Appunti di Algebra II

Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Univerisita' degli studi di Milano-Bicocca.
A.A 2020/2021

Lorenzo Feroleto

September 2020

Indice

1 Complementi di teoria degli anelli

1.1 Anelli di polinomi in una variabile

Andiamo a definire l'anello dei polinomi senza il concetto di successione normalmente utilizzato in approcci piu' rigorosi.

Definizione 1.1: Anello di polinomi a coefficienti in R nella variabile x

Sia R un anello commutativo e definiamo l'*anello di polinomi in una variabile* come la seguente struttura algebrica

$$R[x] = \{f := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R, n \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

Notiamo come x^i in questo contesto non e' nient'altro che una indeterminata che obbedisce alle proprieta' degli esponenti di una potenza.
Procediamo ora a definire le operazioni di somma e prodotto di polinomi in una variabile.

Definizione 1.2: Operazioni tra polinomi in una variabile

Siano $f = \sum_{i=0}^{n} r_i \cdot x^i,\ g = \sum_{i=0}^{n} s_i \cdot x^i \in R[x]$. Definiamo la *somma*

$$+ : R[x] \times R[x] \to R[x],\ f + g = \sum_{i=0}^{max\{n,m\}} (r_i + s_i) \cdot x^i \tag{2}$$

ponendo $r_{n+1} = \cdots = r_m = 0$ se $m > n$ e $s_{m+1} = \cdots = s_n = 0$ se $n > m$.
Definiamo il *prodotto*

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{k} r_i \cdot s_{k-i}) \cdot x^i \tag{3}$$

Tale scrittura e' la normale moltiplicazione tra i polinomi ma scritta formalmente.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 1.3

Aggiungere esempio

Come visto nel corso di Algebra I, si verifica facilmente che $R[x]$ dotato di tali operazioni di somma e prodotto e' un anello commutativo con elemento neutro il polinomio identicamente nullo $0_{R[x]} = 0_R$ e unita' il polinomio costante $1_{R[x]} = 1_R$.
Definiamo ora un imporante funzione che descrive un polinomio.

Definizione 1.4: Funzione grado; grado di un polinomio

Sia R un anello commutativo e sia $f(x) = f \in R[x]$ definita come in precedenza. Allora definiamo la funzione grado:

$$deg^*(f) := \left\{ \begin{array}{ll} \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0_R\}, & \text{se } f(x) \not\equiv 0_R \\ -\infty, & \text{se } f(x) \equiv 0_R \end{array} \right\}$$

e il risultato di $deg^*(f)$ come il *grado* del polinomio f.