0.1 Endomorfismi

Lezione del 20/11/2019 (appunti grezzi)
Oggi parliamo del polinomio minimo di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia K un campo, V un K-spazio vettoriale con $\dim_K(V) < \infty$ e sia $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$. Sia $\phi_\alpha \colon K[x] \to \mathrm{End}_K(V)$ definita come $\phi_\alpha(f) = f(\alpha)$, cioè, preso $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\phi_\alpha(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$, dove α^k indica la composizione k volte inteso che $\alpha^0 = \mathrm{id}_V$. Allora, ϕ_α è una mappa K-lineare, perché $\phi_\alpha(\lambda f + \mu h) = \lambda\phi_\alpha(f) + \mu\phi_\alpha(g)$ per ogni $\lambda, \mu \in K$ e per ogni $f, g \in K[x]$. Inoltre, tale mappa è un omomorfismo di anelli, essendo $\phi_\alpha(f \cdot g) = f(\alpha) \circ g(\alpha)$. Dunque, essendo $\dim(K[x]) = \infty$ e $\dim(\mathrm{End}_K(V)) = \dim_K(V)^2$, per il principio dei cassetti ϕ_α non può essere iniettiva, cioè $\ker(\phi_\alpha) \neq \{0_K\}$. Poiché $\ker(\phi_\alpha) \lhd K[x]$ è non banale, esiste un unico generatore monico $\min_\alpha(x) \in \ker(\phi_\alpha)$ cioè $\ker(\phi_\alpha) = \langle \min_\alpha(x) \rangle$.

Definizione

Tale polinomio $\min_\alpha(x)$ si dice polinomio minimo dell'endomorfismo $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$.

Vogliamo ora fare due cose: innanzitutto capire come calcolare il polinomio minimo, e poi, analogamente a GAL, trovare un'opportuna base $\mathcal{B}$ di V tale che $[\alpha]_\mathcal{B}$ abbia una forma piacevole (Teorema di Jordan). Adesso ci dedichiamo a fare la prima cosa. Per fare la seconda cosa, c'è un teorema molto generale detto Teorema fondamentale per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali. Applicando questo teorema a $(V, *_\alpha)$ proveremo il Teorema di Jordan (per K campo algebricamente chiuso), e applicandolo a $\mathbb{Z}$ troveremo il Teorema per gruppi abeliani finitamente generati. Inoltre, c'è un altro teorema detto di Decomposizione primaria che permette la caratterizzazione deglii endomorfismi diagonalizzabili. Tale seconda cosa è molto complessa, e ci staremo sopra fino a Natale.

Teorema 3.X.Y: Teorema di Cayley-Hamilton

Sia V un K-spazio vettoriale con $\dim_K(V) < \infty$ e sia $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$. Allora, $\min_\alpha(x)$ è un divisore del polinomio caratteristico $\mathrm{char}_\alpha(x) = \det(\alpha - x \cdot \mathrm{id}_V)$.

Dimostrazione. Basta provare che (non ha detto niente lol). ∎

Mettiamo a posto qualche pezzo di ieri, quando ha usato la somma diretta come se niente fosse. Sia R un anello e siano M e N degli R-moduli sinistri. Allora, $M \oplus N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}$ è un R-modulo sx, ove $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$ e $r \cdot (m, n) = (r \cdot m, r \cdot n)$. Analogamente, se $M_1, \dots, M_k$ sono R-moduli sinistri, poniamo $\oplus_{i=1}^n M_i = M_1 \oplus \dots \oplus M_k = \{(m_1, \dots, m_k) : m_i \in M_i\}$ e questo è un R-modulo sx con le ovvie operazioni $(m_1, \dots, m_k) + (m_1', \dots, m_k') = (m_1 + m_1', \dots, m_k + m_k')$ e $r \cdot (m_1, \dots, m_k) = (r \cdot m_1, \dots, r \cdot m_k)$.

Dimostriamo ora la proposizione che è l'analoga di quella di teoria dei gruppi, che serve per dimostrare che il prodotto diretto interno è isomorfo al prodotto diretto esterno sotto ipotesi ragionevoli (tra l'altro la seconda parte è più bella di come la sta facendo lui).

Proposizione

Sia R un anello, M un R-modulo sinistro e siano $A, B \subseteq M$ degli R-sottomoduli tali che $A \cap B = \{0_M\}$. Allora, $A + B \simeq A \oplus B$. In generale, se ho $A_1, \dots, A_k$ che sono R-sottomoduli di M tali che $A_j \cap \sum_{i \neq j} A_i = \{0_M\}$ per ogni $j = 1, \dots, k$, ho che $\sum_{i=1}^{k} A_i \simeq \oplus_{i=1}^{k} A_i$.

Dimostrazione. Sia $m \in A+B$; allora, esistono $a_m \in A$ e $b_m \in B$ con $m = a_m + b_m \in A+B$. Siano $a' \in A$, $b' \in B$ tali che $m = a' + b'$. Allora, $a_m + b_m = a + b$ se e solo se $a_m - a' = b' - b_m$. Poiché tale elemento appartiene a $A \cap B = \{0_M\}$, risulta $a' = a_m$ e $b' = b_m$, quindi ogni $m \in A + B$ si scrive in modo unico come somma $a_m + b_m$. Sia $\psi \colon A + B \to A \oplus B$ definita come $\psi(m) = (a_m, b_m)$ e sia $\eta \colon A \oplus B \to A + B$ definita come $\eta(a, b) = a + b$. Per l'unicità della scrittura di m, tali mappe sono ben definite. Inoltre, $\eta \circ \psi = \mathrm{id}_{A+B}$ e $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_{A \oplus B}$, quindi è sufficiente mostrare che questi sono omomorfismi di R-moduli. Questo è facile: prendo $m = a_m + b_m$ e $n = a_n + b_n$, allora $m + n = (a_m + a_n) + (b_m + b_n)$, cioè $a_{m+n} = a_m + a_n$ e $b_{m+n} = b_m + b_n$, quindi ψ è un omomorfismo di gruppi abeliani. Inoltre, preso $r \in R$, $r \cdot m = r \cdot a_m + r \cdot a_n = a_{r \cdot m} + b_{r \cdot m}$, da cui ψ è un omomorfismo di R-moduli. Analogo per η, ho $\eta((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = \eta(a_1, b_1) + \eta(a_2, b_2)$ e $\eta(r \cdot (a, b)) = \eta(r \cdot a, r \cdot b) = r \cdot a + r \cdot b = r \cdot \eta(a, b)$.

Procediamo ora per induzione su k. Per $k = 1$ non c'è nulla da dimostrare, per $k = 2$ lo ho già fatto. Supponiamo quindi che $\sum_{i=1}^{k-1} A_i \simeq \oplus_{i=1}^{k-1} A_i$ e dimostriamolo per k. Per ipotesi $A_k \cap \sum_{i=1}^{k-1} = \{0\}$, quindi $\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k-1} A_i + A_k \simeq \oplus_{i=1}^{k-1} A_i \oplus A_k \simeq \oplus_{i=1}^{k} A_k$. ■

Proposizione

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$. Siano $U, W \leqslant V$ sottospazi vettoriali tali che $\alpha(U) = U$ e $\alpha(W) = W$, cioè U e W sono α-invarianti. Siano $\alpha_U \in \mathrm{End}_K(U)$ e $\alpha_W \in \mathrm{End}_K(W)$ gli endomorfismi indotti. Se $U + W = V$ e $U \cap W = \{0_K\}$, allora $\min_\alpha(x) = \mathrm{mcm}(\min_{\alpha_U}(x), \min_{\alpha_W}(x))$.

Dimostrazione. Poiché $\ker(\phi_\alpha) = \mathrm{Ann}_{K[x]}(V, *_\alpha) = K[x] \min_\alpha(x)$,[1] vale $(V, *_\alpha) \simeq (U, *_{\alpha_U}) \oplus (W, *_{\alpha_W})$. Dunque $\mathrm{Ann}_{K[x]}(V, *_\alpha) = \mathrm{Ann}_{K[x]}(U, *_{\alpha_U}) \cap \mathrm{Ann}_{K[x]}(W, *_{\alpha_W})$, da cui risulta $K[x] \,\mathrm{mcm}(\min_{\alpha_U}(x), \min_{\alpha_W}(x)) = K[x] \min_{\alpha_U}(x) \cap K[x] \min_{\alpha_W}(x)$. ■

[1] Dimostrare l'uguaglianza tra ker e Ann usando le doppie inclusioni.