0.1 Torsione

Introduciamo ora un concetto fondamentale nello studio degli R-moduli.

Definizione

Sia R un anello e sia M un R-modulo sinistro. Un elemento $m \in M$ si dice elemento di torsione se esiste almeno un $r \in R \setminus \{0_R\}$ tale che $r \cdot m = 0_M$. Un R-modulo sinistro si dice modulo di torsione se ogni suo elemento è di torsione.

Denotiamo con $\mathrm{tor}_R(M)$ l'insieme degli elementi di torsione di M. Allora, è evidente che $m \in M$ è di torsione se e solo se $m \in \mathrm{tor}(M)$, e M è di torsione se e solo se $M = \mathrm{tor}(M)$.

Esempio. Aggiungere esempio con $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dall'esame di settembre.

Proposizione 3.2.1

Sia R un dominio di integrità e sia M un R-modulo sinistro. Allora, $\mathrm{tor}(M)$ è un R-sottomodulo di M.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathrm{tor}(M)$ e sia $r \in R$. Allora, esistono $s_m, s_n \in R \setminus \{0_R\}$ tali che $s_m \cdot m = 0_M$ e $s_n \cdot n = 0_M$. Poiché R è un dominio di integrità, $s_m \cdot s_n \neq 0_R$. Dunque, $s_m \cdot s_n \cdot (m + n) = s_n \cdot (s_m \cdot m) + s_m \cdot (s_n \cdot n) = 0_M$ per la distributività destra, da cui $m+n \in \mathrm{tor}(M)$. Inoltre, $s_m \cdot (r \cdot m) = r \cdot (s_m \cdot m) = r \cdot 0_M = 0_M$, dunque $r \cdot m \in \mathrm{tor}(M)$. ■

Definizione

Sia R un dominio di integrità, M un R-modulo sinistro e sia $A \subseteq M$ un R-sottomodulo di M. Definiamo saturazione di A in M l'insieme $\mathrm{sat}_M(A)$ degli elementi $m \in M$ tali che esiste $r \in R \setminus \{0_R\}$ con $r \cdot m \in A$.

Proposizione 3.2.2

Sia R un dominio di integrità, M un R-modulo sinistro e sia $A \subseteq M$ un R-sottomodulo di M. Allora,
(a) $\mathrm{sat}_M(A) \subseteq M$ è un R-sottomodulo di M;
(b) $\mathrm{tor}(M) = \mathrm{sat}_M(\{0_R\})$;
(c) $\mathrm{tor}(M/A) = \mathrm{sat}_M(A)/A$.

Dimostrazione. (a) Siano $m, n \in \mathrm{sat}_M(A)$ e sia $r \in R$. Allora, esistono $s_m, s_n \in R \setminus \{0_R\}$ tali che $s_m \cdot m \in A$ e $s_n \cdot n \in A$. Poiché R è un dominio di integrità, $s_m \cdot s_n \neq 0_R$. Dunque, $s_m \cdot s_n \cdot (m + n) = s_n \cdot (s_m \cdot m) + s_m \cdot (s_n \cdot n) \in A$ poiché somma di elementi di A, da cui $n + m \in \mathrm{sat}_M(A)$. Inoltre, $s_m \cdot (r \cdot m) = r \cdot (s_m \cdot m) \in A$ essendo $s_m \cdot m \in A$.
(b) Ovvio per definizione
(c) Per definizione, $\mathrm{tor}(M/A) = \{m + A : \exists r \in R \setminus \{0_R\} : r \cdot (m + A) = 0_{M/A}\}$. Poiché $r \cdot (m + A) = r \cdot m + A = 0_{M/A} = A$ se e solo se $r \cdot m \in A$, si ha $\mathrm{tor}(M/A) = \{m + A : \exists r \in R \setminus \{0_R\} : r \cdot m \in A\} = \{m + A : m \in \mathrm{sat}_M(A)\} = \mathrm{sat}_M(A)/A$. ■

Definizione

Sia R un anello, M un R-modulo sinistro e sia $m \in M$. Allora, si dice annullatore di m in R l'insieme $\mathrm{Ann}_R(m) = \{r \in R : r \cdot m = 0_M\}$.

Osserviamo che m è di torsione se e solo se $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0_R\}$. Chiaramente, si intende che

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R : r \cdot m = 0_M \ \forall m \in M\} = \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ann}_R(m)$$

e tale insieme si dice annullatore globale di M in R. Si osservi che $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \mathrm{Ann}_R(m)$ per ogni $m \in M$ e che $\mathrm{Ann}_R(M) \lhd R$ (andrebbe dimostrato).

Aggiungere esempi, aggiungere dimostrazione del sat(sat(A)) usata più avanti, commenti.

Proposizione 3.2.3

Sia A uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato. Allora, sono equivalenti:
(i) A è di torsione;
(ii) $\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(A) \neq \{0\}$;
(iii) $|A| < \infty$.

Dimostrazione. Poiché A è finitamente generato, siano $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che $A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \cdot a_i$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Essendo A di torsione, in particolare anche $a_1, \dots, a_n \in \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}}(A)$, quindi esistono $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tali che $k_i \cdot a_i = 0_A$. Sia $m = \operatorname{mcm}(k_1, \dots, k_n) \neq 0$ e sia $a \in A$. Allora, esistono $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$ tali che $a = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot a_i$, e

$$m \cdot a = \sum_{i=1}^{n} m z_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot (m \cdot a_i) = 0_A$$

perché $m \cdot a_i = 0_A$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque $m \in \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a)$, e per l'arbitrarietà di a si ha che $m \in \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(A)$, cioè $\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(A) \neq \{0\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sia $\phi\colon \mathbb{Z}^n \to A$ la mappa definita come $\phi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot a_i$. Poiché ϕ è un omomorfismo suriettivo,[1] per il *Primo teorema d'isomorfismo* si ha che $\mathbb{Z}^n / \ker(\phi) \simeq A$. D'altra parte, $\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_1) \times \dots \times \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_n) \subseteq \ker(\phi)$, dunque

$$|A| = |\mathbb{Z}^n / \ker(\phi)| \leq \left| \mathbb{Z}^n / \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_i) \right| = \left| \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} / \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_i) \right|.$$ [2]

Poiché $\{0\} \neq \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(A) \subseteq \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_i) \lhd \mathbb{Z}$, siano $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ con $\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_i) = k_i \mathbb{Z}$.[3] Allora,

$$|A| \leq \left| \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} / \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_i) \right| = k_1 \cdot \dots \cdot k_n < \infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sia $a \in A$ e sia $\phi_a\colon \mathbb{Z} \to A$ la mappa definita come $\phi_a(z) = z \cdot a$. Poiché ϕ_a è un omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli e $\mathbb{Z}/\ker(\phi_a) \simeq A$ per il *Primo teorema d'isomorfismo*, essendo $|\mathbb{Z}| = \infty$ e $|A| < \infty$, per il *Principio dei cassetti* deve essere $\ker(\phi_a) \neq \{0\}$. Dunque $\ker(\phi_a) = \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a) \neq \{0\}$, cioè a è un elemento di torsione, e per l'arbitrarietà di a concludiamo che $\operatorname{tor}_{\mathbb{Z}}(A) = A$, da cui A è di torsione. ■

Aggiungere da qualche parte la dimostrazione dell'isomorfismo citato nel punto 2. A questo punto però tanto vale usare la stessa strategia della proposizione seguente, cioè definire $\phi\colon \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z} \to A$ la mappa $\phi(z_1 + k_1\mathbb{Z}, \dots, z_n + k_n\mathbb{Z}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot a_i$ e ragionando come sotto mostrare che è ben posto, suriettivo, e quindi $|A| \leq \left| \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z} \right| = k_1 \cdot \dots \cdot k_n < \infty$.

[1] Che ϕ sia un omomorfismo è evidente; la suriettività segue dal fatto che A è generato da $a_1, \dots, a_n$, quindi per ogni $a \in A$ esistono $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$ tali che $a = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot a_i$.

[2] La disuguaglianza segue dal fatto che $|\operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_1) \times \dots \times \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}}(a_n)| \leq |\ker(\phi)|$, e l'uguaglianza perché tali anelli sono isomorfi. Andrebbe spiegato meglio, di fatto dice che ad esempio $\mathbb{Z}^2/\langle(2,3)\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

[3] Infatti, essendo $\mathbb{Z}$ un PID, i suoi ideali sono tutti e soli quelli della forma $k\mathbb{Z}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Vale una proposizione simile alla precedente anche nel caso dei $\mathbb{K}[x]$-moduli.

Proposizione 3.2.4

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia M un $\mathbb{K}[x]$-modulo sinistro finitamente generato. Allora, sono equivalenti:
(i) M è di torsione;
(ii) $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(M) \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$;
(iii) $\dim_{\mathbb{K}}(M) < \infty$.

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono $m_1, \dots, m_n \in M$ tali che $M = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}[x] \cdot m_i$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Essendo M di torsione, anche $m_1, \dots, m_n \in \mathrm{tor}_{\mathbb{K}[x]}(M)$, quindi esistono polinomi $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ tali che $f_i \cdot m_i = 0_M$. Sia $g = \mathrm{mcm}(f_1, \dots, f_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$ e sia $m \in M$. Allora, esistono $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{K}[x]$ tali che $m = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot m_i$, e

$$g \cdot m = \sum_{i=1}^{n} (g \cdot q_i) \cdot m_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot (g \cdot m_i) = 0_M$$

perché $g \cdot m_i = 0_M$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque $g \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(m)$, e per l'arbitrarietà di m si ha che $g \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(M)$, cioè $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(M) \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Poiché $\{0_{\mathbb{K}}\} \neq \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(M) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(m_i) \lhd \mathbb{K}[x]$, sappiamo che esistono dei polinomi $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ tali che $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(m_i) = \langle f_i \rangle$.[4] Sia $\phi\colon \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}[x]/\langle f_i \rangle \to M$ la mappa definita come $\phi(q_1 + \langle f_1 \rangle, \dots, q_n + \langle f_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot m_i$. Poiché ϕ è un omomorfismo di $\mathbb{K}[x]$-moduli suriettivo,[5] essendo $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]/\langle f_i \rangle) = \deg^{\star}(f_i)$ concludiamo che

$$\dim_{\mathbb{K}}(M) \leq \dim_{\mathbb{K}} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}[x]/\langle f_i \rangle \right) = \prod_{i=1}^{n} \deg^{\star}(f_i) < \infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sia $m \in M$ e sia $\phi_m\colon \mathbb{K}[x] \to M$ la mappa definita come $\phi_m(f) = f \cdot m$. Poiché ϕ_m è un omomorfismo di $\mathbb{K}[x]$-moduli e per il *Primo teorema d'isomorfismo* vale $\mathbb{K}[x]/\ker(\phi_m) \simeq M$, essendo $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$ e $\dim_{\mathbb{K}}(M) < \infty$, deve essere $\ker(\phi_m) \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$. Dunque $\ker(\phi_m) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(m) \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$, cioè m è un elemento di torsione, e per l'arbitrarietà di m concludiamo che $\mathrm{tor}_{\mathbb{K}[x]}(M) = M$, da cui M è di torsione. ■

Aggiungere qualche commento e spostare l'osservazione finale (vedi foto) nel capitolo sugli endomorfismi. Qualche esempio pratico? Se mi viene in mente lo aggiungo.

[4] Infatti, essendo $\mathbb{K}[x]$ un PID, i suoi ideali sono tutti e soli quelli della forma $\langle f \rangle$ al variare di $f \in \mathbb{K}[x]$.

[5] Andrebbe dimostrato che ϕ è ben posto, il che segue dall'aver scelto come f_i i generatori degli annullatori e ragionando componente per componente: se $q_i + \langle f_i \rangle = r_i + \langle f_i \rangle$, allora $q_i = r_i + hf_i$ per un certo $h \in \mathbb{K}[x]$, e la restrizione di ϕ alla i-esima componente è $\phi_i(q_i) = (r_i + hf_i) \cdot m_i = r_i \cdot m_i + hf_i \cdot m_i = r_i \cdot m_i = \phi_i(r_i)$. La suriettività invece risulta evidente dalla definizione.