Primo compitino del 20 dicembre 2018

Esercizio 1

Si consideri un sistema LTI causale descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{5}\,x(n-1) + \frac{8}{15}\,y(n-1) - \frac{1}{15}\,y(n-2)$$

(a) (4 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Determinare se il sistema è stabile, giustificando la risposta.

(b) (2 punti) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(c) (2 punti) Trovare l'uscita $y(n)$ del sistema quando l'ingresso vale

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Soluzione dell'Esercizio 1

Risposta (a)

$$y(n) - \frac{8}{15}\,y(n-1) + \frac{1}{15}\,y(n-2) \;=\; x(n) - \frac{1}{5}\,x(n-1)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{8}{15}\,z^{-1} + \frac{1}{15}\,z^{-2}\right) \;=\; X(z)\left(1 - \frac{1}{5}\,z^{-1}\right)$$

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{1 - \frac{1}{5}\,z^{-1}}{1 - \frac{8}{15}\,z^{-1} + \frac{1}{15}\,z^{-2}} \;=\; \frac{1 - \frac{1}{5}\,z^{-1}}{(1 - \frac{1}{5}\,z^{-1})\,(1 - \frac{1}{3}\,z^{-1})} \;=\; \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\,z^{-1}}$$

Il sistema ha un polo in $z = 1/3$. Poichè è causale la regione di convergenza è $|z| > 1/3$. Poichè la regione di convergenza comprende il circolo unitario il sistema è stabile.

Risposta (b)

$$h(n) \;=\; \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

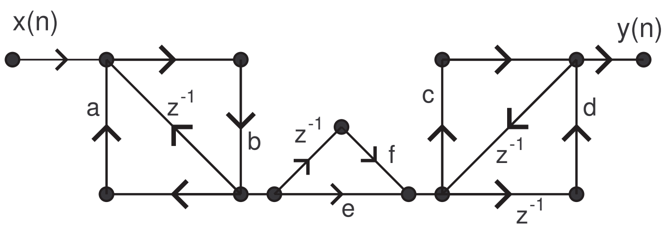
Risposta (c)

$$Y(z) \;=\; X(z)\,H(z) \;=\; \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\,z^{-1}}\;\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\,z^{-1}} \;=\; \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\,z^{-1}\right)^2} \;=\; 3\,z\,\frac{\frac{1}{3}\,z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}\,z^{-1}\right)^2}$$

$$y(n) \;=\; 3\,(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n+1)$$

Esercizio 2

Sia dato il sistema LTI causale descritto dal grafo di flusso in figura con la condizione che sia inizialmente a riposo. I rami senza nulla marcato hanno guadagno unitario.
I valori dei parametri sono:



$$a = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{3} \qquad c = \frac{8}{15} \qquad d = -\frac{1}{15} \qquad e = \frac{5}{6} \qquad f = -\frac{1}{3}$$

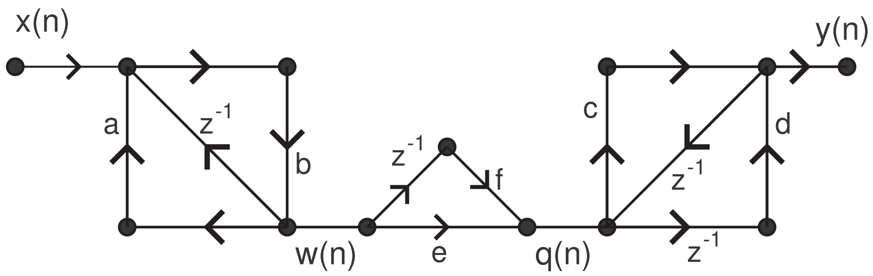
(a) (4 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Il sistema è stabile? Giustificare la risposta.

(b) (3 punti) Scrivere l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita. Disegnare il grafo di flusso in forma **diretta II** del sistema.

(c) (2 punti) Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

Soluzione dell'Esercizio 2

Risposta (a) Indico con $w(n)$ e $q(n)$ le sequenze nei punti visibili in figura.



Il sistema si compone quindi di tre blocchi in cascata: da $x(n)$ a $w(n)$, da $w(n)$ a $q(n)$ e da $q(n)$ a $y(n)$. Conviene considerare ciascun bloco separatamente e poi moltiplicare fra loro le $H(z)$ trovate.
Consideriamo il primo blocco:

$$w(n) = bx(n) + bw(n-1) + abw(n)$$

$$W(z)\,(1 - ab - bz^{-1}) = bX(z)$$

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - ab - bz^{-1}}$$

Per il secondo blocco si ha

$$q(n) = ew(n) + fw(n-1)$$

$$Q(z) = W(z)\,(e + fz^{-1})$$

$$H_2(z) = \frac{Q(z)}{W(z)} = e + fz^{-1}$$

Per il terzo blocco si ha

$$y(n) = cq(n) + dq(n-1) + cy(n-1) + dy(n-2)$$

$$Y(z)\,(1 - cz^{-1} - dz^{-2}) = Q(z)\,(c + dz^{-1})$$

$$H_3(z) = \frac{Y(z)}{Q(z)} = \frac{c + dz^{-1}}{1 - cz^{-1} - dz^{-2}}$$

I tre blocchi sono in serie, quindi la funzione di trasferimento del sistema è

$$H(z) = H_1(z)\,H_2(z)\,H_3(z) = \frac{b}{1 - ab - bz^{-1}}\,(e + fz^{-1})\,\frac{c + dz^{-1}}{1 - cz^{-1} - dz^{-2}}$$

Sostituendo i valori dei parametri

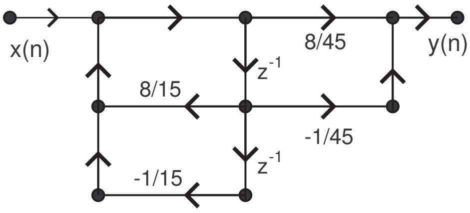
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1/3}{1 - (1/6) - (1/3)z^{-1}}\,[(5/6) - (1/3)z^{-1}]\,\frac{(8/15) - (1/15)z^{-1}}{1 - (8/15)z^{-1} + (1/15)z^{-2}} = \\ &= \frac{(1/3)\,(8/15)\,[1 - (1/8)z^{-1}]}{1 - (8/15)z^{-1} + (1/15)z^{-2}} = \frac{(8/45)\,[1 - (1/8)z^{-1}]}{[1 - (1/3)z^{-1}]\,[1 - (1/5)z^{-1}]} \end{aligned}$$

I poli sono in $z = 1/3$ e in $z = 1/5$, lo zero in $z = 1/8$. Poichè il sistema è causale la ROC è $|z| > 1/3$. Poichè la ROC comprende il circolo unitario il sistema è stabile. Il polo e lo zero che si cancellano sono in posizione $z = 2/5$, quindi non creano problemi di instabilità.

Risposta (b)
L'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita vale

$$y(n) = (8/15)\,y(n-1) - (1/15)\,y(n-2) + (8/45)\,x(n) - (1/45)\,x(n-1)$$

Il grafo di flusso in forma diretta II è



Risposta (c)

$$H(z) = \frac{8}{45}\left[\frac{25/16}{1-(1/3)z^{-1}} + \frac{-9/16}{1-(1/5)z^{-1}}\right] = \frac{5}{18}\frac{1}{1-(1/3)z^{-1}} - \frac{1}{10}\frac{1}{1-(1/5)z^{-1}}$$

$$h(n) = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

Esercizio 3

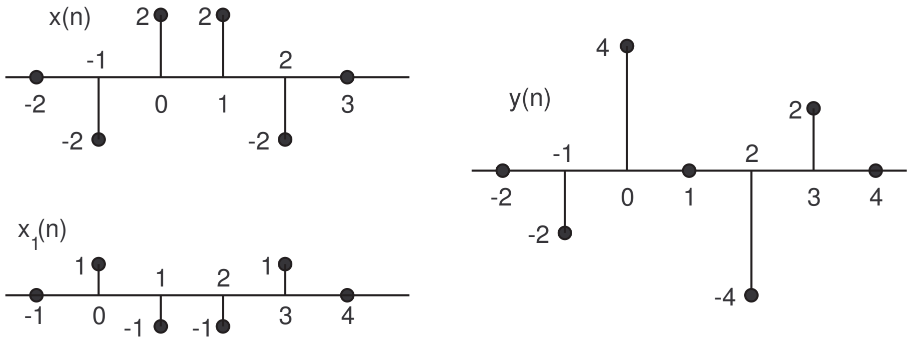
I due segnali discreti $x(n)$ e $y(n)$ sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita di un sistema LTI stabile.

(a) (3 punti) Trovare e disegnare l'uscita $y_1(n)$ del sistema quando l'ingresso è è la sequenza $x_1(n)$ in figura.

(b) (3 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema.

Suggerimento: se usate la "versione lunga" raccogliete la z a minimo esponente (z^{-m} con m massimo) e provate a fattorizzare usando $(z+1)$ e $(z-1)$.

(c) (1 punti) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.



Soluzione dell'Esercizio 3

Risposta (a) Poichè $x_1(n) = -(1/2)x(n-1)$ si ricava immediatamente che $y_1(n) = -(1/2)y(n-1)$. In alternativa è possibile ottenere lo stesso risultato passando dalla $H(z)$.

Risposta (b) Versione veloce:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \qquad h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) \qquad H(z) = 1 - z^{-1}$$

Versione lenta:

$$x(n) = -2\delta(n+1) + 2\delta(n) + 2\delta(n-1) - 2\delta(n-2) \qquad X(z) = -2z + 2 + 2z^{-1} - 2z^{-2}$$

$$y(n) = -2\delta(n+1) + 4\delta(n) - 4\delta(n-2) + 2\delta(n-3) \qquad Y(z) = -2z + 4 - 4z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-2z + 4 - 4z^{-2} + 2z^{-3}}{-2z + 2 + 2z^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{-z + 2 - 2z^{-2} + z^{-3}}{-z + 1 + z^{-1} - z^{-2}} = 1 - z^{-1}$$

infatti

$$-z + 2 - 2z^{-2} + z^{-3} = -z^{-3}(z-1)^3(z+1)$$

$$-z + 1 + z^{-1} - z^{-2} = -z^{-2}(z-1)^2(z+1)$$

Risposta (c)

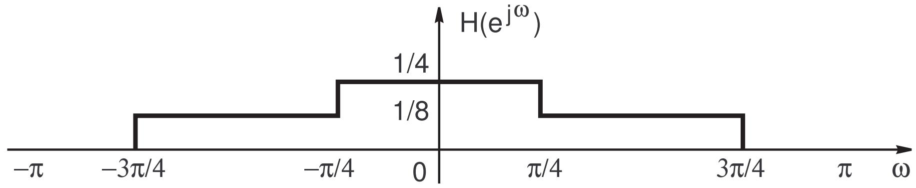
$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

Esercizio 4

Sia dato il sistema LTI avente risposta in frequenza

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1/4 & |\omega| < \pi/4 \\ 1/8 & \pi/4 \le |\omega| \le 3\pi/4 \\ 0 & 3\pi/4 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

come illustrato in figura



(a) (3 punti) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(b) (1 punti) Il sistema è causale? Giustificare la risposta.

(c) (4 punti) Sia

$$H_1(k) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=2\pi k/6} = H\left(e^{j2\pi k/6}\right)$$

Trovare $h_1(n)$, IDFT di $H_1(k)$ su base 6. Si desiderano i valori numerici.

Soluzione dell'Esercizio 4

Risposta (a)
Dalla definizione di FT

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{8} e^{j\omega n}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{8} e^{j\omega n}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\sin[(3/4)\pi n]}{\pi n} + \frac{1}{8}\frac{\sin[(1/4)\pi n]}{\pi n}$$

Risposta (b) Poichè la risposta all'impulso si estende da meno infinito a infinito il sistema non è causale.

Risposta (c) I valori di $H_1(k)$ sono

$$H_1(0) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=0} = 1/4 \qquad H_1(1) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=\pi/3} = 1/8 \qquad H_1(2) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=2\pi/3} = 1/8$$

$$H_1(3) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=\pi} = 0 \qquad H_1(4) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=4\pi/3} = 1/8 \qquad H_1(5) = H\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=5\pi/3} = 1/8$$

Dalla definizione di IDFT

$$h_1(n) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} H(k)\, W_6^{-kn} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} H(k)\, e^{j(2\pi/6)kn}$$

$$h_1(n) = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{j(\pi/3)n} + \frac{1}{8}e^{j(2\pi/3)n} + \frac{1}{8}e^{j(4\pi/3)n} + \frac{1}{8}e^{j(5\pi/3)n}\right]$$

raccogliendo i termini simmetrici e usando le formule di Eulero

$$\frac{1}{8}e^{j(\pi/3)n} + \frac{1}{8}e^{j(5\pi/3)n} = \frac{1}{8}\left[e^{j(\pi/3)n} + e^{-j(\pi/3)n}\right] = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

$$\frac{1}{8}e^{j(2\pi/3)n} + \frac{1}{8}e^{j(4\pi/3)n} = \frac{1}{8}\left[e^{j(2\pi/3)n} + e^{-j(2\pi/3)n}\right] = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

$$h_1(n) = \frac{1}{24}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right] \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

I valori numerici sono

$$h_1(0) = \frac{1}{8} \qquad h_1(1) = \frac{1}{24} \qquad h_1(2) = 0 \qquad h_1(3) = \frac{1}{24}$$

I rimanenti valori si possono calcolare, ma poichè la DFT è pari e reale anche $h_1(n)$ deve esserlo. Per simmetria

$$h_1(4) = 0 \qquad h_1(5) = \frac{1}{24}$$