0.1 Moduli liberi

Definizione

Sia R un anello e sia X un insieme. Un R-modulo sinistro L dotato di una mappa $i_X \colon X \to L$ si dice libero su X se per ogni $\phi \colon X \to M$ con M che è R-modulo sinistro, esiste un unico $\phi_\star \colon L \to M$ omomorfismo di R-moduli tale che $\phi = \phi_\star \circ i_X$.

Aggiungere diagrammino dagli appunti. Esistono definizioni analoghe per i gruppi, per le algebre, etc. Il concetto di libero è una generalizzazione del concetto di funtore aggiunto. Ma proseguiamo la prossima volta. Se prendo $R = \mathbb{K}$ campo, $M = V$ spazio vettoriale, $X = \mathcal{B}$ base di V e i_X l'inclusione canonica, allora lo spazio vettoriale V lo possiamo vedere come modulo libero sulla base $\mathcal{B}$. L'idea è che basta definire i valori di una mappa $\mathbb{K}$-lineare sulla base, e so già come si comporta in tutto lo spazio V.

Lezione del 10/12/2019 (vedi appunti cartacei)

La lezione del 10/12/2019 la ho negli appunti cartacei per ora. Le cose su teoria dei moduli sono davvero troppo a caso come ordine, dovrei davvero risistemarle.

Lezione del 18/12/2019 (appunti grezzi)

Scopo di questa lezione è arrivare al teorema che mostri che se R è un PID, allora ogni R-modulo finitamente generato senza torsione possiamo in realtà vederlo come R-modulo libero su un opportuno insieme finito. Per fare ciò, procediamo step by step.

La somma diretta: sia R un anello e M un R-modulo sinistro. Allora, $M \simeq A \oplus B$, dove A e B sono R-sottomoduli di M, se e solo se dette $\iota_A \colon A \to M$, $\iota_B \colon B \to M$ le inclusioni e $\pi_A \colon M \to A$ e $\pi_B \colon M \to B$ le rispettive proiezioni sul quoziente, accade che $\pi_A \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$, $\pi_B \circ \iota_B = \mathrm{id}_B$ e $\iota_A \circ \pi_A + \iota_B \circ \pi_B = \mathrm{id}_M$.

Proposizione 3.5.4

Sia R un anello, M un R-modulo sinistro, A un R-sottomodulo di M e $\iota_A \colon A \to M$ e $\pi_A \colon M \to A$ omomorfismi di R-moduli tali che $\pi_A \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$. Allora, $M \simeq A \oplus \ker(\pi_A)$.

Dimostrazione. Sia $\phi \colon A \oplus \ker(\pi_A) \to M$ la mappa definita come $\phi(a, x) = \iota_A(a) + x$, dove $a \in A$ e $x \in \ker(\pi_A)$. Chiaramente tale mappa è un omomorfismo di R-moduli. Inoltre, se $\phi(a, x) = 0$, allora $\iota_A(a) = -x$, cioè $a = \pi_A(\iota_A(a)) = \pi_A(-x) = 0$, da cui $a = 0$, cioè $-x = 0$ e quindi $x = 0$, dunque $(a, x) = (0, 0)$ il che mostra che ϕ è iniettiva. Infine, ϕ è anche suriettiva. Infatti, sia $z \in M$ e sia $y = z - \iota_A(\pi_A(z)) \in M$. Allora, $\pi_A(y) = \pi_A(z) - \pi_A(\iota_A(\pi_A(z))) = \pi_A(z) - \pi_A(z) = 0$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\pi_A \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$, da cui $y \in \ker(\pi_A)$. Dunque, $z = \phi(\pi_A(x), y) = \iota_A(\pi_A(z)) + y$, e questo prova la suriettività di ϕ, da cui esso è quindi un isomorfismo e vale quindi $M \simeq A \oplus \ker(\pi_A)$. ■

Vale una proposizione simile nel caso dei moduli liberi.

Proposizione 3.5.5

Sia M un R-modulo sinistro, $\pi\colon M \to F$ un omomorfismo suriettivo e F un R-modulo sinistro libero su un insieme Y. Allora, $M \simeq F \oplus \ker(\pi)$.

Dimostrazione. Sia $\iota_X\colon X \to F$ una mappa tale che (F, ι_X) sia libero su X, e per ogni $x \in X$ sia $m_x \in M$ tale che $\pi(m_x) = \iota_X(x)$. Sia $\psi\colon X \to M$ la mappa definita come $\psi(x) = m_x$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\iota_X"] \arrow[dr, "\psi"'] & & F \arrow[dl, dashed, bend left, "\psi_\star"] \\
& M \arrow[ur, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Essendo F libero su X, sappiamo che esiste un'unica mappa $\psi_\star\colon F \to M$ tale che $\psi_\star \circ \iota_X = \psi$. Resta da verificare che $\pi \circ \psi_\star = \mathrm{id}_F$. Poiché $\pi(\psi_\star(\iota_X(x))) = \pi(\psi(x)) = \pi(m_x) = \iota_X(x)$, abbiamo che $(\pi \circ \psi_\star)(\iota_X(x)) = \iota_X(x)$ per ogni $x \in X$. Abbiamo quindi trovato due mappe che fanno commutare il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\iota_X"] \arrow[dr, "\iota_X"'] & & F \arrow[dl, "\mathrm{id}_F"'] \arrow[dl, bend left, "\pi\circ\psi_\star"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Tuttavia, essendo F libero, la mappa che fa commutare tale diagramma è unica, da cui $\pi \circ \psi_\star = \mathrm{id}_F$. Dunque, presa $\iota_F = \psi_\star$, per la *Proposizione 3.5.4* vale $M \simeq F \oplus \ker(\pi)$. ∎

Per dimostrare il Teorema, vogliamo procedere per induzione sul numero di generatori di M. Tuttavia, per fare ciò dobbiamo prima essere in grado di dimostrare il passo base e lo step induttivo. Ci servono quindi altre due proposizioni.

Proposizione 3.5.6

Sia R un PID, $\mathbb{K} = \mathrm{quot}(R)$ e sia $M \subseteq \mathbb{K}$ un R-sottomodulo finitamente generato. Allora, $M \simeq R$ oppure $M = \{0\}$.

Dimostrazione. Poiché M è finitamente generato, esistono $m_1, \dots, m_n \in M$ tali che $M = \sum_{i=1}^{n} R \cdot m_i$. Essendo $M \subseteq \mathbb{K}$, sappiamo che ogni m_i è della forma $m_i = \frac{a_i}{s_i}$ per degli opportuni $a_i \in R$ e $s_i \in R \setminus \{0\}$. Sia $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$, così che $s \cdot M \subseteq R$ sia un R-sottomodulo (perché?). Siano $r_1, \dots, r_n \in R$; allora, $s \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \frac{a_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i^\times a_i$ dove $s_i^\times = \prod_{j \neq i} s_j$ (non so cosa stia facendo qui). Dunque, essendo $s \cdot M$ un ideale di R, poiché R è un PID ogni suo ideale è principale, quindi esiste $b \in R$ tale che $s \cdot M = \langle b \rangle$, da cui $M = R \cdot \frac{b}{s}$. Allora, la mappa $\phi_{b/s}\colon R \to M$ definita come $\phi_{b/s}(r) = r \cdot \frac{b}{s}$ è un omomorfismo suriettivo. Se $b = 0$, allora banalmente $M = \{0\}$. Se $b \neq 0$, allora $\ker(\phi_{b/s}) = \{0\}$ e $\phi_{b/s}$ è quindi un isomorfismo. ∎

Manca ancora un'ultima (spero meno dubbia della precedente) proposizione prima di poter dimostrare il Teorema. Altro che sagra della primavera, qui è la sagra delle proposizioni.

Proposizione 3.5.7

Sia R un anello, F_1 un R-modulo sinistro libero su X e F_2 un R-modulo sinistro libero su Y. Allora, $F_1 \oplus F_2$ è un R-modulo libero su $X \sqcup Y$.

Dimostrazione. Siano $\iota_X \colon X \to F_1$ e $\iota_Y \colon Y \to F_2$ le mappe dei moduli liberi F_1 e F_2, rispettivamente, e sia $\iota_{X \sqcup Y} \colon X \sqcup Y \to F_1 \oplus F_2$ la mappa definita come $\iota_{X\sqcup Y}(x) = \iota_X(x)$ e $\iota_{X\sqcup Y}(y) = \iota_Y(y)$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$ (sappiamo che tale mappa è ben definita per le proprietà dell'unione disgiunta). Sia M un R-modulo sinistro e sia $\phi \colon X \sqcup Y \to M$ una mappa qualunque. Allora, detta $\phi_\star \colon F_1 \oplus F_2 \to M$ la mappa $\phi_\star(f_1, f_2) = \phi_1(f_1) + \phi_2(f_2)$, dove $\phi_1 \colon F_1 \to M$ e $\phi_2 \colon F_2 \to M$ sono gli omomorfismi di R-moduli tali che $\phi_{|_X} = \phi_1 \circ \iota_X$ e $\phi_{|_Y} = \phi_2 \circ \iota_Y$ (che credo esistano essendo F_1 e F_2 moduli liberi), si ha che $\phi_\star \circ \iota_{X\sqcup Y} = \phi$, il che prova l'esistenza. Resta da mostrare la unicità di tale mappa $\phi_\star$ per concludere che $F_1 \oplus F_2$ è libero. D'altra parte, se $\psi \colon F_1 \oplus F_2 \to M$ è una mappa tale che $\psi \circ \iota_{X\sqcup Y} = \phi$, in particolare deve essere $\psi_{|_X} = \phi_1$ e $\psi_{|_Y} = \phi_2$, da cui $\psi(f_1, f_2) = \psi(f_1, 0) + \psi(0, f_2) = \phi_1(f_1) + \phi_2(f_2) = \phi_\star(f_1, f_2)$, da cui $\psi = \phi_\star$ provando l'unicità di $\phi_\star$. ∎

It's time for the big theorem, boi :)

Teorema 3.5.8

Sia R un PID e sia M un R-modulo sinistro finitamente generato con $\operatorname{tor}_R(M) = \{0\}$. Allora, esiste un insieme finito X con $|X| = d_R(M)$ tale che M è libero su X.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di generatori $d_R(M)$. Se $d_R(M) = 1$, esiste $m \in M$ tale che $M = R \cdot m$. Allora, $\phi_m \colon R \to M$ definita come $\phi_r(m) = r \cdot m$ è un omomorfismo di moduli suriettivo, e $\ker(\phi_m) = \operatorname{Ann}_R(m) = \{0\}$ perché per ipotesi $\operatorname{tor}_R(M) = \{0\}$. Dunque ϕ_m è iniettivo, da cui $M \simeq R$, quindi il teorema vale (perchè ogni anello è un modulo libero su se stesso con 1 generatore, in quanto $R = \langle 1_R \rangle$, cioè $\{1_R\}$ è una base). Supponiamo ora che la tesi valga per $d_R(M) \leq n$. Sia M con $d_R(M) = n+1$ e $\operatorname{tor}_R(M) = \{0\}$. Allora, esistono $m_0, \dots, m_n \in M$ tali che $M = \sum_{i=0}^{n} R \cdot m_i$. Sia $M_0 = \operatorname{sat}_M(R \cdot m_0)$. Allora, $\operatorname{sat}_M(M_0) = \operatorname{sat}_M(\operatorname{sat}_M(M_0)) = M_0$ (il passaggio in mezzo è inutile, il punto è che il sat del sat è ancora il sat), dunque per la *Proposizione 3.2.2* si ha che $\operatorname{tor}_R(M/M_0) = \operatorname{sat}_M(M_0)/M_0 = \{0\}$ (perché il quoziente è M_0/M_0). Poiché $d_R(M/M_0) \leq n$, per ipotesi induttiva M/M_0 è libero e per la *Proposizione 3.5.5* vale $M \simeq M_0 \oplus M/M_0$. Dunque, basta far vedere che anche M_0 è libero. Preso $x \in M_0$, (da qui in poi è delirio) sappiamo che esistono $r_x \in R$ e $s_x \in R \setminus \{0\}$ tali che $s_x \cdot x = r_x \cdot m_0$. Sia $\alpha \colon M_0 \to \operatorname{quot}(R)$ la mappa $\alpha(x) = \frac{r_x}{s_x}$ se $x \neq 0$ e $\alpha(0) = 0$. Siano $r, r' \in R$ e $s, s' \in R \setminus \{0\}$ con $s \cdot x = r \cdot m_0$ e $s' \cdot x = r' \cdot m_0$. Allora, $ss' \cdot x = s'r \cdot m_0 = sr' \cdot m_0$, cioè $(s'r - sr') \cdot m_0 = 0$, da cui $s'r - sr' \in Ann_R(m_0) = \{0\}$ e quindi $s'r - sr' = 0$, cioè $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ (a che serve sta cosa?). Mostriamo che α è un omomorfismo iniettivo di R-moduli. Infatti, presi $x, y \in M_0$, siano $s_x \cdot x = r_x \cdot m_0$ e $s_y \cdot y = r_y \cdot m_0$, così che moltiplicando la prima equazione per s_y e la seconda per s_x e sommandole, valga $s_x s_y (x+y) = (s_y r_x + s_x r_y) \cdot m_0$, da cui $\alpha(x+y) = \frac{s_y r_x + s_x r_y}{s_x s_y} = \frac{r_x}{s_x} + \frac{r_y}{s_y} = \alpha(x) + \alpha(y)$. Inoltre, preso $r \neq 0$, $rs_x \cdot x = rr_x \cdot m_0$, quindi $\alpha(r \cdot x) = \frac{r \cdot r_x}{s_x} = r \cdot \alpha(x)$. Per l'iniettività, se $\alpha(x) = 0$ esiste $s_x \in R \setminus \{0\}$ tale che $s_x \cdot x = 0$, cioè $x \in \operatorname{tor}_R(M_0) \subseteq M$, da cui $x = 0$ essendo $\operatorname{tor}_R(M) = \{0\}$. Dunque, per il

Primo teorema d'isomorfismo si ha $M_0 \simeq \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq M$. Tuttavia, per la *Proposizione 3.5.6*, essendo $\mathrm{Im}(\alpha)$ un R-sottomodulo di $\mathrm{quot}(R)$, vale $\mathrm{Im}(\alpha) \simeq R$, quindi $M_0 \simeq R$. Poiché R è libero su $\{\cdot\}$ (come detto prima la base è un insieme di cardinalità 1) e per ipotesi induttiva M/M_0 è libero su X' di cardinalità $|X'| = d_R(M) - 1$, concludiamo che M è libero su $X = X' \sqcup \{\cdot\}$ e $|X| = d_R(M)$ come desiderato. ■

Ci sono un sacco di punti che non mi sono chiari: perchè il sat del sat è il sat? che succede quando compare un m_0 selvaggio con tutto il delirio degli r_x e s_x? Alla fine che succede?