

Tecnologie Digitali - Relazione: convertitore di impedenza negativa e circuito Howland

Salvatore Bottaro¹ and Lorenzo M. Perrone²

¹salvo.bottaro@hotmail.it

²lorenzo.perrone.lmp@gmail.com

Sommario—In questa relazione mostriamo le caratteristiche e i limiti di un convertitore di impedenza negativa e la sua applicazione nel circuito Howland.

I. CONVERTITORE DI IMPEDENZA NEGATIVA

Si consideri il circuito in figura 1.

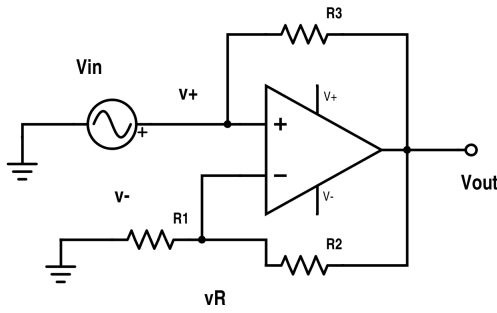


Figura 1: Convertitore di impedenza negativa

Si mostri in che senso esso sia un convertitore di impedenza negativa applicando le regole d'oro dell'op-amp e risolvendo le equazioni del circuito. Come si vede in figura 1 la tensione V_{In+} all'ingresso non-invertente dell'op-amp è la tensione V_g del generatore VG. Per le regole d'oro dell'op-amp si ha la stessa tensione all'ingresso invertente ed essendo l'op-amp in configurazione non-invertente, tale tensione viene amplificata di un fattore $1 + \frac{R_2}{R_1}$, da cui:

$$V_{out} = (1 + \frac{R_2}{R_1})V_{in} \quad (1)$$

Pertanto la corrente che scorre da V_{In+} a V_{out} è data da:

$$I = \frac{V_{In+} - V_{out}}{R_3} = -\frac{R_2}{R_1 R_3} V_g \rightarrow V_g = -\frac{R_1 R_3}{R_2} I \quad (2)$$

da cui si evince come il generatore veda un'impedenza equivalente negativa.

Poiché l'espressione della resistenza equivalente segue direttamente dall'equazione 1 si ha che un modo per verificare il corretto comportamento del circuito è verificare se l'op-amp si comporta correttamente in configurazione non-invertente e dunque cercare di delineare i limiti di tale configurazione.

Per quanto riguarda il dimensionamento di R_1 e R_2 si ha che ovviamente esse devono essere tali che V_{out} non sia troppo alto in rapporto alle tensioni di alimentazione. Come si legge

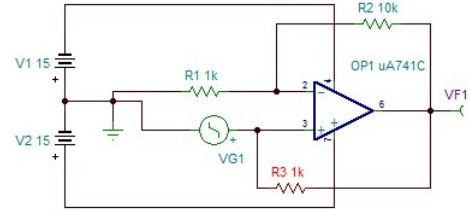


Figura 2: Convertitore realizzato con TINA

dal foglio di specifiche, il *Maximum peak output voltage swing* al massimo è $\pm 12 \div 14$ V, pertanto deve risultare:

$$V_{in} (1 + \frac{R_2}{R_1}) \leq 12 \sim 14V \quad (3)$$

Ad esempio si confrontino le simulazioni fatte con TINA (vedi figura 2) in cui sono stati impiegati Gain all'invertente $G = 11$ (figura 3) $G = 101$ (figura 4). Si nota come nel primo caso il convertitore funzioni correttamente nel range di tensione scelto, nel secondo caso invece satura appena supera i 12 V.

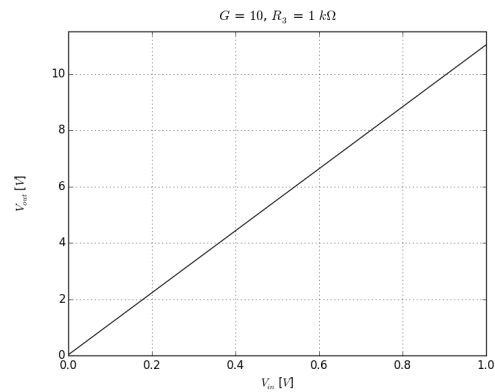


Figura 3: Simulazione del convertitore per G=11

Per quanto riguarda R_3 invece, essa deve essere scelta in modo tale che non scorra troppa corrente verso il ramo non-invertente cosicché l'op-amp non riesca a stabilire il giusto feedback e dunque uguagliare le tensioni ai due ingressi, ovvero non deve essere troppo piccola. In figura 5 si vede come per tensioni vicine a 1 V si perda l'andamento lineare.

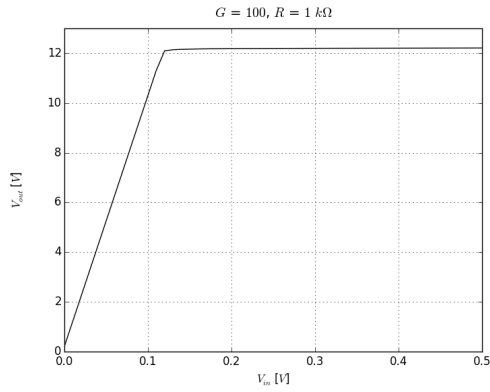


Figura 4: Simulazione del convertitore con G=101

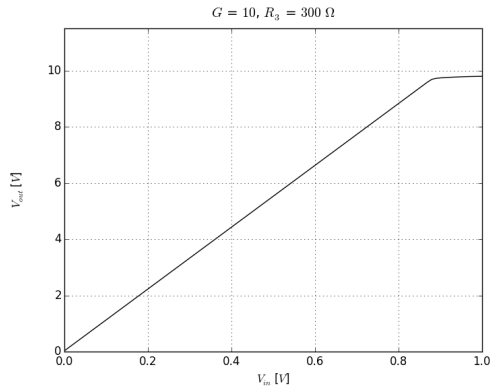
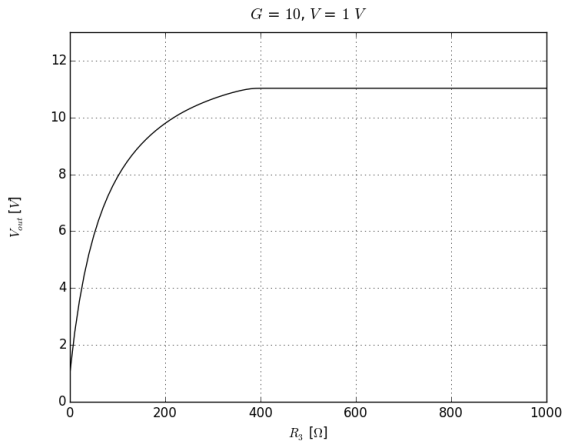


Figura 5: Simulazione del convertitore con G=11 e R=300 Ω

Se si osserva il grafico in figura 6 si vede come per $V_{in} = 1V$ il segnale in V_{out} non dipenda da R_3 a partire dai 380 Ω circa.

Figura 6: Dipendenza del segnale in uscita da V_{out} in funzione di R_3 con G=11

Non disponendo di equazioni o modelli per dimensionare correttamente R_3 , in base a varie prove effettuate possiamo fornire in tabella I dei valori minimi indicativi per R_3 in funzione del gain G con una tensione di ingresso di 1 V.

Tabella I: Valori minimi indicativi per R_3

G	R
11	380
10	230
9	150
8	110
7	80
6	60

La possibilità di disporre di un circuito con impedenza equivalente negativa trova molte applicazioni, una di queste è il circuito di Howland.

II. CIRCUITO DI HOWLAND

Lo schema del circuito di Howland è in figura 7.

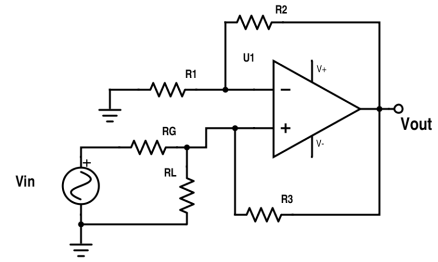


Figura 7: Circuito Howland

In base ai risultati ottenuti in precedenza, il circuito è equivalente al parallelo fra le resistenze R_G , R_L e R_{eq} come si evince in figura 8.

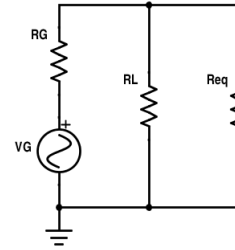


Figura 8: Circuito equivalente al circuito Howland

Pertanto è immediato scrivere le equazioni che regolano il circuito. Prendendo come maglie fondamentali quella contenente il generatore e R_L e quella contenente R_L e R_G , e come verso convenzionale per le correnti I_1 e I_2 in entrambe le maglie quello antiorario, si hanno le seguenti equazioni:

$$V_G - R_G I_1 - R_L I_1 + R_L I_2 = 0 \quad (4)$$

$$-R_{eq} I_2 + R_L I_1 - R_L I_2 = 0 \quad (5)$$

Da cui si deducono le correnti:

$$I_1 = \frac{V_G(R_L + R_{eq})}{R_G R_L + R_L R_{eq} - R_G R_{eq}} \quad (6)$$

$$I_2 = \frac{V_G R_L}{R_G R_L + R_L R_{eq} - R_G R_{eq}} \quad (7)$$

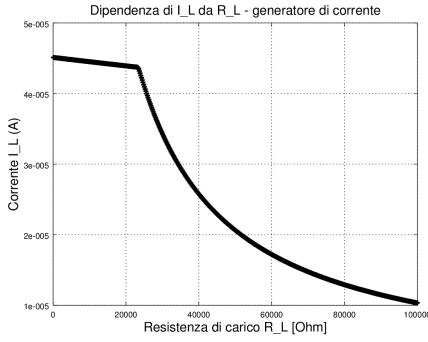


Figura 9: Plot della corrente I_L su resistenza di carico R_L per $R_3 = 500$ Ohm, $V_g = 0.5V$, $R_2 = 10k$, $R_1 = 1k$, $R_g = 50$ Ohm

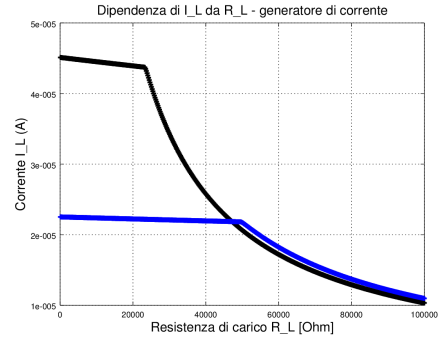


Figura 10: Plot della corrente I_L su resistenza di carico R_L , per $R_3 = 500$ Ohm (nero), e $R_3 = 1k$ (blu)

Dal momento che la corrente che scorre in R_L è $I_1 - I_2$, si ha, posto $R_{eq} = -R$:

$$I_L = I_1 - I_2 = -\frac{V_G R}{R_G R_L - R_L R + R_G R} \quad (8)$$

Si vede come se nell'equazione precedente si pone $R_G = R$, l'espressione per I_L diventa semplicemente:

$$I_L = -\frac{V_G}{R} \quad (9)$$

Ovvero la corrente che scorre nel carico R_L non dipende dal carico, ovvero dimensionando opportunamente R_1 , R_2 ed R_3 si ha che il circuito Howland si comporta come un generatore ideale di corrente. Verifichiamo tramite delle simulazioni di TINA che questo comportamento sia rispettato, e in quali circostanze.

In Figura (9) si riporta un grafico della corrente che attraversa la resistenza di carico I_L in funzione della resistenza stessa R_L in un intervallo 100 Ohm - 100 kOhm, con resistenza del generatore arbitrariamente posta pari a 500 Ohm, $R_1 = 1k$ Ohm, $R_2 = 10k$ Ohm, $R_3 = 500$ Ohm.

Ciò che si nota immediatamente è che l'andamento della corrente si mantiene costante in una regione di *plateau* nel range $R_L = 100-23k$ Ohm, nella quale ha un valore circa pari a $44 \pm 2\mu A$, per poi decrescere sensibilmente tendendo a zero.

Ovviamente il nostro interesse si concentra sul comprendere quale è il motivo per cui si ha questo brusco cambiamento proprio al valore di R_L di circa 23k Ohm e, in un'ottica più concreta, come fare eventualmente ad estendere il *plateau*.

Il primo tentativo effettuato è quello di raddoppiare la resistenza R_3 a 1k Ohm, e al tempo stesso raddoppiare R_G a 100 Ohm per far sì che rimanga sempre valida la relazione $R = \frac{R_1 R_3}{R_2} = R_G$. Il risultato è plottato in figura (10), dove si vede il confronto con i valori precedenti.

Come si può osservare, questa nuova scelta di resistenze ha esteso (raddoppiato) la zona di *plateau*, fino al range di R_L 100 Ohm-52k Ohm. Continuando a raddoppiare R_L e R_G si verifica che il range (circa) raddoppia di estensione. I risultati di queste prove sono riportati in Figura (11).

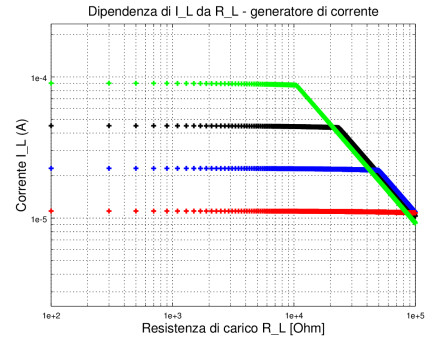


Figura 11: Dipendenza di I_L da R_L - raddoppiamo R_3 e R_G : $R_3 = 250$ (verde); $R_3 = 500$ Ohm $R_G = 50$ Ohm (nero); $R_3 = 1k$ $R_G = 100$ Ohm (blu); $R_3 = 2k$ $R_G = 200$ Ohm (rosso)

E' interessante notare come, sempre in base a quanto simulato da TINA, in questo modo si possa arrivare a rendere quasi del tutto costante il valore della corrente sul carico (di circa $1 \mu A$) per un range di resistenze di quasi 4 ordini di grandezza, che fa capire piuttosto bene la definizione di *generatore ideale di corrente* assegnata al circuito Howland.

Il passo successivo è cercare di mantenere costante il valore della resistenza del generatore R_G , che nella realtà è appunto un parametro fissato dal costruttore del generatore di tensione, e agire invece sui valori di R_1 e R_3 . Ovviamente bisogna sempre far sì che $R_G = \frac{R_1 R_3}{R_2}$, quindi raddoppiando R_3 dimezzaremo R_1 e viceversa. Riportiamo una di queste simulazioni in Figura (12), dove si vede che effettivamente il *plateau* è aumentato, tuttavia in misura sensibilmente minore che nelle prove precedenti, oltre, ovviamente, a modificare il GAIN del circuito amplificante, che ricordiamo è pari a $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

A. Relazione fra V_{out} e R_L

Rimane da capire quale potrebbe essere il motivo per cui il valore di I_L smette di rimanere costante per decrescere rapidamente superata una certa soglia di R_L . Per far questo, procediamo con la risoluzione formale del circuito andando a ricavare la relazione fra la tensione di uscita dell'op-amp V_{out} e R_L .

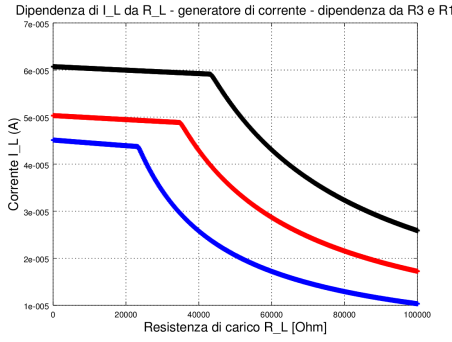


Figura 12: I_L su R_L : dipendenza da R_3 e R_1 - raddoppiamo R_3 e dimezziamo R_1 . $R_3 = 125\text{k}\Omega$, $R_1 = 4\text{k}\Omega$ (nero); $R_3 = 250\text{k}\Omega$, $R_1 = 2\text{k}\Omega$ (rosso); $R_3 = 500\text{k}\Omega$, $R_1 = 1\text{k}\Omega$ (blu)

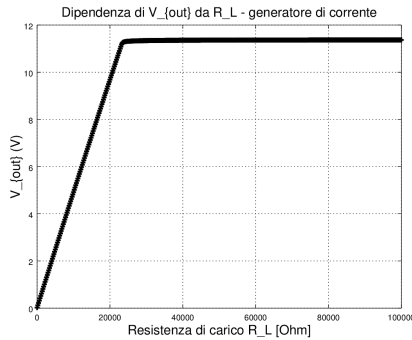


Figura 13: V_{out} in funzione di R_L a $R_3 = 500$ fissata, $V_G = 0.5\text{V}$

A partire dalla rappresentazione del circuito in Figura (7), è possibile scrivere con minima fatica le seguenti:

$$\begin{cases} V_L = I_L R_L \\ V_{out} = (1 + \frac{R_2}{R_1}) V_L \end{cases} \quad (10)$$

Da cui risulta:

$$V_{out} = I_L R_L (1 + \frac{R_2}{R_1}) \quad (11)$$

Dal momento che, come visto precedentemente, la corrente I_L non dipende (o meglio, non dovrebbe dipendere) da R_L , a regime ci aspettiamo una proporzionalità di tipo lineare, con intercetta nulla e coefficiente angolare $I_L (1 + \frac{R_2}{R_1})$. Verifichiamo questo andamento simulandolo con TINA, impiegando gli stessi valori di R_3 , R_G del grafico (9). I risultati sono in Figura (13)

Dall'analisi di questo grafico seguono due importanti risultati:

- Capiamo finalmente per quale motivo per una resistenza di carico $R_L \gtrsim 20\text{k}\Omega$ la corrente I_L termina il suo andamento costante. Infatti, come si può osservare, a tale resistenza coincide una tensione di output dell'op-amp di 11.3 V, subito in saturazione, per cui l'op-amp non riesce più a mantenere il *feedback* sul ramo invertente, ed esce dal comportamento ideale. Il valore V_{out} di saturazione è strettamente correlato con la tensione di alimentazione

V_{CC} (che per queste simulazioni è stata posta a $\pm 15\text{V}$), e infatti all'aumentare di quest'ultima si verifica un incremento della regione di *plateau*.

- L'andamento lineare è molto ben rispettato e una stima del coefficiente angolare della retta, pari a $m_{meas} \simeq 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ V/ Ohm}$ risulta essere in accordo con quello aspettato, calcolato moltiplicando il valore costante della corrente quando $R_L \leq 20\text{k}\Omega$ per il gain $G = 1 + \frac{R_2}{R_1} \simeq 11$ del circuito, da cui risulta che $m_{exp} \simeq 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ V/ Ohm}$.

PROBLEMA! Tuttavia, proprio quest'ultimo risultato ci pone davanti ad un'incongruenza con le relazioni ricavate nella prima parte della relazione. Infatti, nella (9) si è visto che $I_L = -\frac{V_G}{R}$ che, per i valori impiegati nell'ultima simulazione, e cioè $R = R_G = 50\text{ Ohm}$ e $V_G = 0.5\text{V}$, implica una corrente I_L dell'ordine della decina di mA, e non decina di μA , come ricavato dalle simulazioni precedenti. Riteniamo che ci possa essere un errore, o una ipotesi non del tutto verificata nella risoluzione del circuito, che dia origine a questa evidente discrepanza, che nonostante gli sforzi non siamo riusciti a localizzare.

A questo punto, avendo analizzato approfonditamente il comportamento simulato del circuito, e identificato un range per alcuni parametri tipici in cui il circuito di Howlen sembra funzionare, abbiamo montato sulla *breadboard* i componenti, tra cui un potenziometro variabile fra $108 - 1020 \pm 1\% \Omega$ che avrebbe giocato il ruolo di carico R_L . Con nostro grandissimo dispiacere non siamo riusciti ad ottenere alcuna serie di misure utili con il VI di acquisizione, nonostante vari tentativi. E' utile riportare di seguito i valori delle resistenze e alcune osservazioni.

Resistenze	Valori
R1	1 kOhm $\pm 5\%$
R2	10 kOhm $\pm 5\%$
R3	10kOhm $\pm 5\%$
R_G	100Ohm $\pm 5\%$
R_L	108-1210 $\pm 1\% \Omega$

III. OSSERVAZIONI

- Le resistenze sono state dimensionate in modo da rimanere nel range di validità del modello, come ricavato nelle simulazioni;
- La resistenza del generatore R_G è stata arbitrariamente scelta da noi, con un valore abbastanza sensato (100 Ohm), e collegata in serie al generatore stesso;
- La tensione fornita dal generatore di tensione appositamente impiegato per questa esperienza (e non l'ATTEN usuale) è circa di 1 V, per cui, a partire dalla $I_L = -\frac{V_G}{R_G}$, ci aspettiamo una corrente nel circuito di carico di 10 mA, al di sotto del valore tipico per l'op-amp $\mu\text{A}741\text{CP}$ che è di 25 mA, con un massimo dichiarato di 40 mA;
- Il primo segnale acquisito dal VI, la tensione in uscita dall'op-amp V_{out} era del tutto saturato impiegando un fondoscala a 10 V. Il gain previsto era circa 11, per cui abbiamo esplorato valori di V_{in} intorno a mezzo volt,

tuttavia abbiamo continuato a non osservare altro che la saturazione a +10V.

- Per comprendere meglio cosa non stesse funzionando secondo le aspettative, è stato posto un multimetro digitale in modalità amperometro in serie al carico. Il valore di corrente aspettato doveva essere maggiore di 10mA (20, 30 in base al V_{in} impostato), ma l'amperometro non ha mai registrato un valore superiore a circa 6mA.
- Una prima, e probabilmente fondata ipotesi, è che nel circuito in esame parte della corrente prodotta dall'op-amp venisse immessa dentro il generatore, e che quindi ciò modificasse il comportamento dell'Howland.
- Per verificare questa supposizione abbiamo scollegato il generatore di tensione in uso per impiegare la boccia a 5V dell'ATTEN, costruendo un partitore di tensione 1:10 in modo da fornire come V_{in} sul ramo non invertente circa 0.5V. La cosa che ci ha sorpreso più di tutto è che pur avendo montato il partitore, misurando con un secondo multimetro la tensione in ingresso, questa rimanesse comunque a circa 5V. Il buon funzionamento del partitore è stato verificato scollegando l'op-amp, e la tensione letta era circa 0.5V, come aspettato, ma ricollegando nuovamente il partitore al circuito, il valore tornava a 5V.
- L'unica conclusione che abbiamo potuto trarre è che l'inserimento di un generatore di tensione perturbava enormemente il comportamento modellizzato del circuito di Howland, e in particolare tale perturbazione si potrebbe ascrivere alla corrente che dal circuito rientra nel generatore. Una verifica sensata consisterebbe nel provare a collegare una pila al posto del generatore, poichè quest'ultima non dovrebbe essere influenzata dal resto del circuito.
- Come ultima osservazione, è da rilevare che, anche nelle simulazioni di TINA, anche una differenza di qualche decina di Ω fra R_G e R_{eq} , che devono essere uguali per evidenziare il comportamento di *Negative Impedance Converter*, era sufficiente per modificare drasticamente l'andamento della corrente I_L in funzione della resistenza di carico R_L . Dal momento che la nostra R_G era collegata in serie al generatore, la sua resistenza reale interna, sommata a R_G , potrebbe essere risultata sensibilmente diversa dalla nostra R_{eq} , e quindi aver contribuito al cattivo funzionamento del circuito.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Datasheet, $\mu A741$ General-Purpose Operational Amplifiers. SLOS094E – NOVEMBER 1970 –REVISED JANUARY 2015. <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/ua741.pdf>
- [2] Paul Horowitz, Winfield Hill - The Art of Electronics. Cambridge University Press (1989).