

Stima di una Traccia

La Corte Lorenzo

June 16, 2021

1 Risultati Ottenuti

Consideriamo la matrice $A = B^T \cdot B$, derivante dalla moltiplicazione di una matrice 300x300 di numeri casuali da 0 a 1 e la sua trasposta; questa matrice risulterà (per costruzione) semidefinita positiva.

Di essa calcoliamo:

- La norma di Frobenius al quadrato $\|A\|_F^2$ che risulta essere $5.08718e+08$; essa ci servirà per calcolare la maggiorazione di Frobenius, indice dell'andamento della varianza.
- La traccia $\text{Tr}(A)$, che risulta essere $3.00050e+04$; questa è la traccia reale della matrice, da confrontare con le tracce empiriche che deriveranno dalle iterazioni del metodo Montecarlo.

A questo punto andiamo ad osservare i risultati del metodo Montecarlo per $M=5,10,25,100$; calcoliamo per ognuno di essi:

- La traccia empirica media, calcolata a partire dalle cento stime della traccia durante le cento corrispondenti iterazioni del metodo Montecarlo, delle quali viene fatta una media per trovare un valore quanto più possibile vicino alla traccia reale.
- La varianza empirica media, calcolata a partire dalle cento stime della varianza durante le cento corrispondenti iterazioni del metodo Montecarlo, delle quali viene fatta una media per trovare un valore quanto più possibile vicino alla varianza reale e alla maggiorazione di Frobenius; ho preferito utilizzare una media invece che scegliere un valore specifico dei cento, in modo da ottenere una stima più precisa.
- La maggiorazione di Frobenius, data dalla formula:

$$\frac{2}{M} \|A\|_F^2 \quad (1)$$

- La varianza reale della matrice, data dalla formula:

$$\text{Var}(\langle X \rangle_M) = \frac{4}{M} \sum_{i=0}^n \sum_{r \leq i} A_{ir}^2 \quad (2)$$

Quest'ultima prescinde dalle stime del metodo Montecarlo, ma si basa sugli elementi effettivi della matrice.

Essa ci serve quindi per un confronto con la varianza empirica e deve essere sempre minore della maggiorazione di Frobenius:

$$Var(< X >_M) \leq \frac{2}{M} \|A\|_F^2 \quad (3)$$

Andiamo quindi ad analizzare i vari casi; per $M=5$:

- La traccia empirica media risulta essere $3.03245e+04$; essa si discosta quindi del 1.05918% dalla traccia reale $\text{Tr}(A)$.
- La varianza empirica media risulta essere $1.69685e+08$; essa si discosta quindi del 18.0614% dalla varianza reale, che invece si attesta a $2.03375e+08$.
- La maggiorazione di Frobenius assume il valore $2.03487e+08$, ed è quindi maggiore alla varianza e si discosta dalla varianza empirica media del 18.116% .

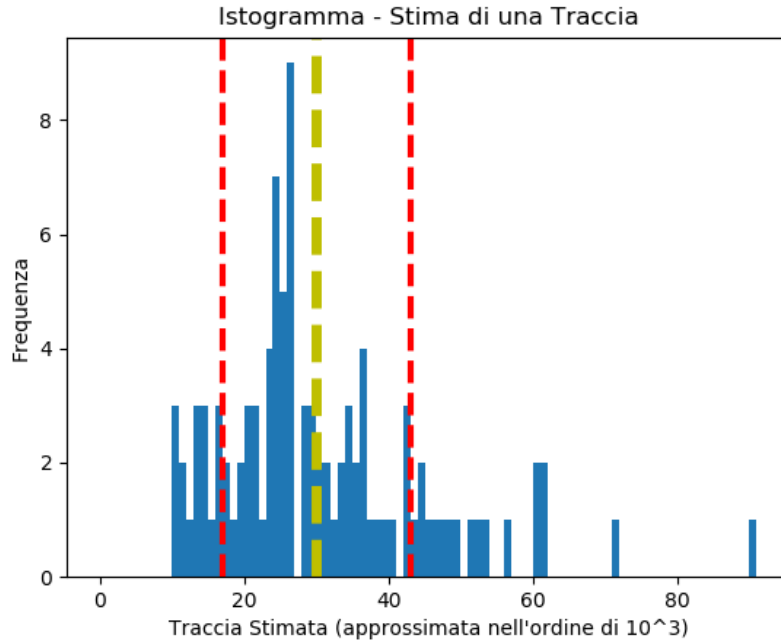


Figure 1: Istogramma per $M=5$

Per un così basso numero di esperimenti notiamo un grafico molto approssimativo, ma che comunque ci mostra un picco di tracce, calcolate empiricamente, molto vicino alla traccia reale.

Per $M=10$:

- La traccia empirica media risulta essere $3.25571e+04$; essa si discosta quindi del 8.15861% dalla traccia reale $\text{Tr}(A)$.
- La varianza empirica media risulta essere $8.50065e+07$; essa si discosta quindi del 17.8704% dalla varianza reale, che invece si attesta a $1.01688e+08$.
- La maggiorazione di Frobenius assume il valore $1.01744e+08$, ed è quindi nuovamente maggiore alla varianza e si discosta dalla varianza empirica media del 17.925% .

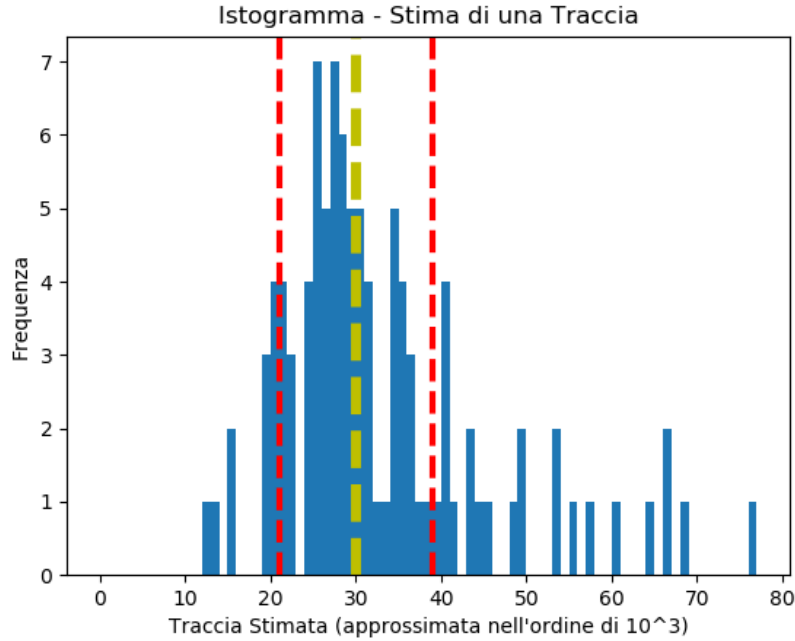


Figure 2: Istogramma per $M=10$

In questo caso, anche se gli esperimenti sono stati raddoppiati, notiamo qualche traccia empirica che si discosta di molto da quella reale; nonostante cio' la varianza si è ristretta, segno che molti valori sono vicini alla traccia reale.

Per $M=25$:

- La traccia empirica media risulta essere $3.00165e+04$; essa si discosta quindi del 11.8478% dalla traccia reale $\text{Tr}(A)$.
- La varianza empirica media risulta essere $3.37838e+07$; essa si discosta quindi del 18.5101% dalla varianza reale, che invece si attesta a $4.06750e+07$.
- La maggiorazione di Frobenius assume il valore $4.06975e+07$, ed è quindi nuovamente maggiore alla varianza e si discosta dalla varianza empirica media del 18.5649% .

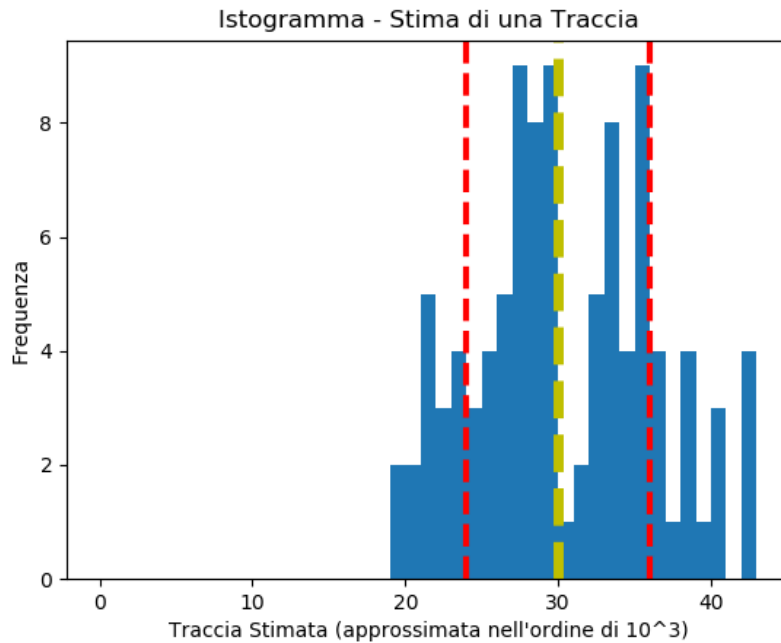


Figure 3: Istogramma per $M=25$

Questo grafico inizia ad essere piu' preciso e compatto rispetto agli altri; notiamo che uno dei picchi delle tracce empiriche si trova proprio a livello della traccia reale. La varianza si è ristretta notevolmente (considerando che la scala delle ascisse si è anch'essa di molto accorciata) e con essa i valori delle tracce, che risultano piu' vicini tra loro.

Per $M=100$:

- La traccia empirica media risulta essere $2.98018e+04$; essa si discosta quindi del 0.679521% dalla traccia reale.
- La varianza empirica media risulta essere $8.42450e+06$; essa si discosta quindi del 18.7627% dalla varianza reale, che invece si attesta a $1.01688e+07$.
- La norma di Frobenius assume il valore $1.01744e+07$, ed è quindi nuovamente maggiore alla varianza e si discosta dalla varianza empirica media del 18.8172% .

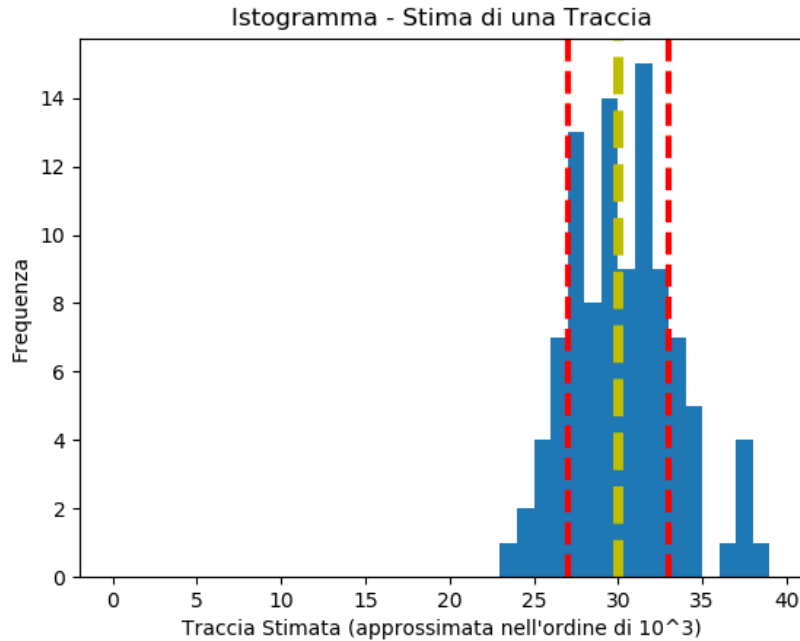


Figure 4: Istogramma per $M=100$

Come ci aspettavamo, il grafico con il maggior numero di esperimenti è anche quello più preciso; la zona delimitata dalla varianza risulta molto stretta e le tracce empiriche sono molto più vicine alla traccia reale. Il dato più importante è quello della media tra le tracce empiriche, che è molto vicino a quello della traccia reale. Questo ci dimostra che per un così grande numero di esperimenti, ripetuti per un consistente numero di iterazioni, il metodo Montecarlo ci fornisce una stima più affidabile.

Nei file esterni allegati alla consegna, è presente un altro esempio analogo di esecuzione del programma con i corrispettivi risultati.