Primo compitino del 22 gennaio 2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema LTI causale descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n) \;=\; x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) - \frac{1}{48}y(n-2)$$

(a) (4 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Determinare se il sistema è stabile, giustificando la risposta.

(b) (1 punti) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(c) (2 punti) Trovare l'uscita $y(n)$ del sistema quando l'ingresso vale

$$x(n) = \left(\frac{1}{12}\right)^n \qquad 0 \le n \le 1$$

e zero altrove.

Soluzione dell'Esercizio 1

Risposta (a)

$$y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{48}y(n-2) \;=\; x(n) - \frac{1}{4}x(n-1)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{48}z^{-2}\right) \;=\; X(z)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)$$

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{48}z^{-2}\right)} \;=\; \frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)} \;=\; \frac{1}{\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}$$

Il sistema ha un polo in $z = 1/12$. Poichè è causale la regione di convergenza è $|z| > 1/12$. Poichè la regione di convergenza include il circolo unitario il sistema è stabile.

Risposta (b)

$$h(n) \;=\; \left(\frac{1}{12}\right)^n u(n)$$

Risposta (c)

$$x(n) = 1 + \frac{1}{12}\,\delta(n-1) \qquad\qquad X(z) = 1 + \frac{1}{12}z^{-1}$$

volendo prendere la strada lunga:

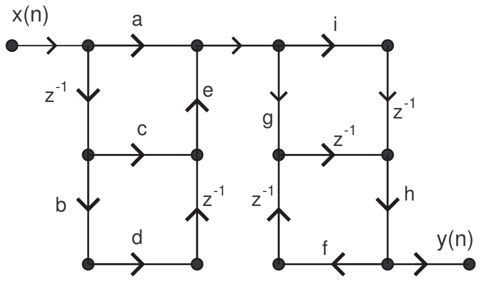
$$X(z) \;=\; \frac{1-(1/12)^2\,z^{-2}}{1-(1/12)\,z^{-1}} \;=\; \frac{(1-(1/12)\,z^{-1})\,(1+(1/12)\,z^{-1})}{1-(1/12)\,z^{-1}} \;=\; 1 + \frac{1}{12}z^{-1}$$

$$Y(z) \;=\; X(z)\,H(z) \;=\; \frac{1+\frac{1}{12}z^{-1}}{1-\frac{1}{12}z^{-1}} \;=\; \frac{1}{1-\frac{1}{12}z^{-1}} \;+\; \frac{\frac{1}{12}z^{-1}}{1-\frac{1}{12}z^{-1}}$$

$$y(n) \;=\; \left(\frac{1}{12}\right)^n u(n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Esercizio 2

Sia dato il sistema LTI causale descritto dal grafo di flusso in figura con la condizione che sia inizialmente a riposo.
I rami senza nulla marcato hanno guadagno unitario.
I valori dei parametri sono:



$$a = 1 \qquad b = -\frac{1}{2} \qquad c = 2 \qquad d = 2 \qquad e = \frac{1}{15} \qquad f = h = \frac{1}{2} \qquad g = \frac{2}{3} \qquad i = \frac{1}{3}$$

(a) (5 punti) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, la posizione dei poli e degli zeri e la regione di convergenza. Il sistema è stabile? Giustificare la risposta.

(b) (2 punti) Scrivere l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita. Disegnare il grafo di flusso in forma **diretta II** del sistema.

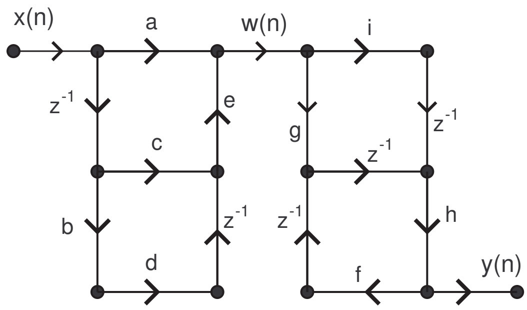
(c) (2 punti) Trovare l'uscita $y(n)$ del sistema quando l'ingresso vale

$$x(n) = 2 \cdot 5^{-(n+1)}\, u(n+1)$$

Soluzione dell'Esercizio 2

Risposta (a)

Indico con $w(n)$ la sequenza nel punto visibile in figura.



Il sistema si compone quindi di due blocchi in cascata: da $x(n)$ a $w(n)$ e da $w(n)$ a $y(n)$. Conviene considerare ciascun blocco separatamente e poi moltiplicare fra loro le $H(z)$ trovate.
Consideriamo il primo blocco:

$$w(n) \;=\; ax(n) + cex(n-1) + bdex(n-2)$$

$$W(z) \;=\; \left(a + cez^{-1} + bdez^{-2}\right) X(z)$$

$$H_1(z) \;=\; \frac{W(z)}{X(z)} \;=\; a + cez^{-1} + bdez^{-2}$$

Per il secondo blocco si ha

$$y(n) \;=\; hiw(n-1) + ghw(n-1) + fhy(n-2)$$

$$Y(z) \;=\; \left((hi+gh)z^{-1}\right) W(z) + fhz^{-2}Y(z)$$

$$Y(z)\,(1 - fhz^{-2}) \;=\; (hi+gh)z^{-1}\, W(z)$$

$$H_2(z) \;=\; \frac{Y(z)}{W(z)} \;=\; \frac{(hi+gh)z^{-1}}{1 - fhz^{-2}}$$

La funzione di trasferimento del sistema vale quindi

$$H(z) \;=\; H_1(z)\, H_2(z) \;=\; \left(a + cez^{-1} + bdez^{-2}\right) \frac{(hi+gh)z^{-1}}{1 - fhz^{-2}}$$

e sostituendo i valori numerici

$$H(z) \;=\; \left(1 + \frac{2}{15}z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2}\right) \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \;=\; \frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

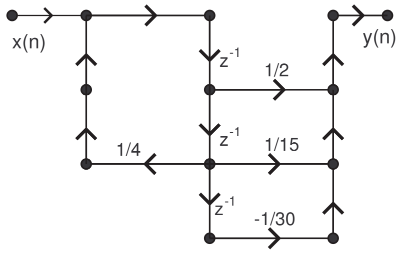
Poli in $z = 1/2$ e $z = -1/2$, zeri in $z = -1/3$, $z = 1/5$. Poichè è causale la regione di convergenza è $|z| > 1/2$. Poichè la regione di convergenza include il circolo unitario il sistema è stabile.

Risposta (b)

$$H(z) \;=\; \frac{\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{15}z^{-2}-\frac{1}{30}z^{-3}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$y(n) \;=\; \frac{1}{4}y(n-2)+\frac{1}{2}x(n-1)+\frac{1}{15}x(n-2)-\frac{1}{30}x(n-3)$$

Il grafo di flusso in forma diretta II è



Risposta (c)

$$x(n) = 2\cdot 5^{-(n+1)}\,u(n+1) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{(n+1)} u(n+1)$$

$$X(z) \;=\; \frac{2z}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{2z}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}\;\frac{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad\Rightarrow\qquad y(n) \;=\; \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n) \;+\; \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

Esercizio 3

La figura mostra la sequenza $x(n)$, con l'assunzione che $x(n) = 0$ al di fuori dell'intervallo visualizzato. Il valore di $x(4)$ è ignoto e viene rappresentato come b. Notare che il valore di $x(4)$ non è necessariamente in scala.
Sia $X(e^{j\omega})$ la DFT di $x(n)$ e sia $X_1(k)$ il campionamento di $X(e^{j\omega})$ ogni $\pi/2$, ovvero

$$X_1(k) \;=\; X(e^{j\omega})|_{\omega=(\pi/2)k} \qquad\qquad 0 \le k \le 3$$

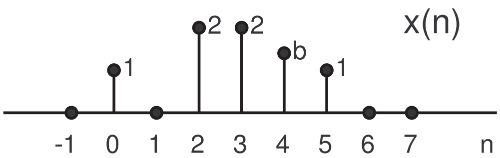
La sequenza lunga 4 punti che si ottiene come DFT inversa, ovviamente su base 4, di $X_1(k)$ è la sequenza $x_1(n)$ in figura.

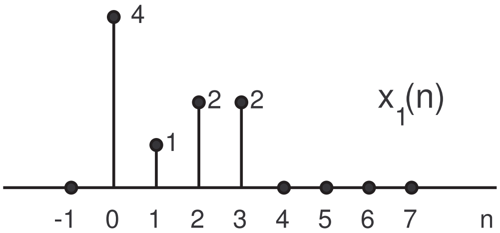
(a) (4 punti) Basandovi sui valori in figura potete determinare in modo univoco il valore di b? Se la risposta è affermativa calcolare il valore di b.

(b) (4 punti) Sia dato un sistema LTI causale. Se l'uscita di tale sistema è $x(n)$ assumendo $b = 3$ quando l'ingresso vale

$$q(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.





Soluzione dell'Esercizio 3

Risposta (a)

$X_1(k)$ è la DFT base 4 di $x(n)$ e $x_1(n)$ è la sua inversa, quindi $x_1(n)$ è $x(n)$ con aliasing su base $N = 4$, ovvero $x_1(n) = X(((n))_4)$.
Quindi $4 = b + 1$ e $b = 3$. La soluzione è ovviamente unica.

Risposta (b)

$$X(z) = 1 + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5} \qquad\qquad Q(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{Q(z)} = \frac{1 + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5}}{1 + z^{-1} + z^{-2}} = 1 - z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$$

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

Esercizio 4

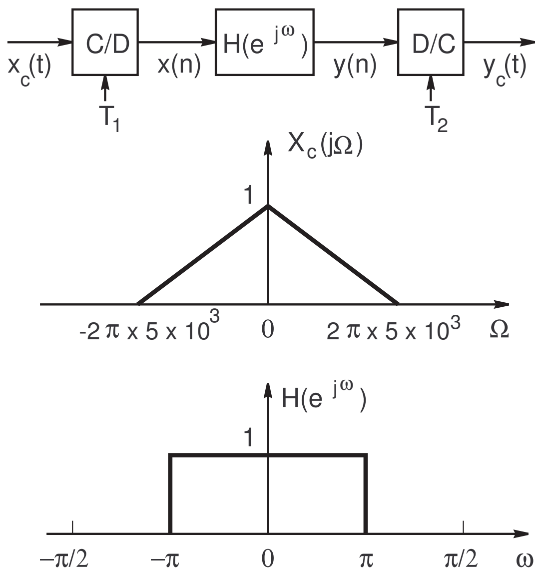
Sia dato il sistema in figura, dove sono mostrate anche le funzioni $X_c(j\Omega)$ e $H(e^{j\omega})$.
$X_c(j\Omega)$ è un triangolo alto uno con base da $\Omega = -2\pi \cdot 5 \cdot 10^3$ a $\Omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3$.
$H(e^{j\omega})$ è un rettangolo alto uno con base da $\omega = -\pi$ a $\omega = \pi$.
Disegnare, indicando accuratamente i valori, la trasformata di Fourier $X(e^{j\omega})$ di $x(n)$ e la trasformata di Fourier $Y_c(j\Omega)$ di $y_c(t)$ per ciascuno dei casi seguenti:

(a) (2 punti) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$;

(b) (2 punti) $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \cdot 10^4$;

(c) (2 punti) $1/T_1 = 2 \cdot 10^4$, $1/T_2 = 10^4$;

(d) (2 punti) $1/T_1 = 10^4$, $1/T_2 = 2 \cdot 10^4$.



Soluzione dell'Esercizio 4