Elaborazione e Trasmissione di Segnali e Immagini

Esercizi risolti di
Elaborazione Numerica dei Segnali

Prof. Aldo Grattarola
tel. 010 353 2987
e-mail aldo.grattarola@unige.it

DITEN – Università di Genova
via Opera Pia 13
16145 GENOVA

Con il contributo del Prof. Carlo Braccini

Novembre 2017

Indice

Capitolo 1

Segnali e sistemi a tempo discreto

Esercizio 1.1

Per ciascuno dei sistemi seguenti determinare se il sistema è: (1) stabile, (2) causale, (3) lineare, (4) tempo invariante e (5) senza memoria.
La notazione $T[x(n)]$ indica l'uscita del sistema quando l'ingresso vale $x(n)$ e $u(n)$ è la sequenza gradino unitario.

(a) $T[x(n)] = g(n)x(n)$ con $g(n)$ dato

(b) $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$

(c) $T[x(n)] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$

(d) $T[x(n)] = x(n - n_0)$

(e) $T[x(n)] = e^{x(n)}$

(f) $T[x(n)] = ax(n) + b$

(g) $T[x(n)] = x(-n)$

(h) $T[x(n)] = x(n) + 3u(n + 1)$

Soluzione dell'Esercizio 1.1

(a) $T[x(n)] = g(n)x(n)$ con $g(n)$ dato.

- Stabile: sia $|x(n)| \leq M$, allora $T[x(n)] \leq g(n)M$. Quindi il sistema è stabile se $|g(n)|$ è limitato
- Causale: $y_1(n) = g(n)x_1(n)$ e $y_2(n) = g(n)x_2(n)$, quindi se $x_1(n) = x_2(n)$ per ogni $n < n_0$ allora $y_1(n) = y_2(n)$ per ogni $n < n_0$ e il sistema è causale.
- Lineare

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= g(n)(ax_1(n) + bx_2(n)) \\ &= ag(n)x_1(n) + bg(n)x_2(n) = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

  quindi il sistema è lineare.
- Tempo invariante

$$\begin{aligned} T[x(n - n_0)] &= g(n)x(n - n_0) \\ &\neq y(n - n_0) = g(n - n_0)x(n - n_0) \end{aligned}$$

  quindi il sistema non è tempo invariante.
- Senza memoria $y(n) = T[x(n)]$ dipende solo dall'ennesimo valore di $x(n)$, quindi è senza memoria.

(b) $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora

$$|T[x(n)]| \;\leq\; \sum_{k=n_0}^{n} |x(k)| \;\leq\; |n-n_0|M$$

Se $n \to \infty$, $T \to \infty$, quindi il sistema non è stabile.

- Causale: $T[x(n)]$ dipende da valori futuri di $x(n)$ quando $n < n_0$, quindi non è causale.
- Lineare

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= \sum_{k=n_0}^{n} ax_1(k)+bx_2(k) \\ &= a\sum_{k=n_0}^{n} x_1(k) + b\sum_{k=n_0}^{n} x_2(k) \;=\; aT[x_1(n)] \;+\; bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

quindi il sistema è lineare.

- Tempo invariante

$$\begin{aligned} T[x(n-n_0)] &= \sum_{k=n_0}^{n} x(k-n_0) \;=\; \sum_{k=0}^{n-n_0} x(k) \\ &\neq \; y(n-n_0) \;=\; \sum_{k=n_0}^{n-n_0} x(k) \end{aligned}$$

quindi il sistema non è tempo invariante.

- Senza memoria: i valori di $y(n)$ dipendono dai valori passati di $x(n)$ per $n > n_0$, quindi non è senza memoria.

(c) $T[x(n)] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora

$$|T[x(n)]| \;\leq\; \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)| \;\leq\; \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} M \;\leq\; |2n_0+1|M$$

Quindi il sistema è stabile.

- Causale: $T[x(n)]$ dipende da valori futuri di $x(n)$ (se $n_0 \neq 0$), quindi non è causale.
- Lineare

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} ax_1(k)+bx_2(k) \\ &= a\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k) \;=\; aT[x_1(n)] \;+\; bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

quindi il sistema è lineare.

- Tempo invariante

$$T[x(n-m_0)] \;=\; \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k-m_0) \;=\; \sum_{k=n-n_0-m_0}^{n+n_0-m_0} x(k) \;=\; y(n-m_0)$$

quindi il sistema è tempo invariante.

- Senza memoria: i valori di $y(n)$ dipendono da altri $2n_0$ valori di $x(n)$, quindi non è senza memoria.

(d) $T[x(n)] = x(n-n_0)$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora $|T[x(n)]| \;=\; |x(n-n_0)| \;\leq\; M$. Quindi il sistema è stabile.
- Causale: se $n_0 \geq 0$ è causale, se $n_0 < 0$ non è causale.

- Lineare

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] \; = \; ax_1(n - n_0) + bx_2(n - n_0) \; = \; aT[x_1(n)] \; + \; bT[x_2(n)]$$

quindi il sistema è lineare.
- Tempo invariante

$$T[x(n - n_d)] \; = \; x(n - n_0 - n_d) \; = \; y(n - n_d)$$

quindi il sistema è tempo invariante.
- Senza memoria: a meno che $n_0 = 0$, il sistema non è senza memoria.

(e) $T[x(n)] = e^{x(n)}$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora $|T[x(n)]| \; = \; |e^{x(n)}| \; \leq \; e^{|x(n)|} \; \leq \; e^M$. Quindi il sistema è stabile.
- Causale: non usa valori futuri di $x(n)$, quindi è causale.
- Lineare

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] \; = \; e^{ax_1(n)+bx_2(n)} \; = \; e^{ax_1(n)}\, e^{bx_2(n)} \; \neq \; aT[x_1(n)] \; + \; bT[x_2(n)]$$

quindi il sistema non è lineare.
- Tempo invariante

$$T[x(n - n_d)] \; = \; e^{x(n-n_d)} \; = \; y(n - n_d)$$

quindi il sistema è tempo invariante.
- Senza memoria: $y(n)$ dipende solo dall'ennesimo valore di $x(n)$, quindi il sistema è senza memoria.

(f) $T[x(n)] = ax(n) + b$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora $|T[x(n)]| \; = \; |ax(n) + b| \; \leq \; |aM| + |b|$. Quindi il sistema è stabile se i valori a e b sono finiti.
- Causale: non usa valori futuri di $x(n)$, quindi è causale.
- Lineare

$$T[cx_1(n)+dx_2(n)] \; = \; acx_1(n)+adx_2(n)+b \; \neq \; cT[x_1(n)] + dT[x_2(n)] \; = \; acx_1(n)+b+adx_2(n)+b$$

quindi il sistema non è lineare se $b \neq 0$ e lineare altrimenti.
- Tempo invariante

$$T[x(n - n_d)] \; = \; ax(n - n_d) + b \; = \; y(n - n_d)$$

quindi il sistema è tempo invariante.
- Senza memoria: $y(n)$ dipende solo dall'ennesimo valore di $x(n)$, quindi il sistema è senza memoria.

(g) $T[x(n)] = x(-n)$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora $|T[x(n)]| \; = \; |x(-n)| \; \leq \; M$. Quindi il sistema è stabile.
- Causale: per $n < 0$ dipende da valori futuri di $x(n)$, quindi non è causale.
- Lineare

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] \; = \; ax_1(-n) + bx_2(-n) \; = \; aT[x_1(n)] \; + \; bT[x_2(n)]$$

quindi il sistema è lineare.
- Tempo invariante

$$T[x(n - n_d)] \; = \; x(-n - n_d) \; \neq \; y(n - n_d) \; = \; x(-n + n_d)$$

quindi il sistema non è tempo invariante.

Come esempio consideriamo i due ingressi $x_1(n) = \delta(n)$ e $x_2(n) = \delta(n-1)$. Le corrispondenti uscite valgono $y_1(n) = \delta(-n) = \delta(n)$ e $y_2(n) = \delta(-n-1)$. Quando entra un impulso centrato in zero l'uscita è ancora un impulso centrato in zero, visto che $\delta(n)$ è pari. Il sistema ribalta la sequenza di ingresso rispetto a $n = 0$, infatti se entra un impulso centrato in 1, ovvero $x_2(n)$, l'uscita è un impulso centrato in -1, vedi $y_2(n)$. Essendo $x_2(n)$ pari a $x_1(n)$ traslato a destra di 1, se il sistema fosse tempo invariante $y_2(n)$ dovrebbe anch'essa essere traslata a destra di 1 rispetto a $y_1(n)$, mentre è evidentemente traslata di 1 ma a sinistra.

- Senza memoria: per $n \neq 0$ l'uscita dipende da valori di $x(n)$ diversi dall'ennesimo valore, quindi il sistema non è senza memoria.

(h) $T[x(n)] = x(n) + 3u(n+1)$

- Stabile: se $|x(n)| \leq M$, allora $|T[x(n)]| \leq M + 3$ per $n \geq -1$ e $|T[x(n)]| \leq M$ per $n < -1$. Quindi il sistema è stabile.
- Causale: poichè non usa valori futuri di $x(n)$ il sistema è causale.
- Lineare

  $$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = ax_1(n)+bx_2(n)+3u(n+1) \neq aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ax_1(n)+bx_2(n)+6u(n+1)$$

  quindi il sistema non è lineare.
- Tempo invariante

  $$T[x(n-n_d)] = x(n-n_d) + 3u(n+1) \neq y(n-n_d) = x(n-n_d) + 3u(n-n_d+1)$$

  quindi il sistema non è tempo invariante.
- Senza memoria: $y(n)$ dipende solo dall'ennesimo valore di $x(n)$, quindi il sistema è senza memoria.

Esercizio 1.2

Un sistema discreto lineare tempo invariante ha ingresso $x(n)$ e risposta all'impulso $h(n)$.

(a) Se $h(n)$ è zero ovunque tranne che nell'intervallo $N_0 \leq n \leq N_1$ e $x(n)$ è zero ovunque tranne che nell'intervallo $N_2 \leq n \leq N_3$, l'uscita del sistema è zero tranne che in un certo intervallo $N_4 \leq n \leq N_5$. Trovare N_4 e N_5 in funzione di N_0, N_1, N_2 e N_3.

(b) Se $x(n)$ è zero tranne che per N punti consecutivi e $h(n)$ è zero tranne che per M punti consecutivi, qual è il massimo numero di punti consecutivi per i quali l'uscita del sistema $y(n)$ può essere diversa da zero?

Soluzione dell'Esercizio 1.2

Per un sistema LTI, l'uscita si ottiene convoluendo l'ingresso con la risposta all'impulso del sistema:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

(a) Poichè $h(k) \neq 0$ per $N_0 \leq k \leq N_1$,

$$y(n) = \sum_{k=N_0}^{N_1} h(k)x(n-k)$$

Inoltre $x(n) \neq 0$ per $N_2 \leq n \leq N_3$, quindi $x(n-k) \neq 0$ per $N_2 \leq (n-k) \leq N_3$.

Notando che il minimo valore di $(n-k)$ vale N_2, si deduce che il valore minimo per n, che si ottiene per $k = N_0$, è

$$(n_{min} - N_0) = N_2 \quad \rightarrow \quad (N_4 - N_0) = N_2 \quad \rightarrow \quad N_4 = N_0 + N_2$$

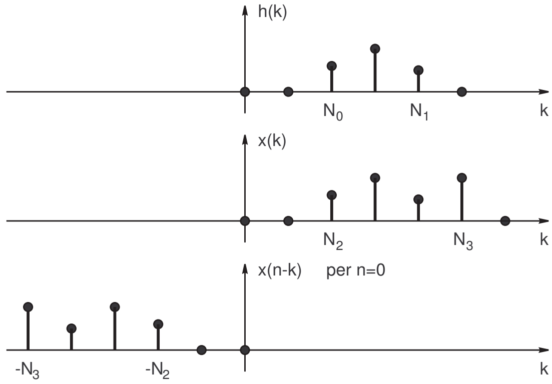
con simile ragionamento

$$(n_{max} - N_1) = N_3 \quad \rightarrow \quad (N_5 - N_1) = N_3 \quad \rightarrow \quad N_5 = N_1 + N_3$$

Quindi il massimo intervallo nel quale l'uscita può essere diversa da zero è

$$(N_0 + N_2) \leq n \leq (N_1 + N_3)$$

Il problema può anche essere risolto per via grafica. Consideriamo la figura seguente:



L'ultimo grafico è di $x(n-k)$ con $n = 0$. Per $n = 1$ i campioni si spostano a destra di una posizione. Il minimo valore di n per il quale si ha "sovrapposizione" di campioni entrambi non nulli è chiaramente $(N_2 + N_0)$ e l'ultima posizione valida corrisponde ad uno spostamento di $(N_3 + N_1)$.

(b) La risposta deriva direttamente dalle proprietà della convoluzione, e vale $(N+M-1)$. In alternativa si può ricavare dalla risposta precedente (che vale quindi come dimostrazione della proprietà): se $x(n) \neq 0$ per un certo $n_0 \leq n \leq (n_0 + N - 1)$ e $h(n) \neq 0$ per $n_1 \leq n \leq (n_1 + M - 1)$, il risultato precedente implica che l'uscita è diversa da zero nell'intervallo

$$(n_0 + n_1) \leq n \leq (n_0 + n_1 + M + N - 2)$$

ovvero appunto per una lunghezza pari a $(N + M - 1)$.

Esercizio 1.3

Valutando la somma di convoluzione, trovare la risposta al gradino unitario (detta *step response*) di un sistema lineare invariante alle traslazioni la cui risposta all'impulso vale

$$h(n) = a^{-n}u(-n) \qquad 0 < a < 1$$

Soluzione dell'Esercizio 1.3

La risposta al gradino unitario di un sistema con risposta all'impulso

$$h(n) = a^{-n}u(-n) \qquad 0 < a < 1$$

si ottiene mediante somma di convoluzione

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Ricordiamo che il gradino unitario vale $u(n) = 1$ per $n \geq 0$ e $u(n) = 0$ per $n < 0$. Sostituendo si ha

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k}u(-k)u(n-k)$$

Per $n \geq 0$ vale che $u(-k)u(n-k) = u(-k)$ e quindi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k}u(-k) = \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k} = \frac{1}{1-a} \qquad n \geq 0$$

Per $n < 0$ vale che $u(-k)u(n-k) = u(n-k)$ e quindi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k}u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} a^{-k} = \sum_{k=-n}^{\infty} a^{k} = \frac{a^{-n}}{1-a} \qquad n < 0$$

Esercizio 1.4

Si consideri l'equazione alle differenze a coefficienti costanti

$$y(n) - \frac{3}{4}\,y(n-1) + \frac{1}{8}\,y(n-2) \;=\; 2x(n-1)$$

Calcolare $y(n)$ per $n \geq 0$ quando $x(n) = \delta(n)$ e $y(n) = 0$ per $n < 0$.

Soluzione dell'Esercizio 1.4

L'equazione alle differenze vale

$$y(n) - \frac{3}{4}\,y(n-1) + \frac{1}{8}\,y(n-2) \;=\; 2x(n-1)$$

Per risolvere il problema possiamo calcolare la trasformata di Fourier di ambo i lati

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}\,Y(e^{j\omega})\,e^{-j\omega} + \frac{1}{8}\,Y(e^{j\omega})\,e^{-j2\omega} \;=\; 2X(e^{j\omega})\,e^{-j\omega}$$

La funzione di trasferimento vale

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \frac{Y(e^{j\omega})}{x(e^{j\omega})} \;=\; \frac{2\,e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}\,e^{-j\omega} + \frac{1}{8}\,e^{-j2\omega}} \;=\; \frac{-8}{1 - \frac{1}{4}\,e^{-j\omega}} \;+\; \frac{8}{1 - \frac{1}{2}\,e^{-j\omega}}$$

(se avete problemi con la scomposizione andate alla sezione 9.1). La risposta all'impulso è l'antitrasformata di $H(e^{j\omega})$

$$h(n) \;=\; -8\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \;+\; 8\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \;=\; y(n)$$

Esercizio 1.5

(a) Trovare la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ del sistema lineare invariante alle traslazioni descritto dalla equazione alle differenze

$$y(n) - \frac{1}{2}\,y(n-1) \;=\; x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

(b) Scrivere l'equazione alle differenze che caratterizza un sistema la cui risposta in frequenza vale

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

Soluzione dell'Esercizio 1.5

(a) L'equazione alle differenze vale

$$y(n) - \frac{1}{2}\,y(n-1) \;=\; x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

La trasformata di Fourier è

$$Y(e^{j\omega})\left[1 - \frac{1}{2}\,e^{-j\omega}\right] \;=\; X(e^{j\omega})\left[1 + 2\,e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right]$$

La funzione di trasferimento vale quindi

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \frac{Y(e^{j\omega})}{x(e^{j\omega})} \;=\; \frac{1 + 2\,e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}\,e^{-j\omega}}$$

(b) Data la risposta in frequenza del sistema

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{x(e^{j\omega})}$$

moltiplicando si ottiene

$$Y(e^{j\omega})\left[1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}\right] = X(e^{j\omega})\left[1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}\right]$$

La trasformata inversa porta a

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{3}{4}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + x(n-3)$$

Esercizio 1.6

Determinare se ciascuna delle seguenti sequenze è periodica. Se lo è calcolare il periodo.

(a) $x(n) = e^{j(\pi n/6)}$

(b) $x(n) = e^{j(3\pi n/4)}$

(c) $x(n) = \sin(\pi n/5)/(\pi n)$

(d) $x(n) = e^{j(\pi n/\sqrt{2})}$

Soluzione dell'Esercizio 1.6

La sequenza $x(n)$ è periodica di periodo N se $x(n) = x(n+N)$ per un qualche N intero. Il periodo è ovviamente il valore minimo positivo (> 0) di N per cui vale tale relazione.

(a) $x(n) = e^{j(\pi n/6)}$

$x(n)$ è periodica di periodo 12:

$$e^{j(\pi n/6)} = e^{j(\pi/6)(n+N)} = e^{j(\pi n/6)}\, e^{j(\pi N/6)} \quad \rightarrow \quad e^{j(\pi N/6)} = 1$$

$$e^{j(\pi N/6)} = 1 = e^{j(2k\pi)} \qquad \forall k \text{ intero}$$

ovvero

$$\frac{N}{6} = 2k \quad \rightarrow \quad N = 12\,k \qquad \forall k \text{ intero}$$

Il minimo valore di N, che è quindi il periodo della sequenza, vale 12.

(b) $x(n) = e^{j(3\pi n/4)}$

$x(n)$ è periodica di periodo 8:

$$e^{j(3\pi n/4)} = e^{j(3\pi/4)(n+N)} = e^{j(3\pi/4)n}e^{j(3\pi/4)N} \quad \rightarrow \quad e^{j(3\pi/4)N} = 1$$

$$e^{j(3\pi/4)N} = 1 = e^{j(2k\pi)}$$

ovvero

$$\frac{3\,N}{4} = 2k \quad \rightarrow \quad N = \frac{8}{3}\,k$$

Il minimo valore di k per cui sia k che N sono interi è 3, quindi il periodo vale 8.

(c) $x(n) = \sin(\pi n/5)/(\pi n)$

Il numeratore è periodico, il denominatore è lineare con n, quindi non periodico. La sequenza $x(n)$ non è quindi periodica.

(d) $x(n) = e^{j(\pi n/\sqrt{2})}$

La sequenza non è periodica. Supponiamo infatti che lo sia di un qualche periodo N:

$$e^{j(\pi n/\sqrt{2})} = e^{j(\pi/\sqrt{2})(n+N)} = e^{j(\pi n/\sqrt{2})}\, e^{j(\pi N/\sqrt{2})} \quad \rightarrow \quad e^{j(\pi N/\sqrt{2})} = 1$$

$$e^{j(\pi N/\sqrt{2})} = 1 = e^{j(2k\pi)}$$

ovvero

$$N/\sqrt{2} = 2k \quad \rightarrow \quad N = 2\sqrt{2}\,k$$

Non esistendo alcun k intero per cui N è intero, la sequenza $x(n)$ non è periodica.

Esercizio 1.7

Calcolare l'uscita di un sistema lineare invariante alle traslazioni se la risposta all'impulso $h(n)$ e l'ingresso $x(n)$ sono come segue:

(a) $x(n) = u(n)$ e $h(n) = a^n u(-n-1)$, $a > 1$.

(b) $x(n) = u(n-4)$ e $h(n) = 2^n u(-n-1)$.

(c) $x(n) = u(n)$ e $h(n) = (0.5)\,2^n u(-n)$.

(d) $h(n) = 2^n u(-n-1)$ e $x(n) = u(n) - u(n-10)$.

Usate le vostre conoscenze su linearità e tempo invarianza per minimizzare il lavoro nelle domande b, c e d.

Soluzione dell'Esercizio 1.7

(a) $x(n) = u(n)$ e $h(n) = a^n u(-n-1)$, $a > 1$.

$$y(n) \;=\; h(n) * x(n) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(-k-1)u(n-k) \;=\; \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{n} a^k & n \le -1 \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k & n > -1 \end{cases} \;=\; \begin{cases} \frac{a^n}{1-1/a} & n \le -1 \\ \frac{1/a}{1-1/a} & n > -1 \end{cases}$$

(b) $x(n) = u(n-4)$ e $h(n) = 2^n u(-n-1)$.

Definiamo $v(n) = 2^n u(-n-1)$ [si, $v(n) = h(n)$]: dalla domanda precedente sappiamo che

$$w(n) \;=\; u(n) * v(n) \;=\; \begin{cases} 2^{n+1} & n \le -1 \\ 1 & n > -1 \end{cases}$$

quindi

$$y(n) \;=\; u(n-4) * v(n) \;=\; w(n-4) \;=\; \begin{cases} 2^{n-3} & n \le 3 \\ 1 & n > 3 \end{cases}$$

(c) $x(n) = u(n)$ e $h(n) = (0.5)\,2^n u(-n)$.

Usando ancora $v(n)$ e $w(n)$ definiti in precedenza e notando che $h(n) = 2^{n-1}u[-(n-1)-1] = v(n-1)$:

$$y(n) \;=\; x(n) * h(n) \;=\; x(n) * v(n-1) \;=\; w(n-1) \;=\; \begin{cases} 2^n & n \le 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases}$$

(d) $h(n) = 2^n u(-n-1)$ e $x(n) = u(n) - u(n-10)$.

Usiamo ancora $v(n)$ e $w(n)$:

$$y(n) \;=\; x(n) * h(n) \;=\; [u(n) - u(n-10)] * v(n) \;=\; w(n) - w(n-10)$$

$$y(n) = [2^{n+1}u(-(n+1)) + u(n)] - [2^{n-9}u(-(n-9)) + u(n-10)] \;=\; \begin{cases} 2^{n+1} - 2^{n-9} & n \le -2 \\ 1 - 2^{n-9} & -1 \le n \le 8 \\ 0 & n \ge 9 \end{cases}$$

Esercizio 1.8

Si consideri un sistema LTI con risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}} \qquad -\pi < \omega < \pi$$

Calcolare l'uscita $y(n)$ per tutti gli n se l'ingresso è

$$x(n) \;=\; \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

Soluzione dell'Esercizio 1.8

Riscriviamo $x(n)$ come somma di esponenziali complessi:

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \frac{e^{j\pi n/4} - e^{-j\pi n/4}}{2j}$$

Poichè gli esponenziali complessi sono le autofunzioni dei sistemi LTI:

$$y(n) = \frac{H(e^{j\pi/4})\, e^{j\pi n/4} - H(e^{-j\pi/4})\, e^{-j\pi n/4}}{2j}$$

Valutiamo quindi la risposta in frequenza in $\omega = \pm\pi/4$:

$$H(e^{j\pi/4}) = \frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = 2(1 + j) = 2\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$$

$$H(e^{-j\pi/4}) = \frac{1 - e^{j\pi/2}}{1 + \frac{1}{2}e^{j\pi}} = 2(1 - j) = 2\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}$$

infine

$$y(n) = \frac{2\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}e^{j\pi n/4} - 2\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}e^{-j\pi n/4}}{2j} = 2\sqrt{2}\, \sin(\pi n/4 + \pi/4)$$

Esercizio 1.9

Si consideri un sistema con ingresso $x(n)$ e uscita $y(n)$ che soddisfa la seguente equazione alle differenze

$$y(n) = ny(n-1) + x(n)$$

Il sistema è causale e soddisfa le condizioni iniziali a riposo: se $x(n) = 0$ per $n < n_0$, allora $y(n) = 0$ per $n < n_0$.

(a) Se $x(n) = \delta(n)$, trovare $y(n)$ per ogni n.

(b) Il sistema è lineare? Giustificare la risposta.

(c) Il sistema è tempo invariante? Giustificare la risposta.

Soluzione dell'Esercizio 1.9

Poiché il sistema è causale e soddisfa le condizioni iniziali a riposo, possiamo trovare ricorsivamente la risposta ad ogni ingresso.

(a) Se $x(n) = \delta(n)$

$$\begin{aligned} y(n) &= 0 \qquad \text{per } n < 0 \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 \\ y(2) &= 2 \\ y(3) &= 6 \\ y(4) &= 24 \end{aligned}$$

Quindi la risposta all'impulso è $h(n) = y(n) = n!\, u(n)$.

(b) Per verificare se il sistema è lineare consideriamo l'ingresso

$$x(n) = a\delta(n) + b\delta(n)$$

Calcoliamo l'uscita

$$\begin{aligned} y(n) &= 0 \qquad \text{per } n < 0 \\ y(0) &= a + b \\ y(1) &= a + b \\ y(2) &= 2(a + b) \\ y(3) &= 6(a + b) \\ y(4) &= 24(a + b) \end{aligned}$$

Siccome l'uscita è equivalente alla somma delle uscite singole, il sistema è lineare.

(c) Per verificare se il sistema è tempo invariante consideriamo l'ingresso

$$x(n) = \delta(n-1)$$

Calcoliamo l'uscita

$$\begin{aligned} y(n) &= 0 \qquad \text{per } n < 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \\ y(2) &= 2 \\ y(3) &= 6 \\ y(4) &= 24 \end{aligned}$$

Usando la risposta all'impulso trovata alla domanda (a), se il sistema fosse tempo invariante l'uscita sarebbe $y(n) = h(n-1) = (n-1)!\, u(n-1)$. Visto che i valori calcolati sono diversi (vedi $y(0)$), il sistema non è tempo invariante.

Esercizio 1.10

Indicare quali dei seguenti segnali a tempo discreto sono autofunzioni dei sistemi discreti stabili e LTI:

(a) $e^{j2\pi n/3}$

(b) 3^n

(c) $2^n u(-n-1)$

(d) $\cos(\omega_0 n)$

(e) $(1/4)^n$

(f) $(1/4)^n u(n) + 4^n u(-n-1)$

Soluzione dell'Esercizio 1.10

Le autofunzioni dei sistemi LTI sono della forma α^n, quindi (a), (b) e (e) sono autofunzioni e le altre no. Da notare che in (d), $\cos(\omega_0 n) = (1/2)(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$ è la somma di due funzioni del tipo α^n, e quindi non è una autofunzione.

Esercizio 1.11

Per ciascuno dei seguenti sistemi è nota una singola relazione ingresso-uscita:

(a) Sistema A: $x(n) = (1/3)^n$, $y(n) = 2(1/3)^n$.

(b) Sistema B: $x(n) = (1/2)^n$, $y(n) = (1/4)^n$.

(c) Sistema C: $x(n) = (2/3)^n u(n)$, $y(n) = 4(2/3)^n u(n) - 3(1/2)^n u(n)$.

Basandosi su queste informazioni, scegliere la più forte conclusione che potete trarre su ciascun sistema, scegliendo dalla lista seguente.

(i) Il sistema non può essere LTI.

(ii) Il sistema deve essere LTI.

(iii) Il sistema può essere LTI, ed esiste un solo sistema LTI che soddisfa la relazione ingresso-uscita data.

(iv) Il sistema può essere LTI, ma non può essere univocamente determinato a partire dalle informazioni date.

Se scegliete l'opzione (iii), specificate la risposta all'impulso $h(n)$ o la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ per il sistema LTI.

Soluzione dell'Esercizio 1.11

(a) Sistema A: $x(n) = (1/3)^n$, $y(n) = 2(1/3)^n$.

L'informazione data mostra che il sistema soddisfa la proprietà delle autofunzioni esponenziali dei sistemi LTI per una particolare funzione esponenziale. Tuttavia non conosciamo la risposta del sistema per nessun'altra autofunzione. Quindi possiamo dire che il sistema può essere LTI, ma non possiamo determinarlo univocamente ⇒ (iv).

(b) Sistema B: $x(n) = (1/2)^n$, $y(n) = (1/4)^n$.

Se il sistema fosse LTI, l'uscita dovrebbe essere nella forma $A(1/2)^n$, visto che $(1/2)^n$ sarebbe una autofunzione del sistema. Poiché non è vero, il sistema non può essere LTI ⇒ (i).

(c) Sistema C: $x(n) = (2/3)^n\, u(n)$, $y(n) = 4(2/3)^n u(n) - 3(1/2)^n u(n)$.

L'informazione data mostra che il sistema potrebbe essere LTI, ma potrebbe anche non esserlo. Per esempio, il sistema potrebbe avere uscita nulla per qualsiasi altro ingresso tranne quello indicato, rendendolo non lineare. ⇒ (iii).

Se fosse LTI, possiamo trovare la risposta in frequenza in questo modo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{4\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}} - 3\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}}}$$

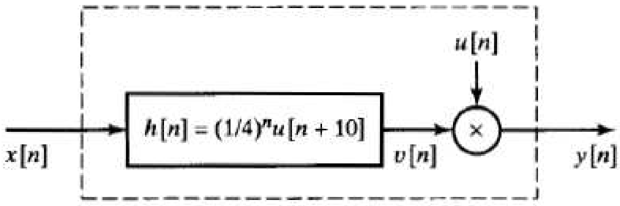
$$H(e^{j\omega}) = \left(1 - \frac{2}{3}e^{-j\omega}\right) \frac{4 - 2e^{-j\omega} - 3 + 2e^{-j\omega}}{(1-\frac{2}{3}e^{-j\omega})\,(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

e quindi la risposta all'impulso vale

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Esercizio 1.12

Si consideri il sistema in figura.



L'uscita di un sistema LTI avente risposta all'impulso $h(n) = (1/4)^n u(n + 10)$ viene moltiplicata per una sequenza gradino unitario $u(n)$ per ottenere l'uscita del sistema complessivo.
Rispondere alle domande seguenti, giustificando brevemente le risposte:

(a) Il sistema complessivo è LTI ?

(b) Il sistema complessivo è causale ?

(c) Il sistema complessivo è stabile (alla BIBO) ?

Soluzione dell'Esercizio 1.12

(a) No, il sistema non è LTI. Si considerino le due seguenti coppie di ingresso-uscita:

$$x_1(n) = \delta(n) \qquad \Rightarrow \qquad y_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$x_2(n) = \delta(n-1) \qquad \Rightarrow \qquad y_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n)$$

Quindi, pur essendo $x_2(n) = x_1(n-1)$, si ha $y_2(n) \neq y_1(n-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$.

(b) No, il sistema non è causale. Si consideri la coppia di ingresso-uscita $x_2(n)$ e $y_2(n)$ vista sopra: $x_2(n) = 0$ per $n < 1$, ma $y_2(0) \neq 0$.

(c) Si, il sistema è stabile alla BIBO. Infatti $h(n)$ è la risposta di un sistema stabile e moltiplicare una sequenza limitata in ampiezza per il gradino unitario non può renderla illimitata.

Esercizio 1.13

Si consideri la seguente equazione alle differenze che rappresenta un sistema causale LTI:

$$y(n) - \left(\frac{1}{a}\right) y(n-1) \;=\; x(n-1)$$

(a) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(b) Per quali valori di a il sistema è stabile ?

Soluzione dell'Esercizio 1.13

(a) Scriviamo l'equazione alle differenze come $y(n) = (1/a)\,y(n-1) + x(n-1)$. Se il sistema è causale, $h(n) = 0$ per $n < 0$, quindi:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0 \\ h(1) & = & 1 \\ h(2) & = & 1/a \\ h(3) & = & (1/a)^2 \\ \vdots & & \vdots \\ h(n) & = & (1/a)^{n-1} u(n-1) \end{array}$$

(b) Il sistema è stabile se $h(n)$ è assolutamente sommabile, quindi se $|(1/a)| < 1$ ovvero se $|a| > 1$.

Esercizio 1.14

Si consideri un arbitrario sistema lineare con ingresso $x(n)$ e uscita $y(n)$. Dimostrare che se $x(n) = 0$ per ogni n allora deve valere che $y(n) = 0$ per ogni n.

Soluzione dell'Esercizio 1.14

Per un sistema lineare arbitrario vale che

$$y(n) \;=\; T[x(n)]$$

con $x(n) = 0\ \forall n$.

Consideriamo ora un generico ingresso $x_1(n)$: ovviamente l'uscita sarà $y_1(n) = T[x_1(n)]$. Per linearità possiamo scrivere

$$T[x(n) + x_1(n)] \;=\; T[x(n)] \;+\; T[x_1(n)] \;=\; y(n) \;+\; y_1(n)$$

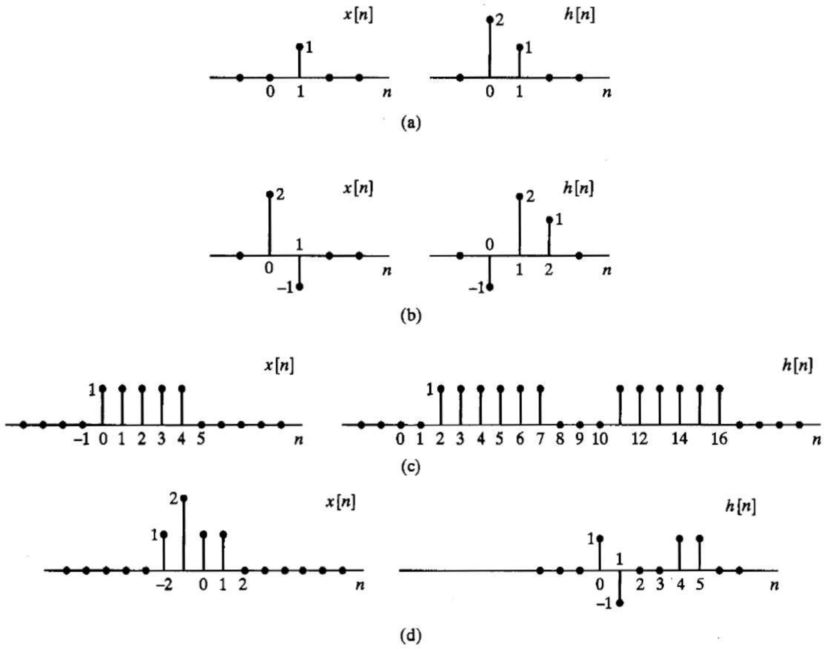
Poichè $x(n) = 0\ \forall n$,

$$T[x(n) + x_1(n)] \;=\; T[x_1(n)] \;=\; y_1(n)$$

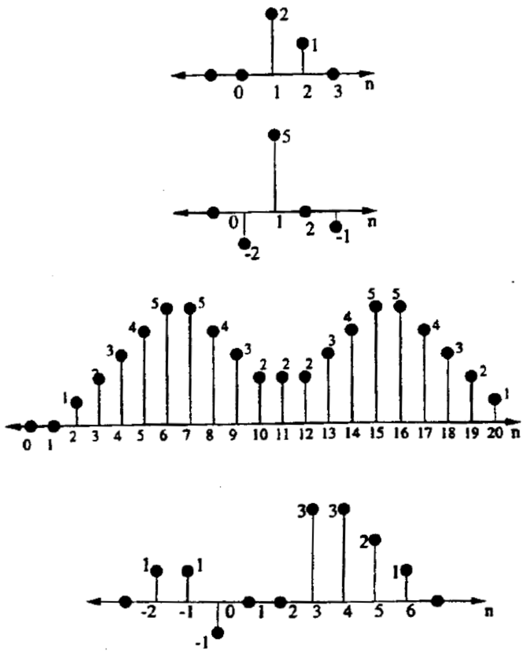
e quindi $y(n)$ deve essere zero per ogni n.

Esercizio 1.15

Per ogni coppia di sequenze nella figura seguente utilizzare la convoluzione discreta per calcolare la risposta all'ingresso $x(n)$ di un sistema LTI avente risposta all'impulso $h(n)$.



Soluzione dell'Esercizio 1.15



Usando il metodo grafico per eseguire la convoluzione discreta si ottengono le uscite a destra.
Per il caso (a) si può anche notare come

$$y(n) = \delta(n-1) * h(n) = h(n-1)$$

Esercizio 1.16

Di tre diversi sistemi si conosce una coppia ingresso-uscita, come indicato nel seguito. Determinare se ciascun sistema potrebbe essere lineare invariante alle traslazioni (LTI) e, se la risposta è affermativa, indicare se potrebbe esserci più di un sistema LTI con la data coppia di ingresso-uscita. Giustificare le risposte.

(a) $x(n) = (1/2)^n \quad \Rightarrow \quad y(n) = (1/4)^n$.

(b) $x(n) = (1/2)^n u(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = 2\,(1/2)^n u(n)$.

(c) $x(n) = e^{jn/8} \quad \Rightarrow \quad y(n) = 2\,e^{jn/8}$.

Soluzione dell'Esercizio 1.16

(a) $x(n) = (1/2)^n$: questo ingresso è una autofunzione dei sistemi LTI. Quindi, se il sistema fosse lineare, l'uscita sarebbe una replica di $x(n)$ moltiplicata per una qualche costante complessa. Siccome l'uscita è $y(n) = (1/4)^n$ il sistema NON è LTI.

(b) La trasformata dell'ingresso $x(n) = (1/2)^n\, u(n)$ vale

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - (1/2)\, e^{-j\omega}}$$

L'uscita è $y(n) = 2\, x(n)$, quindi

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - (1/2)\, e^{-j\omega}}$$

La risposta in frequenza del sistema, supposto LTI, è

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 2 \qquad \forall\omega$$

Ne concludiamo che il sistema può essere lineare, e se lo è, è univocamente determinato.

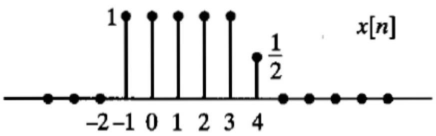
(c) Poichè $x(n) = e^{jn/8}$ è una autofunzione dei sistemi LTI, ci aspettiamo che l'uscita sia del tipo $y(n) = \gamma\, e^{jn/8}$ per un qualche γ complesso. Siccome, in questo caso, $\gamma = 2$ fornisce la $y(n)$ data, il sistema potrebbe essere LTI. Tuttavia non può essere univocamente determinato, in quanto l'unica informazione che abbiamo è che

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=1/8} = 2$$

Nota: Entrambi i sistemi (b) e (c) si comportano, relativamente all'ingresso specificato, come amplificatori lineari a guadagno 2. Nel caso (c) l'ingresso è tuttavia non nullo, in frequenza, per una sola ω, ovvero $\omega = 1/8$ e quindi non possiamo sapere come si comporta per le altre ω. Il sistema (b) ha un ingresso che copre tutte le ω, e quindi è univocamente determinato, posto che sia lineare.
Entrambi i sistemi potrebbero tuttavia non essere lineari, ad esempio potrebbero moltiplicare per due l'ingresso per valori in modulo minori di due, e farne la radice quadrata altrimenti.

Esercizio 1.17

Si consideri la seguente sequenza $x(n)$:



Disegnare accuratamente (indicando i valori sia sulle ascisse che sulle ordinate) le seguenti sequenze:

(a) $x(n-2)$

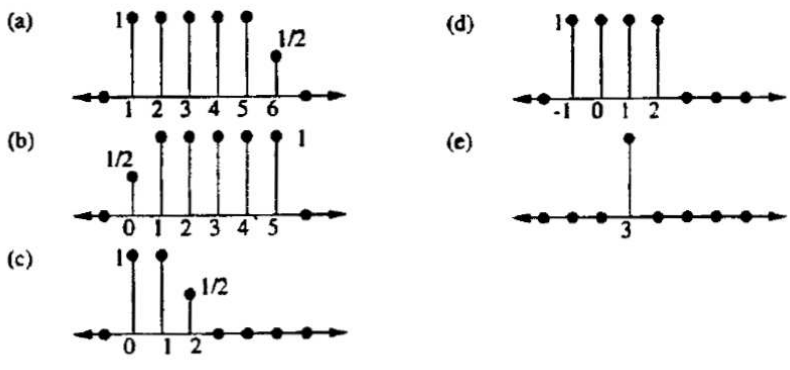
(b) $x(4-n)$

(c) $x(2n)$

(d) $x(n)\, u(2-n)$

(e) $x(n-1)\, \delta(n-3)$

Soluzione dell'Esercizio 1.17



Esercizio 1.18

Per ciascuno dei seguenti sistemi, determinare se il sistema è (1) stabile, (2) causale, (3) lineare e (4) tempo invariante.

(a) $T[x(n)] = \cos(\pi n)\, x(n)$

(b) $T[x(n)] = x(n^2)$

(c) $T[x(n)] = x(n) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

(d) $T[x(n)] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x(k)$

Soluzione dell'Esercizio 1.18

(a) $T[x(n)] = \cos(\pi n)\, x(n)$

Poichè il coseno può assumere solo i valori di ± 1, questa trasformazione è equivalente a $T[x(n)] = (-1)^n\, x(n)$. Quindi

(1) è stabile, perchè non cambia il modulo di $x(n)$ e quindi se l'ingresso è limitato anche l'uscita lo è.

(2) è causale, perchè l'uscita per un certo valore di n_0 dipende solo da $x(n_0)$.

(3) è lineare. Se $y_1(n) = T[x_1(n)] = \cos(\pi n)\, x_1(n)$ e $y_2(n) = T[x_2(n)] = \cos(\pi n)\, x_2(n)$ allora

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = a\cos(\pi n)\, x_1(n) + b\cos(\pi n)\, x_2(n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

(4) non è tempo invariante. Se $y(n) = T[x(n)] = \cos(\pi n)\, x(n)$ allora

$$T[x(n-1)] = (-1)^n\, x(n-1) \neq y(n-1) = (-1)^{n-1}\, x(n-1)$$

(b) $T[x(n)] = x(n^2)$

Questa trasformazione semplicemente "campiona" $x(n)$ in locazioni che sono quadrati di numeri interi. Ad esempio $T[x(3)] = x(9)$.

(1) Il sistema è stabile, visto che se $x(n)$ è limitato anche $x(n^2)$ lo è.

(2) Non è non causale, ad esempio $T[x(4)] = x(16)$.

(3) È lineare. Se $y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n^2)$ e $y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n^2)$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(n^2) + bx_2(n^2) = ay_1(n) + by_2(n)$$

(4) Non è tempo invariante. Se $y(n) = T[x(n)] = x(n^2)$ allora

$$T[x(n-1)] = x(n^2-1) \neq y(n-1)$$

(c) $T[x(n)] = x(n) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

Per prima cosa notiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = u(n)$, ovvero che $T[x(n)] = x(n)\, u(n)$. Questa trasformazione è allora stabile, causale, lineare ma non tempo invariante.

Per vedere che è tempo variante notiamo che $T[\delta(n)] = \delta(n)$ e $T[\delta(n+1)] = 0$.

(d) $T[x(n)] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x(k)$

(1) Non è stabile. Ad esempio $T[u(n)] = \infty$ per ogni n.

(2) Non è causale, visto che somma in avanti nel tempo.

(3) È lineare, visto che

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} ax_1(k) + bx_2(k) = a \sum_{k=n-1}^{\infty} x_1(k) + b \sum_{k=n-1}^{\infty} x_2(k)$$

(4) È tempo invariante. Se $y(n) = T[x(n)] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x(k)$ allora

$$T[x(n-n_0)] = \sum_{k=n-n_0-1}^{\infty} x(k) = y(n-n_0)$$

Esercizio 1.19

Si consideri un sistema discreto lineare invariante alle traslazioni con risposta all'impulso $h(n)$. Se l'ingresso $x(n)$ è periodico di periodo N, ossia se $x(n) = x(n+N)\ \forall n$, dimostrare che anche l'uscita deve essere periodica di periodo N.

Soluzione dell'Esercizio 1.19

Se l'ingresso $x[n]$ di un sistema LTI è periodico di periodo N, l'uscita sarà periodica dello steso periodo. Questo può essere provato utilizzando la tempo invarianza del sistema:

$$T\{x[n]\} = y[n] \tag{1.1}$$

Dato che il sistema è tempo invariante

$$T\{x[n+n_d]\} = y[n+n_d]$$

se $n_d = N$

$$T\{x[n+N]\} = y[n+N]$$

Utilizzando l'equazione 1.1 e poichè $x[n]$ è periodico di periodo N ($x[n+N] = x[n]$), è chiaro che

$$T\{x[n+N]\} = T\{x[n]\} = y[n+N] = y[n]$$

Esercizio 1.20

Si consideri un sistema con ingresso $x(n)$ e uscita $y(n)$. Le relazioni di ingresso-uscita del sistema sono specificate dalle due proprietà seguenti:

1. $y(n) - ay(n-1) = x(n)$
2. $y(0) = 1$

(a) Determinare se il sistema è tempo invariante.

(b) Determinare se il sistema è lineare.

(c) Si assuma che l'equazione alle differenze resti la stessa (proprietà 1), ma che il valore di $y(0)$ diventi zero ($y(0) = 0$). Questo cambia le risposte alle domande (a) e (b)?

Soluzione dell'Esercizio 1.20

(a) Determinare se il sistema è tempo invariante.

Per $x_1(n) = \delta(n)$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_1(1) &= a\,y(0) = a \end{aligned}$$

Per $x_2(n) = \delta(n-1)$

$$\begin{aligned} y_2(0) &= 1 \\ y_2(1) &= a\,y(0) + x_2(1) = a + 1 \neq y_1(0) \end{aligned}$$

Nonostante sia $x_2(n) = x_1(n-1)$ si ha che $y_2(n) \neq y_1(n-1)$. Quindi il sistema **non è tempo invariante**.

(b) Determinare se il sistema è lineare.

Un sistema lineare ha la proprietà che

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

Quindi, se l'ingresso viene moltiplicato per 2, anche l'uscita deve essere moltiplicata per due. Poichè $y(0) = 1$ per qualunque ingresso, il sistema **non è lineare**.

(c) Si assuma che l'equazione alle differenze resti la stessa (proprietà 1), ma che il valore di $y(0)$ diventi zero ($y(0) = 0$). Questo cambia le risposte alle domande (a) e (b)?

Sia $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$.

Per $n > 0$, ricordando che $y_3(n) = x_3(n) + a y_3(n-1)$,

$$\begin{array}{lcl}
[y_3(0) & = & 0] \\
y_3(1) & = & x_3(1) + a y_3(0) \; = \; x_3(1) \\
y_3(2) & = & x_3(2) + a y_3(1) \; = \; x_3(2) + a x_3(1) \\
y_3(3) & = & x_3(3) + a y_3(2) \; = \; x_3(3) + a x_3(2) + a^2 x_3(1) \\
\vdots & = & \vdots \\
y_3(n) & = & \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, x_3(n-k) \\
y_3(n) & = & \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, [\alpha x_1(n-k) \; + \; \beta x_2(n-k)] \\
y_3(n) & = & \alpha \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, x_1(n-k) \; + \; \beta \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, x_2(n-k) \; = \; \alpha \, y_1(n) + \beta \, y_2(n)
\end{array}$$

Per $n < 0$ possiamo scrivere l'equazione alle differenze come $y_3(n) = a^{-1} \, [y_3(n+1) - x_3(n+1)]$

$$\begin{array}{lcl}
[y_3(0) & = & 0] \\
y_3(-1) & = & a^{-1}[y_3(0) - x_3(0)] \; = \; -a^{-1} x_3(0) \\
y_3(-2) & = & a^{-1}[y_3(-1) - x_3(-1)] \; = \; -a^{-2} x_3(0) - a^{-1} x_3(-1) \\
y_3(-3) & = & a^{-1}[y_3(-2) - x_3(-2)] \; = \; -a^{-3} x_3(0) - a^{-2} x_3(-1) - a^{-1} x_3(-2) \\
\vdots & = & \vdots \\
y_3(n) & = & - \sum_{k=-1}^{n} a^k \, x_3(n-k) \\
y_3(n) & = & - \sum_{k=-1}^{n} a^k \, [\alpha x_1(n-k) \; + \; \beta x_2(n-k)] \\
y_3(n) & = & -\alpha \sum_{k=-1}^{n} a^k \, x_1(n-k) \; - \; \beta \sum_{k=-1}^{n} a^k \, x_2(n-k) \; = \; \alpha \, y_1(n) + \beta \, y_2(n)
\end{array}$$

Per $n = 0$

$$y_3(n) = y_1(n) = y_2(n) = 0$$

Quindi

$$y_3(n) \; = \; \alpha \, y_1(n) + \beta \, y_2(n) \qquad \forall n$$

e il sistema **è lineare**. Il sistema continua ad essere **non tempo invariante**.

Esercizio 1.21

Sia dato il sistema LTI avente risposta all'impulso

$$h(n) \; = \; \left(\frac{j}{2}\right)^n u(n) \qquad\qquad j = \sqrt{-1}$$

L'ingresso al sistema è $x(n) = \cos(\pi \, n) \, u(n)$.

(a) Trovare la risposta $y(n)$ del sistema.

(b) Trovare la risposta a regime del sistema. La risposta a regime è la risposta per grandi valori di n.

Soluzione dell'Esercizio 1.21

Dato l'ingresso

$$x(n) \; = \; \cos(\pi \, n) \, u(n) \; = \; (-1)^n \, u(n)$$

l'uscita si ottiene mediante convoluzione discreta:

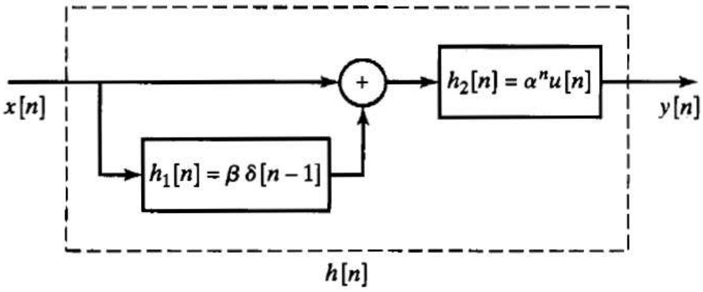
$$\begin{array}{lcl}
y(n) & = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j/2)^k \, u(k) \, (-1)^{n-k} \, u(n-k) \\
 & = & (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (j/2)^k \, (-1)^{-k} \\
 & = & (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-j/2)^k \\
 & = & (-1)^n \, \frac{1-(-j/2)^{n+1}}{1+j/2}
\end{array}$$

Per grandi n, $-(-j/2)^{n+1} \;\; \rightarrow \;\; 0$. Quindi la risposta a regime vale

$$y(n) \; = \; \frac{(-1)^n}{1 + j/2} \; = \; \frac{\cos(\pi n)}{1 + j/2}$$

Esercizio 1.22

Si consideri il sistema in figura



(a) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(b) Trovare la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ del sistema.

(c) Scrivere l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita.

(d) Il sistema è causale? Sotto quali condizioni è stabile?

Soluzione dell'Esercizio 1.22

(a) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

Dalla figura ed usando la linearità dell'operatore convoluzione:

$$y(n) \;=\; [x(n) + x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \;=\; x(n) * [\delta(n) + h_1(n)] * h_2(n)$$

Se $h(n)$ è la risposta all'impulso del sistema vale che $y(n) = x(n) * h(n)$. Confrontando con l'espressione precedente si ricava che

$$\begin{aligned} h(n) &= [\delta(n) + h_1(n)] * h_2(n) \\ &= h_2(n) + h_1(n) * h_2(n) \\ &= a^n u(n) + \beta\, a^{n-1}\, u(n-1) \end{aligned}$$

(b) Trovare la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ del sistema.

Trasformando la risposta all'impulso $h(n)$ trovata si ottiene

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\, u(n)\, e^{-j\omega n} \;+\; \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{(n-1)}\, u(n-1)\, e^{-j\omega n}$$

ovvero, con il cambio $l = n - 1$ nell'ultima sommatoria.

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-j\omega n} \;+\; \beta \sum_{n=1}^{\infty} a^{(n-1)}\, e^{-j\omega n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-j\omega n} \;+\; \beta \sum_{l=0}^{\infty} a^l\, e^{-j\omega(l+1)}$$

Raccogliendo

$$H(e^{j\omega}) \;=\; (1 + \beta\, e^{-j\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-j\omega n}$$

Quindi

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \frac{1 + \beta\, e^{-j\omega}}{1 - a e^{-j\omega}} \qquad \text{per } |a| < 1$$

Se $|a| \geq 1$ la serie non converge e non esiste la trasformata di Fourier.

Da notare che $h(n)$ è la somma di $a^n u(n)$, la cui trasformata è ben nota, con una versione scalata e traslata della stessa sequenza. Si potevano quindi utilizzare le proprietà della trasformata di Fourier per ottenere lo stesso risultato con meno calcoli.

(c) Scrivere l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+\beta\, e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

ovvero

$$Y(e^{j\omega})\,[1-ae^{-j\omega}] = X(e^{j\omega})\,[1+\beta\, e^{-j\omega}]$$

antitrasformando

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) + \beta x(n-1)$$

(d) Il sistema è causale? Sotto quali condizioni è stabile?

Poichè, come visto alla riposta (a), $h(n) = 0$ per $n < 0$, il sistema è causale.

Quindi la condizione di stabilità è la stessa condizione necessaria per l'esistenza della trasformata di Fourier della risposta all'impulso. Il sistema è stabile se $|a| < 1$.

Esercizio 1.23

Un sistema lineare invariante alle traslazioni è descritto dalla relazione ingresso-uscita seguente:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

(a) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(b) Il sistema è stabile?

(c) Trovare $H(e^{j\omega})$, la risposta in frequenza del sistema. Usare le identità trigonometriche per semplificarne l'espressione.

(d) Disegnare modulo e fase della risposta in frequenza del sistema $H(e^{j\omega})$.

(e) Si consideri ora un nuovo sistema LTI la cui risposta in frequenza vale $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$. Trovare la risposta all'impulso $h_1(n)$ del nuovo sistema.

Soluzione dell'Esercizio 1.23

(a) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) = x(n) * h(n) = \\ &= x(n) * [\,\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)\,] \\ h(n) &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) \end{aligned}$$

(b) Il sistema è stabile?

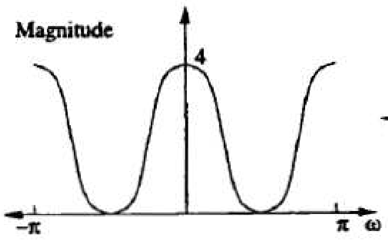
Si, $h(n)$ è finito e assolutamente sommabile.

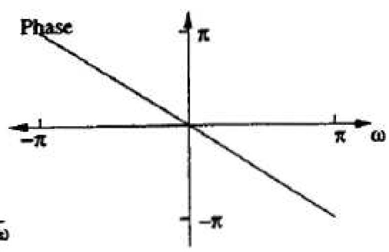
(c) Trovare $H(e^{j\omega})$, la risposta in frequenza del sistema. Usare le identità trigonometriche per semplificarne l'espressione.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 + 2\,e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} = \\ &= 2\,e^{-j\omega}\left(\tfrac{1}{2}\,e^{j\omega} + 1 + \tfrac{1}{2}\,e^{-j\omega}\right) = \\ &= 2\,e^{-j\omega}\,[\cos(\omega)+1] \end{aligned}$$

(d) Disegnare modulo e fase della risposta in frequenza del sistema $H(e^{j\omega})$.

$$|H(e^{j\omega})| = 2\,[\cos(\omega)+1] \qquad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega$$





(e) Si consideri ora un nuovo sistema LTI la cui risposta in frequenza vale $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$. Trovare la risposta all'impulso $h_1(n)$ del nuovo sistema.

$$\begin{aligned}
h(n) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H_1(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega \;= \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H(e^{j(\omega+\pi)})\, e^{j\omega n}\, d\omega \;= \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H(e^{j(\omega)})\, e^{j(\omega-\pi)n}\, d\omega \;= \\
&= e^{-j\pi n}\, \tfrac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H(e^{j(\omega)})\, e^{j\omega n}\, d\omega \;= \\
&= (-1)^n\, h(n) \;=\; \delta(n) \;-\; 2\,\delta(n-1) \;+\; \delta(n-2)
\end{aligned}$$

Esercizio 1.24

Si consideri un sistema discreto LTI avente risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ e corrispondente risposta all'impulso $h(n)$.

(a) Del sistema sappiamo che:

- **(i)** il sistema è causale,
- **(ii)** $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$,
- **(iii)** la DTFT, trasformata di Fourier per segnali a tempo discreto (Discrete Time Fourier Transform), ossia $H(e^{j\omega})$, della sequenza $h(n+1)$ è reale.

Usando le informazione sopra, mostrare che il sistema ha risposta all'impulso di durata finita.

(b) In aggiunta alle informazioni sopra, supponiamo di sapere anche che:

(iv)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2\, d\omega \;=\; 2$$

(v)

$$H(e^{j\pi}) \;=\; 0,$$

Ci sono ora abbastanza informazioni per identificare univocamente il sistema? Se la risposta è si trovare la risposta all'impulso $h(n)$. Se la risposta è no trovate quante più informazioni vi è possibile su $h(n)$.

Soluzione dell'Esercizio 1.24

(a) Del sistema sappiamo che:

- **(i)** il sistema è causale,
- **(ii)** $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$,
- **(iii)** la DTFT, trasformata discreta di Fourier, della sequenza $h(n+1)$ è reale.

Interpretiamo ciascuna delle informazioni sopra.

- **(i)** Se il sistema è causale, $h(n) = 0$ per $n < 0$.
- **(ii)** Se la trasformata di Fourier di $h(n)$ ha simmetria Hermitiana allora $h(n)$ è reale.
- **(iii)** Se la DTFT di $h(n+1)$ è reale allora $h(n+1)$ è pari.

Quindi ne deduciamo che $h(n)$ ha lunghezza 3 e quindi ha durata finita.

(b)

$$(iv) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2\, d\omega \;=\; 2$$

$$(v) \qquad H(e^{j\pi}) \;=\; 0$$

Dalla risposta (a) sappiamo che $h(n)$ ha lunghezza tre ed è pari attorno a $h(1)$. Sia $h(0) = h(2) = a$ e $h(1) = b$. Da (iv) e usando il teorema di Parseval,

$$2a^2 + b^2 = 2$$

Da (v) deduciamo che

$$2a - b = 0$$

(*vedi nota successiva*).

Risolvendo il sistema si ottiene

$$h(0) = h(2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad h(1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

oppure

$$h(0) = h(2) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad h(1) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Il sistema non può essere identificato univocamente, ma può essere solo uno dei due specificati sopra.

Nota. Per evitare domande a lezione vediamo come si arriva alle equazioni sopra.
Il teorema di Parseval (versione applicabile a questo caso), dice che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,Y^*(e^{j\omega})\,d\omega$$

ovvero

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

e quindi, considerando che $h(n)$ ha lunghezza tre,

$$h^2(0) + h^2(1) + h^2(2) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2a^2 + b^2 = 2$$

Seconda equazione:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\,e^{-j\omega} = \sum_{n=0}^{3} h(n)\,e^{-j\omega}$$

$$H(e^{j\pi}) = \sum_{n=0}^{3} h(n)\,e^{-j\pi} = h(0) - h(1) + h(2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2a - b = 0$$

Nota 2. Avrei potuto scrivere la condizione (iv) anche come

$$(iv) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H^2(e^{j\omega})\,d\omega = 2$$

visto che, avendo $H(e^{j\omega})$ simmetria Hermitiana (condizione (ii)), è la stessa cosa.
Infatti $|H()|^2 = H()\,H^*() = H()H() = H^2()$. Ma non sono così cattivo...

Esercizio 1.25

La risposta in frequenza di un sistema LTI vale

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/4} \qquad -\pi < \omega < \pi$$

Trovare l'uscita del sistema, $y(n)$, quando l'ingresso è $x(n) = \cos(5\pi n/2)$. Esprimere il risultato nella forma più semplice possibile.

Soluzione dell'Esercizio 1.25

Scriviamo l'ingresso nella forma equivalente

$$x(n) = \cos(5\pi n/2) = \cos(\pi n/2) = \frac{e^{j\pi n/2}}{2} + \frac{e^{-j\pi n/2}}{2}$$

Utilizzando il fatto che gli esponenziali complessi sono autofunzioni dei sistemi LTI otteniamo

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[e^{-j\pi n/4}\,e^{j\pi n/2} + e^{j\pi n/4}\,e^{-j\pi n/2}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j\pi(\frac{n}{2}-\frac{1}{4})} + e^{-j\pi(\frac{n}{2}-\frac{1}{4})}\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{4}\right)\right]$$

In alternativa si poteva considerare la propritá della traslazione della trasformata di Fourier:

$$X(e^{j\omega})\cdot e^{-j\omega/4} \quad \rightarrow \quad x(n-1/4)$$

Capitolo 2

Trasformata *z*

Esercizio 2.1

Calcolare la trasformata z, compresa la regione di convergenza, per ciascuna delle seguenti sequenze:

(a) $(1/2)^n\, u(n)$

(b) $-(1/2)^n\, u(-n-1)$

(c) $(1/2)^n\, u(-n)$

(d) $\delta(n)$

(e) $\delta(n-1)$

(f) $\delta(n+1)$

(g) $(1/2)^n\, [\, u(n) \;-\; u(n-10)\,]$

Soluzione dell'Esercizio 2.1

(a)

$$\mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

(b)

$$\mathcal{Z}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right] = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n = -\frac{2z}{1-2z} = \frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

(c)

$$\mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{0}(2z)^n = \frac{1}{1-2z} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

(d)

$$\mathcal{Z}\,[\delta(n)] = z^0 = 1 \qquad \text{per ogni } z$$

(e)

$$\mathcal{Z}\,[\delta(n-1)] = z^{-1} \qquad |z| > 0$$

(f)

$$\mathcal{Z}\,[\delta(n+1)] = z^{+1} \qquad 0 \le |z| < \infty$$

(g)

$$\mathcal{Z}\,\{(1/2)^n\,[\,u(n) \;-\; u(n-10)\,]\} = \sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}} \qquad |z| > 0$$

Esercizio 2.2

Calcolare la trasformata z, compresa la regione di convergenza, della sequenza:

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & 0 \le n \le N-1 \\ N & n \ge N \end{cases}$$

Soluzione dell'Esercizio 2.2

La sequenza $x(n)$ può essere scritta come

$$x(n) = n\,u(n) - (n-N)\,u(n-N)$$

Ora possiamo trasformare a pezzi, iniziando da $n\,u(n)$. Dalle proprietà della trasformata z sappiamo che

$$\mathcal{Z}[n\,x(n)] = -z\,\frac{dX(z)}{dz}$$

e poichè la trasformata di $u(n)$ vale $1/(1-z^{-1})$,

$$\mathcal{Z}[n\,u(n)] = -z\,\frac{d}{dz}\,\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \qquad |z| > 1$$

Utilizzando la proprietà della traslazione

$$\mathcal{Z}[x(n+n_0)] = z^{n_0}\,X(z)$$

si trova che

$$\mathcal{Z}[(n-N)\,u(n-N)] = \frac{z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} \qquad |z| > 1$$

Quindi

$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}\,(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2} \qquad |z| > 1$$

Esercizio 2.3

Calcolare la trasformata z, compresa la regione di convergenza, di ciascuna delle seguenti sequenze. Includere nella risposta la regione di convergenza nel piano z e disegnare la posizione dei poli e degli zeri.
Esprimere le somme in forma chiusa. α può essere complessa.

(a) $x_a(n) = \alpha^{|n|}, \quad 0 < |\alpha| < 1$

(b) $x_b(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

(c) $x_c(n) = \begin{cases} n & 0 \le n \le N \\ 2N-n & N+1 \le n \le 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

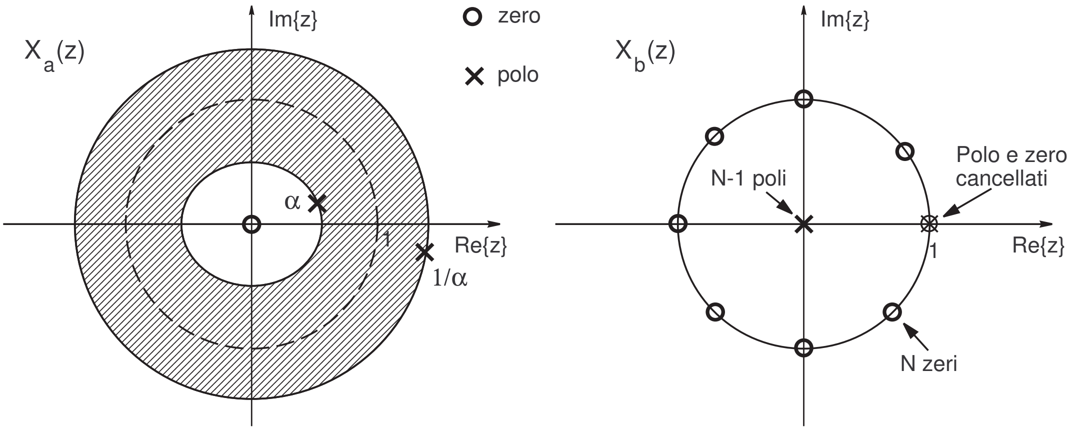
SUGGERIMENTO: notare che $x_b(n)$ è una sequenza rettangolare e che $x_c(n)$ è una sequenza triangolare. Esprimere $x_c(n)$ in termini di $x_b(n)$.

Soluzione dell'Esercizio 2.3

(a) $x_a(n) = \alpha^{|n|}, \quad 0 < |\alpha| < 1$

$$\begin{aligned} X_a(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \\ &= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z\,(1-\alpha^2)}{(1-az)\,(z-a)} \qquad |\alpha| < |z| < \frac{1}{|\alpha|} \end{aligned}$$

$X_a(z)$ ha due poli, uno in $z = \alpha$ e uno in $z = (1/\alpha)$ e uno zero in zero, come mostrato in figura.



(b) $x_b(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$X_b(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)} \qquad z \neq 0$$

Nella figura sopra sono rappresentati poli e zeri.

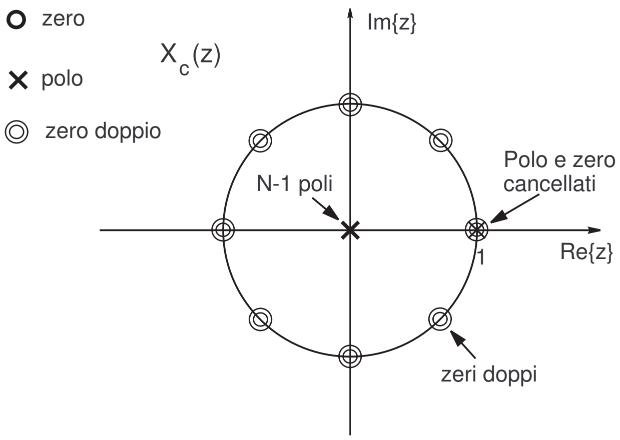
(c) $x_c(n) = \begin{cases} n & 0 \le n \le N \\ 2N - n & N+1 \le n \le 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Possiamo esprimere $x_c(n)$ come convoluzione a partire da $x_b(n)$:

$$x_c(n) = x_b(n-1) * x_b(n) \qquad \Rightarrow \qquad X_c(z) = z^{-1} X_b(z) X_b(z)$$

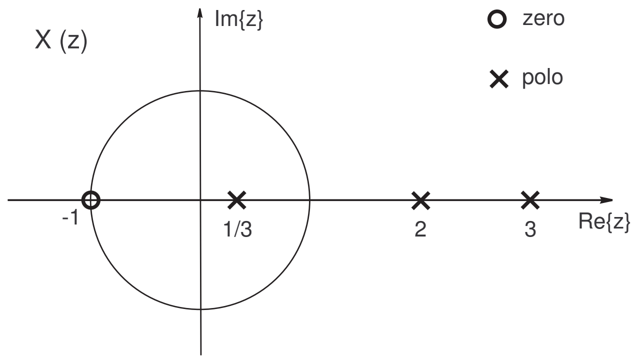
$$X_c(z) = z^{-1} \left[\frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)} \right]^2 = \frac{1}{z^{2N-1}} \left[\frac{z^N - 1}{(z-1)} \right]^2 \qquad z \neq 0,\ 1$$

La posizione di zeri e poli è in figura.



Esercizio 2.4

Si consideri $X(z)$, trasformata z della sequenza $x(n)$, avente zeri e poli come in figura:



(a) Determinare la ROC (regione di convergenza) di $X(z)$ sapendo che esiste la trasformata di Fourier della sequenza $x(n)$. Dire se la sequenza $x(n)$ corrispondente alla ROC individuata è monolatera destra, monolatera sinistra o bilatera.

(b) Quante sono le possibili sequenze **bilatere** $x(n)$ che hanno trasformata z con gli zeri e i poli in figura?

(c) È possibile trovare una ROC tale che la sequenza $x(n)$ corrispondente sia la risposta all'impulso di un sistema sia stabile che causale? Se la risposta è si indicare la ROC.

Soluzione dell'Esercizio 2.4

(a) Affinchè esista la trasformata di Fourier della sequenza $x(n)$ è necessario che la sua trasformata z abbia una ROC che include il circolo unitario: quindi $1/3 < |z| < 2$. Essendo la regione di convergenza una corona circolare con estremi limitati che non include lo zero la sequenza corrispondente è bilatera.

(b) Ci sono due sole scelte possibili: o $1/3 < |z| < 2$ oppure $2 < |z| < 3$.

(c) La regione di convergenza deve essere una regione connessa. Per la stabilità la ROC deve comprendere il circolo unitario. Per la causalità la ROC deve essere esterna al polo a maggior distanza dall'origine. Queste condizioni non possono essere soddisfatte da nessuna delle possibili ROC.

Esercizio 2.5

Trovare la sequenza $x(n)$ che ha per trasformata z

$$X(z) = (1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1})$$

Soluzione dell'Esercizio 2.5

$$\begin{aligned} X(z) &= (1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1}) = \\ &= 2z + 5 - 4z^{-1} - 3z^{-2} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \end{aligned}$$

Quindi

$$x(n) = 2\,\delta(n+1) + 5\,\delta(n) - 4\,\delta(n-1) - 3\,\delta(n-2)$$

Esercizio 2.6

L'ingresso ad un sistema causale LTI è

$$x(n) = u(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

La relativa uscita ha trasformata z

$$Y(z) = \frac{-(1/2)z^{-1}}{[1-(1/2)z^{-1}]\,[1+z^{-1}]}$$

(a) Trovare $H(z)$, la trasformata z della risposta all'impulso del sistema. Specificare la sua regione di convergenza.

(b) Quale è la regione di convergenza di $Y(z)$?

(c) Trovare $y(n)$.

Soluzione dell'Esercizio 2.6

(a) La trasformata z dell'ingresso vale

$$X(z) = \frac{-1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

Per trovare $H(z)$ usiamo il fatto che $H(z) = Y(z)/X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-(1/2)\,z^{-1}}{(1-(1/2)z^{-1})\,(1+z^{-1})} \cdot \frac{[1-(1/2)z^{-1}]\,[1+z^{-1}]}{-(1/2)z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

e poichè il sistema è causale la ROC è $|z| > 1$.

(b) Poichè il polo in $z = 1$ di $X(z)$ viene cancellato dallo zero corrispondente di $H(z)$ la ROC di $Y(z)$ è $|z| > 1$.

(c)

$$Y(z) = \frac{-1/3}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{1/3}{1+z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

quindi

$$y(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}(-1)^n u(n)$$

Esercizio 2.7

La funzione di trasferimento di un sistema LTI causale vale

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+(3/4)z^{-1}}$$

L'ingresso al sistema è

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + u(-n-1)$$

(a) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(b) Trovare l'uscita $y(n)$ del sistema.

(c) Il sistema è stabile? Ossia, $h(n)$ è assolutamente sommabile?

Soluzione dell'Esercizio 2.7

(a) Poichè il sistema è causale

$$h(n) = \left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

(b) La trasformata z dell'ingresso vale

$$X(z) = \frac{1}{1-(1/3)z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{-2/3z^{-1}}{(1-(1/3)z^{-1})\,(1-z^{-1})} \qquad \frac{1}{3} < |z| < 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{-(2/3)\,z^{-1}}{(1-(1/3)z^{-1})\,(1+(3/4)z^{-1})} \qquad (3/4) < |z|$$

ovvero

$$Y(z) \;=\; \frac{-\,(8/13)}{1-(1/3)z^{-1}} \;+\; \frac{8/13}{1+(3/4)z^{-1})} \qquad\qquad (3/4) < |z|$$

e quindi l'uscita vale

$$y(n) \;=\; -\,\frac{8}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n) \;+\; \frac{8}{13}\left(-\,\frac{3}{4}\right)^{n} u(n)$$

(c) Poichè la ROC di $H(z)$ è $(3/4) < |z|$ essa include il circolo unitario: il sistema è stabile e la risposta all'impulso è assolutamente sommabile.

Esercizio 2.8

Una sequenza causale $g(n)$ ha la trasformata z

$$G(z) \;=\; \sin(z^{-1})\,(1+3z^{-2}+2z^{-4})$$

Calcolare $g(11)$.
Suggerimento: utilizzare l'espansione in serie di potenze per $\sin(z^{-1})$.

Soluzione dell'Esercizio 2.8

$$\begin{aligned}
G(z) \;&=\; \sin(z^{-1})\,(1+3z^{-2}+2z^{-4}) \;= \\
&=\; \left(z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \frac{z^{-7}}{7!} + \frac{z^{-9}}{9!} - \frac{z^{-11}}{11!} + \ldots\right)\left(1+3z^{-2}+2z^{-4}\right) \;= \qquad (2.1)\\
&=\; \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\left(1+3z^{-2}+2z^{-4}\right) \;= \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\,z^{-n} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Quindi $g(11)$ è semplicemente il coefficiente davanti a z^{-11} (vedi equazione 2.2), ovvero

$$g(11) \;=\; -\frac{1}{11!} + \frac{3}{9!} - \frac{2}{7!}$$

Spiegazione se proprio non ci arrivate: dalla 2.1 si nota che gli unici termini del polinomio di grado -11 sono

$$-\frac{z^{-11}}{11!}\cdot 1 \;+\; \frac{z^{-9}}{9!}\cdot 3\,z^{-2} \;-\; \frac{z^{-7}}{7!}\cdot 2z^{-4}$$

e la sommatoria nella 2.2 parte da zero perchè la sequenza è causale.

Esercizio 2.9

Se

$$H(z) \;=\; \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad h(n) \;=\; A_1\,\alpha_1^n\,u(n) \;+\; A_2\,\alpha_2^n\,u(n)$$

trovare i valori di A_1, α_1, A_2 e α_2.

Soluzione dell'Esercizio 2.9

$$\begin{aligned}
H(z) \;&=\; \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \;= \\
&=\; \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})\,(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \;= \\
&=\; \frac{0.5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \;+\; \frac{0.5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}
\end{aligned}$$

La trasformata inversa vale

$$h(n) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) \;+\; \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$$

E quindi $A_1 = A_2 = 1/2$, $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = -1/2$.

Esercizio 2.10

Si consideri un sistema LTI con ingresso $x(n)$ e uscita $y(n)$ che soddisfa la seguente equazione alle differenze

$$y(n) - \frac{5}{2}y(n-1) + y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Calcolare tutti i possibili valori della risposta all'impulso $h(n)$ per $n = 0$.

Soluzione dell'Esercizio 2.10

Il problema si risolve calcolando la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema e trovando le differenti risposte all'impulso al variare della regione di convergenza (ROC).
Considerando la trasformata **z** dell'equazione alle differenze otteniamo

$$Y(z)\,(1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}) = X(z)\,(1 - z^{-1})$$

da cui

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - (1/2)z^{-1})} = \frac{2/3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1/3}{1 - (1/2)z^{-1}}$$

Il sistema ha due poli in $1/2$ e in 2. Se la regione di convergenza è

(a) $|z| < 1/2$

$$h(n) = -\frac{2}{3}2^n u(-n-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \qquad \Rightarrow \qquad h(0) = 0$$

(b) $1/2 < |z| < 2$

$$h(n) = -\frac{2}{3}2^n u(-n-1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad \Rightarrow \qquad h(0) = \frac{1}{3}$$

(c) $|z| > 2$

$$h(n) = \frac{2}{3}2^n u(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad \Rightarrow \qquad h(0) = 1$$

C'è ancora una possibilità, ovvero che la risposta all'impulso sia

$$h(n) = \frac{2}{3}2^n u(n) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \qquad \Rightarrow \qquad h(0) = \frac{2}{3}$$

Questa risposta corrisponde a una regione di convergenza disgiunta. Una trasformata z deve avere una ROC connessa, quindi espressa in questo modo non ha significato.
Possiamo però ipotizzare due sistemi in parallelo, ciascuno con la sua trasformata z con ROC legittima, ovvero

$$h_1(n) = \frac{2}{3}2^n u(n) \qquad \Rightarrow \qquad H_1(z) = \frac{2/3}{1 - 2z^{-1}} \qquad |z| > 2$$

$$h_2(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \qquad \Rightarrow \qquad H_2(z) = \frac{1/3}{1 - (1/2)z^{-1}} \qquad |z| < 1/2$$

Nulla mi vieta di mettere i due sistemi in parallelo, $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$, per cui $h(0) = 2/3$. Ma il sistema formato dal parallelo dei sistemi aventi risposta all'impulso $h_1(n)$ e $h_2(n)$ non ha trasformata z. Pare anche impossibile definire delle condizioni iniziali per l'equazione alle differenze data nel testo del problema che porti a questa soluzione. Inoltre, come evidente, nessuno dei due sistemi ha risposta in frequenza (sono entrambi sistemi instabili).

Approfondimento Il problema come affrontato in questa soluzione ha un interesse molto limitato, nel senso che siamo di solito interessati a sistemi causali (e stabili) per cui tali complicazioni non esistono. Giusto per completezza possiamo analizzare in dettaglio cosa succede, ma non siete tenuti a studiarlo...
Supponiamo di avere due sistemi in parallelo, sistema 1 e sistema 2, aventi funzione di trasferimento e equazione alle differenze come sotto specificato:

$$H_1(z) = \frac{2/3}{1-2z^{-1}} \qquad \Rightarrow \qquad y_1(n) - 2y_1(n-1) = \frac{2}{3}x(n)$$

$$H_2(z) = \frac{1/3}{1-(1/2)z^{-1}} \qquad \Rightarrow \qquad y_2(n) - \frac{1}{2}y_2(n-1) = \frac{1}{3}x(n)$$

$H_1(z)$ ha un polo in 2, $H_2(z)$ ha un polo in $1/2$. Per ciascuno dei due sistemi è necessario definire la ROC della corrispondente funzione di trasferimento o, in alternativa, le condizioni iniziali della equazione alle differenze. Per ciascun sistema possiamo scegliere sia una risposta causale che una non causale, che portano ai sistemi

$$H_1(z) = \frac{2/3}{1-2z^{-1}} \quad |z|>2 \quad h_{1c}(n) = \frac{2}{3}\,2^n u(n) \quad y_1(n) - 2y_1(n-1) = \frac{2}{3}x(n) \quad \text{causale}$$

$$H_1(z) = \frac{2/3}{1-2z^{-1}} \quad |z|<2 \quad h_{1n}(n) = -\frac{2}{3}\,2^n u(-n-1) \quad y_1(n) - 2y_1(n-1) = \frac{2}{3}x(n) \quad \text{anticausale}$$

$$H_2(z) = \frac{1/3}{1-(1/2)z^{-1}} \quad |z|>1/2 \quad h_{2c}(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad y_2(n) - \frac{1}{2}y_2(n-1) = \frac{1}{3}x(n) \quad \text{causale}$$

$$H_2(z) = \frac{1/3}{1-(1/2)z^{-1}} \quad |z|<1/2 \quad h_{2n}(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \quad y_2(n) - \frac{1}{2}y_2(n-1) = \frac{1}{3}x(n) \quad \text{anticausale}$$

Possiamo quindi definire quattro diversi sistemi:

sistema A	$h_{1c}(n) + h_{2c}(n)$	causale, instabile
sistema B	$h_{1n}(n) + h_{2n}(n)$	anticausale, instabile
sistema C	$h_{1n}(n) + h_{2c}(n)$	misto, stabile
sistema D	$h_{1c}(n) + h_{2n}(n)$	misto, instabile, no z

I sistemi A, B, C possono essere descritti da una funzione di trasferimento, il sistema D no. Per quanto riguarda l'equazione alle differenze del sistema somma essa è quella nel testo del problema, ma per i sistemi C e D non vi sono condizioni iniziali possibili (quindi tali sistemi non possono essere descritti mediante equazione alle differenze). Il sistema C ha risposta in frequenza, gli altri, che sono instabili, no.
Come ultima cosa verifichiamo che il parallelo di due sistemi abbia l'equazione alle differenze data.
Sommiamo i sistemi, l'equazione alle differenze si ottiene da $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$:

$$y_1(n) - 2y_1(n-1) = \frac{2}{3}x(n) \qquad y_2(n) - \frac{1}{2}y_2(n-1) = \frac{1}{3}x(n) \qquad \text{sommiamo le due equazioni}$$

$$[y_1(n) + y_2(n)] - 2y_1(n-1) - \frac{1}{2}y_2(n-1) = x(n) \qquad y_1(n) + y_2(n) = y(n)$$

$$y(n) - \frac{1}{2}[y_1(n-1) + y_2(n-1)] - \frac{3}{2}y_1(n-1) = x(n) \qquad y_1(n-1) + y_2(n-1) = y(n-1)$$

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{3}{2}y_1(n-1) = x(n) \qquad \text{ricaviamo } y_1(n-1)$$

$$y_1(n-1) = \frac{2}{3}y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) - \frac{2}{3}x(n) \qquad \text{e quindi } y_1(n)$$

$$y_1(n) = \frac{2}{3}y(n+1) - \frac{1}{3}y(n) - \frac{2}{3}x(n+1) \qquad \text{inseriamo nella prima equazione}$$

$$\frac{2}{3}y(n+1) - \frac{1}{3}y(n) - \frac{2}{3}x(n+1) - 2[\frac{2}{3}y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) - \frac{2}{3}x(n)] = \frac{2}{3}x(n)$$

$$\frac{2}{3}y(n+1) - \frac{1}{3}y(n) - \frac{2}{3}x(n+1) - \frac{4}{3}y(n) + \frac{2}{3}y(n-1) + \frac{4}{3}x(n) = \frac{2}{3}x(n)$$

$$\frac{2}{3}y(n+1) - \frac{5}{3}y(n) + \frac{2}{3}y(n-1) = \frac{2}{3}x(n+1) - \frac{2}{3}x(n)$$

Da cui si ricava immediatamente che

$$y(n) - \frac{5}{2}y(n-1) + y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Abbiamo quindi verificato che la somma (parallelo) dei due sistemi ha l'equazione alle differenze specificata nel testo.

Esercizio 2.11

Un sistema causale LTI ha funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1}))}$$

(a) Trovare $h(n)$, risposta all'impulso del sistema.

(b) Trovare l'uscita $y(n)$ del sistema per l'ingresso

$$x(n) = e^{j(\pi/2)n}$$

Soluzione dell'Esercizio 2.11

(a)

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1}))} = -2 + \frac{1/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8/3}{1 - z^{-1}}$$

antitrasformando

$$h(n) = -2\delta(n) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{8}{3}u(n)$$

(b) poichè l'ingresso è una autofunzione del sistema sappiamo che

$$y(n) = H\left(e^{j\pi/2}\right) x(n)$$

dove

$$H\left(e^{j\pi/2}\right) = -2 + \frac{1/3}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} + \frac{8/3}{1 - e^{-j\pi/2}} = -2 + \frac{1/3}{1 - \frac{1}{2}j} + \frac{8/3}{1 + j} = \frac{-2j}{\frac{3}{2} + \frac{j}{2}}$$

e quindi

$$y(n) = \frac{-2j}{\frac{3}{2} + \frac{j}{2}} e^{j(\pi/2)n}$$

Esercizio 2.12

Per ciascuna delle seguenti coppie di trasformate $X(z)$ dell'ingresso e funzioni di trasferimento $H(z)$ trovare la regione di convergenza della trasformata $Y(z)$ dell'uscita:

(a)

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > 1/2$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \qquad |z| > 1/4$$

(b)

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \qquad |z| < 2$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > 1/3$$

(c)

$$X(z) \;=\; \frac{1}{(1-\frac{1}{5}\,z^{-1})\,(1+3\,z^{-1})} \qquad \frac{1}{5} < |z| < 3$$

$$H(z) \;=\; \frac{1+3\,z^{-1}}{1+\frac{1}{3}\,z^{-1}} \qquad |z| > 1/3$$

Soluzione dell'Esercizio 2.12

La ROC di $Y(z)$ include l'intersezione delle ROC di $H(z)$ e $X(z)$.

(a) La ROC di $Y(z)$ è $|z| > 1/2$.

(b) La ROC di $Y(z)$ è $(1/3) < |z| < 2$.

(c) La ROC di $Y(z)$ è $|z| > 1/3$, poichè lo zero in posizione 3 di $H(z)$ cancella il polo nella stessa posizione di $X(z)$.

Esercizio 2.13

Si consideri un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(n) \;=\; a^n\,u(n)$$

avente in ingresso la sequenza

$$x(n) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 \;\le\; n \;\le\; (N-1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(a) Calcolare l'uscita $y(n)$ valutando direttamente la convoluzione discreta di $x(n)$ con $h(n)$.

(b) Calcolare l'uscita $y(n)$ calcolando la trasformata z inversa del prodotto delle trasformate z di $x(n)$ e $h(n)$.

Soluzione dell'Esercizio 2.13

(a)

$$y(n) \;=\; 0 \qquad n < 0$$

$$y(n) \;=\; \sum_{k=0}^{n} x(k)\,h(n-k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \;=\; a^n\,\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \;=\; \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$y(n) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,h(n-k) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} \;=\; a^n\,\frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} \;=\; a^{n+1}\,\frac{1-a^{-N}}{a-1} \qquad n \ge N$$

(b)

$$H(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,z^{-n} \;=\; \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$X(z) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \;=\; \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 0$$

$$Y(z) \;=\; \frac{1-z^{-N}}{(1-az^{-1})\,(1-z^{-1})} \;=\; \frac{1}{(1-az^{-1})\,(1-z^{-1})} \;-\; \frac{z^{-N}}{(1-az^{-1})\,(1-z^{-1})} \qquad |z| > |a|$$

e siccome

$$\frac{1}{(1-az^{-1})\,(1-z^{-1})} \;=\; \frac{\frac{1}{1-a^{-1}}}{1-az^{-1}} \;+\; \frac{\frac{1}{1-a}}{1-z^{-1}} \;=\; \left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}} \;-\; \frac{a}{1-az^{-1}}\right)$$

allora

$$y(n) = \left(\frac{1}{1-a}\right)\left[u(n) - a^{n+1}u(n) - u(n-N) - a^{n-N+1}u(n-N)\right] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,u(n) - \frac{1-a^{n-N+1}}{1-a}\,u(n-N)$$

ovvero

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0 \le n \le N-1 \\ a^{n+1}\left(\frac{1-a^{-N}}{a-1}\right) & n \ge N \end{cases}$$

Esercizio 2.14

Se l'ingresso di un sistema LTI vale $x(n) = u(n)$ l'uscita è

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n+1)$$

(a) Trovare $H(z)$, la trasformata z della risposta all'impulso del sistema, e disegnare il digramma degli zeri e dei poli.

(b) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema

(c) Il sistema è stabile?

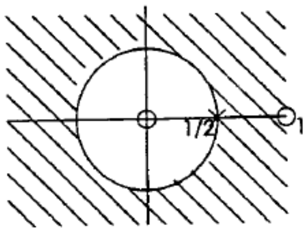
(d) Il sistema è causale?

Soluzione dell'Esercizio 2.14

$$x(n) = u(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n+1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) = \frac{4z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > 1/2$$

(a) $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4z(1-z^{-1})}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > 1/2$$



(b)

$$H(z) = \frac{4z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > 1/2$$

$$h(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) = 4\,\delta(n+1) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$$

(c) La ROC di $H(z)$ include il circolo unitario, quindi il sistema è stabile.

(d) Dalla risposta (b) possiamo vedere che $h(n)$ è diverso da zero per $n = -1$, quindi il sistema non è causale.

Capitolo 3

Campionamento

Esercizio 3.1

Il segnale a tempo continuo

$$x_c(t) \;=\; \sin(2\pi\, 100\, t)$$

viene campionato con periodo di campionamento $T = 1/400$ sec. per ottenere il segnale a tempo discreto $x(n)$. Quale è il segnale risultante $x(n)$?

Soluzione dell'Esercizio 3.1

$$x(n) \;=\; x_c(nT) \;=\; \sin\left(2\pi\, 100\, \frac{n}{400}\right) \;=\; \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

Esercizio 3.2

La sequenza

$$x(n) \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) \qquad\qquad -\infty < n < \infty$$

è stata ottenuta campionando il segnale a tempo continuo

$$x_c(t) \;=\; \cos(\Omega_0 t) \qquad\qquad -\infty < t < \infty$$

alla frequenza di campionamento di 1000 campioni al secondo. Quali sono i possibili valori di Ω_0 che danno origine alla sequenza $x(n)$?

Soluzione dell'Esercizio 3.2

Poichè

$$x(n) \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) \;=\; x_c(nT) \;=\; \cos(\Omega_0 n T) \;=\; \cos\left(\frac{\Omega_0}{1000}\, n\right)$$

la prima ovvia soluzione è

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\Omega_0}{1000} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_0 = 250\,\pi$$

Ma ci sono altre soluzioni. Poichè $x(n)$ è indistinguibile dalle sequenze

$$x_k(n) \;=\; \cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) n\right] \qquad \forall k \text{ intero}$$

i possibili valori di Ω_0 che danno origine a $x(n)$ sono

$$\Omega_0 \;=\; 250\pi \;+\; k\, 2000\,\pi \qquad \forall k \text{ intero}$$

Ovviamente $x(n)$ rappresenta correttamente il segnale $x_c(t)$ solo per $\Omega_0 = 250\pi$, cioè per $k = 0$: gli altri valori di Ω_0 danno origine a aliasing, ovvero da $x(n)$ non è possibile ricostruire $x_c(t)$.
Lo stesso risultato si può ottenere analizzando quello che accade nel dominio di Fourier.
La trasformata di Fourier del segnale $x_c(t)$ vale

$$X_c(j\Omega) \;=\; \pi\,\delta(\Omega - \Omega_0) \;+\; \pi\,\delta(\Omega + \Omega_0)$$

mentre la trasformata di $x(n)$ è

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \pi/4 + 2\pi r) + \delta(\omega + \pi/4 + 2\pi r)]$$

La relazione che lega le due trasformate a causa del campionamento vale

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Unendo le equazioni precedenti si ha

$$\begin{aligned}
\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \pi/4 + 2\pi r) + \delta(\omega + \pi/4 + 2\pi r)] &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\pi\,\delta\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} - \Omega_0\right) + \pi\,\delta\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} + \Omega_0\right)\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\pi\,\delta\,(\omega + 2\pi m - T\Omega_0) + \pi\,\delta\,(\omega + 2\pi m + T\Omega_0)]
\end{aligned}$$

Avendo usato nell'ultimo passaggio sia la nota proprietà $\delta(at) = \delta(t)/|a|$ che il cambio di variabile $k = -m$. Anche ora si vede immediatamente la prima soluzione: $T\Omega_0 = \pi/4$, cioè $\Omega_0 = 250\pi$. Per le altre si nota come gli impulsi nella prima sommatoria (quella su r) sono posizionati in $\pm\pi/4$ intorno all'origine e poi si replicano periodicamente attorno ai multipli positivi e negativi di 2π. Gli impulsi dell'ultima sommatoria sono anch'essi a coppie e si replicano ogni 2π: affinchè si posizionino esattamente dove sono posizionati quelli "su r" è sufficiente che valga la relazione $T\Omega_0 + 2\pi m = \pi/4$, ovvero che $\Omega_0 = -2000\pi m + 250\pi$ per qualsiasi valore di m intero, per cui la soluzione si può anche scrivere $\Omega_0 = 2000\pi k + 250\pi$ per qualsiasi k intero.

Esercizio 3.3

Il segnale a tempo continuo

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

viene campionato con periodo di campionamento T ottenendo il segnale a tempo discreto

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

(a) Determinare una scelta di T consistente con l'informazione data.

(b) La scelta di T nella risposta (a) è unica? Se lo è spiegare perché. Se non lo è specificare una diversa scelta di T consistente con le informazioni date.

Soluzione dell'Esercizio 3.3

(a) Poiché $x(n) = x_c(nT)$

$$\frac{\pi n}{3} = 4000\pi nT \qquad \Rightarrow \quad T = 1/12000$$

(b) La scelta non è unica. Ad esempio poiché

$$\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi n}{3}\right)$$

una diversa scelta compatibile é $T = 7/12000$.

Esercizio 3.4

Il segnale a tempo continuo

$$x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$$

viene campionato con periodo di campionamento T ottenendo il segnale a tempo discreto

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

(a) Determinare una scelta di T consistente con l'informazione data.

(b) La scelta di T nella risposta (a) è unica? Se lo è spiegare perché. Se non lo è specificare una diversa scelta di T consistente con le informazioni date.

Soluzione dell'Esercizio 3.4

(a) Una facile scelta è $T = 1/100$, infatti

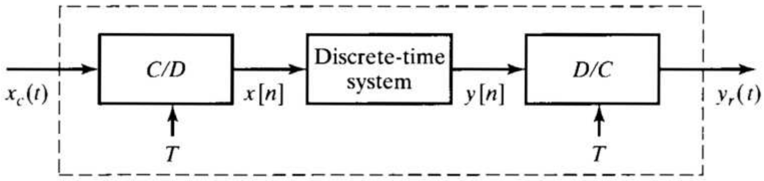
$$x(n) = x_c(nT) = \sin\left(20\pi n \frac{1}{100}\right) + \cos\left(40\pi n \frac{1}{100}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

(b) La scelta non è unica. Infatti $T = 11/100$ produce lo stesso risultato:

$$x(n) = x_c(nT) = \sin\left(20\pi n \frac{11}{100}\right) + \cos\left(40\pi n \frac{11}{100}\right) = \sin\left(\frac{11\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{22\pi n}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

Esercizio 3.5

Si consideri il sistema in figura, dove il sotto-sistema a tempo discreto è un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio di $\pi/8$ radianti.



(a) Se $x_c(t)$ é un segnale passabasso di banda 5 kHz, qual è il massimo valore di T che evita l'aliasing nel convertitore C/D?

(b) Se $1/T = 10$ kHz, qual è la frequenza di taglio effettiva del filtro a tempo continuo?

(c) Ripetere la parte (b) per $1/T = 20$ kHz.

Soluzione dell'Esercizio 3.5

(a) La minima frequenza di campionamento per evitare l'aliasing è pari a due volte la banda di $x_c(t)$, quindi $f_s = 1/T = 10$ kHz.

(b)

$$\frac{1}{T} = 10000 \qquad \omega = T\,\Omega \qquad \frac{\pi}{8} = \frac{1}{10000}\,\Omega_c \qquad \Omega_c = 2\pi\,625 \;\; \text{rad/sec}$$

e quindi la frequenza di taglio è $f_c = 625$ Hz.

(c)

$$\frac{1}{T} = 20000 \qquad \omega = T\,\Omega \qquad \frac{\pi}{8} = \frac{1}{20000}\,\Omega_c \qquad \Omega_c = 2\pi\,1250 \;\; \text{rad/sec}$$

e quindi la frequenza di taglio è $f_c = 1250$ Hz.

Esercizio 3.6

Sia $h_c(t)$ la risposta all'impulso di un sistema LTI a tempo continuo e $h_d(n)$ la risposta all'impulso di un sistema LTI a tempo discreto.

(a) Se

$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove a è una costante reale positiva, trovare la risposta in frequenza del filtro a tempo continuo e disegnare il suo modulo.

(b) Se $h_d(n) = T h_c(nT)$ con $h_c(t)$ definito nella domanda (a), trovare la risposta in frequenza del filtro a tempo discreto e disegnare il suo modulo.

(c) Per un fissato valore di a trovare, in funzione di T, l'ampiezza minima della risposta in frequenza del filtro a tempo discreto.

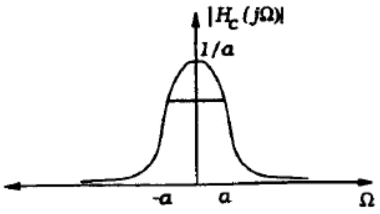
Soluzione dell'Esercizio 3.6

(a) La trasformata di Fourier della risposta all'impulso vale

$$H_c(j\Omega) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} h_c(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \; = \; \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\Omega t}\, dt \; = \; \frac{1}{a + j\Omega}$$

Il modulo vale

$$|H_c(j\Omega)| \; = \; \left(\frac{1}{a^2 + \Omega^2}\right)^{1/2}$$



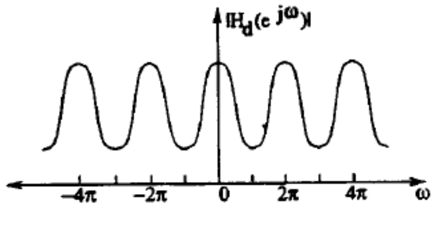
(b) Il campionamento di $h_c(t)$ è descritto da

$$h_d(n) \; = \; T\, e^{-anT}\, u(n)$$

$$H_d(e^{j\omega}) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} T\, e^{-anT}\, e^{-j\omega n} \; = \; \frac{T}{1 - e^{-aT} e^{-j\omega}}$$

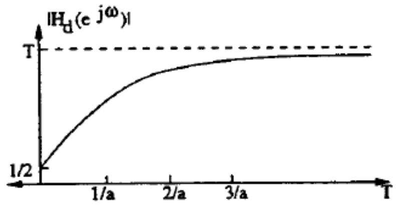
$$|H_d(e^{j\omega})| \; = \; \frac{T}{(1 - 2e^{-aT}\cos(\omega) + e^{-2aT})^{1/2}}$$

periodico con periodo 2π.



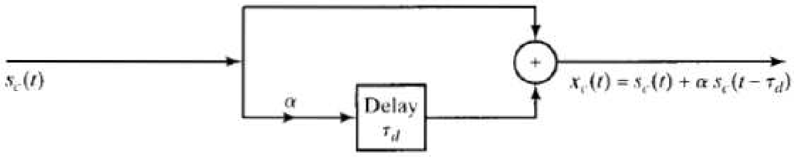
(c) Il minimo è in $\omega = \pi$. Il corrispondente valore del modulo della risposta in frequenza è

$$|H_d(e^{j\pi})| \; = \; \frac{T}{(1 + 2e^{-aT} + e^{-2aT})^{1/2}} \; = \; \frac{T}{1 + e^{-aT}}$$



Esercizio 3.7

Un semplice modello di canale di comunicazione *multipath* è



Si assuma che $s_c(t)$ sia a banda limitata tale che $S_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq \pi/T$ e che $x_c(t)$ sia campionato con periodo di campionamento T per ottenere la sequenza

$$x(n) = x_c(nT)$$

(a) Trovare la trasformata di Fourier di $x(n)$ in termini di $S_c(j\Omega)$

(b) Vogliamo simulare il sistema *multipath* con un sistema a tempo discreto scegliendo $H(e^{j\omega})$ nella figura seguente in modo che l'uscita sia $r(n) = x_c(nT)$ quando l'ingresso è $s(n) = s_c(nT)$. Trovare $H(e^{j\omega})$ in termini di T e τ_d.

(c) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema nella figura precedente quando (i) $\tau_d = T$ e (ii) $\tau_d = T/2$.

Soluzione dell'Esercizio 3.7

Il segnale a tempo continuo in uscita vale

$$x_c(t) = s_c(t) + \alpha\, s_c(t - \tau_d)$$

(a)

$$X_c(j\Omega) = S_c(j\Omega) \cdot \left(1 + a\, e^{-j\tau_d\Omega}\right)$$

da notare che $X_c(j\Omega)$ è zero per $|\Omega| > \pi/T$.

Campionando $x_c(t)$ si ottiene $x(n) = x_c(nT)$ la cui trasformata vale

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_c\left(\frac{j\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) + \frac{\alpha}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_c\left(\frac{j\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) e^{-j\tau_d[(\omega/T)+(2\pi r/T)]}$$

(b) La risposta desiderata è

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1 + \alpha e^{-j\tau_d\Omega} & |\Omega| \leq \pi/T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La risposta in frequenza del sistema discreto che simula la risposta continua si ottiene imponendo $\omega = \Omega T$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\tau_d\omega/T}$$

al solito per $|\omega| \leq \pi$ e poi periodica.

(c) La riposta all'impulso si ottiene calcolando la trasformata di Fourier inversa di $H(e^{j\omega})$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \alpha e^{-j\tau_d\omega/T})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

Se $\tau_d = T$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \alpha e^{-j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{j\omega n} + \alpha e^{j\omega(n-1)})\, d\omega$$

$$h(n) = \frac{sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\alpha \sin[\pi(n-1)]}{\pi(n-1)]} = \delta(n) + \alpha\delta(n-1)$$

Se $\tau_d = T/2$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{j\omega n} + \alpha e^{j\omega(n-0.5)})\, d\omega$$

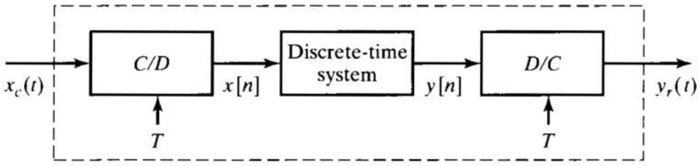
$$h(n) = \frac{sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\alpha \sin[\pi(n-0.5)]}{\pi(n-0.5)]} = \delta(n) + \frac{\alpha \sin[\pi(n-0.5)]}{\pi(n-0.5)]}$$

Esercizio 3.8

Nel sistema in figura

$$H(e^{j\omega}) \;=\; j\omega/T \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

e $T = 1/10$ sec.



(a) Per ciascuno dei seguenti ingressi $x_c(t)$ trovare la corrispondente uscita $y_c(t)$

$$(i) \quad x_c(t) \;=\; \cos(6\pi t)$$
$$(ii) \quad x_c(t) \;=\; \cos(14\pi t)$$

(b) Le uscite trovate sono quelle che uno si aspetta da un differenziatore?

Soluzione dell'Esercizio 3.8

Si noti anzitutto che

$$H(e^{j\omega}) \;=\; j\,10\,\omega \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

(a) (i) dopo il campionamento $x(n) = \cos[(3/5)\pi n]$

$$y(n) \;=\; \left|H(e^{j(3/5)\pi})\right| \cos\left(\frac{3\pi}{5} \;+\; \angle H(e^{j(3/5)\pi}\right) \;=\; 6\pi\cos\left(\frac{3\pi}{5}n + \frac{\pi}{2}\right) \;=\; -6\pi\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

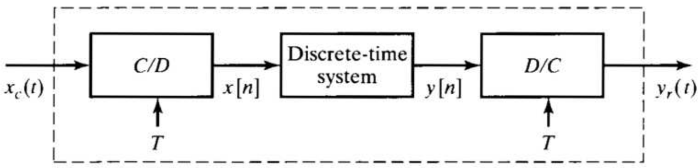
$$y_c(t) \;=\; -6\pi\sin(6\pi t)$$

(ii) dopo il campionamento $x(n) = \cos[(7/5)\pi n] = \cos[(3/5)\pi n]$, cioè uguale a prima, per cui l'uscita è ancora $y_c(t) = -6\pi\sin(6\pi t)$.

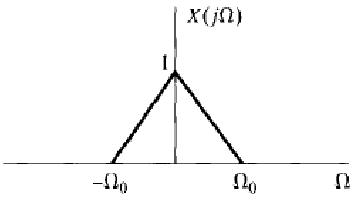
(b) $y_c(t)$ è l'uscita attesa da un differenziatore nel primo caso ma non nel secondo, dove il campionamento è affetto da aliasing.

Esercizio 3.9

Si consideri il sistema sottostante



Il segnale di ingresso $x_c(t)$ ha il modulo della trasformata di Fourier in figura



dove $\Omega_0 = 2000\pi$ radianti/secondo. Il sistema discreto è un passa-basso con risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(a) Quale è la minima frequenza di campionamento $F_s = 1/T$ necessaria per non avere aliasing campionando l'ingresso?

(b) Se $\omega_c = \pi/2$, quale è la minima frequenza di campionamento F_s tale che $y_c(t) = x_c(t)$?

Soluzione dell'Esercizio 3.9

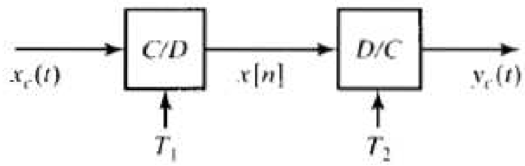
La condizione di Nyquist è soddisfatta se $T \leq \pi/\Omega_0$.

(a) $T \leq \pi/\Omega_0 = 1/2000 \;\rightarrow\; F_s \geq 2000$ Hz.

(b) Bisogna campionare in modo che $X(e^{j\omega})$ sia compreso in $|\omega| < \pi/2$. Quindi $F_s \geq 4000$ Hz.

Esercizio 3.10

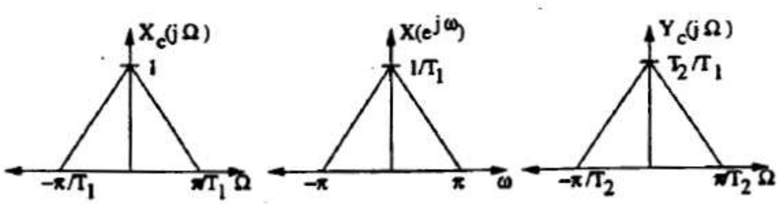
Si consideri il sistema in figura



Sappiamo che $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq \pi/T_1$. Esprimere $y_c(t)$ in termini di $x_c(t)$ per il caso generale nel quale $T_1 \neq T_2$. La relazione è differente per $T_1 > T_2$ e $T_1 < T_2$?

Soluzione dell'Esercizio 3.10

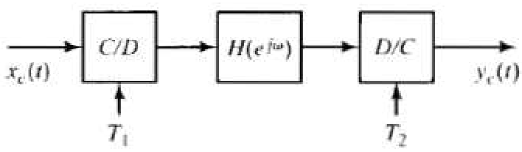
Nel dominio di Fourier si ha



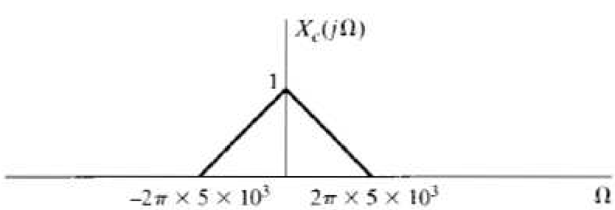
Poichè $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq \pi/T_1$ il segnale $x_c(t)$ viene campionato alla frequenza di Nyquist e non vi è aliasing.
$y_c(t)$ è una interpolazione a banda limitata di $x(n)$ con scala differente. Poichè non vi è aliasing nel campionamento di $x_c(t)$, $y_c(t)$ avrà uno spettro scalato rispetto a quello di $x_c(t)$ sia per $T_1 > T_2$ che per $T_1 < T_2$. Quindi

$$y_c(t) \;=\; \frac{T_2}{T_1}\, x_c\left(\frac{T_2}{T_1}\, t\right)$$

Esercizio 3.11



Del sistema a lato si conoscono $X_c(j\Omega)$ e $H(e^{j\omega})$: esse sono rappresentate in figura (come modulo della trasformata).



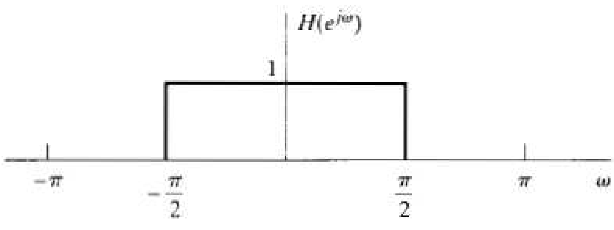
Disegnare il modulo della trasformata di Fourier di $y_c(t)$ per i casi seguenti:

(a) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$

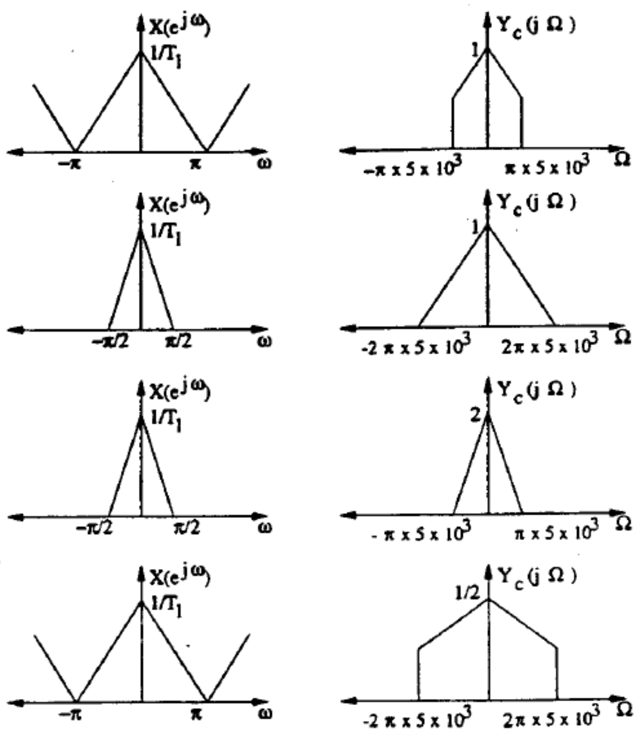
(b) $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \cdot 10^4$

(c) $1/T_1 = 2 \cdot 10^4$, $1/T_2 = 10^4$

(d) $1/T_1 = 10^4$, $1/T_2 = 2 \cdot 10^4$

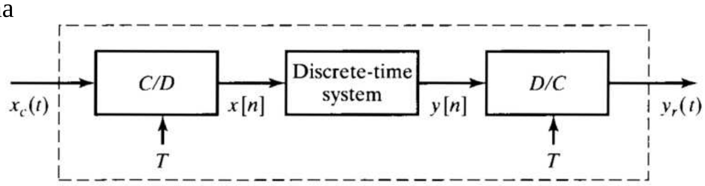


Soluzione dell'Esercizio 3.11



Esercizio 3.12

Si consideri il sistema



dove il sottosistema discreto è, al solito, LTI.

(a) Fissato un valore per T il sistema è lineare? Se lo è dimostrare brevemente il perchè. Se non lo è fornire un controesempio.

(b) Fissato un valore per T il sistema è tempo invariante? Se lo è dimostrare brevemente il perchè. Se non lo è fornire un controesempio.

Soluzione dell'Esercizio 3.12

(a) Si, il sistema è lineare perchè ognuno dei blocchi che lo compongono è lineare. Infatti il blocco C/D è definito da $x(n) = x_c(nT)$, che è chiaramente lineare. Il blocco di filtraggio discreto è LTI. Il blocco D/C consiste nel convertire la sequenza in impulsi e poi eseguire un filtraggio passa-basso ed entrambe le operazioni sono lineari.

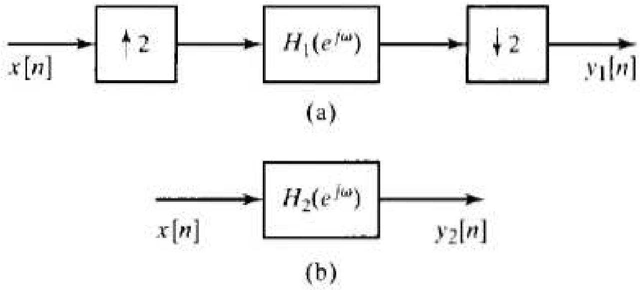
(b) No, il sistema non è tempo invariante.

Per esempio supponiamo che $h(n) = \delta(n)$, $T = 5$ e $x_c(t) = 1$ per $-1 \leq t \leq 1$ e zero altrove. In questo caso $x(n) = \delta(n)$ e $y_c(t) = \mathrm{sinc}(\pi/5)$. Si supponga di ritardare l'ingresso $x_c(t-2)$: ora $x(n) = 0$ e $y_c(t) = 0$.

Il sistema è tempo invariante solo se il campionamento soddisfa la condizione di Nyquist.

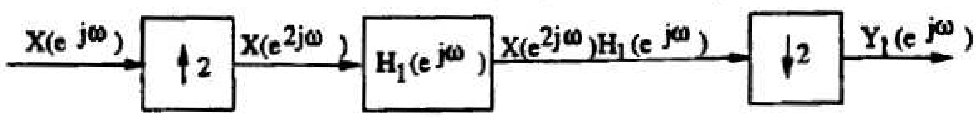
Esercizio 3.13

Consideriamo i due sistemi in figura. Supponiamo che $H_1(e^{j\omega})$ sia fisso e noto. Trovare $H_2(e^{j\omega})$, risposta in frequenza di un sistema LTI, in modo tale che $y_2(n) = y_1(n)$ se gli ingressi ai due sistemi sono uguali. Il blocco indicato con freccia verso l'alto e il numero due esegue un sovracampionamento o *upsampling* di un fattore intero pari a 2. Il blocco indicato con freccia verso il basso e il numero due esegue un sottocampionamento o *downsampling* di un fattore intero pari a 2.



Soluzione dell'Esercizio 3.13

Analizzando il sistema in (a) nel dominio delle frequenze si ottiene



dove $Y_1(e^{j\omega})$ è $X(e^{j2\omega})\,H_1(e^{j\omega})$ sottocampionato di un fattore 2:

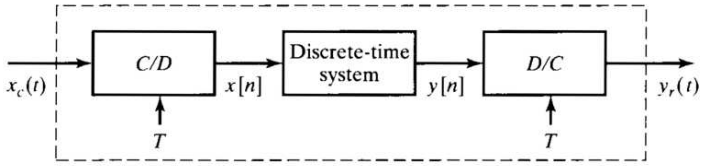
$$\begin{aligned}
Y_1(e^{j\omega}) &= \tfrac{1}{2}\left\{X(e^{j2\omega/2})\,H_1(e^{j\omega/2}) + X(e^{j2(\omega-2\pi)/2})\,H_1(e^{j(\omega-2\pi)/2})\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{X(e^{j\omega})\,H_1(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega-2\pi)})\,H_1(e^{j(\omega/2-\pi)})\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{H_1(e^{j\omega/2}) + H_1(e^{j(\omega/2-\pi)})\right\} X(e^{j\omega})\\
&= H_2(e^{j\omega})\,X(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

Vedi eq. 3.42 delle dispense. Quindi

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{H_1(e^{j\omega/2}) + H_1(e^{j(\omega/2-\pi)})\right\}$$

Esercizio 3.14

Nella figura seguente si assuma che il sottosistema discreto sia LTI e che $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq 4000\pi$.



Trovare il valore massimo di T e la corrispondente risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ del sistema discreto in modo tale che

$$Y_c(j\Omega) = \begin{cases} |\Omega|\,X_c(j\Omega) & 1000\pi < |\Omega| < 2000\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione dell'Esercizio 3.14

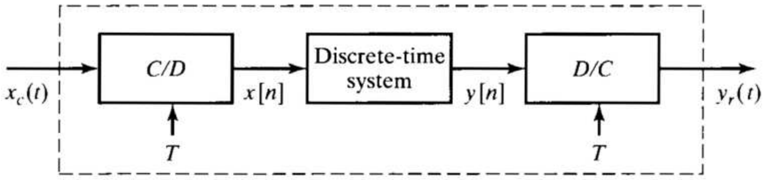
Siccome si usa solo la metà della banda di $X_c(j\Omega)$ è accettabile che l'aliasing modifichi la parte oltre $\Omega = 2000\pi$, quindi $T = 1/3000$ secondi.
Fissato T troviamo i limiti della banda di $H(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \Omega_1 T \quad\Rightarrow\quad \omega_1 = 2\pi\,500\,\tfrac{1}{3000} \quad\Rightarrow\quad \omega_1 = \tfrac{\pi}{3}\\
\omega_2 &= \Omega_2 T \quad\Rightarrow\quad \omega_2 = 2\pi\,1000\,\tfrac{1}{3000} \quad\Rightarrow\quad \omega_2 = \tfrac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} |\omega| & (\pi/3) < |\omega| < (2\pi/3) \\ 0 & 0 \leq |\omega| \leq \pi/3 \qquad (2\pi/3) \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Esercizio 3.15

Si consideri il sistema in figura



con $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq 2\pi\,1000$ rad/sec. Il sistema discreto è uno squadratore, ovvero $y(n) = x^2(n)$. Quale è il massimo valore di T tale che $y_c(t) = x_c^2(t)$?

Soluzione dell'Esercizio 3.15

$$y(n) \;=\; x^2(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) \;=\; X(e^{j\omega}) \;*\; X(e^{j\omega})$$

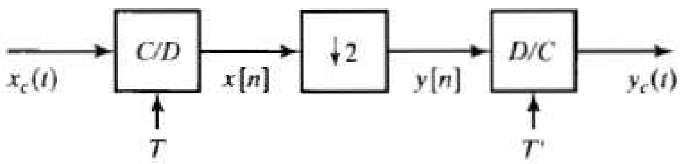
quindi $Y(e^{j\omega})$ occupa una banda in frequenza di ampiezza doppia rispetto a $X(e^{j\omega})$, se non si verifica aliasing. Affinchè $Y(e^{j\omega}) \neq 0$ in $-\pi < \omega < \pi$ deve valere che $X(e^{j\omega}) \neq 0$ in $-\pi/2 < \omega < \pi/2$. Usando la relazione $\omega = \Omega\, T$ si deve fare in modo che $\Omega = 2\pi\,1000$ corrisponda a $\omega = \pi/2$: quindi

$$\frac{\pi}{2} \;=\; 2\pi\,1000\,T \qquad \Rightarrow \quad T \;=\; \frac{1}{4000}$$

che è il valore massimo di T, come richiesto.

Esercizio 3.16

Nel sistema in figura $x(n) = x_c(nT)$ e $y(n) = x(2n)$.



(a) Assumendo che $x_c(t)$ abbia trasformata di Fourier tale che $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| > 2\pi\,100$, trovare il valore di T affinchè

$$X(e^{j\omega}) \;=\; 0 \qquad\qquad \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi$$

(b) Quale valore deve avere T' affinchè $y_c(t) = x_c(t)$?

Soluzione dell'Esercizio 3.16

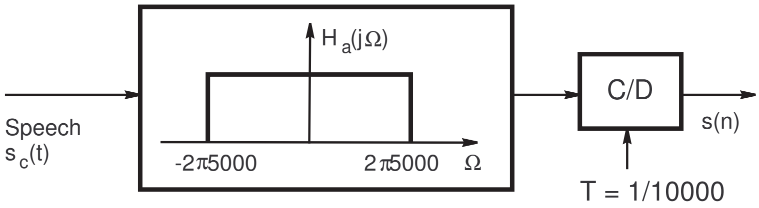
(a) Poichè $\Omega T = \omega$, $(2\pi \cdot 100)T = \pi/2$ e quindi $T = 1/400$.

(b) Il sottocampionatore ha $M = 2$. Poichè $x(n)$ è limitato in banda a π/M non vi è aliasing. L'asse delle frequenza semplicemente si espande di un fattore 2.

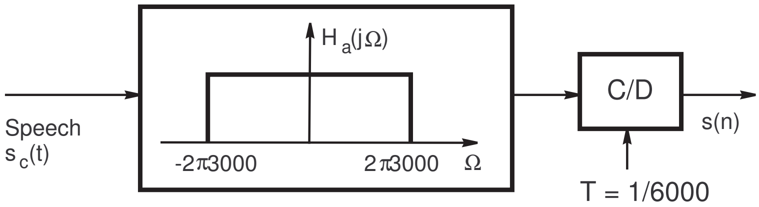
Affinchè $y_c(t) = x_c(t)$ deve essere $Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)$ e quindi $(2\pi \cdot 100)T' = \pi$ e quindi $T' = 1/200$.

Esercizio 3.17

Supponiamo di aver ottenuto la sequenza $s(n)$ filtrando un segnale vocale $s_c(t)$ con un filtro passa-basso ideale continuo con frequenza di taglio di 5 KHz e quindi campionandolo alla frequenza di 10 KHz, come illustrato nella figura seguente



Sfortunatamente il segnale $s_c(t)$ è andato distrutto, ma il segnale discreto $s(n)$ è ancora disponibile su disco. Successivamente a questo scoprite che avreste dovuto eseguire il processo illustrato nella figura seguente, anzichè quello sopra.



Trovate un metodo per ricavare $s_1(n)$ da $s(n)$ usando solo elaborazioni discrete.

Soluzione dell'Esercizio 3.17

In entrambi i sistemi il segnale vocale viene filtrato prima del campionamento in modo da evitare l'aliasing. Quindi per passare da $s(n)$ a $s_1(n)$ bisogna cambiare la frequenza di campionamento di un fattore $3/5$. Questo può essere eseguito mediante il sistema seguente

Dopo il blocco di sovracampionamento serve un filtro passabasso con frequenza di taglio $\pi/3$ e guadagno 3, ossia

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 3 & 0 \le |\omega| \le \pi/3 \\ 0 & (\pi/3) < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

mentre prima del blocco che sottocampiona serve un filtro passabasso con frequenza di taglio $\pi/5$ e guadagno unitario, ossia

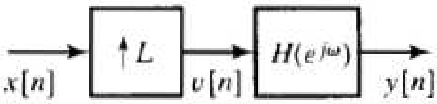
$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \le |\omega| \le \pi/5 \\ 0 & (\pi/5) < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Essi possono essere uniti in un solo filtro LPF:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 3 & 0 \le |\omega| \le \pi/5 \\ 0 & (\pi/5) < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Esercizio 3.18

Il sistema in figura interpola in modo approssimativo la sequenza $x(n)$ di un fattore intero L (il primo blocco è un blocco di sovracampionamento o *upsampler*).



Il filtro discreto lineare ha risposta all'impulso $h(n)$ tale che $h(n) = h(-n)$ e $h(n) = 0$ per $|n| > (RL - 1)$, con R intero. Quindi la risposta all'impulso è simmetrica e di lunghezza $(2RL - 1)$ campioni.

(a) nelle risposte seguenti non considerare il fatto che il sistema non sia causale: può essere reso causale introducendo del ritardo. Nello specifico, quanto ritardo bisogna inserire per rendere il sistema causale?

(b) Quale condizione deve soddisfare $h(n)$ affinchè $y(n) = x(n/L)$ per $n = 0, \pm L, \pm 2L. \pm 3L, ...$?

(c) Usando la simmetria della risposta all'impulso mostrare che ciascun campione di $y(n)$ può essere calcolato con non più di RL moltiplicazioni.

Soluzione dell'Esercizio 3.18

(a)

$$h(n) = 0 \qquad |n| > (RL - 1)$$

Quindi per avere un sistema causale bisogna inserire un ritardo di almeno $(RL - 1)$ campioni.

(b) La regola generale di un interpolatore, se si vuole che i campioni non interpolati non varino, è

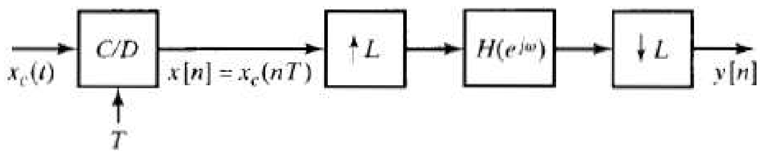
$$h(0) = 1$$
$$h(kL) = 0 \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(c)

$$y(n) = \sum_{k=-(RL-1)}^{(RL-1)} h(k)v(n-k) = h(0)v(n) + \sum_{k=1}^{RL-1} h(k)[v(n-k) + v(n+k)]$$

che richiede solo $(RL - 1)$ prodotti, assumendo che $h(0) = 1$. Considerando poi che i valori di $h(kL)$ sono nulli le moltiplicazioni si riducono ulteriormente.

Esercizio 3.19



Nel sistema in figura

$$X_c(j\Omega) = 0 \qquad |\Omega| \geq \pi/T$$

e

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega} & 0 \leq |\omega| \leq \pi/L \\ 0 & (\pi/L) < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

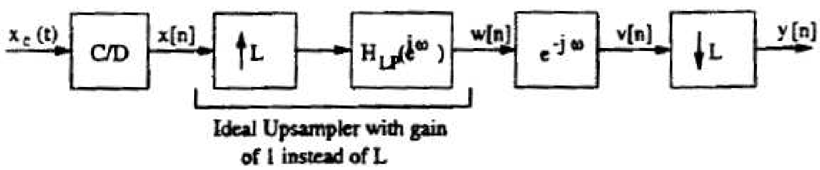
come è legato $y(n)$ al segnale di ingresso $x_c(t)$?

Soluzione dell'Esercizio 3.19

Dividiamo $H(e^{j\omega})$ in un passabasso più un ritardo

$$H(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j\omega})\, e^{-j\omega}$$

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \pi/L \\ 0 & (\pi/L) < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



quindi analizziamo il sistema passo-passo:

$$\begin{aligned} x(n) &= x_c(nT) && \text{non vi è aliasing} \\ w(n) &= \frac{1}{L} x_c\left(n\frac{T}{L}\right) && \text{upsampling} \\ v(n) &= w(n-1) = \frac{1}{L} x_c\left(n\frac{T}{L} - \frac{T}{L}\right) && \text{ritardo} \\ y(n) &= v(nL) = \frac{1}{L} x_c\left(nT - \frac{T}{L}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 3.20

Sia $x_c(t)$ un segnale reale a tempo continuo, passabanda di banda $2\pi\,250$ rad/sec. Sia $y_c(t) = x_c(t - 1/1000)$.

(a) Se $x(n) = x_c(n/500)$ è teoricamente possibile ricostruire $x_c(t)$ da $x(n)$? Giustificare la risposta.

(b) Se $y(n) = y_c(n/500)$ è teoricamente possibile ricostruire $y_c(t)$ da $y(n)$? Giustificare la risposta.

(c) È possibile ottenere $y(n)$ da $x(n)$ usando il sistema nella figura sotto? Se la risposta è si determinare $H_1(e^{j\omega})$.

(d) È anche possibile ottenere $y(n)$ da $x(n)$ senza sovra- e sotto-campionamento usando un singolo sistema LTI con risposta in frequenza $H_2(e^{j\omega})$. Trovare $H_2(e^{j\omega})$.

Soluzione dell'Esercizio 3.20

(a) Il criterio di Nyquist stabilisce che $x_c(t)$ può essere ricostruito purchè

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2 \cdot 2\pi\,250 \qquad \Rightarrow \quad T \leq \frac{1}{500}$$

In questo caso $T = 1/500$ e quindi $x_c(t)$ può essere ricostruito.

(b) Si, un ritardo non cambia la banda di un segnale. Quindi $y_c(t)$ ha la stessa banda di $x_c(t)$ e necessita della stessa frequenza di campionamento.

(c) Consideriamo $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\,X_c(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T} = \frac{1}{500}\,X_c(j500\omega) \\
Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\,Y_c(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T} = \frac{1}{T}\,e^{-j\Omega/1000}\,X_c(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T} = \\
&= \frac{1}{500}\,e^{-j\omega/2}\,X_c(j500\omega) = e^{-j\omega/2}\,X(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

Definendo ora

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\,e^{-j\omega} & 0 \leq |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e chiamando $r(n)$ la sequenza in ingresso al blocco LTI di risposta $H_1(e^{j\omega})$ e $w(n)$ la sequenza in uscita dallo stesso blocco possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
R(e^{j\omega}) &= X(e^{j2\omega}) \\
W(e^{j\omega}) &= 2\,e^{-j\omega}\,X(e^{j2\omega}) \quad \text{per } |\omega| < \pi/2 \text{ e zero altrove} \\
Y(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega/2}\,X(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

(d) Dalla trattazione sopra

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}$$

Capitolo 4

Trasformata di Fourier discreta

Esercizio 4.1

Calcolare la DFT di ciascuna delle sequenze seguenti. Tutte le sequenze sono a lunghezza finita, ovvero di lunghezza N, con N pari.

(a) $x(n) = \delta(n)$,

(b) $x(n) = \delta(n - n_0)$, con $0 \le n_0 \le N - 1$,

(c)

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

(d)

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le (N/2) - 1 \\ 0 & N/2 \le n \le N - 1 \end{cases}$$

(e)

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N - 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione dell'Esercizio 4.1

(a)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = 1 \qquad 0 \le k \le N - 1$$

(b)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) W_N^{kn} = W_N^{kn_0} \qquad 0 \le k \le N - 1$$

(c)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{2kn} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j4\pi k/N}} \qquad 0 \le k \le N - 1$$

$$X(k) = \begin{cases} N/2 & k = 0,\ N/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(d)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{kn} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j(2\pi k/N)}} \qquad 0 \le k \le N - 1$$

$$X(k) = \begin{cases} N/2 & k = 0 \\ \frac{2}{1-e^{-j(2\pi k/N)}} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

(e)

$$X(k) \; = \; \sum_{n=0}^{N-1} a^n \, W_N^{kn} \; = \; \frac{1 - a^N e^{-j2\pi k}}{1 - a e^{-j(2\pi k)/N}} \qquad\qquad 0 \le k \le N-1$$

Esercizio 4.2

Data le sequenza complessa

$$x(n) \; = \; \begin{cases} e^{j\omega_0 n} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(a) Calcolare la trasformata di Fourier $X(e^{j\omega})$ di $x(n)$.

(b) Calcolare la DFT (di N punti) $X(k)$ della sequenza a lunghezza finita $x(n)$.

(c) Calcolare la DFT di $x(n)$ per il caso $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ con k_0 intero.

Soluzione dell'Esercizio 4.2

(a)

$$X(e^{j\omega}) \; = \; \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \; = \; \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}\, e^{-j\omega n} \; = \; \frac{1 - e^{-j(\omega-\omega_0)N}}{1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}} \; = \; \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)(N/2)}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}} \, \frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}$$

$$X(e^{j\omega}) \; = \; e^{-j(\omega-\omega_0)[(N-1)/2]} \, \frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}$$

(b)

$$X(k) \; = \; \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} \; = \; \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}\, W_N^{kn} \; = \; \frac{1 - e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)N}}{1 - e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)}} \qquad\qquad 0 \le k \le N-1$$

e quindi

$$X(k) \; = \; e^{-j(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0)(\frac{N-1}{2})} \, \frac{\sin[(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0)\frac{N}{2}]}{\sin[(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0)/2]} \qquad\qquad 0 \le k \le N-1$$

Da notare che

$$X(k) \; = \; X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi k)/N}$$

(c) Se $\omega_0 = 2\pi k_0/N$ con k_0 intero

$$X(k) \; = \; \frac{1 - e^{-j(k-k_0)2\pi}}{1 - e^{-j(k-k_0)2\pi/N}} \; = \; e^{-j(2\pi/N)(k-k_0)((N-1)/2)} \, \frac{\sin \pi(k-k_0)}{\sin(\pi(k-k_0)/N)} \qquad\qquad 0 \le k \le N-1$$

Esercizio 4.3

Si consideri la sequenza

$$x(n) \; = \; \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sia $X(z)$ la trasformata z di $x(n)$. Se si campiona $X(z)$ a $z = e^{j(2\pi/4)k}$, $k = 0, 1, 2, 3$ si ottiene la sequenza

$$X_1(k) \; = \; X(z)|_{z=e^{j(2\pi/4)k}} \qquad\qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Trovare la sequenza $x_1(n)$ ottenuta come DFT inversa (ovviamente su 4 punti) di $X_1(k)$.

Soluzione dell'Esercizio 4.3

$$X(z) \; = \; \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \; = \; \sum_{n=0}^{5} z^{-n}$$

$$X_1(k) = X(z)|_{z=e^{j(2\pi/4)k}} = \sum_{n=0}^{5} e^{-j(2\pi/4)kn} = \sum_{n=0}^{5} W_4^{kn} \qquad 0 \le k \le 3$$

Da notare che abbiamo ottenuto una DFT su 4 punti campionando la trasformata z. La sequenza $x(n)$ è tuttavia lunga 6: se avessimo campionato $X(z)$ su 6 punti equispaziati sul circolo unitario avremmo ottenuto la DFT di $x(n)$, usandone solo 4 ci aspettiamo che l'antitrasformata sia affetta da aliasing.
Espandendo la sommatoria

$$X_1(k) = W_4^{0k} + W_4^{k} + W_4^{2k} + W_4^{3k} + W_4^{4k} + W_4^{5k} \qquad 0 \le k \le 3$$

ma

$$W_4^{0k} = W_4^{4k} \qquad \text{e} \qquad W_4^{k} = W_4^{5k}$$

quindi

$$X_1(k) = 2\,W_4^{0k} + 2\,W_4^{k} + W_4^{2k} + W_4^{3k} \qquad 0 \le k \le 3 \tag{4.1}$$

$$x_1(n) = \mathrm{IDFT}[X_1(k)] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X_1(k)\,W_4^{-kn} \qquad 0 \le n \le 3$$

$$x_1(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(2\,W_4^{0k} + 2\,W_4^{k} + W_4^{2k} + W_4^{3k}\right) W_4^{-kn} \qquad 0 \le n \le 3$$

usando le proprietà di W_4 sappiamo che $W_4^{0k} = 1$, $W_4^{2k} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$ e

$$W_4^{k} = W_4^{3k}\,W_4^{-2k} = W_4^{3k}\,e^{j\pi k} = (-1)^k\,W_4^{3k}$$

$$x_1(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(2 + 2\,W_4^{k} + (-1)^k + (-1)^k\,W_4^{k}\right) W_4^{-kn} \qquad 0 \le n \le 3$$

$$\begin{aligned} x_1(n) = \frac{1}{4}\Big[&(2+2+1+1)\;W_4^{-0n} \;+ \\ &+\left(2 + 2\,W_4^{1} - 1 - W_4^{1}\right) W_4^{-n} + \\ &+\left(2 + 2\,W_4^{2} + 1 + W_4^{2}\right) W_4^{-2n} + \\ &+\left(2 + 2\,W_4^{3} - 1 - W_4^{3}\right) W_4^{-3n}\Big] \qquad 0 \le n \le 3 \end{aligned}$$

$$x_1(n) = \frac{1}{4}\left[6 + \left(1 + W_4^{1}\right) W_4^{-n} + \left(3 + 3\,W_4^{2}\right) W_4^{-2n} + \left(1 + W_4^{3}\right) W_4^{-3n}\right]$$

Ora possiamo calcolare i valori di $x_1(n)$ al variare di n

$$x_1(0) = \frac{1}{4}\left[6 + \left(1 + W_4^{1}\right) W_4^{0} + \left(3 + 3\,W_4^{2}\right) W_4^{0} + \left(1 + W_4^{3}\right) W_4^{0}\right]$$

$$x_1(0) = \frac{1}{4}\left[11 + W_4^{1} + 3\,W_4^{2} + W_4^{3}\right] = \frac{1}{4}\,(8) = 2$$

visto che $W_4^2 = -1$ e $W_4^1 = -W_4^3$

$$x_1(1) = \frac{1}{4}\left[6 + \left(1 + W_4^{1}\right) W_4^{-1} + \left(3 + 3\,W_4^{2}\right) W_4^{-2} + \left(1 + W_4^{3}\right) W_4^{-3}\right]$$

$$x_1(1) = \frac{1}{4}\left[6 + \left(1 + W_4^{-1}\right) + \left(3 + 3\,W_4^{-2}\right) + \left(1 + W_4^{-3}\right)\right]$$

$$x_1(1) = \frac{1}{4}\left[11 + W_4^{-1} + 3\,W_4^{-2} + W_4^{-3}\right] = 2$$

$$x_1(2) = \frac{1}{4}\left[6 + \left(1 + W_4^{1}\right) W_4^{-2} + \left(1 + W_4^{3}\right) W_4^{-6}\right]$$

$$x_1(2) = \frac{1}{4}\left[6 + W_4^{-2} + W_4^{-1} + 3\,W_4^{-4} + 3\,W_4^{-2} + W_4^{-6} + W_4^{-3}\right]$$

$$x_1(2) \;=\; \frac{1}{4}\,\left[6+3+5\,W_4^{-2}\right] \;=\; \frac{1}{4}\,(6+3-5) \;=\; 1$$

$$x_1(3) \;=\; \frac{1}{4}\,\left[6+\left(1+W_4^1\right)\,W_4^{-3}+\left(3+3\,W_4^2\right)\,W_4^{-6}+\left(1+W_4^3\right)\,W_4^{-9}\right]$$

$$x_1(3) \;=\; \frac{1}{4}\,\left[6+W_4^{-3}+W_4^{-2}+3\,W_4^{-6}+3\,W_4^{-4}+W_4^{-9}+W_4^{-6}\right]$$

$$x_1(3) \;=\; \frac{1}{4}\,\left[6+W_4^{-3}-1-3+3+W_4^{-1}-1\right] \;=\; 1$$

Alternativa

La soluzione appena vista è una buona palestra per capire e saper usare le proprietà degli esponenziali complessi W_N, ma è evidentemente piuttosto laboriosa. Per fortuna esiste un modo assai più rapido.
Ripartiamo dalla equazione 4.1

$$X_1(k) \;=\; 2\,W_4^{0k}+2\,W_4^{k}+W_4^{2k}+W_4^{3k} \qquad\qquad 0 \le k \le 3$$

Poichè

$$X_1(k) \;=\; \sum_{n=0}^{3} x_1(n)\,W_4^{nk} \;=\; x_1(0)\,W_4^{0k}+x_1(1)\,W_4^{k}+x_1(2)\,W_4^{2k}+x_1(3)\,W_4^{3k}$$

la soluzione si trova immediatmente per confronto: $x_1(0) = 2$, $x_1(1) = 2$, $x_1(2) = 1$ e $x_1(3) = 1$.

Esercizio 4.4

Sia $X(e^{j\omega})$ la trasformata di Fourier della sequenza $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Sia $y(n)$ una sequenza a lunghezza finita pari a 10, $y(n) = 0$ per $n < 0$ e per $n \ge 10$.
La DFT calcolata su 10 punti di $y(n)$, ovvero $Y(k)$, corrisponde a 10 campioni equispaziati di $X(e^{j\omega})$ secondo

$$Y(k) \;=\; X\left(e^{j2\pi k/10}\right)$$

Trovare $y(n)$.

Soluzione dell'Esercizio 4.4

$$X(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} \;=\; \frac{1}{1-(1/2)e^{-j\omega}}$$

$$Y(k) \;=\; X\left(e^{j2\pi k/10}\right) \qquad\qquad 0 \le k \le 9$$

$$Y(k) \;=\; \frac{1}{1-(1/2)e^{-j(2\pi k/10)}} \;=\; \sum_{n=0}^{9} y(n)\,W_{10}^{kn} \qquad\qquad 0 \le k \le 9$$

Ricordando che la trasformata di $(1/2)^n$ calcolata su N punti vale

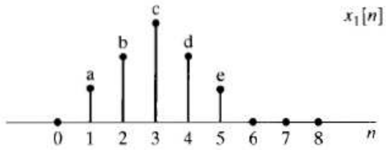
$$\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n W_N^{kn} \;=\; \frac{1-(1/2)^N}{1-(1/2)e^{-j(2\pi k/N)}}$$

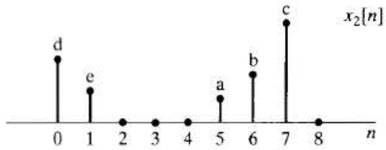
ricaviamo che

$$y(n) \;=\; \frac{(1/2)^n}{1-(1/2)^{10}}$$

Esercizio 4.5

Le due sequenze lunghe 8 punti $x_1(n)$ e $x_2(n)$ in figura hanno DFT rispettivamente $X_1(k)$ e $X_2(k)$. Trovare le relazioni fra $X_1(k)$ e $X_2(k)$.





Soluzione dell'Esercizio 4.5

La sequenza $x_2(n)$ si ottiene per traslazione circolare di $x_1(n)$ di 4 campioni a destra (o a sinistra, è uguale...), ovvero $x_2(n) = x_1(((n-4))_8)$. Dalle proprietà della DFT sappiamo che

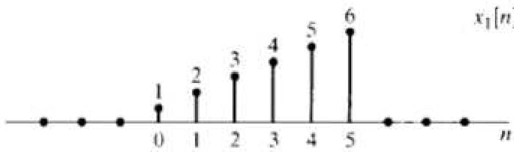
$$\mathrm{DFT}[x_1(((n-4))_8)] = W_8^{4k} X_1(k)$$

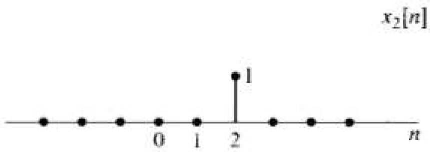
quindi

$$X_2(k) = W_8^{4k} X_1(k) = e^{-j\pi k} X_1(k) = (-1)^k X_1(k)$$

Esercizio 4.6

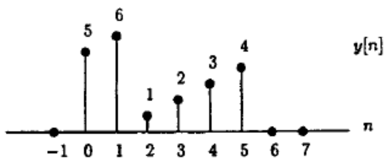
La figura che segue mostra due sequenza di lunghezza finita $x_1(n)$ e $x_2(n)$. Disegnare la loro convoluzione circolare su base 6 (ovvero considerandole entrambe di lunghezza 6).





Soluzione dell'Esercizio 4.6

Poichè $x_2(n)$ è un impulso discreto traslato di due posizioni il risultato della convoluzione circolare è la sequenza $x_1(n)$ traslata di due campioni.



Esercizio 4.7

Siano date due sequenza di lunghezza 4:

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad 0 \le n \le 3$$

$$h(n) = 2^n \qquad 0 \le n \le 3$$

(a) Calcolare la DFT di 4 punti di $x(n)$, ossia $X(k)$.

(b) Calcolare la DFT di 4 punti di $h(n)$, ossia $H(k)$.

(c) Calcolare la convoluzione circolare su base 4 delle due sequenze $x(n)$ e $h(n)$, ovvero $y(n) = x(n)$ ④ $h(n)$.

(d) Calcolare la sequenza $y(n)$ come nella domanda (c) moltiplicando le DFT di $x(n)$ e $h(n)$ e antitrasformando il risultato.

Soluzione dell'Esercizio 4.7

Le due sequenze valgono

$x(0) = 1 \quad x(1) = 0 \quad x(2) = -1 \quad x(3) = 0 \qquad h(0) = 1 \quad h(1) = 2 \quad h(2) = 4 \quad h(3) = 8$

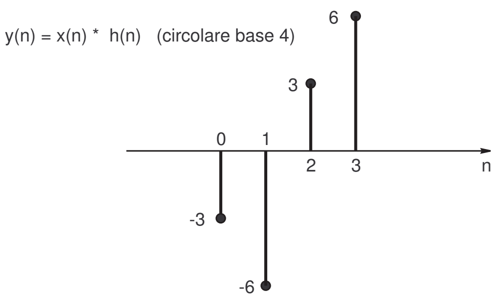
(a)

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{3} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) W_4^{kn} = W_4^0 - W_4^{2k} = \\
&= 1 - e^{-j(2\pi/4)2k} = 1 - e^{-j\pi k} = 1 - W_4^{2k} \qquad 0 \le k \le 3
\end{aligned}
$$

(b)

$$H(k) = \sum_{n=0}^{3} 2^n W_4^{kn} = 1 + 2W_4^k + 4W_4^{2k} + 8W_4^{3k} \qquad 0 \le k \le 3$$

(c)



Nota: lo stesso risultato si ottiene calcolando la convoluzione lineare e poi “ripiegando” gli ultimi due campioni sui primi.

(d)

$$Y(k) = X(k)\,H(k) = 1 + 2W_4^k + 4W_4^{2k} + 8W_4^{3k} - W_4^{2k} - 2W_4^{3k} - 4W_4^{4k} - 8W_4^{5k} \qquad 0 \le k \le 3$$

siccome $W_4^{4k} = W_4^{0k}$ e $W_4^{5k} = W_4^k$

$$Y(k) = X(k)\,H(k) = -3 - 6W_4^k + 3W_4^{2k} + 6W_4^{3k} \qquad 0 \le k \le 3$$

La trasformata inversa vale

$$y(n) = -3\delta(n) - 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 6\delta(n-3) \qquad 0 \le n \le 3$$

Esercizio 4.8

Si consideri una sequenza $x(n)$ di lunghezza finita avente trasformata di Fourier $X(e^{j\omega})$ e trasformata discreta di Fourier $X(k)$. Se

$$\Im[X(k)] = 0 \qquad 0 \le k \le N-1$$

(il simbolo $\Im$ denota parte immaginaria) possiamo concludere che

$$\Im\{X(e^{j\omega})\} = 0 \qquad -\pi \le \omega \le \pi \ ?$$

Spiegate il vostro ragionamento se la risposta è si, date un controesempio se la risposta è no.

Soluzione dell’Esercizio 4.8

No. La DFT campiona lo spettro della trasformata di Fourier, quindi il fatto che la parte immaginaria della DFT sia nuilla non implica che lo sia anche quella della trasformata di Fourier (a parte ovviamente per i punti campionati).

Come esempio consideriamo la sequenza

$$x(n) = \delta(n-1) \qquad 0 \le n \le 1$$

La sua trasformata di Fourier vale

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$$

$$\Re[X(e^{j\omega})] = \cos(\omega)$$

$$\Im[X(e^{j\omega})] \;=\; -\sin(\omega)$$

ovvero la sua parte immaginaria non è identicamente nulla. Consideriamo ora la DFT su due punti di $x(n)$:

$$X(k) \;=\; W_2^k \;=\; \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -1 & k = 1 \end{cases}$$

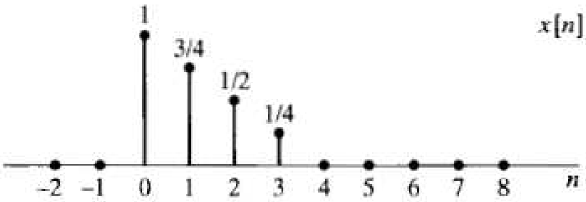
Quindi $\Im[X(k)] = 0$ ma $\Im\{X(e^{j\omega})\} \neq 0$.
Da notare che la lunghezza su cui la DFT viene calcolata gioca un ruolo importante: ad esempio se si considera la DFT di lunghezza tre di $x(n)$ si ottiene

$$X(k) \;=\; W_3^k \;=\; \begin{cases} 1 & k = 0 \\ e^{-j(2\pi/3)} & k = 1 \\ e^{-j(4\pi/3)} & k = 2 \end{cases}$$

e, in questo caso, $\Im[X(k)] \neq 0$. Infatti la periodica associata a $x(n) = \delta(n-1)$ se $N = 2$ è pari, mentre la periodica associata se $N = 3$ non lo è.

Esercizio 4.9

Si consideri la sequenza a lunghezza finita $x(n)$ in figura:



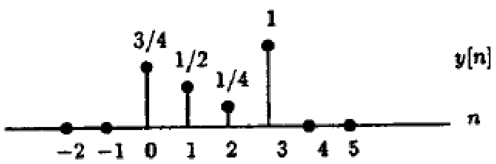
Sia $X(k)$ la DFT su 4 punti di $x(n)$. Disegnare la sequenza $y(n)$ avente come DFT

$$Y(k) \;=\; W_4^{3k}\,X(k)$$

Soluzione dell'Esercizio 4.9

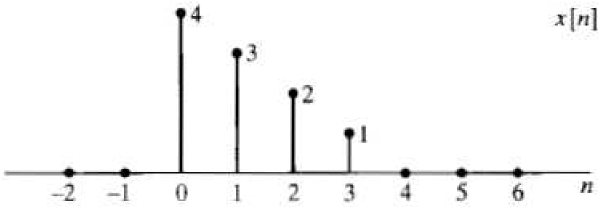
Entrambe le sequenza $x(n)$ e $y(n)$ hanno lunghezza 4. La moltiplicazione di $X(k)$ per W_4^{3k} corrisponde ad un traslazione circolare di tre posizioni nel dominio temporale: quindi

$$y(n) \;=\; x(((n-3))_4)$$



Esercizio 4.10

Si consideri la sequenza a lunghezza finita $x(n)$ in figura:



e sia $X(k)$ la DFT calcolata su 6 punti di $x(n)$.

(a) Disegnare la sequenza di lunghezza finita $y(n)$ la cui DFT calcolata su 6 punti è

$$Y(k) \;=\; W_6^{4k}\,X(k)$$

(b) Disegnare la sequenza di lunghezza finita $w(n)$ la cui DFT calcolata su 6 punti è

$$W(k) \; = \; \mathrm{Re}\{X(k)\}$$

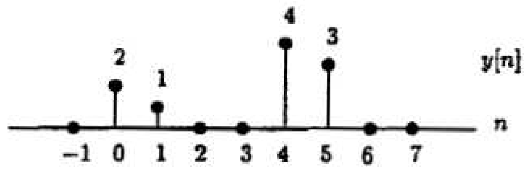
(c) Disegnare la sequenza di lunghezza finita $q(n)$ la cui DFT calcolata su 3 punti è

$$Q(k) \; = \; X(2k) \qquad\qquad k = 0, 1, 2$$

Soluzione dell'Esercizio 4.10

(a) La sequenza $y(n)$ è la versione traslata circolarmente di 4 posizioni su base 6 di $x(n)$, ovvero

$$y(n) \; = \; x(((n-4))_6) \qquad\qquad 0 \le n \le 5$$



(b) Ci sono due modi per affrontare il problema. Come primo modo proviamo l'approccio a forza bruta.

$$X(k) \; = \; \sum_{n=0}^{5} x(n) W_6^{nk} \; = \; 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k}$$

$$W(k) \; = \; \mathrm{Re}\{X(k)\} \; = \; \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] \; = \; \frac{1}{2}\left(4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k} + 4 + 3W_6^{-k} + 2W_6^{-2k} + W_6^{-3k}\right)$$

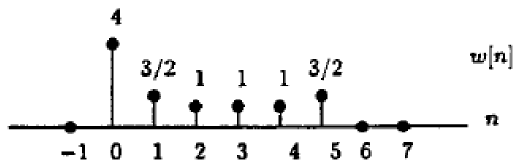
e siccome $W_N^{-k} = W_N^{N-k}$

$$W(k) \; = \; 4 + \frac{3}{2}\left[W_6^k + W_6^{6-k}\right] + \left[W_6^{2k} + W_6^{6-2k}\right] + \frac{1}{2}\left[W_6^{3k} + W_6^{6-3k}\right]$$

quindi

$$w(n) \; = \; 4\delta(n) + \frac{3}{2}[\delta(n-1) + \delta(n-5)] + \delta(n-2) + \delta(n-4) + \frac{1}{2}[\delta(n-3) + \delta(n-3)]$$

$$w(n) \; = \; 4\delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n-1) + \delta(n-2)] + \delta(n-3) + \delta(n-4) + \frac{3}{2}\delta(n-5) \qquad\qquad 0 \le n \le 5$$



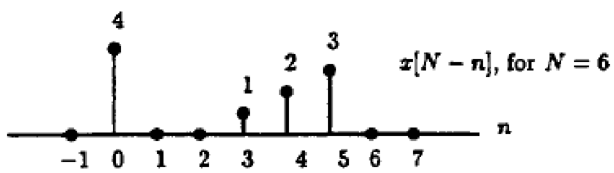
Alternativa: usando le proprità della DFT

$$W(k) \; = \; \mathrm{Re}\{X(k)\} \; = \; \frac{X(k) + X^*(k)}{2}$$

$$w(n) \; = \; \frac{1}{2}\;[x(n) \; + \; x^*(((-n))_N)]$$

Per $0 \le n \le (N-1)$, $x(n)$ reale e $N = 6$

$$w(n) \; = \; \frac{1}{2}\;[x(n) \; + \; x^*(N-n)]$$



e siccome

si ottiene il risultato già visto.

(c) La DFT viene decimata di un fattore due, quindi ci aspettiamo aliasing. Come visto

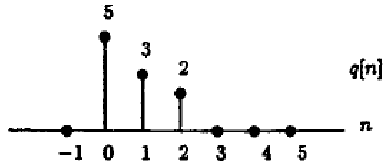
$$X(k) \ = \ 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k} \qquad\qquad 0 \le k \le 5$$

e poichè $Q(k) = X(2k)$,

$$Q(k) \ = \ 4 + 3W_3^k + 2W_3^{2k} + W_3^{3k} \qquad\qquad 0 \le k \le 2$$

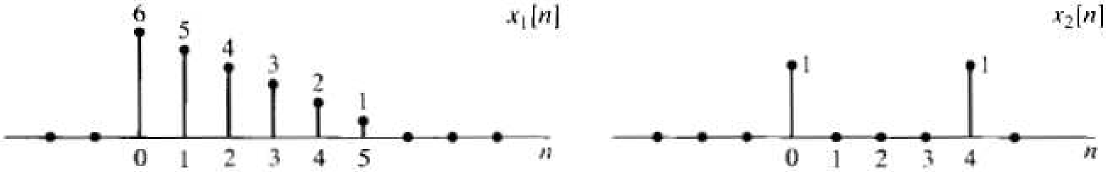
notando che $W_3^{3k} = W_3^{0k} = 1$

$$q(n) \ = \ 5\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) \qquad\qquad 0 \le n \le 2$$



Esercizio 4.11

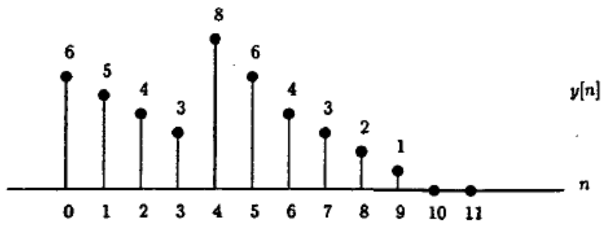
Consideriamo le due sequenze a lunghezza finita in figura



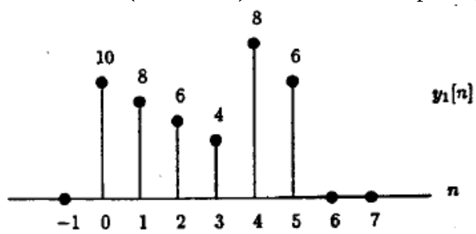
Disegnare la loro convoluzione circolare su base N per $N = 6$ e $N = 10$.

Soluzione dell'Esercizio 4.11

Un modo per risolvere il problema è quello di trovare per prima cosa la convoluzione lineare fra le due sequenze, ovvero $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$:



da notare che $y(n)$ è lunga $N = 6 + 5 - 1 = 10$ punti.
Per $N = 6$ gli ultimi quattro punti non nulli ($6 \le n \le 9$) si ribaltano sui primi, quindi $y_1(n) = x_1(n) \textcircled{6} x_2(n)$ è



Per $N = 10$ non vi è aliasing, ovvero la convoluzione circolare su base 10 coincide con la convoluzione lineare.

Capitolo 5

Fast Fourier Transform - FFT

Esercizio 5.1

Supponiamo di avere a disposizione un programma che calcola la DFT di una sequenza $x(n)$ di lunghezza N

$$X(k) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} \qquad\qquad 0 \le k \le N-1$$

ovvero l'ingresso del programma è la sequenza $x(n)$ e l'uscita è la DFT $X(k)$. Mostrare come l'ingresso e/o l'uscita del programma possano essere riarrangiate in modo che il programma possa essere usato per il calcolo della DFT inversa

$$x(n) \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-kn} \qquad\qquad 0 \le n \le N-1$$

Soluzione dell'Esercizio 5.1

Il problema ammette più di una soluzione, fra queste ne vediamo due.
Soluzione # 1
Usare il programma per ottenere la DFT di $X(k)$

$$g(n) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{kn} \qquad\qquad 0 \le n \le N-1$$

quindi calcolare

$$x(n) \;=\; \frac{1}{N}\, g(((N-n))_N) \qquad\qquad 0 \le n \le N-1$$

dove al solito $((N-n))_N$ indica una traslazione circolare su base N. Per verificare che sia una risposta corretta basta espandere l'equazione sopra

$$x(n) \;=\; \frac{1}{N}\, g(((N-n))_N) \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-j2\pi k(N-n)/N} \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi kn/N}$$

Soluzione # 2
Diamo in ingresso al programma la sequenza complessa coniugata di $X(k)$ ottenendo

$$f(n) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, W_N^{kn} \qquad\qquad 0 \le n \le N-1$$

quindi calcolare

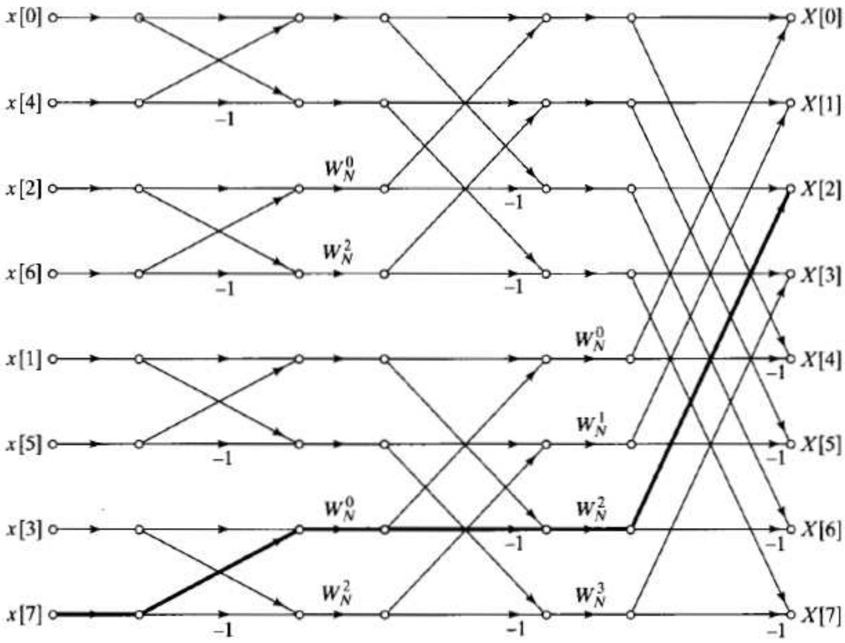
$$x(n) \;=\; \frac{1}{N}\, f^*(n) \qquad\qquad 0 \le n \le N-1$$

verifica

$$x(n) \;=\; \frac{1}{N}\, f^*(n) \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi kn/N}$$

Esercizio 5.2

La figura seguente mostra il grafo di un algoritmo di FFT a decimazione nel tempo per $N = 8$. La linea evidenziata mostra un percorso fra il campione di ingresso $x(7)$ e il campione della DFT $X(2)$.



(a) Quale è il "guadagno" lungo il percorso enfatizzato in figura?

(b) Quanti altri percorsi nel grafo iniziano a $x(7)$ e terminano a $X(2)$? Questo è vero in generale? Ovvero, quanti percorsi uniscono ciascun campione di ingresso con ciascun campione di uscita?

(c) Consideriamo ora il campione di uscita $X(2)$. Tracciando i percorsi nel grafo mostrare che ciascun campione di ingresso contribuisce col corretto peso al campione di uscita, ossia verificare che

$$X(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\, e^{-j(2\pi/N)2n}$$

Soluzione dell'Esercizio 5.2

(a) Il "guadagno" lungo il percorso enfatizzato vale

$$W_N^0\,(-1)\,W_N^2 = -W_N^2$$

(b) C'è un solo percorso fra $x(7)$ e $X(2)$. Questo vale in generale: c'è un solo percorso fra un campione dell'ingresso e un campione dell'uscita.

(c)

$$\begin{aligned}
x(0) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } 1\\
x(1) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } W_N^2\\
x(2) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } -W_N^0 = -1\\
x(3) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } -W_N^0 W_N^2 = -W_N^2\\
x(4) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } 1\\
x(5) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } W_N^2\\
x(6) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } -W_N^0 = -1\\
x(7) &\to X(2): && \text{Il guadagno è } -W_N^2
\end{aligned}$$

ma

$$X(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\, W_N^{2n} = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^2 + x(2)W_N^4 + x(3)W_N^6 + x(4)W_N^8 + x(5)W_N^{10} + x(6)W_N^{12} + x(7)W_N^{14}$$

$$X(2) = x(0) + x(1)W_N^2 + x(2)(-1) + x(3)(-W_N^2) + x(4) + x(5)W_N^2 + x(6)(-1) + x(7)(-W_N^2)$$

Esercizio 5.3

Un segnale analogico $x_a(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_c = 800$ Hz per la durata di 2 secondi. Volendo filtrare la sequenza $x(n)$ ottenuta con un filtro LTI causale avente risposta all'impulso $h(n)$ lunga 350 campioni, nel senso che $h(n) = 0$ per $n < 0$ e per $n >= 350$, calcolare:

(a) il numero di operazioni approssimato richiesto dal calcolo diretto della convoluzione discreta;

(b) Il numero di operazioni richiesto se si usa il metodo di calcolo mediante FFT.

Soluzione dell'Esercizio 5.3

La sequenza $x(n)$ ha lunghezza pari a 1600 campioni.

(a) Il numero di operazioni richiesto dal calcolo diretto della convoluzione discreta è approssimabile a

$$1600 \cdot 350 \ = \ 560000 \ = \ 5.6 \cdot 10^5.$$

(b) Il numero di operazioni richiesto se si usa il metodo di calcolo mediante FFT si trova come segue. Per avere come risultato la convoluzione lineare (e non la circolare) è necessario portare entrambe le sequenze a lunghezza $N_1 = 1600 + 350 - 1 = 1949$, allungandole con zeri. Per poter utilizzare l'algoritmo della FFT è poi necessario che la lunghezza sia una potenza del 2: la prima disponibile è $N_2 = 2^{11} = 2048$. Allungando entrambe le sequenze con zeri fino alla dimensione N_2 il costo di ciascuna FFT, diretta o inversa, vale $(N_2/2)\log_2 N_2 = 1024 \cdot 11 = 11264$. Il costo per 3 FFT (due dirette e una inversa) è $11264 \cdot 3 = 33792$, a cui vanno aggiunte le 2048 operazioni necessarie ad effettuare il prodotto delle due FFT. Quindi in totale sono $33792 + 2048 = 35840 \approx 3.6 \cdot 10^4$.

Il metodo della convoluzione diretta richiede quindi un numero di operazioni circa 15.6 volte maggiore.

Esercizio 5.4

Un segnale analogico $x_a(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_c = 1000$ Hz per la durata di 15 secondi. Volendo filtrare la sequenza $x(n)$ ottenuta con un filtro LTI causale avente risposta all'impulso $h(n)$ lunga 1000 campioni, nel senso che $h(n) = 0$ per $n < 0$ e per $n >= 1000$, calcolare:

(a) il numero di operazioni approssimato richiesto dal calcolo diretto della convoluzione discreta;

(b) Il numero di operazioni richiesto se si usa il metodo di calcolo mediante FFT.

Soluzione dell'Esercizio 5.4

La sequenza $x(n)$ ha lunghezza pari a 15000 campioni.

(a) Il numero di operazioni richiesto dal calcolo diretto della convoluzione discreta è approssimabile a

$$15000 \cdot 1000 \ = \ 1.5 \cdot 10^7.$$

(b) Il numero di operazioni richiesto se si usa il metodo di calcolo mediante FFTsi trova come segue. Per avere come risultato la convoluzione lineare (e non la circolare) è necessario portare entrambe le sequenze a lunghezza $N_1 = 15000 + 1000 - 1 = 15999$, allungandole con zeri. Per poter utilizzare l'algoritmo della FFT è poi necessario che la lunghezza sia una potenza del 2: la prima disponibile è $N_2 = 2^{14} = 16384$. Allungando entrambe le sequenze con zeri fino alla dimensione N_2 il costo di ciascuna FFT, diretta o inversa, vale $(N_2/2)\log_2 N_2 = 8192 \cdot 14 = 114688$. Il costo per 3 FFT (due dirette e una inversa) è $114688 \cdot 3 = 344064$, a cui vanno aggiunte le 16384 operazioni necessarie ad effettuare il prodotto delle due FFT. Quindi in totale sono $344064 + 16384 = 360448 \approx 3.6 \cdot 10^5$.

Il metodo della convoluzione diretta richiede quindi un numero di operazioni circa $41,6$ volte maggiore.

Esercizio 5.5

Dobbiamo calcolare l'uscita di un filtro avente risposta all'impulso $h(n)$ di lunghezza pari a $M = 40$ campioni ad un ingresso $x(n)$ avente lunghezza pari a $N_x = 10^5$ campioni. Il massimo ritardo ammesso è pari a 10^3 campioni (considerate trascurabile il tempo di calcolo). Calcolare il numero di operazioni richiesto utilizzando la tecnica della sovrapposizione e somma (*overlap-add*) al variare della lunghezza L dei segmenti di $x(n)$ utilizzati per il calcolo, assumendo che $L > 80$. Confrontare con il costo del calcolo della convoluzione diretta.

Soluzione dell'Esercizio 5.5

Segmentando $x(n)$ in tratti di lunghezza L dobbiamo, per ciascuno di essi, eseguire le DFT su di una lunghezza $N_L = L + M - 1$. Per ovvie ragioni di efficienza (vedi dispense) è opportuno che N_L sia una potenza del due. Dai dati del problema sappiamo poi che $L > 80$ e che $N_L < 10^3$ (assumendo che il tempo di calcolo sia trascurabile). Le scelte possibili sono allora:

N_L	$L = N_L - M + 1$	N_S = numero di segmenti
$128 = 2^7$	89	1124
$256 = 2^8$	217	461
$512 = 2^9$	473	212
$1024 = 2^{10}$	985	102

Il numero di segmenti è l'intero maggiore o uguale a $10^5/L$, se l'ultimo segmento risulta più corto di L bisogna allungarlo con zeri.
Per ciascun segmento bisogna eseguire una DFT di lunghezza N_L del segmento stesso, mentre ipotizziamo che la DFT di $h(n)$ allungata con zeri fino a N_L si esegua una sola volta (è sempre la stessa, non serve ricalcolarla ogni volta!). Poi è necessaria una DFT inversa, sempre lunga N_L campioni. Alla fine servono ancora $(M - 1)$ somme per ricombinare i campioni dell'uscita. Utilizzando gli algoritmi di FFT e detto N_S il numero dei segmenti servono allora circa

$$N_S \cdot \left[2 \cdot \frac{N_L}{2} \log_2 N_L + (M-1)\right] + \frac{N_L}{2} \log_2 N_L$$

operazioni. Al variare delle possibili scelte per N_L si ottiene

N_L	$L = N_L - M + 1$	N_S	# operazioni (circa)
$128 = 2^7$	89	1124	$1051 \cdot 10^3$
$256 = 2^8$	217	461	$963 \cdot 10^3$
$512 = 2^9$	473	212	$987 \cdot 10^3$
$1024 = 2^{10}$	985	102	$1054 \cdot 10^3$

Il costo della convoluzione diretta è circa $N \cdot M = 4000 \cdot 10^3$.

Esercizio 5.6

Dobbiamo calcolare l'uscita di un filtro avente risposta all'impulso $h(n)$ di lunghezza pari a $M = 40$ campioni ad un ingresso $x(n)$ avente lunghezza pari a $N_x = 10^5$ campioni. Il massimo ritardo ammesso è pari a 1200 campioni (considerate trascurabile il tempo di calcolo). Calcolare il numero di operazioni richiesto utilizzando la tecnica della sovrapposizione e estrazione (*overlap-save*) al variare della lunghezza N dei segmenti di $x(n)$ utilizzati per il calcolo, assumendo che $N > 80$. Confrontare con il costo del calcolo della convoluzione diretta.

Soluzione dell'Esercizio 5.6

Segmentando $x(n)$ in tratti di lunghezza N dobbiamo, per ciascuno di essi, eseguire le DFT su di una lunghezza N. Per ovvie ragioni di efficienza (vedi dispense) è opportuno che N sia una potenza del due. Dai dati del problema sappiamo poi che $N > 80$ e che $N < 1200$ (assumendo che il tempo di calcolo sia trascurabile). Le scelte possibili sono allora:

N	N_S = numero di segmenti
$128 = 2^7$	1125
$256 = 2^8$	462
$512 = 2^9$	212
$1024 = 2^{10}$	102

Il numero di segmenti è l'intero maggiore o uguale a $(10^5 + M - 1)/(N - M + 1)$, se l'ultimo segmento risulta più corto di L bisogna allungarlo con zeri: la formula tiene conto del fatto che bisogna far precedere il primo segmento da $(M - 1)$ zeri.
Per ciascun segmento bisogna eseguire una DFT di lunghezza N del segmento stesso, mentre ipotizziamo che la DFT di $h(n)$ allungata con zeri fino a N si esegua una sola volta (è sempre la stessa, non serve ricalcolarla ogni volta!). Poi è necessaria una DFT inversa, sempre lunga N campioni. Utilizzando gli algoritmi di FFT e detto N_S il numero dei segmenti servono allora circa

$$N_S \cdot \left[2 \cdot \frac{N}{2} \log_2 N\right] + \frac{N}{2} \log_2 N$$

operazioni. Al variare delle possibili scelte per N si ottiene

N	N_S = numero di segmenti	# operazioni (circa)
$128 = 2^7$	1125	$1008 \cdot 10^3$
$256 = 2^8$	462	$947 \cdot 10^3$
$512 = 2^9$	212	$979 \cdot 10^3$
$1024 = 2^{10}$	102	$1050 \cdot 10^3$

Il costo della convoluzione diretta è circa $N \cdot M = 4000 \cdot 10^3$.

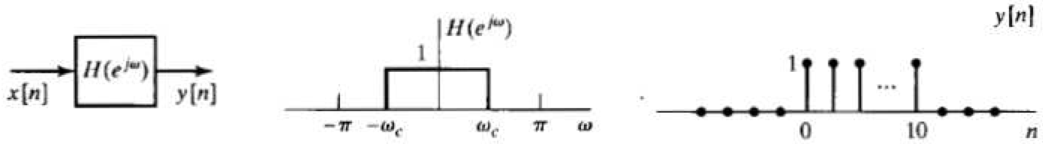
Capitolo 6

Analisi in frequenza dei sistemi LTI

Esercizio 6.1

Nel sistema mostrato in figura, $H(e^{j\omega})$ è un filtro passabasso ideale. Determinare se, per qualche scelta dell'ingresso $x(n)$ e della frequenza di taglio ω_c, l'uscita può essere la sequenza

$$y(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Soluzione dell'Esercizio 6.1

La trasformata di Fourier di $y(n)$ vale (vedi il capitolo 1 delle dispense)

$$Y(e^{j\omega}) = e^{j5\omega} \frac{\sin[(11/2)\omega]}{\sin(\omega/2)}$$

e occupa l'intera banda fra $-\pi$ e π. Quindi, visto che $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$ la sola scelta che può generare $y(n)$ è $x(n) = y(n)$ e $\omega_c = \pi$.

Esercizio 6.2

Si consideri un sistema LTI stabile con ingresso $x(n)$ e uscita $y(n)$. L'ingresso e l'uscita soddisfano l'equazione alle differenze

$$y(n-1) - \frac{10}{3} y(n) + y(n+1) = x(n)$$

(a) Trovare gli zeri e i poli nel piano z.

(b) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

Soluzione dell'Esercizio 6.2

Poichè

$$z^{-1}Y(z) - \frac{10}{3} Y(z) + zY(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{z^{-1} - (10/3) + z} = \frac{z}{(z - 1/3)(z - 3)} = \frac{-1/8}{z - (1/3)} + \frac{9/8}{z - 3}$$

(a) I poli sono in $z = 1/3$ e $z = 3$, gli zeri sono in $z = 0$ e $z = \infty$.

(b)

$$H(z) \;=\; \frac{-(1/8)z^{-1}}{1-(1/3)z^{-1}} + \frac{(9/8)z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

Poichè il sistema è stabile la ROC è $(1/3) < |z| < 3$ e quindi

$$h(n) \;=\; -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) \;-\; \frac{9}{8}\,3^{n-1}\,u(-n)$$

Esercizio 6.3

Si consideri un sistema LTI discreto per il quale l'ingresso $x(n)$ e l'uscita $y(n)$ sono legati dall'equazione alle differenze del secondo ordine

$$y(n-1) + \frac{1}{3}\,y(n-2) \;=\; x(n)$$

Scegliere dalla lista seguente **due** possibili risposte all'impulso del sistema.

(a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n+1)$

(b) $3^{n+1}\,u(n+1)$

(c) $3\,(-3)^{n+2}\,u(-n-2)$

(d) $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u(-n-2)$

(e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(-n-2)$

(f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n+1)$

(g) $(-3)^{n+1}\,u(n)$

(h) $n^{1/3}\,u(n)$

Soluzione dell'Esercizio 6.3

$$z^{-1}\,Y(z) \;+\; \frac{1}{3}\,z^{-2}\,Y(z) \;=\; X(z)$$

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{1}{z^{-1} + (1/3)z^{-2}} \;=\; \frac{z}{1+(1/3)z^{-1}}$$

Esiste un solo polo in $z = 1/3$.
1) Se la ROC è $(1/3) < |z|$ la risposta all'impulso vale

$$h_1(n) \;=\; \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n+1) \qquad \Rightarrow \quad \text{risposta (a)}$$

2) Se la ROC è $(1/3) > |z|$ la risposta all'impulso vale

$$h_2(n) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(-n-2) = -\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u(-n-2) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u(-n-2) \quad \Rightarrow \quad \text{risposta (d)}$$

Esercizio 6.4

Quando l'ingresso di un sistema LTI vale

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$$

l'uscita è

$$y(n) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

(a) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema e indicare poli e zeri.

(b) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(c) Scrivere l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.

(d) Il sistema è stabile? Il sistema è causale?

Soluzione dell'Esercizio 6.4

(a)

$$X(z) = \frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{-(3/2)z^{-1}}{(1-(1/2)z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$Y(z) = \frac{6}{1-(1/2)z^{-1}} - \frac{6}{1-(3/4)z^{-1}} = \frac{-(3/2)z^{-1}}{(1-(1/2)z^{-1})(1-(3/4)z^{-1})} \qquad \frac{3}{4} < |z|$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-(3/2)z^{-1}}{(1-(1/2)z^{-1})(1-(3/4)z^{-1})} \cdot \frac{(1-(1/2)z^{-1})(1-2z^{-1})}{-3/2z^{-1}} = \frac{(1-2z^{-1})}{(1-(3/4)z^{-1})} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

Un polo in $z = 3/4$ e uno zero in $z = 2$.

(b)

$$H(z) = \frac{1}{(1-(3/4)z^{-1})} - \frac{2z^{-1}}{(1-(3/4)z^{-1})} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$h(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

(c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1-2z^{-1})}{(1-(3/4)z^{-1})}$$

$$Y(z) - (3/4)z^{-1}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$y(n) - (3/4)y(n-1) = x(n) - 2x(n-1)$$

(d) La ROC di $H(z)$ include il circolo unitario, quindi il sistema è stabile. La risposta all'impulso trovata in (b) ci dice che il sistema è causale.

Esercizio 6.5

Si consideri un sistema descritto da una equazione alle differenze a coefficienti costanti inizialmente a riposo. La risposta al gradino unitario (cioè all'ingresso $x(n) = u(n)$) del sistema è

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + u(n)$$

(a) Trovare l'equazione alle differenze.

(b) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(c) Il sistema è stabile? Il sistema è causale?

Soluzione dell'Esercizio 6.5

All'ingresso $x(n) = u(n)$ corrisponde la $y(n)$ data, eseguendo le trasformate z troviamo che

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{1-(1/3)z^{-1}} + \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}} && |z| > 1 \\
X(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} && |z| > 1 \\
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3-(19/6)z^{-1}+(2/3)z^{-2}}{1-(7/12)z^{-1}+(1/12)z^{-2}} && |z| > 1/3
\end{aligned}$$

(a)

$$y(n) - \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{12}y(n-2) = 3x(n) - \frac{19}{6}x(n-1) + \frac{2}{3}x(n-2)$$

(b) Scomponiamo $H(z)$ in frazioni parziali (fratti semplici)

$$H(z) = \frac{1}{1-(1/3)z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-(1/3)z^{-1}} + \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-(1/4)z^{-1}} + 1 \qquad |z| > 1/3$$

quindi

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) + \delta(n)$$

(c) La ROC di $H(z)$ include il circolo unitario, quindi il sistema è stabile. La risposta all'impulso trovata in (b) ci dice che il sistema è causale.

Esercizio 6.6

Di un sistema LTI abbiamo le seguenti informazioni:

- il sistema è causale;
- quando l'ingresso vale

$$x(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{4}{3}(2)^n u(-n-1)$$

  la trasformata z dell'uscita vale

$$Y(z) = \frac{1-z^{-2}}{(1-(1/2)z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

(a) Calcolare la trasformata z di $x(n)$.

(b) Quali sono le possibili scelte per la regione di convergenza di $Y(z)$?

(c) Quali sono le possibili scelte per la risposta all'impulso del sistema?

Soluzione dell'Esercizio 6.6

(a)

$$X(z) = \frac{-(1/3)}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{4/3}{1-2z^{-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(b) $Y(z)$ ha gli stessi poli di $X(z)$ e poichè la funzione di trasferimento $H(z)$ ha ROC che deve includere l'intersezione delle ROC di ingresso e uscita la ROC di $Y(z)$ è ancora $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

(c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-2} \quad \Rightarrow \quad h(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$$

Esercizio 6.7

Quando l'ingresso di un sistema LTI è

$$x(n) = 5\,u(n)$$

l'uscita vale

$$y(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right] u(n)$$

(a) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, calcolare gli zeri e i poli e indicare la regione di convergenza.

(b) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(c) Scrivere l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.

Soluzione dell'Esercizio 6.7

(a)

$$X(z) = \frac{5}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{2}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{3}{1+(3/4)z^{-1}} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{(1-(1/2)z^{-1})\,(1+(3/4)z^{-1})} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

Poli in $z = 1/2$ e $z = -3/4$, zeri in $z = 1$ e $z = 0$.

(b) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1-(1/2)z^{-1})\,(1+(3/4)z^{-1})} = \frac{-(2/5)}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{-(7/5)}{1+(3/4)z^{-1}} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$h(n) = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{7}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

(c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + (1/4)z^{-1} - (3/8)z^{-2}}$$

$$Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}\,Y(z) - \frac{3}{8}z^{-2}\,Y(z) = X(z) - z^{-1}\,X(z)$$

$$y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{3}{8}y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Esercizio 6.8

Un sistema LTI causale è descritto dall'equazione alle differenze

$$y(n) = \frac{3}{2}y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

(a) Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema, calcolare gli zeri e i poli e indicare la regione di convergenza.

(b) Trovare la risposta all'impulso del sistema.

(c) Dovreste aver trovato che il sistema non è stabile. Trovate una risposta all'impulso stabile (non causale) che soddisfi l'equazione alle differenze.

Soluzione dell'Esercizio 6.8

(a)

$$Y(z) \;=\; \frac{3}{2}\,z^{-1}\,Y(z) \;+\; z^{-2}\,Y(z) \;+\; z^{-1}\,X(z)$$

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{z^{-1}}{1-(3/2)z^{-1}-z^{-2}} \;=\; \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})\,(1+(1/2)z^{-1})} \qquad |z|>2$$

Poli in $z = 2$ e $z = -1/2$, zeri in $z = 0$ e $z = \infty$.

(b)

$$H(z) \;=\; \frac{2/5}{(1-2z^{-1})} \;-\; \frac{2/5}{(1+(1/2)z^{-1})} \qquad |z|>2$$

$$h(n) \;=\; \frac{2}{5}\left[2^n \;-\; \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

(c) Se si vuole un sistema stabile la ROC deve contenere il circolo unitario, quindi $(1/2) < |z| < 2$.

$$h(n) \;=\; -\frac{2}{5}\,2^n u(-n-1) \;-\; \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Esercizio 6.9

Sia dato un sistema LTI descritto dall'equazione alle differenze

$$y(n-1) \;-\; \frac{5}{2}\,y(n) \;+\; y(n+1) \;=\; x(n)$$

Tale sistema può essere oppure no stabile e/o causale.
Considerando i poli e gli zeri associati alla precedente equazione alle differenze trovare tre possibili scelte per la risposta all'impulso e specificare quale di esse corrisponde a un sistema stabile e quale corrisponde a un sistema causale.

Soluzione dell'Esercizio 6.9

$$z^{-1}Y(z) \;-\; \frac{5}{2}Y(z) \;+\; z\,Y(z) \;=\; X(z)$$

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{z^{-1}}{1-(5/2)z^{-1}+z^{-2}} \;=\; \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})\,(1-(1/2)z^{-1})} \;=\; \frac{2/3}{1-2z^{-1}} \;-\; \frac{2/3}{1-(1/2)z^{-1}}$$

Poli in $z = 2$ e $z = 1/2$, zeri in $z = 0$ e $z = \infty$.
Ci sono tre possibili scelte per la regione di convergenza

(a) $|z| < 1/2$:

$$h(n) \;=\; -\frac{2}{3}\,2^n u(-n-1) \;+\; \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

(b) $(1/2) < |z| < 2$:

$$h(n) \;=\; -\frac{2}{3}\,2^n u(-n-1) \;-\; \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

La ROC include il circolo unitario, quindi questo sistema è stabile.

(c) $|z| > 2$

$$h(n) \;=\; \frac{2}{3}\,2^n u(n) \;-\; \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

La ROC è esterna al polo a massima distanza dall'origine, quindi il sistema è causale, cosa peraltro evidente guardando la risposta all'impulso.

Esercizio 6.10

Un sistema LTI causale ha funzione di trasferimento

$$H(z) \;=\; \frac{(1+0.2z^{-1})\,(1-9z^{-2})}{1+0.81\,z^{-2}}$$

(a) Il sistema è stabile?

(b) Trovare le espressioni di un sistema a fase minima $H_1(z)$ e di un sistema passa-tutto $H_{ap}(z)$ tale che

$$H(z) \;=\; H_1(z)\,H_{ap}(z)$$

Soluzione dell'Esercizio 6.10

(a) Si. I poli sono in $z = \pm j\,0.9$, interni al circolo unitario e per un sistema causale la ROC è esterna al polo a massima distanza dall'origine, quindi il sistema è stabile.

(b) Per prima cosa fattorizziamo $H(z)$ in due parti: la prima deve essere a fase minima e quindi avere poli e zeri all'interno del circolo unitario, la seconda deve contenere i poli e gli zeri restanti (quelli fuori il circolo unitario).

$$H(z) \;=\; \underbrace{\frac{1+0.2z^{-1}}{1+0.81\,z^{-2}}}_{\text{fase minima}} \quad\cdot\quad \underbrace{\frac{1-9z^{-2}}{1}}_{\text{poli e zeri restanti}}$$

Un sistema passa-tutto ha i poli e gli zeri in coppie complesse coniugate reciproche. Se includiamo il fattore $(1-(1/9)z^{-2})$ in entrambi i fattori la prima parte resta a fase minima e la seconda diventa passa-tutto:

$$H(z) \;=\; \frac{(1+0.2z^{-1})\,(1-(1/9)z^{-2})}{1+0.81\,z^{-2}} \cdot \frac{1-9z^{-2}}{1-(1/9)z^{-2}} \;=\; H_1(z)\,H_{ap}(z)$$

Esercizio 6.11

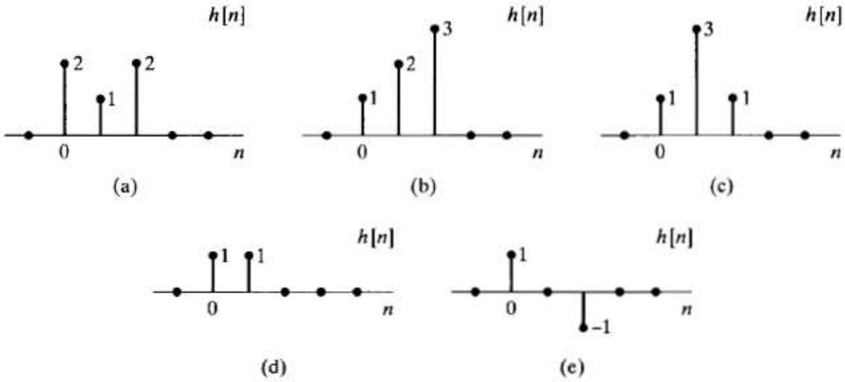
Si consideri la classe dei filtri a tempo discreto la cui risposta in frequenza ha la forma

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \left|H(e^{j\omega})\right|\, e^{-j\alpha\omega}$$

con α costante reale. Come visto questa classe di filtri è nota come *filtri a fase lineare*.
Si consideri anche la classe dei filtri a tempo discreto la cui risposta in frequenza ha la forma

$$H(e^{j\omega}) \;=\; A(e^{j\omega})\, e^{-j\alpha\omega+\beta}$$

dove $A(e^{j\omega})$ è una funzione reale (con valori in generale sia positivi che negativi) e α e β sono due costanti reali. Come visto questa classe di filtri è nota come *filtri a fase lineare generalizzata*.
Per ciascuno dei filtri le cui risposte all'impulso sono indicate nella figura che segue determinare se è un filtro a fase lineare generalizzata. Se lo è trovare $A(e^{j\omega})$, α e β. Inoltre, per ciascun filtro trovato con fase lineare generalizzata, indicare se soddisfa i requisiti più stringenti della classe dei filtri a fase lineare.



Soluzione dell'Esercizio 6.11

(a) $h(n)$ è simmetrica rispetto a $n = 1$.

$$H(e^{j\omega}) \;=\; 2 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} \;=\; e^{-j\omega}\left(2e^{j\omega} + 1 + 2e^{-j\omega}\right) \;=\; [1 + 4\cos(\omega)]\,e^{-j\omega}$$

$A(e^{j\omega}) = [1 + 4\cos(\omega)]$, $\alpha = 1, \beta = 0$.
A fase lineare generalizzata ma non a fase lineare, poichè $A(e^{j\omega})$ non è sempre positiva.

(b) Questa sequenza non ha simmetria pari e neppure dispari, quindi non ha fase lineare generalizzata.

(c) $h(n)$ è simmetrica rispetto a $n = 1$.

$$H(e^{j\omega}) \;=\; 1 + 3\,e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} \;=\; e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + 3 + e^{-j\omega}\right) \;=\; [3 + 2\cos(\omega)]\,e^{-j\omega}$$

$A(e^{j\omega}) = [3 + 2\cos(\omega)]$, $\alpha = 1, \beta = 0$.
A fase lineare generalizzata e a fase lineare.

(d) $h(n)$ ha simmetria pari.

$$H(e^{j\omega}) \;=\; 1 + e^{-j\omega} \;=\; e^{-j(1/2)\omega}\left(e^{j(1/2)\omega} + e^{-j(1/2)\omega}\right) \;=\; 2\cos(\omega/2)\,e^{-j(1/2)\omega}$$

$A(e^{j\omega}) = 2\cos(\omega/2)$, $\alpha = 1/2, \beta = 0$.
A fase lineare generalizzata ma non a fase lineare, poichè $A(e^{j\omega})$ non è sempre positiva.

(e) $h(n)$ ha simmetria dispari.

$$H(e^{j\omega}) \;=\; 1 - e^{-j2\omega} \;=\; e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) \;=\; e^{-j\omega}\,2\,j\,\sin\omega \;=\; [2\sin(\omega)]\,e^{-j\omega + j\pi/2}$$

$A(e^{j\omega}) = 2\sin(\omega)$, $\alpha = 1, \beta = \pi/2$.
A fase lineare generalizzata ma non a fase lineare, poichè $A(e^{j\omega})$ non è sempre positiva e $\beta \neq 0$.

Esercizio 6.12

Per ciascuna delle seuenti funzioni di trasferimento indicare se rappresenta un sistema a fase minima. Giustificare le risposte.

(a)

$$H(z) \;=\; \frac{(1 - 2z^{-1})\,(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})\,(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$$

(b)

$$H(z) \;=\; \frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})\,(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{2}{3}z^{-1})\,(1 + \frac{2}{3}z^{-1})}$$

(c)

$$H(z) \;=\; \frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})\,(1 + \frac{j}{2}z^{-1})}$$

(d)

$$H(z) \;=\; \frac{z^{-1}\,(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})\,(1 + \frac{j}{2}z^{-1})}$$

Soluzione dell'Esercizio 6.12

(a) $H(z)$ ha uno zero fuori dal circolo unitario in $z = 2$ quindi non è a fase minima.

(b) $H(z)$ è a fase minima perchè tutti i poli e gli zeri sono interni al circolo unitario.

(c) $H(z)$ è a fase minima perchè tutti i poli e gli zeri sono interni al circolo unitario.

(d) $H(z)$ ha uno zero fuori dal circolo unitario in $z = \infty$ quindi non è a fase minima. Inoltre il sistema inverso non potrà essere causale avendo un polo all'infinito.

Esercizio 6.13

Per ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento $H_k(z)$ trovare un sistema a fase minima $H_{min}(z)$ tale che il modulo della risposta in frequenza dei due sistemi sia uguale, ovvero tale che $|H_k(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$.

(a)

$$H_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + (1/3)z^{-1}}$$

(b)

$$H_2(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})(1 - (1/2)z^{-1})}{z^{-1}(1 + (1/3)z^{-1})}$$

(c)

$$H_3(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})(1 - (1/4)z^{-1})}{(1 - (3/4)z^{-1})(1 - (4/3)z^{-1})}$$

Soluzione dell'Esercizio 6.13

Un sistema a fase minima con uno spettro di ampiezza equivalente può essere trovato analizzando la funzione di trasferimento e riflettendo tutti i poli e gli zeri che sono fuori dal circolo unitario nella posizione complessa coniugata e reciproca, portandoli quindi all'interno del circolo unitario. Da notare che può essere necessario introdurre un fattore di scala quando un polo o uno zero sono riflessi all'interno del circolo unitario.

(a) Il sistema ha un polo in $1/3$ ed uno zero in 2. Riflettendo lo zero in $1/2$ si ottiene

$$H_{min}(z) = \alpha \left(\frac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 + (1/3)z^{-1}} \right)$$

Il fattore di scala α si ottiene uguagliando i moduli delle risposte in frequenza

$$\left| \frac{1 - 2e^{j\omega}}{1 + (1/3)e^{j\omega}} \right| = \left| \alpha \left(\frac{1 - (1/2)e^{j\omega}}{1 + (1/3)e^{j\omega}} \right) \right|$$

$$\frac{|1 - 2e^{j\omega}|}{|1 + (1/3)e^{j\omega}|} = |\alpha| \frac{|1 - (1/2)e^{j\omega}|}{|1 + (1/3)e^{j\omega}|}$$

$$|1 - 2e^{j\omega}| = |\alpha|\,|1 - (1/2)e^{j\omega}|$$

$$|1 - 2\cos\omega - 2j\sin\omega| = |\alpha|\,|1 - (1/2)\cos\omega - (1/2)\sin\omega|$$

$$\sqrt{5 - 4\cos\omega} = |\alpha| \sqrt{(5/4) - \cos\omega}$$

quindi $\alpha = \pm 2$ e

$$H_{min}(z) = 2 \left(\frac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 + (1/3)z^{-1}} \right)$$

(b) Per prima cosa si riflette lo zero in $z = -3$ nella sua posizione coniugata reciproca $z = -1/3$, quindi si trova il fattore di scala.

$$H_{min}(z) = 3\, \frac{(1 + (1/3)z^{-1})(1 - (1/2)z^{-1})}{z^{-1}(1 + (1/3)z^{-1})}$$

I termini $(1 + (1/3)z^{-1})$ si cancellano e rimane

$$H_{min}(z) = 3\, \frac{(1 - (1/2)z^{-1})}{z^{-1}}$$

Il termine $1/z^{-1}$ non modifica il modulo della risposta in frequenza del sistema e quindi può essere rimosso. Ciò che rimane ha uno zero entro il circolo unitario e quindi è a fase minima

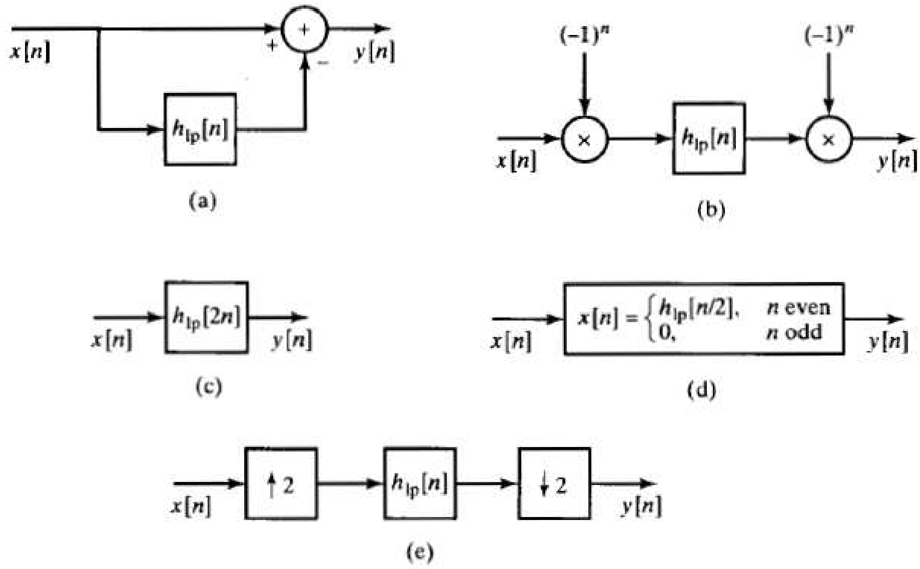
$$H_{min}(z) = 3 \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} \right)$$

(c) Bisogna riflettere lo zero in $z = 3$ in posizione $z = 1/3$ e il polo in $z = 4/3$ in posizione $z = 3/4$, quindi determinare il fattore di scala:

$$H_{min}(z) = \frac{9}{4}\, \frac{(1 - (1/3)z^{-1})(1 - (1/4)z^{-1})}{(1 - (3/4)z^{-1})^2}$$

Esercizio 6.14

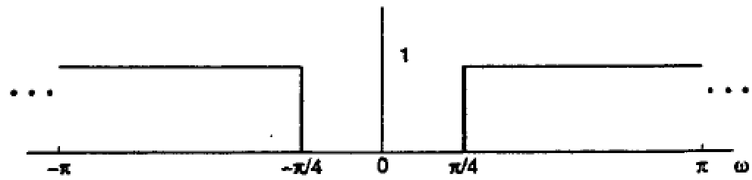
Sia $h_{lp}(n)$ la risposta all'impulso di un filtro passa-basso ideale con guadagno in banda unitario e frequenza di taglio $\omega_c = \pi/4$. La figura che segue mostra cinque sistemi, ciascuno dei quali è equivalente ad un filtro ideale selettivo in frequenza. Per ciascun sistema disegnare la risposta in frequenza corrispondente, indicando esplicitamente i limiti di banda in termini di ω_c, e specificare se il sistema è passa-basso, passa-banda, stop-banda o multi-banda.



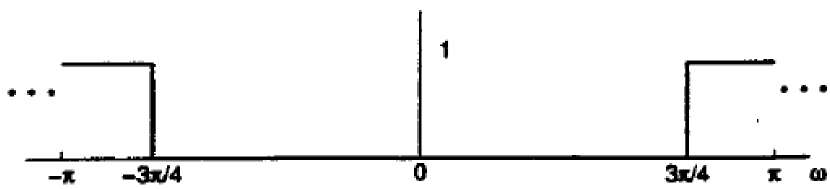
Soluzione dell'Esercizio 6.14

$h_{lp}(n)$ è un filtro passa-basso ideale con $\omega_c = \pi/4$.

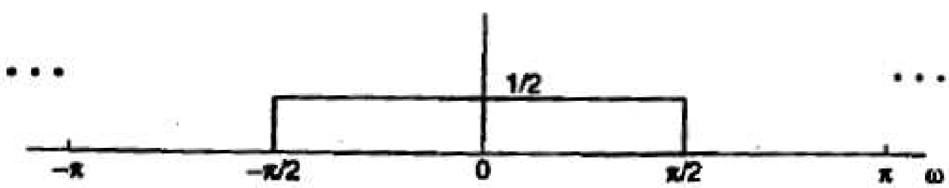
(a) $y(n) = x(n) - x(n) * h_{lp}(n) \quad \rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$. Questo è un filtro passa-alto



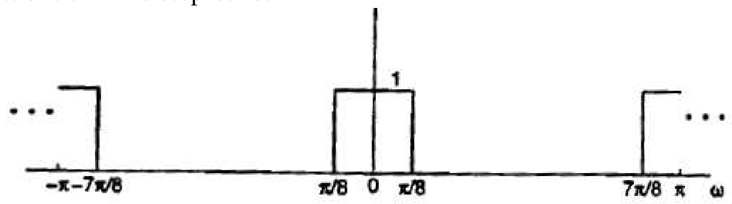
(b) Poichè $(-1)^n = e^{j\pi n}$ si ha che la trasformata di $(-1)^n x(n)$ vale $X(e^{j(\omega-\pi)})$, ovvero viene traslata circolarmente di π: si dice che $x(n)$ viene modulata di π. La stessa operazione dopo il filtro modula di nuovo di π, quindi rimette le cose a posto (demodula). Il sistema prima sposta la trasformata di $x(n)$ attorno a π, poi filtra passa-basso (che equivale ad un passa-alto sul segnale originale) e poi demodula. Il tutto corrisponde quindi ad un filtro passa-alto



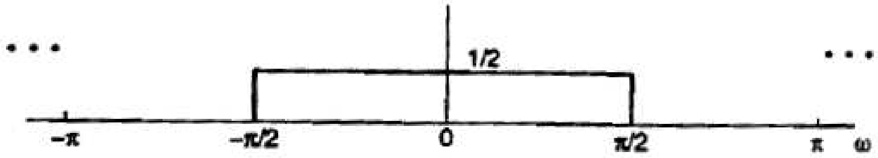
(c) $h_{lp}(2n)$ è una versione sottocampionata (*downsampled*) del filtro. Quindi la risposta viene "allargata" di un fattore due con guadagno $1/2$. Il filtro è ancora un passa-basso



(d) Questo sistema sovracampiona (*upsample*) $h_{lp}(n)$ di un fattore due. Di conseguenza l'asse delle frequenza viene compresso di un fattore due e tenendo conto della periodicità della trasformata di Fourier per sequenze si ottiene un filtro stop-banda



(e) Questo sistema sovracampiona $x(n)$ prima di farlo passare attraverso $h_{lp}(n)$ e poi lo sottocampiona. Questo raddoppia la banda di frequenza di $H_{lp}(e^{j\omega})$. Il risultato è ancora un passa-basso di banda doppia



Esercizio 6.15

Un sistema LTI causale ha funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1 - \alpha^{-1} z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

con α reale.

(a) Scrivere l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita di questo sistema.

(b) Per quale intervallo di valori di α il sistema è stabile?

(c) Disegnare il diagramma dei poli e degli zeri e indicare la regione di convergenza per $\alpha = 1/2$.

(d) Trovare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.

(e) Dimostrare che il sistema è di tipo passa-tutto, ovvero che il modulo della risposta in frequenza è costante. Specificare inoltre il valore di tale costante.

Soluzione dell'Esercizio 6.15

$$H(z) = \frac{1 - \alpha^{-1} z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

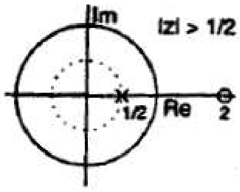
causale, quindi la ROC è $|z| > \alpha$.

(a)

$$y(n) - \alpha y(n-1) = x(n) - \frac{1}{\alpha} x(n-1)$$

(b) Poichè $H(z)$ rappresenta un sistema causale sappiamo che la ROC è $|z| > \alpha$. Per la stabilità la ROC deve includere il circolo unitario, quindi il sistema è stabile per $|\alpha| < 1$.

(c) se $\alpha = 1/2$



(d)

$$H(z) \;=\; \frac{1-\alpha^{-1}z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \;=\; \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \;-\; \frac{\alpha^{-1}z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \qquad\qquad |z| > \alpha$$

$$h(n) \;=\; \alpha^n\, u(n) \;-\; \frac{1}{\alpha}\,\alpha^{n-1}\,u(n-1)$$

(e)

$$H(e^{j\omega}) \;=\; H(z)|_{z=e^{j\omega}} \;=\; \frac{1-\alpha^{-1}e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 \;=\; H(e^{j\omega})\,H^*(e^{j\omega}) \;=\; \frac{1-\alpha^{-1}e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}\;\frac{1-\alpha^{-1}e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \;=\; \left[\frac{1+1/\alpha^2-(2/\alpha)\cos(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}\right]^{1/2} \;=\; \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2+1-2\alpha\cos\omega}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}\right]^{1/2} \;=\; \frac{1}{\alpha}$$

Esercizio 6.16

Sia $x(n)$ una sequenza causale di lunghezza N punti, $x(n) = 0$ per $n < 0$ e $n \geq N$. Quando la sequenza $x(n)$ è l'ingresso al sistema LTI causale rappresentato dalla equazione alle differenze

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-2) \;=\; x(n-2) - \frac{1}{4}x(n)$$

l'uscita $y(n)$ è anch'essa causale e di lunghezza N.

(a) Dimostrare che il sistema causale descritto dall'equazione alle differenze data rappresenta un sistema passa-tutto.

(b) Dato che

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \;=\; 5$$

trovare il valore di

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y(n)|^2$$

Soluzione dell'Esercizio 6.16

(a) Calcolando la trasformata z di entrambi i membri e riarrangiando

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{-(1/4)+z^{-2}}{1-(1/4)z^{-2}} \;=\; -\frac{1}{4}\;\frac{1-4\,z^{-2}}{1-(1/4)z^{-2}}$$

Siccome i poli e gli zeri (due poli in $z = \pm 1/2$, due zeri in $z = \pm 2$) sono in posizione reciproca coniugata il sistema è passa-tutto. Ciò si può anche notare direttamente dalla $H(z)$ osservando che i coefficienti sono uno l'inverso dell'altro (e, in generale, complessi coniugati).

(b) Una proprietà dei sistemi passa-tutto è che l'energia dell'uscita è uguale all'energia dell'ingresso. La dimostrazione è

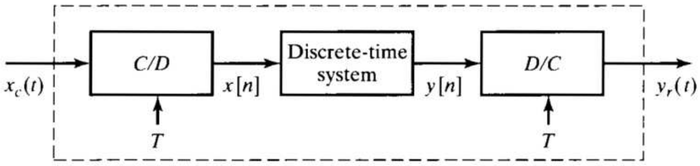
$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=0}^{N-1} |y(n)|^2 &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega}|^2\, d\omega && \text{(Teorema di Parseval)} \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}X(e^{j\omega}|^2\, d\omega \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}|^2\, d\omega && (|H(e^{j\omega})| = 1) \\
&= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 && \text{(Teorema di Parseval)}
\end{aligned}$$

Capitolo 7

Tecniche di progettazione dei filtri

Esercizio 7.1

Vogliamo realizzare un filtro LTI passa-basso a tempo continuo $H_e(j\Omega)$ usando il solito sistema in figura



Il sistema discreto LTI ha risposta in frequenza $H_d(e^{j\omega})$. L'intervallo di campionamento vale $T = 10^{-4}$ secondi e il segnale di ingresso $x_c(t)$ è limitato in banda, $X_c(j\Omega) = 0$ per $|\Omega| \geq 2\pi\,5000$.
Le specifiche per $H_e(j\Omega)$ sono

$$\begin{array}{rl} 0.99 \leq |H_e(j\Omega)| \leq 1.01 & \quad |\Omega| \leq 2\pi\,1000 \\ |H_e(j\Omega)| \leq 0.01 & \quad |\Omega| \geq 2\pi\,1100 \end{array}$$

Trovare le specifiche corrispondenti per il sistema a tempo discreto avente risposta in frequenza $H_d(e^{j\omega})$.

Soluzione dell'Esercizio 7.1

Usando la relazione $\omega = \Omega T$ possiamo trovare la frequenza superiore della banda passante, ossia ω_p, e la frequenza inferiore della banda di stop ω_s:

$$\begin{array}{rcl} \omega_p & = & 2\pi\,1000 \cdot 10^{-4} \;=\; 0.2\pi \;\text{ rad} \\ \omega_s & = & 2\pi\,1100 \cdot 10^{-4} \;=\; 0.22\pi \;\text{ rad} \end{array}$$

I termini di *ripple* sono $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ e le specifiche sono

$$\begin{array}{rl} 0.99 \leq |H_d(e^{j\omega})| \leq 1.01 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H_d(e^{j\omega})| \leq 0.01 & \quad 0.22\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{array}$$

Esercizio 7.2

Supponiamo di dover progettare un filtro a tempo discreto usando la tecnica dell'*impulse invariance* con un filtro passa-basso ideale a tempo continuo come prototipo. Il filtro prototipo a tempo continuo ha frequenza di taglio $\Omega_c = 2\pi\,1000$ rad/s e la trasformazione mediante *impulse invariance* usa $T = 0.2$ ms.
Trovare la frequenza di taglio discreta ω_c del filtro discreto risultante.

Soluzione dell'Esercizio 7.2

Usando la relazione $\omega = \Omega T$ si ottiene

$$\omega_c \;=\; \Omega_c T \;=\; 2\pi\,1000 \cdot 0.0002 \;=\; 0.4\,\pi \;\text{ rad}$$

Esercizio 7.3

Supponiamo di dover progettare un filtro a tempo discreto usando la tecnica della trasformazione bilineare con un filtro passa-basso ideale a tempo continuo come prototipo. Il filtro prototipo ha frequenza di taglio $\Omega_c = 2\pi\,2000$ rad/s e la trasformazione mediante trasformazione bilineare usa $T = 0.4$ ms.
Trovare la frequenza di taglio discreta ω_c del filtro discreto risultante.

Soluzione dell'Esercizio 7.3

Usando l'equazione della trasformazione bilineare troviamo

$$\omega_c \;=\; 2\,\arctan\left(\frac{\Omega_c\, T}{2}\right) \;=\; 2\,\arctan\left(\frac{2\pi\,2000\cdot 0.0004}{2}\right) \;\approx\; 2.384\;\;\text{rad}$$

Esercizio 7.4

Un filtro a tempo discreto ideale con frequenza di taglio $\omega_c = 2\pi/5$ è stato progettato usando l'*impulse invariance* a partire da un filtro passa-basso ideale a tempo continuo con frequenza di taglio $\Omega_c = 2\pi\,4000$ rad/s. Quale valore di T è stato usato? Tale valore è unico? Se non lo è trovare un diverso valore di T consistente con le informazioni date.

Soluzione dell'Esercizio 7.4

Usando la relazione $\omega = \Omega T$ si ottiene

$$T \;=\; \frac{\omega_c}{\Omega_c} \;=\; \frac{2\pi/5}{8000\,\pi} \;=\; \frac{1}{20000} \;=\; 50\,\mu s$$

Il valore di T è unico. Infatti è possibile trovare altri valori di T che, mediante aliasing, portano la frequenza continua Ω_c a quella discreta $\omega_c = 2\pi/5$, ma il filtro risultante non è più un filtro passa-basso ideale.

Esercizio 7.5

Si vuole usare la trasformazione bilineare per progettare un filtro discreto passabasso con frequenza di taglio $\omega_c = 3\pi/5$ a partire da un filtro continuo passa-basso ideale con frequenza di taglio $\Omega_c = 2\pi \cdot 300$ rad/sec. Trovare il valore del parametro T consistente con le specifiche date.

Soluzione dell'Esercizio 7.5

Usando l'equazione che lega le frequenze discrete e continue si ha

$$\Omega_c \;=\; \frac{2}{T}\,\tan\left(\frac{\omega_c + 2\pi k}{2}\right) \;=\; \frac{2}{T}\,\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

visto che k è intero. Quindi

$$T \;=\; \frac{2}{2\pi\cdot 300}\,\tan\left(\frac{3\pi/5}{2}\right) \;=\; 1.46\;\;\text{ms}$$

Esercizio 7.6

Vogliamo progettare un filtro FIR con le seguenti specifiche:

$$0.95 \;<\; |H(e^{j\omega})| \;<\; 1.05 \qquad\qquad 0 \le |\omega| \le 0.25\,\pi$$

$$-0.1 \;<\; |H(e^{j\omega})| \;<\; 0.1 \qquad\qquad 0.35\,\pi \le |\omega| \le \pi$$

applicando una finestra $w(n)$ alla risposta all'impulso $h_d(n)$ del filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio $\omega_c = 0.3\pi$. Quali delle finestre Rettangolare, di Barlett, di Hanning, di Hamming e di Blackman possono essere usate per soddisfare le specifiche? Per ciascuna finestra che soddisfa le specifiche trovare la larghezza minima $L = M + 1$ richiesta.

Soluzione dell'Esercizio 7.6

Questo filtro richiede un errore passa-banda massimo di $\delta_p = 0.05$ e un errore nella banda di stop massimo di $\delta_s = 0.1$. I filtri progettati col metodo delle finestre hanno, per costruzione, $\delta_p = \delta_s$.

Convertendo i valori in dB si ha

$$\delta_p = -26\,\text{dB} \qquad\qquad \delta_s = -20\,\text{dB}$$

Quindi si richiede una finestra con un *Peak Approximation Error* almeno di −26 dB. Dalla tabella in figura 7.4 delle dispense si vede che le finestre che rispettano questa richiesta sono quelle di Hanning, di Hamming e di Blackman.

La lunghezza minima L si può trovare considerando la larghezza approssimata del lobo principale (*Approximate Width of Main Lobe*) nella stessa tabella, poichè la larghezza del lobo principale è circa uguale alla larghezza della zona di transizione. Dalla tabella si trova M, essendo la lunghezza richiesta $L = M + 1$.

Hanning: $0.1\,\pi = 8\pi/M \quad\rightarrow\quad M = 80$

Hamming: $0.1\,\pi = 8\pi/M \quad\rightarrow\quad M = 80$

Blackman: $0.1\,\pi = 12\pi/M \quad\rightarrow\quad M = 120$

Esercizio 7.7

Vogliamo progettare un filtro FIR con le seguenti specifiche (uguali a quelle del problema Esercizio 7.6):

$$0.95 \;<\; |H(e^{j\omega})| \;<\; 1.05 \qquad\qquad 0 \le |\omega| \le 0.25\,\pi$$

$$-0.1 \;<\; |H(e^{j\omega})| \;<\; 0.1 \qquad\qquad 0.35\,\pi \le |\omega| \le \pi$$

applicando una finestra di Kaiser alla risposta all'impulso $h_d(n)$ del filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio $\omega_c = 0.3\pi$. Trovare i valori di β e M richiesti per soddisfare le specifiche.

Soluzione dell'Esercizio 7.7

I filtri progettati col metodo delle finestre hanno, per costruzione $\delta_p = \delta_s$, quindi bisogna usare il valore inferiore $\delta = 0.05$. Dalle formule

$$A \;=\; -20\,\log_{10}(0.05) \;=\; 26.0206 \quad \text{dB}$$

$$\beta \;=\; 0.5842\,(26.0206 - 21)^{0.4} \;+\; 0.07886\,(26.0206 - 21) \;=\; 1.5099$$

$$M \;=\; \frac{A - 8}{2.285\,\Delta\omega} \;=\; \frac{26.0206 - 8}{2.285 \cdot 0.1\pi} \;=\; 25.1 \qquad \rightarrow \quad 26$$

Esercizio 7.8

Vogliamo progettare un filtro FIR con le seguenti specifiche:

$$0.98 \;<\; |H(e^{j\omega})| \;<\; 1.02 \qquad\qquad 0 \le |\omega| \le 0.63\,\pi$$

$$-0.15 \;<\; |H(e^{j\omega})| \;<\; 0.15 \qquad\qquad 0.65\,\pi \le |\omega| \le \pi$$

applicando una finestra di Kaiser alla risposta all'impulso $h_d(n)$ del filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio $\omega_c = 0.64\pi$. Trovare i valori di β e M richiesti per soddisfare le specifiche.

Soluzione dell'Esercizio 7.8

I filtri progettati col metodo delle finestre hanno, per costruzione $\delta_p = \delta_s$, quindi bisogna usare il valore inferiore $\delta = 0.02$. Dalle formule

$$A \;=\; -20\,\log_{10}(0.02) \;=\; 33.9794 \quad \text{dB}$$

$$\beta \;=\; 0.5842\,(33.9794 - 21)^{0.4} \;+\; 0.07886\,(33.9794 - 21) \;=\; 2.65$$

$$M \;=\; \frac{A - 8}{2.285\,\Delta\omega} \;=\; \frac{33.9794 - 8}{2.285 \cdot 0.02\pi} \;=\; 180.95 \qquad \rightarrow \quad 181$$

Esercizio 7.9

Supponiamo di voler progettare un filtro passa-banda avente le seguenti specifiche:

$$\begin{array}{rclcl} -0.02 & < & |H(e^{j\omega})| & < & 0.02 \qquad & 0 \le |\omega| \le 0.2\,\pi \\ 0.95 & < & |H(e^{j\omega})| & < & 1.05 \qquad & 0.3\,\pi \le |\omega| \le 0.7\,\pi \\ -0.001 & < & |H(e^{j\omega})| & < & 0.001 \qquad & 0.75\,\pi \le |\omega| \le \pi \end{array}$$

Il filtro sarà progettato utilizzando l'*impulse invariance* con $T = 5$ ms a partire da un filtro a tempo continuo. Indicare le specifiche per la realizzazione del filtro a tempo continuo.

Soluzione dell'Esercizio 7.9

Utilizzando la relazione $\omega = \Omega\,T$, le specifiche per la realizzazione del filtro a tempo continuo sono:

$$\begin{array}{rclcl} -0.02 & < & |H(j\Omega)| & < & 0.02 \qquad & 0 \le |\Omega| \le 2\,\pi \cdot 20 \\ 0.95 & < & |H(j\Omega)| & < & 1.05 \qquad & 2\,\pi \cdot 30 \le |\Omega| \le 2\,\pi \cdot 70 \\ -0.001 & < & |H(j\Omega)| & < & 0.001 \qquad & 2\,\pi \cdot 75 \le |\Omega| \le 2\,\pi \cdot 100 \end{array}$$

NOTA: tipicamente, la tolleranza di un filtro passa-banda a tempo continuo è fra 1 e $(1 - \delta_1)$, poichè storicamente la maggior parte dei metodi di approssimazione dei filtri sono stati definiti per sistemi passivi, che hanno un guadagno minore o uguale a 1. Se necessario si possono ottenere le specifiche usando la convenzione appena vista scalando il modulo della risposta del filtro di $1/1.05$.

Esercizio 7.10

Supponiamo di voler progettare un filtro passa-alto avente le seguenti specifiche:

$$\begin{array}{rclcl} -0.04 & < & |H(e^{j\omega})| & < & 0.04 \qquad & 0 \le |\omega| \le 0.2\,\pi \\ 0.995 & < & |H(e^{j\omega})| & < & 1.005 \qquad & 0.3\,\pi \le |\omega| \le \pi \end{array}$$

Il filtro sarà progettato utilizzando la trasformazione bilineare con $T = 2$ ms a partire da un filtro a tempo continuo. Indicare le specifiche per la realizzazione del filtro a tempo continuo.

Soluzione dell'Esercizio 7.10

Utilizzando l'equazione che trasforma le frequenza discrete in quelle continuo si ha:

$$\Omega_s = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}}\tan\left(\frac{0.2\,\pi}{2}\right) = 2\pi \cdot 51.7126 \ \text{rad/sec}$$

$$\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}}\tan\left(\frac{0.3\,\pi}{2}\right) = 2\pi \cdot 81.0935 \ \text{rad/sec}$$

Quindi le specifiche per la realizzazione del filtro a tempo continuo sono:

$$\begin{array}{rclcl} & & |H_c(j\Omega)| & < & 0.04 \qquad & |\Omega| \le 2\,\pi \cdot 51.7126 \\ 0.995 & < & |H_c(j\Omega)| & < & 1.005 \qquad & |\Omega| \ge 2\,\pi \cdot 81.0935 \end{array}$$

NOTA: tipicamente, la tolleranza di un filtro passa-banda a tempo continuo è fra 1 e $(1 - \delta_1)$, poichè storicamente la maggior parte dei metodi di approssimazione dei filtri sono stati definiti per sistemi passivi, che hanno un guadagno minore o uguale a 1. Se necessario si possono ottenere le specifiche usando la convenzione appena vista scalando il modulo della risposta del filtro di $1/1.005$.

Esercizio 7.11

Vogliamo progettare un filtro a tempo discreto passa-banda ideale che lascia passare la banda $\pi/4 \leq |\omega| \leq \pi/2$ applicando l'*impulse invariance* a un filtro ideale a tempo continuo passa-banda in $2\pi \cdot 300 \leq |\Omega| \leq 2\pi \cdot 600$. Trovare una scelta per T che produce il filtro desiderato. La scelta di T è unica?

Soluzione dell'Esercizio 7.11

Usando la relazione $\omega = \Omega T$,

$$T = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\pi/4}{2\pi \cdot 300} = 417 \quad \mu\,\mathrm{s}$$

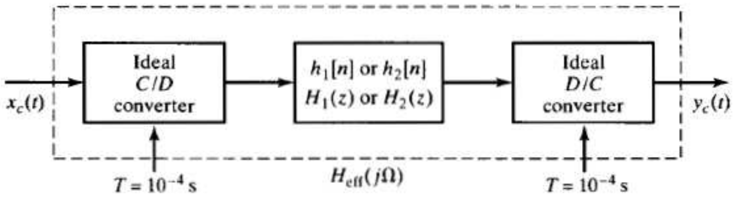
La scelta di T è unica. È possibile trovare altri valori di T che, tramite aliasing, portano una delle due frequenza continue sulla discreta desiderata, ma non esiste altro valore di T che le porta entrambe.

Esercizio 7.12

Un filtro a tempo continuo con risposta all'impulso $h_c(t)$ e modulo della risposta in frequenza tale che

$$|H_c(j\Omega)| = \begin{cases} |\Omega| & |\Omega| < 10\pi \\ 0 & |\Omega| > 10\pi \end{cases}$$

viene usato come prototipo per progettare un filtro a tempo discreto. Il filtro discreto viene quindi usato nella configurazione in figura per filtrare il segnale continuo $x_c(t)$.



(a) Un sistema a tempo discreto con risposta all'impulso $h_1(n)$ e funzione di trasferimento $H_1(z)$ è ottenuto dal prototipo mediante *impulse invariance* con $T_d = 0.01$ sec, ovvero

$$h_1(n) = 0.01\, h_c(0.01n).$$

Disegnare l'ampiezza del modulo della risposta in frequenza del filtro continuo risultante

$$H_{eff1}(j\Omega) = \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)}$$

(b) In alternativa supponete che il sistema a tempo discreto abbia risposta all'impulso $h_2(n)$ e funzione di trasferimento $H_2(z)$ e sia stato ottenuto mediante trasformazione bilineare a partire dal filtro a tempo continuo $H_c(j\Omega)$ con $T_d = 2$, ovvero

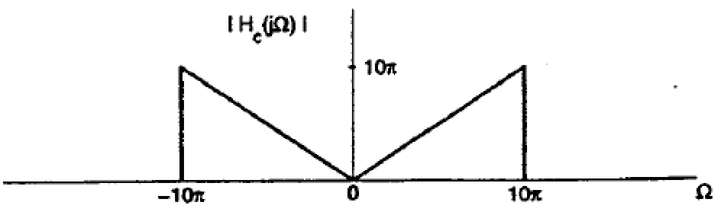
$$H_2(z) = H_c(s)|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} = H_c\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Disegnare l'ampiezza del modulo della risposta in frequenza del filtro continuo risultante

$$H_{eff2}(j\Omega) = \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)}$$

Soluzione dell'Esercizio 7.12

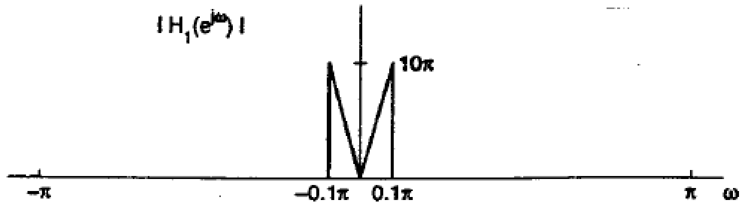
Iniziamo disegnando il modulo di $H_c(j\Omega)$:



(a) Usando l'*impulse invariance* scaliamo l'asse delle frequenze di T_d, ottenendo

$$|H_1(e^{j\omega})| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi k}{T_d}\right) \right|$$

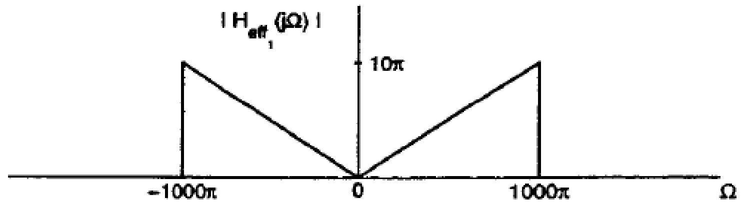
Disegnando $|H_1(e^{j\omega})|$ fra $-\pi$ e π si ha



Per ottenere la risposta complessiva scaliamo l'asse delle frequenze di T e limitiamo in banda secondo l'equazione

$$|H_{eff1}(j\Omega)| = \begin{cases} |H_1(e^{j\omega T})| & |\Omega| < \pi/2 \\ 0 & |\Omega| > \pi/2 \end{cases}$$

Il modulo del filtro a tempo continuo che ne risulta è:

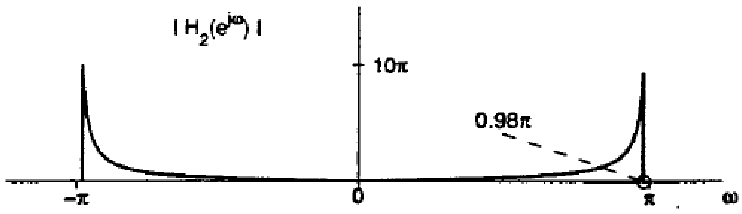


(b) Usando la relazione che lega la trasformazione delle frequenza nella bilineare,

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$

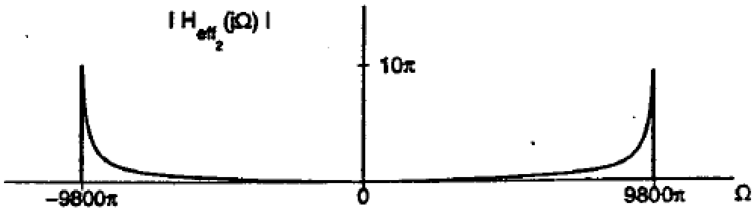
otteniamo

$$|H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} |\tan(\omega/2)| & |\omega| < 2\tan^{-1}(10\pi) = 0.98\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Per ottenere la risposta in frequenza del sistema continuo scaliamo l'asse delle frequenze per T e limitiamo in banda il risultato secondo

$$|H_{eff2}(j\Omega)| = \begin{cases} |H_2(e^{j\omega T})| & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$



Esercizio 7.13

Impulse invariance e trasformazione bilineare sono due metodi per progettare filtri a tempo discreto. Entrambi i metodi trasformano la funzione di trasferimento $H_c(s)$ di un sistema a tempo continuo in una funzione di trasferimento a tempo discreto $H(z)$. Rispondere alle domande seguenti indicando quale metodo (o metodi) permette di ottenere il risultato voluto:

(a) Un sistema a tempo continuo a fase minima ha tutti i suoi poli e zeri nel semipiano reale sinistro del piano s. Se tale sistema viene trasformato in un sistema a tempo discreto quale metodo (o metodi) porta ad un sistema discreto a fase minima?

(b) Se il sistema continuo è un sistema passa-tutto, allora i suoi poli saranno nelle posizioni s_k nel semipiano s sinistro e i suoi zeri saranno nelle corrispondenti locazioni $-s_k$ nel semipiano s destro. Un sistema a tempo continuo passa-tutto ha modulo della risposta in frequenza costante per ogni Ω e fase in generale variabile. Quale metodo (o metodi) porta ad un sistema discreto passa-tutto?

(c) Quale metodo (o metodi) garantisce che

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} \;=\; H_c(j\Omega)|_{\Omega=0} \;\;?$$

(d) Se il filtro a tempo continuo è uno stop-banda, quale metodo (o metodi) porta ad un filtro a tempo discreto stop-banda?

(e) Supponiamo che $H_1(z)$, $H_2(z)$ e $H(z)$ siano le versioni trasformate di $H_1(s)$, $H_2(s)$ e $H(s)$. Quale metodo (o metodi) garantisce che $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ se $H(s) = H_1(s)H_2(s)$?

(f) Supponiamo che $H_1(z)$, $H_2(z)$ e $H(z)$ siano le versioni trasformate di $H_1(s)$, $H_2(s)$ e $H(s)$. Quale metodo (o metodi) garantisce che $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ se $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$?

Soluzione dell'Esercizio 7.13

(a) Solo la trasformazione bilineare garantisce che un filtro a tempo continuo a fase minima si trasformi in un filtro a tempo discreto a fase minima. Ricordiamo che un filtro discreto a fase minima ha tutti i poli e tutti gli zeri all'interno del circolo unitario.

Impulse invariance. L'*impulse invariance* trasforma i poli nel semipiano sinistro del piano s in poli entro il circolo unitario nel piano z. Tuttavia gli zeri nel semipiano sinistro non è detto che finiscano entro il circolo unitario.

Consideriamo il seguente esempio: la funzione di trasferimento del sistema continuo è

$$H_c(s) \;=\; \frac{s+10}{(s+1)(s+2)} \;=\; \frac{9}{(s+1)} + \frac{-8}{(s+2)} \;=\; \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{s-s_k}$$

come evidente è a fase minima, visto che ha uno zero in $s = -10$ e due poli in $s = -1$ e $s = -2$. Usiamo ora l'*impulse invariance* con $T = 1$:

$$H(z) \;=\; \sum_{k=1}^{2} \frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}} \;=\; \frac{9}{1-e^{-1}z^{-1}} + \frac{-8}{1-e^{-2}z^{-1}} \;=\; \frac{1+(8e^{-1}-9e^{-2})z^{-1}}{(1-e^{-1}z^{-1})(1-e^{-2}z^{-1})}$$

che ha due poli nel circolo unitario ma lo zero in

$$z_0 \;=\; 9\,e^{-2} - 8\,e^{-1} \;\approx\; -1.725$$

e quindi non è a fase minima.

Trasformazione bilineare. La trasformazione bilineare porta un polo o uno zero posti in $s = s_0$ alla coordinata

$$z_0 \;=\; \frac{1+(T/2)s_0}{1-(T/2)s_0}$$

Se la parte reale di s_0 è minore di zero allora il modulo di z_0 è minore di uno, ovvero entro i circolo unitario (come visto sulle dispense).

(b) Solo la trasformazione bilineare porta ad un filtro passa-tutto.

Impulse invariance. Usando l'*impulse invariance* abbiamo che

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right)$$

Il termine di aliasing può distruggere la natura passa-tutto del filtro continuo.

Trasformazione bilineare. La trasformazione bilineare deforma l'asse delle frequenze, ma l'ampiezza non viene modificata. Quindi un filtro passa-tutto si trasforma in un filtro passa-tutto.

(c) Solo la trasformazione bilineare garantisce che

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} \;=\; H_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

Impulse invariance. Usando l'*impulse invariance* abbiamo che

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right)$$

Quindi

$$H(e^{j0}) \;=\; H_c(j0)$$

se e solo se

$$\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{\infty} H_c\left(j\,\frac{2\pi k}{T_d}\right) \;=\; 0$$

che, in generale, non è garantito.

Trasformazione bilineare. Poichè, sotto trasformazione bilineare, $\Omega = 0$ si trasforma in $\omega = 0$,

$$H(e^{j0}) \;=\; H_c(j0)$$

per qualsiasi $H_c(s)$.

(d) Solo la trasformazione bilineare garantisce di avere un filtro a tempo discreto stop-banda a partire da uno stop-banda a tempo continuo.

Infatti se il filtro a tempo continuo è stop-banda la trasformazione bilineare conserva l'andamento stop-banda perchè deforma l'asse delle frequenze, tuttavia l'aliasing nell'*impulse invariance* può "riempire" la zona di stop.

(e) Questa proprietà viene mantenuta usando la trasformazione bilineare ma non usando l'*impulse invariance*.

Impulse invariance. L'*impulse invariance* può causare aliasing. Poichè l'ordine di aliasing e la moltiplicazione non possono essere cambiati la proprietà desiderata non viene soddisfatta. Consideriamo

$$H_{c1}(s) \;=\; H_{c2}(s) \;=\; e^{-sT_d/2}$$

$$H_c(s) \;=\; H_{c1}(s)\,H_{c2}(s) \;=\; e^{-sT_d}$$

$$H_1(e^{j\omega}) \;=\; H_2(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c1}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega/2}\,e^{-j\pi k}$$

$$H_1(e^{j\omega})\,H_2(e^{j\omega}) \;=\; \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega/2}\,e^{-j\pi k}\right]\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega/2}\,e^{-j\pi n}\right]$$

$$H(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega}\,e^{-j2\pi k}$$

Come evidente $H(e^{j\omega}) \neq H_1(e^{j\omega})\,H_2(e^{j\omega})$, quindi neanche le trasformate z possono essere uguali.

Trasformazione bilineare. Usando la trasformazione bilineare

$$H(z) \;=\; H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\right) \;=\; H_{c1}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\right)H_{c2}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\right) \;=\; H_1(z)\,H_2(z)$$

(f) Questa proprietà viene mantenuta sia usando la trasformazione bilineare che usando l'*impulse invariance*.

Impulse invariance.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c1}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c2}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d}+\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) \\ &= H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Come ovvio, se la proprità vale per le DTFT vale anche per le z!

Trasformazione bilineare.

$$H(z) = H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\right) = H_{c1}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\right) + H_{c2}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\right) = H_1(z)+H_2(z)$$

Esercizio 7.14

Supponiamo di avere un filtro passa-basso ideale a tempo discreto con risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/4 \\ 0 & \pi/4 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

e di voler ottenere nuovi filtri manipolando la risposta all'impulso $h(n)$.

(a) Disegnare la risposta in frequenza $H_1(e^{j\omega})$ per il sistema la cui risposta all'impulso vale $h_1(n) = h(2n)$.

(b) Disegnare la risposta in frequenza $H_1(e^{j\omega})$ per il sistema la cui risposta all'impulso è

$$h_2(n) = \begin{cases} h(n/2) & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \text{ (per } n \text{ pari)} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(c) Disegnare la risposta in frequenza $H_1(e^{j\omega})$ per il sistema la cui risposta all'impulso vale

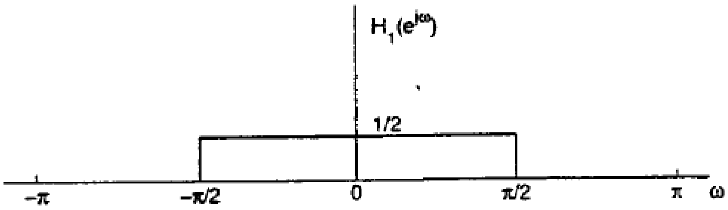
$$h_3(n) = e^{j\pi n}\, h(n) = (-1)^n\, h(n)$$

Soluzione dell'Esercizio 7.14

(a) $h_1(n) = h(2n)$

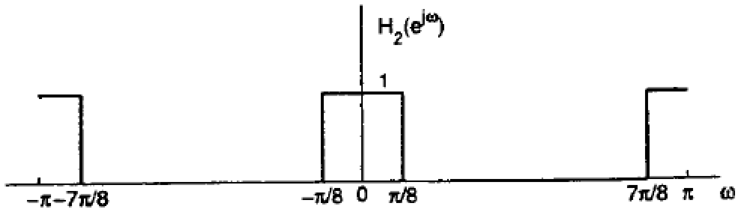
$$\begin{aligned} H_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)e^{j\omega n} = \sum_{n \text{ pari}} h(n)e^{j\omega n/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[h(n)+(-1)^n h(n)]\, e^{jn\omega/2} = \\ &= \frac{1}{2}H(e^{j\omega/2}) + \frac{1}{2}H(e^{j(\omega+2\pi)/2}) \end{aligned}$$

Stesso risultato che abbiamo visto in sezione (3.5.1) delle dispense.



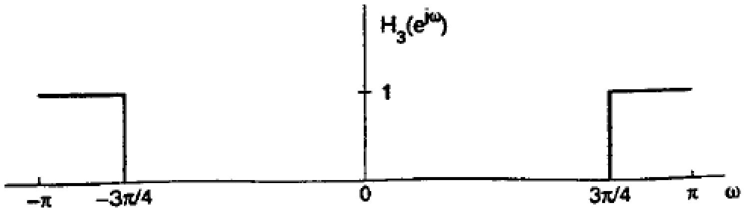
(b)

$$H_2(e^{j\omega}) = \sum_{n \text{ pari}} h(n/2)e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{j\omega 2n} = H((e^{j2\omega})$$



(c)

$$H_3(e^{j\omega}) \;=\; H(e^{j(\omega+\pi)})$$



Esercizio 7.15

Supponiamo che un filtro a tempo discreto sia stato ottenuto da un filtro a tempo continuo $H_c(s)$ via trasformazione bilineare. Il filtro a tempo continuo ha ritardo di gruppo costante, ovvero

$$H_c(j\Omega) \;=\; A(\Omega)\, e^{-j\Omega\alpha}$$

con $A(\Omega)$ reale. Il filtro a tempo discreto avrà ritardo di gruppo costante? Giustificare la risposta.

Soluzione dell'Esercizio 7.15

No, il filtro a tempo discreto non avrà ritardo di gruppo costante. La trasformazione bilineare trasforma l'intero asse $j\Omega$ del piano s in una rivoluzione sul circolo unitario nel piano z. Di conseguenza la fase lineare del filtro a tempo continuo verrà distorta non-linearmente dalla trasformazione bilineare e il filtro a tempo discreto avrà fase non lineare.

Esercizio 7.16

Sia C un filtro IIR a tempo continuo stabile con funzione di trasferimento $H_c(s)$ e risposta all'impulso $h_c(t)$. Il filtro B è un filtro stabile a tempo discreto con funzione di trasferimento $H_b(z)$ e risposta all'impulso $h_b(n)$. Il filtro B è legato al filtro C mediante trasformazione bilineare.
Determinare se la seguente affermazione è vera o falsa: se è vera spiegate le vostre ragioni, se è falsa dimostratelo con un controesempio.
Affermazione: il filtro B non può essere un FIR.

Soluzione dell'Esercizio 7.16

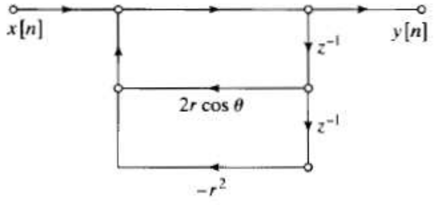
Vero. Siccome il filtro C è stabile e IIR ha poli nel semipiano s negativo. La trasformazione bilineare porta il semipiano s negativo all'interno del circolo unitario. Quindi il filtro B ha poli nel circolo unitario ed è perciò un filtro IIR.

Capitolo 8

Strutture di sistemi discreti

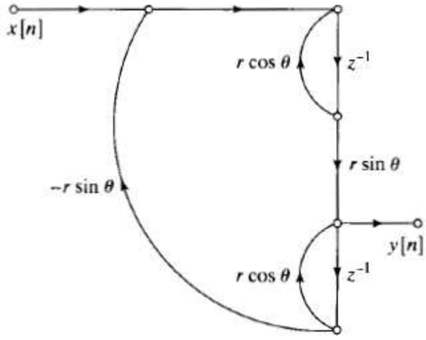
Esercizio 8.1

Trovare le funzioni di trasferimento $H(z)$ delle due reti in figura e mostrare che hanno gli stessi poli.



Network 1

(a)



Network 2

(b)

Soluzione dell'Esercizio 8.1

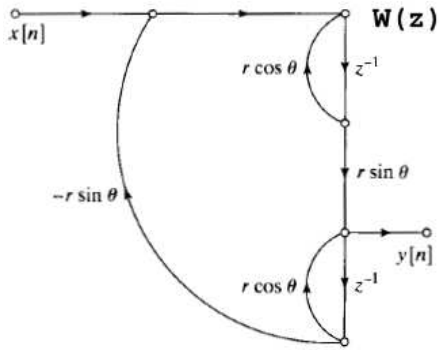
Per la rete uno vale che

$$Y(z) = 2r\cos(\theta)\, z^{-1}\, Y(z) - r^2 z^{-2}\, Y(z) + X(z)$$

ovvero

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r\cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Per la rete due definiamo $W(z)$ come in figura. Quindi



$$W(z) = X(z) - r\sin(\theta) z^{-1} Y(z) + r\cos(\theta) z^{-1} W(z)$$

$$Y(z) = r\sin(\theta) z^{-1} W(z) + r\cos(\theta) z^{-1} Y(z)$$

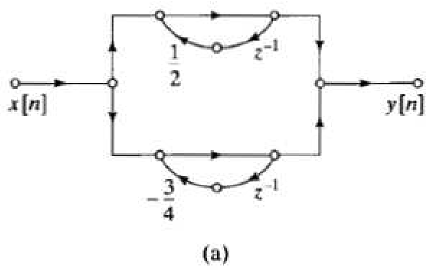
Eliminando $W(z)$ otteniamo

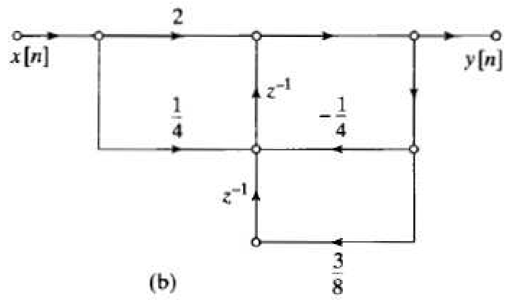
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{r\sin(\theta) z^{-1}}{1 - 2r\cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Le due reti hanno quindi gli stessi poli.

Esercizio 8.2

Considerate le due reti in figura





(a) Trovare la funzione di trasferimento delle due reti.

(b) Scrivere l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita.

Soluzione dell'Esercizio 8.2

(a) Per la rete (a) chiamiamo $W_1(z)$ e $W_2(z)$ i segnali che entrano nell'ultimo nodo sommatore:

$$W_1(z) = X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}W_1(z) \qquad \rightarrow \qquad W_1(z) = \frac{X(z)}{1-(1/2)z^{-1}}$$

$$W_2(z) = X(z) - \frac{3}{4}z^{-1}W_2(z) \qquad \rightarrow \qquad W_2(z) = \frac{X(z)}{1+(3/4)z^{-1}}$$

$$Y(z) = W_1(z) + W_2(z) = \frac{X(z)}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{X(z)}{1+(3/4)z^{-1}}$$

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{1}{1+(3/4)z^{-1}} = \frac{2+(1/4)z^{-1}}{1+(1/4)z^{-1}-(3/8)z^{-2}}$$

Per la rete (b) si ha

$$Y(z) = 2X(z) + \left[\frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{4}Y(z) + \frac{3}{8}Y(z)z^{-1}\right]z^{-1}$$

e

$$H_b(z) = \frac{2+(1/4)z^{-1}}{1+(1/4)z^{-1}-(3/8)z^{-2}}$$

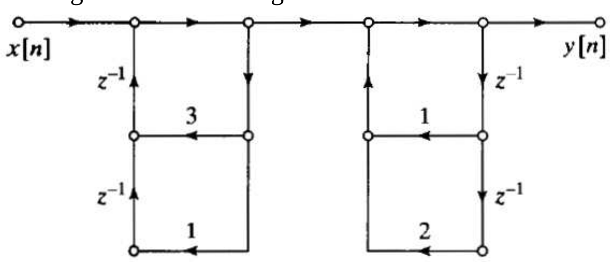
Le due reti hanno la stessa funzione di trasferimento (la (b) è la forma diretta II trasposta).

(b)

$$y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{3}{8}y(n-2) = 2x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$$

Esercizio 8.3

Un sistema LTI è realizzato dal grafo di flusso in figura:

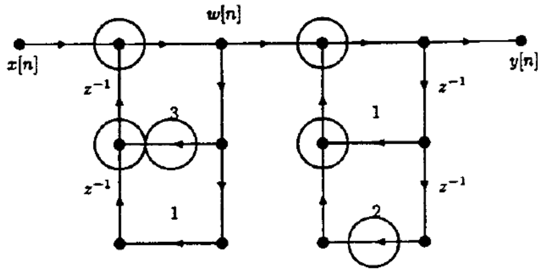


(a) Scrivere la funzione di trasferimento in z del sistema.

(b) Nella realizzazione in figura quante moltiplicazioni e addizioni reali sono necessarie per calcolare ciascun campione dell'uscita? (assumere che $x(n)$ sia reale e che le moltiplicazioni per 1 non contino)

(c) La realizzazione in figura richiede quattro registri per immagazzinare i valori intermedi. È possibile ridurre il numero di registri usando una struttura differente? Se lo è disegnarne il grafo, se non lo è spiegare perchè il numero di registri non può essere ridotto.

Soluzione dell'Esercizio 8.3



(a) Ricaviamo le relazioni fra ingresso e uscita in riferimento alla sequenza $w(n)$ segnata in figura:

$$w(n) = x(n) + 3w(n-1) + w(n-2)$$

$$y(n) = w(n) + y(n-1) + 2y(n-2)$$

passando in z si ha

$$W(z) = X(z) + 3z^{-1}W(z) + z^{-2}W(z)$$

$$Y(z) = W(z) + z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z)$$

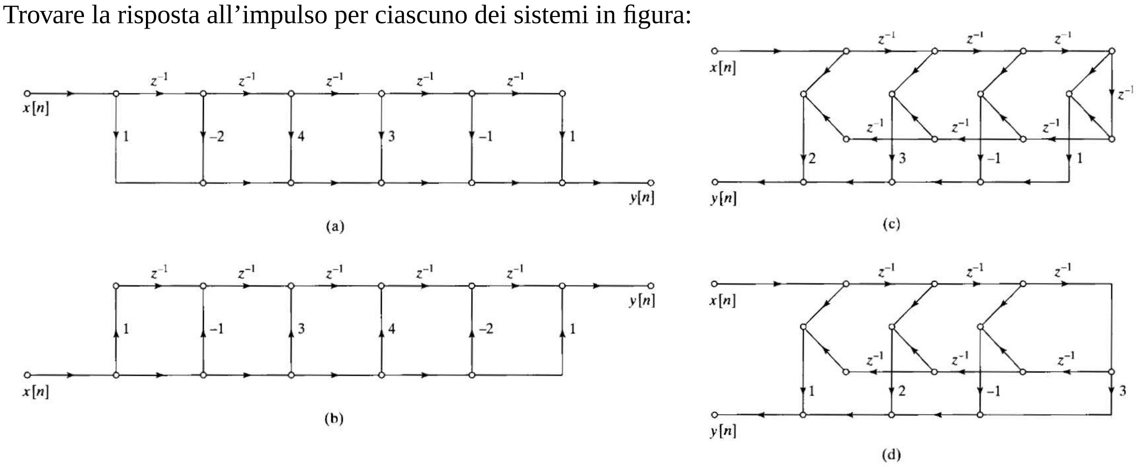
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1} - 2z^{-2})(1 - 3z^{-1} - z^{-2})} = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}$$

(b) Somme e moltiplicazioni sono cerchiate nella figura sopra: 4 somme reali e 2 moltiplicazioni reali per ogni campione in uscita.

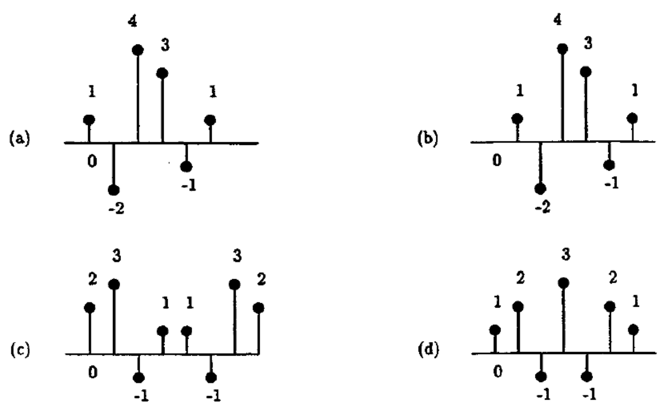
(c) Non è possibile ridurre il numero di registri di memoria. Realizzare la $H(z)$ calcolata sopra in forma canonica diretta II (che ha il minimo numero di registri) richiede infatti 4 registri.

Esercizio 8.4

Trovare la risposta all'impulso per ciascuno dei sistemi in figura:



Soluzione dell'Esercizio 8.4



Esercizio 8.5

Disegnare il grafo di flusso in forma diretta II per il sistema causale LTI avente equazione alle differenze

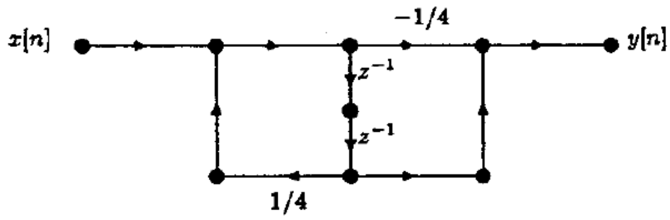
$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-2) = x(n-2) - \frac{1}{4}x(n)$$

Soluzione dell'Esercizio 8.5

Poiché

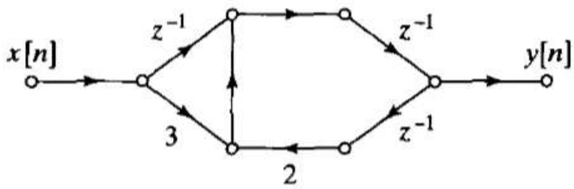
$$H(z) = \frac{-(1/4) + z^{-2}}{1 - (1/4)z^{-2}}$$

il grafo in forma diretta II è



Esercizio 8.6

Il grafo di flusso in figura realizza un sistema LTI. Trovare l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita del sistema.



Soluzione dell'Esercizio 8.6

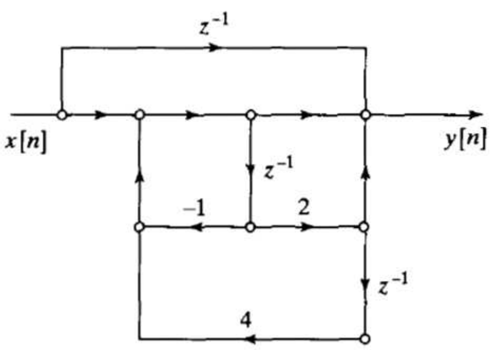
$$y(n) = 2y(n-2) + 3x(n-1) + x(n-2)$$

Esercizio 8.7

La figura seguente mostra il grafo di flusso per un sistema causale discreto LTI.

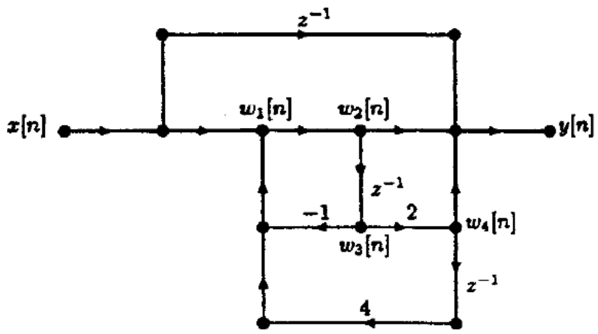
(a) Calcolare $h(1)$, ovvero il valore della risposta all'impulso $h(n)$ per $n = 1$.

(b) Trovare l'equazione alle differenze che lega ingresso e uscita.



Soluzione dell'Esercizio 8.7

Marchiamo alcuni punti sul grafo di flusso.



$$w_1(n) = x(n) - w_3(n) + 4w_4(n-1)$$

$$w_2(n) = w_1(n)$$

$$w_3(n) = w_2(n-1)$$

$$w_4(n) = 2w_3(n)$$

$$y(n) = w_2(n) + x(n-1) + w_4(n)$$

Calcolando la trasformata z ed eliminando i $W()$ si ottiene

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}$$

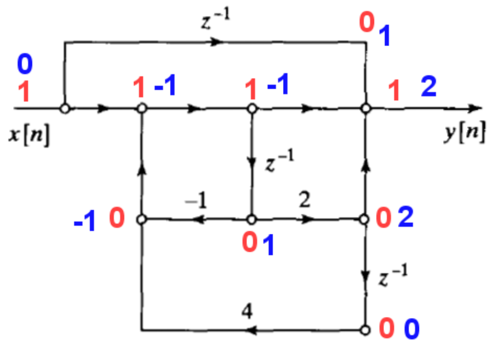
L'equazione alle differenze vale allora

$$y(n) + y(n-1) - 8y(n-2) = x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) - 8x(n-3)$$

La risposta all'impulso si ottiene sostituendo $\delta(n)$ a $x(n)$ ed eseguendo ricorsivamente i calcoli, ricordando che il sistema è causale (e quindi $y(n) = 0$ per $n < 0$):

$$h(0) = 1 \qquad\qquad h(1) = 3 - h(0) = 2$$

Il valore di $h(1)$ si poteva anche ottenere direttamente dal grafo: nella figura sotto sono marcati in rosso i valori al primo giro e in blu quelli al secondo giro.



Esercizio 8.8

Si consideri un sistema LTI causale con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z\,(1 - 0.5z^{-1})}$$

(a) Disegnare il grafo di flusso in forma diretta II del sistema.

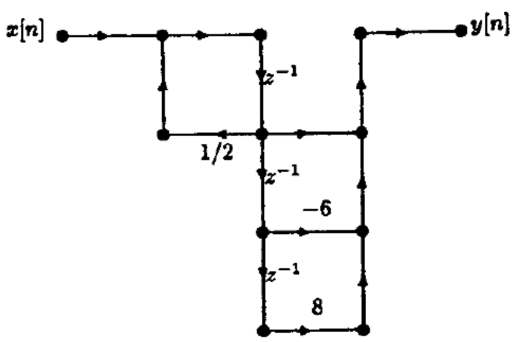
(b) Disegnare la forma trasposta del grafo precedente.

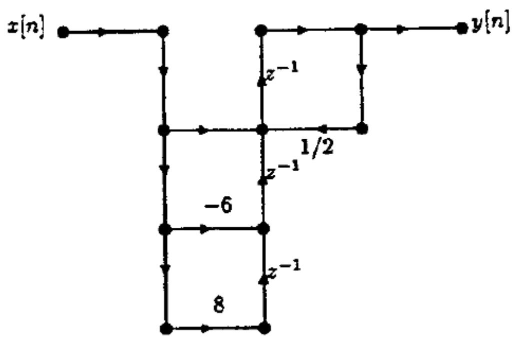
Soluzione dell'Esercizio 8.8

$H(z)$ si può riscrivere come

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 6z^{-2} + 8z^{-3}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

La forma diretta II è in figura a sinistra, la sua versione trasposta è a destra.



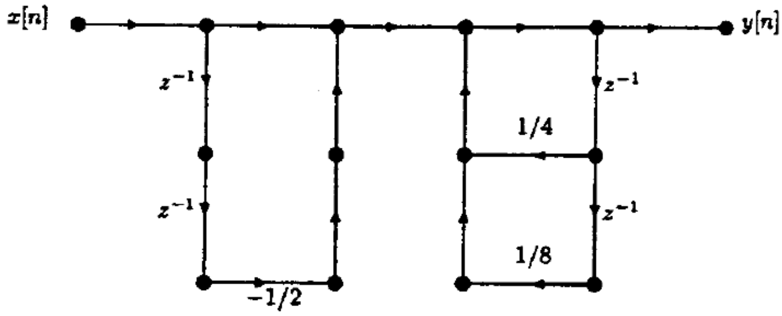


Esercizio 8.9

Disegnare il grafo di flusso in forma diretta I per la realizzazione del sistema LTI con funzione di trasfermento

$$H(z) = \frac{1 - (1/2)z^{-2}}{1 - (1/4)z^{-1} - (1/8)z^{-2}}$$

Soluzione dell'Esercizio 8.9

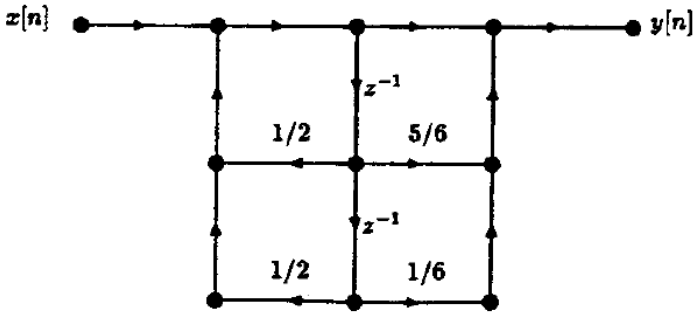


Esercizio 8.10

Disegnare il grafo di flusso in forma diretta II per la realizzazione del sistema LTI con funzione di trasfermento

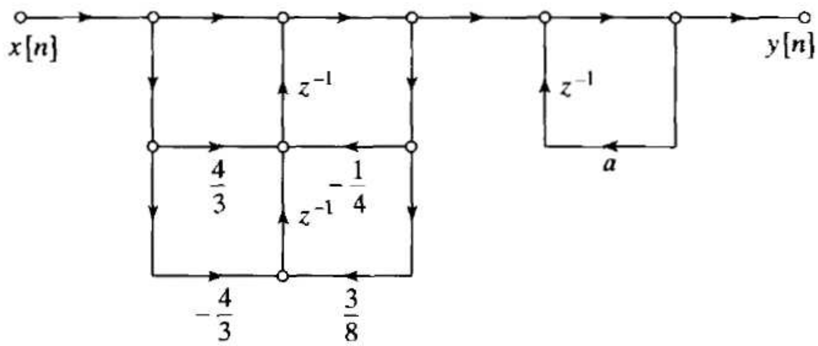
$$H(z) = \frac{1 + (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}{1 - (1/2)z^{-1} - (1/2)z^{-2}}$$

Soluzione dell'Esercizio 8.10



Esercizio 8.11

Il sistema il cui grafo di flusso è in figura può essere realizzato mediante un grafo di flusso del secondo ordine in forma diretta II per alcune (tre) particolari scelte del parametro a. Trovare i tre possibili valori di a e indicare le corrispondenti funzioni di trasferimento.



Soluzione dell'Esercizio 8.11

Il grafo di flusso è la cascata di due strutture dirette II trasposte e la sua funzione di trasferimento vale

$$H(z) = \left(\frac{1 + (4/3)z^{-1} - (4/3)z^{-2}}{1 + (1/4)z^{-1} - (3/8)z^{-2}} \right) \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right)$$

che può essere riscritta come

$$H(z) = \frac{(1 + 2z^{-1})(1 - (2/3)z^{-1})}{(1 + (1/4)z^{-1} - (3/8)z^{-2})(1 - az^{-1})}$$

Per realizzarla come sistema del secondo ordine il valore di a deve essere tale da cancellare uno degli zeri (quindi $a = -2$ oppure $a = 2/3$) oppure deve essere zero.
Le tre funzioni di trasferimento risultanti si ricavano in modo ovvio da quella sopra.

Esercizio 8.12

In molte applicazioni è utile avere un sistema che genera una sequenza sinusoidale. Un possibilità è un sistema con risposta all'impulso

$$h(n) = e^{j\omega_0 n}\, u(n)$$

La parte reale ed immaginaria della risposta all'impulso sono

$$h_r(n) = \cos(\omega_0 n)\, u(n) \qquad h_i(n) = \sin(\omega_0 n)\, u(n)$$

Un sistema con uscita complessa può essere realizzato mediante due uscite reali, una che rappresenta la parte reale e l'altra la parte immaginaria.
Scrivere l'equazione alle differenze (complessa) che rappresenta il sistema e dividerla in parte rale e immaginaria, quindi realizzate il sistema con un grafo di flusso che utilizza solo coefficienti reali.
Questa realizzazione è a volte chiamata oscillatore in forma accoppiata (*coupled form oscillator*): quando l'ingresso è un impulso l'uscita è una sinusoide.

Soluzione dell'Esercizio 8.12

$$h(n) = e^{j\omega_0 n}\, u(n) \qquad \Rightarrow \qquad H(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

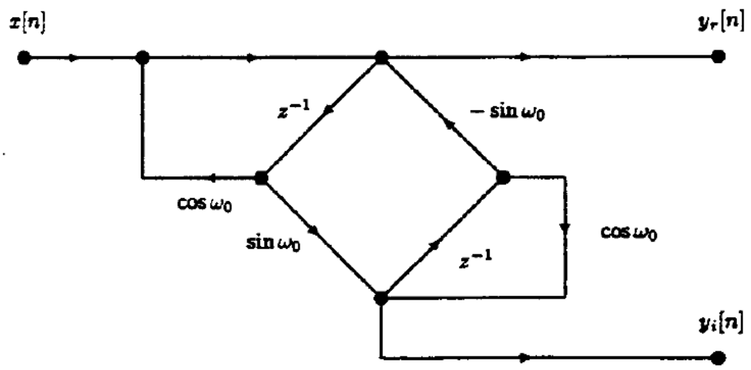
Quindi

$$y(n) = e^{j\omega_0} y(n-1) + x(n)$$

separando parte reale e parte immaginaria (ed assumendo $x(n)$ reale) si ha

$$y_r(n) = x(n) + \cos(\omega_0)\, y_r(n-1) - \sin(\omega_0)\, y_i(n-1)$$

$$y_i(n) = \sin(\omega_0)\, y_r(n-1) + \cos(\omega_0)\, y_i(n-1)$$



Esercizio 8.13

Un sistema a tempo discreto LTI causale ha funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - (3/4)z^{-1} + (1/8)z^{-2}}$$

(a) Indicare la regione di convergenza di $H(z)$ e dire se il sistema è stabile.

(b) Disegnare il grafo di flusso per le realizzazioni diretta I e diretta II.

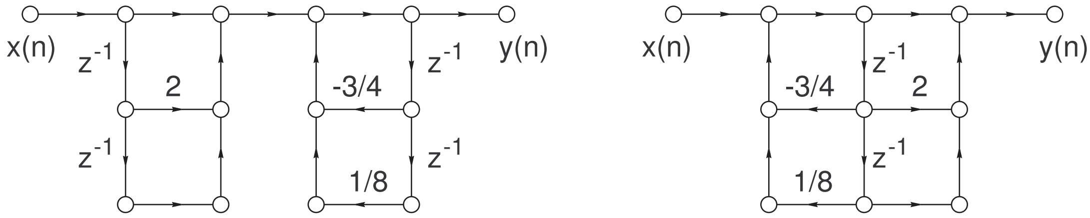
(c) Disegnare il grafo di flusso per le possibili realizzazioni in cascata.

Soluzione dell'Esercizio 8.13

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - (3/4)z^{-1} + (1/8)z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{[1 - (1/4)z^{-1}]\,[1 - (1/2)z^{-1}]}$$

(a) I poli del sistema sono in $z = 1/4$ e $z = 1/2$ ed il sistema è causale, quindi la ROC è $|z| > 1/2$ e il sistema è stabile.

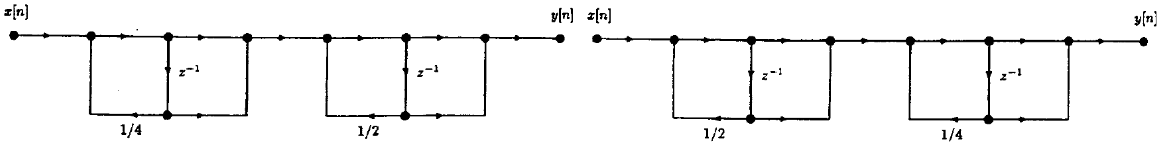
(b) Le forme diretta I e diretta II sono in figura.



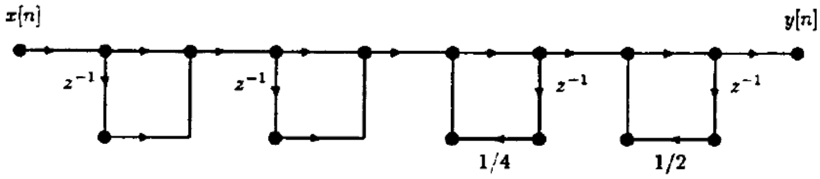
(c) Per la forma in cascata scriviamo $H(z)$ come

$$H(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - (1/4)z^{-1}}\right) \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - (1/2)z^{-1}}\right)$$

che si può realizzare in uno dei due modi in figura



oppure come



(più tutte le permutazioni possibili cambiando l'ordine dei blocchi).

Esercizio 8.14

Un sistema causale LTI ha funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1 - (1/5)z^{-1}}{[1 - (1/2)z^{-1} + (1/3)z^{-2}]\,[1 + (1/4)z^{-1}]}$$

Disegnare il grafo di flusso per la realizzazione del sistema per ciascuna delle seguenti forme:

(a) diretta I e diretta II;

(b) cascata usando sezioni di primo e secondo ordine in forma diretta II;

(c) parallelo usando sezioni di primo e secondo ordine in forma diretta II;

(d) diretta II trasposta.

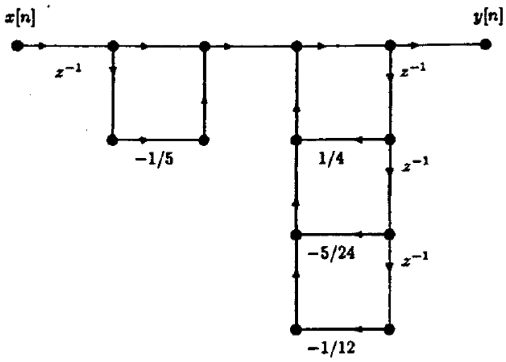
(e) Scrivere l'equazione alle differenze per il grafo di flusso della risposta (d) e verificare che la funzione di trasferimento trovata sia quella giusta.

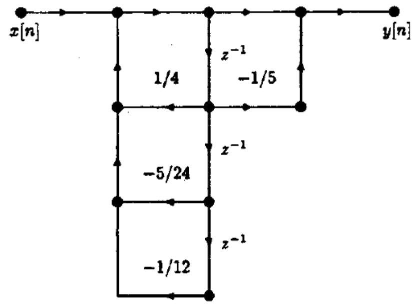
Soluzione dell'Esercizio 8.14

(a) Scriviamo $H(z)$ nella forma

$$H(z) = \frac{1 - (1/5)z^{-1}}{1 - (1/4)z^{-1} + (5/24)z^{-2} + (1/12)z^{-3}}$$

Le forme diretta I e diretta II sono quindi

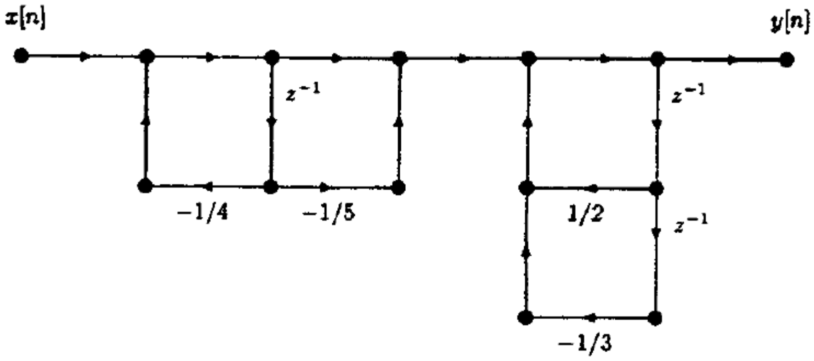




(b) Scriviamo $H(z)$ nella forma

$$H(z) = \left(\frac{1 - (1/5)z^{-1}}{1 + (1/4)z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1 - (1/2)z^{-1} + (1/3)z^{-2}}\right)$$

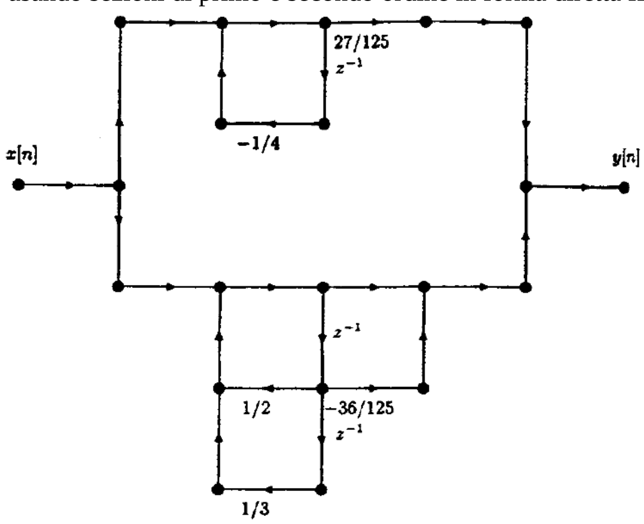
La forma in cascata è



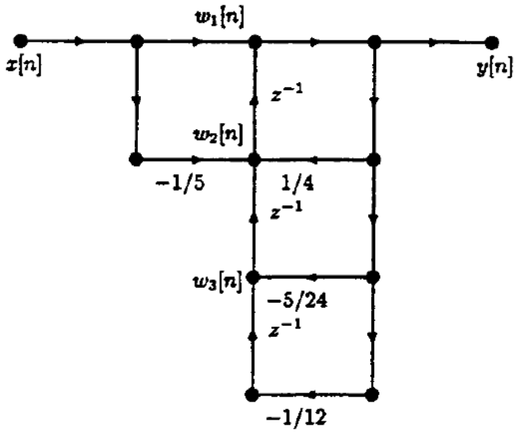
(c) Scriviamo $H(z)$ nella forma

$$H(z) = \frac{27/125}{1 + (1/4)z^{-1}} + \frac{(98/125) - (36/125)z^{-1}}{1 - (1/2)z^{-1} - (1/3)z^{-2}}$$

la forma parallelo usando sezioni di primo e secondo ordine in forma diretta II è



(d) La forma diretta II trasposta si ricava immediatamente dalla non trasposta



(e) Per trovare l'equazione alle differenze scriviamo le sequenze intermedie in figura sopra:

$$
\begin{aligned}
w_1(n) &= x(n) + w_2(n-1) \\
w_2(n) &= \frac{1}{4}y(n) + w_3(n-1) - \frac{1}{5}x(n) \\
w_3(n) &= -\frac{5}{24}y(n) - \frac{1}{12}y(n-1) \\
y(n) &= w_1(n)
\end{aligned}
$$

combinando le precedenti equazioni si ottiene

$$
y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{5}{24}y(n-2) + \frac{1}{12}y(n-3) = x(n) - \frac{1}{5}x(n-1)
$$

la cui trasformata z fornisce la $H(z)$ data.

Capitolo 9

Richiami per studenti pigri

Un aiuto per svolgere gli esercizi: dovrebbero essere nozioni già note agli studenti.

9.1 Richiami su segnali e sistemi a tempo discreto

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} a^k = \begin{cases} \frac{1-a^M}{1-a} & \forall a \in C, a \neq 1 \\ M & a = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a^k = \frac{a^{-n}}{1-a} \qquad |a| < 1$$

quest'ultimo risultato si ottiene facilmente dai due precedenti come segue:

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a^k = \sum_{k=-n}^{0} a^k + \sum_{k=1}^{\infty} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k - 1 = \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} + \frac{1}{1-a} - 1 =$$

moltiplicando la prima frazione per a/a

$$= \frac{a-a^{-n}}{a-1} + \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a^{-n} - a + 1 - 1 + a}{1-a} = \frac{a^{-n}}{1-a}$$

Nella risposta all'esercizio 1.4 si trova

$$\frac{2\,e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}\,e^{-j\omega} + \frac{1}{8}\,e^{-j2\omega}} = \frac{-8}{1 - \frac{1}{4}\,e^{-j\omega}} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}\,e^{-j\omega}}$$

chiamando $x = e^{-j\omega}$ e risolvendo l'equazione di secondo grado al denominatore

$$\frac{2\,x}{1 - \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{8}\,x^2} = \frac{2\,x}{(1 - \frac{1}{2}x)\,(1 - \frac{1}{4}x)} = \frac{a}{(1 - \frac{1}{2}x)} + \frac{b}{(1 - \frac{1}{4}x)}$$

da cui

$$a(1 - \frac{1}{4}x) + b(1 - \frac{1}{2}x) = 2x$$

e il risultato sopra segue.

Trasformata di Fourier della sequenza $x(n) = a^n\,u(n)$, per $|a| < 1$, ricordando che $u(n) = 1$ per $n \geq 0$ e zero altrimenti

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\,u(n)\,e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\,e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a\,e^{-j\omega}}$$

La trasformata del gradino unitario $u(n)$ non si può ottenere in questo modo, poiché $|e^{-j\omega}| = 1$: per i curiosi vale

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$$

Autofunzioni. Abbiamo già visto come gli esponenziali complessi siano autofunzioni dei sistemi discreti LTI. La classe delle autofunzioni è tuttavia più ampia: sono autofunzioni dei sistemi LTI (stabili) tutte le sequenze esponenziali della forma α^n. Infatti, se in un sistema LTI avente risposta all'impulso $h(n)$ entra una sequenza α^n, l'uscita si ottiene, mediante somma di convoluzione, come segue

$$y(n) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{n-k} h(k) \;=\; a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{-k} h(k)$$

Siccome l'ultima sommatoria non dipende da n, l'uscita è ancora la sequenza α^n moltiplicata per una costante, $y(n) = A\,\alpha^n$. Quindi α^n è una autofunzione di tutti i sistemi LTI. Da notare che la sequenza troncata, di cui $\alpha^n u(n)$ è un possibile esempio, non è una autofunzione (perchè?).

Stabilità. Per verificare se un sistema è stabile alla BIBO, si suppone che l'ingresso sia limitato, ovvero che esista un valore finito positivo tale che

$$|x(n)| \;\leq\; B_x < \infty$$

Un sistema è stabile (alla BIBO) se, per ogni ingresso limitato, esiste un valore finito positivo B_y tale che

$$|y(n)| \;\leq\; B_y < \infty$$

Causalità. Un sistema è causale se, per ogni possibile scelta di n_0, il valore della sequenza di uscita all'indice n_0 dipende solo dai valori della sequenza di ingresso per $n \leq n_0$. Questo implica che se $x_1(n) = x_2(n)$ per $n \leq n_0$, allora $y_1(n) = y_2(n)$ per $n \leq n_0$. Ovvero il sistema è non anticipativo.

Senza memoria. Un sistema è detto senza memoria se l'uscita $y(n)$ per ogni valore di n dipende solo dall'ingresso $x(n)$ per lo stesso valore di n.

9.2 Serie di potenze notevoli

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad\qquad |x| < 1$$

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad x \in \mathcal{R}$$

$$\log(1-x) \;=\; -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \qquad\qquad |x| < 1$$

$$\log(1+x) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\, x^m \qquad\qquad |x| < 1$$

$$\sin(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad\qquad x \in \mathcal{R}$$

$$\cos(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad\qquad x \in \mathcal{R}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad\qquad |x| < 1$$

$$\arctan x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} \qquad\qquad |x| < 1$$

9.3 Richiami sulla trasformata z

Alcune trasformate z di sequenze comuni. ROC = regione di convergenza.

È la tabella già presente nelle dispense.

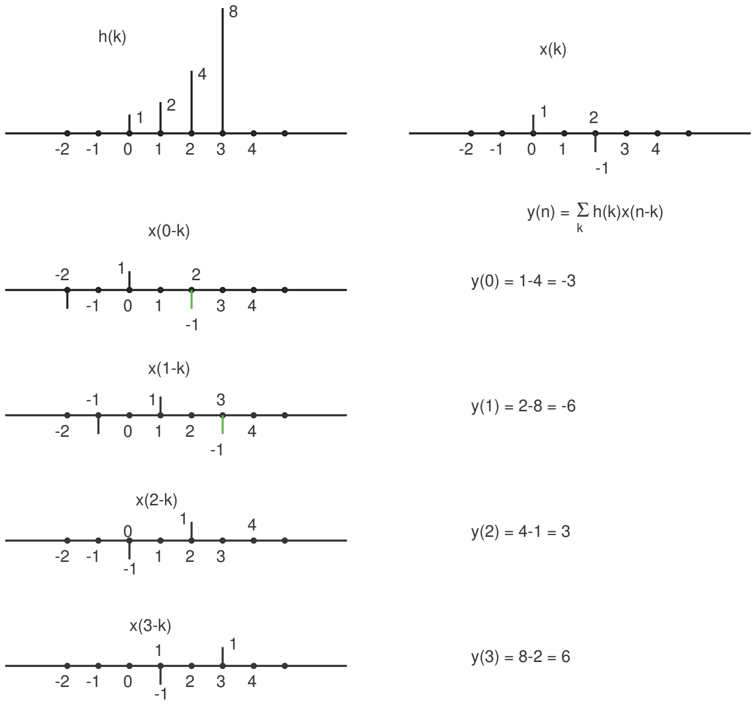
Sequenza	**Trasformata z**	**ROC**
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta(n-m)$	z^{-m}	$\forall z$ (meno 0 se $m > 0$, meno ∞ se $m < 0$)
$a^n\, u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n\, u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$n\, a^n\, u(n)$	$\dfrac{a\, z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-n\, a^n\, u(-n-1)$	$\dfrac{a\, z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0\, n)\, u(n)$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)\, z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0\, n)\, u(n)$	$\dfrac{\sin(\omega_0)\, z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n \cos(\omega_0\, n)\, u(n)$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)\, z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)\, z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n \sin(\omega_0\, n)\, u(n)$	$\dfrac{r\sin(\omega_0)\, z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)\, z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-a\, z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

Trasformata z di $u(n)$. Si ricava dalla trasformata della sequenza esponenziale $a^n u(n)$ quando $a = 1$.

$$\mathcal{Z}\,[u(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad\qquad |z| > 1$$

9.4 Esercizio 4.7: add-on

La domanda (c) richiede il calcolo di una convoluzione circolare: i passaggi per ottenerla sono riportati nella figura seguente



Un modo alternativo consiste nel calcolare la convoluzione lineare e poi "ripiegare" gli ultimi valori sui primi. La convoluzione lineare è lunga $4 + 4 - 1 = 7$ campioni al massimo: in questo caso poichè $x(n)$ ha l'ultimo campione nullo la lunghezza è 6. Nella figura seguente si vede la convoluzione lineare a come "ripiegarla".