Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja II

Tarea 7

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(1.5) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Sea X variedad topológica 2 dimensional dotada de un atlas A. Si las funciones de transición son analíticas, entonces la analiticidad de una función $f : X \to \mathbb{C}$ es independiente de las cartas. (La analiticidad es invariante bajo cambio de coordenadas)

b) Si z_0 es un punto crítico de orden $m-1$ para una función analítica f entonces f es de orden m en z_0.

c) El conjunto

$$S = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + 2zw + 3w^2 - 2z - 3w = 0\}$$

Define una superficie de Riemann.

Demostración:

(a) Verdadero.

Tenemos que $\Phi_{\alpha,\beta} : \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \Phi_\alpha(U_\alpha)$, y $f \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{C}$ entonces como $\Phi_{\alpha,\beta}$, $f \circ \Phi_\alpha^{-1}$ son analíticas y $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \Phi_\alpha(U_\alpha)$ entonces $f \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_{\alpha,\beta}$ es analítica $\Leftrightarrow$ $f \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ es analítica $\Leftrightarrow$ $f \circ \Phi_\beta^{-1}$ es analítica. ■

(b) Verdadero.

1 (b) Si z_0 es un punto crítico de orden $m-1$ para una función analítica f entonces f es de orden m en z_0.

Dem: S.p. z_0 es un punto crítico de orden $m-1$ para f ent. $f^k(z_0) = 0$ $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$

Sea $g(z) = f(z) - f(z_0)$ $\Rightarrow$ $g'(z_0) = f'(z_0) = 0, \dots, g^m(z_0) = f^m(z_0) = 0$

$\therefore$ f es de orden m en z_0. ■

(c) Verdadero.

Consideremos $F(z,w) = z^2 + 2zw + 3w^2 - 2z - 3w$, es claro que es analítica respecto a cada variable y continua. Además

$$\partial_z F = 2z + 2w - 2 \quad \text{y} \quad \partial_w F = 2z + 6w - 3$$
$$\Rightarrow \partial_z F = 0 \Leftrightarrow z + w = 1 \quad \text{y} \quad \partial_w F = 0 \Leftrightarrow 2z + 6w = 3$$

y veamos que el sistema

$$\begin{matrix} z + w = 1 \\ 2z + 6w = 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} z = \frac{3}{4} \\ w = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

pero tenemos que el punto $(\frac{3}{4}.\frac{1}{4}) \notin S$ ya que

$$\frac{1}{4}^2 + 2\frac{1}{4}\frac{3}{4} + 3\frac{3}{4}^2 - 2\frac{1}{4} - 3\frac{3}{4} = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{27}{16} - \frac{2}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{5}{8} \neq 0$$

por lo tanto las derivadas parciales de $F(z,w)$ no se anula en S, entonces por el teorema 1 del 2 de mayo S es una superficie de Riemann.

∎

Problema 2. –

vale(3.0) Sea $X = \mathbb{R}^2$ y considere la función:

$$\phi : U = X \to D(0,1) \subset \mathbb{C}, \quad \phi(x,y) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{yi}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Demuestre que esta carta define un atlas complejo en $\mathbb{R}^2$. La estructura de superficie de riemann que este atlas le da a $X = \mathbb{R}^2$ es la misma dada por el atlas complejo trivial visto en clase?

Demostración:

Demi Pdq $A = \{(U, \phi)\}$ es un atlas complejo con $U = \mathbb{R}^2$

Como solo hay una carta y $\phi \circ \phi^{-1} = Id$ es analítica y $U = \mathbb{R}^2$ solo hace falta probar que ϕ es un homeomorfismo.

- ϕ es inyectiva

Dado $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ definamos $z_a = x + iy \in \mathbb{C}$. Así $\phi(a) = \frac{z_a}{1+|z_a|}$ $\forall a \in \mathbb{R}^2$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\phi(u) = \phi(v) \Rightarrow \frac{z_u}{1+|z_u|} = \frac{z_v}{1+|z_v|} \Rightarrow \left(\frac{1+|z_v|}{1+|z_u|}\right) z_u = z_v$, sea $K \overset{*}{=} \frac{1+|z_v|}{1+|z_u|}$

ent. $K > 0$ y $K z_u = z_v \Rightarrow |K z_u| = |z_v| \Rightarrow K|z_u| = |z_v| \Rightarrow K = \frac{|z_v|}{|z_u|}$

$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{|z_v|}{|z_u|} = \frac{1+|z_v|}{1+|z_u|} \Rightarrow \frac{|z_v|}{|z_u|} - \frac{1+|z_v|}{1+|z_u|} = 0 \Rightarrow \frac{|z_v| - |z_u|}{|z_u|(1+|z_u|)} = 0 \Rightarrow |z_v| - |z_u| = 0 \therefore |z_v| = |z_u|$

$\therefore K = 1 \quad \therefore z_u = z_v$ ✓

- ϕ es suprayectiva

Sea $z \in D(0,1)$ y s.q. $z = x + iy$. Sea $A = (x(1+\sqrt{x^2+y^2}), y(1+\sqrt{x^2+y^2})) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \phi(A) = z$ ✓

- ϕ es continua pues la parte real e imaginaria de ϕ son continuas.
- ϕ^{-1} es continua.

De la suprayectividad tenemos que $\phi^{-1} : D(0,1) \to \mathbb{R}^2$ esta dada por

$$\phi^{-1}(z) = (x(1+\sqrt{x^2+y^2}), y(1+\sqrt{x^2+y^2})) \quad \text{para } z = x+iy \in \mathbb{C}.$$

La cual es continua entrada a entrada y por tanto continua.

$\therefore \phi$ es un homeomorfismo $\therefore A$ es un atlas complejo en $\mathbb{R}^2$ ∎

Problema 4. –

vale(2.0) Muestre que el conjunto

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 - 2(\cos w)z + 1 = 0\}$$

puede escribirse como la union de 2 superficies de Riemann dadas por 2 funciones enteras. Determine los pntos donde ambas superficies se encuentran.

Demostración:

Demi Tenemos que $z^2-2(\cos w)z+1=0 \Leftrightarrow z^2-2(\cos w)z+\cos^2 w+1-\cos^2 w=0$
$\Leftrightarrow (z-\cos w)^2+1-\cos^2 w=0 \Leftrightarrow (z-\cos w)^2+\operatorname{Sen} w=0 \Leftrightarrow (z-\cos w)^2=-\operatorname{Sen} w$
$\Leftrightarrow z-\cos w=\pm i\operatorname{Sen} w \Leftrightarrow z=\cos w\pm i\operatorname{Sen} w$

Por tanto si $F_1(z,w)=z-\cos w+i\operatorname{Sen} w$ y $F_2(z,w)=z-\cos w-i\operatorname{Sen} w$ tendremos que

$$S=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid F_1(z,w)=0\}\cup\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid F_2(z,w)=0\}.$$

Por otro lado

$\frac{\partial F_1}{\partial z}=1\neq 0$

$\frac{\partial F_1}{\partial w}=-\operatorname{Sen} w+i\cos w=ie^{iz}\neq 0 \quad \forall z\in S$

$\frac{\partial F_2}{\partial z}=1\neq 0$

$\frac{\partial F_2}{\partial w}=-\operatorname{Sen} w-i\cos w=-ie^{-iz}\neq 0 \quad \forall z\in S$

$\therefore$ F_1 y F_2 no tienen puntos críticos en S

$\therefore$ $S_1=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid F_1(z,w)=0\}$ y $S_2=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid F_2(z,w)=0\}$ son superficies de Riemann

donde F_1 y F_2 son funciones enteras y $S=S_1\cup S_2$

Por último $S_1\cap S_2=\{(z,w)\in\mathbb{C} \mid F_1(z,w)=F_2(z,w)=0\}$
$\Rightarrow z-\cos w+i\operatorname{Sen} w=z-\cos w-i\operatorname{Sen} w \Leftrightarrow i\operatorname{Sen} w=-i\operatorname{Sen} w \Leftrightarrow \operatorname{Sen} w=0 \Leftrightarrow w=\pi K,\ K\in\mathbb{Z}$

$\therefore$ $S_1\cap S_2=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ ■

Problema 5. –

vale(2.0) Determine los puntos críticos y los valores criticos para

$$f(z)=z^4-2z^2$$

. Fijando el argumento principal, determine el número de ramas locales en cada punto crítico.

Demostración: Tenemos que los puntos críticos son aquellos tales que $f'(z)=0$.

Sabemos que $f'(z)=4z^3-4z \Rightarrow f'(z)=0 \Leftrightarrow 4z^3-4z=0 \Leftrightarrow z(4z^2-4)=0 \Leftrightarrow z=0$ o $4z^2-4=0 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=\pm 1$, entonces los puntos críticos serán $z=-1,0,1$, con lo que los valores críticos son $f(-1)=-1,\ f(0)=0$ y $f(1)=-1$.

Ahora veamos cual es el orden de cada punto crítico.

- $f'(-1)=0,\ f''(z)=12z^2-4 \Rightarrow f''(-1)=8\neq 0$ entonces es punto crítico de orden 1.
- $f'(0)=0,\ f''(0)=-4\neq 0$ entonces es punto crítico de orden 1.
- $f'(1)=0,\ f''(1)=8\neq 0$ entonces es punto crítico de orden 1.

Con esto y por el teorema 2 del 6 de mayo tendemos que existen 2 ramas distintas para cada punto crítico para la inversa en una vecindad de $-1, 0$ y de 1.

$\blacksquare$