Primo compitino del 28 marzo 2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema LTI causale descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n) \; = \; x(n) - \frac{11}{28}x(n-1) + \frac{1}{28}x(n-2) + \frac{1}{7}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + \frac{1}{28}y(n-3)$$

(a) (4 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Determinare se il sistema è stabile, giustificando la risposta.

(b) (4 punti) Trovare la risposta all'impulso del sistema. Verificare che il sistema sia causale.

Soluzione dell'Esercizio 1

Risposta (a)

$$y(n) - \frac{1}{7}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) - \frac{1}{28}y(n-3) \; = \; x(n) - \frac{11}{28}x(n-1) + \frac{1}{28}x(n-2)$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{7}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{28}z^{-3}\right] \; = \; X(z)\left[1 - \frac{11}{28}z^{-1} + \frac{1}{28}z^{-2}\right]$$

$$H(z) \; = \; \frac{Y(z)}{X(z)} \; = \; \frac{1 - \frac{11}{28}z^{-1} + \frac{1}{28}z^{-2}}{1 - \frac{1}{7}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{28}z^{-3}} \; = \; \frac{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{7}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{7}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})} \; = \; \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

Poli in $z = \pm j\,0.5$, zero in 0.25. La ROC è $|z| > 0.5$, comprende il circolo unitario ed il sistema è quindi stabile.

Risposta (b)
Dalla tabella 2.1 delle dispense sappiamo esiste la coppia

$$r^n \, \sin(\omega_0 n)u(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r\,\sin(\omega_0)\,z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Usando i valori $\omega_0 = \pi/2$ e $r = 1/2$ otteniamo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n\,\pi/2)\,u(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1/2)\,z^{-1}}{1 + (1/4)z^{-2}}$$

dove $\sin(n\,\pi/2)$ vale zero per n pari o zero e ± 1 per n dispari.
Scrivendo

$$H(z) \; = \; \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \; = \; 2z\,\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \; + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

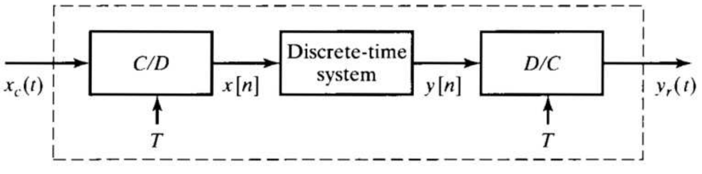
otteniamo la risposta all'impulso

$$h(n) \; = \; 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin[(n+1)\,\pi/2]\,u(n+1) \; - \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n\,\pi/2)\,u(n)$$

Notando che il primo termine contiene $u(n+1)$ sembra che il sistema non sia causale. Ma, per $n = -1$ si ha che $\sin[(n+1)\,\pi/2] = \sin[0] = 0$, quindi il sistema è causale, come specificato nel testo.

Esercizio 2

Vogliamo realizzare un filtro LTI passa-basso a tempo continuo $H_e(j\Omega)$ utilizzando il sistema a tempo discreto in figura



Il sistema discreto LTI ha risposta in frequenza $H_d(e^{j\omega})$. L'intervallo di campionamento vale $T = 5 \cdot 10^{-5}$ secondi e il segnale di ingresso $x_c(t)$ è limitato in banda, $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq 2\pi\,7000$.

Le specifiche per $H_e(j\Omega)$ sono

$$\begin{aligned} 0.98 \le |H_e(j\Omega)| \le 1.02 & \qquad |\Omega| \le 2\pi\,3000 \\ |H_e(j\Omega)| \le 0.01 & \qquad |\Omega| \ge 2\pi\,3500 \end{aligned}$$

(a) (2 punti) Verificare che la frequenza di campionamento sia sufficiente ad evitare l'aliasing. Trovare le specifiche corrispondenti per il sistema a tempo discreto avente risposta in frequenza $H_d(e^{j\omega})$.

(b) (3 punti) Si vuole realizzare la risposta $H_d(e^{j\omega})$ mediante un filtro FIR con le specifiche trovate al punto a) applicando una finestra $w(n)$ alla risposta all'impulso $h_d(n)$ di un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio ω_c. Quale valore deve avere ω_c? Quali delle finestre Rettangolare, di Barlett, di Hanning, di Hamming e di Blackman possono essere usate per soddisfare le specifiche? Per ciascuna finestra che soddisfa le specifiche trovare la larghezza minima $L = M + 1$ richiesta.

(c) (3 punti) Si vuole realizzare la risposta $H_d(e^{j\omega})$ mediante un filtro FIR con le specifiche trovate al punto a) applicando una finestra di Kaiser alla risposta all'impulso $h_d(n)$ del filtro passa-basso ideale con la stessa frequenza di taglio ω_c della domanda precedente. Trovare i valori di β e M richiesti per soddisfare le specifiche.

Soluzione dell'Esercizio 2

Risposta (a)
La frequenza di campionamento vale $f_c = 1/T = 2 \cdot 10^4$ Hz, maggiore del doppio della massima frequenza del segnale $x_c(t)$, che vale $0.7 \cdot 10^4$ Hz. Quindi la condizione di Nyquist è rispettata e non vi è aliasing.
Usando la relazione $\omega = \Omega T$ possiamo trovare la frequenza superiore della banda passante, ossia ω_p, e la frequenza inferiore della banda di stop ω_s:

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi\,3000 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0.3\pi \ \text{rad} \\ \omega_s &= 2\pi\,3500 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0.35\pi \ \text{rad} \end{aligned}$$

I termini di *ripple* sono $\delta_1 = 0.02$ e $\delta_2 = 0.01$ e le specifiche sono

$$\begin{aligned} 0.98 \le |H_d(e^{j\omega})| \le 1.02 & \qquad 0 \le |\omega| \le 0.3\pi \\ |H_d(e^{j\omega})| \le 0.01 & \qquad 0.35\pi \le |\omega| \le \pi \end{aligned}$$

Risposta (b)
La frequenza di taglio del filtro ideale deve essere a metà fra ω_p e ω_s, quindi $\omega_c = 0.325\pi$ radianti.
Il filtro richiede un errore passa-banda massimo di $\delta_p = 0.02$ e un errore nella banda di stop al massimo di $\delta_s = 0.01$. I filtri progettati col metodo delle finestre hanno, per costruzione, $\delta_p = \delta_s$, quindi, per rispettare le specifiche, imponiamo che $\delta_p = \delta_s = 0.01$. Convertendo i valori in dB si ha $\delta_p = \delta_s = -40$ dB.
Quindi si richiede una finestra con un *Peak Approximation Error* almeno di -40 dB. Dalla tabella in figura 7.4 delle dispense si vede che le finestre che rispettano questa richiesta sono quelle di Hanning, di Hamming e di Blackman.
La lunghezza minima L si può trovare considerando la larghezza approssimata del lobo principale (*Approximate Width of Main Lobe*) nella stessa tabella, poichè la larghezza del lobo principale è circa uguale alla larghezza della zona di transizione. Dalla tabella si trova M, essendo la lunghezza richiesta $L = M + 1$.
Hanning: $0.05\,\pi = 8\pi/M \quad \rightarrow \quad M = 160$
Hamming: $0.05\,\pi = 8\pi/M \quad \rightarrow \quad M = 160$
Blackman: $0.05\,\pi = 12\pi/M \quad \rightarrow \quad M = 240$

Risposta (c)
I filtri progettati col metodo delle finestre hanno, per costruzione $\delta_p = \delta_s$, quindi bisogna usare il valore inferiore $\delta = 0.01$. Dalle formule

$$A = -20\,\log_{10}(0.01) = 40 \quad \text{dB}$$

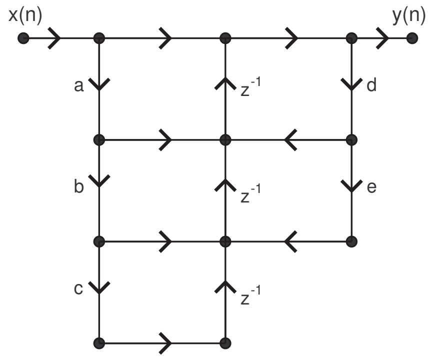
$$\beta = 0.5842\,(40-21)^{0.4} + 0.07886\,(40-21) = 0.5842 \cdot 19^{0.4} + 0.07886 \cdot 19 = 3.395321$$

$$M = \frac{A-8}{2.285\,\Delta\omega} = \frac{40-8}{2.285 \cdot 0.05\pi} = 89.155 \qquad \rightarrow \qquad 90$$

Esercizio 3

Sia dato il sistema LTI causale descritto dal grafo di flusso in figura con la condizione che sia inizialmente a riposo.
I rami senza nulla marcato hanno guadagno unitario.
I valori dei parametri sono:

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -\frac{2}{9} \qquad c = \frac{1}{2} \qquad d = -\frac{3}{10} \qquad e = -\frac{1}{3}$$



(a) (4 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Il sistema è stabile? Giustificare la risposta.

(b) (2 punti) Scrivere la risposta all'impulso del sistema.

(c) (2 punti) Disegnare il grafo di flusso in forma **diretta II** del sistema.

Soluzione dell'Esercizio 3

Risposta (a)

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) + abx(n-2) + abcx(n-3) + dy(n-1) + dey(n-2)$$

$$Y(z)\left[1 - dz^{-1} - dez^{-2}\right] = X(z)\left[1 + az^{-1} + abz^{-2} + abcz^{-3}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + az^{-1} + abz^{-2} + abcz^{-3}}{1 - dz^{-1} - dez^{-2}}$$

sostituendo i valori numerici

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{9}z^{-2} - \frac{1}{18}z^{-3}}{1 + \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{1}{10}z^{-2}} = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} = \frac{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}$$

Un polo in $z = 1/5$ ed uno zero in $z = 1/9$. Siccome il sistema è causale la ROC è $|z| > 1/5$. Siccome la ROC contiene il circolo unitario il sistema è stabile.

Risposta (b)

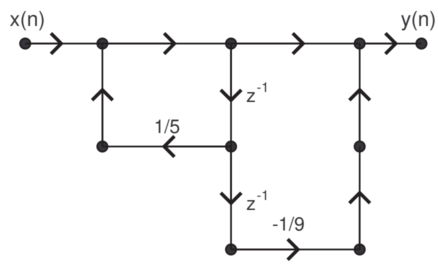
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}} - \frac{1}{9}z^{-2}\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} u(n-2)$$

Risposta (c)

L'equazione alle differenze semplificata vale

$$y(n) = \frac{1}{5}y(n-1) + x(n) - \frac{1}{9}x(n-2)$$



e

la forma diretta II è a lato.

Esercizio 4

La sequenza $x(n)$ ha la trasformata di Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2\, e^{-j\omega}}$$

(a) (4 punti) Sia $y(n)$ una sequenza a lunghezza finita pari a 8, $y(n) = 0$ per $n < 0$ e $n \geq 8$. La DFT calcolata su 8 punti di $y(n)$, ovvero $Y(k)$, corrisponde a 8 campioni equispaziati di $X(e^{j\omega})$ secondo

$$Y(k) \;=\; 5\, X\left(e^{j2\pi k/8}\right) \qquad\qquad 0 \leq k \leq 7$$

Trovare $y(n)$.

(b) (4 punti) Si consideri la sequenza di lunghezza 4

$$Z(k) \;=\; \begin{cases} X\left(e^{j2\pi k/4}\right) & k = 0, 2 \\ 1 & k = 1, 3 \\ 0 & k < 0 \text{ e } k \geq 4 \end{cases}$$

Considerando $Z(k)$ come la DFT a base 4 della sequenza $z(n)$, trovare la sequenza $z(n)$ (si desiderano valori numerici).

Soluzione dell'Esercizio 4

Risposta (a)

Questa domanda è una (piccola) variante dell'esercizio 4.4 che trovate su aulaweb.

$$X(e^{j\omega}) \;=\; \frac{1}{1 - 2\, e^{-j\omega}}$$

$$Y(k) \;=\; \frac{1}{1 - 2e^{-j(2\pi k/8)}} \;=\; \sum_{n=0}^{7} y(n)\, W_8^{kn} \qquad\qquad 0 \leq k \leq 7$$

Ricordando che la trasformata di 2^n calcolata su N punti vale

$$\sum_{n=0}^{N-1} 2^n\, W_N^{kn} \;=\; \frac{1 - 2^N}{1 - 2e^{-j(2\pi k/N)}}$$

ricaviamo che

$$y(n) \;=\; 5\, \frac{2^n}{1 - (1/2)^8} \qquad\qquad 0 \leq n \leq 7$$

Risposta (b)

$$Z(0) \;=\; X\left(e^{j2\pi 0/4}\right) \;=\; \frac{1}{1 - 2e^0} \;=\; -1 \qquad\qquad Z(2) \;=\; X\left(e^{j2\pi 2/4}\right) \;=\; \frac{1}{1 - 2e^{-j\pi}} \;=\; \frac{1}{3}$$

Antitrasformando

$$z(n) \;=\; \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} Z(k)\, W_4^{-kn} \qquad\qquad 0 \leq n \leq 3$$

$$z(n) \;=\; \frac{1}{4}\left[-W_4^0 + W_4^{-n} + \frac{1}{3}W_4^{-2n} + W_4^{-3n}\right] \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 + e^{j\pi n/2} + \frac{1}{3}e^{j\pi n} + e^{j3\pi n/2}\right] \qquad\qquad 0 \leq n \leq 3$$

$$z(0) \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 + 1 + \frac{1}{3} + 1\right] \;=\; \frac{1}{3}$$

$$z(1) \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 + e^{j\pi/2} + \frac{1}{3}e^{j\pi} + e^{j3\pi/2}\right] \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 + j - \frac{1}{3} - j\right] \;=\; -\frac{1}{3}$$

$$z(2) \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 + e^{j\pi} + \frac{1}{3}e^{j\pi 2} + e^{j3\pi}\right] \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 - 1 + \frac{1}{3} - 1\right] \;=\; -\frac{2}{3}$$

$$z(3) \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 + e^{j\pi 3/2} + \frac{1}{3}e^{j\pi 3} + e^{j3\pi 3/2}\right] \;=\; \frac{1}{4}\left[-1 - j - \frac{1}{3} + j\right] \;=\; -\frac{1}{3}$$