Def.- Los arreglos podemos verlos como funciones de un conjunto $\mathbb{Y}=\{1,2,3,\ldots,n\}$ a un conjunto $\mathbb{X}=\{1,\ldots,m\}$, representándolos como $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$ con lo que la cantidad de formas de ordenar los elementos del conjunto $\mathbb{X}$ en conjunto de m elementos será la cardinalidad del conjunto $|\mathbb{X}^{\mathbb{Y}}| = |\mathbb{X}|^{|\mathbb{Y}|} = m^n$

Def.- para los arreglos sin repetición se tiene que una vez es escogido un elemento nos quedarán $n-1$ para escoger, y así sucesivamente hasta m siendo en total $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ o $\frac{n!}{(n-m)!}$ y lo denotaremos por

$$A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Obs. Si $m > n \Rightarrow A_m^n = 0$

Obs.- La cantidad de arreglos sin repetición es igual a la cantidad de funciones inyectivas de $\mathbb{Y}$ en $\mathbb{X}$ $\Rightarrow A_m^n = |\{f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \mid f \text{ inyectiva}\}|$

Notación.- Sea $x \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o cualquier anillo entonces se define

$$x^{\underline{m}} = (x)(x-1)\cdots(x-m+1)$$

"x a la m decreciendo"

Con esta notación $A^n_m = n^{\underline{m}}$

Def.- Si $n=m$ entonces $A^n_n = n!$.
que serán las permutaciones.

Proposición.- $A^{m+1}_n = A^m_n + n A^m_{n-1}$.

Dem.- contemos xD

Def.- Una combinación de K objetos tomados de n objetos es un subconjunto de tamaño k de un conjunto de tamaño n.

"son ~~sin~~ ~~repetición~~ sin repetición y sin orden"

Definimos $\binom{n}{K}$ = # de combinaciones de K objetos tomados de un conjunto de n objetos.

"n en K"

Obs.- Con esta definición si $K>n \Rightarrow \binom{n}{K}=0$

obs.- $\binom{n}{K} \cdot K! = A^n_K$

$\therefore$ si $n \geq K \Rightarrow \binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$

Notación: $[n] = \{1, \dots, n\}$

Obs.- Recordemos que a los arreglos los identificamos como conjuntos de funciones, habrá algo parecido para las combinaciones.

Sea $A = \{f : [n] \to X : f \text{ función}\}$ y $S_X = \{\sigma : X \to X : \sigma \text{ biyectiva}\}$

Definimos la relación $\sim$ en A como $f \sim g$ si y solo si $\exists \sigma \in S_{[n]}$ t.q. $f = g \circ \sigma$ (es de equivalencias)

Así las combinaciones se identifican como $\{f : [n] \to X \mid f \text{ inyectiva módulo } S_{[n]}\}$ es decir, no nos importa el orden del dominio y considera por iguales dos funciones relacionadas.

Obs.- Consideremos $A = \{f : [n] \to [m]\}$

	f en general	f inyectiva	f supra
f	m^n	$A^m_n = m^{\underline{n}}$	
$f \circ \sigma$		$\binom{m}{n}$	
$\tau \circ f$			
$\tau \circ f \circ \sigma$			

En el curso llenaremos esta tabla.

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Dm.- La suma es la suma de todos los subconjuntos de tamaño 0, ($\emptyset$), 1, 2, ..., n elementos de un conjunto de n elementos. Entonces estoy contando todos los subconjuntos de un conjunto de tamaño n que es $\wp(X)$ y sabemos que $|\wp(X)| = 2^n$

$\therefore \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Dm.-

- $A_k^{n+m} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j^m A_{k-j}^n$

Dm.-

Proposición.- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k}$

Dem.- Términos que $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{-veces}}$

Esto es multiplicar los términos de todos los distintos maneras

Así tomo j-factores de a y de los demás escojo los b's $\Rightarrow$.

~~[illegible]~~ (notas)

Obs.- $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j} b^{n-j} = \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!} a^{j} b^{k}$

Obs.- con lo anterior $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} a^{i} b^{j} c^{k}$

Proposición.- se tiene que

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m}$$

Obs.- Se define $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$
como el coeficiente multinomial.
con $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Es el numero de permutaciones de n objetos donde k_1 de ellos se consideran iguales
k_2 " "
$\vdots$
k_m " " //

Aplicación.- ¿De cuantas formas se puede permutar la palabra mississipi?

Tenemos 11 palabras, 1 m, 4 s's
4 i's y 2 p's
$\Rightarrow$
∴ seran $\binom{11}{4,4,2,1} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!}$

$= 34,650$.

Obs.- Tenemos que $(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$

Por otro lado $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) (1+x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k - \binom{n}{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k - \cancel{\binom{n}{-1} x^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^k$$

$$\therefore \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

proposición - se tiene que $\binom{2n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k-j}$

Dem - Termino gral $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$

por otro lado

$$(1+x)^{2n} = \left[(1+x)^n \right]^2 =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right]^2 = \left[\binom{n}{0} x^0 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right] \left[\binom{n}{0} x^0 + \dots \binom{n}{n} x^n \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \left[\binom{n}{0} \binom{n}{k} + \binom{n}{1} \binom{n}{k-1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n}{0} \right] x^k$$

$$\therefore \binom{2n}{k} = \binom{n}{0} \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n}{0}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k-j}$$

¿De cuántas formas un entero positivo se puede ver como suma de enteros (positivos)? (incluido a cero)

Queremos ver las soluciones de la ec.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

por ejemplo tomemos $r = 3$, $n = 5$ y agamos el sig. ejercicio

$$00 \mid 0 \mid 00 \qquad 000 \mid \mid 00$$
$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$
$$2+1+2 \qquad 3+0+2$$

Entonces el total de formas serán las permutaciones de los objetos $00000 \mid \mid$

que son $\binom{5+2}{5,2}$

pues son $5+2$ objetos donde 5 son iguales y 2 iguales

$$\Rightarrow \binom{7}{5,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$$

En general, las formas posibles serán

$$\underbrace{0\,0\,0\cdots0}_{n}\ \underbrace{|\,|\,|\cdots|}_{r-1}$$

$\Rightarrow$ Habrá $\binom{n+r-1}{n,\, r-1}$ soluciones

para $x_1+\dots+x_r=n$ y sabemos que

$$\binom{n+r-1}{n,\, r-1} = \binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

¿Qué pasa si ahora quiero que $x_i \neq 0$?

podemos aplicar la misma técnica, pero ahora tomamos $n-r$ bolitas y $r-1$ separadores, y así al colocarlas me quedarán espacios vacíos, y con las r's bolitas que me sobraron, las coloco de 1 en 1 en cada separación

$\Rightarrow$ la cantidad de soluciones será

$$\binom{(n-r)+r-1}{n-r,\, r-1} = \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$$

Def: Denotamos por $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ a un conjunto en el que sí nos importa cuántos elementos hay de cada uno (multiconjunto)

Ejm: $[1,1,1,2] = [2,1,1,1] \neq [1,1,2]$

No me importa el orden ni que haya repeticiones pero sí cuántos hay de cada uno.

Tomamos $\{1, 2, \ldots, n\} = A$

¿Cuántos multiconjuntos puedo formar con elementos de ese conjunto?

Una infinidad, pues puedo tomar $[1], [1,1], \ldots$ etc.

¿Cuántos multiconjuntos puedo formar de tamaño m con elementos de A?

Hacemos algo similar, tomo $n-1$ separadores y tomo m bolitas

$$\Rightarrow \underbrace{00\cdots0}_{1}|\underbrace{0\cdots0}_{2}|\underbrace{\cdots}_{3}|\underbrace{0\cdots0}_{n-1}|\underbrace{00}_{n}$$

y aquí identificamos cada casilla como el número de veces que aparece ese número

Si $A=\{1,2,3\}$ y $m=5$

$\Rightarrow$ $000|00|$ $\Leftrightarrow$ $[1,1,1,2,2]$

$0|00|00$ $\Leftrightarrow$ $[1,2,2,3,3]$

$\Rightarrow$ que como son $\underbrace{00\cdots0}_{m}$ $\underbrace{||\cdots||}_{n-1}$

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}$$

Recordemos que en $\{f : [n] \to [m]\}$ definimos la relación $f \sim g \iff \exists \sigma$ permutación t.q. $f \circ \sigma = g$

y así $\left| \{f : [n] \to [m] : f \text{ inyectivas}\}/\sim \right| = \binom{m}{n}$

con lo que acabamos de hacer obtenemos que

$$\left| \underbrace{\{f : [n] \to [m]\}}/\sim \right| = \binom{m+n-1}{n}$$

multiconjuntos de tamaño n
de un conjunto de tamaño m

Ayudante

- ¿De cuantas maneras pueden colocarse una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de modo que se ataquen?

Hay 64 formas de acomodar la torre blanca y luego habrá 14 lugares disponibles para que las torres se ataque
∴ hay $64 \cdot 14$ formas.

$$\binom{n+k-1}{k}$$

$\{1, \ldots, n+2\}$ k $n \to n+2$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n-2+i}{i} \quad k \quad \binom{k+n-1}{k} \quad \begin{matrix} k+n+1 \\ n+k+ \end{matrix}$$

$$\binom{i+(n-2)}{i} \binom{k+(n-1)}{k} \binom{n+k-1}{k}$$

Ne cordimos que vimos que la ~~positivo~~ cantidad de soluciones para
$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ con $x_i \geq 1$
es $\binom{n-1}{n-r}$

Def: una composición de n en r partes es una solución de
$x_1 + \dots + x_r = n$ con $x_i \geq 1$.

Así hay $\binom{n-1}{n-r}$ composiciones de n en r partes.

¿Cuantas composiciones tiene un número n?

sería $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$

Ejemplo: 4

4 $\quad \binom{3}{0} = 1$

1+3
3+1 $\quad \binom{3}{1} = 2$

1+1+2
1+2+1
2+1+1 $\quad \binom{3}{2} = 3$

1+1+1+1 $\quad \binom{3}{3} = 1$

Ahora lo que yo quiero es considerar como iguales a los sumandos $1+2+1$, $1+1+2$ y $2+1+1$.

Def.- Una partición de n en r partes es un multiconjunto $\{x_1, ..., x_r\}$ t.q. $x_1 + \cdots + x_r = n$ lo denotaremos por $p(n, r)$ y al total de particiones con $p(n)$

Ejemplo:

$p(4,1) = 1 \Rightarrow 4$

$p(4,2) = 2 \Rightarrow 1+3$, $2+2$

$p(4,3) = 1 = 1+1+2$

$p(4,4) = 1 = 1+1+1+1$

$\therefore \; p(4) = 1+2+1+1 = 5$

Lamentablemente no hay formula explicita para las particiones.

proposición.- Sea $n > 0$, $0 < r \leq n$, entonces

$$\underbrace{p(n,r)}_{} = \underbrace{p(n-r, r)}_{\text{particiones donde no aparece el } 1} + \underbrace{p(n-1, r)}_{\text{particiones donde aparece el } 1}$$

Dm: ~~Por~~

Sea $x_1, \ldots, x_r$ una partición $(x_1 + \cdots + x_r = n)$

- Si $x_i \neq 1 \ \forall i \Rightarrow$ puedo restar 1 a cada uno teniendo $x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_r - 1$

$\Rightarrow (x_1 - 1) + \cdots + (x_r - 1) = n - r$ es una partición de $n-r$ en r partes

- Si hay al menos un $x_i = 1$

$\Rightarrow x_1 + \cdots + x_{i-1} + 1 + x_{i+1} + \cdots + x_r = n$

$\Rightarrow x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_r = n-1$

es una partición de $n-1$ en $r-1$ sumandos

$\therefore \ p(n, r) = p(n-r, r) + p(n-1, r-1)$ $\blacksquare$

obs) • si $r > n \Rightarrow p(n, r) = 0$.

• $p(n, n) = 1$, $p(n, 1) = 1$

Otra forma de contar las particiones

$p'(n, k)$ es el número de particiones de n donde el mayor sumando es k

Así $p'(8,3)=5$

$3+3+2$
$3+3+1+1$
$3+2+2+1$
$3+2+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1$

Note que en este caso $p'(8,3)=p(8,3)$

Proposición: Se tiene que

$$p'(n,k)=p'(n-k,k)+p'(n-1,k-1)$$

k aparece más de una vez — k aparece una vez

con esto $p'(n,k)=0$ si $k>n$
$p'(n,n)=1$, $p'(n,1)=1$

$\therefore$ $p(n,k)=p'(n,k)$

Otra notación

$\bar{p}(n,k)$ es el número de particiones de n en a lo más k partes

$$\Rightarrow \bar{p}(n,k)=\sum_{i=1}^{k} p(n,i)$$

Si $A = \{ f : [n] \to [m] \mid f \text{ suprayectiva} \}$

Definimos $f \sim g \iff$ existen τ permutación de $[m]$ y σ permutación de $[n]$ t.q. $f = \tau \circ g \circ \sigma$

$\Rightarrow |A/\sim| = p(n,m)$

Recordemos como vamos con la tabla

$f : [n] \to [m]$

	todos	inyectiva	suprayectiva
f	m^n	$m^{\underline{n}}$	
$f \circ \sigma$	$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{n-m}$
$\tau \circ f$		$[n \leq m]$	
$\tau \circ f \circ \sigma$	$\bar{p}(n,m)$	$[n \leq m]$	$p(n,m)$

~~Def: Dado un conjunto X, una partición de X~~

Def:- Sea X un conjunto y $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ no vacío, t.q. $\forall A, B \in P$, $A \neq B$, $A \cap B = \emptyset$ y t.q. $\bigcup_{A \in P} A = X$. Decimos entonces que P es una partición de X.

Ejemplo: Sea $X = \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow$ $P_1 = \{\{1, 2, 3\}\}$ es partición

$P_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ es partición

$P_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$

$P_3 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$

$P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

todas las son particiones

Def:- Denotamos por $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ al número de particiones de un conjunto X de tamaño n en k partes.

Se les conoce como los números de Stirling de segundo tipo, o para evitar confusiones simplemente los números de particiones de Stirling

Unas propiedades inmediatas son

- $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$
- $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$
- $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$
- $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ si $k > n$.
- $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$

Def.- Denotamos por B_n al número total de particiones de $[n]$ y se llama el n-ésimo número de Bell.

Obs.- Es claro que $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$

Obs.- Como $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \Rightarrow B_0 = 1$.

Proposición.- Sea $[n]$ con $n \geq 0$, entonces

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\}$$

$k \geq 0$

Dem.- Tenemos que $[n+1] = \{1, \dots, n, n+1\}$

- ¿Cuántas particiones hay que tienen a $n+1$ solo?

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{k-1}\ \boxed{\{n+1\}} \Rightarrow \left\{ {n \atop k-1} \right\}$$

- ¿Cuántas donde $n+1$ no esté solo?

Tomo una partición de los primeros n en k

partes y ahora tengo que poner el $n+1$ en alguna de las partes siendo $k \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$ ■

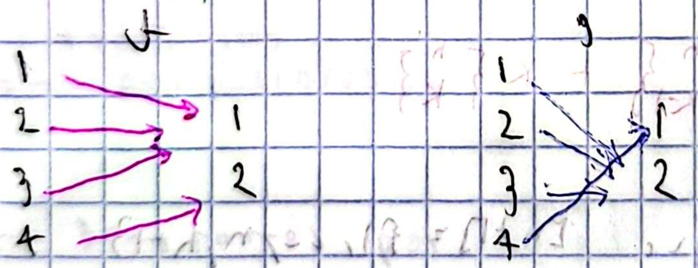
Ejemplo:

$$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = \left\{ {3+1 \atop 2} \right\} = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {3 \atop 2} \right\} = 1 + 2 \left[\left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2 \cdot \left\{ {2 \atop 2} \right\} \right]$$

$$= 1 + 2[1 + 2 \cdot 1] = 1 + 2 \cdot 3 = 7.$$

Obs: Sea $\{ f : [n] \to [m] \mid$ supra yectivas $\}$ y decimos que $f \sim g$ si existe τ permutación de $[m]$ t.q. $g = \tau \circ f$

Si $n = 4$ y $m = 2$



Así $f \sim g$

f: $\{1,2,3\}$ $\{4\}$ $\qquad$ g: $\{1,2,3\}$ $\{4\}$

Así $\{ f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(m) \}$ es partición de $[n]$

$$\left| \{ f : [n] \to [m] \mid f \text{ supra yectivas} \} / \sim \right| = \left\{ {n \atop m} \right\}$$

¿ $\left|\{f:[n]\to[m] : f \text{ función}\}/\sim\right|$?

con $f \sim g \iff \exists\, \tau$ biyectiva tq $g = \tau \circ f$

Tenemos que $f:[n] \to \operatorname{Im} f$ es inyectiva
entonces sea $|\operatorname{Im} f| = k$ con $0 \leq k \leq m$

$\Rightarrow \left|\{f:[n]\to \operatorname{Im} f\}/\sim\right| = \left\{ {n \atop k} \right\}$

y como ~~estoy~~ estoy considerando módulo el contradominio siempre puedo dar una biyección entre $\operatorname{Im} f$ y $[k]$, por lo que puedo considerar $f:[n]\to[k]$, así

$$\boxed{\left|\{f:[n]\to[m]\}/\sim\right| = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {n \atop k} \right\}}$$

Ahora solo falta saber $\left|\{f:[n]\to[m] : \text{suprayectiva}\}\right|$

Teniendo $f:[n]\to[m]$, puedo tomar $\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(m)\}$ y esto es una partición de $[n]$ ya que f es suprayectiva. donde si me importa el orden, por eso lo considero como una m-ada

Teniendo así $\left\{ {n \atop m} \right\}$ posibles particiones, una vez esto cuantas distintas formas puedo ordenar los $f^{-1}(k)$, puedo de $m!$ formas, teniendo así $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$ funciones suprayectivas.

Escaneado con CamScanner

$|\{f : [n] \to [m] \mid \text{suprayectiva}\}| = m! \left\{ {n \atop m} \right\}$

Tenemos los sig.

- $\bar{p}(n,m) = \sum_{k=0}^{m} p(n,m)$
- $= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$
- $\binom{m+n-1}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n-1}{n-k}$
- ¿Que relación hay entre $m! \left\{ {n \atop m} \right\}$ y m^n?

$\Rightarrow \quad m^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$

Identidades

- $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}$
- $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$
- $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

Def: una relación de recurrencia es una sucesión que cumple que $a_n = f(n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$

obs) Hay relaciones de recurrencia muy difíciles de tratar, por ejemplo, $a_n = a_{n-1}^2 + 1$, $a_n = n \cdot a_{n-1} = n!$, etc.

obs.- Hay relaciones de recurrencia sencillas por ejemplo las lineales.

$$a_n = r a_n + s \quad , \text{con } r, s \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $a_{n+1} = r a_n + s$

$$= r(r a_{n-1} + s) + s = r^2 a_{n-1} + (1+r)s$$

$$= r^2(r a_{n-2} + s) + (1+r)s$$

$$= r^3 a_{n-2} + (1+r+r^2)s$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = r^{n+1} a_0 + (1+r+\dots+r^n)s$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = r^{n+1} a_0 + \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \cdot s \quad , \text{ si } r \neq 1$$

$$a_{n+1} = a_0 + (n+1)s \quad , \text{ si } r = 1$$

● $a_{n+1} = 2a_n + n \quad , a_0 = 0$

$$\Rightarrow a_{n+1} + n + 1 = 2a_n + 2n + 1$$

$$= 2(a_n + n) + 1$$

así sea $b_n = a_n + n$,

$\Rightarrow$ $b_{n+1} = 2b_n + 1$ con $b_0 = 0$

y por lo anterior

$$\Rightarrow b_n = 2^n b_0 + 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}$$
$$= 2^n - 1$$

$\Rightarrow$ $a_n + n = 2^n - 1$ $\therefore$ $a_n = 2^n - n - 1$

Ahora consideremos de la forma $x_{n+2} = r x_{n+1} + s x_n$

Si x_n y y_n satisfacen la relación anterior

$a x_{n+2} + b y_{n+2} = a(r x_{n+1} + s x_n) + b(r y_{n+1} + s y_n)$

$= r(a x_{n+1} + b y_{n+1}) + s(a x_n + b y_n)$

$= r z_{n+1} + s z_n$

Por lo que $z_{n+2} = a x_{n+2} + b y_{n+2}$ satisface la relación también.

$\therefore$ estas me forman un espacio vectorial entonces debe existir una base que me genere a todos.

Sea u_n, con $u_0=0$, $u_1=1$ y v_n, con $v_0=1$, $v_1=0$ que satisfacen la relación, veamos que $\{u_n, v_n\}$ es base.

Sea x_n, $x_0=\alpha$, $x_1=\beta$ que satisface la relación, entonces

$$x_n = \beta u_n + \alpha v_n$$

Esto es pues ambos satisfacen la misma relación y como $x_0 = \beta u_0 + \alpha v_0 = \alpha$ y $x_1 = \beta u_1 + \alpha v_1 = \beta$ entonces ambos son iguales.

Con esto basta trabajar con las sucesiones u_n y v_n.

Con esto por ejemplo, la base para las sucesiones con relación $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ son $u_n = F_n$, $v_n = F_{n-1}$ la sucesión de fibonacci.

Lo anterior se puede generalizar para sucesiones que cumplan

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \cdots + a_k x_n$$

e igual forman un espacio vectorial por lo que existe una base, que serán

$$u^{(1)}_{n+k} = a_1 u^{(1)}_{n+k-1} + \cdots + a_k u^{(1)}_n$$

con $u^{(1)}_0 = 1$, $u^{(1)}_1 = 0 = u^{(1)}_2 = \cdots = u_{k-1}$

y

$$u^{(2)}_{n+k} = a_1 u^{(2)}_{n+k-1} + \cdots + a_k u^{(2)}_n$$

con $u^{(2)}_0 = 0$, $u^{(2)}_1 = 1$, $u^{(2)}_2 = 0 = u^{(2)}_3 = \cdots = u^{(2)}_{k-1}$

⋮

Por ejemplo si tengo $x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 3x_n$
con $x_0 = 7$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Entonces $a_{n+2} = \sim$
con $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$

$b_{n+1} = \sim$
con $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$

$c_{n+1} = \sim$
con $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$

Es base y además

$$x_n = 7a_n + 2b_n + 5c_n$$

Considerando el polinomio asociado

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n$$

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son las raíces del polinomio, entonces

$(\alpha_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$
$(\alpha_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$
$\vdots$
$(\alpha_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$

satisfacen la relación de recurrencia

pues $\alpha^{n+k} = \alpha^n \cdot \alpha^k = \alpha^n [a_1 \alpha^{k-1} + \dots + a_k]$
$= a_1 \alpha^{n+k-1} + \dots + a_k \alpha^n$

Si todas las raíces son distintas, entonces $(\alpha_1^n), \dots, (\alpha_k^n)$ forman una base y entonces

$$x_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \dots + c_k \alpha_k^n$$

Así por ejemplo, considerando $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$
con $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 2$

Considero el polinomio asociado $x^3 = x^2 + x + 1$

$\Rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$

$\beta = i$

$\gamma = -i$

$\therefore$ como $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ~~forman una base~~

$(\alpha^n), (\beta^n), (\gamma^n)$ forman una base

$\therefore X_n = a \cdot 1^n + b \cdot i^n + c \cdot (-i)^n$ p-a a, b, c

$\Rightarrow$ $1 = X_0 = a + b + c$ (1)

$0 = X_1 = a + bi - ci$ (2)

$2 = X_2 = a - b - c$ (3)

sumando (1)+(3) $\Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 3/2}$

sumando (2)+i(3) $\Rightarrow 2i = a + ai - 2ci$

$\Rightarrow 2i = 3/2 + 3/2\, i - 2ci$

$\Rightarrow 2ci = 3/2 + (3/2 - 2)i$

$\Rightarrow ci = \frac{3}{4} + (\frac{3}{4} - 1)i \Rightarrow c = -\frac{3}{4}i + (\frac{3}{4} - 1)$

$\Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i}$

sumando (2)-(3) $\Rightarrow -2i = a - ai + 2bi$

$\Rightarrow 2bi = -a - (a - 2)i$

$bi = -\frac{3}{4} - (\frac{3}{4} - 1)i$

$b = \frac{3}{4}i - (\frac{3}{4} - 1)$ $\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i}$

$\therefore \quad x_n = \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i\right) i^n + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i\right)(-i)^n$

obs: sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k x^k$

como $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ con $|x| < 1$

$\Rightarrow$ derivando $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\therefore \quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^k$ y decimos

que $\underbrace{f(x)}_{= \frac{x}{(1-x)^2}}$ "genera" a la sucesión $\{k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Por otro lado, sabemos que, $f(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^3}$

y como $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, derivando

$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k\, x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}$

$\Rightarrow f(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} x^k$

Así $g(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$ "genera" a $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$

$\sum_{i=0}^{n} k$

y por otro lado

$$f(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$$

$$= (0+x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} (i)\cdot(1)\right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} x^k$$

$a_n \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la función generatriz ordinaria

$a_n \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ la función generatriz exponencial

$a_n \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ la función generatriz de Dirichlet

Ejemplos

De manera inductiva por lo hecho anteriormente tendremos que

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\underline{m}}\, x^{n-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\underline{m}}}{m!}\, x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

Obs: ¿Qué pasa con $\sum_{n=0}^{\infty} n^m x^n$?

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum n(n-1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

Los de n^m no salen tan bonitos pero los de $n^{\underline{m}}$ sí.
Recordamos a los polinomios como espacio vectorial

$1, n, n^2, \ldots$
$1, n, n^{\underline{2}}, n^{\underline{3}}, \ldots$

Estos últimos forman una base
Luego se verá que al hacer cambio de base entre ellos aparecen los números de Stirling

Def.- Dada una sucesión a_n denotamos por $G(a_n)(x)$ a su función generadora.

Prop.- Se cumplen las sig.:

- $G(a_n + b_n) = G(a_n) + G(b_n)$
- $G(\alpha a_n) = \alpha G(b_n)$
- $G(a_n) G(b_n) = G\left[\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right]$

Def.- Si $a = a_n$ y $b = b_n$ entonces se define la convolución ordinaria de a y b como

$$a * b = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)_n$$

Caso importante $b_n = 1$

$$G(a_n) G(b_n) = \frac{G(a_n)}{1-x} = G\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)$$

Considérons $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 1$, $a_0 = 0$

$a_1 = 1$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow \quad a_{n+2} x^{n+2} = a_{n+1} x^{n+2} + 2 a_n x^{n+2} + x^{n+2}$

$\Rightarrow \quad \sum \sim \; = \; \sum + \sum + \sum$

$\Rightarrow \quad f(x) - a_0 - a_1 x = x(f(x) - a_0) + 2x^2 f(x) + x^2 \cdot \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow \quad f(x) - x = x f(x) + 2x^2 f(x) + \frac{x^2}{1-x}$

$\Rightarrow \quad f(x)\left[1 - x - 2x^2\right] = \frac{x^2 + x - x^2}{1-x}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x-2x^2)}$

$= \frac{x}{(1-x)(1+x)(1-2x)}$

$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-2x}$

$\Rightarrow \quad x = (1+x)(1-2x)A + (1-x)(1-2x)B + (1-x)(1+x)C$

$\Rightarrow \quad x = -1 \Rightarrow -1 = (2)(3)B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{6}}$

$x = 1 \Rightarrow 1 = (2)(-1)A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = (1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})C$

$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})C \Rightarrow \boxed{C = \frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{-1/2}{1-x} + \frac{-1/6}{1+x} + \frac{2/3}{1-2x}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{6} + \frac{1}{3}2^{n+1}\right) x^n$$

pero $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\therefore \boxed{a_n = -\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{6} + \frac{1}{3}2^{n+1}}$$

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ con $a_0 = 1$

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow a_{n+1}x^{n+1} = (n+1)a_n x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) - a_0 = x^2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow f(x) - 1 = x^2 f'(x) + x f(x)$$

se complicó :/

probemos usando las exponenciales

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} a_{n+1} x^{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)!} a_n x^{n+1}$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{(n+1)!} a_{n+1}} x^{n+1}$

$$f(x) - \frac{a_0}{0!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n+1} = x f(x)$$

$\Rightarrow f(x) - 1 = x f(x) \Rightarrow f(x)[1-x] = 1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x}$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

$\Rightarrow 1 = \frac{a_n}{n!} \Rightarrow a_n = n!$

Propiedades Generatrices Exponenciales

Denotaremos por $E(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

- $E(a_n + b_n) = E(a_n) + E(b_n)$
- $E(\alpha a_n) = \alpha E(a_n)$
- $E(a_n) E(b_n) = E\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)$

Pues $E(a_n) E(b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} a_k b_{n-k}\right) x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k}\right) x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) x^n .$$

- $E(1) = e^x$

- $E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$= x\, e^x$$

- $E(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$

- $E(n^m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n^m x^n \quad , \; m \in \mathbb{Z}^+$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, n(n-1)\cdots(n-m+1)\, x^n$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!}\, n^m x^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n(n-1)\cdots 1} x^n$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m)(n-m-1)\cdots 1} x^n$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m)!} x^n \quad , \; k = n-m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+m} = x^m e^x$$

$$\therefore \; E(n^m) = x^m e^x$$

- $E(n!) = \frac{1}{1-x}$

- $E(n! a_n) = G(a_n)$

Obs ~~...~~ sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$

y $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$

para ahora puedo tomar $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^n y^m$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} y^m = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1+\cancel{x})$

$= \sum_{n=0}^{\infty} [x(1+y)]^n = \frac{1}{1-x(1+y)}$

y notemos que $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^n y^m$

$= \sum_{m=0}^{\infty} y^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} y^m \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$

$= \frac{1}{1-x} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{yx}{1-x}\right)^m = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{yx}{1-x}\right)}$

$= \frac{1}{1-x-yx} = \frac{1}{1-x(1+y)}$

D) Se define a los números de Stirling de primer tipo ó ~~números de particiones de Stirling~~, al número de ~~partici~~ permutaciones de un conjunto de n elementos con k ciclos.

Denotado por $\left[{n \atop k}\right]$

• $\left[{4 \atop 0}\right] = 0$

$\left[{4 \atop 1}\right] = 6$ (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)

Las permutaciones se ven como (1 a b c) por lo que las combinaciones de a, b, c serán 6

$\left[{4 \atop 2}\right] = 11$

Se verán como (1 a)(b c) ó (a b c)(d)
para la primera habrá 3 opciones pues una vez elegido 'a' b y c no pueden ser ni 1 ni a.

para la segunda hay 4 opciones para d, y los demás solo de 2 formas

$\left[{4 \atop 3}\right] = 6$

$\left[{4 \atop 4}\right] = 1$

proposición: se tiene que

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

con $k \leq n$

Recordamos que

- $\left\{ {n \atop k} \right\}$ número de particiones de $[n]$ en k partes

\# funciones de $[n]$ en $[m]$ es m^n

\# funciones sobreyectivas de $[n]$ en $[m]$ es $m! \left\{ {n \atop m} \right\}$

$$\Rightarrow m^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k! \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!(m-k)!} k! \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{k=0}^{n} m(m-1)\cdots(m-k+1) \left\{ {n \atop k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} m^{\underline{k}} \left\{ {n \atop k} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{p.d. } x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}}$$

Tenemos luego x^n y $\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$ son dos polinomios de grado n que coinciden en una infinidad de valores $(m \in \mathbb{Z}^+)$

$$\Rightarrow x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

Esto me da una forma de hacer un cambio de base en los polinomios.

Tenemos que $\mathbb{Q}[x]$ es un esp. vectorial sobre $\mathbb{Q}$ con base

$$B_1 = \{1, x, x^2, \dots\}$$

pero también son bases

$$B_2 = \{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \dots\}$$

$$B_3 = \{x^{\overline{0}}, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, \dots\}$$

así dado $p(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j = \sum_{j=0}^{r} a_j \sum_{k=0}^{j} \left\{ {j \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$

$$\boxed{x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k}$$

Dem:-

Tenemos que $\left[{n+1 \atop k+1} \right] = \left[{n \atop k} \right] + n \left[{n \atop k+1} \right]$

con $\left[{0 \atop 0} \right] = 1$, $\left[{n \atop 0} \right] = 0$ para $n \geq 1$, $\left[{n \atop n} \right] = 1$

por inducción:

$x^{\overline{0}} = 1$ y $\sum_{k=0}^{0} \left[{0 \atop k} \right] x^k = 1 \cdot x^0 = 1$. ✓

Sup. que $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$

$$x^{\overline{n+1}} = x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)$$

$$= x^{\overline{n}} \cdot (x+n) = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^{k} \cdot (x+n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} n \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k-1} x^{k} + \sum_{k=0}^{n} n \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^{k}$$

$$= \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k-1} x^{k} + \sum_{k=1}^{n} n \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^{k} + \cancel{n \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{0} x}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k-1} + n \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} \right) x^{k}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k} x^{k} \right) + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k} x^{k}$$

Tomamos esta última y evaluamos en $-x$

$$\Rightarrow (-x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} (-x)^{k}$$

$$(-x)(-x+1)\cdots(-x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} (-x)^{k}$$

$$\Rightarrow (-1)^{n} (x)(x-1)\cdots(x-n+1) =$$

$$\Rightarrow (-1)^{n} x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} (-x)^{k}$$

$$\Rightarrow x^{\underline{n}} = (-1)^{n} \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} (-1)^{k} x^{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^{k}}$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

Tenemos que

$$\boxed{x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{k-j} \left[{k \atop j} \right] x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] \right) x^j$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases}$$

Def.- Sea $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sucesión. Definimos la transformada binomial de $\{a_k\}$ como

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

$$T_B(a_k)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Obs.- T_B es lineal

• $T_B(\lambda a_k + b_k) = \lambda T_B(a_k) + T_B(b_k)$.

Obs.- Si $T_B(a_k)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ entonces

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T_B(a_k)_k$$

Dem.- Llamemos $b_n = T_B(a_k)_n$

Tenemos que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} \right] a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} \right] a_j$$

(*) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

(*) $$= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} \right] a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-j}{k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{n-k-j} \binom{n-j}{k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j (1-1)^{n-j} \quad (\triangle)$$

pero $\binom{n}{j}(1-1)^{n-j} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=j \\ 0 & \text{si } n>j \end{cases}$

$\Rightarrow (\triangle) = a_n \quad \blacksquare$

obs.- Si $a_n \rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] a_k$

$\rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} b_k = a_n$

obs. vimos que dada $\{a_k\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow T_B^{-1}(T_B(a_k)) = a_n$

¿ $T_B(T_B^{-1}(a_k)) = a_n$? Si

Dem.- $T_B(T_B^{-1}(a_k))$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{n}{k} a_j$$

$= \dots$ Lo mismo $= a_k$

Obs:- Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y denotamos por

$$S(a_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] a_k$$

entonces $S^{-1}(a_n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} a_k$

Dem:- Ya vimos que $S^{-1}(S(a_n)) = a_n$

$$S(S^{-1}(a_n)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} a_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop j} \right\} a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop j} \right\} \right) a_j$$

$$= a_n$$

(*)

Igual como probamos que $\sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right]$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n=j \\ 0 & \text{si } n\neq j \end{cases}$$

se puede probar (*) $\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop j} \right\}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n=j \\ 0 & \text{si } n\neq j \end{cases}$$

Ejemplo:-

- Dado A de tamaño K ¿cuantos conjuntos puedo construir usando K elementos?

$\Rightarrow \quad a_k = 1$

$$\Rightarrow \quad T_B(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

es la cantidad de conjuntos que puedo construir usando con subconjuntos de tamaño k.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 2^k = 1$$

- ¿Cuántas parejas puedo construir con elementos de $[n]$?

Sol: sabemos que son $n^2 \Rightarrow a_n = n^2$

$$\Rightarrow \quad T_B(a_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n$$

Son la cantidad de ~~[illegible]~~ parejas que puedo formar con elementos de los subconjuntos de $[n]$.

- Recordemos que teníamos que

$$m^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$$

$$= T_B\left(m! \left\{ {n \atop m} \right\} \right)$$

$$\Rightarrow \quad m! \left\{ {n \atop m} \right\} = T_B^{-1}(m^n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n$$

$$\Rightarrow \left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^{n}$$

Obs: Recordamos que vimos que

- $G(\{[{n \atop k}]\}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} [{n \atop k}] x^k = x^{\bar{n}}$
- Ahora calculamos variando la "n" su generatriz exponencial

$$\Rightarrow E[\{[{n \atop k}]\}_{n\in\mathbb{N}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [{n \atop k}] x^n$$

$$= \frac{1}{m!} (-\ln(1-x))^k$$

Obs: Sabemos que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$$\therefore \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^m$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$$

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0} a_{k_1} a_{k_2} x^{k_1} x^{k_2}\right) \cdots (\text{---})$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_m} x^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

tomando $n = k_1 + \cdots + k_m$

$$\Rightarrow (*) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_i \geq 0}} a_{k_1} \cdots a_{k_m} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{0 j_0 + j_1 + 2 j_2 + \cdots + n j_n \\ j_1 + \cdots + j_n = m}} \binom{m}{j_0, j_1, \ldots, j_n} a_0^{j_0} \cdot a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n} \right) x^n$$

Obs.- Teníamos que

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[n \atop m \right] x^n = \frac{1}{m!} [-\ln(1-x)]^m$$

$$= \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \right)^m = \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^m \quad \text{con } a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ \frac{1}{k} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_i \geq 1}} \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_2} \cdots \frac{1}{k_m} \right) x^n$$

y como $k_i \geq 1 \Rightarrow k_1 + \cdots + k_m \geq m$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \cdots = \sum_{n=m}^{\infty} \cdots$$

$$\therefore \left[n \atop m \right] = \frac{n!}{m!} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_i \geq 1}} \frac{1}{k_1 \cdots k_m}$$

Def.- Dada una sucesión $\{a_n\} := a(n)$ definimos Ea como la función

$$(Ea)(n) = a(n+1)$$

Obs.- • $E(a+b) = Ea + Eb$, a, b sucesiones
• $E(c \cdot a) = c \cdot Ea$, con c constante.

Def.- Dados dos operadores ~~lineales~~ en las sucesiones definimos

x $(H+K)(a) = H(a) + K(a)$
x $(HK)(a) = H(K(a))$

Obs.- se define $\Delta = E - I$, I identidad

$\Rightarrow \Delta a = (E - I)a = Ea - Ia = Ea - a$

$\Rightarrow \Delta a(n) = E\,a(n) - a(n) = a(n+1) - a(n)$

Ejemplos

• $a(n) = n^2 \Rightarrow \Delta a(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

• $a(n) = c \Rightarrow \Delta a(n) = 0$

~~$\Delta x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots$~~

- $a(n) = n^{\underline{m}}$

$\Rightarrow \Delta(a(n)) = (n+1)^{\underline{m}} - n^{\underline{m}}$

$= (n+1)(n)\cdots(n-m+2) - n(n-1)\cdots(n-m+1)$

$= [(n+1)-(n-m+1)]\,[n(n-1)\cdots(n-m+2)]$

$= n(n-1)\cdots(n-m+2)\, m$

$= m\, n^{\underline{m-1}}$

Notación: $\Delta a(n) = \Delta_n a$, por ejemplo $\Delta_n n^{\underline{m}} = m\, n^{\underline{m-1}}$

Propiedades:

- $\Delta_n [a(n) + b(n)] = \Delta_n a(n) + \Delta_n b(n)$
- $\Delta_n\, c \cdot a(n) = c \cdot \Delta_n a(n)$

Se parece mucho a la derivada

Obs: $\Delta_n [a(n)\, b(n)] = a(n+1)\, b(n+1) - a(n)\, b(n)$

$= a(n+1)\, b(n+1) - a(n)\, b(n+1) + a(n)\, b(n+1) - a(n)\, b(n)$

$= [a(n+1) - a(n)]\, b(n+1) + a(n)\, [b(n+1) - b(n)]$

$\therefore \quad \Delta_n [a(n) b(n)] = [\Delta_n a(n)]\, b(n+1) + a(n) [\Delta_n b(n)]$

$= [\Delta_n a(n)]\, E_b(n) + a(n) [\Delta_n b(n)]$

ó también en vez de sumar y restar $a(n) b(n+1)$ sumo $a(n+1) b(n)$ obtengo que

$\Delta_n [a(n) b(n)] = a(n+1) [\Delta_n b(n)] + b(n) [\Delta_n a(n)]$

$= E_a(n)\, \Delta_n b(n) + b(n) \cdot \Delta_n a(n)$

Obs: ¿Qué sucesión cumple que $\Delta_n a(n) = a(n)$?

$\Rightarrow a(n+1) - a(n) = a(n) \Rightarrow a(n+1) = 2a(n)$

$\Rightarrow a(n+1) = 2a(n) = 2^2 a(n-1) = \dots = 2^n a(1)$

$= 2^{n+1} a(0)$

$\therefore \quad a(n) = c \cdot 2^n$ cumple que $\Delta_n a(n) = a(n)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Obs: Tenemos que $x^{\underline{m}} = x(x-1)\dots(x-m+1) = x(x-1)^{\underline{m-1}}$

con $x^{\underline{0}} = 1$

$\Rightarrow 1 = x^{\underline{0}} = x(x-1)^{\underline{-1}} \Rightarrow (x-1)^{\underline{-1}} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}$

Ahora en general

$$x^{\underline{m-1}}(x-1) = \frac{1}{x}\, x^{\underline{m}}$$

$$\Rightarrow x^{\underline{m-1}} = \frac{1}{x+1}(x+1)^{\underline{m}}$$

- $x^{\underline{-1}} = \dfrac{1}{x+1}$
- $x^{\underline{-2}} = \dfrac{1}{x+1}(x+1)^{\underline{-1}} = \dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x+2}$

$$= \frac{1}{(x+1)^{\overline{2}}}$$

$$\therefore \quad x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)^{\overline{m}}}, \quad m>0$$

b) :-

$$\Delta_n\, n^{\underline{-m}} = \Delta_n\left(\frac{1}{(n+1)^{\overline{m}}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+2)^{\overline{m}}} - \frac{1}{(n+1)^{\overline{m}}} = \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m+1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\left[\frac{1}{n+m+1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sim}\left[\frac{n+1-n-m-1}{(n+1)(n+m+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sim}\cdot\frac{-m}{(n+1)(n+m+1)}$$

$$= -m \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)(n+m+1)}}$$

$$= \frac{-m}{(n+1)^{\overline{m+1}}} = -m\, n^{\underline{-m-1}}$$

$$\therefore \Delta_n n^{\underline{-m}} = -m\, n^{\underline{-m-1}}$$

obs: $\Delta_n n^{\underline{3}} = 3 n^{\underline{2}}$, $\Delta_n n^{\underline{2}} = 2 n^{\underline{1}}$, $\Delta_n n^{\underline{1}} = 1$

$\Delta_n n^{\underline{0}} = 0$, $\Delta_n n^{\underline{-1}} = -n^{\underline{-2}}$, $\Delta_n n^{\underline{-2}} = -2 n^{\underline{-3}}$

y así como en la derivada usual $\frac{1}{x}$ no es derivada de algo de la forma x^n, aquí no aparece $n^{\underline{-1}} = \frac{1}{n+1}$

obs: ¿$\exists\, a(n)$ t.q $\Delta_n a(n) = \frac{1}{n+1}$?

$$\Rightarrow \Delta_n (a(n)) = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a(n+1) - a(n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow a(n+1) = \frac{1}{n+1} + a(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + a(n-1)$$

$$\cdots = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2} + a(1)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + a(0)$$

$$\therefore a(n) = a(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

y con $a(0)=0$

$\Rightarrow \quad a(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$

i.e $\quad \Delta_n H_n = n^{-1}$

Def.- se define la operación para una sucesión $f(k)$ como

$$\sum_{a}^{b} f = \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Obs:

$$\sum_{a}^{b} \Delta_n f(n) = \sum_{k=a}^{b-1} \Delta_k f(k)$$

$$= \sum_{k=a}^{b-1} f(k+1) - f(k) = f(b) - f(a)$$

Es el análogo a la propiedad $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

Obs:- $\Delta_n \sum_{a}^{n} f = \sum_{a}^{n+1} f - \sum_{a}^{n} f$

$$= \sum_{k=a}^{n} f(k) - \sum_{k=a}^{n-1} f(k) = f(n)$$

Obs.- Si $\Delta_n f(n) = \Delta_n g(n) \Rightarrow \Delta_n (f(n)-g(n)) = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow f(n) - g(n) = C \Rightarrow f(n) = g(n) + C$

Obs: Quisiera que pasara lo mismo que con la integral, donde si $a \leq b \leq c$

$\Rightarrow \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

En efecto. Si $a \leq c \leq b$

$$\Rightarrow \sum_a^b f = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{k=a}^{c-1} f(k) + \sum_{k=c}^{b-1} f(k)$$

$$= \sum_a^c f + \sum_c^b f$$

$$\therefore \sum_a^b f = \sum_a^c f + \sum_c^b f \quad \text{con } a < c < b$$

Obs: Definimos

- $\sum_a^a f = 0$
- Si $b < a \Rightarrow \sum_a^b f = -\sum_b^a f(k)$

y así $\sum_a^b f = \sum_a^c f + \sum_c^b f \quad \forall a \leq c \leq b$

Recordemos que $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

- Tenemos que $\Delta_h f g = \Delta_h f\, E_g + f\, \Delta_h g$

$$\Rightarrow \sum_a^b \Delta_h f g = \sum_a^b \Delta f\, E_g + \sum_a^b f\, \Delta_h g$$

$$\Rightarrow \sum_a^b f\, \Delta_h g = f g\Big|_a^b - \sum_a^b \Delta f\, E_g$$

- Calcular $\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k$

$$= \sum_0^{n+1} k\, 2^k \quad \text{y tomo} \quad f(k) = k, \; g(k) = 2^k$$

$$\Rightarrow \Delta f = 1, \quad \Delta g = 2^k$$

$$\Rightarrow \sum_0^{n+1} f\, \Delta g = k\, 2^k \Big|_0^{n+1} - \sum_0^{n+1} 1 \cdot 2^{k+1}$$

$$= (n+1)\, 2^{n+1} - 0 \cdot 2^0 - \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}$$

$$= (n+1)\, 2^{n+1} - 2(2^{n+1} - 1)$$

$$= (n+1)\, 2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2$$

$$= (n-1)\, 2^{n+1} + 2$$

$$\sum_{0}^{m} k^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}}$$

pero se que $\Delta_k \frac{1}{m+1} k^{\underline{m+1}} = k^{\underline{m}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{m+1} n^{\underline{m+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}}$$

Quiero $\sum_{k=0}^{n} H_k$, con $H_0 := 0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} H_k = \sum_{0}^{n+1} H_k$ ... formando $f(k) = H_k$

$y\ g(k) = k \Rightarrow \sum_{0}^{n+1} H_k = \sum_{0}^{n+1} f(k)\, \Delta g(k)$

$$= k H_k \Big|_0^{n+1} - \sum_{0}^{n+1} \frac{1}{k+1} \cdot (k+1)$$

$$= (n+1) H_{n+1} - (n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1)[H_{n+1} - 1]$$

i.e. $\sum_{0}^{n} H_k = n H_n - n$

$\sum_{0}^{n} k H_k$ sea $f(k) = H_k$ y $g(k) = \frac{1}{2} k^{\underline{2}}$

$$\Rightarrow \sum_{0}^{n} k H_k = \frac{1}{2} k^{\underline{2}} H_k \Big|_0^{n} - \frac{1}{2} \sum_{0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot (k+1)^{\underline{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^{\underline{2}} H_n - \sum_{0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot (k+1) k\right] = \frac{1}{2}\left[n^{\underline{2}} H_n - \sum_{0}^{n} k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^{\underline{2}} H_n - \frac{1}{2} k^{\underline{2}} \Big|_0^{n}\right]$$

$\therefore \quad \sum_{0}^{n} kH_k = \frac{1}{2}n^2\left(H_n - \frac{1}{2}\right)$

Obs: En cálculo tenemos que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\, h^k$$

Veamos el análogo

Obs: Sean $a, h \in \mathbb{N}_0$ entonces

$$f(a+h) = E^h f(a) = E \circ E \circ \cdots \circ E\,(f(a))$$

pero tenemos que $\Delta = E - I$

$\Rightarrow \quad E = \Delta + I$

$\Rightarrow \quad f(a+h) = (\Delta + I)^h (f(a))$

$$= \left(\sum_{k=1}^{h} \binom{h}{k} \Delta^k\right) f(a)$$

$$= \sum_{k=1}^{h} \binom{h}{k} \Delta^k (f(a))$$

$$= \sum_{k=1}^{h} \frac{1}{k!} \Delta^k f(a)\, h^{\underline{k}}$$

Obs.— Tenemos que $Ef(a) = f(a+1)$

$\therefore E^{-1} f(a) = f(a-1)$

pero tenemos que $E = I + \Delta \Rightarrow E^{-1} = (I+\Delta)^{-1}$

Recordamos que $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

Será que $(I+\Delta)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k$, con $\Delta^0 = I$

Veamos un ejemplo con $f(k) = k^2$

Tenemos por un lado que $E^{-1} f(k) = k^2 - 2k + 1$

Ahora

- $\Delta f(k) = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$
- $\Delta^2 f(k) = [2(k+1)+1] - [2k+1] = 2$
- $\Delta^3 f(k) = 0 \Rightarrow \Delta^k f = 0 \quad \forall k \geq 4$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k f(k) = f(k) - \Delta f + \Delta^2 f - \Delta^3 f$$

$$= k^2 - (2k+1) + 2 - 0 = k^2 - 2k + 1$$

Obs.- $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

$\Rightarrow F_{n+2} = E^2 F_n$

$\Rightarrow E^2 F_n = E F_n + I F_n$

$\Rightarrow (E^2 - E - I)(F_n) = 0$

Entonces pensando a este operador en el espacio de las sucesiones que satisfacen la relación de Fibonacci

$\Rightarrow E^2 - E - I = 0$

$\Rightarrow E^2 = (E + I)$

$\Rightarrow E^{2n} = (E+I)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} E^k$

$\Rightarrow E^{2n}(F_m) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} E^k (F_m)$

$\Rightarrow F_{m+2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k}$

Por otro lado tenemos que

$E = E + F \Rightarrow E = I + E^{-1}$

$\Rightarrow F = E - E^{-1}$

$\Rightarrow F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$

Tomando $E^3 = E^2 + E = 2E + I$

$$\Rightarrow E^{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k E^k$$

$$\Rightarrow F_{m+3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_{m+k} \Rightarrow F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$$

En general

$$E^m = F_m E + F_{m-1} I$$

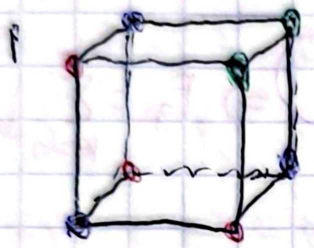
$$\Rightarrow E^{mn} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_m^k E^k \cdot F_{m-1}^{n-k}$$

$\Rightarrow$ Evaluando en F_ℓ

$$F_{\ell+mn} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_m^k F_{\ell+k} F_{m-1}^{n-k}$$

$$\Rightarrow F_{mn} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_m^k F_{m-1}^{n-k} F_k.$$

Obs.- ¿Cuantas formas hay de colorear los vertices de un cubo, con tres colores?



podriamos pensar en 3^8 pues hay 3 posibles colores para cada vertice.

pero debemos quitar las que se obtienen por rotaciones del cubo.

Def.- Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una operación

$\circ : G \times X \to X$ t.q

1) $e \circ x = x \quad \forall x \in X$

2) $g \circ (h \circ x) = (gh) \circ x \quad \forall g, h \in G, \ \forall x \in X$

Obs.-

- Si $g \circ x = y \Rightarrow x = g^{-1} \circ y$

- Sea $G = \{ f : X \to X \mid f \text{ biyectivas} \}$ con la composición $\Rightarrow f \circ x := f(x)$ es acción.

  * $Id \circ x = x$ y
  * $f \circ (g \circ x) = f \circ (g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g) \circ x$ ✓

- Sea $G = \{$ simetrias del cuadrado $\}$

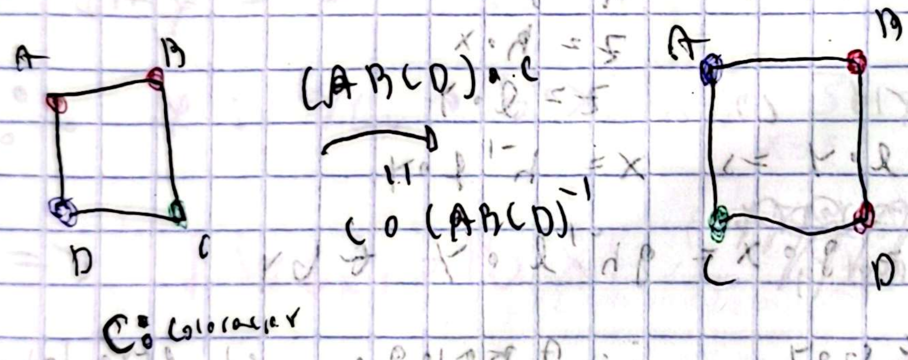
$= \{ (\ ), (ABCD), (AC)(BD), (ADCB), (AB)(DC), (AD)(BC), (BD), (AC) \}$

y sea $X=\{A,B,C,D\}$ los vértices del cuadrado.

Defino $f\cdot x = f(x)$ es acción de grupos

- Sea X el conjunto de coloraciones (de 3) $X=\{c:\{A,B,C,D\}\to\{1,2,3\}\}$ y G las simetrías del cuadrado, se toma

$f\cdot c = c\circ f^{-1}$ es acción



$(ABCD)$ era la rotación de 90° el sentido del reloj $\Rightarrow$ $(ABCD)^{-1}$ es la rotación de 90° en sentido antihorario.

- Si G es grupo y $g: G\times X\to X$ es acción entonces $G_x=\{g\in G \mid g\cdot x = x\}\leq G$ es subgrupo de G. Se le llama x el estabilizador de x

- El conjunto $G\cdot x=\{g\cdot x \mid g\in G\}\subseteq X$ se llama la órbita de x

Proposición: Las órbitas forman una partición de X.

Dem: • $\forall x \in X$, $x \in G \cdot x \Rightarrow G\cdot x \neq \emptyset$.

• $\bigcup_{x \in X} Gx = X$ y

• Sean $x, y \in X$ t.q. $G\cdot x \cap G \cdot y \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists z \in G\cdot x \cap G \cdot y \Rightarrow$ P.D. $G\cdot x = G\cdot y$

Sea $u \in G\cdot x \Rightarrow u = g\cdot x$

$z = h\cdot x$

$z = l \cdot y$

$\Rightarrow h\cdot x = l\cdot y \Rightarrow x = h^{-1} l \cdot y$

$\Rightarrow u = g\cdot x = g h^{-1} l \cdot y \in Gy$

$\Rightarrow G\cdot x \subseteq G \cdot y$ $\therefore$ Análogo el otro lado.

• Se define $X/G = \{ G\cdot x \mid x \in X\}$ conjuntos de las órbitas

Obs. Sup. que $g, h \in G$ t.q. $g\cdot x = h\cdot x$

$\Leftrightarrow h^{-1} g \cdot x = x \Leftrightarrow h^{-1} g \in G_x$

$\Leftrightarrow g \in h G_x \Leftrightarrow g G_x = h G_x$

$\Rightarrow g \in$

$\Rightarrow G/G_x = \{ gG_x \mid g \in G \}$ y defino

$\varphi : G/G_x \to X$ t.q. $\varphi(gG_x) = g \cdot x$

y por lo anterior esta función está bien definida

$\varphi(gG_x) = \varphi(hG_x) \Rightarrow g \cdot x = h \cdot x \Rightarrow gG_x = hG_x$

$\Rightarrow \varphi$ es inyectiva

$\operatorname{Im} \varphi = G \cdot x$

$\therefore \varphi : G/G_x \to G \cdot x$ es biyectiva.

$\Rightarrow |G/G_x| = |G \cdot x|$ "Teorema del estabilizador"

obs.- si G es finito entonces

$|G/G_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$ por el Teo. de Lagrange.

$\Rightarrow |G \cdot x| = \frac{|G|}{|G_x|}$ "Teorema del estabilizador"

Lema.- (Burnside) Sea G un grupo finito actuando en un conjunto finito X.
Entonces

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

donde $X^g = \{ x \in X \mid g \cdot x = x \}$

Dem.- Sea $A = \{ (g,x) \in G \times X \mid g \cdot x = x \}$

$\Rightarrow |A| = \sum_{g \in X} |X^g|$

primero fijando g y viendo cuantas "x" cumplen lo que pide A.

Por otro lado si fijo x y veo cuantas "g's" cumplen lo pedido tenemos que

$$|A| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G \cdot x|}$$

$$= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|} = |G| \sum_{\theta \in X/G} \sum_{x \in \theta} \frac{1}{|G \cdot x|}$$

$$= |G| \sum_{\theta \in X/G} \sum_{x \in \theta} \frac{1}{|\theta|}$$

$$= |G| \sum_{\theta \in X/G} 1 = |G| \, |X/G|$$

$\therefore \quad |G|\,|X/G| = \sum_{g \in X} |X^g|$

Ejemplo:-

- ¿Cuántas coloraciones de los vértices de un cuadrado hay usando a lo más 3 colores salvo rotaciones?

Sol.- método normal

* Si tengo 1 color, tengo 3 posibles coloraciones

* Si tengo 2 colores tengo dos opciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ de un color y } 1 \text{ de otro} \Rightarrow 3 \cdot 2 \\ 2 \text{ y } 2 \text{ de colores} \Rightarrow 3 \cdot \cancel{4} = 6 \end{array} \right\} 8$$

~~$\Rightarrow 3 \times 3 = 9$~~

* usando 3 colores $\Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$

$3 + 6 + 6 + 9$

$\therefore$ Hay ~~$3+6+9$~~ $= 24$ coloraciones posibles

b) usando grupos $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum |X^g|$

Sea $G = \{$rotaciones$\}$ $\quad$ 1 = identidad
$= \{1, r, r^2, r^3\}$ $\quad$ r = rotación $90°$

$X = \{$coloraciones$\}$
$= \{C : \{A, B, C, D\} \to \{$rojo, verde, azul$\}\}$

$\Rightarrow |X/G| = \frac{1}{4}\sum_{g\in G} |X^g|$

$= \frac{1}{4}[\,|X^1| + |X^r| + |X^{r^2}| + |X^{r^3}|\,]$

$= \frac{1}{4}[\,3^4 + 3 + 3^2 + 3\,]$

cantidad de coloraciones; coloraciones fijas bajo rotación; ... fijas bajo $180°$

$= 24$

Consideremos un decágono, sea G el grupo de las rotaciones de decágono.

($G = \{1, r, r^2, \dots, r^9\}$ rotaciones de $\frac{2\pi}{10}$ ~~grados~~ radianes)

X el conjunto de coloraciones de los vértices con n colores $X = \{C : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, n\}\}$

$$\Rightarrow |X/G| = \frac{1}{10} \sum_{g \in G} |X^g|$$

$$= \frac{1}{10} [\underset{g=1}{n^{10}} + \underset{g=r, r^3, r^7, r^9}{n} + \underset{g=r^2, r^4, r^6, r^8}{n^2} + \underset{g=r^5}{n^5}]$$

$$= \frac{1}{10} [n^{10} + 4n + 4n^2 + n^5]$$

Son la cantidad de coloraciones.

Sea un cubo (8 vértices) y G el grupo de rotaciones ~~...~~

~~$G = \{1, r, r^2, r^3, \dots, s, s^2, \dots, rs, rs^2, r^2s, r^2s^2, \dots\}$~~

Combinaciones de r rotación $90°$

s rotación $180°$

s rotación $120°$

Coloraciones c colores

~~$24 |X/G| = \frac{1}{24} [c^8 + c^2 + c^4]$~~ ($g=1$, $g=r, r^3$, $g=r^2$)

$\Rightarrow |X/G| = \frac{1}{24}[\underset{g=1}{c^8} + 3[2\underset{g=r,r^3}{c^2} + \underset{g=r^2}{c^4}]$

$+ \underset{g=\rho}{6c^4} + \underset{g=s,s^2}{4 \cdot 2 \cdot c^4}]$

$= \frac{1}{24}[c^8 + 17c^4 + 6c^2]$

- para las aristas el grupo es el mismo (coloraciones aristas)

$\Rightarrow |X/G| = \frac{1}{24}[\underset{g=1}{c^{12}} + 3[2\underset{g=r,r^3}{c^3} + \underset{g=r^2}{c^6}]$

$+ \underset{g=\rho}{6c^7} + \underset{g=s,s^2}{4 \cdot 2\, c^4}]$

$= \frac{1}{24}[c^{12} + 6c^7 + 3c^6 + 8c^4 + 6c^3]$

- para las caras (coloraciones de las caras)

$|X/G| = \frac{1}{24}(\underset{g=1}{c^6} + 3(2\underset{g=r,r^3}{c^3} + \underset{g=r^2}{c^4}) + \underset{g=\rho}{6 \cdot c^3}$

$+ \underset{g=s,s^2}{4 \cdot 2 \cdot c^2})$

$= \frac{1}{24}[c^6 + 3c^4 + 12c^3 + 8c^2]$

obs) En la acción de grupos puedo tomar H grupo y ~~[illegible]~~ $G \leq H$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cdot : G \times H \to H \quad g \cdot h = gh}$ es acción de grupos pues $G \leq H$

obs.- Si $\cdot : G \times H \to H$ con $g \cdot h = g h g^{-1}$ también es acción de grupos.

obs.- Si $N \trianglelefteq G$ entonces $\cdot : G \times N \to N$ t.q. $g \cdot h = g h g^{-1} \in N$ es acción de grupos.

obs.- Si $H \leq G$, $\cdot : G \times G/H \to G/H$ dada por $g \cdot (g_1 H) = g g_1 H$ es acción

obs.- consideremos $\cdot : G \times H \to H$ con $G \leq H$ $g \cdot h = gh$

$$\Rightarrow \left| H/G \right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |H^g| = \frac{1}{|G|} |H|$$

pues si $g \in G$ $\Rightarrow$ $g \cdot h = h \iff gh = h$ $\iff$ $g = e$

$\sigma_1 = x+y \;,\; \sigma_2 = xy$

Obs.- Tenemos σ $x^3 + xy + y^3$

$\Rightarrow (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$= (x^3 + y^3) + 3xy(x+y)$

$= x^3 + y^3 + 3\sigma_2\sigma_1$

$\Rightarrow \sigma_1^3 = x^3 + y^3 + 3\sigma_2\sigma_1$

$\Rightarrow x^3 + xy + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2$

simétrico

Todo polinomio de 5 es igual a otro polinomio $\forall f, \sigma f = f$ (simétrica tal(es))

En general

$\sigma_0 = 1$

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$

$\vdots$

$\sigma_n = x_1x_2x_3 \cdots x_n$.

$\sigma_{n+k} = 0 \quad \forall k \geq 1$

Ejemplo.- Tomamos x_1, x_2, x_3, x_4

$\Rightarrow \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$

$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$

Obs.- Si $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

$\Rightarrow \quad p(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \sigma_3 x^{n-3} + \cdots \pm \sigma_n$

Obs.- Queremos escribir a los polinomios s's con los σ_i:

$s_0 = 1$

$s_1 = x_1 + \cdots + x_n$

$s_2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

$\vdots$

$s_m = x_1^m + \cdots + x_n^m$

$\vdots$

- $s_1 = \sigma_1$
- $s_2 = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n)$
  $= \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
- ¿s_3? Usaremos funciones generatrices.

Tenemos que

ob):- $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k z^k$

$$= \prod_{r=1}^{n} (1 + x_r z)$$

por otro lado

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^k \right] z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i z)^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (x_i z)^k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i z}{1 - x_i z}$$

Ahora tenemos que

$$\log f(z) = \sum_{r=1}^{n} \log (1 + x_r z)$$

Derivando

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{x_r}{1 + x_r z}$$

$$\Rightarrow \frac{g(-z)}{-z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + x_i z} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} s_k z^{k-1}$$

$$\Rightarrow \log f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} s_k z^k + C$$

pero $\log(f(0)) = \log(1) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \log f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} s_k z^k$$

Ahora recordamos que

$$-\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$$

$$\Rightarrow \log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$$

$$\therefore \log(f(z)) = \log\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i z^i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i z^i\right)^k$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_k = m \\ i_j \geq 1}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_k} \right) z^m$$

$$\frac{(-1)^{m+1}}{m} S_m = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m \\ i_j \geq 1}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_m = m(-1)^m \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m \\ i_j \geq 1}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}}$$

Ejemplo:

• $m=3$

$$\Rightarrow S_3 = 3(-1)^3 \left[\frac{(-1)^1}{1}\sigma_3 + \frac{(-1)^3}{2}\sigma_1\sigma_2 + \frac{(-1)^3}{2}\sigma_2\sigma_1 + \frac{(-1)^3}{3}\sigma_1^3 \right]$$

$$= 3(-1)\left[-\sigma_3 + \sigma_2\sigma_1 + \frac{1}{3}\sigma_1^3\right]$$

$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

por otro lado tenemos que

$$f(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} s_m t^m\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} s_m z^m\right)^k$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=\ell \\ m_i \geq 1}} \frac{(-1)^{\ell+k}}{k!} \cdot \frac{s_{m_1}\cdots s_{m_k}}{m_1\cdots m_k}\right) z^{\ell}$$

- $$\sigma_n = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=n \\ m_i \geq 1}} \frac{(-1)^{n+k}}{k!} \cdot \frac{s_{m_1}\cdots s_{m_k}}{m_1\cdots m_k}$$

Ejemplo.-

- $$\sigma_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1!} \cdot \frac{s_1}{1} = s_1$$

- $$\sigma_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{1!} \cdot \frac{s_2}{2} + \frac{(-1)^{2+2}}{2!} \cdot \frac{s_1 \cdot s_1}{1 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{2} s_1^2 - \frac{1}{2} s_2 = \frac{s_1^2 - s_2}{2}$$

- $$\sigma_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{1!} \cdot \frac{s_3}{3} + 2\frac{(-1)^{3+2}}{2!} \cdot \frac{s_1 s_2}{1 \cdot 2} + \frac{(-1)^{3+3}}{3!} \cdot \frac{s_1^3}{1 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{6} s_1^3 - \frac{1}{2} s_1 s_2 + \frac{1}{3} s_3 = \frac{s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 2 s_3}{6}$$

~~Con esto se puede demostrar que~~

Con la igualdad $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g(-z)}{-z}$

se puede demostrar las identidades de Newton

- $\sigma_1 = s_1$
- $2\sigma_2 = \sigma_1 s_1$
- $3\sigma_3 = \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3$
- $4\sigma_4 = \sigma_3 s_1 - \sigma_2 s_2 + \sigma_1 s_3 - s_4 \therefore$