10.3 Simulazione Primo Compitino

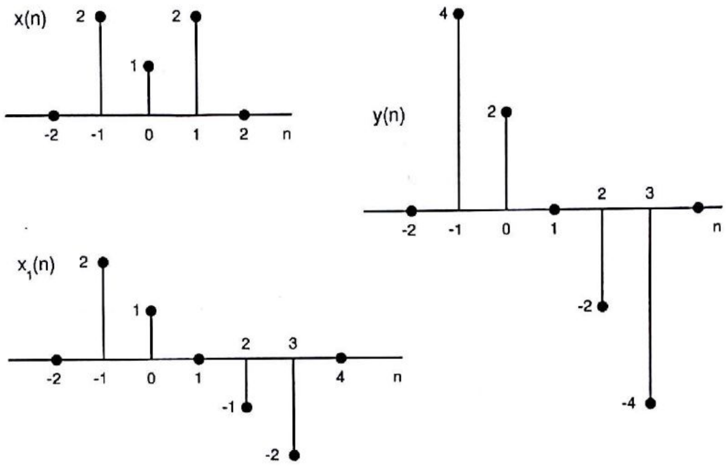
Esercizio 1

I due segnali $x(n)$ e $y(n)$ sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita di un sistema LTI stabile.

(a) Trovare l'uscita del sistema quando l'ingresso è la sequenza $x_1(n)$ in figura.

(b) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema.

(c) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.



Esercizio 2

Si consideri un sistema LTI causale descritto dall'equazione alle differenze

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{7}x(n-1) + \frac{12}{35}y(n-1) - \frac{1}{35}y(n-2)$$

(a) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema.

(b) Trovare la posizione di zeri e poli del sistema e determinare se il sistema è stabile. Giustificare la risposta.

(c) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(d) Trovare l'uscita del sistema quando l'ingresso vale

$$x(n) = 5^{-n}\,u(n)$$

con esercizio 1 e 2 → posso arrivare a 18

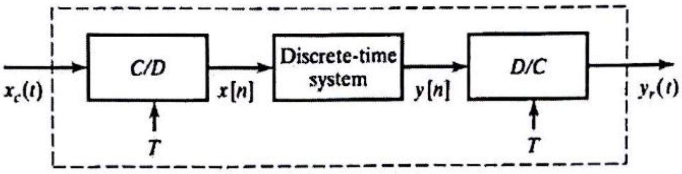
Esercizio 3

Nel sistema in figura il sistema a tempo discreto è LTI con risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/3} \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

e

$$x_c(t) = 2\cos(500\pi t) + \cos(1500\pi t)$$



Il blocco C/D campiona il segnale di ingresso in modo che $x(n) = x_c(nT)$ ed il blocco D/C è un interpolatore ideale.

(a) Trovare il massimo valore di T che evita l'aliasing nel blocco C/D.

(b) Disegnare (indicando i valori sul grafico) il modulo della trasformata di Fourier di $x(n)$, ovvero $X(e^{j\omega})$, nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ quando $T = 1/1000$.

(c) Trovare l'espressione di $y(n)$.

Suggerimento: $x(n)$ è il risultato dell'aliasing, scriverlo in forma semplificata antitrasformando la $X(e^{j\omega})$ trovata alla domanda (b).

(d) Disegnare (indicando i valori sul grafico) il modulo della trasformata di Fourier di $y_r(t)$, ovvero $Y_r(j\Omega)$ quando $T = 1/1000$.

Esercizio 4 → Esercizio 7.6

Vogliamo progettare un filtro FIR con le seguenti specifiche:

$$0.98 < |H(e^{j\omega})| < 1.02 \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi$$

$$-0.05 < |H(e^{j\omega})| < 0.05 \qquad 0.35\pi \le |\omega| \le \pi$$

applicando una finestra $w(n)$ alla risposta all'impulso $h_d(n)$ del filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio $\omega_c = 0.25\pi$. Quali delle finestre Rettangolare, di Barlett, di Hanning, di Hamming e di Blackman possono essere usate per soddisfare le specifiche? Per ciascuna finestra che soddisfa le specifiche trovare la larghezza minima $L = M + 1$ richiesta.

↗ Più difficile nel compitino

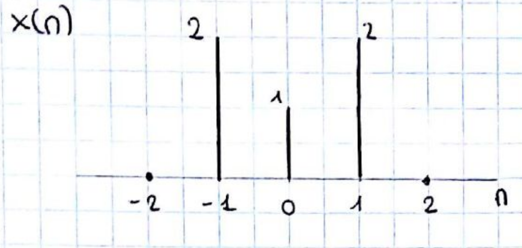
SIMULAZIONE PRIMO COMPITINO 15/12/2016

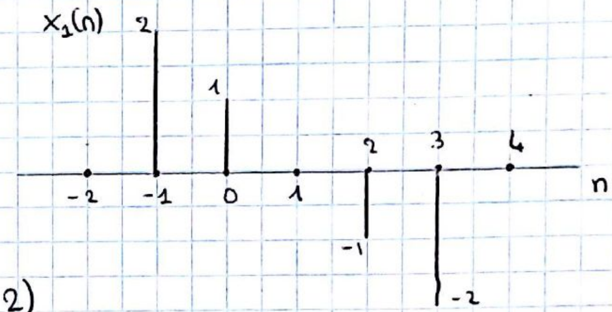
• ESERCIZIO n° 1

I due segnali $x(n)$ e $y(n)$ sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita di un sistema LTI stabile.

a) Trovare l'uscita del sistema quando l'ingresso è la sequenza $x_1(n)$

CERCO UNA RELAZIONE TRA $x(n)$ e $x_1(n)$.





$$x_1(n) = x(n) - x(n-2)$$

PER LINEARITÀ SI HA CHE $y_1(n) = y(n) - y(n-2)$ —▷ vedi dietro

b) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema.

POSSO FARE IN DUE MODI:

- trovo $h(n)$ direttamente dalle sequenze $x(n)$ e $y(n)$ e poi faccio la trasformata
- mi riscrivo $x(n)$ e $y(n)$ come somme di impulsi, con ampiezza adeguata, traslati e poi ne faccio le trasformate dato che $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$x(n) = 2\delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1)$$

$$y(n) = 4\delta(n+1) + 2\delta(n) + [-2\delta(n-2)] + [-4\delta(n-3)]$$

$$X(z) = 2z^{1} + 1 + 2z^{-1}$$

$$Y(z) = 4z^{1} + 2 - 2z^{-2} - 4z^{-3}$$

⇒ devo vedere se ho semplificazioni (divisione tra polinomi)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(2z^{1}+1+2z^{-1})(2-2z^{-2})}{2z^{1}+1+2z^{-1}} = 2 - 2z^{-2}$$

c) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema

$$h(n) = 2\delta(n) - 2\delta(n-2)$$

$y_1(n)$

ESERCIZIO n° 2

Si consideri il seguente sistema LTI causale

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{7}x(n-1) + \frac{12}{35}y(n-1) - \frac{1}{35}y(n-2)$$

a) Trovare $H(z)$

$$35y(n) - 12y(n-1) + y(n-2) = 35x(n) - 5x(n-1)$$

$$\frac{x(n)}{y(n)} = \frac{35x(n) - 5x(n-1)}{35y(n) - 12y(n-1) + y(n-2)}$$

$$H(z) = \frac{35 - 5z^{-1}}{35 - 12z^{-1} + z^{-2}} \rightarrow \text{da semplificare}$$

b) Trovare zeri e poli e discutere la stabilità

POLI: $z^{-2} - 12z^{-1} + 35 = 0$

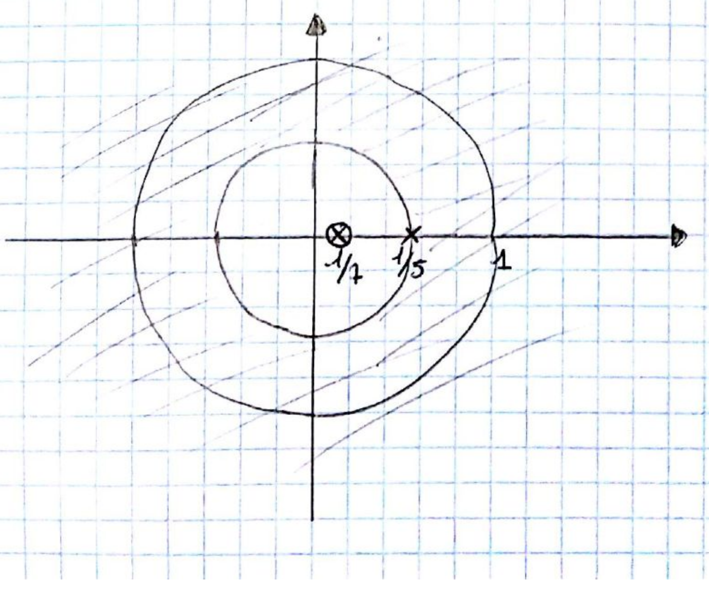
$$x^2 - 12x + 35 = 0 \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144-140}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2} = \begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases}$$

$$z_1^{-1} = 7 \rightarrow z_1 = 1/7$$

$$z_2^{-1} = 5 \rightarrow z_2 = 1/5 \sim 0.2$$

ZERI: $+5z^{-1} - 35 = 0$

$$z^{-1} = \frac{35}{5} = 7 \qquad z = 1/7 \sim 0.14$$



il sistema è causale quindi la sequenza che l'ottima è MONOLATERA DESTRA

la ROC è $|z| > 1/5$

e comprende il circolo unitario

↓

il sistema è stabile

c) Trovare la risposta all'impulso del sistema

$$X(z) = (1 - 1/7\, z^{-1})$$

$$Y(z) = (1 - 1/7\, z^{-1})(1 - 1/5\, z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 1/5\, z^{-1})} \Rightarrow h(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

d) Trovare l'uscita del sistema quando l'ingresso è:

$$x_1(n) = 5^{-n} u(n)$$

$$x_1(n) = 5^{-n} u(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - 1/5\, z^{-1}}$$

$$Y(z) = X_1(z) H(z) = \frac{1}{(1 - 1/5\, z^{-1})^2} = 5 z \frac{1/5\, z^{-1}}{1 - 1/5\, z^{-1}}$$

TRASLAZIONE di 1 VERSO SINISTRA

$$y(n) = 5(n+1)\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n+1)$$

[se siamo astuti anche se non è richiesto sappiamo che

$$y(n) = (n+1)(1/5)^n u(n)$$
]

ESERCIZIO n° 3

Sistema LTI discreto avente $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/3}$ $\quad -\pi \leq \omega \leq \pi$

ed $x_c(t) = 2\cos(500\pi t) + \cos(1500\pi t)$

Il blocco C/D campiona il segnale in modo che $x(n) = x_c(nT)$

a) Trovare il massimo valore di T che evita l'aliasing.

CONSIDERO LA FREQUENZA PIÙ ALTA DI $x_c(t)$, SAPENDO CHE LA "FORMULA BASE È" $\cos(2\omega\pi t)$

$$x\, 2\pi t = 1500\pi t \qquad x = 750 \quad \text{frequenza max del segnale}$$

DAL TEOREMA DI NYQUIST SAPPIAMO CHE $\omega_b > 2\omega$

$$\omega = 750 \cdot 2 = 1500\ \text{sec}^{-1} \Rightarrow T < \frac{1}{1500}$$

PERCHÈ HO UN COSENO

b) Disegnare il modulo della trasformata di Fourier di $x(n)$, $X(e^{J\omega})$, nell' intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ quando $T = \frac{1}{1000}$

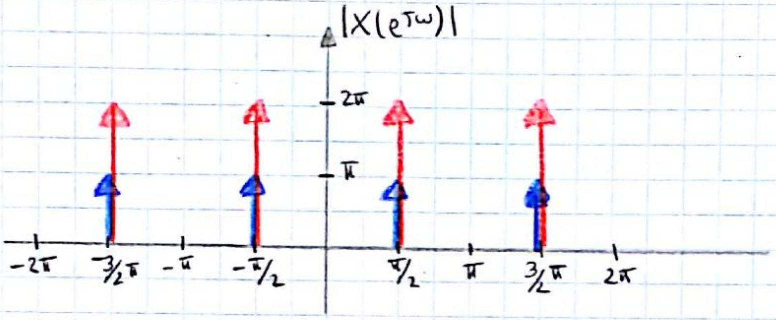
$$x_c(nT) = 2\cos\left(500\pi \cdot \frac{n}{1000}\right) + \cos\left(1500\pi \cdot \frac{n}{1000}\right)$$

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right)$$

DAL FORMULARIO A PAG 18 RICAVO $X(e^{J\omega})$:

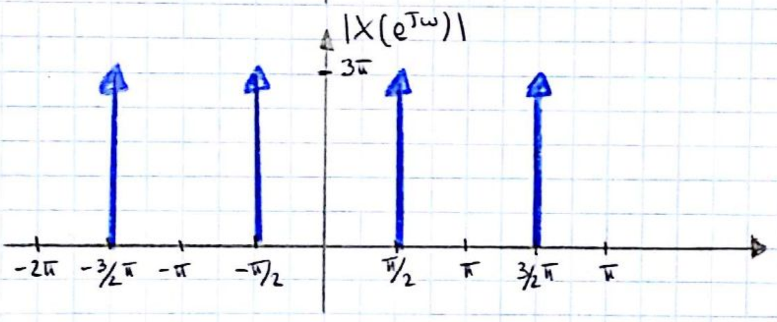
$$\cos(\omega_0 n) \Rightarrow \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_r \left[\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r)\right]$$

$$X(e^{J\omega}) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_r \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi r\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi r\right)\right] + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_r \left[\delta\left(\omega - \frac{3}{2}\pi + 2\pi r\right) + \delta\left(\omega + \frac{3}{2}\pi + 2\pi r\right)\right]$$



considero il caso con $r = 0$

i due impulsi devono sommarsi: $2\pi + \pi = 3\pi$



$$x(n) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

c) Trovare $y(n)$

la mia $H(e^{J\omega})$ è tale solo se considero l'intervallo $(-\pi, \pi)$

quindi considero $X(e^{J\omega})$ solo nell'intervallo $(-\pi, \pi)$

$$H(e^{J\omega}) = e^{-J\omega/3} \Rightarrow h(n) = \delta(n - 1/3)$$

$$x(n) = 3\cos(1/2\, \pi n)$$

convoluzione $y(n) = x(n) * h(n)$

$$y(n) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(n - \frac{1}{3}\right)\right)$$

SOLUZIONE 2: $Y(e^{J\omega}) = e^{-J\omega/3} \cdot 3\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_r \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi r\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi r\right)\right]$

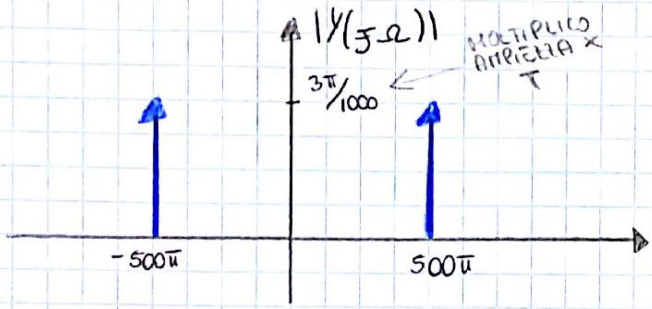
$$y(n) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\pi(n - 1/3)\right) = 3\cos\left(\frac{\pi n}{2} - \pi/6\right)$$

d) Disegnare il modulo della trasformata di Fourier di $y_r(t)$, $Y_r(J\Omega)$, quando $T = \frac{1}{1000}$

SAPPIAMO CHE $\omega = \Omega T$ e FREQUENZA CAMPIONAMENTO = $2\pi T$

$$Y_r(e^{J\omega}) = 3\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_r \left[\delta\left(\omega - \tfrac{\pi}{2} + 2\pi r\right) + \delta\left(\omega + \tfrac{\pi}{2} + 2\pi r\right) \right] e^{-J\omega/3}$$

$$Y_r(J\Omega) = 3\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_r \left[\delta\left(\Omega/1000 - \pi/2 + 2\pi r\right) + \delta\left(\Omega/1000 + \pi/2 + 2\pi r\right) \right]$$



GLI IMPULSI SONO CENTRATI IN $\pm 500\pi$ PERCHÉ SONO I VALORI IN CUI SI ANNULLANO LE PARENTESI (pongo $\Omega = 500\pi$)

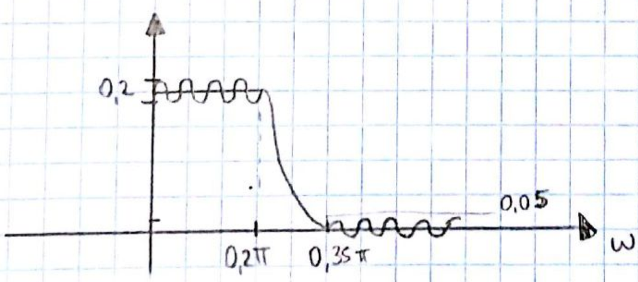
ESERCIZIO n° 4

Vogliamo progettare un filtro FIR con le seguenti specifiche:

$0,98 < |H(e^{J\omega})| < 1.02 \qquad 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi$

$-0.05 < |H(e^{J\omega})| < 0.05 \qquad 0,35\pi \leq |\omega| \leq \pi$

applicando una finestra $w(n)$ alla risposta all'impulso $h_d(n)$ del filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio $\omega_c = 0,25\pi$.
Quali delle finestre possono essere usate? Per quelli utilizzabili trovare la larghezza minima $L = M+1$ richiesta.



HO DUE RIPPLE DIVERSI MA SE LAVORO CON LE FINESTRE DEVONO ESSERE UGUALI → DEVO FARE IN MODO CHE SIANO UGUALI A QUELLO MINORE

QUINDI $\delta = 0,02$ CHE TRASFORMATO IN dB È PARI A:

$$20 \log_{10}(0,02) = 34 \text{ dB}$$

ORA GUARDANDO LA TABELLA 7.4 A PAGINA 107 DEVO CAPIRE QUALI

FINESTRE VANNO BENE E QUALI NO. VANNO BENE QUELLE CHE HANNO

IL "PEAK APROXIMATION ERROR (dB)" > 34

QUINDI POSSO USARE HAMMING, HANNING e BLACKMAN

L'ampiezza della banda di transizione Δ_w è pari a

$$\Delta\omega = 0,35\pi - 0,2\pi = 0,15\pi$$

USANDO ORA LA COLONNA "APROXIMATE WIDTH OF MAIN LOBE", per le finestre che vanno bene, POSSO CALCOLARE IL VALORE DI M (e quindi quello di L) ponendo $\Delta\omega$ = "colonna"

HAMMING	$0,15\pi = \frac{8\pi}{M}$ =>	$M = 54$	=> $L = 55$
HANNING	$0,15\pi = \frac{12\pi}{M}$ =>	$M = 80$	=> $L = 81$
BLACKMAN	$0,15\pi = \frac{8\pi}{M}$ =>	$M = 54$	=> $L = 55$