0.1 Anelli noetheriani

Sia R un anello e siano $a_1, \dots, a_n \in R$. Allora, $I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i : r_i \in R\right\}$ è un ideale[1] di R. Infatti, presi $x = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ e $y = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$ in I, si ha che $x + y = \sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)a_i \in I$ e $tx = t\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = \sum_{i=1}^{n}(tr_i)a_i \in I$ per ogni $t \in R$, da cui $I \lhd R$.

Definizione

Sia R un anello e siano $a_1, \dots, a_n \in R$. Allora, l'ideale $I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ è detto <u>ideale generato da $a_1, \dots, a_n$</u> e si denota con $I = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$.

L'ideale generato da $a_1, \dots, a_n$ è il più piccolo ideale di R contenente $a_1, \dots, a_n$, e possiamo pensarlo come l'insieme delle combinazioni lineari in R di $a_1, \dots, a_n$.

Esempio. Consideriamo in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = \langle 2\rangle$ e $J = \langle 2, 3\rangle$. Allora, $I = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri pari e $J = \{2m + 3n : m, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ perché $1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \in J$, da cui $k = 2 \cdot (2k) + 3 \cdot (-k) \in J$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Definizione

Dato un ideale $I \lhd R$, definiamo <u>numero minimo di generatori</u> $d_R(I)$ il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ per cui esistano $a_1, \dots, a_n \in R$ tali che $I = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Se tale $n \in \mathbb{N}$ non esiste, poniamo $d_R(I) = \infty$. Diciamo che $I \lhd R$ è <u>finitamente generato</u> se $d_R(I) < \infty$.

Esempio. Sia $I = \langle 2, x\rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$ e supponiamo che $d_{\mathbb{Z}[x]}(I) = 1$, cioè che $I = \langle f(x)\rangle$ per un certo $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ non nullo. Se $\deg^\star(f) = 0$, cioè $f(x) \equiv k$, allora k è pari e I contiene solo polinomi con coefficienti pari, da cui $x \notin I$, assurdo. Se $\deg^\star(f) \geq 1$, allora I contiene solo polinomi di grado almeno 1, cioè $2 \notin I$, assurdo. Dunque $d_{\mathbb{Z}[x]}(I) = 2$. $\square$

Esiste un'importante famiglia di anelli in cui ogni ideale è finitamente generato.

Definizione

Un anello commutativo R si dice <u>noetheriano</u> se ogni suo ideale è finitamente generato, cioè se ogni ideale $I \lhd R$ soddisfa $d_R(I) < \infty$.

Esempio. Sia R un dominio ad ideali principali.[2] Allora, R è un anello noetheriano poiché per definizione di PID si ha che $d_R(I) = 1$ per ogni $I \lhd R$ non banale e $d_R(\{0_R\}) = 0$. In particolare, ogni campo $\mathbb{K}$ è noetheriano perché i suoi unici ideali sono $\{0_\mathbb{K}\}$ e $\mathbb{K} = \langle 1_\mathbb{K}\rangle$. $\square$

Nelle dimostrazioni è spesso utile considerare una caratterizzazione equivalente degli anelli noetheriani in termini di successioni ascendenti di ideali, cioè successioni di ideali $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tali che $I_k \subseteq I_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

[1] Ricordiamo che I è un ideale di un anello commutativo R se $a - b \in I$ per ogni $a, b \in I$ e se $ra \in I$ per ogni $a \in I$ e $r \in R$. Per ragioni estetiche, si preferisce spesso mostrare equivalentemente che $a + b \in I$ per ogni $a, b \in I$ e non che $a - b \in I$. Infatti, se l'opposto esiste, detto $c = -b$ si ha che $a - b \in I \Leftrightarrow a + c \in I$.

[2] Ricordiamo che un dominio ad ideali principali (spesso abbreviato PID) è un dominio di integrità in cui ogni ideale è principale, cioè generato da un solo elemento. Esempi di PID sono $\mathbb{Z}$ e ogni campo $\mathbb{K}$.

Proposizione 1.6.1

Sia R un anello commutativo. Allora, R è noetheriano se e solo se per ogni successione ascendente di ideali $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $I_{N+j} = I_N$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Supponiamo che R sia noetheriano, e sia $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione ascendente di ideali. Poiché $I_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ è un ideale di R,[3] essendo R noetheriano $d_R(I_\infty) = n < \infty$. Siano quindi $a_1, \dots, a_n \in I_\infty$ tali che $I_\infty = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, e siano $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tali che $a_i \in I_{k_i}$. Detto $N = \max\{k_i : 1 \le i \le n\}$, essendo $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ascendente si ha che $a_1, \dots, a_n \in I_N$. Dunque, essendo I_N un ideale, $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \in I_N$ per ogni $r_1, \dots, r_n \in R$, cioè $\sum_{i=1}^{n} Ra_i = I_\infty \subseteq I_N$, da cui $I_{N+j} \subseteq I_N$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Poiché $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è ascendente, è anche vero che $I_N \subseteq I_{N+j}$ $\forall j \in N$. Combinando le doppie inclusioni, si ha quindi che $I_{N+j} = I_N$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Viceversa, supponiamo per assurdo che esista $J \lhd R$ con $d_R(J) = \infty$. Preso $a_0 \in J$, costruiamo la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di J tale che $a_{k+1} \in J \setminus \langle a_0, \dots, a_k \rangle$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Tale successione esiste poiché J non è finitamente generato, quindi $J \setminus \langle a_0, \dots, a_k \rangle \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si consideri la successione di ideali $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $I_k = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$. Allora, è evidente che $I_k \subseteq I_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, ma essendo $a_{k+1} \notin I_k$ per come abbiamo definito $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, risulta essere $I_k \subsetneq I_{k+1}$. Abbiamo quindi costruito una successione ascendente di ideali che viola le ipotesi, perché non esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $I_{N+j} = I_N$ $\forall j \in \mathbb{N}$, assurdo. Dunque $d_R(J) < \infty$, e per l'arbitrarietà di J concludiamo che R è noetheriano. ■

Dimostriamo ora un risultato fondamentale nello studio degli anelli noetheriani.

Teorema 1.6.2: Teorema della base di Hilbert

Sia R un anello noetheriano. Allora, anche l'anello dei polinomi $R[x]$ è noetheriano.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $R[x]$ non sia noetheriano, e sia quindi $J \lhd R[x]$ tale che $d_{R[x]}(J) = \infty$. Preso $f_0 \in J$ non nullo di grado minimo, costruiamo la successione di polinomi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che f_{k+1} sia il polinomio di grado minimo in $J \setminus \langle f_0, \dots, f_k \rangle$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Tale successione esiste poiché J non è finitamente generato, quindi $J \setminus \langle f_0, \dots, f_k \rangle \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia $d_k = \deg^\star(f_k)$ e sia $a_k \neq 0_R$ il coefficiente direttore di f_k. Allora, detta $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la successione ascendente di ideali di R definita come $I_k = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$, per la *Proposizione 1.4.1* esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $I_{N+j} = I_N$ $\forall j \in \mathbb{N}$. In particolare $I_{N+1} = I_N$, ed esistono $r_0, \dots, r_N \in R$ tali che $a_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} r_i a_i$. Consideriamo ora il polinomio $h = f_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} r_i \, x^{d_{N+1} - d_i} f_i \in J$.[4] Se $h \in \langle f_0, \dots, f_N \rangle$, allora anche $f_{N+1} = h + \sum_{i=0}^{N} r_i \, x^{d_{N+1} - d_i} f_i \in \langle f_0, \dots, f_N \rangle$, il che è assurdo per come abbiamo definito $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Poiché il coefficiente del termine di grado d_{N+1} in h è $a_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} r_i a_i = 0$, si ha che $h \in J \setminus \langle f_0, \dots, f_N \rangle$ è un polinomio di grado $\deg^\star(h) < d_{N+1}$, e questo viola la minimalità del grado nella scelta di f_{N+1}. Dunque $d_{R[x]}(J) < \infty$, da cui per l'arbitrarietà di J concludiamo che $R[x]$ è noetheriano. ■

[3] Siano $a, b \in I_\infty$ con $a \in I_s$ e $b \in I_t$, dove $s \le t$, cioè $I_s \subseteq I_t$. Poiché $a, b \in I_t$, anche $a + b \in I_t \subseteq I_\infty$, da cui $a + b \in I_\infty$. Inoltre, preso $r \in R$, si ha che $ra \in I_s \subseteq I_\infty$, cioè $ra \in I_\infty$, da cui $I_\infty \lhd R$.

[4] Vogliamo sfruttare la relazione tra a_{N+1} e $a_1, \dots, a_N$ che abbiamo appena trovato per costruire un polinomio $h \in J \setminus \langle f_0, \dots, f_N \rangle$ di grado minore di d_{N+1}, giungendo quindi ad un assurdo.

Corollario 1.6.3

Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e sia R un anello noetheriano. Allora, anche $R[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano.

Dimostrazione. Essendo R noetheriano, per il *Teorema 1.6.2* anche $R[x_1]$ è noetheriano, ed induttivamente sono noetheriani pure $(R[x_1])[x_2], \dots, (\cdots((R[x_1])[x_2])\cdots)[x_n]$. Poiché per il *Corollario 1.3.3* si ha che $R[x_1, \dots, x_n] \simeq (\cdots((R[x_1])[x_2])\cdots)[x_n]$, possiamo concludere che anche $R[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano. ■

Questo risultato non è più valido quando l'insieme delle variabili X è un insieme infinito, ed in particolare, esistono domini di integrità che non sono noetheriani.

Esempio. Sia R un domimio di integrità noetheriano e sia $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un insieme numerabile di variabili. Per la *Proposizione 1.3.4* sappiamo già che $R[X]$ è un dominio di integrità, quindi è sufficiente mostrare che esso non è noetheriano. Sia $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la successione di ideali di $R[X]$ definita come $I_k = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$. Allora $I_k \subsetneq I_{k+1}$, poiché $I_k \subseteq I_{k+1}$ ma $x_{k+1} \notin \langle x_0, \dots, x_k \rangle = I_k$. Dunque, $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione ascendente di ideali che viola la *Proposizione 1.6.1*, da cui concludiamo che $R[X]$ non è noetheriano. □

La proposizione seguente, molto utile negli esercizi, permette di dimostrare che un anello è noetheriano semplicemente esibendo un omomorfismo suriettivo.

Proposizione 1.6.4

Sia R un anello noetheriano e sia $\phi\colon R \to S$ un omomorfismo di anelli suriettivo. Allora, anche S è un anello noetheriano.

Dimostrazione. Siano $J \lhd S$ e $I = \phi^{-1}(J) = \{r \in R : \phi(r) \in J\}$. Poiché I è un ideale di R,[5] che per ipotesi è noetheriano, esistono $a_1, \dots, a_n \in R$ tali che $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Allora, essendo ϕ suriettivo, sappiamo che $J = \phi(I) = \langle \phi(a_1), \dots, \phi(a_n) \rangle$, da cui $d_S(J) \le d_R(I) = n < \infty$. Dunque, per l'arbitrarietà di J concludiamo che S è noetheriano. ■

Esempio. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{Z}$ è un PID, esso è noetheriano, dunque per il *Teorema 1.4.2* anche $\mathbb{Z}[x]$ è noetheriano. Sia $\phi_{\sqrt{2}}\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ la valutazione in $\sqrt{2}$. Poiché per ogni $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ si ha che $\phi_{\sqrt{2}}(a + bx) = a + b\sqrt{2}$, tale $\phi_{\sqrt{2}}$ è un omomorfismo suriettivo, quindi per la *Proposizione 1.6.4* anche $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ è noetheriano. □

Un caso particolare della *Proposizione 1.6.4* vale per gli anelli quoziente.

Corollario 1.6.5

Sia R un anello noetheriano e sia $I \lhd R$. Allora, anche R/I è noetheriano.

Dimostrazione. Sia $\pi\colon R \to R/I$, $\pi(r) = r + I$ la proiezione canonica sul quoziente. Poiché π è un omomorfismo suriettivo, per la *Proposizione 1.6.4* anche R/I è noetheriano. ■

Possiamo quindi mostrare che esistono anelli noetheriani che non sono domini di integrità.

Esempio. Poiché $4\mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$, per il *Corollario 1.6.5* anche $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ è noetheriano.[6] Tuttavia, esso non è dominio di integrità perché ha divisori dello zero: infatti, $2 \cdot 2 = 0$. □

[5] In generale, se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo e $J \lhd B$, allora $I = \varphi^{-1}(J) = \{a \in A : \varphi(a) \in J\} \lhd A$. Infatti, presi a, $b \in I$, per definizione $\varphi(a)$, $\varphi(b) \in J$. Dunque, essendo J un ideale e φ un omomorfismo, $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in J \Rightarrow a + b \in I$ e $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) \in J \Rightarrow ra \in I$ per ogni $r \in A$, da cui $I \lhd A$.

[6] In realtà basta osservare che ogni anello finito è noetheriano poiché $d_R(I) \le |R| < \infty$ per ogni $I \lhd R$.

Proposizione che anello noetheriano ha un ideale massimale, discussione sulla noetherianità che gratuitamente permette la dimostrazione senza il lemma di zorn, dimostrazione che ogni anello ha un ideale massimale usando zorn.