0.1 Divisori elementari

Lezione del 07/01/2020 (appunti grezzi)
Sia R un PID e sia F un R-modulo sinistro libero su $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq F$, dove X è una base di F. Preso un elemento $z \in F$, siano $r_1, \dots, r_n \in R$ tali che $z = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i$.

Definizione

L'ideale $\operatorname{con}(z) = \langle r_1, \dots, r_n \rangle \lhd R$ si dice contenuto di z.

A priori, tale definizione è strana: per come lo abbiamo posto, sembra che $\operatorname{con}(z)$ dipenda dalla particolare base X scelta. Tuttavia questo non è vero, come mostra la proposizione seguente. Per comodità di notazione, sia $F^\star = \operatorname{Hom}(F, R)$.

Proposizione 3.6.1

Sia $z \in F$ e sia $I_z = \{\phi(z) : \phi \in F^\star\}$. Allora, I_z è un ideale di R e $\operatorname{con}(z) = I_z$.

Dimostrazione. Sia $x_i^\star \in F^\star$ definito come $x_i^\star(x_j) = \delta_{i,j}$, così che $r_i = x_i^\star(z)$, cioè $r_i \in I_z$.[1] Mostriamo ora che $I_z \lhd R$. Innanzitutto, sappiamo che $F^\star$ è un R-modulo, perché presi $\phi, \psi \in F^\star$ anche $\phi + \psi \in F^\star$ e $r \cdot \phi \in F^\star$ per ogni $r \in R$. Dunque, la mappa $\_(z) \colon F^\star \to R$ è un omomorfismo di R-moduli (ma perché chiama le mappe con il trattino, e che cacchio) da cui $\operatorname{Im}(\_(z)) = I_z$, cioè I_z è un R-modulo (e quindi anche un ideale di R). Chiaramente $\operatorname{con}(z) \subseteq I_z$. D'altra parte, preso $\phi \in F^\star$, osserviamo che $\phi(z) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \phi(x_i) \in \operatorname{con}(z)$, da cui $I_z \subseteq \operatorname{con}(I_z)$ e quindi seque che $\operatorname{con}(z) = I_z$ come richiesto. ■

Lemma 3.6.2

Sia R un PID, F un R-modulo sinistro libero su $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e sia $M \subseteq F$ un R-sottomodulo di F. Sia $z \in F$. Allora,
(a) esiste $\phi \in F^\star$ tale che $\operatorname{con}(z) = \langle \phi(z) \rangle$; (sono ideali o moduli? lui scrive $R \cdot \phi(z)$)
(b) per ogni $\psi \in F^\star$ si ha che $\psi(z) \in \operatorname{con}(z)$;
(c) esiste $x_0 \in M$ tale che per ogni $y \in M$ si abbia $\operatorname{con}(y) \subseteq \operatorname{con}(x_0)$.

Dimostrazione. (a) Poiché R è un PID, ogni suo ideale è principale, da cui essendo $\operatorname{con}(z) \lhd R$ sappiamo che esiste $c \in \operatorname{con}(z)$ tale che $\operatorname{con}(z) = \langle c \rangle$. Dunque, per la *Proposizione 3.6.1* esiste $\phi \in F^\star$ tale che $c = \phi(z)$.

(b) Segue banalmente dalla *Proposizione 3.6.1* essendo $\operatorname{con}(z) = I_z$.

(c) Poiché R è un PID, esso è noetheriano, dunque esiste $x_0 \in M$ tale che $\operatorname{con}(x_0)$ è massimale in $\{\operatorname{con}(y) : y \in M\}$, cioè se $\operatorname{con}(x_0) \subseteq \operatorname{con}(z)$ per un certo $z \in M$, allora $\operatorname{con}(z) = \operatorname{con}(x_0)$. Resta da mostrare che x_0 soddisfa (c). Per (a), sappiamo che esiste $\phi \in F^\star$ tale che $\operatorname{con}(x_0) = \langle \phi(x_0) \rangle$. Ora, per la *Proposizione 3.6.1* basta verificare che $\phi(z) \subseteq \langle \phi(x_0) \rangle$ per ogni $z \in M$ e $\psi \in F^\star$. Sia $R \cdot d = R \cdot \phi(x_0) + R \cdot z_0$. Allora, esistono $a, b \in R$ tali che $d = a \cdot \phi(x_0) + b \cdot \phi(z)$, cioè $d = \phi(ax_0 + bz) \in \operatorname{con}(ax_0 + bz)$ per la *Proposizione 3.6.1*.

[1] Osserviamo che tali $x_i^\star$ sono una base del duale.

Allora, $\text{con}(x_0) = R\cdot\phi(x_0) \subseteq R\cdot d \in \text{con}(ax_0+bz)$, da cui $\text{con}(x_0) = \text{con}(ax_0+bz)$. Dunque, $d \in R\cdot\phi(x_0)$, cioè $\phi(z) \in R\cdot d \subseteq R\cdot\phi(x_0) = \text{con}(x_0)$. Manca da mostrare che $\psi(z) \in \text{con}(x_0)$ per ogni $\psi \in F^\star$. Sappiamo che $\psi(x_0) \in \text{con}(x_0)$ per ogni $\psi \in F^\star$. Sia $z_0 = z - \frac{\phi(z)}{\phi(x_0)} \cdot x_0$, dove quindi $\frac{\phi(z)}{\phi(x_0)} \in R$. Allora $\phi(z_0) = 0$. Basta dimostrare che $\psi(z_0) \in \text{con}(x_0)$ (nota: mi sono perso). Sia $\psi_0 \in F^\star$ tale che $\psi_0 = \psi - \frac{\psi(x_0)}{\phi(x_0)} \cdot \phi$. Osserviamo che $\psi_0(z_0) = \psi(z)$ e $\psi_0(x_0) = 0$. Ora basta mostrare che $\psi_0(z_0) \in \text{con}(x_0)$. Usiamo lo stesso trucco di prima. Sia $R\cdot c = R\cdot\psi_0(z_0) + R\cdot\psi_0(x_0)$. Allora, esistono $p, q \in R$ tali che $x = p\cdot\psi_0(z_0) + q\cdot\psi_0(x_0)$. Dunque,

$$(\phi + \psi_0)(pz_0 + qx_0) = \phi(pz_0) + \phi(qx_0) + \psi_0(pz_0) + \psi_0(qx_0) = q \cdot \phi(x_0) + p \cdot \psi_0(z_0) = c$$

in quanto gli altri due termini sono nulli. Quindi per la *Proosizione 3.6.1* vale $c = (\phi + \psi_0)(pz_0+qx_0) \in \text{con}(pz_0+qx_0)$, da cui $R\cdot c \subseteq \text{con}(pz_0+qx_0)$, dove $\text{con}(x_0) = R\cdot\phi(x_0) \subseteq R\cdot c$. Dunque, $R \cdot \phi(x_0) = \text{con}(pz_0 + qx_0) \ni c$, cioè $R \cdot c = R \cdot \phi(x_0)$, quindi $\psi_0(z_0) \in R \cdot \psi(x_0) = \text{con}(x_0)$ come desiderato. ■

Teorema 3.6.3

Sia R un PID, F un R-modulo libero su $\{y_1, \dots, y_n\}$ e sia $M \subseteq F$ un R-sottomodulo di F. Allora, esistono una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ di F e degli elementi $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in R \setminus \{0\}$ tali che $\{\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_m x_m\}$ sia una base di M. Inoltre, la successione $(R\cdot\alpha_1, \dots, R\cdot\alpha_m)$ è univocamente determinata da M.

Dimostrazione. Dannazione, me la sono persa per lo sciopero, ma c'è sulle sue note. ■

Definizione

Tali $R \cdot \alpha_i$ si dicono divisori elementari di M.

Corollario 3.6.4

Sia R un PID e sia A un R-modulo di torsione finitamente generato. Allora, esistono degli ideali $I_1, \dots, I_n \lhd R$ con $\text{Ann}_R(A) \subseteq I_n \subseteq \dots \subseteq I_1 \subsetneq R$ tali che $A \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} R/I_k$.

Ha detto qualcosa su come applicarlo ai gruppi abeliani. Notare come tale teorema+corollario implica il Teorema di Jordan.

Lezione del 08/01/2020 (manca, ha dimostrato le cose scritte nelle sue note sui divisori elementari)