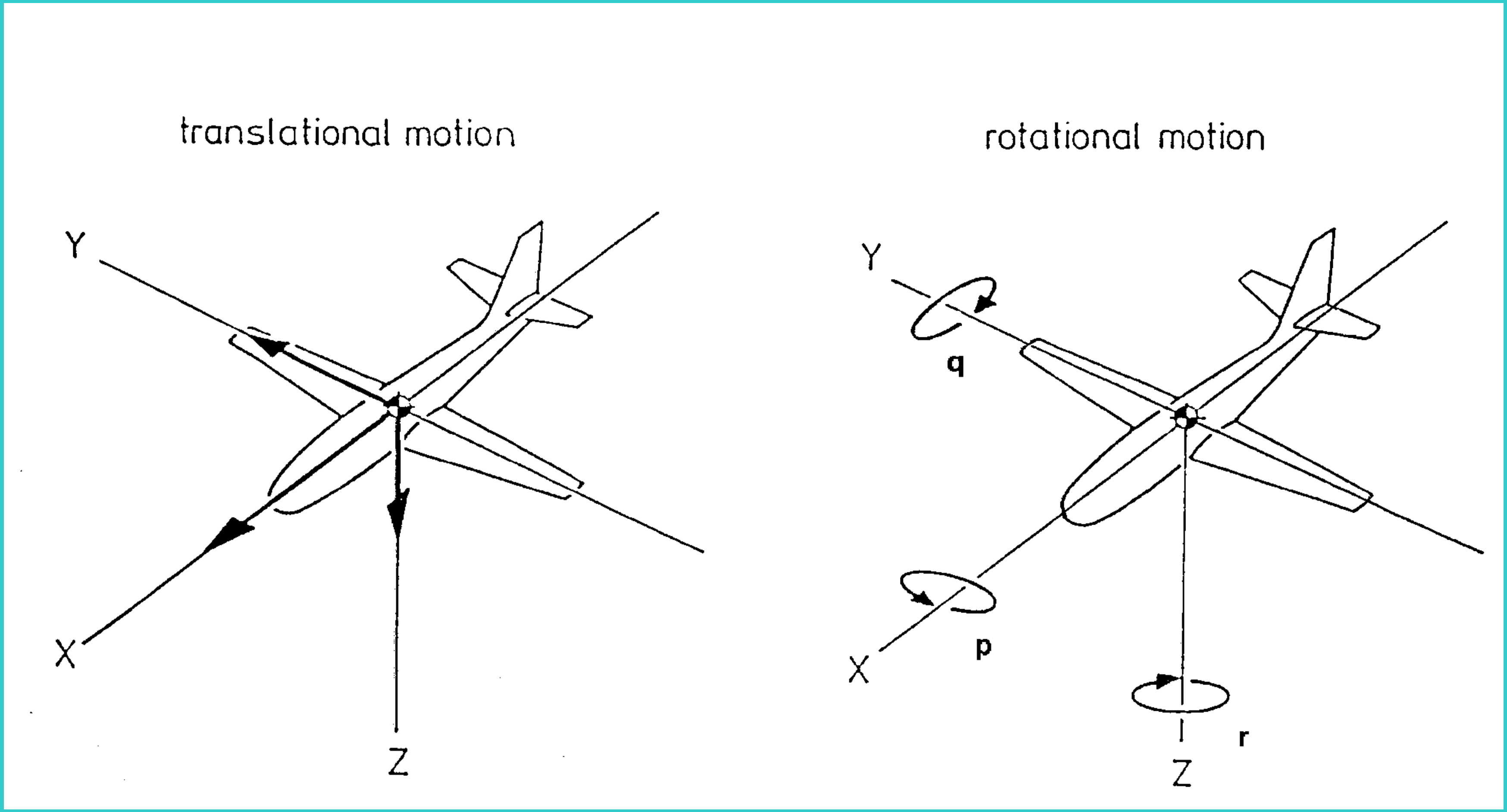
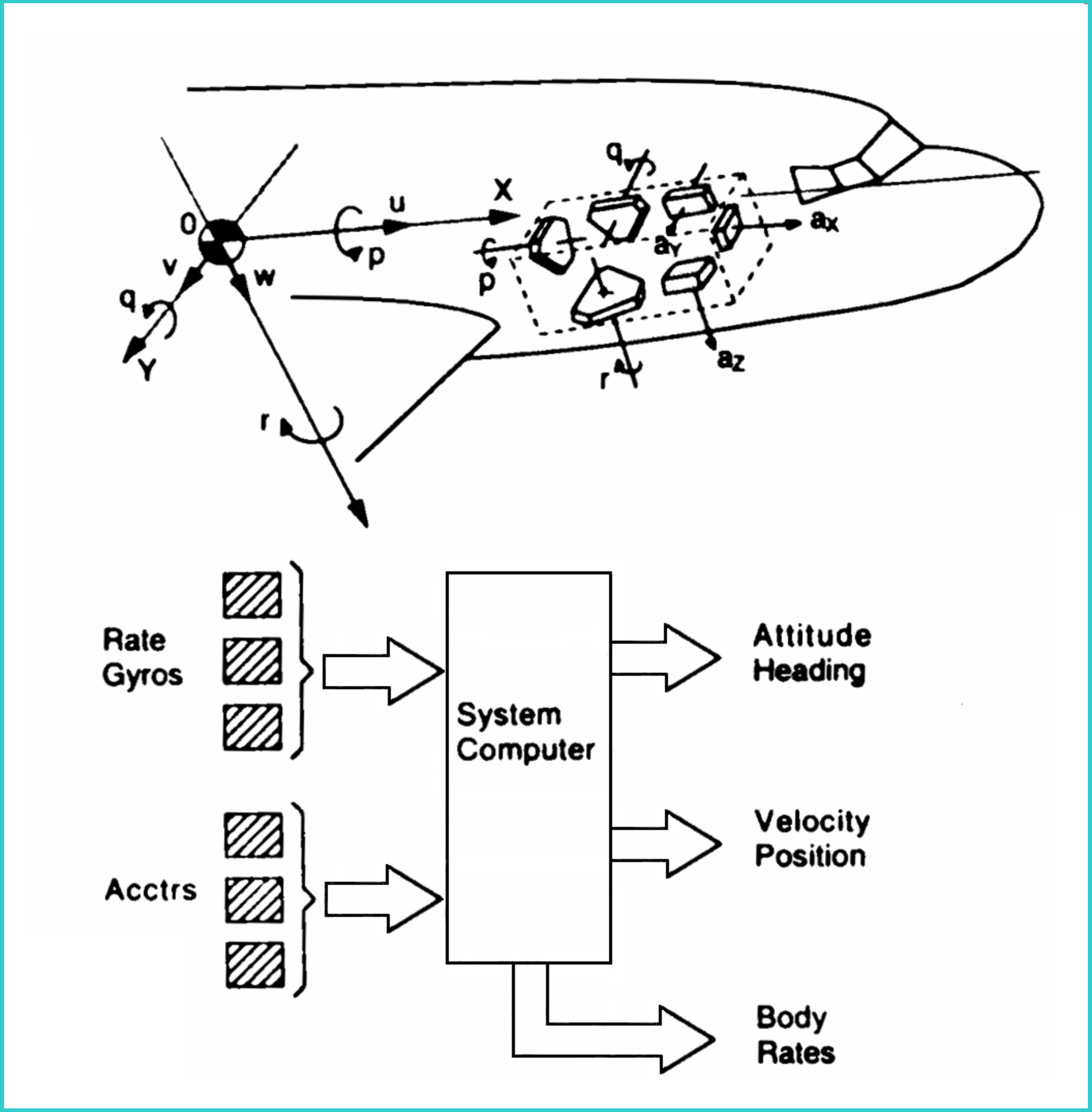
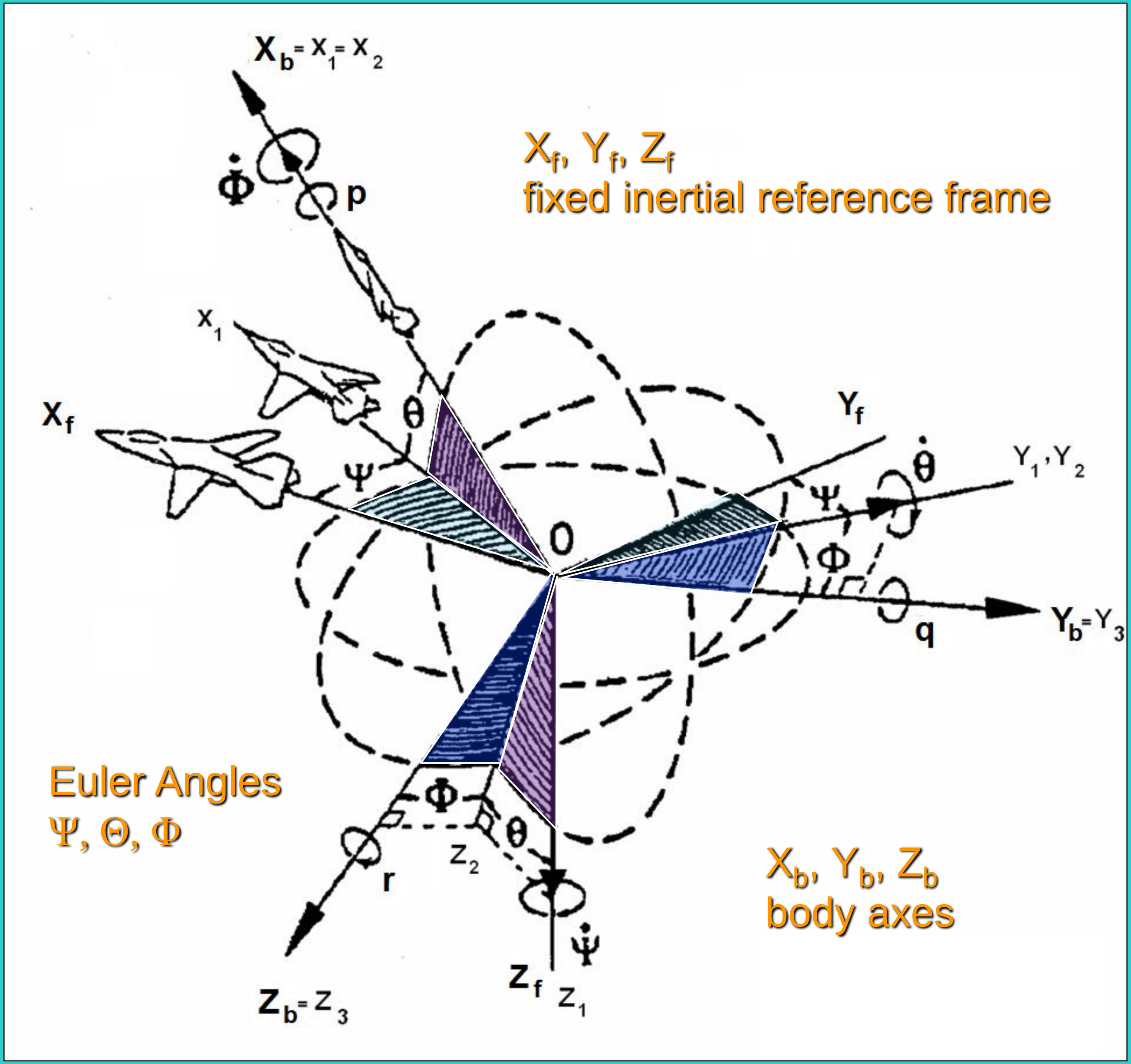
Body axes



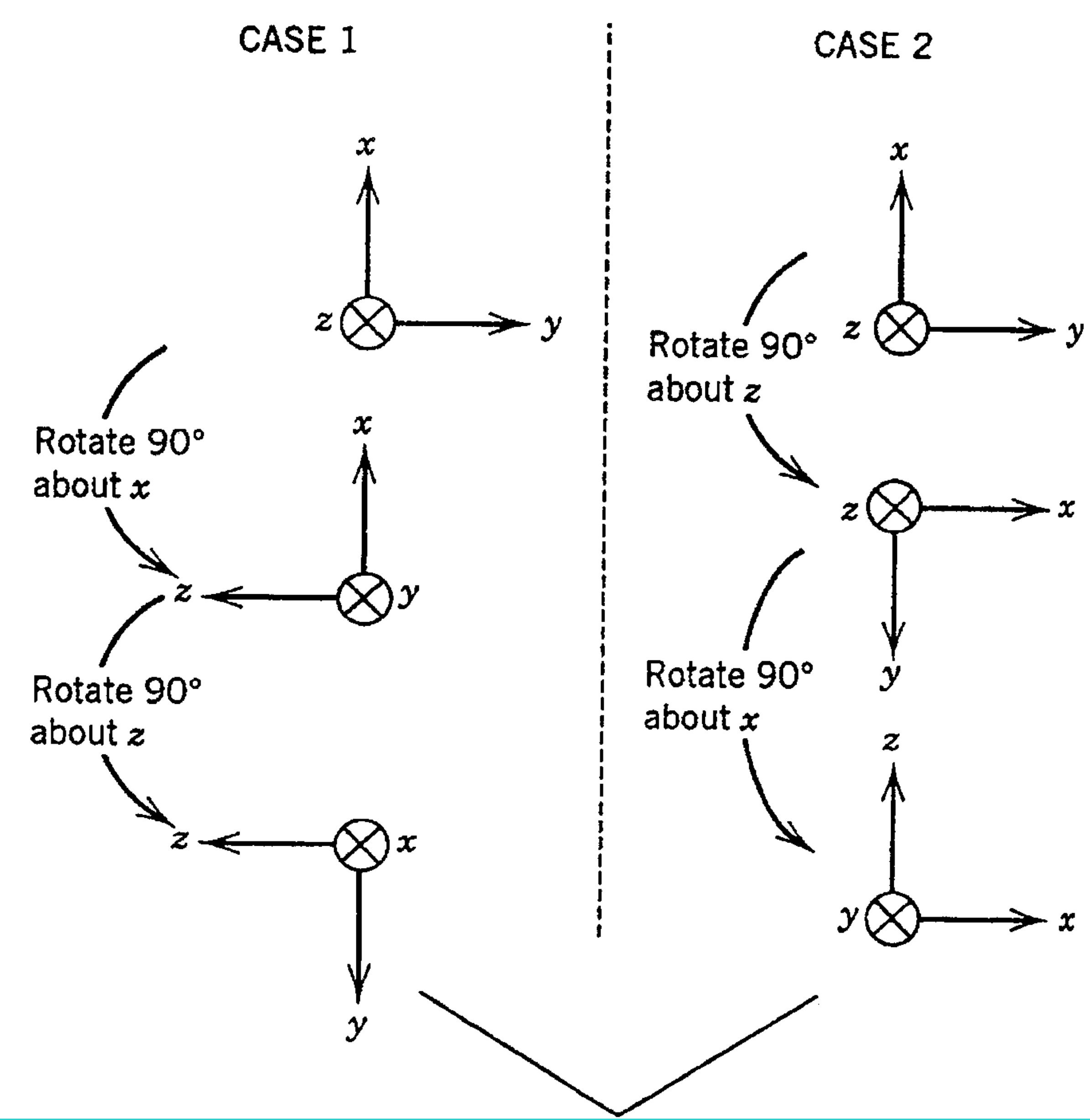
Piattaforme strap-down



Euler Angles



Non Commutativity of rotation



Le tre componenti dei vettori velocità angolari sono

di $\dot{\Psi}$:
$$\begin{cases} -\dot{\Psi}\,\mathbf{sen}\Theta & \text{lungo } X_b \\ \dot{\Psi}\,\mathbf{cos}\,\Theta\,\mathbf{sen}\Phi & \text{lungo } Y_b \\ \dot{\Psi}\,\mathbf{cos}\,\Theta\,\mathbf{cos}\,\Phi & \text{lungo } Z_b \end{cases}$$

di $\dot{\Theta}$:
$$\begin{cases} 0 & \text{lungo } X_b \\ \dot{\Theta}\,\mathbf{cos}\,\Phi & \text{lungo } Y_b \\ -\dot{\Theta}\,\mathbf{sen}\Phi & \text{lungo } Z_b \end{cases}$$

di $\dot{\Phi}$:
$$\begin{cases} \dot{\Phi} & \text{lungo } X_b \\ 0 & \text{lungo } Y_b \\ 0 & \text{lungo } Z_b \end{cases}$$

per cui:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \dot{\Phi} - \dot{\Psi}\,\mathbf{sen}\Theta \\ \mathbf{q} = \dot{\Theta}\,\mathbf{cos}\,\Phi + \dot{\Psi}\,\mathbf{cos}\,\Theta\,\mathbf{sen}\Phi \\ \mathbf{r} = -\dot{\Theta}\,\mathbf{sen}\Phi + \dot{\Psi}\,\mathbf{cos}\,\Theta\,\mathbf{cos}\,\Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \mathbf{p} + \mathbf{q}\,\mathbf{sen}\Phi\,\mathbf{tan}\,\Theta + \mathbf{r}\,\mathbf{cos}\,\Phi\,\mathbf{tan}\,\Theta \\ \dot{\Theta} = \mathbf{q}\,\mathbf{cos}\,\Phi - \mathbf{r}\,\mathbf{sen}\Phi \\ \dot{\Psi} = \mathbf{q}\,\mathbf{sen}\Phi \dfrac{1}{\mathbf{cos}\,\Theta} + \mathbf{r}\,\mathbf{cos}\,\Phi \dfrac{1}{\mathbf{cos}\,\Theta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{sen}\Phi\,\mathbf{tan}\,\Theta & \mathbf{cos}\,\Phi\,\mathbf{tan}\,\Theta \\ 0 & \mathbf{cos}\,\Phi & -\mathbf{sen}\Phi \\ 0 & \mathbf{sen}\Phi\,\mathbf{sec}\,\Theta & \mathbf{cos}\,\Phi\,\mathbf{sec}\,\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

da cui integrando si ottengono Ψ, Θ, Φ,
ma per $\Theta=\pi/2$, $\mathbf{tan}\,\Theta$ e $\mathbf{sec}\,\Theta \Rightarrow \infty$, ciò rappresenta la singolarità che nelle piattaforme meccanizzate era rappresentata dal fenomeno del "gimbal lock".

Effettuiamo una trasformazione di coordinate impiegando i quattro parametri simmetrici di Eulero o quaternioni definiti come:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{cos}\frac{\mu}{2}$$

$$\mathbf{e}_1 = \alpha\,\mathbf{sen}\frac{\mu}{2}$$

$$\mathbf{e}_2 = \beta\,\mathbf{sen}\frac{\mu}{2}$$

$$\mathbf{e}_3 = \gamma\,\mathbf{sen}\frac{\mu}{2}$$

legati tra loro dalla relazione:

$$\mathbf{e}_0{}^2 + \mathbf{e}_1{}^2 + \mathbf{e}_2{}^2 + \mathbf{e}_3{}^2 = 1$$

dove μ è la rotazione attorno ad un opportuno asse che forma gli angoli α, β, γ con il riferimento originale per cui:

$$\begin{cases} \tan\Psi = \dfrac{2(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)}{\mathbf{e}_0{}^2 + \mathbf{e}_1{}^2 - \mathbf{e}_2{}^2 - \mathbf{e}_3{}^2} \\ \mathrm{sen}\Theta = 2(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) \\ \tan\Phi = \dfrac{2(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_0{}^2 - \mathbf{e}_1{}^2 - \mathbf{e}_2{}^2 + \mathbf{e}_3{}^2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$e_0{}^2 + e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Attraverso sistemi di integrazione numerica:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{n}+1} = \mathbf{X}_{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{X}}\Delta\mathbf{t} = \mathbf{X}_{\mathbf{n}} + \mathbf{AX}_{\mathbf{n}}\Delta\mathbf{t}$$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{n}+1} = \left(1 + \mathbf{A}\Delta\mathbf{t}\right)\mathbf{X}_{\mathbf{n}}$$

dove:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{p} & -\mathbf{q} & -\mathbf{r} \\ \mathbf{p} & 0 & \mathbf{r} & -\mathbf{q} \\ \mathbf{q} & -\mathbf{r} & 0 & \mathbf{p} \\ \mathbf{r} & \mathbf{q} & -\mathbf{p} & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}\Delta\mathbf{t} \Rightarrow \Delta\mathbf{P}, \Delta\mathbf{Q}, \Delta\mathbf{R}$ essendo:

$$\Delta\mathbf{P} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{p}dt \qquad \Delta\mathbf{Q} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{q}dt \qquad \Delta\mathbf{R} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{r}dt$$

e quindi:

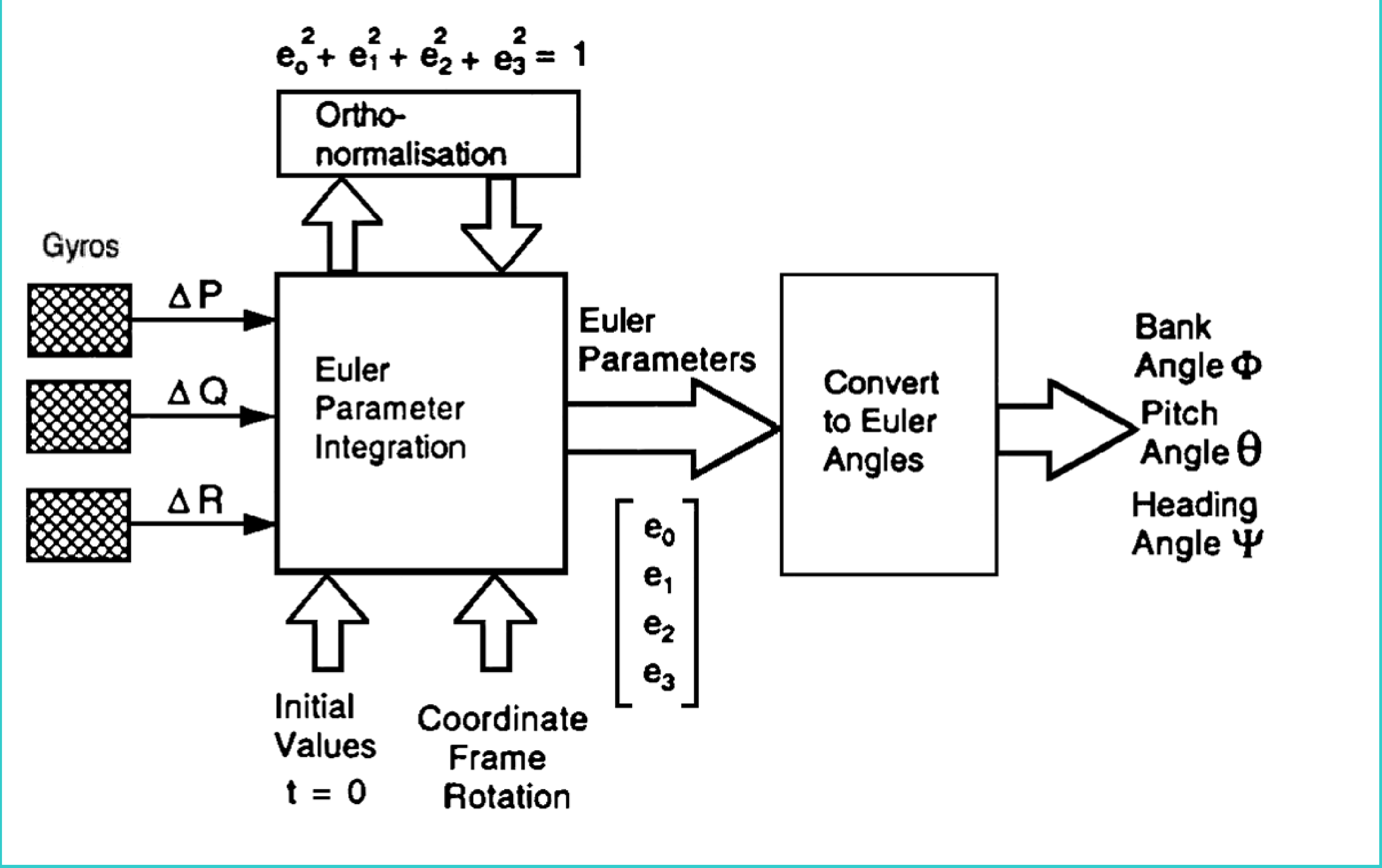
$$1 + \mathbf{A}\Delta\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\mathbf{P} & -\Delta\mathbf{Q} & -\Delta\mathbf{R} \\ \Delta\mathbf{P} & 0 & \Delta\mathbf{R} & -\Delta\mathbf{Q} \\ \Delta\mathbf{Q} & -\Delta\mathbf{R} & 0 & \Delta\mathbf{P} \\ \Delta\mathbf{R} & \Delta\mathbf{Q} & -\Delta\mathbf{P} & 0 \end{bmatrix}$$

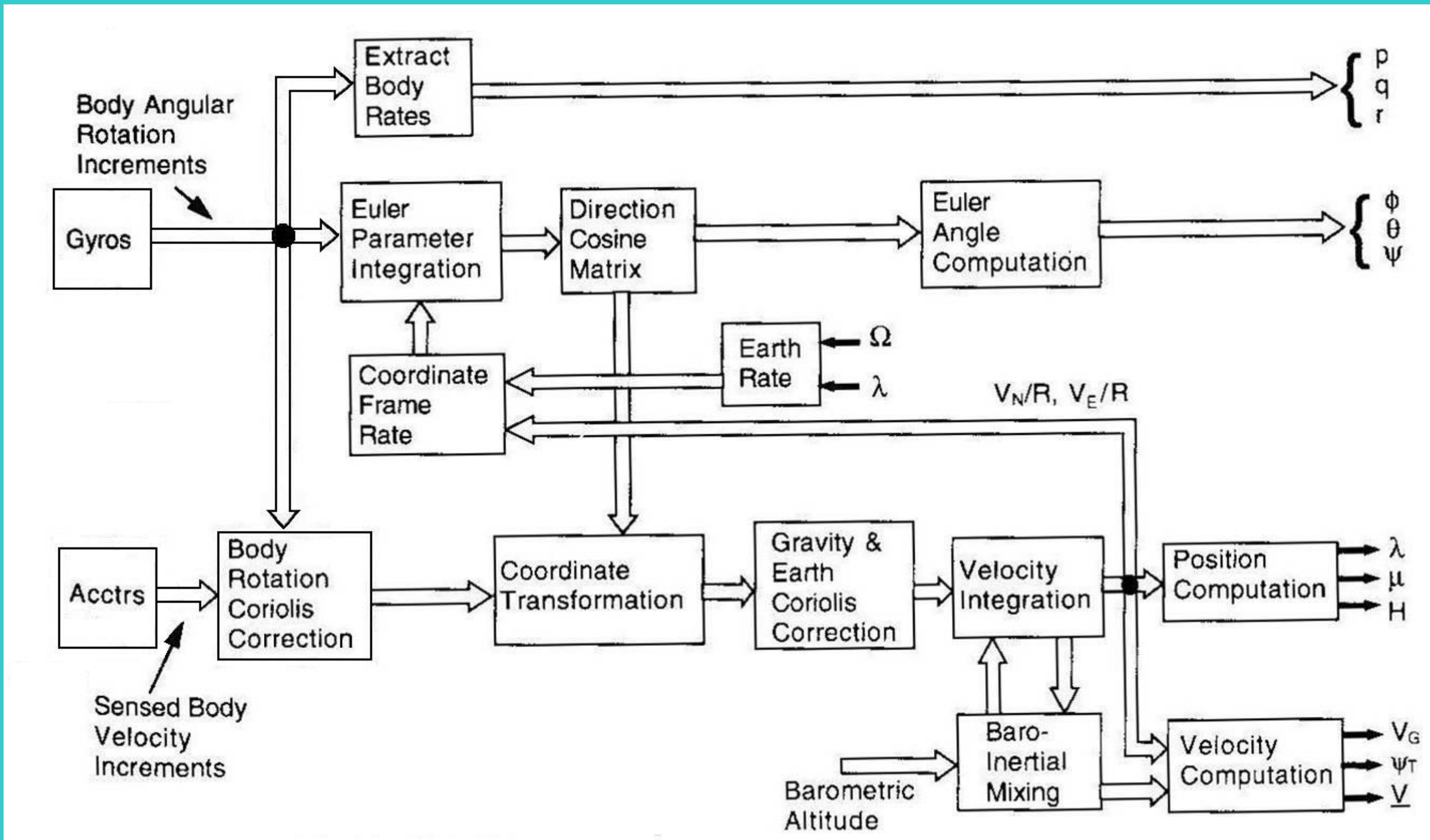
$$\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta P/2 & -\Delta Q/2 & -\Delta R/2 \\ \Delta P/2 & 1 & \Delta R/2 & -\Delta Q/2 \\ \Delta Q/2 & -\Delta R/2 & 1 & \Delta P/2 \\ \Delta R/2 & \Delta Q/2 & -\Delta P/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}_{t_n}$$

la matrice centrale è chiamata **transition matrix**.

Dalle relazioni che legano gli angoli ai quaternioni si ricavano gli angoli di Eulero in un riferimento assoluto.

Analytic platform




Extract Body Rates
p
q
r
Body Angular Rotation Increments
Gyros
Euler Parameter Integration
Direction Cosine Matrix
Euler Angle Computation
ϕ
θ
ψ
Earth Rate
Ω
λ
Coordinate Frame Rate
V_N/R, V_E/R
Acctrs
Body Rotation Coriolis Correction
Coordinate Transformation
Gravity & Earth Coriolis Correction
Velocity Integration
Position Computation
λ
μ
H
Sensed Body Velocity Increments
Barometric Altitude
Baro-Inertial Mixing
Velocity Computation
V_G
ψ_T
$\underline{V}$

Vertical navigation channel

Non è possibile compensare un errore nella misura dell'accelerazione verticale. L'errore nella misura della quota cresce esponenzialmente nel tempo.

Bisogna inoltre tenere in considerazione queste tre termini correttivi:

1) L'accelerazione g varia con la quota secondo la legge:

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

L'accelerazione di gravità varia poi, seppur di poco, sulla superficie terrestre.

2) C'è un'accelerazione centrifuga per un velivolo che, muovendosi sulla terra percorre una traiettoria circolare nello spazio, pari a:

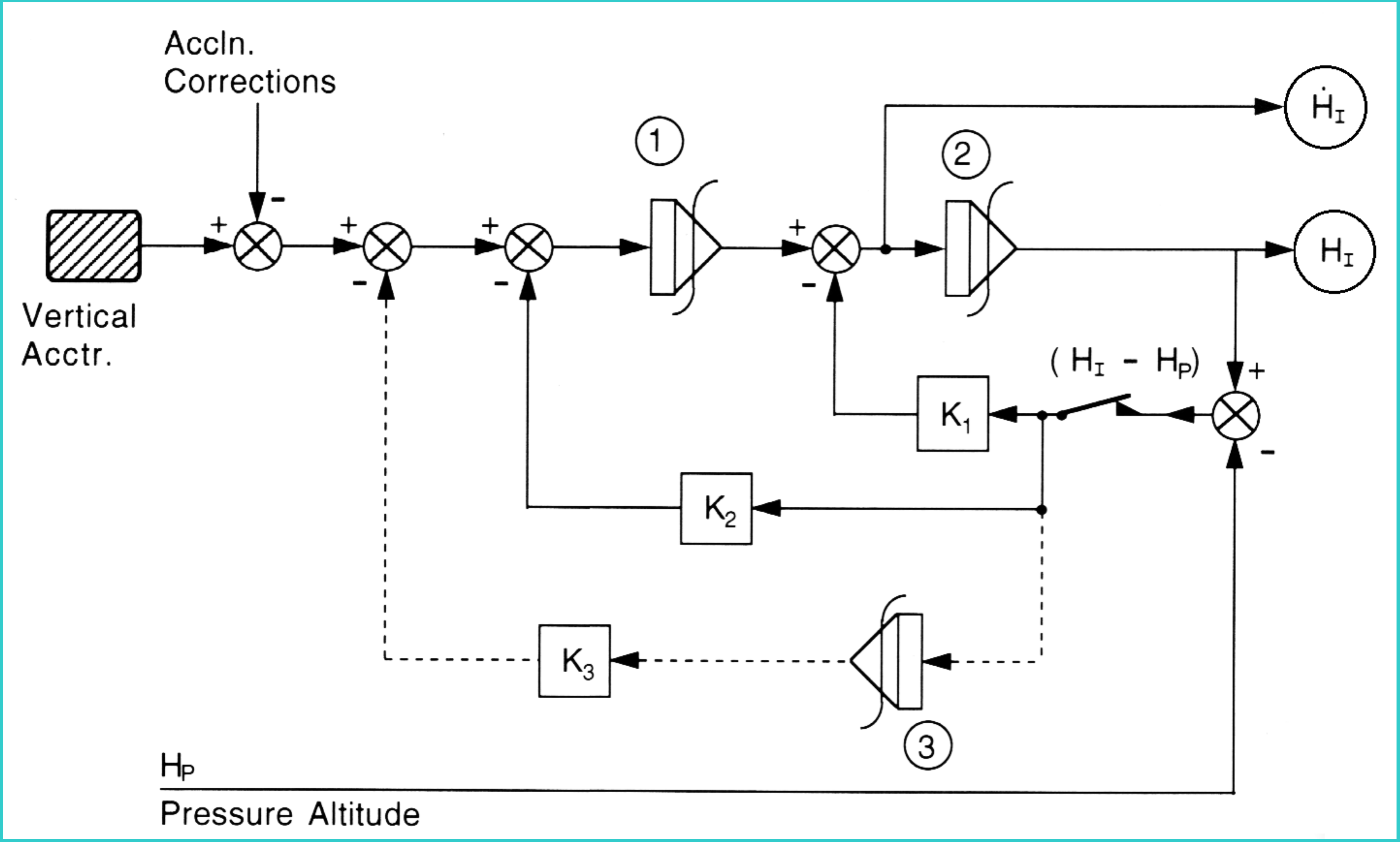
$$a_{cf} = \frac{V_E^2 + V_N^2}{R}$$

3) E' presente un'accelerazione di Coriolis pari a:

$$a_c = 2V_E \Omega \cos\lambda$$

Ci sarebbe inoltre da tenere in conto anche un piccolo contributo della accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione della terra.

Vertical navigation channel



FLG
Fiber Laser Gyros