Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja III

Tarea 4

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

vale(2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. $T(z) = az + b$ es conforme en $z = \infty$.

b) Sea $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Las funciones $T(z) = z + a$ y $S(z) = bz$ transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

c) Sea C una curva de Jordan y $a \in C$. $D(a, \epsilon) \cap C$ es un arco conexo de curva.

d) Sea Ω una región acotada y $f : \Omega \to B$ una función analítica. Si B es una región no acotada, entonces f no puede extenderse continuamente a la frontera de Ω.

Demostración:

(a) Falso.

Sea $g(z) = T(1/z)$ y veamos que no es conforme en $z = 0$. Tenemos que

$$g'(z) = T'(\frac{1}{z}) = \left(a\frac{1}{z} + b\right)' = -a\frac{1}{z^2}$$

que no es analítica en $z = 0$ por tanto g no es conforme en $z = 0$ y así T no es conforme en $z = \infty$.

■

(b) Verdadero.

• $T(z) = z + w$ con $w \in \mathbb{C}$.

Esto es claro, ya que al trasladar todos los puntos de una circunferencia o una recta esta sigue siendo una circunferencia u una recta. Veámoslo en $\mathbb{R}^2$, con $z = a + ib \;\wedge\; w = c + id$.

Supongamos que $z := (a, b)$ están sobre la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, entonces tendremos que el punto $z + w := (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ esta sobre la circunferencia $(x-h-c)^2 + (y-k-d)^2 = r^2$, en efecto, pues $(a+c-h-c)^2 + (b+d-k-d)^2 = (a-h)^2 + (b-k)^2 = r^2$. Por lo que la traslación preserva a la circunferencia.

Igualmente, Supongamos que $z := (a,b)$ están sobre la recta $y = mx + e$, entonces tendremos que el punto $z + w := (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ esta sobre la recta $y = mx + d + e - mc$, en efecto, pues $m[a+c] + d + e - mc = ma + mc + d + e - mc = ma + e + d = b + d$. Por lo que la traslación preserva a la recta.

- $T(z) = w \cdot z$ con $w \in \mathbb{C}$.

Si $w = 0$, no se cumple, pues todo converge el 0, entonces supongamos $w \neq 0$ y sea $C : Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0$ una recta/circunferencia, entonces si $z \in C$ tendremos que $w \cdot z$ pertenece a la recta/circunferencia

$$\tilde{C} : \frac{A}{|w|^2} z\overline{z} + \frac{\overline{E}}{w} z + \frac{E}{\overline{w}} \overline{z} + D = 0$$

En efecto,

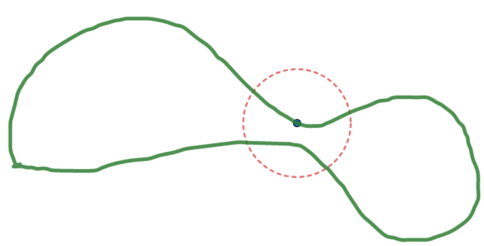
$$\frac{A}{|w|^2}(w \cdot z)\overline{(w \cdot z)} + \frac{\overline{E}}{w} w \cdot z + \frac{E}{\overline{w}} \overline{w \cdot z} + D = \frac{A}{|w|^2}|w|^2 z\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0$$

por lo que la transformación preserva a las rectas y círculos.

■

(c) Falso.

Esto es falso, un ejemplo es el siguiente dibujo donde la intersección no es un arco conexo:



■

(d) Verdadero.

Supongamos por contradicción que si se puede extender, entonces existe $\tilde{f} : \overline{\Omega} \to \overline{B}$ continua tal que $\tilde{f}|_{\Omega} = f$, entonces como $\tilde{f}$ es continua y $\overline{\Omega}$ es un compacto tendremos que $\tilde{f}(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{B}$ es un conjunto compacto. Si pasara que $\tilde{f}(\overline{\Omega}) \neq \overline{B}$ entonces f no seria una extensión a la frontera contradiciendo la hipótesis y si pasara que $\tilde{f}(\overline{\Omega}) = \overline{B}$ entonces estaríamos diciendo que $\overline{B}$ es acotado lo cual no pasa, por lo tanto f no puede extenderse analíticamente a las fronteras.

■

Problema 2. –
vale(2.0) Considere la región
$$\Omega = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$
Encuentre una formula lo mas explicita posible para el problema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in \Omega \\ w(x,y) = h, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases},$$
donde $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es continua.

Demostración: El problema estará dividido en 3:

⊙ Parte 1:

Consideremos
$$T : \Omega \to \mathbb{D} \text{ dada por } T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
y veamos que es un biholomorfismo.

• Esta bien definida, pues $\forall z \in \Omega$, tenemos
$$|T(z)| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{|x+iy-i|}{|x+iy+i|} = \frac{|x+i(y-1)|}{|x+i(y+1)|} = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$$
y como $z \in \Omega \Rightarrow y > 0 \Rightarrow -y < y \Rightarrow (y-1)^2 < (y+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \sqrt{x^2+(y+1)^2}$ por lo que
$$|T(z)| = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} < 1 \Rightarrow T(z) \in \mathbb{D}$$

• Es analítica, pues dado que $-i \notin \Omega$ tendremos que T es analítica.

• Sean $z, w \in \Omega$ tal que
$$T(z) = T(w) \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} = \frac{w-i}{w+i} \Rightarrow (z-i)(w+i) = (w-i)(z+i) \Rightarrow zw + zi - wi + 1 = wz + wi - zi + 1$$
$$\Rightarrow zi - wi = wi - zi \Rightarrow z - w = w - z \Rightarrow 2z = 2w \Rightarrow z = w$$
por tanto, es inyectiva.

• Sea $z \in \mathbb{D}$ y notemos que
$$T\left(-i\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{-i\dfrac{z+1}{z-1} - i}{-i\dfrac{z+1}{z-1} + i} = \frac{\dfrac{z+1}{z-1} + 1}{\dfrac{z+1}{z-1} - 1} = \frac{\dfrac{2z}{z-1}}{\dfrac{2}{z-1}} = z$$

y más aun

$$\operatorname{Im}(-i\frac{z+1}{z-1}) = -\operatorname{Re}(\frac{z+1}{z-1}) = -\operatorname{Re}(\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}-1}) = -\operatorname{Re}(\frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|})$$
$$= -\frac{1}{|z-1|}\operatorname{Re}(|z|^2 - z + \overline{z} - 1) = -\frac{1}{|z-1|}\operatorname{Re}(|z|^2 - 2i\operatorname{Im}(z) - 1) = -\frac{|z|^2-1}{|z-1|} = \frac{1-|z|^2}{|z-1|}$$

y como $z \in \mathbb{D} \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow 1-|z|^2 > 0$ por lo que

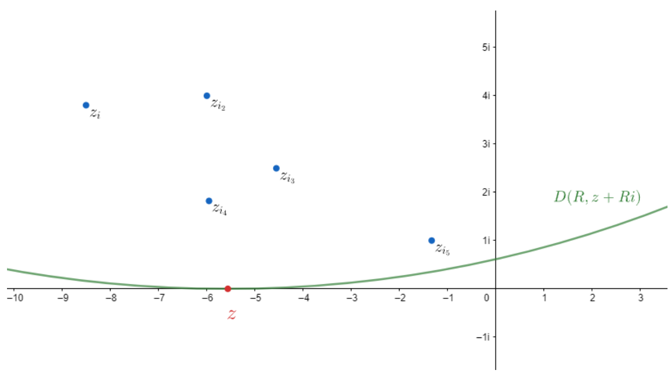
$$w = -i\frac{z+1}{z-1} \in \Omega \text{ y es tal que } T(w) = z$$

esto me dice que T es suprayectiva.

Por todo lo anterior tenemos que T es analítica e invertible por lo que su inversa existe y también es analítica.

⊙ Parte 2:

Veamos que $\forall z \in \partial\Omega$ es un punto de frontera simple. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ sucesión tal que $z_n \to z$ y consideremos el disco $D(R, z+Ri)$ con R suficientemente grande tal que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(R, z+Ri)$ la cual existe pues la sucesión es convergente



entonces tenemos que $z \in \partial D(R, z+Ri)$, pero como $D(R, z+Ri)$ es un dominio de Jordan (pues una circunferencia es una curva de Jordan) tendremos que todo punto frontera de $D(R, z+Ri)$ es un punto frontera simple, por lo que para la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una curva $\gamma : [0,1] \to \overline{D}(R, z+Ri)$ y una sucesión real creciente $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ tal que $\gamma(t_n) = z_n$ y $\gamma(t) \subset D(R, z+Ri)$ para toda $t \in [0,1)$. Pero notemos que como $D(R, z+Ri) \subset \Omega$ tendremos que $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ tal que $\gamma(t_n) = z_n$ y $\gamma(t) \subset \Omega$ para toda $t \in [0,1)$ por lo que z es un punto frontera simple de Ω.

⊙ Parte 3:

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} (\nabla^2 w)(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ w(x,y) = h, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces como $T : \Omega \to \mathbb{D}$ es un biholomorfimo y Ω es una región simplemente conexa donde todos sus puntos frontera son simples, tendremos que la función

$$\overline{T} : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}} \text{ dada por } \overline{T}(z) = \begin{cases} T(z) & \text{si } z \in \Omega \\ \lim\limits_{n\to\infty} T(z_n) & \text{si } z \in \partial\Omega \end{cases} \text{ con } z_n \to z$$

es biholomorfa en Ω y homeomorfa en $\partial\Omega$ con $\overline{T}\,|_{\Omega} = T$ (teorema 1, 19 de septiembre).

Con todo lo anterior tendremos por el teorema 1 (29 agosto) que el problema permanece invariante mediante el cambio de coordenadas con la función $\overline{T}$, haciendo este cambio tenemos el problema

$$\begin{cases} (\nabla^2 u)(x,y), & (x,y) \in \mathbb{D} \\ u(x,y) = h \circ \overline{T}^{-1}, & (x,y) \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

que queda bien definido por todo lo anterior mencionado. Resolvamos pues este problema.

Por el teorema del 9 de septiembre dado el problema de Dirichlet anterior tenemos que la única solución viene dada por

$$u(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (h \circ \overline{T}^{-1})(e^{it}) \frac{1-|z|}{|e^{it} - z|}\, dt & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ (h \circ \overline{T}^{-1})(e^{i\alpha}) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D},\ z = e^{i\alpha} \end{cases}$$

pero podemos saber quién es $\overline{T}^{-1}(e^{it})$, tenemos que

$$\overline{T}^{-1}(e^{it}) = w \iff \overline{T}(w) = e^{it} \iff \lim_{n\to\infty} T(w_n) = e^{it}$$

donde $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $w_n \to w \in \partial\Omega$, notemos que aquí afirmamos que $w \in \partial\Omega$, esto es pues como T es biholomorfismo entre Ω y $\mathbb{D}$ la única posibilidad de que $\overline{T}(w) \in \partial\mathbb{D}$ es que $w \in \partial\Omega$ y por lo demostrado en el teorema 2 del 9 de septiembre tendremos que cualquier sucesión contenida en Ω y convergente a w me sirve, para ello consideremos $w_n = w + (1/n)i$ (ya que como $w \in \partial\Omega \iff w \in \mathbb{R}$) es una sucesión que se queda contenida en Ω (pues $\operatorname{Im}(w_n) = 1/n > 0$) y tal que $w_n \to w$ por lo que

$$\overline{T}(w) = \lim_{n\to\infty} T(w_n) = \lim_{n\to\infty} T(w + \frac{1}{n} i) \lim_{n\to\infty} \frac{w + \frac{1}{n} i - i}{w + \frac{1}{n} i + i} = \frac{w-i}{w+i}$$

y entonces

$$\overline{T}(w) = e^{it} \iff \frac{w-i}{w+i} = e^{it} \iff w = -i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1} \text{ por lo que } \overline{T}^{-1}(e^{it}) = -i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}$$

con ello

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\overline{T}^{-1}(e^{it}))\frac{1-|z|}{|e^{it}-z|}dt & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ h(\overline{T}^{-1}(e^{i\alpha})) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D},\ z = e^{i\alpha} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(-i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1})\frac{1-|z|}{|e^{it}-z|}dt & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ h(\overline{T}^{-1}(e^{i\alpha})) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D},\ z = e^{i\alpha} \end{cases}$$

y finalmente la solución al problema original será

$$w(z) = (u\circ\overline{T})(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(-i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1})\frac{1-|T(z)|}{|e^{it}-T(z)|}dt & \text{si } z \in \Omega \\ h(z) & \text{si } z \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

■

Problema 3. –

vale(2.0) Sea Ω una región simplemente conexa y acotada tal que cualquier función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ puede extenderse a una función continua $\tilde{f} : \overline{\Omega} \to \overline{f(\Omega)}$, con $\tilde{f} : \partial\Omega \to \partial f(\Omega)$ inyectiva. Demuestre que Ω es un dominio de Jordan.

Demostración:

Problema 4. –

Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ distintos, la razón cruzada se define como:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

a) **vale(1.0)** Si T es una transformación de Mobius, demuestre que la razón cruzada permanece invariante bajo transformaciones de Mobius. Esto es,

$$[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

b) **vale(1.0)** Pruebe que 4 números complejos distintos pertenecen a una misma recta o a la misma circunferencia si y solo si su razón cruzada es un numero real.

c) **vale(1.0)** Encuetre una transformación de Mobius que transforme $\mathbb{D}$ en el semiplano complejo superior tal que $T(0) = 2 + 2i$.

Demostración:

(*a*) Sea $T \in \mathbb{M}$, y tendremos dos casos:

- Caso 1: Si $c = 0$. Entonces $T = Az + B$ (con $A = a/d \neq 0$ pues $c = 0$) por lo que

$$[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = \frac{(T(z_1) - T(z_3))(T(z_2) - T(z_4))}{(T(z_2) - T(z_3))(T(z_1) - T(z_4))} = \frac{(Az_1 + B - Az_3 - B)(Az_2 + B - Az_4 - B)}{(Az_2 + B - Az_3 - B)(Az_1 + B - Az_4 - B)}$$
$$= \frac{(Az_1 - Az_3)(Az_2 - Az_4)}{(Az_2 - Az_3)(Az_1 - Az_4)} = \frac{A}{A}\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

se preserva la relación cruzada.

- Caso 2: Si $c \neq 0$.

Si algún $z_i = -d/c$, tendremos $T(z_i) = \infty$ por lo que las razones cruzadas no serán iguales. Supongamos pues que $z_i \neq -d/c$ $\forall i$. Sabemos que $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ con

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \qquad T_2(z) = \frac{1}{z}, \qquad T_3(z) = -\frac{1}{c^2}z \qquad \text{y} \qquad T_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

por lo que basta probar que la razón cruzada es invariante bajo traslaciones, homotecias y la transformación $z \to 1/z$. Las traslaciones y homotecias ya fueron probadas en el caso anterior al mismo tiempo, por lo que únicamente probaremos para $z \to 1/z$. Tenemos dos subcasos:

⊙ Si algún $z_i = 0$. SPG que $z_1 = 0$ (entonces todos los demás no son cero pues son distintos) por lo que

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{z_3(z_2 - z_4)}{z_4(z_2 - z_3)}$$

por lo que

$$\frac{\frac{1}{z_3}(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4})}{\frac{1}{z_4}(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3})} = \frac{\frac{1}{z_3}(\frac{z_4 - z_2}{z_2 z_4})}{\frac{1}{z_4}(\frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3})} = \frac{\frac{1}{z_2 z_3 z_4}}{\frac{1}{z_2 z_3 z_4}} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

pero para que sean iguales tendríamos que $z_3/z_4 = 1 \Rightarrow z_3 = z_4$!!! lo cual no pasa pues supones que son todos distintos, por lo que si $z_i = 0$ entonces las razones cruzadas no son iguales.

⊙ Si todos los $z_i \neq 0$. Entonces

$$[\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}] = \frac{(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4})}{(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4})} = \frac{(\frac{z_3 - z_1}{z_1 z_3})(\frac{z_4 - z_2}{z_2 z_4})}{(\frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3})(\frac{z_4 - z_1}{z_1 z_4})} = \frac{\frac{1}{(z_1 z_3)(z_2 z_4)}}{\frac{1}{(z_2 z_3)(z_1 z_4)}} \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

$$\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=[z_1,z_2,z_3,z_4]$$

por lo que la transformación $z\to 1/z$ preserva la relación cruzada siempre y cuando $z_i\neq 0\ \forall i$.

Con lo anterior tenemos que al ser T_1 una traslación $\Rightarrow$

$$[T_1(z_1),T_1(z_2),T_1(z_3),T_1(z_4)]=[z_1,z_2,z_3,z_4]$$

donde cada $T_1(z_i)\neq 0$ pues $z_i\neq -d/c$, con lo que (por lo hecho arriba)

$$[T_2(T_1(z_1)),T_2(T_1(z_2)),T_2(T_1(z_3)),T_2(T_1(z_4))]=[T_1(z_1),T_1(z_2),T_1(z_3),T_1(z_4)]$$

y nuevamente como T_3 y T_4 una homotecia y una traslación respectivamente se tiene que

$$[T_4(T_3(T_2(T_1(z_1)))),T_4(T_3(T_2(T_1(z_2)))),T_4(T_3(T_2(T_1(z_3)))),T_4(T_3(T_2(T_1(z_4))))]=[z_1,z_2,z_3,z_4]$$
$$\Leftrightarrow\ [T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)]=[z_1,z_2,z_3,z_4]$$

por lo tanto $\forall T\in\mathbb{M}$ se cumple que

- Si $c=0\ \Rightarrow\ [T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)]=[z_1,z_2,z_3,z_4]$
- Si $c\neq 0$ y $z_i=-\dfrac{d}{c}$ p.a $i=1,2,3,4\ \Rightarrow\ [T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)]\neq[z_1,z_2,z_3,z_4]$
- Si $c\neq 0$ y $z_i\neq-\dfrac{d}{c}\ \forall i\ \Rightarrow\ [T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)]=[z_1,z_2,z_3,z_4]$

■

(b)
$\Rightarrow]$ Tenemos dos casos.

Caso 1: Supongamos que $z_1,z_2,z_3,z_4\in\ell$ una recta, y consideremos $T\in\mathbb{M}$ dada por $T(z)=e^{-i\alpha}z-w$ donde $\alpha\in[0,\pi]$ es el ángulo que forma la recta con el eje real y w es el punto de intersección de la recta con el eje imaginario, por lo que (problema $1.b$) $T[\ell]$ es el eje real y de esta manera tendremos que $T(z_i)\in\mathbb{R},\ i=1,2,3,4$ entonces por el inciso anterior

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=[T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)]\in\mathbb{R}\ \text{ pues cada } T(z_i)\in\mathbb{R}$$

Caso 2: Supongamos que $z_1,z_2,z_3,z_4\in C$ una circunferencia, y consideremos $T\in\mathbb{M}$ dada por $T(z)=z-z_1$, por lo que (problema $1.b$) $T[C]$ es una circunferencia tal que $0\in C$ (pues z_1 lo mande al 0) con ello sabemos que si $T[C]$ es una circunferencia tal que $0\in T[C]$ tendremos que la transformación $L(z)=1/z$ es tal que $L[T[C]]$ es una recta y nuevamente podemos usar una transformación $F(z)=e^{-i\alpha}z-w$ como en el caso 1 para que sea una recta por el origen, teniendo entonces que

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=[T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)]=[L(T(z_1)),L(T(z_2)),L(T(z_3)),L(T(z_4))]$$
$$=[F(L(T(z_1))),F(L(T(z_2))),F(L(T(z_3))),F(L(T(z_4)))]\in\mathbb{R}\ \text{ pues cada } F(L(T(z_i)))\in\mathbb{R}$$

$\Leftarrow$] Consideremos

$$T(z) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z - z_4)}$$

es tal que $T(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$ y $T(z_4) = \infty$ por lo que $T(z_i)$, $i = 1,2,3,4$ pertenecen a la recta real entonces tomando $T^{-1}(z) \in \mathbb{M}$ tendremos por la implicación anterior que $T^{-1}(T(z_i)) = z_i$, $i = 1,2,3,4$ pertenecen a una misma recta o circunferencia.

■

(c) Seguiremos un procedimiento similar al problema 2. Consideremos

$$T : \mathbb{H} \to \mathbb{D} \text{ dada por } T(z) = \frac{z - (2+2i)}{z - (2-2i)}$$

y veamos que efectivamente esta bien definida y es biyectiva.

• Está bien definida, pues $\forall z \in \mathbb{H}$, tenemos

$$|T(z)| = \frac{|z-(2+2i)|}{|z-(2-2i)|} = \frac{|x+iy-(2+2i)|}{|x+iy-(2-2i)|} = \frac{|(x-2)+i(y-2)|}{|(x-2)+i(y+2)|} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}}$$

y como $z \in \mathbb{H} \Rightarrow y > 0 \Rightarrow -y < y \Rightarrow (y-2)^2 < (y+2)^2 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} < \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$ por lo que

$$|T(z)| = \frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}} < 1 \Rightarrow T(z) \in \mathbb{D}$$

• Y como $ad - bc = (1)(-2+2i) - (-2-2i)(1) = 4i \neq 0$ tendremos que la transformación es invertible, es decir es biyectiva y por tanto $T(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ y en particular $T(2+2i) = 0$.

Con lo anterior podemos considerar $L = T^{-1}$ y esta es la transformación buscada tal que $L(0) = 2+2i$.

■

Problema 5. –

vale(1.0) Demuestre que $H : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{M}$ definida como

$$H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}$$

es un isomorfismo de grupos $(SL(2,\mathbb{C}), \cdot)$ y $(\mathbb{M}, \circ)$

Demostración: Como $ad - bc = 1$ entonces $H \in \mathbb{M}$ y esta bien definida.
En efecto, tenemos que para $A, B \in SL(2,\mathbb{C})$

$$H(A\cdot B)=H(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix})=H\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh\\ ce+gf & cf+dh\end{pmatrix}=\frac{(ae+bg)z+af+bh}{(ce+gf)z+cf+dh}$$

$$=\frac{(ae+bg)z+af+bh}{(ce+gf)z+cf+dh}=\frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{c(ez+f)+d(gz+h)}=\frac{a(\frac{ez+f}{gz+h})+b}{c(\frac{ez+f}{gz+h})+d}=H(A)\circ H(B)$$

por lo que es homeomorfimos. Veamos que es biyectivo.

Esto es claro, pues dados $A,B\in SL(2,\mathbb{C})$ tales que $H(A)=H(B)$, sabemos que dos transformaciones de Möbius son iguales si sus números complejos son iguales, es decir, si las entradas de las matrices son iguales, y por tanto, $A=B$. Es claro que es suprayectiva pues dada una transformación de Möbius únicamente tomamos la matriz con sus entradas iguales. Por tanto, es un isomorfismo.

■