒ (2) Sabemos que para $\forall x \geq 2$ y $T \in [2, x]$

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right)$$

$$\Rightarrow |\psi(x) - x| \ll \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{|x^{\rho_n}|}{\rho_n} + \frac{x \log^2 x}{T}$$

ver Dem pasada de lo de arriba

$$\underset{H.R.}{\ll} \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{|\gamma_n|} + \frac{x \log^2 x}{T}$$

$$\ll \sqrt{x} \log^2 x + \frac{1}{T} x \log^2 x$$

$$\underset{T = \sqrt{x}}{\ll} \sqrt{x} \log^2 x$$

(2) ⇒ (3) Igual por una demostración hecha sabemos que

$$\vartheta(x) \cancel{x} = \psi(x) - x - \sum_{m=2}^{k} \sum_{p^m \leq x} \log p \qquad \text{con } k = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$$

$$\Rightarrow |\vartheta(x) - x| \ll \psi(x) - x + \sqrt{x} \log^2 x$$

$$\ll \sqrt{x} \log^2 x + \sqrt{x} \log^2 x$$

3) ⇒ 4) Se sustituye en la demostración del T.N.P

4) ⇒ 1) Se usa una representación de π con los ceros ρ_n, pero no alcanzamos a verla :(