Como contar con integrales: El método del circulo de Hardy-Littlewood

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

30/octubre/2024

Teoría Aditiva de Números

¿Cuando un numero es suma de cuadrados?

¿Cuando un numero es suma de numeros triangulares?

¿Cuando un numero es suma de primos?

Definición 1

Sean $r, n \in \mathbb{Z}^+$ y $A_1, A_2, .., A_r \subseteq \mathbb{Z}^+$ infinitos, entonces se define como "Ecuacion Aditiva" a una ecuacion de la forma:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

donde $x_i \in A_i$

Teoría Aditiva de Números

Dados $A_1, A_2, \ldots, A_r \subseteq \mathbb{Z}^+$ infinitos

¿Es posible determinar cuando la ecuacion aditiva tiene solucion?

Y en caso de tener solucion, ¿Cuantas tiene para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo?

En esta platica consideraremos unicamente el caso donde todos los A_i´s son iguales

es decir, consideraremos la ecuacion $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ con $x_i \in A$

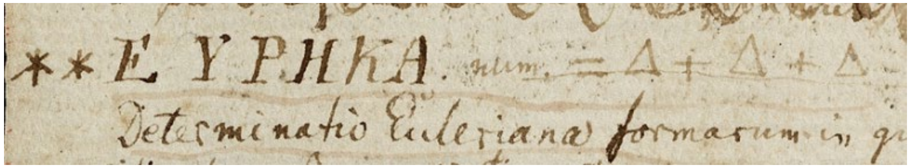
con $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ infinito.

Teoría Aditiva de Números

Ejemplos:

- Si $r = 3$ y $A = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \left\{ T_n : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad \Rightarrow \quad T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3} = n$

El teorema de los numeros triangulares: Esta ecuacion siempre tiene solucion.



1796

- Si $r = 3$ y $A = \left\{ n^2 : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad \Rightarrow \quad {m_1}^2 + {m_2}^2 + {m_3}^2 = n$

El teorema de los tres cuadrados de Legendre:

Esta ecuacion tiene solucion si y solo si $n = 4^a(8b + 7)$

Teoría Aditiva de Números

Definición 2

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ infinito y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Una "Representacion o Composicion" de n en r partes de elementos de A, es una k-eada $(x_1, x_2, .., x_r)$ tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

donde $x_i \in A$.

Definición 3

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ infinito y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Una "Particion" de n en r partes de elementos de A, es un multiconjunto $[x_1, x_2, .., x_r]$ tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

donde $x_i \in A$

Teoría Aditiva de Números

Notacion:

- Denotaremos por $R_{r,A}(n)$ y $P_{r,A}(n)$ al numero de representacionesy particiones de n en r partes.
- Denotaremos por $R_A(n)$ y $P_A(n)$ al numero de representaciones y particiones totales de n

Obs.-

- $P_{r,A}(n) \leq R_{r,A}(n)$
- $P_A(n) \leq R_A(n)$
- $R_A(n) = \sum_{k=1}^{n} R_{k,A}(n)$ y $P_A(n) = \sum_{k=1}^{n} P_{k,A}(n)$

Ejemplo: $A = \mathbb{Z}^+$ Todas las reprentaciones de 4 como suma de enteros son:

(4), (3,1), (1,3), (2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1)

Todas las particiones de 4 como suma de enteros son:

[4], [3,1], [2,2], [2,1,1], [1,1,1,1]

Teoría Aditiva de Números

Para poder responder a la existencia de soluciones los metodos son variables van desde combinatoria, reciprocidad cuadratica, hasta propiedades mas generales donde se depende totalmente de las propiedades aritmeticas del conjunto A

Nos centraremos en los siguientes dos casos

$$A = \mathbb{Z}^+ \qquad \text{y} \qquad A = \text{primos}$$

La función Partición

Considerando $A = \mathbb{Z}^+$

Llegamos al problema de contar el numero de particiones de un entero problema ampliamente estudiado por Euler y posteriormente desarrollado por Hardy y Ramanujan

Notacion:

- Denotaremos por $R_r(n)$ y $P_r(n)$ al numero de representaciones y particiones de n en r partes.
- Denotaremos por $R(n)$ y $P(n)$ al numero de representaciones y particiones totales de n

El numero $R_r(n)$ lo podemos calcular exactamente con metodos combinatorios

Métodos combinatorios

Concluyendo que

$$R_r(n) = \binom{n-1}{n-r}$$

de donde

$$R(n) = \sum_{r=1}^{n} R_r(n) = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{n-r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

sin embargo para las particiones esto no nos sirve....

pero en sus inicios se lograron avances importantes

Particiones

Proposición 1

Sea $n > 0$ y $0 < r \leq n$, entonces

$$P_r(n) = P_r(n-r) + P_r(n-1)$$

Definición 4

Dada una sucesion de enteros positivos a_n, se define a su funcion generadora como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Ejemplos:

- Si $a_n = n$ entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \dfrac{z}{(1-z)^2}$

Particiones

- Si $a_n = F_n$ la sucesion de Fibonacci entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = F_0 z^0 + F_1 z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n = z + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} z^{n+2}$$

$$= z + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+1} + F_n) z^{n+2} = z + z \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

$$= z + zf(z) + z^2 f(z)$$

$$\Rightarrow f(z) = z + zf(z) + z^2 f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

$$¿\, F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^n \, ?$$

Particiones

Consideremos las series

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} = 1 + z^3 + z^6 + z^9 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} = 1 + z^4 + z^8 + z^{12} + \cdots$$

$$ETC$$

Particiones

Las reescribimos de la forma:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} = 1 + z + z^{1+1} + z^{1+1+1} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1 + z^{2} + z^{2+2} + z^{2+2+2} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} = 1 + z^{3} + z^{3+3} + z^{3+3+3} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} = 1 + z^{4} + z^{4+4} + z^{4+4+4} + \cdots$$

$$ETC$$

Particiones

Entonces tendremos el producto

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)\left(\frac{1}{1-z^2}\right)\left(\frac{1}{1-z^3}\right)\cdots =$$

$$(1+z+z^{1+1}+z^{1+1+1}+\cdots)(1+z^2+z^{2+2}+z^{2+2+2}+\cdots)(1+z^3+z^{3+3}+z^{3+3+3}+\cdots)\cdots$$

$$=1+z+(z^{1+1}+z^2)+(z^{1+1+1}+z^{1+2}+z^3)+\cdots$$

$$=1+z+2z^2+3z^3+5z^4+7z^5\cdots \;=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)z^n$$

$$\therefore\;\; F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)z^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k}$$

Particiones


Herramientas

- Funcion generadora de las particiones $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^k}$

- Teorema de Taylor: Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

- Formula integral de Cauchy: Si $f : U \to \mathbb{C}$ analitica y γ un circulo orientado positivamente y contenido en U, entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{para todo } z_0 \in \operatorname{int} \gamma$$

Ramanujan

Sabemos que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) z^{n} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{k}}$$

pero por el teorema de Taylor

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = P(n)$$

y por la formula integral de cauchy

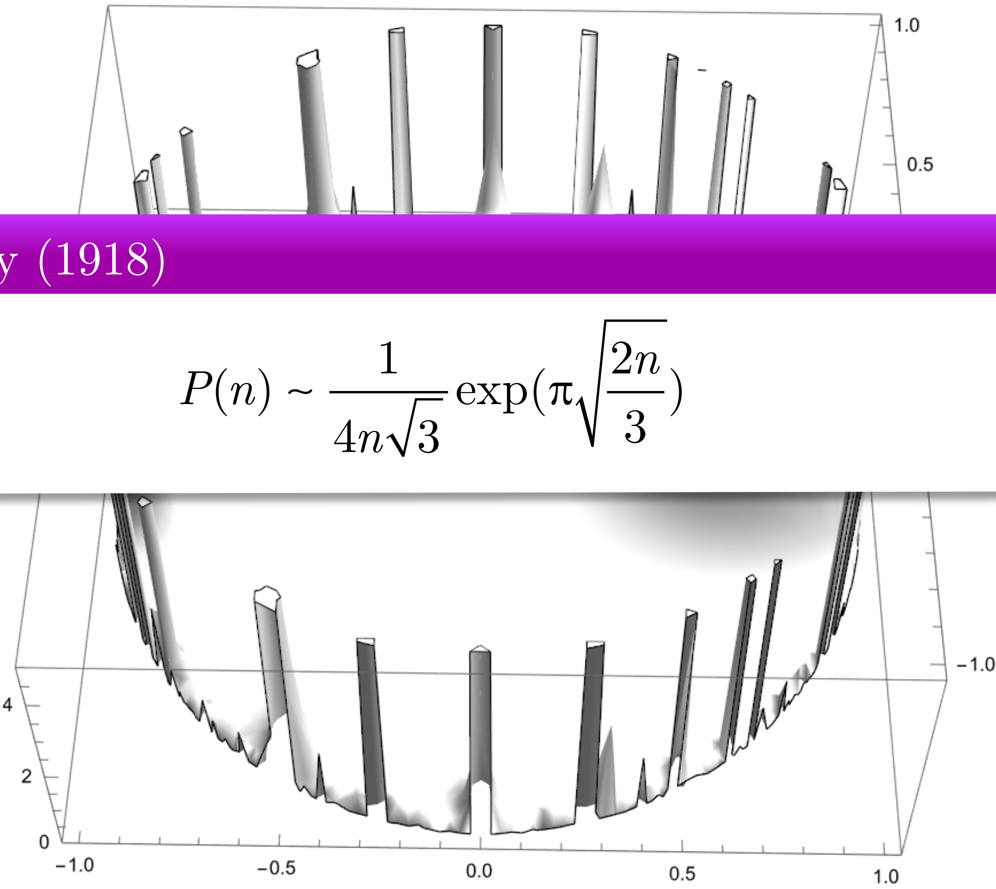
$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{(z - 0)^{n+1}} dz$$

concluyendo que entonces

$$P(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

Ramanujan

Grafica de $\left|\dfrac{F(z)}{z^{n+1}}\right|$

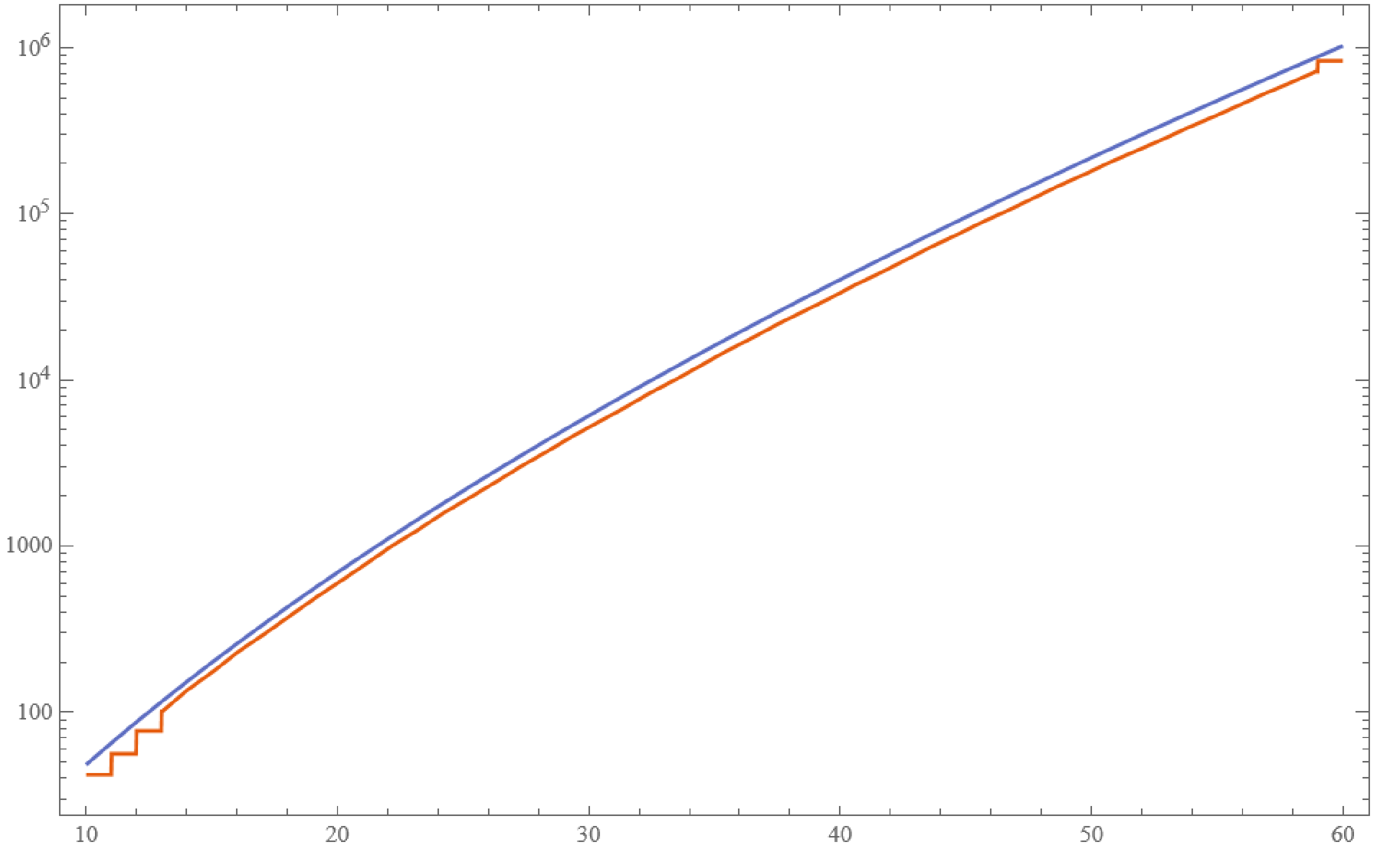


Ramanujan y Hardy (1918)

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

Ramanujan

$P(n)$ $\qquad$ $\dfrac{1}{4n\sqrt{3}}\exp(\pi\sqrt{\dfrac{2n}{3}})$



Hardy y Littlewood

Posterior a la muerte de Ramanujan, Hardy y Littlewood perfeccionaron el metodo para aplicarlo a otros problemas aditivos los cuales no necesariamente habia una funcion generadora facil de manejar

Uno de ellos es el conocido como Problema de Waring el cual hace la cuestion de las soluciones de

$$x_1^{\ k} + x_2^{\ k} + \cdots + x_r^{\ k} = n$$

donde probaron que si $R_{r,k}(n)$ denota el numero de representaciones de n como suma de r, $k-$esimas potencias entonces

$$R_{r,k}(n) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^r}{\Gamma(\frac{r}{k})} G(n) n^{\frac{r}{k}-1} + O(n^{\frac{r}{k}-1-\delta})$$

¿El método del circulo?

Hardy y Littlewood mejoraron el metodo para hacerlo en general, siendo esto de la siguiente manera:

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^{+}$ y consideremos la suma $f(z) = \sum_{a\in A} z^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{A}(n) z^{n}$

$\Rightarrow$ por el producto de cauchy $f^{r}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{A}(n) z^{n} \right)^{r} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{r}(n) z^{n}$

con $C_{r}(n) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \delta_{A}(n_1)\cdots\delta_{A}(n_r) = \#\left\{(n_1,..,n_r) \in A^{r} : n_1 + \cdots + n_r = n\right\}$

$\Rightarrow$ por la formula integral de cauchy $\quad C_{r}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f^{r}(z)}{z^{n+1}} dz$

¿El método del circulo?

En años posteriores Vinogradov mejoro aun mas el metodo, tomando en cuenta sumas finitas, siendo este el metodo como tal usado actualmente

Consideremos $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ y definimos la funcion $f(z) = \sum_{n=1}^{N} \delta_A(n) z^n$ de donde entonces

$$\Rightarrow \quad f^r(z) = \sum_{n=0}^{rN} C_r(n) z^n \quad \Rightarrow \quad C_r(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f^r(z)}{z^{n+1}} dz \qquad \text{para } n < rN$$

Dado que la suma ahora es finita, esta no tiene singularidades en 1, por lo que podemos tomar $r = 1$

$$\Rightarrow \quad C_r(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f^r(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f^r(e(\alpha))}{e(\alpha)^{n+1}} 2\pi i e(\alpha) d\alpha = \int_0^1 f^r(e(\alpha)) e(-n\alpha) d\alpha$$

$$= \int_0^1 F(\alpha) e(-\alpha) d\alpha \quad \text{con } F(\alpha) := f^r(e(\alpha)) = \sum_{n=1}^{N} \delta_A(n) e(n\alpha)$$

¿El método del circulo?

Usando esta modificacion Vinogradov probo de forma parcial la

Conjetura Debil De Goldbach

Siendo que dado el procedimiento mostrado, si consideramos A como el conjunto de los numeros primos, entonces el numero de representaciones de n como suma de 3 primos es

$$R(n) = \int_0^1 F(\alpha)e(-\alpha)d\alpha \quad \text{con } F(\alpha) = \sum_{p \leq N} e(p\alpha)$$

$$R(n) = \frac{n^2}{2} G(n) + O(n^2 (\log n)^{-A})$$

$$\text{con } G(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

Ejemplo del método

Apliquemos el metodo al numero $R_k(n)$ calculado previamente

Sea $A = \mathbb{Z}^+$ y consideremos la suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \dfrac{z}{1-z}$

$\Rightarrow$ por el producto de cauchy $f^r(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} R_r(n) z^n$

$\Rightarrow$ por la formula integral de cauchy $R_r(n) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{f^r(z)}{z^{n+1}} dz$

pero $f^r(z) = \dfrac{z^r}{(1-z)^r}$ $\Rightarrow$ $R_r(n) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{1}{(1-z)^r} \dfrac{z^r}{z^{n+1}} dz$

Ejemplo del método

$$\Rightarrow \quad R_r(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma (1-z)^{-r} z^{r-n-1} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}(-z)^k\right] z^{r-n-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-r}{k}\oint_\gamma z^{r+k-n-1} dz$$

$$\boxed{\oint_\gamma z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = -1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-r}{k}\begin{cases} 2\pi i & \text{si } k = n-r \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(-1)^n\binom{-r}{n}2\pi i = (-1)^{n-r}\binom{-r}{n-r} = \binom{n-1}{n-r}$$