POLIMI GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT, POLITECNICO DI MILANO
MASTER'S DEGREE QUANTITATIVE FINANCE

Valutazione Prodotti Finanziari - A.Y. 2022/23

Modulo - Credit Risk and Credit Derivatives

STUDENTS:
Lorenzo Baggi 10530526
Martina Chiaventi 10929858
Daniele Fazio 10905323
Riccardo Invernizzi 10954454
Marco Lavizzari 10428222
Marco Livraghi 10953813

PROFESSORE:
ROBERTO DALUISO

February-March 2023

Contents

List of Figures

1 Traccia degli esercizi

In un mercato con tassi di interesse nulli, sia X un sottostante negoziabile senza dividendi con dinamica Bachelier in misura risk-neutral $\mathbb{Q}$:

$$dX_t = \sigma_x dW_t^X,$$

dove σ_x è una costante positiva, e W^X è un moto Browniano standard sotto $\mathbb{Q}$.
Si assuma il punto di vista di una banca la cui controparte ha intensità di fallimento costante e deterministica $\lambda > 0$, e una frazione di loss given default attesa lgd, con la quale non è in essere nessun accordo di collateralizzazione. Si ipotizzi di voler stipulare un forward su X: il contratto prevede che ad una data futura T la banca riceverà X_T pagando uno strike prefissato K.

- Supponendo che la banca non abbia altri contratti in essere con la controparte, si scriva una formula per il Credit Valuation Adjustment unilaterale per unità di sottostante, esplicita a meno di un integrale, e la si implementi per approssimare numericamente il CVA della posizione al tempo 0, per i seguenti valori dei parametri (y indica l'unità di misura "anni"):
$\lambda = 3\%\ y^{-1}$, $lgd = 60\%$, $X_0 = 250$, $\sigma^X = 50$ € $y^{-1/2}$, $K = 240$ €, $T = 3\ y$.

- Per controllo, si calcoli un intervallo di confidenza al 98% per il CVA simulando 100.000 realizzazioni indipendenti del sottostante e dei tempi di fallimento.

2 Risoluzione Esercizio 1

Ogni derivato finanziario dipende implicitamente dal tempo di default, τ_C, della controparte con cui lo si è stipulato. Di conseguenza, il *no-default fair price* è esprimibile tramite la equazione sotto riportata. Si noti che i flussi di cassa contrattuali, $\Delta\pi_{T_i}$ verranno effettuati se e solo se la controparte C non è defaultata al tempo T_i generico, mentre, dopo l'evento di default, si otterrà un flusso il cui valore risulta essere pari a $Rec^C_{\tau_C}$.

$$\hat{V} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Bigg[\sum_{i=1}^{I} D(0,T_i)\Delta\pi_{T_i}\mathbb{1}_{\tau_C>T_i} + D(0,\tau_C)Rec^C_{\tau_C}\mathbb{1}_{\tau_C\le T_i}\Bigg]. \quad (1)$$

Si può inoltre notare che il *no-default fair price* del derivato soddisfa la seguente equazione:

$$V = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Bigg[\sum_{i=1}^{I} D(0,T_i)\Delta\pi_{T_i}\mathbb{1}_{\tau_C>T_i} + D(0,\tau_C)V_{\tau_C}\mathbb{1}_{\tau_C\le T_i}\Bigg]. \quad (2)$$

La differenza tra $\hat{V}$ e V, chiamata nelle prossime equazioni *CVA*, ovvero *Credit Valuation Adjustment*, risulta quindi calcolabile tramite la seguente equazione:

$$CVA := \hat{V} - V = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Bigg[D(0,\tau_C)(Rec^C_{\tau_C} - V_{\tau_C})\mathbb{1}_{\tau_C\le T_i}\big] = -\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[D(0,\tau_C)LGD^C_{\tau_c}\mathbb{1}_{\tau_C\le T_i}\Bigg]. \quad (3)$$

$LGD^C_{\tau_C} = lgd_C \cdot \max(V_{\tau_C}, 0)$, dove lgd_C è la frazione percentuale di quanto capitale è stato perso a causa del default. Tipicamente tale valore è diverso da 0 e nella presente analisi è assunto pari al 60%. Modellando il tempo di default come un processo che segue una distribuzione di *Poisson* a tempo disomogenea, si ha che la probabilità di default nell'intervallo di tempo [u, u+du], è esprimibile tramite la seguente equazione:

$$Prob_t\Bigg[\tau \in [u, u+du]\Bigg] = Prob_t(\tau > u) \cdot Prob_u\Bigg[\tau \in [u, u+du]\Bigg] = \lambda(u)du \cdot e^{-\int_t^u \lambda(s)\,ds}. \quad (4)$$

Nota inoltre la seguente relazione:

$$\mathbb{E}^{Q}\Bigg[\mathbb{1}_{\tau\in[u,u+du]}\Bigg] = Prob_t\Bigg[\tau \in [u, u+du]\Bigg], \quad (5)$$

si possono ora inserire l'equazioni 4 e 5 nella 3, al fine di ottenere una formula analitica per il calcolo del CVA:

$$CVA = -lgd_c \cdot \mathbb{E}^{Q}\Bigg[\int_0^T D(0,s)V_s^+ \cdot \lambda_s \cdot e^{-\int_0^s \lambda_u\,du} ds\Bigg]. \quad (6)$$

Nel caso in esame il sottostante evolve mediante dinamica Bachelier in misura risk-neutral $\mathbb{Q}$: $dX_t = \sigma_x dW_t^X$. Si noti che secondo tale dinamica il drift del sottostante è pari a 0; di conseguenza, con tassi e dividendi pari a 0, il valore atteso del sottostante in un qualsiasi tempo futuro è pari al valore di oggi. Per quanto riguarda il processo di *Poisson*, invece, si assume un processo a tempo omogeneo, tale per cui l'intensità λ risulta essere una costante deterministica > 0. Il contratto in esame è un forward su X: al tempo $T = 3$ anni, la banca riceverà X_T pagando uno strike prefissato K. Il valore atteso di V_s^+, è calcolabile usando la formula di *Bachelier* [1]-[2], ovvero:

$$Bach[F, K, v, \omega = 1] = \omega\big[(F-K)\Phi(\omega d^+)\big] + \sqrt{v}\phi(d^+), \quad (7)$$

dove $d^+ = \frac{(F-K)}{\sqrt{v}}$ e $v = v(t,T) = \int_t^T \sigma(u)^2 du$ (con $\sigma(u)$ costante). Nota la forma analitica a meno del tempo di default T del prezzo dell'opzione mediante l'equazione (7), è possibile risolvere l'integrale tramite metodi numerici. Al fine della risoluzione dell'integrale numerico, si son utilizzate le funzioni di `scipy.integrate`, scegliendo il metodo `quad` ed integrando fra 0 e 3 rispetto alla variabile T. Il risultato che si ottiene è pari a -1.46€ per unità di sottostante. Si riporta in appendice 4 il codice utilizzato.

3 Risoluzione Esercizio 2

Al fine di verificare la correttezza del risultato precedente, il CVA è calcolabile anche mediante il metodo $Monte\ Carlo$. A tal fine si è utilizzata la seguente equazione, simulando 100.000 simulazioni indipendenti per il sottostante e per il tempo di default:

$$CVA = -lgd_C \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[D(0,\tau_C)V^+_{\tau_C}\mathbb{1}_{\tau_C \leq T_i}\Big]. \tag{8}$$

Al fine di simulare il tempo di default, occorre innanzitutto introdurre la funzione cumulata del tasso di intensità, ovvero:

$$\Lambda_t(T) = \int_t^T \lambda(u)du, \tag{9}$$

dove λ nel caso in esame è costante. Inoltre, si noti che se τ è il primo tempo di salto di un processo di $Poisson$ con funzione cumulata $\Lambda_t(\cdot)$; si ha che la quantità $\Lambda_t(\tau)$ è distribuita come una variabile esponenziale standard χ.
Dunque, al fine di ottenere 100.000 tempi di default, genericamente detti τ_i, occorre dapprima trovare la funzione inversa di Λ_t, dove $\Lambda_t = 3\% \cdot (T-t)$. Da cui si ha: $\Lambda_t^{-1}(\chi) = 1/\ \lambda \cdot \chi$.
Dopodichè, per calcolare dei campioni distribuiti secondo una distribuzione esponenziale basta campionare una V.A. distribuita in maniera uniforme sull'intervallo [0,1]. Infatti, si ha che campioni aventi distribuzione esponenziale sono ricavabili mediante la seguente relazione: χ_i = -ln(1 - U_i).
Nota infine la funzione inversa e ottenuto il generico campione esponenziale χ_i, si calcolano gli i-esimi tempi di default τ_i, riportati in figura 1.

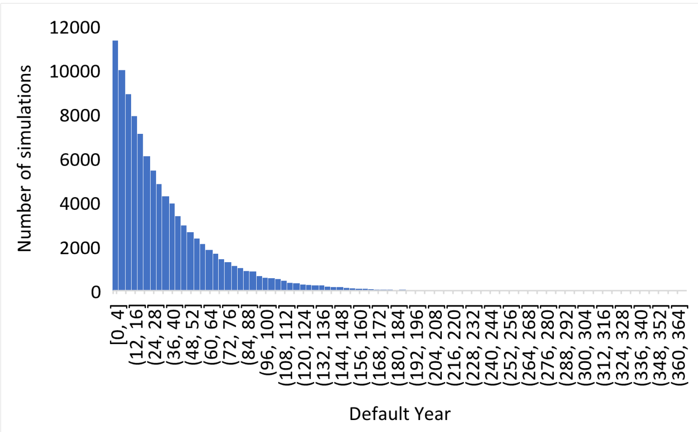

Figure 1: Distribuzione dei tempi di default

Calcolati così i tempi di default i-esimi, è possibile ottenere il prezzo del sottostante al tempo i-esimo in ogni simulazione. Il comportamento nel tempo del sottostante, modellato con la dinamica di $Bachelier$ [3], è stato discretizzato mediante la formula di Eulero:

$$X_i(\tau_i) = X_i(0) + \sigma\sqrt{\tau_i - 0} \cdot N_i(0,1), \tag{10}$$

dove N_i(0,1) è un generico campione estratto da una V.A. distribuita come una normale standard. Risulta possibile con questa discretizzazione valutare al tempo di default il valore del sottostante per ogni cammino che si è simulato. Dopodichè, al fine di calcolare $V^+_{\tau_C}$ si effettua la seguente operazione: $max(X_i(\tau_i) - K, 0)$. Se il tempo di default è minore di 3 anni e il valore del sottostante calcolato al passaggio precedente risulta essere > 0, significa che al momento del fallimento la banca ha incorso una perdita. In particolare, la loss given default è il 60% del valore appena calcolato.
Ripetendo questo passaggio per 100.000 cammini è possibile calcolare il valore atteso del CVA. Al fine di determinare l'intervallo di confidenza (I.C.), assumendo le simulazioni tutte indipendenti tra loro, come da traccia, è possibile applicare il $Teorema\ del\ Limite\ Centrale$. Di conseguenza, indicate con μ_X e σ_X la media e la deviazione standard della distribuzione di partenza, si ha che: μ_{MC} =

μ_x e $\sigma_{MC} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$. Da quest'ultima relazione si noti come al crescere di N l'errore della simulazione *Monte Carlo* tenderà a decrescere con andamento $\sim \frac{C}{\sqrt{N}}$, dove C è una generica costante. Per determinare l'I.C. di μ_X al livello di confidenza del 98%, bisogna innanzitutto ricavare il quantile di ordine 1 - $\alpha/2$ della distribuzione normale standard. Dunque, poichè, 1 - α = 0.98, si ha che $\alpha/2$ = 0.01 e di conseguenza 1 - $\alpha/2$ = 0.99. Si ha inoltre che $\Phi(2.326)$ è circa uguale a 0.99. Allora si ha che l'I.C. è definito come: $\left[\mu_{MC} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}};\ \mu_{MC} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$.
Con 100.000 scenari si ottiene un I.C. pari a [-1.50; -1.38] e si ha che il risultato analitico calcolato nell'esercizio precedente appartiene a tale intervallo. Si noti nella figura 2 la convergenza dell'errore del metodo *Monte Carlo*: la curva nera mostra come converge una funzione con equazione $1/\sqrt{N}$ e si ha che questa risulta essere parallela alla curva dell'errore, rappresentata in blu.
Se si volesse di ottenere un I.C. ancora più ristretto si potrebbe agire su almeno due fronti:

- aumentare il numero di simulazioni, agendo quindi sul denominatore dell'andamento dell'errore;
- agire sul generatore di numeri random, ricorrendo per esempio ad un generatore che sfrutta le sequenze di *Sobol*, le quali sono un esempio di sequenze quasi-random a bassa discrepanza. Tale strada abbatte la costante C che si trova al numeratore dell'errore [4].

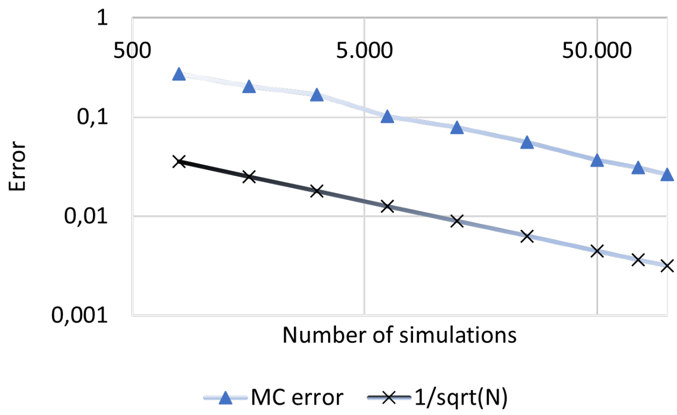

Figure 2: Convergenza dell'errore del Metodo Monte Carlo

References

[1] L.Bachelier. *Theorie de la speculation.*

[2] Y.Wang J.Choi M.Kwak. *A Black-Scholes user's guide to the Bachelier Model.*

[3] M.Terraneo M.Bianchetti. *Volatility Models and Markets - Fixed Income Models and Markets. pag. 446.*

[4] William J. Morokoff. *Quasi-random sequences and their discrepancies.*

4 Appendix

```
# Importing the needed libraries
import numpy as np
from scipy.stats import t
import scipy.integrate as sc
from scipy.stats import norm
import math as mt

# Importing the needed data
n_sim = 1*10**5
hazard = 3/100
X0 = 250
K = 240
T = 3
sigma = 50
lgd = 60/100
r = 0; F0 = X0

######################## ESERCIZIO 1 ########################

# Calculating the analytical CVA

integranda = lambda T: ((F0 - K)*norm.cdf((F0-K)/(sigma*mt.sqrt(T))) + \
    sigma*mt.sqrt(T)*norm.pdf((F0-K)/(sigma*mt.sqrt(T))))*hazard*
    mt.exp(-hazard*T)

result = sc.quad(integranda,0,3)
CVA_Analitico = -lgd * result[0]

######################## ESERCIZIO 2 ########################

# generating the uniform random samples for time to default
uniform_values = np.random.uniform(size = n_sim)
psi_values = - np.log(1-uniform_values)
tau_values = 1 / hazard * psi_values

# initializing the vectors
X_t = np.zeros(n_sim)
CVA = np.zeros(n_sim)

# populating the vector of CVA
for i in range(0,n_sim):
    X_t[i] = X0 + sigma* np.sqrt(min(tau_values[i],T))*np.random.randn()
    if X_t[i] > 240:
        if tau_values[i] > 3:
            CVA[i] = 0
        else:
            CVA[i] = -lgd*(X_t[i] - K)
    else:
        CVA[i] = 0

# calculating the CVA as expected value
CVA_Expected = np.mean(CVA)

# calculating the IC.
```

```
dof = len(X_t)-1
confidence = 0.98
s = np.std(CVA)
t_crit = np.abs(t.ppf((1-confidence)/2,dof))
ICl, ICh = (CVA_Expected -s*t_crit /np.sqrt(len(CVA)), CVA_Expected +
+ s*t_crit/np.sqrt(len(CVA)))

condition = False
if CVA_Expected > ICl and CVA_Expected < ICh:
    condition = True
    print(condition)
```