

Aerodinamica

Lorenzo Cucchi

Abstract— Appunti del corso di aerodinamica 22/23

I. CORPI TOZZI

Dobbiamo definire la **vorticità**:

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} \quad (1)$$

Il rotore di un campo vettoriale possiede la seguente proprietà

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = 0 \quad (2)$$

Il flusso di vorticità non può sparire, è esattamente incomprimibile. Per il teorema di Stokes

$$\oint_{\gamma} \underline{u} \cdot \underline{\tau} dl = \int_s (\underline{\nabla} \times \underline{u}) \cdot \hat{n} ds = \int_s \underline{\omega} \cdot \hat{n} ds \quad (3)$$

Ricordando l'equazione (1) della vorticità:

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\omega} \quad (4)$$

$$\frac{D \underline{\omega}}{Dt} = \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\omega} \quad (5)$$

Il primo termine è la rapidità con cui la vorticità di una particella varia nel tempo. Il secondo è il termine di **stretching e tilting**, stiramento o rotazione delle linee di corrente. Il terzo termine è la diffusione della vorticità (I problema di Stokes).

1) *Esempi*:

Consideriamo il fenomeno dello scarico del lavandino. Mano a mano che ci si avvicina allo scarico le linee di corrente tendono a diventare verticali e la vorticità aumenta. Tale fenomeno può essere giustificato anche dal fatto che il momento angolare si conserva e il volume di controllo si stringe mano a mano che si avvicina allo scarico. Pertanto diminuisce il momento di inerzia a favore della velocità angolare, cioè della **vorticità**.

Nelle gallerie del vento, prima della camera di prova, vengono poste reti e strutture a nido d'ape al fine di rompere le strutture vorticosed evitare che la vorticità sia incrementata a seguito dell'accelerazione nel convergente.

B. Teorema di Lagrange

Sotto le ipotesi di : *incomprimibilità, fluido newtoniano, forze di volume conservative*.

Se

$$\underline{\omega}(\underline{r}, 0) = 0 \quad , \quad \underline{\omega}(\underline{r}, t)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall t, \quad \text{allora} \quad (6)$$

$$\underline{\omega}(\underline{r}, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

Questo teorema diventa molto importante quando possiamo separare il campo di moto in una zona interna ed una zona esterna.

1) *Dimostrazione*:

$$\underline{\omega}(\underline{r}, t = 0) = 0 \quad (8)$$

L'equazione della vorticità diviene:

$$\left. \frac{D \underline{\omega}}{Dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

Siccome per *hp.* $\underline{\omega}(\underline{r}, t)|_{\partial\Omega} = 0$ allora $\underline{\omega}$ rimarrà nullo per ogni valore di t su tutto il dominio.

C. I th. di Helmholtz

Sotto *hp.* $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$, *effetti viscosi trascurabili*, $\underline{f} = \underline{\nabla} E$.

Se una particella di fluido ha vorticità nulla nell'istante iniziale manterrà vorticità nulla anche negli istanti successivi.

Le ipotesi del *th. di Helmholtz* sono deboli rispetto a $\underline{\omega}(\underline{r}, t)|_{\partial\Omega} = 0$ di *Lagrange*.

D. Def. Linea Vorticosa

Una linea vorticosa è una linea tangente in ogni punto al vettore vorticità.

E. II th. di Helmholtz

Sotto *hp.* $\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} = 0$, *effetti viscosi trascurabili*, $\underline{f} = \underline{\nabla} E$.

Allora le linee vorticosed sono **linee materiali**, ovvero linee i cui punti si muovono con velocità locale del fluido.

Se una linea materiale, in qualunque istante, è anche linea vorticosa, allora resta tale in tutti gli istanti.

1) *Dimostrazione*:

Sia $\underline{x} = \underline{x}(s, t)$ una linea vorticosa. Allora

$$\frac{\partial \underline{x}(s, 0)}{\partial s} \times \underline{\omega}(\underline{x}(s, 0), 0) = 0 \quad (10)$$

Dobbiamo dimostrare che tale tesi vale $\forall t$.

Supponiamo di fissare s

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}(s, t)}{\partial s} \times \underline{\omega}(\underline{x}(s, t), t) \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{x}(s, t)}{\partial t \partial s} \times \underline{\omega}(\underline{x}(s, t), t) + \frac{\partial \underline{x}(s, t)}{\partial s} \times \frac{d}{dt} \underline{\omega}(\underline{x}(s, t), t) = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \underline{u}(\underline{x}(s, t), t) \times \underline{\omega}(\underline{x}(s, t), t) + \\ & + \frac{\partial \underline{x}(s, t)}{\partial s} \times \left(\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$(\hat{\tau} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \times \underline{\omega} + \hat{\tau} \times (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \quad (14)$$

Valutando in $t = 0$.

$$\begin{aligned} & (\hat{\tau}(s, 0) \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \times \underline{\omega}(\underline{x}(s, 0), 0) + \\ & + \hat{\tau}(s, 0) \times (\underline{\omega}(\underline{x}(s, 0), 0) \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \end{aligned} \quad (15)$$

Definisco

$$\underline{\omega}(\underline{x}(s, 0), 0) = C(s) \hat{\tau}(s, 0) \quad (16)$$

Allora

$$\begin{aligned} & (\hat{\tau}(s, 0) \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \times C(s) \hat{\tau}(s, 0) + \\ & + \hat{\tau}(s, 0) \times (C(s) \hat{\tau}(s, 0) \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \end{aligned} \quad (17)$$

$$C(s) [(\hat{\tau} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \times \hat{\tau} - (\hat{\tau} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \times \hat{\tau}] = 0 \quad (18)$$

L'equazione è verificata all'istante iniziale. In definitiva:

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial s}(s, t) \times \underline{\omega}(\underline{x}(s, t), t) \right) \right|_{t=0} = 0 \quad (19)$$

Dato che la funzione è nulla per $t = 0$ e anche la sua derivata è nulla in $t = 0$, allora rimarrà nulla $\forall t$ date le *hp.* del problema.

F. Th. di Kelvin

Sotto *hp.* $\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$, *effetti viscosi trascurabili*, $\underline{f} = \underline{\nabla} E$.

Allora la circolazione associata ad una linea materiale non cambia nel tempo.

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma} \underline{u} \cdot \hat{\tau} dl = \frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (20)$$

Ricordando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_l \underline{F} \cdot \hat{\tau} dl &= \int_l \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \underline{F} \times \underline{v}_c + \\ &+ \underline{F}(x_c(1, t), t) \cdot \underline{v}_c(1, t) - \underline{F}(x_c(0, t), t) \cdot \underline{v}_c(0, t) \end{aligned} \quad (21)$$

Dove i termini \underline{v}_c indicano la velocità del contorno. Poiché la linea di interesse è chiusa, i termini valutati in $s = 0$ e in $s = 1$ sono uguali e opposti.

Applicando tale teorema si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_l \underline{u} \cdot \hat{\tau} dl &= \oint_l \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \underline{u} \times \underline{u} = \\ &= - \oint_l \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{u} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Risulta dimostrato essendo che l'integrale di un gradiente su linea chiusa è uguale a 0.

G. Def. Tubo Vorticoso

Il tubo vorticoso è formato da linee vorticosi. Se prendiamo una porzione chiusa come volume di controllo di tale tubo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{\omega} &= 0 \xrightarrow{Div} \oint_{\partial\Omega} \underline{\omega} \cdot \hat{n} = \\ &= \int_A \underline{\omega} \cdot \hat{n}_A + \int_B \underline{\omega} \cdot \hat{n}_B + \int_{S_l} \underline{\omega} \cdot \hat{n}_{s_l} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Pertanto

$$\int_A \underline{\omega} \cdot \hat{n}_A = - \int_B \underline{\omega} \cdot \hat{n}_B \implies \Gamma_A = \Gamma_B \quad (24)$$

La circolazione si conserva lungo un tubo vorticoso. Se il tubo vorticoso c'è, non si elide mai, a meno che esso non si richiuda su se stesso.

Tale proprietà discende dal fatto che la vorticità è per definizione un *campo perfettamente solenoidale*.

H. III Th. di Helmholtz

Sotto *hp.* $\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$, *effetti viscosi trascurabili*, $\underline{f} = \underline{\nabla} E$.

Allora la circolazione, che per *Kelvin* è costante lungo il tubo vorticoso, è costante anche nel tempo.

II. CORRENTI INCOMPRESSIBILI ATTORNO A CORPI AERODINAMICI

Il *I th. di Helmholtz* ci dice che una particella di fluido con $\underline{\omega} = 0$ a monte, si mantiene a vorticità nulla finché gli effetti viscosi sono trascurabili.

Il modello matematico nella zona irrotazionale sarà dato da:

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \times \underline{u} = 0 \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \end{cases} + \underline{u} \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega} = b \quad (25)$$

Tali equazioni sono già sufficienti per trovare \underline{u} , tali equazioni solo *lineari*.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} \quad (27)$$

Nel caso bidimensionale:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \implies \nabla^2 u = 0 \quad (29)$$

Se deriviamo in maniera opposta e sommiamo le equazioni tra loro troviamo $\nabla^2 v = 0$. Entrambe le componenti u e v soddisfano l'equazione di *Laplace* e sono pertanto dette **funzioni armoniche**.

Se il campo di velocità è irrotazionale e aggiungiamo l'*hp.* di **dominio semplicemente connesso**, allora possiamo riscrivere il campo vettoriale \underline{u} come potenziale cinetico:

$$\underline{u} = \underline{\nabla} \varphi \quad (30)$$

Ma tale campo vettoriale è anche solenoidale, pertanto

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (31)$$

Pertanto anche il potenziale cinetico φ è una funzione armonica. Per quanto riguarda la *BC*

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = b \implies \underline{\nabla} \varphi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = b \quad (32)$$

Pertanto otteniamo un problema di *Neumann* con condizione sulla derivata prima

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = b \end{cases} \quad (33)$$

Sapendo che esiste anche la funzione di corrente nel caso 2D.

$$\underline{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{y} \quad ; \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (34)$$

Notando che

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi \quad (35)$$

Anche ψ è una funzione armonica.

Si consideri ora *Navier-Stokes* per la quantità di moto:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p = - \underline{\nabla} E \quad (36)$$

Sviluppando $(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \underline{u} \times \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{\nabla} |\underline{u}|^2 + \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p = - \underline{\nabla} E \quad (37)$$

Considerando il potenziale cinetico $\underline{\nabla} \varphi = \underline{u}$

$$\underline{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\underline{\nabla} \varphi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + E \right) = 0 \quad (38)$$

Quadrinomio di Bernoulli

A. I th. di Bernoulli

Sotto hp. di $\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$, *effetti viscosi trascurabili*, $\underline{f} = \underline{\nabla} E$, *corrente irrotazionale*.

Il quadriminomio di *Bernoulli* si conserva nello spazio.

Nel nostro caso le forze di volume sono spesso trascurabili e si ottiene dunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\underline{\nabla} \varphi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{cost} \quad (39)$$

B. Il paradosso instazionario

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = b(\underline{r}, t) \end{cases} \quad (40)$$

Siccome nel modello non ci sono derivate temporali, il potenziale si adatta *istantaneamente* alle condizioni al contorno e non è influenzato dalla storia. Tale scenario non è fisicamente plausibile.

Il modello matematico è sempre dato da

$$\text{Potenziale} + \text{Strato limite} + \text{Scia} \quad (41)$$

In realtà, la storia di una corrente di questo tipo è nella zona rotazionale quindi nella scia.

C. Avviamento di un profilo

Nella fase di avviamento

$$\underline{v} = U_\infty \text{ sca}(t) \quad (42)$$

Il th. di Kelvin dice che

$$\frac{d\Gamma_{lm}(t)}{dt} = 0 \quad (43)$$

Dove lm è la linea materiale, tale scenario è riconducibile ad un aereo fermo sulla pista che parte da fermo. Dobbiamo tenere conto dei seguenti fatti fisici

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{u} \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \end{cases} \quad (44)$$

I tempi caratteristici di tali termini

- $T_t = \frac{L}{U_\infty}$, tempo caratteristico del trasporto
- $T_m = \frac{L}{U_\infty}$, tempo caratteristico della massa, onde di pressione
- $T_v = \frac{L^2}{\nu}$, tempo caratteristico della diffusione

Vediamone i rapporti

$$\frac{T_t}{T_v} = \frac{\frac{L}{U_\infty}}{\frac{L^2}{\nu}} = \frac{\nu}{LU_\infty} = \frac{1}{Re} \quad (45)$$

Nelle nostre applicazioni $Re \gg 1$ quindi $T_t \ll T_v$, il trasporto è molto più rapido della diffusione

$$\frac{T_t}{T_m} = \frac{\frac{L}{U_\infty}}{\frac{L}{c}} = \frac{c}{U_\infty} = \frac{1}{Ma} \quad (46)$$

In campo incompressibile $Ma \ll 1$ quindi $T_t \gg T_m$, la conservazione della massa è molto più rapida del trasporto. In ordine:

1. Conservazione della massa,
2. Trasporto,
3. Diffusione

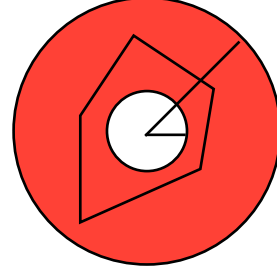
III. ANALISI COMPLESSA

Una breve introduzione ad alcuni teoremi di analisi complessa.

A. Serie di Laurent

Come visto la serie di *Taylor* è valida solo se le funzioni espanse sono analitiche. Tuttavia, tipicamente le funzioni di maggiore interesse non sono analitiche in tutto il dominio.

Supponiamo che $f(z)$ sia NON analitica in un disco, ma che lo sia in una regione anulare A , delimitata da due circonferenze concentriche, centrate in z_0 ed aventi raggio rispettivamente r e R , con $r < R$. Assumiamo che $f(z)$ sia analitica all'interno di questi cerchi concentrici e nella regione anulare A .



Allora esiste un'unica rappresentazione di $f(z)$ in serie di *Laurent*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad (47)$$

dove, se chiamiamo $c_1 : |z-z_0| < r$ e $c_2 : |z-z_0| < R$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad (48)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z_0)^{1-n}} \quad (49)$$

Il termine della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ è detta **parte principale** in quanto in sua assenza la serie di *Laurent* sarebbe una semplice serie di potenze.

1) *Definizione*:

$f(z)$ è analitica a infinito se $f(1/\tau)$ è analitica per $\tau = 0$

2) *Definizione Residuo*: Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio a meno di una singolarità in z_0 . Il coefficiente b_1 della sua serie di *Laurent* è detto **residuo di $f(z)$ in z_0**

Per un polo di ordine m

$$\text{Res}(z_0) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \quad (50)$$

===Teorema del Residuo di Cauchy

Sia $f(z)$ analitica su un dominio semplice e chiuso C , eccetto per un numero **finito** di singolarità poste all'interno di C . Allora:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(z_i) \quad (51)$$

dove z_i sono le singolarità isolate e C è percorso in senso positivo.

IV. AERODINAMICA DEL PROFILO ALARE

Consideriamo il problema esterno dove la corrente è irrotazionale.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \nabla \times \underline{u} = 0 \end{cases} \implies \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \psi = 0 \quad (52)$$

Dobbiamo poi ipotizzare che il campo sia *bidimensionale* per poter definire ψ . Inoltre, il campo deve essere *stazionario*.

Definiamo un *potenziale complesso* funzione della posizione z nel piano complesso, tale che: $f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. Essendo $f(z)$ analitica, possiamo derivarla

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{i(\partial \psi)}{\partial y} \right) (-i) \quad (53)$$

pertanto

$$\frac{df}{dz} = u - iv = u - iv = w(z) \quad , \text{ Velocità complessa} \quad (54)$$

Effettivamente torna e si ha

$$w(z) = \overline{u}(z) \quad (55)$$

Tra le ipotesi fatte per definire il potenzial c'era quella di **dominio monoco** nel caso reale. Passando all'analisi complessa è sufficiente l'ipotesi di **irrotazionalità** per definire φ . Poi useremo anche l'incomprimibilità per ottenere funzioni armoniche.

Dobbiamo capire come rappresentare la corrente attorno al profilo. Per le ipotesi sull'esistenza ed unicità della **serie di Laurent** possiamo vedere il profilo come una regione dove la velocità complessa è non analitica, mentre lo è in un anello grande a piacere, in quanto sotto ipotesi di *corrente stazionaria* il campo di velocità non presenta singolarità nelle zone indisturbate. Inoltre, a meno del contorno del dominio ad anello, la serie di Laurent **converge uniformemente**.

Possiamo rappresentare la velocità complessa come

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad (56)$$

La forma più generale ed interessante è

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n \quad (57)$$

Che è stata ottenuta sfruttando il teorema che ci dice che se tale funzione è uniformemente convergente a infinito, allora $a_n = 0, n \geq 1$. Tale teorema si applica considerando come dominio un generico contorno contenente il profilo. Siccome la corrente all'infinito ha velocità costante, la funzione è limitata.

Tale velocità complessa vale per ogni profilo e può essere vista come la somma di infinite correnti semplici della forma

$$w(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (58)$$

Si noti che il termine c_0 sarà legato alla corrente uniforme. Al crescere di n in modulo i termini della serie decadono sempre più rapidamente. Questo significa che la cosa più evidente è la corrente uniforme, le altre sono sfumature sempre meno evidenti che però condizionano la corrente.

A. Soluzioni dell'equazione di Laplace

$$f(z) = c_0 z + k + c_1 \log(z) - \frac{c_2}{z} - \frac{1}{2} \frac{c_3}{z^2} - \dots \quad (59)$$

Passiamo in rassegna i vari coefficienti

1) $c_0 z$:

$$\psi(x, y) = \text{Im}\{c_0 z\} = c_0^r y + c_0^i x \quad (60)$$

Le linee di corrente di tale potenziale sono un fascio di rette improprio. Prendendo le linee di corrente

$$y = -\frac{c_0^i}{c_0^r} x + \frac{k}{c_0^r} \quad (61)$$

Pertanto il coefficiente angolare delle linee di corrente vale

$$m = -\frac{c_0^i}{c_0^r} \quad (62)$$

il meno è legato al fatto che la velocità complessa è il complesso coniugato della velocità. Tale velocità è dunque in realtà specchiata rispetto all'asse reale. Per dare incidenza al profilo possiamo ruotare $w(z)$ di $-\alpha$ e porre il profilo ad "incidenza nulla"

$$\tilde{w}(z) = e^{-i\alpha} w(z) \quad (63)$$

Si noti che la velocità reale viene ruotata di α in quanto è il complesso coniugato del vettore velocità reale.

2) $\frac{c_{-1}}{z}$:

$$f(z) = c_{-1} \log(z) = c_{-1} (\log(\rho) - i\theta) \quad (64)$$

$$\psi = \text{Im}\{f(z)\} \quad (65)$$

Se $c_{-1} \in \mathbb{R}$, è una sorgente o pozzo

$$\psi_1 = c_{-1} \theta \quad (66)$$

Se $c_{-1} \in \mathbb{C}$, è un vortice irrotazionale

$$\psi_2 = c \log(\rho) \quad (67)$$

Per definizione della circolazione e della portanza

$$\begin{cases} \Gamma = \oint \underline{u} \cdot \hat{\tau} \\ Q = \oint \underline{u} \cdot \hat{n} \end{cases} \quad (68)$$

Se vogliamo calcolarli in analisi complessa

$$\begin{aligned} \oint w dz &= \int (u - iv)(dx + dy) = \\ &= \int (u dx + v dy) + i \int (-v dx + u dy) = \Gamma + iQ \end{aligned} \quad (69)$$

L'integrale $\oint w(z) dz$ non è pari al potenziale complesso in quanto in queste funzioni vi è sempre almeno una singolarità e se noi prendiamo un percorso chiuso che la contiene, **non** possiamo usare il teorema di **Morero** e la funzione non è detta che ammetta una primitiva.

Se vogliamo calcolare circolazione e portata associati ad un profilo alare possiamo prendere un circuito che racchiuda il profilo, ad una distanza almeno pari alla corda dal suo centro, al fine di garantire la convergenza uniforme della serie di Laurent.

$$\begin{aligned} \Gamma + iQ &= \oint w dz = \oint \left(c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \right) dz = \\ \Gamma + iQ &= 2\pi i c_{-1} \end{aligned} \quad (70)$$

3) $\frac{c_{-2}}{z^2}$:

$$\psi = \text{Im}\left\{-\frac{c_{-2}}{z}\right\} = \text{Im}\left\{-c_{-2} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right\} \quad (71)$$

Se $c_{-2} \in \mathbb{R}$

$$\psi_1 = c_{-2} \frac{y}{x^2 + y^2} = k \quad (72)$$

se

$$k = 0 \implies y = 0 \quad (73)$$

se

$$k \neq 0 \implies x^2 + y^2 - \frac{c-2}{k}y = 0 \quad (74)$$

Che risulta essere la soluzione della doppietta, corrispondente a due coppie di circonferenze centrate sull'asse immaginario.

Se uniamo queste soluzioni possiamo ottenere delle soluzioni di particolare interesse come l'ogiva di Rankine formata da una corrente uniforme e una sorgente. Tale proprietà deriva dalla linearità del Laplaciano.

B. Azioni su corpi solidi

Sfruttiamo un bilancio della quantità di moto con Eulero nella zona esterna

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \underline{u} = \oint_{\partial\Omega} -p \hat{n} - \oint_{\partial\Omega} \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \hat{n}) \quad (75)$$

Se il problema è stazionario, la variazione della quantità di moto è nulla e pertanto si ottiene un'equazione di bilancio

$$\underline{F}_c = - \oint_{\partial\Omega} p \hat{n} - \oint_{\partial\Omega} \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \quad (76)$$

Tale relazione vale sotto ipotesi di:

1. Corrente stazionaria
2. Corrente incomprimibile
3. Viscosità trascurabile

Se aggiungiamo l'ipotesi di irrotazionalità, vale Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho |\underline{u}|^2 = c \quad (77)$$

Sostituendo p nella conservazione della qdm e considerando che l'integrale di una costante su un circuito chiuso è nulla otteniamo:

$$\oint_{\partial\Omega} -p \hat{n} = \oint_{\partial\Omega=l} \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \hat{n} dl \quad (78)$$

$$\underline{F}_c = \frac{\rho}{2} \oint_l [\hat{x}(-(u^2 - v^2)dy + 2uvdx) + \hat{y}(-(u^2 - v^2)dx - 2uvdy)] \quad (79)$$

Noi vogliamo esprimere la forza \underline{F}_c con i numeri complessi.

$$\begin{aligned} \oint_l w^2 dz &= \oint_l (u - iv)^2 (dx + idy) = \\ &= \oint_l [(u^2 - v^2)dx + 2uvdy] + i[(u^2 - v^2)dy - 2uvdx] \end{aligned} \quad (80)$$

Pertanto

$$\oint_l w^2 dz = -\frac{2}{\rho} F_{cy} - \frac{2}{\rho} i F_{cx} \quad (81)$$

Provando a moltiplicare per i

$$F_{cx} - i F_{cy} = i \frac{\rho}{2} \oint_l w^2 dz \quad (82)$$

Abbiamo ricavato la **I formula di Blasius**.

C. Calcolo del momento aerodinamico

Sotto le seguenti ipotesi:

1. Corrente stazionaria
2. Corrente incomprimibile
3. Viscosità trascurabile

La II cardinale ci dice che

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \underline{M} \quad (83)$$

dove Γ per un fluido reale vale

$$\Gamma = \int_{\Omega} \underline{r} \times \rho \underline{u} dV \quad (84)$$

Con l'ipotesi di corrente stazionaria e sapendo che dalla III legge della dinamica $\underline{M}_f = -\underline{M}_c$

$$\underline{M}_c = - \oint_{\partial\Omega} p \underline{r} \times \hat{n} ds - \oint_{\partial\Omega} \rho (\underline{r} \times \underline{u}) (\underline{u} \cdot \hat{n}) ds \quad (85)$$

Svolgendo il calcolo vettoriale otteniamo

$$M_c = \oint_l -p(-x dx - y dy) - \oint_l \rho (xv - yu)(u dy - v dx) \quad (86)$$

Introducendo l'ipotesi di irrotazionalità possiamo usare Bernoulli,

$$p = c - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (87)$$

I calcoli non sono riportati, si procede volendo ricondursi al calcolo complesso calcolando quindi $\oint_l w^2 z dz$

Pertanto

$$M_c = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_l w^2 z dz \right\} \quad (88)$$

II formula di Blasius

D. Teorema di Kutta-Joukowski

Calcoliamo forza e momento agenti su un generico profilo alare

$$\begin{cases} F_x - i F_y = i \frac{\rho}{2} \oint w^2 dz \\ M_c = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \{ \oint w^2 z dz \} \end{cases} \quad (89)$$

Scrivo $w(z)$ in serie di Laurent

$$w(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (90)$$

Calcolo il primo integrale ed uso il metodo del residuo

$$i \frac{\rho}{2} \oint w^2 dz = i \frac{\rho}{2} 2c_0 c_{-1} 2\pi i = -2\pi \rho c_0 c_{-1} \quad (91)$$

Ma $c_0 = U_{\infty}$, $c_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}$ da cui

$$F_x + i F_y = i \rho \Gamma U_{\infty} \quad (92)$$

Pertanto

$$\begin{cases} F_y = -\rho \Gamma U_{\infty} \\ F_x = 0 \end{cases} \quad (93)$$

Calcoliamo il momento, svolgiamo l'integrale ed utilizziamo nuovamente il metodo del residuo

$$\oint w^2 z dz = (c_{-1}^2 + 2c_0 c_{-2}) 2\pi i \quad (94)$$

Da cui

$$M_c = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \{ (c_{-1}^2 + 2c_0 c_{-2}) 2\pi i \} \quad (95)$$

ma $c_0 = U_{\infty}$, $c_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}$ mentre c_{-2} rimane incognito.

$$M_c = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2U_{\infty} c_{-2} \right) \right\} \quad (96)$$

Si osservi che il momento aerodinamico dipende da $c_{-2} \in \mathbb{C}$. Ciò significa che M_c non è indipendente dalla forma del profilo. Siccome

il momento e le forze sono calcolate rispetto ad un SR ed il momento M_c è centrato nell'origine di tale sistema, allora la portanza non ha momento e si ottiene

$$M_c = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re}\{4\pi i U_\infty c_{-2}\} \quad (97)$$

Si noti che nel caso in cui si abbia una corrente attorno ad un cilindro, $c_{-2} \in \mathbb{R}$ ed il momento è nullo.

Vogliamo ora capire come impiegare la soluzione semplice del cilindro per il nostro caso di interesse. Prima di farlo però, si ricordi che

$$a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow a \cdot b = \rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} \quad (98)$$

Una **funzione analitica** può essere vista come una **trasformazione** da un piano complesso ad un altro.

Se $z = f(\xi)$ è analitica, allora la trasformazione è **conforme**, l'angolo tra due vettori si **conserva** tra i due piani.

Supponendo i vettori infinitesimi, la loro posizione può essere espressa come:

$$\xi_i = \xi_0 + d\xi_i \quad (99)$$

sfruttando il fatto che $\xi = \rho e^{i\theta}$

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_0 + d\rho e^{i\theta_1} \\ \xi_2 = \xi_0 + d\rho e^{i\theta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\xi_1 = d\rho e^{i\theta_1} \\ d\xi_2 = d\rho e^{i\theta_2} \end{cases} \quad (100)$$

Applicando la funzione, si ha $z_0 = F(\xi_0)$. Sviluppando:

$$\begin{cases} z_1 = F(\xi_1) = F(\xi_0) + \frac{dF}{d\xi} d\xi_1 + \dots \\ z_2 = F(\xi_2) = F(\xi_0) + \frac{dF}{d\xi} d\xi_2 + \dots \end{cases} \quad (101)$$

Ma siccome

$$\begin{cases} dz_1 = z_1 - z_0 = \frac{dF}{d\xi} d\xi_1 + \dots \\ dz_2 = z_2 - z_0 = \frac{dF}{d\xi} d\xi_2 + \dots \end{cases} \quad (102)$$

Se vogliamo esprimere l'angolo tra i due vettori in ogni piano, possiamo farne il rapporto. In questo modo

$$\frac{dz_2}{dz_1} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{dz_2}{dz_1} \quad (103)$$

Che conferma il fatto che F sia una trasformata conforme.

Si noti che la semplificazione del termine $\frac{dF}{d\xi}$ è possibile **solo se** tale derivata è non nulla. Pertanto, le funzioni analitiche sono trasformazioni conformi se la loro derivata è non nulla.

Se la funzione è analitica ovunque, noi non possiamo passare dal cilindro alla forma del profilo, in quanto quest'ultimo presenta un punto angoloso in corrispondenza del bordo d'uscita. Dobbiamo fare in modo che la funzione non sia analitica ovunque.

Dobbiamo capire come costruire la funzione analitica corretta, che sia anche non analitica in un punto. Conosciamo il potenziale attorno al cilindro, in questo caso nel piano ξ

$$\Phi(\xi(z)) = f(z) \quad (104)$$

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{d\Phi(\xi(z))}{dz} = \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{W(\xi)}{dz/d\xi} \quad (105)$$

Sapendo che

$$z = F(\xi) \longrightarrow \frac{dz}{d\xi} = F'(\xi) \quad (106)$$

da cui

$$w(z) = \frac{W(\xi)}{F'(\xi)} \Big|_{\xi=\xi(z)} = w(z(\xi)) \quad (107)$$

Le proprietà che richiediamo alla funzione $z(\xi)$ di trasformazione sono:

1. $z(\xi)$ analitica fuori dalla circonferenza $|\xi - \xi_0| > a$
2. Affinchè le correnti siano asintoticamente uguali richiediamo che:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi) = \lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W(\xi)}{dz/d\xi} \quad (108)$$

Ciò si traduce nel chiedere che $\frac{dz}{d\xi} = 1$

Queste due ipotesi ci permettono di sviluppare in serie di Laurent con $c_n = 0$ per $n > 1$. Pertanto

$$z(\xi) = c_1 \xi + c_0 + \frac{c_{-1}}{\xi} + \frac{c_{-2}}{\xi^2} + \dots \quad (109)$$

ma $c_1 = 1$ poichè $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\xi} = 1$

Vogliamo capire se la trasformazione garantisce la validità delle condizioni al contorno di non compenetrabilità. Si prendano due punti ξ_1 e z_1 : vogliamo vedere come variano gli angoli da un piano all'altro.

$$z_1 + dz = z_1(\xi_1 + d\xi) = z(\xi_1) + \frac{dz}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} d\xi + \dots \quad (110)$$

quindi

$$dz = z_1 + dz - z_1 = \frac{dz}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} d\xi = be^{i\alpha} d\xi \quad (111)$$

Dunque la superficie ruota di un angolo α passando dal piano di studio a quello fisico. Per la velocità invece

$$w(z_1) = \frac{W(\xi_1)}{dz/d\xi|_{\xi=\xi_1}} = \frac{W(\xi_1)}{b} e^{-i\alpha} \quad (112)$$

Pertanto la velocità complessa ruota di $-\alpha$, ma dunque la velocità reale ruota di $+\alpha$, in accordo con la superficie. La condizione di non compenetrazione rimane valida.

Tale condizione è verificata per tutti i punti di analiticità del dominio fisico. Tuttavia, i profili sono dotati di un bordo d'uscita aguzzo al fine di imporre una circolazione **sempre nello stesso verso** e costante.

Vediamo cosa succede sul bordo d'uscita.

$$w(z_{bu}) = \frac{W(\xi_{bu})}{\frac{dz}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{bu}}} \quad (113)$$

Tuttavia, per avere il bordo d'uscita spigoloso, la derivata al denominatore è nulla. Tuttavia, la velocità $w(z_{bu})$ in questo modo tenderebbe all'infinito. Dobbiamo quindi bilanciare, imponendo che

$$W(\xi_{bu}) = 0 \quad (114)$$

Dove ξ_{bu} è il punto di ristagno sul cilindro. Tale relazione prende il nome di **condizione di Kutta**.

Dunque la condizione di Kutta ci dice anche che il bordo d'uscita è un **punto di ristagno** per il cilindro.

Vogliamo capire cosa succede alla circolazione quando si passa al piano fisico.

$$\oint w dz = \oint \frac{W(\xi)}{dz/d\xi} \frac{dz}{d\xi} d\xi = \oint W(\xi) d\xi = \Gamma + iQ \quad (115)$$

Dunque per Kutta-Joukowski la **portanza** è la stessa.

Calcoliamo ora il **momento aerodinamico** sfruttando la II relazione di Blasius. Dobbiamo prima trovare il campo di moto nel piano di riferimento.

$$W(\xi) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{\xi^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i \xi} \quad (116)$$

dobbiamo inserire un parametro per regolare l'incidenza del profilo. Per farlo, ruotiamo la velocità complessa e anche il SR.

$$W(\xi) = U_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\xi^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i \xi} \quad (117)$$

Inoltre, non sapendo se il centro è nell'origine dobbiamo traslarlo con $(\xi - \xi_0)$ dove ξ_0 è il centro della circonferenza.

$$W(\xi) = U_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(\xi - \xi_0)^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i (\xi - \xi_0)} \quad (118)$$

Ricordando Blasius

$$M_a = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint w^2 z dz \right\} = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint \frac{W(\xi)}{dz/d\xi} z(\xi) d\xi \right\} \quad (119)$$

Ma

$$z(\xi) = \xi + c_0 + \frac{c_{-1}}{2} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (120)$$

Tuttavia la derivata è al denominatore e dobbiamo calcolare l'inversa di z' :

$$1 = z' \cdot (z')^{-1} = 1 + \frac{D_{-1}}{\xi} - \frac{C_{-1}}{\xi^2} + \frac{D_{-2}}{\xi^2} + \dots \quad (121)$$

Da cui si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} D_{-1} = 0 \\ -C_{-1} + D_{-2} = 0 \longrightarrow D_{-2} = C_{-1} \end{cases} \quad (122)$$

Pertanto trascurando i termini di ordine superiore

$$z' = 1 + \frac{C_{-1}}{\xi} + \dots \quad (123)$$

Se vogliamo usare il teorema del residuo, tutte le espansioni devono essere centrate nello stesso punto. Dobbiamo scrivere $W(\xi)$ come espansione centrata in $\xi = 0$ anziché in $\xi = \xi_0$.

Per farlo sfruttiamo la definizione della serie geometrica per $|t| < 1$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n ; \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \quad (124)$$

Nel nostro caso:

$$\frac{1}{\xi - \xi_0} = \frac{1}{\xi} + \frac{\xi_0}{\xi^2} + \dots \quad (125)$$

$$\frac{1}{(\xi - \xi_0)^2} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{2\xi_0}{\xi^3} + \dots \quad (126)$$

Tornando al momento e aggiungendo questi termini per la traslazione ed espansione otteniamo dopo una serie di calcoli il seguente risultato:

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \{ 2U_\infty \Gamma e^{-i\alpha} (\xi_0 + c_0) + 4\pi i c_{-1} U_\infty e^{-2i\alpha} \} \quad (127)$$

E. Trasformazione di Joukowski

Abbiamo ora tutti gli strumenti per determinare una trasformata conforme che ci consenta di passare da un piano analitico a quello fisico

$$z = \xi + \frac{l^2}{\xi} \quad (128)$$

La quale presenta una singolarità in $\xi = 0$. Pertanto, il cilindro nel piano ξ **deve contenere** l'origine in quanto vogliamo che all'esterno del cilindro il campo sia analitico. Vediamo cosa succede alla derivata,

$$\frac{dz}{d\xi} = 1 - \frac{l^2}{\xi^2} = 0 \implies \xi = \pm l \quad (129)$$

Il parametro l rappresenta la distanza dei punti critici dall'origine. Sapendo che

$$w(z) = \frac{W(\xi(z))}{dz/d\xi|_{\xi(z)}} \quad (130)$$

dobbiamo capire come è fatta $\xi(z)$. Invertiamo $z(\xi)$

$$z = \frac{\xi^2 + l^2}{\xi} \quad (131)$$

$$\xi_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4l^2}}{2} \quad (132)$$

Ma nel campo complesso la radice quadrata è una funzione polidroma. Dobbiamo cercare i branch point che, in questo caso, sono la soluzione dell'equazione che annulla il radicando

$$z^2 - 4l^2 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \pm 2l \quad (133)$$

E' fondamentale ora definire il **branch cut**, che deve necessariamente congiungere i due branch point. Se ciò non viene fatto è probabile che si giunga a risultati assurdi, legati al fatto che magari la funzione ha preso la soluzione sbagliata, dato che è polidroma.

Se il branch cut va fuori dal corpo, si hanno delle discontinuità nella velocità complessa. Tipicamente si esegue un branch cut diretta tra i due branch point.

E' possibile centrare il cilindro in diversi punti nel piano ξ , affinché siano soddisfatti i seguenti requisiti:

1. Essa deve contenere le singolarità $\xi = 0$;
2. Essa deve contenere o al più essere tangente alle singolarità legate all'annullamento della derivata.

Vi sono vari casi, di cui sono riportate le soluzioni:

1. Circonferenza con $x_0 = 0$, $a = l$ che risulta essere $\xi = 2l \cos(\theta)$
2. Circonferenza con $x_0 = 0$, $a > l$ risulta un'ellisse con fuochi in $\pm 2l$ l'ellisse tuttavia non presenta punti angolosi pertanto non è possibile imporre la condizione di Kutta e non è possibile definire Γ
3. Circonferenza traslata passante per $\pm l$, $\xi_0 = ih$, $a > l$ risulta essere un arco di circonferenza che descrive la linea media del profilo. L'arco di circonferenza ottenuto risulta essere un branch cut valido.

F. Calcolo della portanza di un profilo di Joukowski

Noi non conosciamo la circolazione sul cilindro in quanto non sappiamo dove si trovano i punti di ristagno. Dobbiamo fare in modo che tale punto critico sia imposto

$$W(\xi) = U_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{(\xi - \xi_0)^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi(\xi - \xi_0)} \quad (134)$$

Ma noi vogliamo che $W(\xi = l) = 0$

Il vettore $+l$ può essere scritto come somma di due vettori

$$l = \xi_0 + ae^{i\theta_r} \quad (135)$$

dunque

$$\Gamma = -2\pi i(l - \xi_0)U_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(l - \xi_0)^2} \right) = \quad (136)$$

$$\Gamma = -4\pi U_\infty a \sin(\alpha - \theta_r) \quad (137)$$

Dunque imponendo la condizione di Kutta abbiamo determinato la circolazione.

$$L = -\rho U_\infty \Gamma = 4\pi \rho U_\infty^2 a \sin(\alpha - \theta_r) \quad (138)$$

Possiamo poi ricavare il coefficiente di portanza

$$C_L = 2\pi \sin(\alpha - \theta_r) \quad (139)$$

Per una lastra piana $\theta_r = 0$ quindi ad $\alpha = 0$ il $C_L = 0$.

Nel caso di un profilo simmetrico la circonferenza ha centro sull'asse reale e comprende al suo interno il punto critico $-l$. Definendo m il centro della circonferenza

$$A = -m - a = -2m - l \quad (140)$$

$$z_{ba} = \frac{(-2m - l)^2 + l^2}{-2m - l} = -2 \frac{2m^2 + 2ml + l^2}{2m + l} \quad (141)$$

Quindi

$$c = -z_{ba} + 2l = 4 \frac{(m + l)^2}{2m + l} \quad (142)$$

Possiamo quindi valutare il C_L

$$C_L = 8\pi \frac{2m + l}{4(m + l)^2} (m + l) \sin(\alpha - \theta_r) \quad (143)$$

$$C_L = 2\pi \frac{2m + l}{m + l} \sin(\alpha - \theta_r) \quad (144)$$

Questa soluzione vale per angoli piccoli.

G. Trasformazione di Karman-Trefftz

L'utilità della trasformazione di Joukowski termina con quanto fatto. Dobbiamo capire come trovare una trasformazione priva del bordo d'uscita aguzzo. La trasformazione di Joukowski può essere scritta come

$$\frac{z - 2l}{z + 2l} = \frac{(\xi - l)^2}{(x + l)^2} \rightarrow \frac{z - nl}{z + nl} = \frac{(\xi - l)^n}{(\xi + l)^n} \quad (145)$$

dove

$$n = \frac{2\pi - \tau}{\pi} \quad (146)$$

Pertanto si aggiunge un ulteriore parametro che ci consente di fare un passo avanti.

L'idea è quella di scomporre la trasformata in più trasformazioni intermedie. La prima trasformata viene scritta mediante **serie di Fourier**, in quanto essa consente facilmente di mappare la parte

della circonferenza che non presenta criticità e consente di rappresentare bene ogni tipo di profilo. La parte critica del bordo d'uscita viene effettuata, invece, da **Karman-Trefftz**.

Non possiamo mappare direttamente il profilo con K-T in quanto non si riuscirebbero a cogliere tutti i dettagli del profilo.

Si noti che la trasformata di *Karman-Trefftz* presenta un'ostilità legata al fatto che se n è razionale, compare sempre una radice e quindi la funzione è polidroma. Inoltre, se $n \in \mathbb{R}$ ed in particolare se n è irrazionale si hanno infinite soluzioni.

Le trasformazioni conformi ci permettono di studiare precisamente la corrente esterna su qualsiasi profilo. Tuttavia, talvolta non è semplice ed immediato lo studio di un profilo. Vogliamo cercare una teoria che ci consenta, in modo approssimato, di dare delle **indicazioni qualitative**.

REFERENCES