

# **Appunti del corso di Algebra II**

**Dipartimento di Matematica e Applicazioni,  
Università di Milano-Bicocca**

**A.A. 2019/2020**

Versione del 7 Ottobre 2020

# Indice

<b>1 Complementi di teoria degli anelli</b>	<b>3</b>
1.1 Anelli di polinomi in una variabile . . . . .	3

**Changelog (versione del 7 Ottobre 2020):**

- Reworking completo di varie cose

**To do (in ordine di importanza):**

- Teoria dei moduli (lezioni dal 06/11/2019 fino alla fine del corso)
- Estensione di campi (lezioni del 25-30/10/19)
- Campi di spezzamento e campi finiti (lezioni del 05-06/11/2019)
- Domini a valutazione discreta (lezioni del 22-23/10/19)
- Capitolo 1.7: sistemare spacing, anello locale che non è dominio, proposizione 1.7.10
- Capitolo 1.5: riduzione mod p, Eisenstein, ciclotomici  $x^{p-1} + \dots + x + 1$
- Capitolo 1.4: polinomi di Laurent e serie formali (fix i due rif in anelli locali)
- Introduzione?

# 1 Complementi di teoria degli anelli

## 1.1 Anelli di polinomi in una variabile

Introduciamo la struttura algebrica dei polinomi, ponendo la convenzione che  $R$  indicherà un anello commutativo unitario e  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

### Definizione 1.1.1: Anello di polinomi in una variabile e operazioni

Sia  $R$  un anello commutativo unitario. Denotiamo l'*anello dei polinomi a coefficienti in  $R$  nella variabile  $x$*  come il seguente insieme

$$R[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

dove sono definite due operazioni binarie interne.

Presi infatti due elementi  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  e  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  di  $R[x]$ , definiamo le operazioni binarie di *somma*

$$+ : R[x] \times R[x] \rightarrow R[x], \quad f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^s (a_i + b_i) x^i$$

dove abbiamo posto  $s = \max\{m, n\}$  e  $a_i = b_j = 0_R$  per  $i > m$  e  $j > n$ , e *prodotto*

$$\cdot : R[x] \times R[x] \rightarrow R[x], \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k$$

Come visto nel corso di Algebra I, si verifica facilmente che  $R[x]$  dotato di tali operazioni di somma e prodotto è un anello commutativo<sup>1</sup> con elemento neutro il polinomio identicamente nullo  $0_{R[x]} = 0_R$  e unità il polinomio costante  $1_{R[x]} = 1_R$ . Vediamone qualche esempio.

### Esempio 1.1.2

Se prendiamo  $R = \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  e  $g(x) = 4x + 5$ , si ha che

$$f(x) + g(x) = (1 + 0)x^2 + (2 + 4)x + (3 + 5) = x^2 + 6x + 8,$$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5)x^3 + (3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5)x^2 + (3 \cdot 4 + 2 \cdot 5)x + 3 \cdot 5 \\ &= 4x^3 + 13x^2 + 22x + 15. \end{aligned}$$

Di qui in seguito, denoteremo il prodotto di polinomi semplicemente come  $f(x)g(x)$  o  $f \cdot g$ . Possiamo quindi definire su  $R[x]$  il concetto di “grado” di un polinomio.

<sup>1</sup>Infatti  $a_i b_{k-i} = b_{k-i} a_i$  essendo  $R$  un anello commutativo per ipotesi, da cui  $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ .

### Definizione 1.1.3: Funzione grado; grado di un polinomio

Sia  $R$  un anello e sia  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$ . La funzione  $\deg^*: R[x] \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  definita come

$$\deg^*(f) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : a_k \neq 0_R\} & \text{se } f(x) \not\equiv 0_R \\ \infty & \text{se } f(x) \equiv 0_R \end{cases} \quad \text{è detta } \underline{\text{grado}}.^2$$

Tale definizione coincide con quella classica di grado di un polinomio tranne nel caso in cui  $f(x)$  sia identicamente nullo. Infatti, per questa definizione  $f(x) \equiv 0_R$  è l'unico polinomio di grado infinito, mentre secondo quella classica anch'esso ha grado 0 in quanto costante.

**Esempio.** Se consideriamo i polinomi  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) \equiv 1$  e  $h(x) \equiv 0$  in  $\mathbb{Z}[x]$ , si ha che  $\deg^*(f) = 2$  e  $\deg^*(g) = 0$ , ma  $\deg^*(h) = \infty$ .  $\square$

Possiamo ora dimostrare un risultato che mette in relazione l'anello dei polinomi con quello dei suoi coefficienti, nel caso in cui quest'ultimo sia un dominio di integrità.<sup>3</sup>

### Proposizione 1.1.4

Sia  $R$  un dominio di integrità. Allora, per ogni  $f(x), g(x) \in R[x]$  vale

$$\deg^*(f \cdot g) = \deg^*(f) + \deg^*(g). \quad (\star)$$

In particolare,  $R[x]$  è un dominio di integrità se e solo se  $R$  è un dominio di integrità.

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che se almeno uno tra  $f(x)$  e  $g(x)$  è identicamente nullo, allora  $(\star)$  è vera perché  $f(x)g(x) \equiv 0_R$  e quindi

$$\deg^*(f \cdot g) = \infty = \deg^*(f) + \deg^*(g).$$

D'altra parte, siano  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  e  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  non nulli con  $a_m \neq 0_R$  e  $b_n \neq 0_R$ .

Poiché  $R$  è un dominio di integrità,  $a_m b_n \neq 0_R$ , cioè  $a_m b_n x^{m+n}$  è il monomio di grado massimo nel prodotto  $f(x)g(x)$ . Per definizione di grado, concludiamo quindi che

$$\deg^*(f \cdot g) = m + n = \deg^*(f) + \deg^*(g).$$

Sia ora  $R$  un dominio di integrità, e mostriamo che lo è anche  $R[x]$ . Osserviamo innanzitutto che  $R[x]$  è un anello commutativo unitario, in quanto eredita tali proprietà da  $R$ . Inoltre, presi  $f(x), g(x) \in R[x]$  tali che  $f(x)g(x) \equiv 0_R$ , per quanto appena mostrato vale

$$\deg^*(f) + \deg^*(g) = \deg^*(f \cdot g) = \deg^*(0_R) = \infty.$$

<sup>2</sup>Sarebbe più corretto scrivere  $\deg^*(f(x))$ , ma si preferisce evitare l'uso di troppe parentesi. Ricordiamo che con  $f(x) \equiv k$  si intende il polinomio costante uguale a  $k$ . Tale notazione serve per non confondere un polinomio costante  $p(x) \equiv 0$  con l'equazione algebrica  $p(x) = 0$ .

<sup>3</sup>Ricordiamo che un dominio di integrità è un anello commutativo unitario  $R \neq \{0_R\}$  senza divisori dello zero, cioè in cui  $ab = 0_R$  se e solo se  $a = 0_R$  o  $b = 0_R$ . Esempi di domini di integrità sono  $\mathbb{Z}$ , le classi di resto  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  con  $p$  primo, gli interi gaussiani  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  e  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

Dunque, almeno uno fra  $f(x)$  e  $g(x)$  ha grado infinito ed è quindi il polinomio nullo, cioè  $R[x]$  non ha divisori dello zero ed è effettivamente un dominio di integrità. Viceversa, sia  $R[x]$  un dominio di integrità. Allora,  $R \subseteq R[x]$  è commutativo e unitario in quanto sottoanello, e presi  $a, b \in R$ , possiamo vedere  $a$  e  $b$  come polinomi costanti in  $R[x]$ . Essendo  $R[x]$  un dominio di integrità,  $ab = 0_R$  se e solo se  $a = 0_R$  o  $b = 0_R$ , da cui anche  $R$  non ha divisori dello zero ed è quindi un dominio di integrità. ■

Osserviamo che  $(\star)$  non vale quando l'anello  $R$  non è un dominio di integrità.

### Esempio 1.1.5

Siano  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 3x + 2$  in  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$ . Allora,  $\deg^*(f) = \deg^*(g) = 1$ , ma  $f(x)g(x) = 6x^2 + 7x + 2 \equiv_6 x + 2$ , da cui  $\deg^*(f \cdot g) = 1 \neq 2 = \deg^*(f) + \deg^*(g)$ .

Più in generale, se  $R$  non è un dominio di integrità, per definizione esistono  $a, b \in R$  non nulli tali che  $ab = 0_R$ . Allora, detti  $f(x) = ax$  e  $g(x) = bx$ , si ha  $f(x)g(x) = abx^2 = 0_Rx^2 = 0_R$ , da cui, essendo  $\deg^*(f) = \deg^*(g) = 1$ , l'uguaglianza  $(\star)$  non vale perché

$$\deg^*(f \cdot g) = \deg^*(0_R) = \infty \neq 2 = \deg^*(f) + \deg^*(g).$$

Dunque, per la proposizione 1.1.4 segue che  $(\star)$  vale se e solo se  $R$  è un dominio di integrità.

Prima di procedere nello studio degli anelli di polinomi, richiamiamo il concetto di elemento invertibile di un anello. Preso un anello  $R$ , sia  $R^\times$  l'insieme degli elementi di  $R$  che hanno inverso moltiplicativo, cioè l'insieme degli  $a \in R$  per cui esiste  $b \in R$  tale che  $ab = 1_R$ . Se esiste, denotiamo l'inverso moltiplicativo di  $a$  con  $a^{-1}$ . Allora, vale la proposizione seguente.

### Proposizione 1.1.6

Sia  $R$  un anello. Allora,  $R^\times$  è un gruppo rispetto al prodotto.

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che il prodotto è associativo essendo  $R$  un anello, e in particolare  $1_R$  è l'unità anche di  $R^\times$ . Inoltre, presi  $a, b \in R^\times$ , per definizione esistono  $c, d \in R$  tali che  $ac = 1_R$  e  $bd = 1_R$ , dunque

$$(ab)(dc) = a(bd)c = a1_Rc = ac = 1_R,$$

cioè  $ab \in R^\times$  è invertibile con inverso  $dc$ , da cui  $R^\times$  è chiuso rispetto al prodotto. Infine, se  $ab = 1_R$  è evidente che anche  $a^{-1} = b \in R^\times$ , dunque  $(R^\times, \cdot)$  è effettivamente un gruppo. ■

Grazie a tale proposizione, la definizione seguente risulta quindi ben posta.

### Definizione 1.1.7: Gruppo moltiplicativo di un anello

Sia  $R$  un anello unitario commutativo. L'insieme  $R^\times$  degli elementi di  $R$  che ammettono inverso moltiplicativo è un gruppo detto *gruppo moltiplicativo di  $R$* .<sup>4</sup>

Se da una parte la proposizione 1.1.4 mostra che  $R[x]$  può avere la struttura di un dominio di integrità, l'anello dei polinomi  $R[x]$  non è mai un campo, nemmeno se lo è  $R$  stesso.<sup>5</sup> Infatti,  $x \in R[x]$  non è un elemento invertibile perché il suo inverso  $1/x$  non è un polinomio.<sup>6</sup> Risulta quindi naturale chiedersi quali elementi di  $R[x]$  siano effettivamente invertibili.

### Proposizione 1.1.8

Sia  $R$  un dominio di integrità. Allora,  $R[x]^\times = R^\times$ .

*Dimostrazione.* Poiché ogni elemento di  $R^\times$  può essere visto come polinomio costante di  $R[x]$ , è evidente che  $R^\times \subseteq R[x]^\times$ . D'altra parte, siano  $f(x), g(x) \in R[x]^\times$  tali che  $f(x)g(x) = 1_R$ . Allora, per la *Proposizione 1.1.1* si ha che

$$\deg^*(f \cdot g) = \deg^*(1_R) = 0 = \deg^*(f) + \deg^*(g),$$

quindi  $\deg^*(f) = \deg^*(g) = 0$  essendo il grado non negativo. Questo prova che ogni elemento di  $R[x]^\times$  è in realtà una costante invertibile, cioè  $R[x]^\times \subseteq R^\times$ , dunque  $R[x]^\times = R^\times$ . ■

*Come esprimere una relazione più generica di sottoanello?*

Sia  $R$  un anello, e supponiamo di voler aggiungere a  $R$  un certo elemento  $x \notin R$  senza alcuna relazione con gli altri elementi di  $R$ , in modo che la struttura algebrica risultante sia ancora un anello e sia la più piccola possibile. Come possiamo fare? Poiché ogni anello è chiuso rispetto a somma e prodotto, tale struttura conterrà anche tutte le potenze non negative  $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$  di  $x$  e tutte le combinazioni lineari tra potenze di  $x$  ed elementi di  $R$ , cioè tutti gli elementi della forma  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_0, \dots, a_n \in R$ . Dunque, l'anello dei polinomi  $R[x]$  sembra essere la struttura che soddisfa le nostre richieste, cioè il più piccolo anello contenente sia  $R$  che  $x$ . Resta solo da formalizzare meglio il concetto di “più piccolo anello”, cioè chiarire cosa significa che un anello ne contiene un altro. A questo scopo, potremmo considerare sull'insieme degli anelli la relazione d'ordine data dall'inclusione, cioè dire che un anello  $R$  è più piccolo di un altro anello  $S$  se e solo se  $R \subseteq S$ . Tuttavia, questo non terrebbe conto dell'importanza algebrica degli isomorfismi: infatti, la struttura che stiamo cercando di costruire è definita a meno di isomorfismi, e anelli isomorfi potrebbero essere non confrontabili secondo l'inclusione.<sup>7</sup> Per risolvere tale problema, ha quindi più senso definire che  $R$  è più piccolo di  $S$  se e solo se  $S$  contiene una copia isomorfa dell'anello  $R$ , cioè se e solo se esiste un sottanello di  $S$  isomorfo a  $R$ .

<sup>4</sup>Tale gruppo viene spesso indicato anche con  $\mathcal{U}(R)$  o  $R^*$  ed è anche detto “gruppo delle unità di  $R$ ”.

<sup>5</sup>Vedremo nel *Capitolo 1.4* una generalizzazione degli anelli di polinomi con la struttura di un campo.

<sup>6</sup>Più rigorosamente, se  $f(x) = x$  fosse invertibile, esisterebbe  $g(x) \in R[x]$  tale che  $f(x)g(x) = 1_R$ , da cui  $\deg^*(f \cdot g) = \deg^*(1_R) = 0 = \deg^*(f) + \deg^*(g)$ , cioè  $\deg^*(g) = -\deg^*(f) = -1 < 0$ , assurdo.

<sup>7</sup>Ad esempio, si verifica facilmente che la mappa

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di anelli, ma  $\mathbb{C} \not\subseteq \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathbb{C}$ , cioè tali anelli non sono confrontabili secondo l'inclusione.

### Definizione 1.1.9: Anello più piccolo

Siano  $R$  e  $S$  due anelli. Diciamo che  $R$  è più piccolo di  $S$  (o anche che  $S$  contiene  $R$ ) se e solo se esiste un omomorfismo di anelli iniettivo  $\varphi: R \rightarrow S$ .

Si osservi che tale definizione è equivalente a quanto detto sopra: se esiste un monomorfismo (cioè un omomorfismo iniettivo)  $\varphi: R \rightarrow S$ , la restrizione  $\varphi: R \rightarrow \varphi(R)$  è un isomorfismo, dunque l'immagine  $\varphi(R) \subseteq S$  è un sottoanello di  $S$  isomorfo a  $R$ .

### Esempio 1.1.10

Chiaramente  $\mathbb{R}$  non è un sottoanello di  $\mathbb{R}^2$ , in quanto  $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R}^2$ . D'altra parte, la mappa  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (x, x)$  è un omomorfismo iniettivo, quindi  $\mathbb{R}^2$  contiene una copia isomorfa di  $\mathbb{R}$ , che geometricamente corrisponde alla bisettrice  $y = x$ .

*Osservazione.* Tornando al problema iniziale, sia  $X$  la struttura algebrica che stiamo cercando di costruire. Allora, possiamo riformulare le condizioni su  $X$  come segue:

- $X$  contiene  $R \Rightarrow$  esiste un monomorfismo  $\iota: R \rightarrow X$ ;
- $X$  è il più piccolo anello contenente sia  $R$  che  $x \notin R \Rightarrow$  per ogni altro anello  $S$  con tali proprietà (cioè tale che esista un monomorfismo  $\varphi: R \rightarrow S$  e contenente un  $s \notin R$ ), abbiamo che  $X$  è più piccolo di  $S$ , ossia esiste un monomorfismo  $\phi: X \rightarrow S$ .

In particolare, richiediamo che tale mappa  $\phi$  soddisfi  $\phi(x) = s$  e  $\phi(\iota(R)) = \varphi(R)$ , cioè che mandi l'elemento aggiunto  $x$  nell'elemento aggiunto  $s$  e la copia isomorfa  $\iota(R)$  di  $R$  in  $X$  nella copia isomorfa  $\varphi(R)$  di  $R$  in  $S$ .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \iota \downarrow & \nearrow \phi & \\ X & & \end{array}$$

Osserviamo ora che l'anello dei polinomi  $R[x]$  soddisfa effettivamente tali proprietà. Infatti, detta  $\iota: R \rightarrow R[x]$  la mappa di inclusione che manda ogni elemento  $r \in R$  nel corrispondente polinomio costante  $r \in R[x]$ , è evidente che  $\iota$  sia un monomorfismo, e preso un qualunque monomorfismo  $\varphi: R \rightarrow S$ , basta definire  $\phi: R[x] \rightarrow S$  ponendo  $\phi(x) = s$  e  $\phi(\iota(r)) = \varphi(r)$  per ogni  $r \in R$ . Tale mappa si estende per linearità su tutto  $R[x]$  ponendo

$$\phi \left( \sum_{i=0}^n r_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n \varphi(r_i) s^i$$

ed è facile verificare che  $\phi$  sia un monomorfismo.<sup>8</sup> Più in generale, vale il teorema seguente.

<sup>8</sup> Approfondiremo meglio questa questione nel *Capitolo 2.1* quando tratteremo le estensioni di campi.

### Teorema 1.1.11: Proprietà universale

Siano  $R$  e  $S$  due anelli e sia  $\varphi: R \rightarrow S$  un omomorfismo. Allora, per ogni  $s \in S$  esiste un unico omomorfismo di anelli  $\phi: R[x] \rightarrow S$  tale che  $\phi(x) = s$  e  $\phi|_R = \varphi$ .

*Dimostrazione.* Siano  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  e  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  in  $R[x]$  e sia  $\phi(f) = \sum_{i=0}^m \varphi(a_i) s^i$ .

Osserviamo innanzitutto che  $\phi(f)$  è ben definita. Infatti,  $\varphi(a_i) \in S$  e  $\phi(f) \in S$  perché somma di prodotti di elementi dell'anello  $S$ , che è chiuso rispetto a somma e prodotto. Inoltre,  $\phi(x) = \varphi(1_R)s^1 = s$  e  $\phi(r) = \varphi(r)s^0 = \varphi(r)$  per ogni  $r \in R$ , quindi  $\phi$  soddisfa le condizioni richieste. Mostriamo ora che  $\phi$  preserva le operazioni. Infatti,

$$\phi(f + g) = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} \varphi(a_i + b_i) s^i = \sum_{i=0}^m \varphi(a_i) s^i + \sum_{j=0}^n \varphi(b_j) s^j = \phi(f) + \phi(g)$$

per la distributività del prodotto rispetto alla somma e perché  $\varphi(a_i + b_i) = \varphi(a_i) + \varphi(b_i)$ , e

$$\phi(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i=0}^k \varphi(a_i b_{k-i}) \right) s^k = \left( \sum_{i=0}^m \varphi(a_i) s^i \right) \left( \sum_{j=0}^n \varphi(b_j) s^j \right) = \phi(f) \cdot \phi(g)$$

per come è definito il prodotto tra polinomi e perché  $\varphi(a_i b_{k-i}) = \varphi(a_i)\varphi(b_{k-i})$  essendo  $\varphi$  un omomorfismo. Poiché  $\phi(0_{R[x]}) = \varphi(0_R) = 0_S$  e  $\phi(1_{R[x]}) = \varphi(1_R) = 1_S$ , concludiamo che tale mappa  $\phi$  è effettivamente un omomorfismo di anelli.

Mostriamo ora che  $\phi$  è unico. Sia  $\psi: R[x] \rightarrow S$  un altro omomorfismo di anelli tale che  $\psi(x) = s$  e  $\psi|_R = \varphi$ . Poiché  $\psi$  preserva le operazioni, per ogni  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in R[x]$  vale

$$\psi(f) = \psi \left( \sum_{i=0}^m a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^m \psi(a_i) \psi(x^i) = \sum_{i=0}^m \varphi(a_i) \psi(x)^i = \sum_{i=0}^m \varphi(a_i) s^i = \phi(f)$$

essendo  $\psi(a_i) = \varphi(a_i)$  perché  $a_i \in R$  e  $\psi(x^i) = \psi(x)^i = s^i$ . Dunque,  $\psi$  coincide con  $\phi$  per ogni polinomio  $f(x) \in R[x]$ , da cui  $\phi$  è unico. ■

Nel caso particolare in cui  $\varphi = \text{id}_R$  e quindi  $R \subseteq S$ , la mappa  $\phi$  di cui sopra viene spesso denotata con  $\phi_s$ . In questo caso,  $\phi_s(f)$  non è altro che il polinomio  $f(x)$  calcolato in  $x = s$ , cioè  $\phi_s(f) = f(s)$ , il che spiega l'origine del nome “valutazione in  $s$ ” per tale mappa.

### Definizione 1.1.12: Valutazione di un polinomio

Tale omomorfismo di anelli  $\phi_s$  è detto *valutazione in  $s$* .

### Esempio 1.1.13

Se  $R = \mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  e  $f(x) = x^2 + 2x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ , detta  $\phi_{\sqrt{2}}: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  la valutazione in  $\sqrt{2}$ , abbiamo che  $\phi_{\sqrt{2}}(f) = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 3 = 5 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

Vogliamo ora dimostrare che la *proprietà universale* è una caratteristica propria degli anelli di polinomi, cioè che se  $T$  è un anello contenente sia  $R$  che un elemento  $t \notin R$  e dotato della *proprietà universale*, allora  $T \cong R[x]$ . Nella dimostrazione ci limiteremo al caso in cui  $R \subseteq T$  e  $\varphi = \text{id}_R$  (e quindi  $R \subseteq S$ ), ma il caso generale è del tutto analogo.

### Teorema 1.1.14

Sia  $R$  un anello e sia  $T \supseteq R$  un anello contenente un elemento  $t \notin R$  e tale che per ogni anello  $S \supseteq R$  e per ogni  $s \in S$  esista un unico omomorfismo di anelli  $\psi: T \rightarrow S$  con  $\psi(t) = s$  e  $\psi|_R = \text{id}_R$ . Allora,  $T \cong R[x]$ .

*Dimostrazione.* Poiché per ipotesi tale proprietà vale per ogni anello  $S \supseteq R$ , in particolare scegliamo  $S = R[s]$  e siano  $\phi_t: R[s] \rightarrow T$  la valutazione in  $t$ <sup>9</sup> e  $\alpha = \phi_t \circ \psi: T \rightarrow T$ .

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\psi} & R[s] \\ & \searrow \alpha & \downarrow \phi_t \\ & & T \end{array}$$

Osserviamo innanzitutto che  $\alpha$  è ben definito ed è un omomorfismo in quanto composizione di omomorfismi. Inoltre,  $\alpha(t) = \phi_t(\psi(t)) = \phi_t(s) = t$  e  $\alpha(r) = \phi_t(\psi(r)) = \phi_t(r) = r$  per ogni  $r \in R$ , cioè  $\alpha|_R = \text{id}_R$ . D'altra parte, poiché  $T \supseteq R$ , possiamo scegliere  $S = T$  e  $s = t$  nell'enunciato del teorema, così sappiamo che esiste un unico omomorfismo  $\psi': T \rightarrow T$  tale che  $\psi'(t) = t$  e  $\psi'|_R = \text{id}_R$ . Poiché anche l'identità  $\text{id}_T: T \rightarrow T$  soddisfa tali proprietà, per l'unicità di  $\psi'$  deve essere  $\alpha = \text{id}_T$ . Sia ora  $\beta = \psi \circ \phi_t: R[s] \rightarrow R[s]$ .

$$\begin{array}{ccc} R[s] & \xrightarrow{\phi_t} & T \\ & \searrow \beta & \downarrow \psi \\ & & R[s] \end{array}$$

Come sopra, osserviamo che  $\beta$  è ben definito ed è un omomorfismo in quanto composizione di omomorfismi. Inoltre,  $\beta(s) = \psi(\phi_t(s)) = \psi(t) = s$  e  $\beta(r) = \psi(\phi_t(r)) = \psi(r) = r$  per ogni  $r \in R$ , cioè  $\beta|_R = \text{id}_R$ . Poiché anche l'identità  $\text{id}_{R[s]}: R[s] \rightarrow R[s]$  soddisfa  $\text{id}_{R[s]}(s) = s$  e  $\text{id}_{R[s]}|_R = \text{id}_R$ , e per il *Teorema 1.1.4* esiste un unico omomorfismo con queste proprietà, deve essere  $\beta = \text{id}_{R[s]}$ . Dunque, essendo  $\phi_t \circ \psi = \text{id}_T$  e  $\psi \circ \phi_t = \text{id}_{R[s]}$  isomorfismi, lo sono anche  $\psi$  e  $\phi_t$ ,<sup>10</sup> da cui concludiamo che  $T \cong R[s] \cong R[x]$ .<sup>11</sup> ■

<sup>9</sup>Ricordiamo che per il *Teorema 1.1.11* tale omomorfismo è l'unico che soddisfa  $\phi_t(s) = t$  e  $\phi_t|_R = \text{id}_R$ .

<sup>10</sup>In generale, se  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  sono omomorfismi tali che  $g \circ f = \text{id}_X$  e  $f \circ g = \text{id}_Y$ , allora  $f$  e  $g$  sono isomorfismi. Infatti,  $f$  è iniettivo perché  $f(x) = f(x') \Rightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ , ed è suriettivo perché preso  $y \in Y$ , si ha che  $g(y) \in X$  e  $f(g(y)) = y$ . In modo del tutto analogo si dimostra che anche  $g$  è un isomorfismo, e in particolare risulta quindi che  $g = f^{-1}$ .

<sup>11</sup>Infatti  $s$  è solo un nome qualunque per la variabile dei polinomi a coefficienti in  $R$ .