

POLIMI GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT, POLITECNICO
DI MILANO
MASTER'S DEGREE QUANTITATIVE FINANCE

Gestione dei portafogli - A.Y. 2022/23

Project Work

STUDENTS:

Pierpaolo Armilio 10953803

Lorenzo Baggi 10530526

Riccardo Canton 10575532

PROFESSORS:

Michele AZZONE

Emilio BARUCCI

December-January 2022

Contents

1	Descrizione del Dataset	1
2	Stima dei Parametri Storici	1
3	Frontiera Efficiente	3
4	Frontiera Efficiente con Vincolo	4
5	Capital Asset Pricing Model	4
6	Ritorni Impliciti di Mercato	5
7	View di Mercato	6
	References	I
A	Appendix	II
A.1	Descrizione del Dataset	II
A.2	Stima dei Parametri Storici	III
A.3	Frontiera Efficiente	III
A.3.1	Risoluzione con Risk Free Rate a 0.01	IV
A.4	Frontiera Efficiente con Vincolo	IV
A.4.1	Risoluzione con Vincolo di Short Selling e Risk Free Rate a 0.01	V
A.5	Capital Asset Pricing Model	VI
A.6	View di Mercato	VI
A.6.1	Richiamo Teorico Black-Litterman	VI
A.6.2	Modello GARCH(1,1) per CBT	VII
A.6.3	Modello di Regressione Multivariata per LZB	IX

List of Figures

1	Ritorno cumulato per le azioni del Dataset	1
2	Correlazione Storica	2
3	Frontiera con V^{SCC} e rendimenti con $k = 0.005$ vs frontiera con V^{sample} e ritorni storici (sx). Frontiera eff. con soli titoli rischiosi e con titolo privo di rischio, (dx)	3
4	Frontiera portafogli senza e con short selling (sx). Focus con rendimento pari al 0.5%(dx).	4
5	CAPM e Stock Picking	5
6	Portafoglio di mercato Nov-2022 (sx), Portafogli di mercato storici (dx)	6
7	Rendimenti mensili del dataset oggetto di analisi	III
8	Portafogli generati randomicamente e loro Sharpe Ratio	III
9	Frontiera Efficiente con $R_f = 0.01$	IV
10	Confronto Frontiera Efficiente imponendo il vincolo	V
11	Due modalità di minimizzazione per esprimere il divieto di Short Selling	V
12	Allocazione pesi dei portafogli con e senza vincolo di Short Selling, $R_f = 0.01$, rendimento atteso = 0.5%	VI
13	α & β per le stock del datast	VI
14	varianza del modello GARCH	VIII
15	qqplot residui modello GARCH	VIII
16	Istogramma residui modello GARCH	IX
17	Titoli per il modello di regressione lineare	IX
18	Modello di Regressione Lineare - MATLAB	X

List of Tables

1	Sintetica descrizione delle compagnie (per maggiore dettaglio si veda A.1)	1
2	Stima di α e β	5
3	Analisi stocks dataset supplementare	II
4	Parametri Modello Garch(1,1)	VII
5	Parametri Modello Regressione Lineare	X

1 Descrizione del Dataset

Il progetto consiste nell'analizzare sei titoli azionari utilizzando come benchmark il Nasdaq 100. I ticker che identificano le azioni oggetto d'analisi sono: **ADC**, **K**, **CBT**, **LZB**, **NATR** e infine **WOR**. Per comprendere i comportamenti delle azioni, sono state ricercate le principali caratteristiche, come: settore di appartenenza, industria di riferimento, struttura della compagnia e situazione patrimoniale. Tali informazioni sono state sintetizzate in tabella 1 per una immediata visualizzazione.

In figura 1 sono riportati i ritorni cumulati per l'ultimo decennio (sx) e l'ultimo anno (dx) del dataset in analisi.

Tale visualizzazione è utile perché permette di cogliere rapidamente eventuali situazioni “anomale” coincidenti con periodi di crescita/decrecita estremamente rapidi.

Table 1: Sintetica descrizione delle compagnie (per maggiore dettaglio si veda A.1)

Ticker [1]	ADC	CBT	K	LZB	NATR	WOR
Company name [1]	Agree Realty Corporation	Cabot Corporation	Kellogg Company	La-Z-Boy Incorporated	Nature's Sunshine Products, Inc	Worthington Industries, Inc.
Sector [2]	Real Estate	Chemicals	Food Products	Furnitures	Consumer Defensive	Iron/Steel
Industry [2]	REIT—Retail	Basic Materials/Resources	Consumer Goods	Consumer Goods	Packaged Foods	Basic Materials/Resources
Book Value @2021 [€] [2]	45.5	16.0	10.9	18.8	8.00	30.6
Total Debt [B€] @2021 [2]	1.75	1.54	7.73	0.43	0.02	0.084

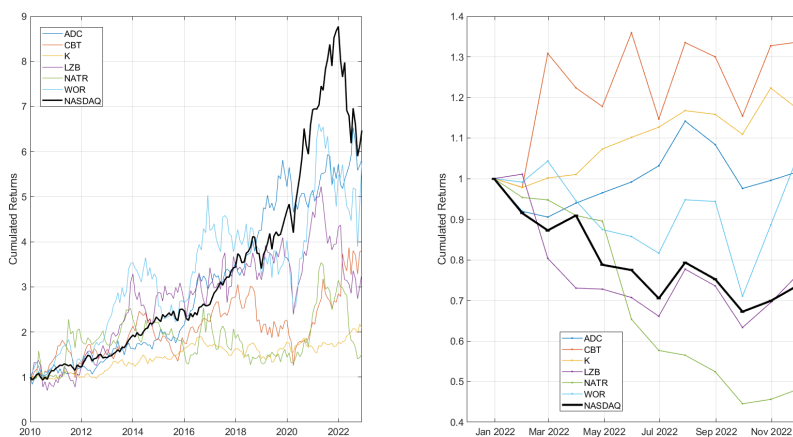


Figure 1: Ritorno cumulato per le azioni del Dataset

2 Stima dei Parametri Storici

Per descrivere il dataset sono stati utilizzati dei KPI di posizione e di dispersione; in particolare: media storica, varianza dei ritorni totali dei titoli e covarianza tra coppie di titoli. Al fine di stimare la media di un campione si è scelto come stimatore BLUE la *media campionaria*.

Quando si opera con un ottimizzatore alla Markowitz, si deve tener conto che quest'ultimo è estremamente sensibile ai rendimenti attesi dati in input – nel caso in oggetto, questi coincidono con i ritorni storici –. Infatti, si osserva che a piccole perturbazioni del dato in input si generano differenze considerevoli sull'output, e quindi, nella stima del peso del titolo i -esimo nel portafoglio ottimo. Da analisi di letteratura è possibile affermare che un ottimizzatore alla Markowitz è *mal condizionato* [3]; dunque, per mitigare questi effetti, si può ricorrere a due possibili soluzioni:

- Utilizzare una media pesata/esponenziale:

$$\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N R_{i,t} \frac{e^{-\lambda(N-t)}}{\sum_{j=1}^N e^{-\lambda(N-t)}} \quad (1)$$

- Usare l'approccio *Black-Litterman*

Di seguito è stato adottato l'approccio a *media esponenziale*, imponendo $\lambda = 0.005$ ed ottenendo come medie storiche pesate: **[0.013, 0.014, 0.006, 0.012, 0.008, 0.016]**.¹ Il fattore λ agisce da *smoothing parameter*, si tratta di un valore compreso tra 0 ed 1.

Per il calcolo della covarianza tra due titoli i e j , si può usare la *varianza campionaria* $\sigma_{i,j}$, che è ancora una volta uno stimatore *unbiased*.

Tuttavia con N titoli occorre calcolare $N \cdot \frac{N-1}{2}$ covarianze e solitamente si ha il problema di dover stimare un numero elevato di covarianze avendo però un numero ristretto di parametri, introducendo pertanto possibili errori di stima.

A fronte di ciò, un possibile rimedio è utilizzare il **Constant Correlation Approach (CC)**. L'idea è quella di calcolare un unico valore di correlazione, ρ , facendo la media campionaria delle correlazione $\rho_{i,j}$ dei generici titoli i / j -esimi, $\forall i \neq j$.

Con il dataset in oggetto essa risulta essere pari a 0.2428. Tale semplificazione introduce però un errore, detto: *rischio di modello*, il quale viene mitigato introducendo l'approccio detto **Shrinkage Toward Constant Correlation (SCC)**. Così facendo, si combina la matrice varianza-covarianza ottenuta con l'approccio CC con quella stimata storicamente (V^{sample}), usando la seguente formula:

$$V^{SCC} = V^{sample}(1 - k) + k \cdot V^{CC} \quad (2)$$

dove V indica la matrice di var-covar e la scelta di k rappresenta un trade-off tra rischio di stima e rischio di modello. Nel caso in esame, con $k = 0.2$, le matrici di co-varianza sono:

$$V^{sample} = 10^{-2} \begin{pmatrix} .35 & .09 & .07 & .16 & .10 & .13 \\ .09 & .93 & .11 & .35 & .12 & .50 \\ .07 & .11 & .21 & .13 & .07 & .10 \\ .16 & .35 & .13 & \mathbf{1.21} & .38 & .37 \\ .10 & .12 & .07 & .38 & \mathbf{1.55} & .23 \\ .13 & .50 & .10 & .37 & .23 & .97 \end{pmatrix} \quad V^{SCC} = 10^{-2} \begin{pmatrix} .35 & .10 & .07 & .16 & .12 & .13 \\ .10 & .93 & .11 & .33 & .16 & .45 \\ .07 & .11 & .21 & .13 & .08 & .10 \\ .16 & .33 & .13 & \mathbf{1.21} & .37 & .35 \\ .12 & .16 & .08 & .37 & \mathbf{1.55} & .24 \\ .13 & .45 & .10 & .35 & .24 & .97 \end{pmatrix}$$

Si noti come i titoli **LZB** e **NATR** siano affetti da una varianza molto più alta se comparata con gli altri stock, oltretutto, si osservi che 0.2428 è un valore di correlazione media molto contenuto.

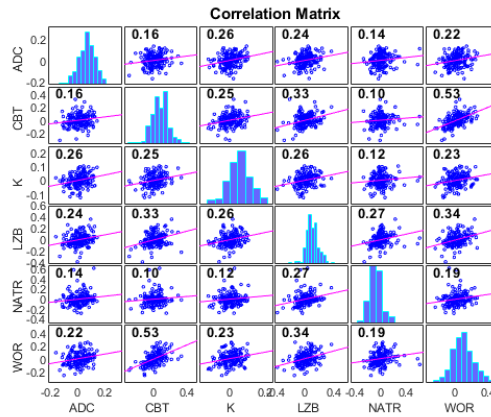


Figure 2: Correlazione Storica

In figura 2 sono riportate le correlazioni del dataset oggetto d'analisi e si può osservare che tutte le stocks sono correlate positivamente fra loro. Nello specifico **CBT** e **WOR** hanno una correlazione contenuta con gli altri titoli stock eccetto che tra di loro, dove, infatti, si ha un valore di poco $> 50\%$. Questa correlazione non trascurabile può spiegarsi nel seguente modo: le aziende **CBT** e **WOR** lavorano con materie prime; di conseguenza, ci si aspetta che eventuali variazioni nel prezzo di queste ultime impattino similmente le due aziende. Si osserva inoltre come **NATR** sia poco correlata con

¹Per $\lambda = 0$ si otterrebbero le medie storiche campionarie, pari a: **[0.013, 0.013, 0.006, 0.014, 0.010, 0.015]**.

tutti gli stock ed infatti è l'unica che lavora nel settore *Health Care*. Infine, nonostante **K** ed **LZB** lavorino nella stessa Industry, e dunque ci si potrebbe aspettare una correlazione non trascurabile, si evince empiricamente un valore molto basso; la causa è da ricercarsi nel settore di lavoro estremamente differente; nello specifico, *foods* e *furnitures* rispettivamente.

3 Frontiera Efficiente

Risoluzione con ² $Rf = 0.01/12$. L'obiettivo è ora quello di calcolare la *frontiera efficiente* con il metodo d'ottimizzazione alla Markowitz – i.e., minimizzare la varianza per ottenere un rendimento $E[r^p]$ –. In riferimento alla figura 3 (sx) si osserva che la frontiera efficiente ottenuta con media e varianza storica domina la frontiera stimata con metodo Shrinkage e media esponenziale; ciò significa che il metodo Shrinkage *sottostima* la media per ogni valore della standard deviation computato.

Analizzando la figura 3 (dx) ci si accorge che il portafoglio tangente vive sulla frontiera efficiente. In base alla frazione di capitale investita nei titoli rischiosi, detta ν , ovvero l'esposizione al portafoglio tangente, si distinguono 3 scenari:

1. $\nu \leq 0$ (nel plot linea bordeaux) significa intuitivamente che ci si sta indebitando in borsa per investire il tutto in un titolo non rischioso.
2. $0 < \nu \leq 1$ (porzione di linea rossa compresa tra i dot celeste e giallo) significa che si sta investendo sia in banca che in borsa.
3. $\nu > 1$ (linea rossa dopo dot giallo) significa che si sta facendo debito in banca e si sta investendo tutto in borsa.

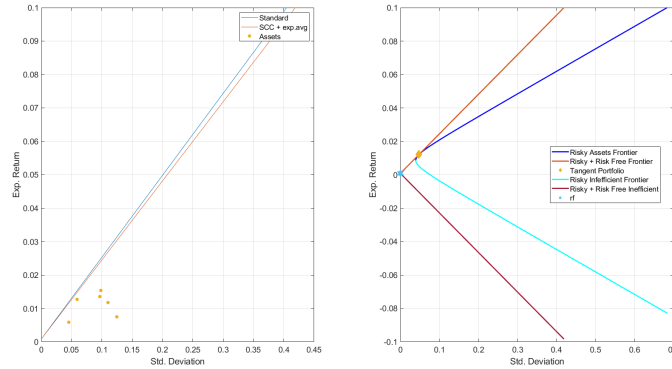


Figure 3: Frontiera con V^{SCC} e rendimenti con $k = 0.005$ vs frontiera con V^{sample} e ritorni storici (sx). Frontiera eff. con soli titoli rischiosi e con titolo privo di rischio, (dx)

Si noti in Appendice A.3 la rappresentazione grafica della frontiera efficiente ottenuta con i metodi di shrinkage e media esponenziale, con un focus sullo sharpe ratio per l'i-esimo portafoglio generato randomicamente.

Il portafoglio tangente ottenuto con la seguente equazione:

$$w_e = \frac{V_{SCC}^{-1} \cdot (\mu_{exp} - Rf)}{\mathbf{1}^T \cdot V_{SCC}^{-1} \cdot (\mu_{exp} - Rf)} \quad (3)$$

è così composto: [0.5568, 0.1171, 0.1608, 0.0195, -0.0044, 0.1501]. Sono assunte tutte posizioni long tranne che nel titolo **NATR** dove è presente una posizione short di piccola entità. Da ciò si ha che il portafoglio tangente non è granchè diversificato in quanto più della metà del capitale è investito nel primo titolo, i.e. **ADC**.

Quantitativamente è possibile confermare questa osservazione sfruttando, ad esempio, l'indice di *Herfindahl*: tale indice è limitato tra $1/N$ e 1 dove N è il numero di asset; il limite inferiore

²Si è reputato opportuno mensilizzare il *Risk Free*, dal momento che è improbabile avere un tale coefficiente pari al 12% annuo. Nell'evenienza, il punto 3 e 4 son stati risolti con $Rf=0.01$ e i risultati son riportati in appendice. A.3.1

corrisponde alla massima diversificazione del portafoglio, mentre il limite superiore individua un portafoglio altamente concentrato. Empiricamente $D_{Hurf} \leq 0.01$ indica un portafoglio altamente diversificato mentre per $D_{Hurf} \geq 0.25$ indica presenza di alta concentrazione. Nel caso in oggetto si osserva un valore di 0.3710.

4 Frontiera Efficiente con Vincolo

Si calcoli ora la frontiera efficiente imponendo un vincolo di *divieto di short selling*. Per implementare questa condizione, nel processo di ottimizzazione alla Markowitz, occorre impostare che ogni peso del portafoglio sia $w_i \geq 0$, ad ogni iterazione. La funzione predefinita *fmincon* ha la possibilità di inserire un parametro addizionale, noto come *lower bound* e, settandolo ≥ 0 si ottiene proprio quanto desiderato. Per un ulteriore metodo di minimizzazione vincolata è possibile consultare l'appendice A.4. Fissato un rendimento atteso pari a 0.5%, si può notare, nel bar chart in Figura 4 (dx), che la minimizzazione della varianza senza divieto di short selling porta ad essere long su quasi tutti gli asset ad eccezione dell'asset NATR. Qui è evidente una posizione short dell'ordine di grandezza di 10^{-3} – fuori scala rispetto agli altri stock, e dunque rappresentato nello zoom in figura –.

Quando si va ad imporre una minimizzazione con divieto di short selling, si ottengono risultati di positività molto piccoli in corrispondenza dell'asset 5, questo perché si parte da una posizione short dell'ordine di 10^{-4} , quindi il calcolatore deve ottimizzare su “piccole variazioni dei dati in input”; infatti, come è possibile osservare in fig.10 oppure figura 4 (sx), vi sono delle elementari manifestazioni di instabilità numerica.³

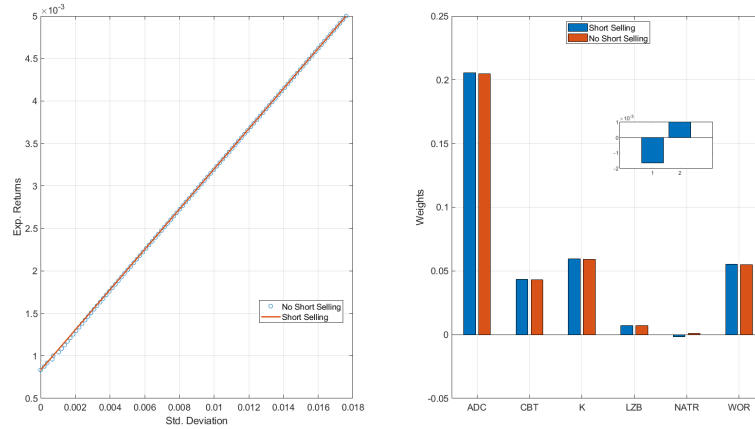


Figure 4: Frontiera portafogli senza e con short selling (sx). Focus con rendimento pari al 0.5%(dx).

5 Capital Asset Pricing Model

L'obiettivo è ora stimare α e β per ogni titolo appartenente al dataset considerando i ritorni del **NASDAQ 100** come proxy per i ritorni del mercato.

Nel **Capital Asset Pricing Model** (CAPM) si assume che il return della stock i-esima possa essere interpretato con un modello di regressione lineare avente la seguente formulazione:

$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \epsilon_i$, dove α_i è l' excess return rispetto a quello atteso, predetto dal CAPM. r_i è funzione del Risk-Free rate, del β dello stock i-esimo e del ritorno atteso del benchmark; di conseguenza, se il ritorno del titolo è uguale a quello predetto dal CAPM, l' α_i risulta essere zero.

Ciò significa che il return di tale titolo è in linea con quanto previsto dal modello, una volta noto il suo livello di rischio, misurato dal parametro β . Quest'ultimo infatti misura l'esposizione del rendimento del titolo i-esimo rispetto al rendimento del benchmark, ed è per tale motivo che si dice che il β misura il **rischio sistemico** dell'investimento.

Una stima del parametro β_i è possibile tramite la seguente formula: $\frac{cov(r^i, r^M)}{var(r^M)}$.

³Si noti in merito alla fig.4 come i pesi cambino qualora il Risk Free Rate sia pari a 0.01. Tale osservazione è riscontrabile in Figura 12.

Per ultimo, ϵ_i rappresenta il **rischio idiosincratico** del titolo i-esimo; esso ha media zero, non è correlato a r^M ed è normalmente distribuito.

Nel caso in oggetto, dopo aver calcolato i ritorni del **NASDAQ 100** ed aver effettuato una regressione lineare avente come X gli excess returns del **NASDAQ** e come Y quelli del titolo i-esimo, si sono ottenuti i seguenti α e β , riportati in Tabella 2. Si noti che ogni β_i risulta essere > 0 e con p-values statisticamente significativi; mentre, gli α_i non risultano essere statisticamente significativi agli usuali livelli di confidenza, di conseguenza, possono essere considerati pari a 0, in accordo con quanto predetto dal CAPM. Ciò detto, l'unica stock con α minore di 0 risulta essere **CBT**; per una visualizzazione immediata degli *alpha* e *beta* si rimanda all'appendice A.5.

Table 2: Stima di α e β

Ticker	ADC	CBT	K	LZB	NATR	WOR
α	0.0073	-0.0003	0.0013	0.0017	0.0011	0.0045
p value α	0.1156	0.9622	0.7069	0.8369	0.9134	0.5407
β	0.4012	1.0203	0.2864	0.8987	0.6199	0.8614
p value β	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0017	0.0000

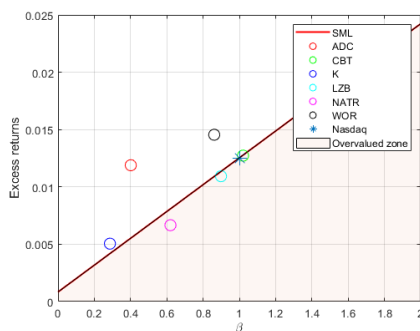


Figure 5: CAPM e Stock Picking

Si noti infine che in Figura 5 è stata ricreata la *Security Market Line* (SML) sulla quale giace il **NASDAQ 100** ad un β pari a 1. Il CAPM può infatti essere usato per fare **stock picking**, ovvero, permette di individuare titoli sotto-prezzati – *occasioni di buy* – e titoli sovra-prezzati – *occasioni di short* –. Nel dataset in esame, in base a quanto detto, si può asserire che le stock **K**, **ADC** e **WOR** potrebbero rappresentare buone opportunità d'investimento.

6 Ritorni Impliciti di Mercato

Lo scopo è ora calcolare i *ritorni impliciti di mercato*, “ Π ”, utilizzando il modello **Black & Litterman**. Tale modello prevede il calcolo di un portafoglio di equilibrio per la stima a priori dei ritorni. Empiricamente, le ipotesi di equilibrio coincidono con il CAPM e, di conseguenza, il portafoglio neutrale si identifica con il portafoglio di mercato predetto dal CAPM [4],[5].

Nel caso in analisi, l'ipotesi è che il mercato coincida con le sei stock del dataset; a questo punto, è possibile calcolare per ogni mese la frazione di portafoglio di mercato investita nello stock i-esimo, tramite seguente formula, dove N rappresenta il numero di stock:

$$w_{mkt,i} = \frac{Capitalizzazione_i}{\sum_{i=0}^N Capitalizzazione_i} \quad (4)$$

Così facendo si ottiene l'evolutive rappresentato in figura 6 (dx), mentre, nel diagramma a torta, si ha un focus sul solo mese di Novembre-22. Si noti che esso risulta essere sovra esposto nel titolo a maggior capitalizzazione. Infine, posto $\tau = 1$ con l'equazione sottostante si sono calcolati i ritorni impliciti per tale portafoglio, ovvero, $\Pi = [0.0012, 0.0022, 0.0016, 0.0020, 0.0012, 0.0021]^T$. Si noti l'estrema differenza tra tali ritorni e quelli calcolati storicamente riportati nel paragrafo 2.

$$PI = \tau \cdot V^{SCC} \cdot w_{mkt} \quad (5)$$

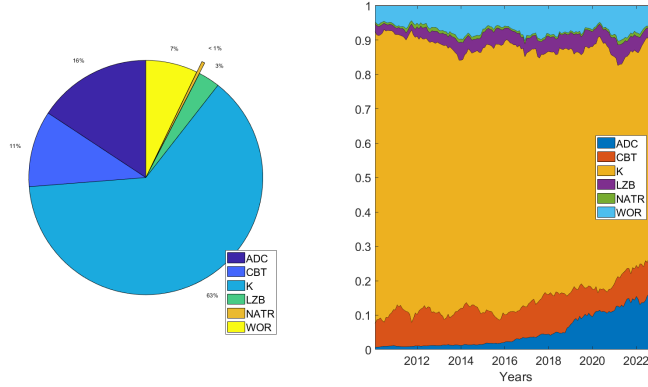


Figure 6: Portafoglio di mercato Nov-2022 (sx), Portafogli di mercato storici (dx)

7 View di Mercato

In questa sezione si formulano due Black-Litterman's views riguardo i rendimenti delle stock appartenenti al dataset. Con questo approccio è, infatti, possibile incorporare delle analisi soggettive nell'equilibrio di mercato, ottenendo una regola sistematica per stimare le medie e le covarianze dei rendimenti degli asset, coi quali è poi possibile ottenere il portafoglio d'investimento [6], [7].

Nel caso in esame, si è deciso di implementare due rigorosi modelli statistici al fine di navigare al meglio un territorio incerto e complesso, quale il mercato azionario nel 2022/2023.

Il primo modello è stato applicato al titolo **CBT**; in particolare, dopo aver riscontrato un effetto di eteroschedasticità sui rendimenti, si è deciso di implementare un GARCH(1,1). Costruito il modello, si è dapprima stimata la varianza condizionata di Gennaio 2023 e successivamente si è calcolata la deviazione standard; infine, assumendo uno Sharpe Ratio costante pari a quello degli ultimi 6 mesi, si è stimato il rendimento atteso per tale stock. In questo modo è stato possibile produrre in modo quantitativo la prima view.

Per generare la seconda ci si è basati su un modello di regressione lineare multivariata sul titolo **LVB**; dove i regressori sono gli indici **VIX** e **NDX**. Questi si sono dimostrati essere statisticamente significativi e coerenti con il processo di previsione dei returns. Dopo aver calibrato il modello, le previsioni per Gennaio sono state effettuate inserendo come valori dei regressori le quote stimate riguardo al **VIX** e al **NASDAQ** [8], [9]. Una volta stimate le views ed il relativo grado di certezza⁴, si è proceduto con l'implementazione del modello Black Litterman ottenendo il portafoglio identificato dal vettore w_{BL} . Si noti che le views e le loro certezze sono state calcolate con approcci quantitativi e per queste ultime si è fatto ricorso alla probabilità di eventi indipendenti e alla nozione di R_{adj}^2 . Per esempio, il modello previsionale per **LVB** presenta un R_{adj}^2 pari a 0.45. Quest'ultimo è stato poi decrementato del 50% per tenere da conto che R_{adj}^2 non è una vera e propria misura di accuratezza, quanto piuttosto della qualità del modello. Con tale processo si è ottenuta la certezza della view.

$$view = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.04 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Certainty = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.20 \end{bmatrix} \quad W_{BL} = \begin{bmatrix} 0.086 \\ 0.948 \\ 0.346 \\ -0.421 \\ 0.002 \\ 0.039 \end{bmatrix} \quad PI_{new} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.009 \\ 0.002 \\ -0.004 \\ -0.000 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$

Si osservi come, con le views generate dai modelli, si ottiene un portafoglio altamente concentrato. Si ha una posizione short non trascurabile in corrispondenza del quarto titolo per quale si ha una view ribassista e al contempo si va long sul secondo titolo per il quale si ha una view rialzista.

⁴Si confronti appendice A.6 per avere i dettagli sulla produzione delle views e della *Certainty*.

References

- [1] Yahoo Finance. *Market Data*. [link](#).
- [2] The Wall Street Journal. *Market Data*. [link](#).
- [3] W.J. Hurley. *A note on the sensitivity of the strategic asset allocation problem*.
- [4] Thomas M. Idzorek. *A step-by-step guide to the Black Litterman model*.
- [5] Jay Walters. *The Black-Litterman Model in detail*. [link](#).
- [6] P. N. Kolm and G. Ritter. *On the Bayesian Interpretation of Black-Litterman*.
- [7] M Attilio. *Beyond Black-Litterman in Practice: A Five-Step Recipe to Input Views on Non-Normal Markets*. [link](#).
- [8] The Economy Forecast Agency, EFA. [link](#).
- [9] Gov Capital Investor Blog. [link](#).
- [10] The Org. *Companies Outline*. [link](#).
- [11] *Modello Black Litterman e asset allocation*. [link](#).
- [12] Federal Reserve Bank of St. Louis. [link](#).

A Appendix

A.1 Descrizione del Dataset

Nella tabella 3 seguente si riportano informazioni aggiuntive che meglio aiutano a comprendere le azioni appartenenti al dataset oggetto di studio.

Table 3: Analisi stocks dataset supplementare

TICKER	ADC	CBT	K	LZB	NATR	WOR
Company outline [10]	self-managed REIT focused on the acquisition of retail properties	An American specialty chemicals and performance materials company	World's leading producer of cereal, and a leader in cookies, crackers, and savory snacks production	American furniture manufacturer that makes home furniture.	Produces encapsulated herbal products, natural vitamins, skin care etc.	Lading global diversified metals manufacturing company.
Cash & ST. investments [M€] [2]	45.3	206	286	266	86.2	34.5
Tot. Liabilities [B€] [2]	1.81	2.49	14	1.25	0.097	2.09
Number of Employees [2]	57	4.49k	14k	13k	850	8.4k
Revenues [B€] [2]	0.339	4.432	14.9	2.36	0.44	5.4
Analysts Ratings (Current) [2]	BUY	BUY	HOLD	HOLD	BUY	HOLD
Key Executives	Mr. Joel N. Agree Pres, CEO and Director, Mr. Craig Erlich Chief Operating Officer	Mr. Sean D. Keohane Pres, CEO and Director, Ms. Erica J. McLaughlin Sr. VP and CFO	Mr. Steven A. e Chairman, CEO and Pres, Mr. Amit Banati Sr. VP, CFO and Principal Financial Officer	Ms. Melinda D. Whittington Pres, CEO and Director, Mr. Robert Gerard Lucian Sr. VP and CFO	Mr. Terrence O. Moorehead Pres, CEO and Director, Mr. Daniel C. Norman Exec. VP	Mr. John P. McConnell Exec. Chairman, Mr. B. Andrew Rose Pres and CEO

A.2 Stima dei Parametri Storici

Rappresentazione dei rendimenti mensili per ogni stock oggetto di esame.

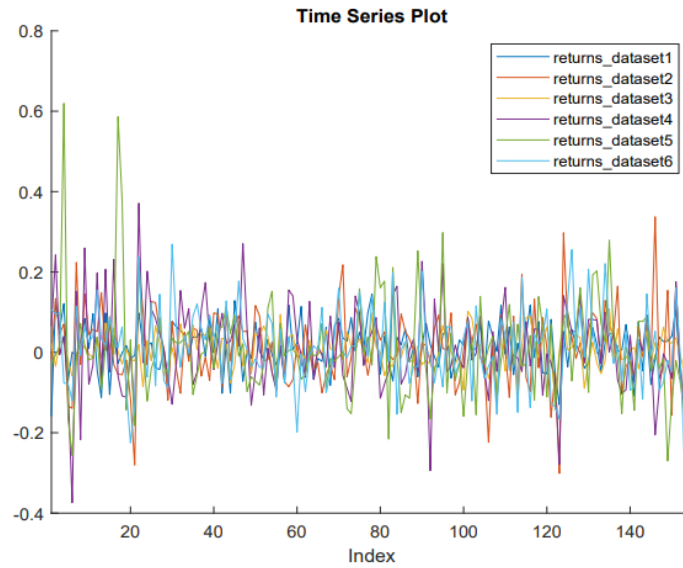


Figure 7: Rendimenti mensili del dataset oggetto di analisi

A.3 Frontiera Efficiente

In figura 8 è riportata dapprima in linea rossa la frontiera efficiente per i soli titoli rischiosi. Al fine della sua costruzione la media dei titoli è pari alla media ottenuta con approccio esponenziale e la matrice di covarianza è quella ottenuta con metodo shrinkage. Son stati poi generati 10.000 portafogli randomici e ne è stato calcolato il loro Sharpe Ratio mensile con l'equazione:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{E[\hat{r}_p] - R_f}{\sigma_p} \quad (6)$$

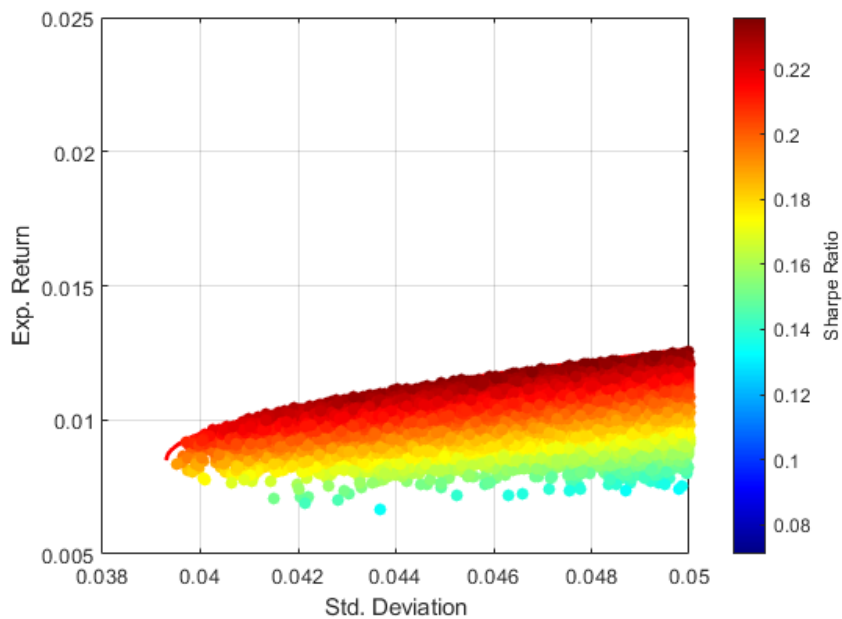


Figure 8: Portafogli generati randomicamente e loro Sharpe Ratio

Risulta interessante osservare che, fissato un valore di volatilità, lo sharpe ratio aumenta al tendere verso la frontiera efficiente mentre, fissato un valore di rendimento atteso, lo sharpe ratio diminuisce all'aumentare della volatilità. Inoltre, si noti come la frontiera efficiente costruita analiticamente domina in termini di *Sharpe Ratio* tutti i portafogli generati.

A.3.1 Risoluzione con Risk Free Rate a 0.01

Risolvendo l'esercizio utilizzando un risk free rate pari, come da testo, a 0.01 mensile – ovvero il 12% annuo – si otterrebbe un portafoglio tangente appartenente alla frontiera inefficiente, come mostrato in figura 9.

Oltretutto, un Rf di tale magnitudo sarebbe confrontabile con rendimenti mensili di titoli rischiosi, e dunque, si è preferito mensilizzare tale valore al fine di lavorare con un risk free più realistico.

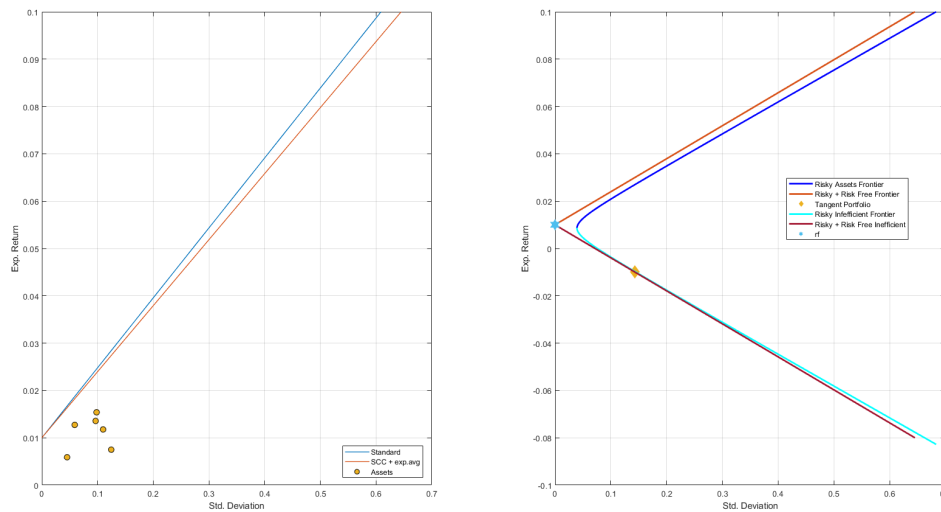


Figure 9: Frontiera Efficiente con $Rf = 0.01$

A.4 Frontiera Efficiente con Vincolo

Con riferimento alla figura 10 si può notare che la minimizzazione con divieto di short selling (curva blu) e eventuale possibilità di short selling (curva rossa) risultano essere visivamente coincidenti (anche se, come detto, i numeri differiscono se si scende a confrontare le cifre decimali). Ciò è dovuto al fatto che con gli input del problema la minimizzazione libera, senza imporre alcun lower bound, converge verso soluzioni in cui la vendita allo scoperto di titoli è estremamente limitata, come già ribadito più volte.

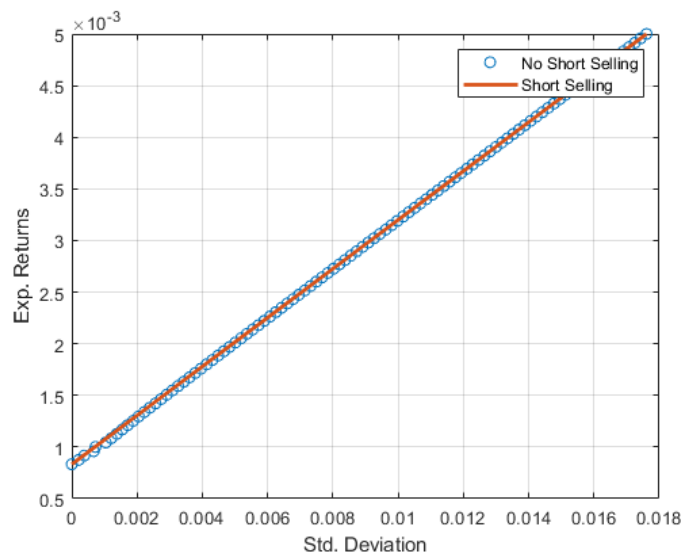


Figure 10: Confronto Frontiera Efficiente imponendo il vincolo

Per quanto riguarda il vincolo di minimizzazione invece, come mostrato in figura 11 sono state valutate due possibilità:

- caso in cui si introduce un lower bound, identificato da un vettore colonna di zero e tale lower bound viene dato come parametro di input alla funzione fmincon.
- Non si introduce alcun lower bound ma si minimizza una funzione in cui si aggiunge una penalità qualora il peso i -esimo del titolo sia minore di zero. Così facendo, l'algoritmo converge verso portafogli senza short selling.

```

lb = zeros(number_stock,1);
for i=1:length(m_r1)
    beq=[m_r1(i)-Rf];
    ww(:,i)=fmincon(@(ww) ww'*Sigma_SCC*ww,w_min,[],[],Aeq,beq,lb);
    ww(:,i) = fmincon( @(ww) ww'*Sigma_SCC*ww -(min(sum(min(ww,0))+eps,0))*1000,w_min,[],[],Aeq,beq);
    Var_w_num_Rf_w(i)=ww(:,i)*Sigma_SCC*ww(:,i);
end

```

Figure 11: Due modalità di minimizzazione per esprimere il divieto di Short Selling

A.4.1 Risoluzione con Vincolo di Short Selling e Risk Free Rate a 0.01

Con riferimento alla figura 12 si noti come, dato un rendimento del titolo privo di rischio pari a 0.01 al mese, il problema di ottimizzazione cambia considerevolmente rispetto al caso in cui esso sia pari a 0.01/12. In tale contesto il modello, senza il vincolo di divieto di short selling, risulta andare short nei titoli 1,2,4 e 6. Imponendo invece l'impossibilità di vendita allo scoperto la soluzione risulta ora essere completamente diversa rispetto al caso base. Si noti che risolvendo l'esercizio con Rf pari a 0.01/12, non vi erano differenze così considerevoli imponendo/rimuovendo il vincolo di short selling.

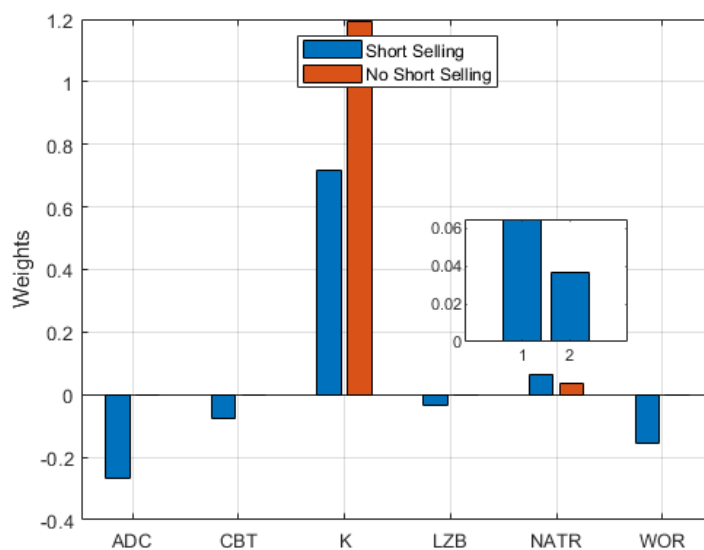


Figure 12: Allocations pesi dei portafogli con e senza vincolo di Short Selling, $R_f = 0.01$, rendimento atteso = 0.5%

A.5 Capital Asset Pricing Model

Si riporta in figura 13 uno scatter-plot degli α e β ottenuti nel dataset oggetto d'esame.

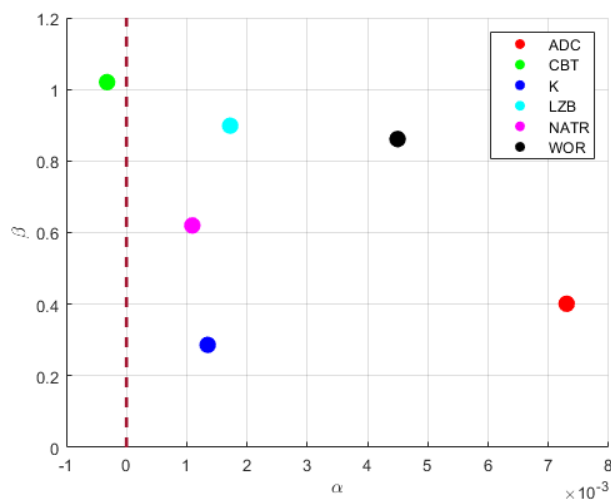


Figure 13: α & β per le stock del dataset

A.6 View di Mercato

A.6.1 Richiamo Teorico Black-Litterman

Il modello Black - Litterman è un modello *Bayesiano* applicato alla *portfolio allocation*. Il modello si basa su due punti chiave: *views* degli investitori e *equilibrio di mercato*.

Le *views* sono le opinioni che gli investitori hanno rispetto ai prezzi relativi delle attività finanziarie di un determinato mercato.

L'equilibrio è una condizione del mercato. Esso rappresenta il punto di riferimento da cui parte l'investitore per la stima dei rendimenti attesi da cui si discosta coerentemente con le proprie opinioni. L'equilibrio di mercato può essere prodotto partendo dalla stima del portafoglio efficiente, ottenuto a

seguito di un'ottimizzazione alla Markowitz: $w^* = (\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot (\mu - Rf)$ e successivamente estrapolando i rendimenti impliciti di mercato $\Pi = \tau \cdot \Sigma \cdot w_{mkt}$ dove w_{mkt} sono i pesi del portafoglio di mercato.

Ad ogni view formulata dall'investitore va associato una *certainty* che esprime il grado di fiducia soggettivo attribuito al verificarsi di quella specifica view. Quanto più la certezza è alta, tanto più si producono portafogli concentrati sul/sugli asset/s sui quali si fa prediction. [11]

A.6.2 Modello GARCH(1,1) per CBT

Dato che la time - series dei returns per **CBT** presenta un fenomeno di eteroschedasticità, si è deciso di modellarla tramite GARCH(1,1). Al fine di verificare l'applicabilità del modello son state verificate le seguenti ipotesi ovvero:

- Stazionarietà della time-series verificata tramite KPSS test; ottenendo un p-value c.a. pari a 0.15 si accetta H_0 di stazionarietà agli usuali livelli di significatività, i.e. 5%.
- Eteroschedasticità della time - series verificata tramite Engle's ARCH test; con un p-value pari a 0.01648, si rifiuta H_0 di omoschedasticità.
- Normalità dei residui verificata tramite Kolmogorov - Smirnov test con un p-value pari a 0.14, si può accettare l'ipotesi di Normalità ai soliti livelli di significatività.
- Condizione di non autocorrelazione dei residui verificata con Ljung-Box Q-Test, si accetta agli usuali livelli di significatività in quanto il p-value è 0.074399.

Il modello costruito è calcolabile con la seguente equazione dove i parametri son riportati in tabella 4.

$$\begin{cases} y_t = \epsilon_t \\ \epsilon_t = \sigma_t z_t \\ (1 - \gamma_1 L) \sigma_t^2 = \kappa + (\alpha_1 L) \epsilon_t^2 \end{cases} . \quad (7)$$

Table 4: Parametri Modello Garch(1,1)

Parameter	Value	Standard Error	t Statistic	P-Value
Constant	0.0005	0.0006	0.8523	0.3941
GARCH,1	0.9064	0.0707	12.8167	0.0000
ARCH,1	0.90419	0.0283	1.4813	0.1385

Ottenuto il modello GARCH(1,1) sopra descritto, è stato possibile stimare la volatilità di Gennaio e, grazie a questa, ottenere il rendimento previsto con l'ausilio dell' ipotesi di Sharpe Ratio costante su 6 mesi.

In un contesto **Black - Litterman**, dunque Bayesiano, oltre ad avere una view, è necessario definirne, almeno qualitativamente, il possibile grado di certezza della stima.

Dal momento che il modello costruito è composto da un ARCH(q) significativo al 14% e un GARCH(p) significativo ad ogni livello; per poter utilizzare il modello nella sua interezza è ragionevole assumere che il livello di confidenza, affinché la stima possa essere accettata, deve essere al più del 86% – ad essere precisi, la confidenza succitata è molto ottimistica poiché, per poter utilizzare questa previsione, bisogna prendere con le pinze l'ipotesi di non autocorrelazione dei residui – .

A questa considerazione si deve tener conto dell'ipotesi di Sharpe Ratio costante; infatti, questa approssimazione va ad abbassare drasticamente il grado di fiducia che si ripone nella stima dei returns futuri.

In forza di queste premesse, risulta lecito assumere che il grado di certezza sulla veridicità del forecasting si possa abbassare di un fattore almeno pari al 50% – questo perché SR costante a 6 mesi, in un anno turbolento come il 2022, è un'approssimazione non raffinata, che certamente deve portare

a smorzare le aspettative sulle predizioni – ciò suggerisce che la proiezione fatta sul rendimento dello stock 2 è da reputarsi corretta con una probabilità al più del $50\% \cdot 86\%$, c.a. 40% .

In figura 14 è riportata la varianza costruita con tale modello mentre in figura 15 e 16 è possibile effettuare un sanity check sui residui di tale modello.

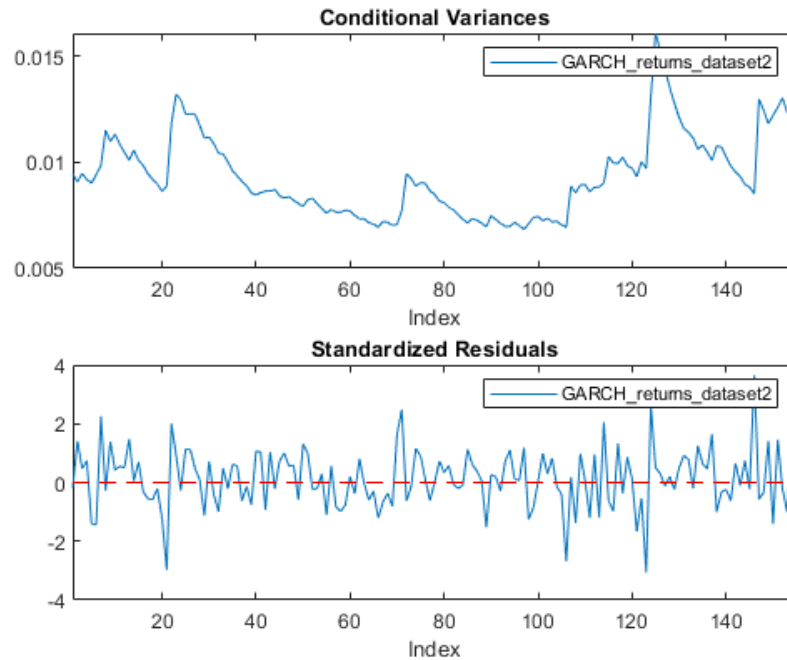


Figure 14: varianza del modello GARCH

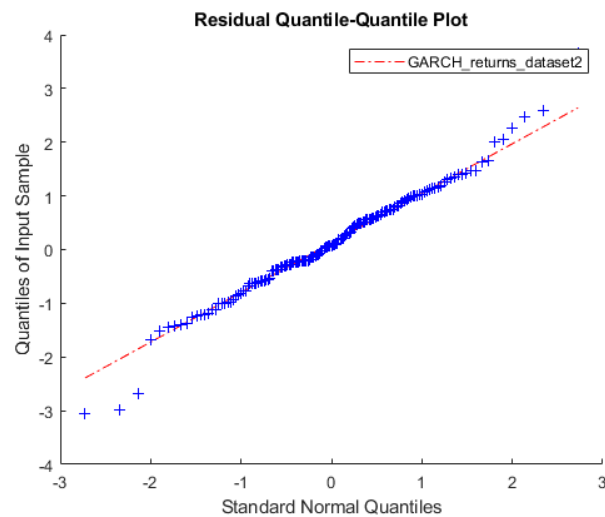


Figure 15: qqplot residui modello GARCH

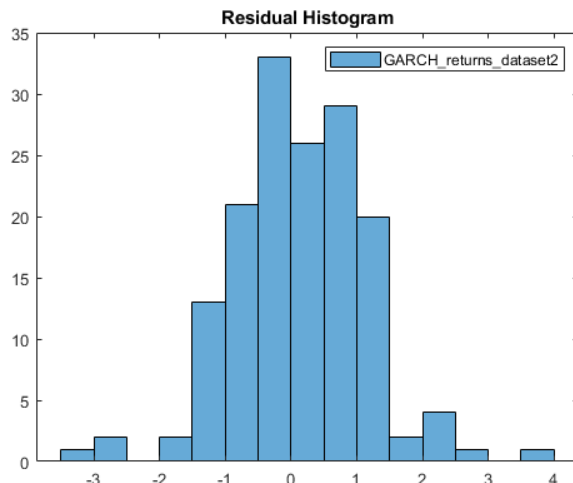


Figure 16: Istogramma residui modello GARCH

A.6.3 Modello di Regressione Multivariata per LVB

Per la seconda view si è cercato di costruire un modello regressivo per lo stock **LVB** usando come regressori l'indice **VIX** (chiamato comunemente: *indice della paura*) e l'indice **NDX**.

Le time-series sono riportate in figura 17 e si può notare che, mentre **NASDAQ** e **LVB** crescono, il **VIX** tende a scendere.

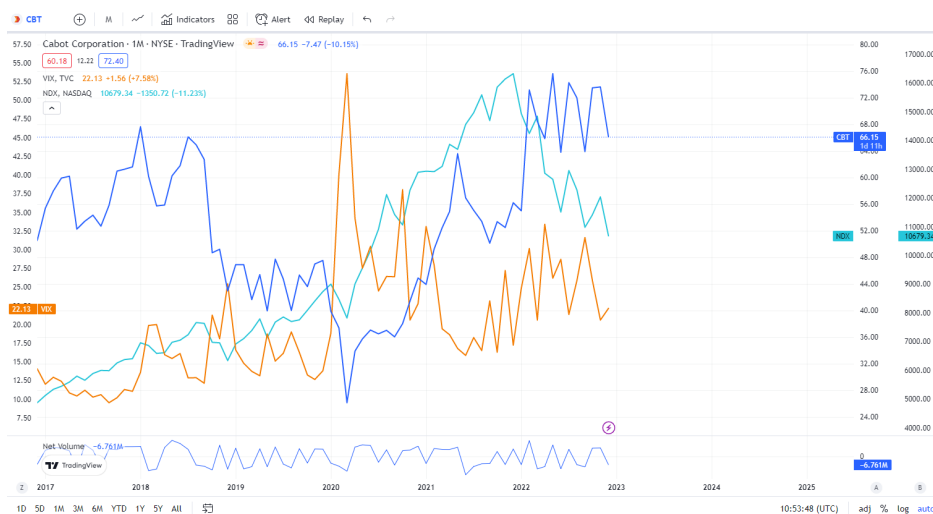


Figure 17: Titoli per il modello di regressione lineare

I dati per il **VIX** sono stati scaricati dal sito della Federal Reserve Bank [12] con granularità mensile a partire dal 2018 e ne sono stati calcolati i rendimenti, mese per mese. Il modello è stato costruito con la funzione *fitlm* implementata in MATLAB.

Al fine di verificare l'applicabilità della regressione lineare sono state verificate le ipotesi del modello di regressione, ovvero:

- Stazionarietà della time-series verificata tramite KPSS test, ottenendo un p-value pari 0.10 e dunque accettata agli usuali livelli di significatività.
- Eteroskedasticità dei residui verificata tramite Engle's ARCH test con un p-value pari a 0.6053 e dunque rifiutata l'ipotesi di non eteroskedasticità agli usuali livelli di significatività.
- Normalità dei residui verificata tramite Anderson-Darling test con un p-value pari a 0.25 e dunque accettata agli usuali livelli di significatività.

- Non autocorrelazione dei residui verificata tramite Ljung-Box Q-Test ottenendo un p-value pari a 0.98 e dunque si accetta l'ipotesi di non autocorrelazione agli usuali intervalli di significatività.

Il modello è dunque della forma:

$y = \kappa + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ dove i regressori sono riportati in tabella 5.

Table 5: Parametri Modello Regressione Lineare

	Stima	Standard Error	t Statistic	P-Value
κ	0.0013	0.0110	0.1223	0.9033
β_1	-0.1251	0.03587	-3.4891	0.0011
β_2	0.5048	0.1857	2.7188	0.0094

Una volta ottenuto il modello ed inseriti i rendimenti per x_1 e x_2 previsivi per il mese di Gennaio, è possibile fornire come output una stima per il rendimento dell'azione **LZB**.

A questa stima va ovviamente accostato un grado di fiducia che verrà utilizzato nella costruzione del portafoglio BL. Per produrre una certainty coerente con i dati è ragionevole attribuire un valore di certezza pari alla capacità di previsione del modello lineare, rappresentata dall' R^2 Adj, che è c.a. 44%, smorzata di un fattore pari al 50% – per tener conto dei limiti di predittività legati alla volatilità dei mercati –.

Questo ragionamento ha senso perché il modello costruito è significativo ad ogni livello di confidenza per quanto espresso nel F-Statistic test, figura 18.

Sarà dunque questo il valore che verrà utilizzato per stimare la certezza relativa a questa view nel framework Black-Litterman.

Linear regression model:

$y \sim 1 + x1 + x2$

Estimated Coefficients:

	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	0.0013357	0.010924	0.12227	0.90325
x1	-0.12514	0.035866	-3.4891	0.001132
x2	0.5048	0.18567	2.7188	0.0094094

Number of observations: 46, Error degrees of freedom: 43

Root Mean Squared Error: 0.0704

R-squared: 0.46, Adjusted R-Squared: 0.435

F-statistic vs. constant model: 18.3, p-value = 1.76e-06

Figure 18: Modello di Regressione Lineare - MATLAB