Primo compitino del 19 febbraio 2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema LTI causale descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n) \;=\; \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{2}{3}x(n-2) - \frac{4}{3}y(n-1) + \frac{11}{9}y(n-2) - \frac{2}{9}y(n-3)$$

(a) (4 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Determinare se il sistema è stabile, giustificando la risposta.

(b) (2 punti) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(c) (2 punti) Se avete risolto correttamente la domanda (a) avete trovato che la $H(z)$ del sistema si semplifica. Scrivere l'equazione alle differenze che corrisponde alla $H(z)$ semplificata e disegnare il grafo di flusso in forma **diretta I**.

Soluzione dell'Esercizio 1

Risposta (a)

$$y(n) + \frac{4}{3}y(n-1) - \frac{11}{9}y(n-2) + \frac{2}{9}y(n-3) \;=\; \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{2}{3}x(n-2)$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{11}{9}z^{-2} + \frac{2}{9}z^{-3}\right) \;=\; X(z)\left(\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}\right)$$

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{\left(\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}\right)}{\left(1 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{11}{9}z^{-2} + \frac{2}{9}z^{-3}\right)} \;=\; \frac{\frac{1}{3}z^{-1}\,\left(1 + 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2\,(1 + 2z^{-1})} \;=\; \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

Il sistema ha un polo doppio in $z = 1/3$. Poichè è causale la regione di convergenza è $|z| > 1/3$. Poichè la regione di convergenza include il circolo unitario il sistema è stabile.

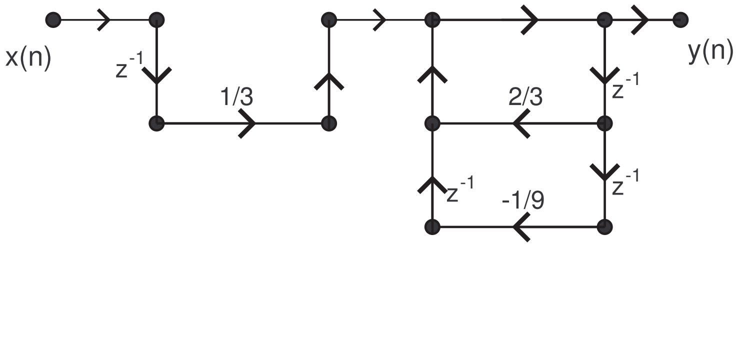
Risposta (b)

$$h(n) \;=\; n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Risposta (c)

$$H(z) \;=\; \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} \;=\; \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}}$$

$$y(n) \;=\; \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{1}{9}y(n-2)$$



Esercizio 2

Sia data la sequenza

$$x(n) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad N \text{ intero positivo minore di un milione}$$

(a) (2 punti) La sequenza $x(n)$ entra in un sistema LTI avente risposta all'impulso $h(n) = u(n)$, essendo $u(n)$ la sequenza gradino unitario. Trovare l'uscita $y(n)$ del sistema (utilizzate le trasformate z).

(b) (1 punti) Sia $X(k)$ la DFT calcolata su N punti della sequenza $x(n)$. Sia poi $X_1(k) = X^2(k)$. Calcolare $x_1(n)$, IDFT (DFT inversa) su N punti di $X_1(k)$.

(c) (1 punti) Sia $X_2(k)$ la DFT calcolata su $(2N-1)$ punti di $x(n)$ e $X_3(k) = X_2^2(k)$. Chiamando $x_3(n)$ la IDFT su $(2N-1)$ punti di $X_3(k)$ indicare i valori di $x_3(0)$ e $x_3(1)$.

(d) (1 punti) Sia $X_4(k)$ la DFT calcolata su $3N$ punti di $x(n)$ e $X_5(k) = X_4^2(k)$. Chiamando $x_5(n)$ la IDFT su $3N$ punti di $X_5(k)$ indicare i valori di $x_5(0)$ e $x_5(1)$.

(e) (1 punti) Sia $X(k)$ la DFT calcolata su N punti della sequenza $x(n)$. Sia poi $X_6(k) = X(k)$ per $0 \le k \le 2$ e zero altrove. Assumendo $N > 2$ calcolare $x_6(n)$, IDFT su N punti di $X_6(k)$.

(f) (2 punti) Sia $x(n)$ la risposta all'impulso di un filtro LTI. Il filtro che ne risulta ha fase lineare? Ha fase lineare generalizzata?

Soluzione dell'Esercizio 2

Risposta (a)

$$X(z) \;=\; \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad H(z) \;=\; \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad Y(z) \;=\; X(z)\,H(z) \;=\; \frac{1-z^{-N}}{(1-z^{-1})^2} \;=\; \frac{1}{(1-z^{-1})^2} - \frac{z^{-N}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Y(z) \;=\; z\,\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \;-\; z^{-N+1}\,\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \qquad y(n) \;=\; (n+1)\,u(n+1) \;-\; (n-N+1)\,u(n-N+1)$$

Risposta (b)
Soluzione 1: Poichè $X^2(k) = X(k)\cdot X(k)$ e il prodotto in frequenza corrisponde, per una DFT, alla convoluzione circolare nel tempo, si ottiene

$$x_1(n) \;=\; \begin{cases} N & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione 2: la DFT della sequenza rettangolare vale (vedi dispense, esempio 4.3)

$$X(k) \;=\; \begin{cases} N & k = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi $X_1(k)$ vale N^2 per $k = 0$ e zero altrove e la sua IDFT $x_1(n)$ è quella scritta sopra.

Risposta (c)
La sequenza $x_3(n)$ corrisponde alla convoluzione lineare di $x(n)$ con se stessa. Quindi $x_3(0) = 1$ e $x_3(1) = 2$.

Risposta (d) La sequenza $x_5(n)$ corrisponde ancora alla convoluzione lineare di $x(n)$ con se stessa. Quindi $x_5(0) = 1$ e $x_5(1) = 2$.

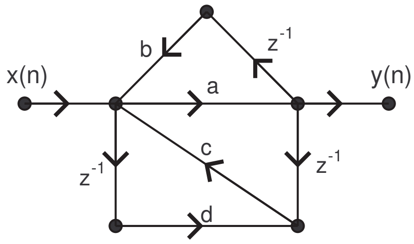
Risposta (e)
Visto quanto vale $X(k)$, si ha che $X_6(k) = X(k)$ e $x_6(n) = x(n)$.
Risposta (f)
Il filtro risultante è ovviamente causale e FIR. La sua risposta all'impulso è simmetrica: $h(n) = h(N-1-n)$, quindi se $M = N-1$ è pari (N dispari) il filtro è un FIR a fase lineare (generalizzata) di tipo I, se $M = N-1$ è dispari (N pari) il filtro è un FIR a fase lineare di tipo II,

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \;=\; \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} \;=\; \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\; e^{-j\omega(N-1)/2} \;=\; A(\omega)e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

Dove β è zero ma $A(\omega)$ assume valori sia positivi che negativi. Quindi si ha fase lineare generalizzata ma non fase lineare.

Esercizio 3

Sia dato il sistema LTI causale descritto dal grafo di flusso in figura con la condizione che sia inizialmente a riposo.
I rami senza nulla marcato hanno guadagno unitario.
I valori dei parametri sono:



$$a = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{3} \qquad c = 2 \qquad d = \frac{1}{4}$$

(a) (6 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Il sistema è stabile? Giustificare la risposta.

(b) (2 punti) Scrivere la risposta all'impulso del sistema.

Soluzione dell'Esercizio 3

Risposta (a)

$$y(n) = ax(n) + adcx(n-1) + aby(n-1) + cay(n-1) = ax(n) + adcx(n-1) + (ab+ac)y(n-1)$$

$$Y(z)\left[1-(ab+ac)z^{-1}\right] = X(z)\left(a + adcz^{-1}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a+adcz^{-1}}{1-(ab+ac)z^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{7}{6}z^{-1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{7}{6}z^{-1}}$$

Un polo in $z = 7/6$ ed uno zero in $z = -1/2$. Siccome il sistema è causale la ROC è $|z| > 7/6$. Siccome la ROC non contiene il circolo unitario il sistema non è stabile.

Risposta (b)

$$H(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{7}{6}z^{-1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{7}{6}z^{-1}} + \frac{1}{4}\,\frac{z^{-1}}{1-\frac{7}{6}z^{-1}}$$

$$h(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right)^{n} u(n) + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Esercizio 4

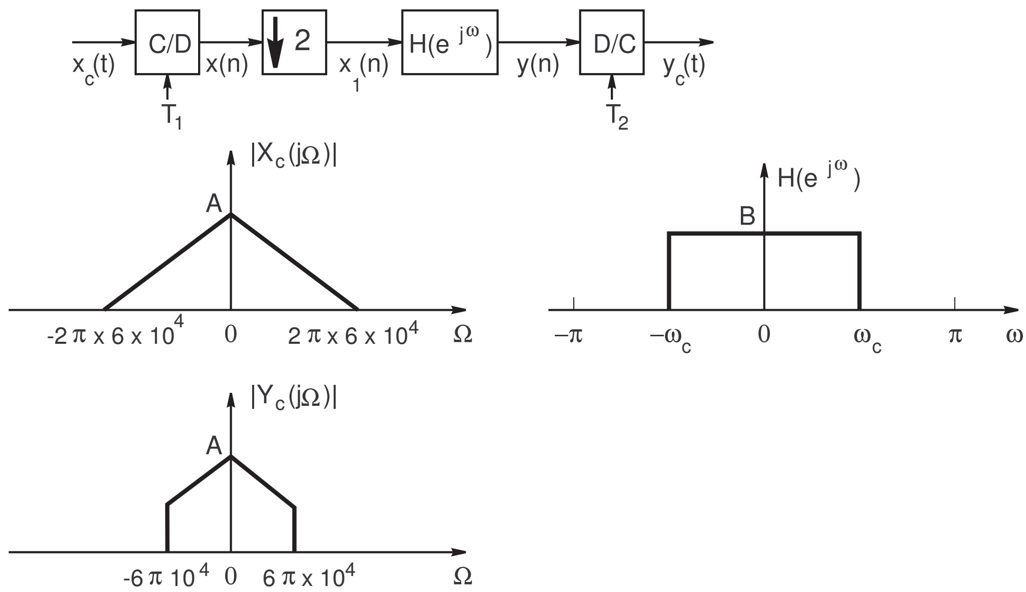
Sia dato il sistema in figura, dove sono mostrate anche le funzioni $X_c(j\Omega)$ e $H(e^{j\omega})$.

$|X_c(j\Omega)|$ è un triangolo alto A con base da $\Omega = -2\pi \cdot 6 \cdot 10^4$ a $\Omega = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^4$.

$H(e^{j\omega})$ è un rettangolo alto B con base da $\omega = -\omega_c$ a $\omega = \omega_c$. Il secondo blocco esegue un sottocampionamento con fattore 2.

(a) (4 punti) Calcolare i valori di ω_c e B affinchè il sistema sia equivalente ad un filtro passa-basso con frequenza di taglio $\Omega_c = 6\pi 10^4$ e guadagno unitario, ovvero che $Y_c(j\Omega)$ abbia il modulo in figura, posto che $1/T_1 = 24 \cdot 10^4$ Hz e $1/T_2 = 12 \cdot 10^4$ Hz. Accuratamente disegnare i grafici di $|X(e^{j\omega})|$, $|X_1(e^{j\omega})|$ e $|Y(e^{j\omega})|$ che descrivano il ragionamento seguito.

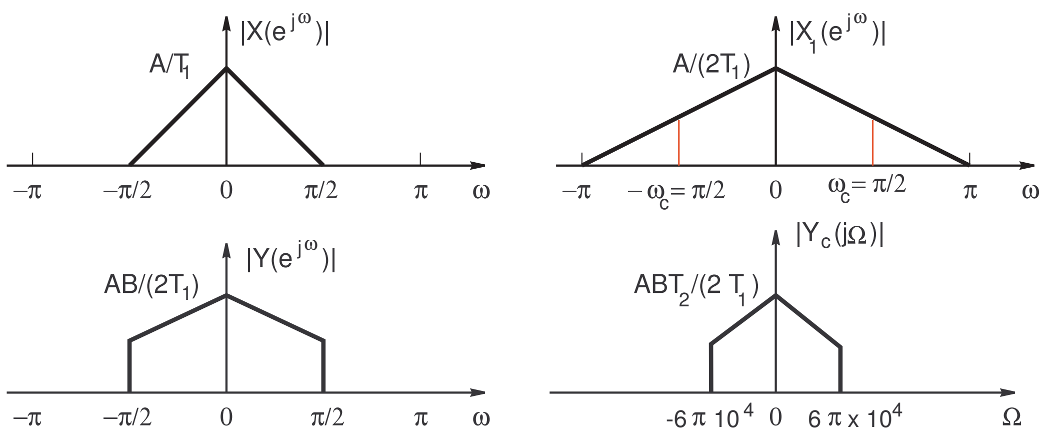
(b) (4 punti) Calcolare i valori di T_1 e B affinchè il sistema sia equivalente ad un filtro passa-basso con frequenza di taglio $\Omega_c = 6\pi 10^4$ e guadagno unitario, ovvero che $Y_c(j\Omega)$ abbia il modulo in figura, posto che $\omega_c = \pi/4$ e $1/T_2 = 24 \cdot 10^4$ Hz. Accuratamente disegnare i grafici di $|X(e^{j\omega})|$, $|X_1(e^{j\omega})|$ e $|Y(e^{j\omega})|$ che descrivano il ragionamento seguito.



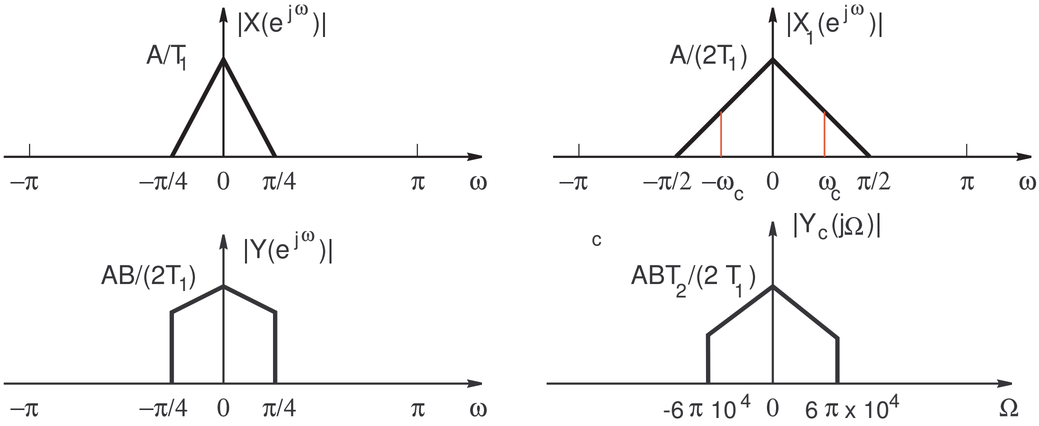
Soluzione dell'Esercizio 4

Risposta (a)

$\omega_c = \pi/2$ e $B = 2T_1/T_2 = 1$. Infatti



Risposta (b)
$1/T_1 = 48 \cdot 10^4$ e $B = 2T_1/T_2 = 1$. Infatti



Nota: la soluzione si può semplificare considerando che i primi due blocchi dello schema possono essere uniti a formare un solo blocco come segue: