0.1 Polinomi di Laurent e serie formali

Vogliamo ora introdurre alcune generalizzazioni del concetto di anello di polinomi molto usate nell'analisi reale e complessa, quali i polinomi di Laurent e le serie di potenze.

Sia R un anello commutativo e sia $R[x, x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=-p}^{n} a_i x^i : a_i \in R,\ n, p \in \mathbb{N} \right\}$. Presi due elementi $f = \sum_{i=-p}^{m} a_i x^i$ e $g = \sum_{j=-q}^{n} b_j x^j$ di $R[x, x^{-1}]$, definiamo le operazioni di somma

$$f + g = \sum_{i=-r}^{s} (a_i + b_i) x^i$$

dove $s = \max\{m, n\}$, $r = \max\{p, q\}$ e $a_i = b_j = 0$ per $i \notin [-p, m]$ e $j \notin [-q, n]$, e prodotto

$$f \cdot g = \sum_{k=-p-q}^{m+n} c_k x^k$$

dove abbiamo posto $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. Possiamo pensare $R[x, x^{-1}]$ come l'anello dei polinomi $R[x]$ dove però l'esponente della variabile x può essere anche un intero negativo.

Sketch del capitolo: Polinomi di Laurent ma le dim sono trivial per il capitolo 1.3, serie formali (qui dimostro cose), serie formali di Laurent (c'è una sola dim)