



UNIVERSITÀ DI PISA

**Bachelor of Science in Mathematics
Computational Curriculum**

Pricing of European Black-Scholes & Heston Options

Supervisor:
Prof. Marco Romito

Candidate:
Lorenzo Latini

Academic Year 2021/2022

Introduzione

The price of a derivative financial product can be obtained using two different methods, one algebraic and the other probabilistic. This is the result of a deep connection that exists between probability and analysis.

The pricing of a derivative product can be carried out by exploiting the theory of Partial Derivative Equations or that of Martingales to achieve the same result. In this thesis we will first address both methods for pricing European options in the continuous case of the Black-Scholes model.

However, this model considers the volatility of the option's underlying to be constant, which is at odds with the empirical analysis of the data.

The solution to this problem presented in this thesis is the stochastic volatility model, whic the Heston model is an example of. It will be calibrated o n the basis of empirical data and an analysis of the computational costs involved in implementing the model will be made.

In the first chapter we will give an introduction to stochastic calculus, in particular we will give the definition of a stochastic Wiener integral for deterministic and random functions. We will then demonstrate the Itô formula and apply it to the Brownian stochastic process of the volatile asset price.

In the second chapter, we will introduce the mathematical model describing a self-financing financial portfolio. We will also give the definition of arbitrage and risk-neutral measure to state the market completeness theorem.

In the third chapter, we will present the Black-scholes theory, referring to the Solution of the Heat Equation to determine the solutions of the Black-scholes equation for calculating the price of a European option.

In chapter four, we will alternatively demonstrate how the price of a European option can be derived using the theory of the stochastic Martingale process.

In the fifth chapter we will analyse the problem of pricing European options with constant volatility in the discrete case. We will show how the Monte Carlo approach is computationally preferable to a deterministic approach.

In the sixth chapter, we will present the issue of considering constant volatility within the Black-Scholes model. An empirical analysis of market data will be made in order to determine what the properties of a model that replicates the price trend of an option as closely as possible should be.

In the seventh chapter we will introduce Mean-reverting stochastic volatility models that have most of the characteristics verified empirically with data. These models are able to replicate the Smile Curve of volatility.

In chapter eight, we will make a detailed analysis of the Heston model. We will describe the parameters required for the calibration and describe some methods for pricing

an European option. Finally, we will make a computational comparison of the various methods.

Indice

1	Moti Browniani e Formula di Itô	4
1.1	Moto Browniano	4
1.2	Integrale Stocastico di Wiener per funzioni deterministiche	5
1.3	Integrale Stocastico di Wiener per funzioni aleatorie	8
1.4	Calcolo Stocastico e Formula di Itô	11
1.5	Formula di Itô applicata al modello	12
2	Modello di portafoglio	13
2.1	Modello di mercato a tempi continui	13
2.2	"Self-Financing" portafoglio	13
2.3	Arbitraggio e Misure Risk-neutral	14
2.4	Completezza di Mercato	15
3	Il modello Black-Scholes	16
3.1	L'Equazione Del Calore	18
3.2	Soluzione dell'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes	19
4	Martingala per il pricing di opzioni	22
4.1	Proprietà dell'integrale di Itô	22
4.2	Misure Risk-neutral	23
4.3	Teorema di Girsanov e Cambio di Misura	24
4.4	Pricing di un'opzione con la teoria delle Martingala	25
5	Caso discreto - Analisi dei dati	28
5.1	Metodo Monte Carlo	29
5.2	Coincidenza tra calcolo deterministico e approssimazione con Monte Carlo	29
5.3	Difficoltà N - Opzioni Europee di tipo Call	30
5.4	Difficoltà N - Opzioni Asiatiche di tipo Call	30
5.5	Convergenza ed Errore del Monte Carlo	31
5.6	Conclusione - Quando conviene il Monte Carlo?	34
6	Stima della Volatilità	34
6.1	Volatilità storica	35
6.2	Volatilità implicita	35

6.3	Curva a Smile	35
6.4	Dati e Proprietà Statistiche	36
6.5	Clustering della volatilità	37
7	Volatilità Stocastica	38
7.1	Modelli a volatilità stocastica	38
7.2	Modelli "Mean-reverting"	39
7.3	Conclusione sui Modelli a volatilità stocastica	39
8	Modello di Heston	40
8.1	Condizione di Feller	41
8.1.1	Il caso generale	41
8.1.2	Condizione di Feller nel modello di Heston	42
8.2	Discretizzazione del modello di Heston	44
8.2.1	Schema di discretizzazione di Eulero-Maruyama	44
8.2.2	Schema di discretizzazione di Milstein	45
8.3	Calibrazione del modello di Heston	48
8.3.1	Algoritmi e Risultati	48

Moti Browniani e Formula di Itô

Per presentare la famosa teoria alla base della matematica finanziaria faremo riferimento al libro [1] Nicolas Privault *Stochastic Finance*. Chapman & Hall/CRC FINANCIAL MATHEMATICS SERIES.

Iniziamo con la definizione del processo stocastico chiamato Moto Browniano. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sul quale andremo a costruire il nostro Moto Browniano sarà $\Omega = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$, ovvero lo spazio delle funzioni continue a valori reali definite in \mathbb{R}_+ .

1.1 Moto Browniano

Definizione 1.1. Il Moto Browniano standard è un processo stocastico $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tale che:

1. $B_0 = 0$ \mathbb{P} -quasi certamente
2. È a traiettorie continue \mathbb{P} -quasi certamente
3. Per ogni sequenza finita di tempi $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, gli incrementi $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sono indipendenti
4. Per ogni tempo fissato $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ ha una distribuzione Gaussiana $\mathcal{N}(0, t - s)$ con media zero e varianza $(t - s)$

Si può dimostrare che un tale moto Browniano esiste ed è unico.

Osserviamo in particolare che la condizione 4 implica che

$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0 \quad \text{and} \quad \text{Var}[B_t - B_s] = t - s, \quad 0 \leq s \leq t$$

Nel seguito utilizzeremo la Filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ generata dal Moto Browniano fino al tempo t ovvero

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t), \quad t \geq 0$$

Una variabile aleatoria F è detta \mathcal{F}_t -misurabile se la conoscenza di F dipende soltanto dall'informazione fino al tempo t .

Osserviamo infine che la proprietà 3 mostra che $B_t - B_s$ è indipendente da tutti gli incrementi Browniani fino al tempo s , i.e.,

$$(B_t - B_s) \perp (B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \quad \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s \leq t$$

Per cui $B_t - B_s$ è indipendente da \mathcal{F}_s , $s \geq 0$

Passiamo ora alla costruzione dell'integrale di Itô per funzioni deterministiche di quadrato integrabile rispetto al Moto Browniano.

1.2 Integrale Stocastico di Wiener per funzioni deterministiche

Il famoso matematico Bachelier intorno al 1900 cercò di modellare i prezzi di assets della borsa di Parigi definendo un asset volatile con $S_t = \sigma B_t$ dove σ rappresenta la volatilità implicita. L'integrale stocastico

$$\int_0^T f(t) dS_t = \sigma \int_0^T f(t) dB_t$$

può essere usato per rappresentare dunque il valore del portafoglio come somma di profitti e perdite $f(t)dS_t$ dove dS_t rappresenta la variazione di prezzo e $f(t)$ la quantità investita nell'asset S_t nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$.

Una definizione ingenua dell'integrale stocastico rispetto al Moto Browniano potrebbe essere

$$\int_0^\infty f(t) dB_t = \int_0^\infty f(t) \frac{dB_t}{dt} dt$$

Una tale definizione però non è ammissibile in quanto il Moto Browniano non è differenziabile. Presentiamo quindi la costruzione di Itô dell'integrale stocastico rispetto al Moto Browniano. Quest'ultimo sarà approssimato prima con l'integrale di funzioni semplici della forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Osserviamo che l'insieme delle funzioni semplici f è uno spazio lineare denso in $L^2(\mathbb{R}_+)$ per la norma

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} := \sqrt{\int_0^\infty |f(t)|^2 dt}.$$

Inoltre l'integrale di f è interpretato come l'area sotto la curva f e calcolato come

$$\int_0^\infty f(t) dt = \sum_{i=1}^n a_i (t_i - t_{i-1}).$$

Nella nostra definizione adatteremo questa costruzione all'integrazione rispetto al Moto Browniano.

Definizione 1.2. L'integrale stocastico rispetto al Moto Browniano $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di una funzione semplice f è definito come:

$$\int_0^\infty f(t) dB_t := \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Estendiamo ora la definizione alle funzioni di quadrato integrabile.

Proposizione 1.3. *La definizione dell'integrale stocastico $\int_0^\infty f(t)dB_t$ può essere estesa a qualsiasi funzione $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, ovvero a qualsiasi funzione f tale che*

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty.$$

In tal caso, $\int_0^\infty f(t)dB_t$ ha una distribuzione gaussiana

$$\int_0^\infty f(t)dB_t \simeq \mathcal{N}\left(0, \int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)$$

con varianza $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt$ e vale l'isometria di Itô

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty f(t)dB_t\right)^2\right] = \int_0^\infty |f(t)|^2 dt.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che gli incrementi X_1, \dots, X_n sono variabili indipendenti e con distribuzione $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ quindi $X_1 + \dots + X_n$ è una variabile gaussiana con legge $\mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

Se f è una funzione semplice

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

la somma

$$\int_0^\infty f(t)dB_t = \sum_{k=1}^n a_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$$

è una variabile gaussiana centrata con varianza

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 (t_k - t_{k-1})$$

dato che

$$\text{Var}[a_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})] = a_k^2 \text{Var}[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}] = a_k^2 (t_k - t_{k-1}),$$

quindi l'integrale stocastico

$$\int_0^\infty f(t)dB_t = \sum_{k=1}^n a_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$$

della funzione semplice

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$

ha una distribuzione gaussiana centrata con varianza

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\int_0^\infty f(t) dB_t \right] &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 (t_k - t_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=1}^n |a_k|^2 1_{(t_{k-1}, t_k]}(t) dt \\
&= \int_0^\infty |f(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Notiamo infine che

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\int_0^\infty f(t) dB_t \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty f(t) dB_t \right)^2 \right] - \left(\mathbb{E} \left[\int_0^\infty f(t) dB_t \right] \right)^2 \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty f(t) dB_t \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

L'estensione dell'integrale stocastico a tutte le funzioni di quadrato integrabile può essere ora ottenuta sfruttando la densità dello spazio vettoriale delle funzioni semplici, la definizione di successione di Cauchy e l'isometria di Itô.

Sia quindi f una tale funzione e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sequenza di funzioni semplici convergenti a f per la norma

$$\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} := \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

ovvero in $L^2(\mathbb{R}_+)$.

L'isometria di Itô mostra che $(\int_0^\infty f_n(t) dB_t)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy nello spazio $L^2(\Omega)$ di variabili aleatorie $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di quadrato integrabile, ovvero tali che

$$\|F\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)}^2 := \mathbb{E} [F^2] < \infty.$$

Infatti si ha che

$$\left\| \int_0^\infty f_k(t) dB_t - \int_0^\infty f_n(t) dB_t \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty f_k(t) dB_t - \int_0^\infty f_n(t) dB_t \right)^2 \right] \right)^{1/2} \\
&= \|f_k - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\
&\leq \|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} ,
\end{aligned}$$

che tende a 0 quando k e n tendono a infinito.

Dato che $L^2(\Omega)$ è uno spazio completo, $(\int_0^\infty f_n(t) dB_t)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in norma L^2 e quindi definiremo

$$\int_0^\infty f(t) dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dB_t$$

Inoltre grazie all'isometria di Itô tale limite è unico. \square

Estendiamo ora la definizione precedente ai processi \mathcal{F}_t -adattati di quadrato integrabile. Ricordiamo che un processo $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è \mathcal{F}_t -adattato se X_t è \mathcal{F}_t -misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}_+$

1.3 Integrale Stocastico di Wiener per funzioni aleatorie

Come fatto precedentemente, l'integrale stocastico per processi adattati sarà costruito prima come integrale di processi semplici $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ della forma

$$u_t = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

dove F_i è una variabile aleatoria, $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -misurabile per ogni $i = 1, \dots, n$, che rimane costante nell'intervallo di tempo $(t_{i-1}, t_i]$.

Per convenzione la funzione aleatoria $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sarà indicata con $u_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$ e l'evento ω sarà spesso omissso.

Definizione 1.4. L'integrale stocastico rispetto al Moto Browniano $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di un qualsiasi processo $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ della forma

$$u_t = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

è definito come:

$$\int_0^\infty u_t dB_t := \sum_{i=1}^n F_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) .$$

La seguente proposizione fornisce l'estensione di tale integrale a qualsiasi processo $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di quadrato integrabile \mathcal{F}_t -adattato.

Proposizione 1.5. *L'integrale stocastico rispetto al Moto Browniano $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si estende ad un qualsiasi processo $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ \mathcal{F}_t -adattato tale che:*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty |u_t|^2 dt \right] < \infty$$

Inoltre vale l'isometria di Itô

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty u_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty |u_t|^2 dt \right]$$

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che vale l'isometria di Itô per processi semplici u , infatti si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty u_t dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n F_i F_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n |F_i|^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} F_i F_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[|F_i|^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] \right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[F_i F_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[|F_i|^2 \mathbb{E} \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[F_i F_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \mathbb{E} \left[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[|F_i|^2 \mathbb{E} \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[F_i F_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \mathbb{E} \left[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[|F_i|^2 (t_i - t_{i-1}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n |F_i|^2 (t_i - t_{i-1}) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty |u_t|^2 dt \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le proprietà di base della speranza condizionale, il fatto che $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$

è indipendente da $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ e le due seguenti proprietà :

$$\mathbb{E} [B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] = 0, \quad \mathbb{E} [(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto nella proposizione 1.3 possiamo ora estendere la definizione ai processi di quadrato integrabile $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sfruttando la densità dello spazio vettoriale dei processi semplici, la definizione di successioni di Cauchy e concludendo come prima usando l'isometria di Itô.

Infatti sia $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ lo spazio dei processi di quadrato integrabile $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\|u\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)}^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^\infty |u_t|^2 dt \right] < \infty.$$

L'insieme dei processi semplici formano uno spazio lineare denso nel sottospazio $L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ formato dai processi di quadrato integrabile adattati in $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$. Dato quindi un processo $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ di quadrato integrabile e adattato, esiste una sequenza $(u_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ di processi semplici che converge ad u_t in $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ e l'isometria di Itô mostra che $(\int u_t^n dB_t)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^2(\Omega)$, pertanto converge nello spazio completo $L^2(\Omega)$.

In questo caso definiremo

$$\int_0^\infty u_t dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty u_t^n dB_t$$

e ancora una volta, sfruttando l'isometria di Itô, il limite è unico. \square

Osserviamo che l'integrale di Itô di un processo adattato $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è ancora una variabile aleatoria centrata

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \right] = 0$$

inoltre l'isometria di Itô può essere riscritta come

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_t dB_t \int_0^\infty v_t dB_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_t v_t dt \right],$$

per tutti i processi di quadrato integrabile u, v .

A differenza del caso precedente, in cui l'integranda $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ era una funzione deterministica, la variabile $\int_0^\infty u_s dB_s$ ora non ha più una distribuzione gaussiana eccetto in alcuni casi.

Nel seguito definiremo il prezzo dell'asset volatile al tempo t come

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Questa equazione può essere formalmente riscritta come

$$S_T = S_0 + \mu \int_0^T S_t dt + \sigma \int_0^T S_t dB_t,$$

da cui si comprende la necessità di definire un integrale stocastico rispetto al Moto Browniano.

Questo modello sarà utilizzato nel seguito per rappresentare il prezzo S_t di un asset volatile al tempo t . In tal caso il guadagno dS_t/S_t sarà dato da due componenti: un guadagno costante μdt e un guadagno aleatorio σdB_t parametrizzato dal coefficiente di volatilità σ .

Il nostro obiettivo sarà quello di risolvere l'equazione

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

e per farlo introdurremo nozioni sul calcolo stocastico e la formula di Itô.

1.4 Calcolo Stocastico e Formula di Itô

Per introdurre la formula di Itô partiamo da un generico processo di Itô della forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t v_s ds + \int_0^t u_s dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

o in notazione differenziale

$$dX_t = v_t dt + u_t dB_t,$$

dove $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sono due processi adattati di quadrato integrabile.

Teorema 1.6. *Per ogni processo di Itô $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ e per ogni $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ vale la formula di Itô:*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = & f(0, X_0) + \int_0^t v_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) ds + \int_0^t u_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dB_s \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t |u_s|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

Dimostrazione. cf. [2] □

Osserviamo che usando la relazione

$$\int_0^t df(s, X_s) = f(t, X_t) - f(0, X_0),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^t df(s, X_s) &= \int_0^t v_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) ds + \int_0^t u_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dB_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t |u_s|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds\end{aligned}$$

che ci permette di riscrivere la formula di Itô in forma differenziale come

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + u_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dB_t + v_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dt + \frac{1}{2} |u_t|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt$$

oppure

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} |u_t|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt.$$

1.5 Formula di Itô applicata al modello

Come accennato in precedenza il nostro obiettivo è risolvere l'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

che darà come soluzione il prezzo S_t dell'asset volatile al tempo t , dove $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Tale equazione può essere riscritta in forma integrale come

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

e può essere risolta applicando la formula di Itô a $f(S_t) = \log S_t$ con $f(x) = \log x$, infatti

$$\begin{aligned}d \log S_t &= \mu S_t f'(S_t) dt + \sigma S_t f'(S_t) dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t) dt \\ &= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\log S_t - \log S_0 &= \int_0^t d \log S_r \\ &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dB_r \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t, \quad t \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

che porta alla seguente soluzione

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Modello di portafoglio

Diamo ora una descrizione formale del nostro modello finanziario

2.1 Modello di mercato a tempi continui

Indicheremo con $(A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico che rappresenta l'asset senza rischio definito dalla seguente relazione

$$\frac{dA_t}{A_t} = r dt, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

i.e.,

$$A_t = A_0 e^{rt}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Inoltre indicheremo con $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico che rappresenta il prezzo dell'asset volatile definito dalla seguente relazione

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

la cui soluzione abbiamo visto essere

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

2.2 "Self-Financing" portafoglio

Siano ξ_t e η_t le quantità (eventualmente frazionarie) investite al tempo t , rispettivamente negli assets S_t e A_t , e indichiamo con

$$\bar{\xi}_t = (\eta_t, \xi_t), \quad \bar{S}_t = (A_t, S_t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

rispettivamente il portafoglio e il processo dei prezzi ad esso associati. Il valore del portafoglio V_t al tempo t è dato dalla relazione

$$V_t = \bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_t = \eta_t A_t + \xi_t S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Definizione 2.1. Diremo che la strategia di portafoglio $(\eta_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è "Self-financing" se il valore di portafoglio rimane costante dopo aver aggiornato il portafoglio da (η_t, ξ_t) a $(\eta_{t+dt}, \xi_{t+dt})$, ovvero

$$\bar{\xi}_t \cdot \bar{S}_{t+dt} = A_{t+dt} \eta_t + S_{t+dt} \xi_t = A_{t+dt} \eta_{t+dt} + S_{t+dt} \xi_{t+dt} = \bar{\xi}_{t+dt} \cdot \bar{S}_{t+dt}$$

Il seguente lemma afferma che quando un portafoglio è "Self-financing", il suo valore scontato equivale alla differenza tra i guadagni e le perdite scontate.

Lemma 2.2. Sia $(\eta_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ una strategia di portafoglio con valore

$$V_t = \eta_t A_t + \xi_t S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

allora i seguenti fatti sono equivalenti:

1. La strategia di portafoglio $(\eta_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è "Self-financing"

$$2. \tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \xi_u dX_u, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Come conseguenza del lemma, il problema dell'hedging di un prodotto derivato si riduce al calcolo di $\tilde{C} = e^{-rT} C$ come integrale stocastico:

$$\tilde{C} = \tilde{V}_T = \tilde{V}_0 + \int_0^T \xi_u dX_u.$$

Dove abbiamo indicato con

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t \quad \text{e} \quad X_t = e^{-rt} S_t$$

rispettivamente il valore di portafoglio scontato e il valore dell'asset volatile scontato al tempo $t \geq 0$.

Si ha la seguente relazione

$$\begin{aligned} dX_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= -r e^{-rt} S_t dt + \mu e^{-rt} S_t dt + \sigma e^{-rt} S_t dB_t \\ &= X_t ((\mu - r) dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

Da cui si ricava

$$V_t = V_0 + (\mu - r) \int_0^t e^{r(t-u)} \xi_u S_u du + \sigma \int_0^t e^{r(t-u)} \xi_u S_u dB_u, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

2.3 Arbitraggio e Misure Risk-neutral

Nel seguito considereremo soltanto strategie di portafoglio il cui valore totale V_t rimane non negativo per ogni $t \in [0, T]$.

Definizione 2.3. Una strategia di portafoglio $(\xi_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ costituisce un'opportunità di arbitraggio se sono verificate le seguenti condizioni:

$$1. V_0 \leq 0$$

$$2. V_T \geq 0$$

3. $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$

Definizione 2.4. Una misura di probabilità \mathbb{Q} su Ω si dice "Risk-neutral" se, data la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ generata dal Moto Browniano $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, \mathbb{Q} soddisfa

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_t \mid \mathcal{F}_u] = e^{r(t-u)} S_u, \quad 0 \leq u \leq t,$$

Ricordando la relazione

$$A_t = e^{r(t-u)} A_u, \quad 0 \leq u \leq t,$$

possiamo pensare alla condizione precedente come al fatto che, sotto l'ipotesi di una misura di probabilità Risk-neutral \mathbb{Q} , il guadagno atteso dell'asset volatile S_t è uguale a quello del Risk-less asset A_t .

Prima di dare una formulazione equivalente delle precedenti definizioni diamo la seguente definizione:

Definizione 2.5. Un processo a tempi continui $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è una Martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se

$$\mathbb{E}[Z_t \mid \mathcal{F}_s] = Z_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Tale definizione ci permette di dare una seconda formulazione del concetto di misura di probabilità Risk-neutral.

Proposizione 2.6. La misura di probabilità \mathbb{Q} è Risk-neutral se e solo se $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è una Martingala rispetto a \mathbb{Q} .

2.4 Completezza di Mercato

Diamo ora la seguente definizione

Definizione 2.7. Un'opzione con payoff C è replicabile se esiste una strategia di portafoglio $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$ tale che

$$V_t = \eta_t A_t + \xi_t S_t \quad \forall t \in [0, T] \quad \& \quad V_T = C$$

In tal caso il prezzo dell'opzione al tempo t è dato dal valore V_t del portafoglio Self-financing con il quale stiamo replicando l'opzione.

Con questa definizione possiamo dare la definizione di Mercato Completo.

Definizione 2.8. Un mercato si dice completo se ogni opzione con payoff C è replicabile.

Il modello Black-Scholes

Iniziamo questo capitolo presentando l'equazione differenziale alle derivate parziali del modello Black-Scholes per il prezzo di un asset volatile.

Proposizione 3.1. *Sia $(\eta_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ una strategia di portafoglio tale che*

1. $(\eta_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è *Self-financing*

2. $V_t := \eta_t A_t + \xi_t S_t, t \in \mathbb{R}_+$ *può essere scritto come*

$$V_t = g(t, S_t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

con $g \in \mathcal{C}^{1,2}((0, \infty) \times (0, \infty))$.

Allora la funzione $g(t, x)$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes

$$r g(t, x) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + r x \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x), \quad t, x > 0,$$

e ξ_t è dato dalla relazione

$$\xi_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Dimostrazione. Partiamo osservando che la condizione di Self-financing implica che l'incremento del valore del portafoglio è dato soltanto dall'incremento dei prezzi degli asset

$$\begin{aligned} dV_t &= \eta_t dA_t + \xi_t dS_t \\ &= r \eta_t A_t dt + \mu \xi_t S_t dt + \sigma \xi_t S_t dB_t \end{aligned}$$

dove $t \in \mathbb{R}_+$.

Ricordiamo inoltre che il prezzo dell'asset volatile è un processo di Itô e quindi può essere riscritto come

$$S_t = S_0 + \int_0^t v_s ds + \int_0^t u_s dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

A questo punto prendendo

$$u_t = \sigma S_t, \quad \text{e} \quad v_t = \mu S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

e applicando la formula di Itô a $g(t, x)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} dg(t, S_t) &= v_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dt + u_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dB_t \\ &+ \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{1}{2} |u_t|^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) dt \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) dt + \mu S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dt + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) dt + \sigma S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dB_t. \end{aligned}$$

Identifichiamo ora i termini in dB_t e dt nelle due rappresentazioni di $V_t = g(t, S_t)$ e otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} r\eta_t A_t dt + \mu \xi_t S_t dt = \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) dt + \mu S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dt + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) dt \\ \xi_t S_t \sigma dB_t = S_t \sigma \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dB_t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} rV_t - r\xi_t S_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t), \\ \xi_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} rg(t, S_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) \\ \xi_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) \end{cases}$$

□

La derivata $\frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t)$ che fornisce il valore di ξ_t nella precedente formula è detta Delta del prezzo dell'opzione.

Con tale valore siamo anche in grado di determinare la quantità investita nel Risk-less asset grazie alla relazione

$$\eta_t A_t = V_t - \xi_t S_t = g(t, S_t) - S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t),$$

per cui

$$\begin{aligned} \eta_t &= \frac{V_t - \xi_t S_t}{A_t} \\ &= \frac{g(t, S_t) - S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t)}{A_t} \\ &= \frac{g(t, S_t) - S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t)}{A_0 e^{rt}} \end{aligned}$$

Aggiungiamo ora una condizione finale $g(T, x) = f(x)$ all'equazione di Black-Scholes al fine di replicare l'opzione con payoff C della forma $C = f(S_T)$.

Proposizione 3.2. *Il prezzo di un portafoglio Self-financing della forma $V_t = g(t, S_t)$ che replica un'opzione con Payoff $C = f(S_T)$ soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali*

di Black-Scholes

$$\begin{cases} rg(t, x) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) \\ g(T, x) = f(x) \end{cases}$$

Ricordiamo che nel caso delle opzioni Europee di tipo Call con strike K la funzione di payoff è $f(x) = (x - K)^+$ e l'equazione di Black-Scholes diventa

$$\begin{cases} rg_c(t, x) = \frac{\partial g_c}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial g_c}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g_c}{\partial x^2}(t, x) \\ g_c(T, x) = (x - K)^+ \end{cases}$$

che, come dimostreremo successivamente, ammette la soluzione

$$g_c(t, x) = \text{BS}(K, x, \sigma, r, T - t) = x\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-),$$

dove

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

indica la funzione di ripartizione di una Gaussiana Standard e

$$d_+ = \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_- = \frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

con

$$d_+ = d_- + \sigma\sqrt{T - t}.$$

Si verifica facilmente che quando $t = T$ vale

$$d_+ = d_- = \begin{cases} +\infty, & x > K \\ -\infty, & x < K \end{cases}$$

che permette di ricavare la condizione iniziale

$$g_c(T, x) = \begin{cases} x\Phi(+\infty) - K\Phi(+\infty) = x - K, & x > K \\ x\Phi(-\infty) - K\Phi(-\infty) = 0, & x < K \end{cases} = (x - K)^+$$

al tempo $t = T$.

Ricaviamo ora la soluzione dell'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes passando per l'Equazione del Calore.

3.1 L'Equazione Del Calore

Studiamo l'Equazione del Calore che viene utilizzata per modellare la diffusione del calore nei solidi. Dimostreremo che questa è equivalente all'equazione di Black-Scholes dopo aver

effettuato un cambio di variabili e pertanto saremo in grado di trovare la soluzione cercata.

Proposizione 3.3. *L'Equazione del Calore*

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) \\ g(0, y) = \psi(y) \end{cases}$$

con condizione iniziale $\psi(y)$ ha come soluzione

$$g(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) \left(\frac{(y-z)^2}{t^2} - \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y). \end{aligned}$$

Inoltre si verifica che al tempo $t = 0$ vale la seguente relazione

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y+z) e^{-\frac{z^2}{2t}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t}} = \psi(y),$$

con $y \in \mathbb{R}$

□

Passiamo ora all'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes

3.2 Soluzione dell'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes

Proposizione 3.4. *Assumiamo che $f(t, x)$ risolva l'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes*

$$\begin{cases} r f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + r x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \\ f(T, x) = (x - K)^+, \end{cases}$$

con la condizione finale $h(x) = (x - K)^+$. Allora la funzione $g(t, y)$ definita dalla seguente relazione

$$g(t, y) = e^{rt} f \left(T - t, e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \right)$$

risolve l'Equazione del Calore

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) \\ g(0, y) = h(e^{\sigma y}) \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $s = T - t$ e $x = e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t}$ allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) &= r e^{rt} f(T - t, x) - e^{rt} \frac{\partial f}{\partial s}(T - t, x) + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) e^{rt} x \frac{\partial f}{\partial x}(T - t, x) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} e^{rt} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T - t, x) + \frac{\sigma^2}{2} e^{rt} x \frac{\partial f}{\partial x}(T - t, x) \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $f(t, x)$ risolva l'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes.

Tuttavia vale anche che

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, y) = \sigma e^{rt} e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \frac{\partial f}{\partial x} \left(T - t, e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) &= \frac{\sigma^2}{2} e^{rt} e^{\sigma y + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \frac{\partial f}{\partial x} \left(T - t, e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} e^{rt} e^{2\sigma y + 2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(T - t, e^{\sigma y + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)t} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} e^{rt} x \frac{\partial f}{\partial x}(T - t, x) + \frac{\sigma^2}{2} e^{rt} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T - t, x) \end{aligned}$$

da cui si ha la tesi grazie alla relazione

$$g(0, y) = f(T, e^{\sigma y}) = h(e^{\sigma y}).$$

□

Siamo pronti per dare una giustificazione formale alla soluzione dell'equazione di Black-Scholes nel caso di un'opzione Europea di tipo Call

Proposizione 3.5. Quando $h(x) = (x - K)^+$ la soluzione dell'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes è data da

$$f(t, x) = x \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-)$$

dove

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$d_+ = \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_- = \frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 3.5, ponendo $s = T - t$ e $x = e^{\sigma y + (\frac{\sigma^2}{2} - r)t}$ si ha

$$f(s, x) = e^{-r(T-s)} g\left(T - s, \frac{-\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-s) + \log x}{\sigma}\right)$$

Da cui usando la proposizione 3.4 e il fatto che $g(0, y) = h(e^{\sigma y}) = \psi(y)$ si ha

$$\begin{aligned} f(t, x) &= e^{-r(T-t)} g\left(T - t, \frac{-\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t) + \log x}{\sigma}\right) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{-\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t) + \log x}{\sigma} + z\right) e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(x e^{\sigma z - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t)}\right) e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x e^{\sigma z - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t)} - K\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\frac{(-r + \sigma^2/2)(T-t) + \log(K/x)}{\sigma}}^{\infty} \left(x e^{\sigma z - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t)} - K\right) e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= x e^{-r(T-t)} \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{\sigma z - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)(T-t)} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= x \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{\sigma z - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - \frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= x \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z - \sigma(T-t))^2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \int_{-d_- \sqrt{T-t} - \sigma(T-t)}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{-d_- \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
&= x \int_{-d_- - \sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-r(T-t)} \int_{d_-}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\
&= x (1 - \Phi(-d_+)) - K e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(-d_-)) \\
&= x \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$1 - \Phi(a) = \Phi(-a), \quad a \in \mathbb{R}$$

□

Martingala per il pricing di opzioni

Presentiamo ora il secondo approccio al pricing di opzioni che consiste nell'utilizzo della teoria sul processo stocastico Martingala. Quest'ultima ci permetterà di calcolare il prezzo di un'opzione attraverso il calcolo di una speranza condizionale e di determinare un portafoglio in grado di replicare l'opzione.

4.1 Proprietà dell'integrale di Itô

Ricordiamo che un processo $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si dice Martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s, \quad 0 \leq s \leq t$$

Con la seguente proposizione dimostreremo che l'integrale di Itô è una Martingala rispetto alla filtrazione data dal Moto Browniano $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Proposizione 4.1. *L'integrale stocastico $\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di un processo adattato di quadrato integrabile $u \in L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ è una Martingala, i.e.,*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t u_\tau dB_\tau \mid \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s u_\tau dB_\tau, \quad 0 \leq s \leq t$$

Infatti per ogni $u \in L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ si ha

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t u_s dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

in particolare $\int_0^t u_s dB_s$ è \mathcal{F}_t -misurabile, $t \in \mathbb{R}_+$.

Dimostrazione. Per dimostrare l'enunciato è sufficiente dimostrarlo per processi semplici e poi estendere il risultato al caso generale \square

Osserviamo che ogni processo stocastico centrato e a incrementi indipendenti è una Martingala:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_s] + X_s \\ &= X_s, \quad 0 \leq s \leq t\end{aligned}$$

Pertanto il moto Browniano Standard $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è una Martingala.

4.2 Misure Risk-neutral

Ricordiamo che una misura di probabilità è detta Risk-neutral se rispetto a tale misura $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (e^{-rt} S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è una Martingala.

Osserviamo che dato

$$X_t = X_0 e^{(\mu-r)t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2}$$

se $\mu = r$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[X_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2} | \mathcal{F}_s\right] \\ &= X_0 e^{-\sigma^2 t/2} \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_t} | \mathcal{F}_s\right] \\ &= X_0 e^{-\sigma^2 t/2} \mathbb{E}\left[e^{\sigma(B_t - B_s) + \sigma B_s} | \mathcal{F}_s\right] \\ &= X_0 e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_s} \mathbb{E}\left[e^{\sigma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s\right] \\ &= X_0 e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_s} \mathbb{E}\left[e^{\sigma(B_t - B_s)}\right] \\ &= X_0 e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_s} e^{\sigma^2(t-s)/2} \\ &= X_0 e^{\sigma B_s - \sigma^2 s/2} \\ &= X_s, \quad 0 \leq s \leq t.\end{aligned}$$

Pertanto in tal caso $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ è una misura Risk-neutral.

In questa sezione andremo a costruire una misura di probabilità Risk-neutral che vada bene anche nel caso $\mu \neq r$ e per farlo sfrutteremo il Teorema di Girsanov.

Osserviamo che la relazione

$$dX_t = X_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t)$$

può essere riscritta come

$$dX_t = \sigma X_t d\tilde{B}_t,$$

dove

$$\tilde{B}_t := \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Quindi la ricerca di una misura di probabilità Risk-neutral corrisponde alla ricerca di una misura in cui $\left(\tilde{B}_t\right)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sia un Moto Browniano standard. Infatti se consideriamo il moto Browniano traslato $\nu t + B_t$ questo non è più centrato,

$$\mathbb{E}[\nu t + B_t] = \nu t + \mathbb{E}[B_t] = \nu t \neq 0$$

Per far sì che lo diventi possiamo cambiare i valori di $p, q \in [0, 1]$, rispettivamente probabilità di successo e di insuccesso del moto Browniano, in modo tale che

$$\mathbb{E}[\nu t + B_t] = 0$$

sia verificata.

4.3 Teorema di Girsanov e Cambio di Misura

Data una misura di probabilità \mathbb{Q} su Ω , con la seguente notazione

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = F$$

indichiamo che la misura di probabilità \mathbb{Q} ha densità F rispetto a \mathbb{P} . Ciò equivale a dire che

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{Q}(\omega) = \int_{\Omega} F(\omega) \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

o usando una notazione più compatta

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F\xi].$$

Diremo inoltre che \mathbb{Q} è equivalente a \mathbb{P} se $F > 0$ \mathbb{P} -quasi certamente. Siamo pronti per enunciare il teorema di Girsanov ed applicarlo al nostro modello finanziario.

Teorema 4.2. *Sia $(\psi_t)_{t \in [0, T]}$ un processo adattato che soddisfa la condizione di integrabilità di Novikov*

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T |\psi_t|^2 dt \right) \right] < \infty$$

Sia inoltre \mathbb{Q} la misura di probabilità definita dalla seguente relazione

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \psi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \psi_s^2 ds \right).$$

allora

$$\hat{B}_t := B_t + \int_0^t \psi_s ds, \quad t \in [0, T],$$

è un Moto Browniano Standard rispetto a \mathbb{Q} .

Tale teorema applicato a

$$\psi_t := \frac{\mu - r}{\sigma},$$

mostra che

$$\tilde{B}_t := \frac{\mu - r}{\sigma}t + B_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

è un Moto Browniano Standard rispetto alla misura di probabilità \mathbb{Q} definita dalla relazione

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\frac{\mu - r}{\sigma}B_t - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}t \right).$$

Da cui il processo dato dalla relazione

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\mu - r)dt + \sigma dB_t = \sigma d\tilde{B}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

è una Martingala rispetto alla misura di probabilità \mathbb{Q} che risulta quindi essere Risk-neutral. Osserviamo che in accordo con quanto visto precedentemente $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ quando $\mu = r$.

4.4 Pricing di un'opzione con la teoria delle Martingala

L'obiettivo di questa sezione sarà quello di recuperare la soluzione dell'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes ricavata precedentemente utilizzando però la speranza condizionale e la teoria delle Martingala.

Ricordiamo che un mercato è senza opportunità di arbitraggio se esiste almeno una misura di probabilità Risk-neutral \mathbb{Q} e che ciò corrisponde a dimostrare che il processo stocastico

$$X_t := e^{-rt}S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

sia una Martingala rispetto a \mathbb{Q} .

Grazie a quanto detto precedentemente nel caso in cui il processo $(X_t)_{s \in [t, \infty)}$ soddisfi l'equazione

$$dX_t = (\mu - r)X_t dt + \sigma X_t dB_t = \sigma X_t d\tilde{B}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

abbiamo che

$$X_t = S_0 e^{(\mu - r)t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

è una Martingala rispetto a \mathbb{Q} e pertanto il valore scontato \tilde{V}_t di un portafoglio Self-financing definito dalla relazione

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \tilde{V}_0 + \int_0^t \xi_u dX_u \\ &= \tilde{V}_0 + \sigma \int_0^t \xi_u X_u d\tilde{B}_u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

risulta essere una Martingala rispetto \mathbb{Q} .

D'ora in avanti chiameremo prezzo di arbitraggio al tempo t il valore V_t di un portafoglio $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ in grado di replicare il payoff di un'opzione C e lo indicheremo con $\pi_t(C)$ in quanto esso corrisponderà al prezzo dell'opzione al tempo t .

Proposizione 4.3. *Sia $(\xi_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ una strategia di portafoglio il cui valore è definito dalla relazione*

$$V_t = \eta_t A_t + \xi_t S_t, \quad t \in [0, T],$$

e sia C il payoff dell'opzione che quest'ultimo replica. Supponiamo che valgano le seguenti affermazioni:

1. $(\xi_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ è Self-financing
2. $(\xi_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ replica l'opzione C

Allora il prezzo di arbitraggio dell'opzione C è dato dalla relazione

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T,$$

Dimostrazione. Dato che la strategia di portafoglio $(\xi_t, \eta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è Self-financing, dal Lemma 2.2 si ha

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \sigma \int_0^t \xi_u X_u d\tilde{B}_u, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

che grazie alle precedenti osservazioni sappiamo essere una Martingala rispetto a \mathbb{Q} per cui,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C \mid \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

che implica

$$V_t = e^{rt} \tilde{V}_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C \mid \mathcal{F}_t]$$

□

Cerchiamo ora di recuperare la soluzione del modello Black-Scholes passando per la teoria sulle Martingala.

Partiamo con il seguente lemma che ci sarà utile nel calcolo del prezzo dell'opzione.

Lemma 4.4. *Sia X una variabile Gaussiana centrata con varianza σ^2 , in tal caso si ha*

$$\mathbb{E} \left[(e^{m+X} - K)^+ \right] = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi((\sigma^2 + m - \log K)/\sigma) - K \Phi((m - \log K)/\sigma).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[(e^{m+X} - K)^+ \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{m+x} - K)^+ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-m+\log K}^{\infty} (e^{m+x} - K) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{e^m}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-m+\log K}^{\infty} e^{x-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{K}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-m+\log K}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-m+\log K}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma^2-x)^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-m+\log K)/\sigma}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\sigma^2-m+\log K}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - K\Phi((m-\log K)/\sigma) \\
&= e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi((\sigma^2+m-\log K)/\sigma) - K\Phi((m-\log K)/\sigma)
\end{aligned}$$

□

Siamo pronti per calcolare il prezzo dell'opzione sfruttando la teoria appena presentata e trovando lo stesso risultato ottenuto con la teoria di Black-Scholes.

Proposizione 4.5. *Il prezzo al tempo t di un'opzione Europea di tipo Call con strike K e maturità T è dato dalla relazione*

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-), \quad t \in [0, T]$$

Dimostrazione. Usando la relazione

$$S_T = S_t e^{r(T-t)+\sigma(\tilde{B}_T-\tilde{B}_t)-\sigma^2(T-t)/2}, \quad t \in [0, T].$$

grazie alla proposizione 4.4 si ha

$$\begin{aligned}
\pi_t(C) &= V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C \mid \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(S_t e^{r(T-t)+\sigma(\tilde{B}_T-\tilde{B}_t)-\sigma^2(T-t)/2} - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(x e^{r(T-t)+\sigma(\tilde{B}_T-\tilde{B}_t)-\sigma^2(T-t)/2} - K \right)^+ \right]_{x=S_t} \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(e^{m(x)+X} - K)^+ \right]_{x=S_t}, \quad 0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

dove

$$m(x) = r(T-t) - \sigma^2(T-t)/2 + \log x$$

e $X = \sigma (\tilde{B}_T - \tilde{B}_t)$ è una variabile Gaussiana centrata con varianza

$$\text{Var}[X] = \text{Var} \left[\sigma (\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) \right] = \sigma^2 \text{Var} [\tilde{B}_T - \tilde{B}_t] = \sigma^2 (T - t)$$

rispetto a \mathbb{Q} . Sfruttando ora il lemma 4.5 si ha

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(e^{m(x)+X} - K)^+ \right]_{x=S_t} \\ &= e^{-r(T-t)} e^{m(S_t) + \sigma^2(T-t)/2} \Phi \left(\sigma(T-t) + (m(S_t) - \log K) / \sigma \sqrt{T-t} \right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \Phi \left((m(S_t) - \log K) / \sigma \sqrt{T-t} \right) \\ &= S_t \Phi \left((\sigma^2(T-t) + m(S_t) - \log K) / \sigma \sqrt{T-t} \right) - K e^{-r(T-t)} \Phi \left((m(S_t) - \log K) / \sigma \sqrt{T-t} \right) \\ &= S_t \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-), \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq T$$

□

Prima di passare alle considerazioni sulla volatilità del modello e di introdurre un nuovo modello più accurato, analizziamo il caso discreto sfruttando la teoria presentata fino ad ora.

Caso discreto - Analisi dei dati

Remark. Nel seguito verranno utilizzate funzioni presenti nel package sviluppato per il progetto in questione, consultabile e scaricabile al link <https://github.com/LorenzoLatini13/LabProject>

Sappiamo che la formula per il prezzo di un'opzione con payoff C nel caso di un modello a tempi discreti è

$$\pi_t(C) = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [C \mid \mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, \dots, N,$$

Nella nostra analisi studieremo le Opzioni Europee e le opzioni Asiatiche. Gli approcci che utilizzeremo saranno due:

1. Il primo sarà un approccio diretto mediante il calcolo deterministico del prezzo dell'opzione usando una formula chiusa per la speranza condizionale.
2. Il secondo sarà un approccio per approssimazione del prezzo dell'opzione attraverso l'utilizzo del metodo Monte Carlo.

5.1 Metodo Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo è un'ampia classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici. Può essere utile per superare i problemi computazionali legati ai test esatti (ad esempio i metodi basati sulla distribuzione binomiale e calcolo combinatorio, che per grandi campioni generano un numero di permutazioni eccessivo).

Tale metodo sfrutta la "Legge dei grandi numeri" secondo la quale data una successione di variabili casuali X_1, X_2, \dots, X_M indipendenti e identicamente distribuite con media (finita) μ , se si considera la media campionaria $\bar{X}_M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_M}{M}$, allora vale la seguente relazione:

$$P\left(\lim_{M \rightarrow \infty} \bar{X}_M = \mu\right) = 1$$

ossia lo stimatore media campionaria converge \mathbb{P} -quasi certamente al valore atteso comune delle X_i .

5.2 Coincidenza tra calcolo deterministico e approssimazione con Monte Carlo

Come prima cosa è bene verificare che le funzioni del package scritte per percorrere entrambi gli approcci portino agli stessi risultati nel caso in cui la difficoltà, che nel nostro caso corrisponde agli istanti di tempo $t = 0, \dots, N$, sia bassa. Ricordiamo che con M indichiamo il numero di variabili casuali utilizzate nel metodo Monte Carlo.

Prendiamo per esempio il caso $N = 4$ e scegliamo $M = 100000$ e otteniamo i seguenti risultati

Option Pricing

Tipo di opzione	Deterministico	Monte Carlo
European Call Option	0.4268407	0.4266445
European Put Option	0.1206424	0.1204912
Asian Call Option	0.1968680	0.1974798
Asian Put Option	0.0689566	0.0693193

Option Hedging

Tipo di opzione	Deterministico	Monte Carlo
European Call Option	$(-0.27, 0.494)$	$(-0.27, 0.495)$
European Put Option	$(0.235, -0.19)$	$(0.236, -0.19)$
Asian Call Option	$(-0.367, 0.791)$	$(-0.367, 0.791)$
Asian Put Option	$(0.309, -0.209)$	$(0.309, -0.209)$

Vediamo ora in che modo la difficoltà del problema da affrontare influisca su entrambi gli approcci.

5.3 Difficoltà N - Opzioni Europee di tipo Call

Ricordiamo che nel caso di un'opzione Europea di tipo Call in cui $C = \left(S_N^{(i)} - K\right)^+$ vale la seguente relazione:

$$\pi_t(C) = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \sum_{j=0}^{N-t} \binom{N-t}{j} (p^*)^j (1-p^*)^{N-t-j} f(S_t(1+b)^j(1+a)^{N-t-j})$$

In questo caso i problemi causati da N nel calcolo di questa quantità sono due:

1. Raggiungimento della precisione di macchina che nel caso di R coincide con `$double.xmin = 2.225074e-308`
2. Raggiungimento della massima cifra memorizzabile che nel caso di R coincide con `$double.xmax = 1.797693e+308`

È dunque possibile utilizzare la formula chiusa per valori di $N \sim 100$, mentre sarebbe necessario utilizzare il metodo Monte Carlo per valori superiori. Il problema legato a quest'ultimo in questo caso è la convergenza che non avviene in tempistiche ragionevoli. Quindi in generale per N troppo grande entrambi i metodi falliscono, tuttavia è possibile lavorare al miglioramento della velocità di convergenza del metodo Monte Carlo.

5.4 Difficoltà N - Opzioni Asiatiche di tipo Call

Nel caso delle opzioni Asiatiche in cui $C = f(S_0, \dots, S_N) = \left(\frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N S_t^{(i)} - K\right)^+$ è ancora possibile trovare una formula chiusa per il calcolo di $\pi_t(C)$. In particolare se indichiamo con p^* il numero di occorrenze di b in una generica stringa casuale $(a, \dots, b, b, a) \in \{a, b\}^{(N-t)}$ si ha:

$$\pi_t(C) = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \sum_{(a,a,\dots,b,a) \in \{a,b\}^{(N-t)}} (p^*)^j (1-p^*)^{N-t-j} f(S_1, \dots, S_N)$$

Osserviamo però che nella sommatoria compaiono 2^{N-t} termini, quindi la complessità del problema cresce esponenzialmente all'aumentare di N , ciò ci porterà a preferire il metodo Monte Carlo nel caso delle Opzioni Asiatiche.

Questo comportamento può essere osservato anche empiricamente, infatti è evidente come il tempo di riproduzione aumenti esponenzialmente:


```

> tic()
> ECallprice_det = ECallOption_pricingfunction_det(1,20,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99)
> toc()
6.59 sec elapsed
> tic()
> ECallprice_det = ECallOption_pricingfunction_det(1,21,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99)
> toc()
11.64 sec elapsed
> tic()
> ECallprice_det = ECallOption_pricingfunction_det(1,22,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99)
> toc()
26.8 sec elapsed

```

Utilizzando il metodo Monte Carlo è invece possibile generare risultati in tempi molto più brevi e con ottima precisione. Per esempio con una difficoltà $N = 40$ e un numero di variabili indipendenti $M = 100000$, $M = 1000000$ oppure $M = 10000000$, si ottengono i seguenti risultati:

```

> # N = 40 - Monte Carlo is faster and has also a good precision
>
> tic()
> ECallprice_rand = ECallOption_pricingfunction_rand(1,40,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99,100000)
> print(ECallprice_rand)
[1] 0.2749529
> toc()
1.46 sec elapsed
> tic()
> ECallprice_rand = ECallOption_pricingfunction_rand(1,40,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99,1000000)
> print(ECallprice_rand)
[1] 0.2607031
> toc()
19.71 sec elapsed
> tic()
> ECallprice_rand = ECallOption_pricingfunction_rand(1,40,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99,10000000)
> print(ECallprice_rand)
[1] 0.2616572
> toc()
198.68 sec elapsed

```

5.5 Convergenza ed Errore del Monte Carlo

Ricordiamo che data una successione di variabili casuali X_1, X_2, \dots, X_M indipendenti e identicamente distribuite con media (finita) μ , se si considera la media campionaria

$$\bar{X}_M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_M}{M}$$

allora vale la seguente relazione:

$$P\left(\lim_{M \rightarrow \infty} \bar{X}_M = \mu\right) = 1$$

ossia lo stimatore media campionaria converge \mathbb{P} -quasi certamente al valore atteso comune delle X_i .

Nel nostro caso però c'è un ulteriore aspetto da considerare. Infatti per M fissato, il valore $\bar{X}_M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_M}{M}$ oscilla intorno ad un valore medio che al variare di M ci

aspettiamo sia sempre più vicino a μ . Per studiare tale fenomeno possiamo quindi studiare il comportamento di

$$\hat{X}_T = \left(\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_M)}{M} \right)_1 + \dots + \left(\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_M)}{M} \right)_T$$

e aspettarci che ci sia una convergenza a μ dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{T}} + \frac{1}{\sqrt{M}}$. Chiaramente, all'aumentare di T e M , aumenta il tempo di esecuzione dell'algoritmo ed è ragionevole scegliere $M = T$ in quanto la convergenza avviene sempre in relazione al valore peggiore.

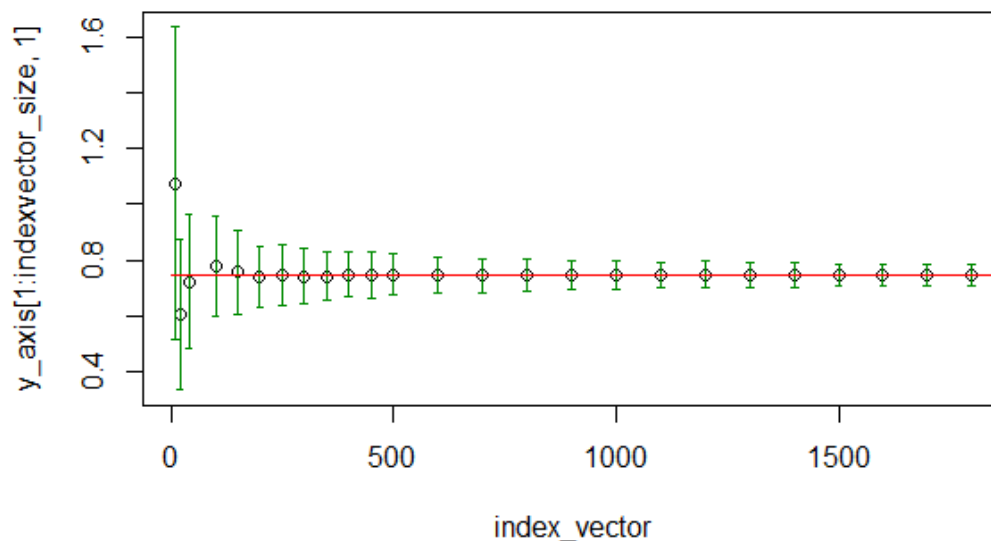
Una tale analisi ci porta a costruire un algoritmo di questo tipo:

```
# European Call Options - N = 10
tic()
N = 11 # Difficoltà
index_vector = c(10,20,40,100,150,200,250,300,350,400,450,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500,1600,1700,1800)
# vettore degli M per cui eseguiamo il Monte Carlo
indexvector_size = size(index_vector,2) # Numero di indici
y_axis = zeros(indexvector_size,2) # Tabella dei valori attesi e delle deviazioni standard
M_prime = 0 # Contatore
for (M in index_vector) {
  M_prime = M_prime + 1
  vector_of_values = rep(0,M) # Inizializziamo il vettore dei risultati del Monte Carlo per M fissato
  for (i in 1:M) { # T = M
    vector_of_values[i] = VCallOption_pricingfunction_rand(1,N,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99,M) # Inseriamo i risultati nel vettore
  }
  y_axis[M_prime,1] = mean(vector_of_values) # Compiliamo la tabella dei valori attesi
  y_axis[M_prime,2] = sd(vector_of_values) # Compiliamo la tabella delle deviazioni standard
}

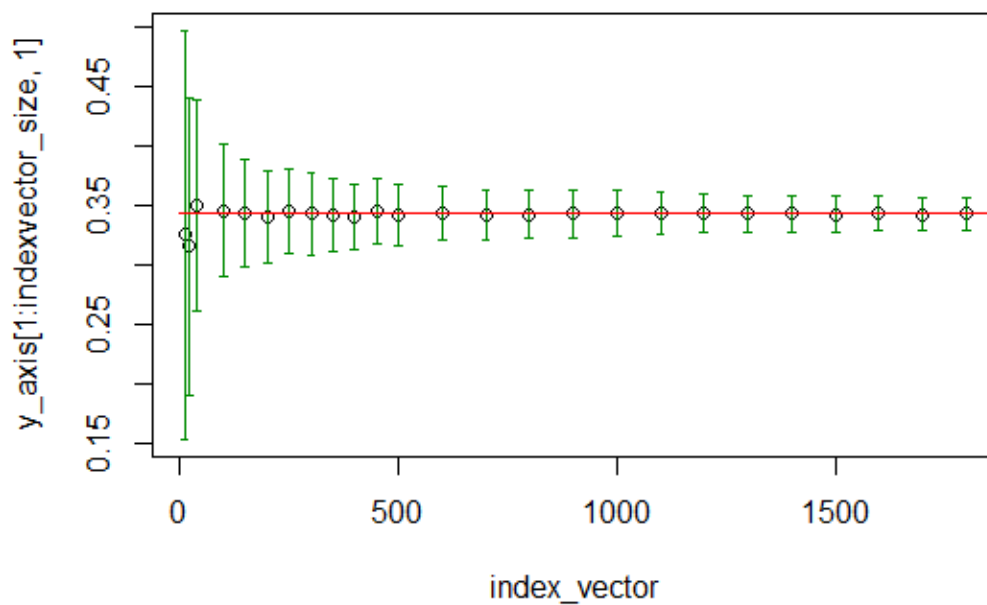
out_lw=y_axis[1:indexvector_size,1]-y_axis[1:indexvector_size,2]
out_up=y_axis[1:indexvector_size,1]+y_axis[1:indexvector_size,2]

ymin=min(out_lw) # estremo inferiore dell'intervallo a 1 deviazione standard
ymax=max(out_up) # estremo superiore dell'intervallo a 1 deviazione standard
plot(index_vector,y_axis[1:indexvector_size,1],ylim=c(ymin,ymax)) # Grafico dei valori attesi del Monte Carlo al variare di M
arrows(index_vector,out_lw,index_vector,out_up,length=0.02,angle=90,code=3,col="green4") # Deviazioni standard del Monte Carlo al variare di M
E = VCallprice_det = VCallOption_pricingfunction_det(1,11,1.05,1/2,-0.3,0.5,0.1,0.99) # Valore Reale dell'opzione
lines(rep(E,2000),col="red") # Linea del valore atteso reale
toc()
```

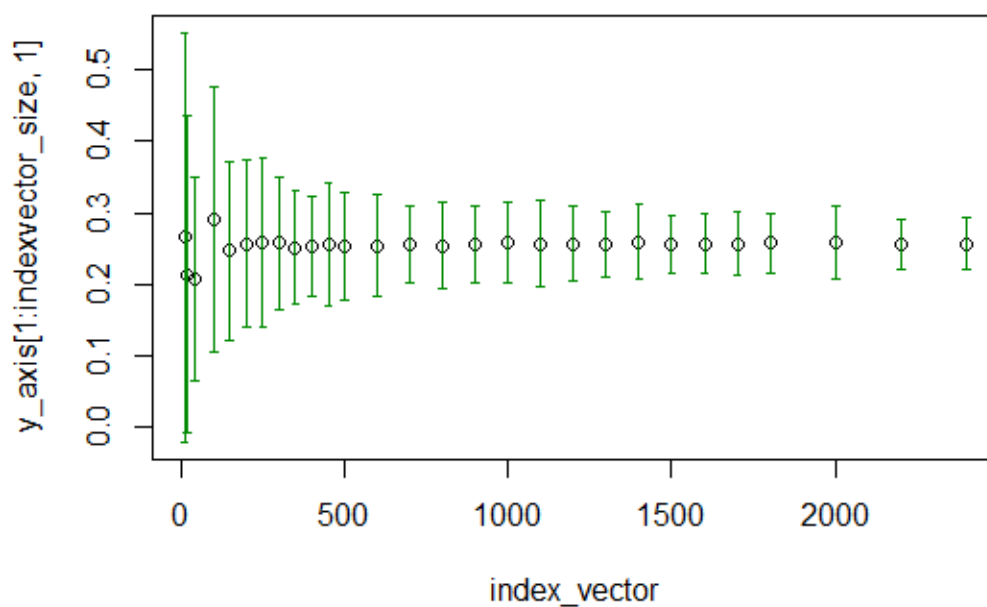
che una volta compilato, realizza i seguenti grafici:



Pricing di un'opzione Europea di tipo Call in cui la difficoltà sia $N = 10$



Pricing di un'opzione Asiatica di tipo Call in cui la difficoltà sia $N = 10$



Pricing di un'opzione Asiatica di tipo Call in cui la difficoltà sia $N = 40$

1. Sull'asse delle X abbiamo i valori di M
2. Sull'asse delle Y abbiamo i valori attesi del Monte Carlo al variare di M

3. Le frecce verdi rappresentano le deviazioni standard del Monte Carlo al variare di M
4. La linea rossa nel grafico rappresenta il prezzo calcolato attraverso la formula deterministica quando possibile

Dal grafico inoltre emergono due importanti informazioni:

1. Il metodo Monte Carlo converge al prezzo reale dell'opzione
2. La dispersione del Monte Carlo attorno a tale valore diminuisce all'aumentare di M

5.6 Conclusione - Quando conviene il Monte Carlo?

Nella nostra analisi, l'approccio deterministico risulta conveniente per il calcolo del prezzo dell'opzione soltanto nel caso delle opzioni Europee di tipo Call/Put, in quanto la formula chiusa può essere implementata in tempi brevi.

Talvolta, come nel caso delle opzioni Asiatiche, è possibile trovare una formula chiusa, ma il calcolo di quest'ultima richiede un tempo che aumenta esponenzialmente all'aumentare della difficoltà N . In questo caso dunque ricorrere a metodi di approssimazione come il Monte Carlo è necessario.

Abbiamo visto che in generale il metodo Monte Carlo converge al valore desiderato con velocità $\frac{1}{\sqrt{T}} + \frac{1}{\sqrt{M}}$, ma all'aumentare di T e di M aumenta la difficoltà nel compilare gli algoritmi per la realizzazione di questo approccio.

Per concludere possiamo dire che in generale non sarà sempre possibile determinare una formula chiusa per calcolare il prezzo di un'opzione secondo la relazione

$$\pi_t(C) = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C \mid \mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, \dots, N,$$

ed è quindi chiaro che in tal caso metodi di approssimazione come il Monte Carlo risultano essere l'unica soluzione e conviene quindi ottimizzarne la velocità di convergenza.

Stima della Volatilità

Nel modello Black-Scholes il parametro della volatilità σ era considerato costante. Nella realtà tale parametro varia con il tempo e dipende da fattori esterni e interni al modello.

Facendo riferimento al famoso articolo [3] Rama Cont *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues* 28 October 2000, presenteremo un'analisi empirica dei dati di mercato per fare delle considerazioni sul parametro σ .

Stimare tale parametro può risultare molto difficile ma risulta essenziale per determinare modelli che siano quanto più vicino possibile alla realtà.

6.1 Volatilità storica

Un primo esempio di stima per il parametro della volatilità è quello della volatilità storica calcolata come segue:

$$\hat{\sigma}_N^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \left(\frac{S_{t_{k+1}} - S_{t_k}}{S_{t_k}} - \hat{\mu}_N (t_{k+1} - t_k) \right)^2.$$

Chiaramente tale stima si basa su dati storici e richiede un gran numero di esempi per essere validata.

6.2 Volatilità implicita

Un fattore determinante quando si parla di volatilità in ambito finanziario consiste nel non poterla misurare direttamente. Questa infatti deve essere stimata utilizzando i dati a nostra disposizione come il prezzo dell'asset volatile, la distanza dallo strike price e la quantità di tempo per portare l'opzione a scadenza.

Questi dati possono essere inseriti nella formula di Black-Scholes presentata precedentemente per ottenere la seguente uguaglianza tra il prezzo per l'opzione Europea di tipo Call ottenuto con il modello di Black-Scholes $C_{BS}(t, S_t; K, T; I)$ e quello effettivo di mercato C_{mkt} :

$$C_{BS}(t, S_t; K, T; I) = C_{mkt}.$$

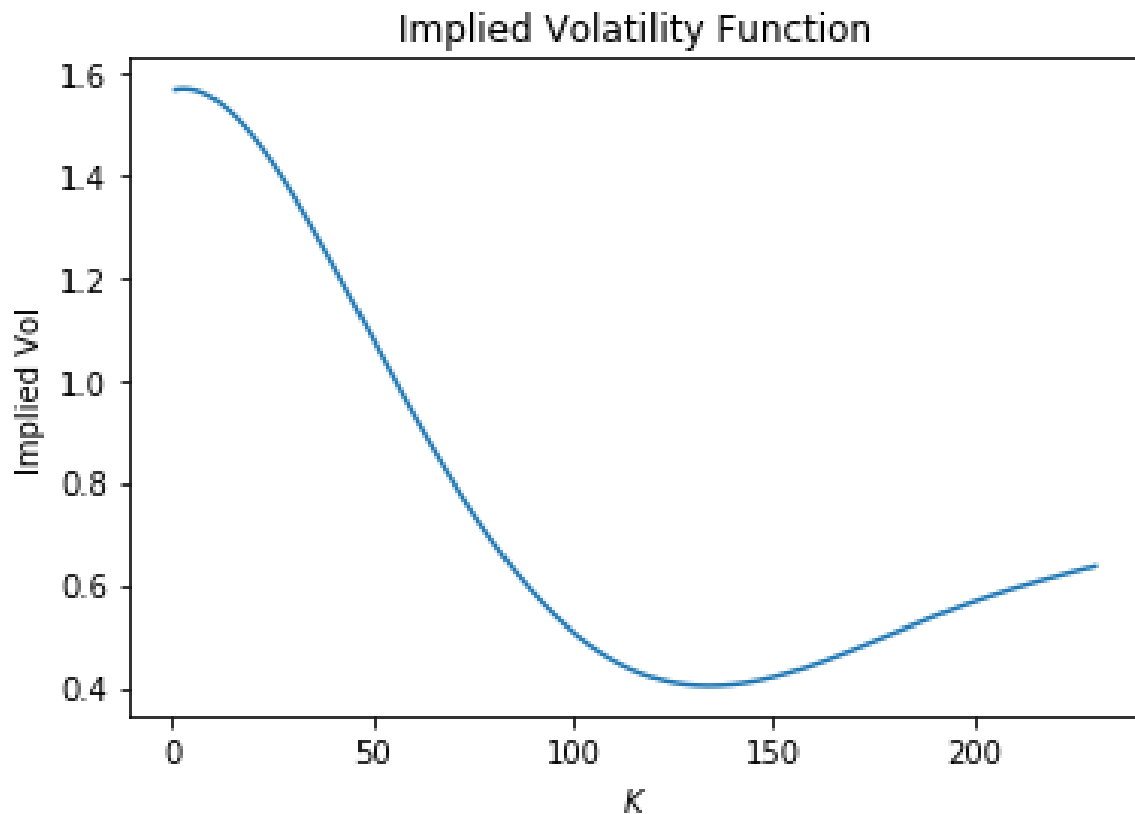
Con I indichiamo la volatilità implicita che va calcolata mentre con t e x rispettivamente l'istante di tempo presente e il prezzo dell'asset al tempo t .

Grazie a questa definizione siamo in grado di tracciare il grafico della volatilità in funzione della distanza dallo strike price. Ciò ci porta alla famosa curva a Smile, nota nella teoria del pricing di opzioni, che fa comprendere l'importanza di non poter mantenere una volatilità costante nei nostri modelli.

6.3 Curva a Smile

Fissando un tempo t e un prezzo per l'asset volatile x , facendo variare lo strike price K e calcolando la volatilità implicita come visto precedentemente, si verifica empiricamente che la volatilità è tanto più alta quanto è la distanza dallo strike price.

Inoltre è evidente un'asimmetria dovuta al fatto che la volatilità è più alta quando lo strike price della nostra opzione Europea di tipo Call è più alto del prezzo attuale di mercato e quindi l'opzione è "Out of the money".



Un tale comportamento, unito ad altri fenomeni come la decrescita della volatilità con l'avvicinamento alla scadenza dell'opzione, ci porta a preferire modelli in cui la volatilità varia nel tempo.

6.4 Dati e Proprietà Statistiche

Presentiamo ora un'analisi empirica dei dati, senza assumere che questi appartengano ad alcun tipo di modello statistico-matematico, per capire meglio il comportamento dei prodotti finanziari che vogliamo replicare.

Per molti anni si è pensato infatti che usare la volatilità implicita fosse sufficiente per avere una stima accurata nel pricing delle opzioni. Tuttavia studi empirici mostrano come un tale approccio sia insufficiente per replicare il comportamento del prezzo di un'opzione e che ci siano alcune informazioni, non presenti nei dati storici, che permettono di calibrare il modello in maniera più accurata.

Dallo studio empirico dei dati a nostra disposizione fino ad oggi, emergono alcune caratteristiche statistiche comuni a differenti assets, anche non correlati tra di loro.

1. **Assenza di autocorrelazione:** l'autocorrelazione nei ritorni di un asset volatile è assente ad eccezione di piccoli fenomeni di autocorrelazione quando si considerano intervalli di tempo "intraday" ($\simeq 20min$).

2. **Code pesanti:** sono presenti eventi di coda che hanno un grosso impatto sul prezzo di un asset volatile e che non possono pertanto essere ignorati. In particolare ciò esclude la possibilità di modellizzazione attraverso distribuzioni con momenti infiniti.
3. **Asimmetria tra profitto e perdita:** si osserva la presenza di grossi cali nel prezzo dei titoli ai quali però non corrispondono uguali aumenti dei prezzi. Ciò rende anche difficile stimare gli effetti delle code delle distribuzioni.
4. **Intermittenza dei ritorni:** è presente una forte intermittenza sui ritorni degli assets volatili. Tale comportamento è caratterizzato dalla presenza di grossi "burst" dei prezzi che avvengono in tempi molto brevi.
5. **Clustering della volatilità:** emerge una forte autocorrelazione della volatilità che permane per diversi giorni. Ciò giustifica il fatto che eventi ad alta volatilità siano raggruppati in "Cluster".
6. **Effetto leva:** risulta esserci una correlazione negativa tra i ritorni di un asset volatile e la sua volatilità. Ciò porta gli investitori a pretendere maggiori garanzie su asset con una volatilità più elevata.

Conoscere questa tipologia di dati ci porta alla ricerca di modelli che abbiano le seguenti caratteristiche:

1. Un valore centrale sul quale sia concentrata la distribuzione come nel caso Gaussiano.
2. Un parametro di scala che misuri la dispersione della distribuzione, nel nostro caso la volatilità.
3. Un parametro che misuri la "pesantezza" delle code della distribuzione.
4. Un'asimmetria nelle code tale che permetta alla coda di sinistra di avere un comportamento diverso dalla coda di destra.

6.5 Clustering della volatilità

Prima di presentare un modello per descrivere il comportamento della volatilità, approfondiamo il fenomeno del Clustering della volatilità.

L'assenza di autocorrelazione sui ritorni di un asset volatile supporta i modelli in cui i ritorni vengono considerati variabili aleatorie indipendenti.

Tuttavia l'assenza di autocorrelazione non implica l'indipendenza delle variabili infatti i dati ci dicono che tale ipotesi non è verificata.

Questo effetto è l'espressione del fenomeno del Clustering della volatilità: grosse variazioni di prezzo sono seguite da variazioni di prezzo altrettanto grandi. Di conseguenza

risulta evidentemente scorretto considerare il ritorno di un asset come una passeggiata aleatoria come avviene nel modello di Black-Scholes.

L'esistenza di questa dipendenza, al contrario dell'assenza di autocorrelazione dei ritorni, è spesso interpretata affermando che esiste una correlazione nella volatilità dei ritorni piuttosto che nei ritorni stessi.

Il nostro compito quindi sarà quello di integrare la presenza di questo fenomeno all'interno del nostro modello. L'obiettivo verrà perseguito introducendo i modelli a volatilità stocastica.

Volatilità Stocastica

Un primo tentativo di correggere il modello di Black-Scholes è quello di supporre che la volatilità sia una funzione deterministica positiva del tempo t e del prezzo dell'asset volatile X_t , i.e. $\sigma = \sigma(t, X_t)$. L'equazione differenziale stocastica che modella il prezzo dell'asset volatile così diventa

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma(t, X_t) X_t dB_t^x$$

e può essere risolta, come fatto precedentemente, sfruttando l'assenza di arbitraggio.

Anche in questo caso continua ad esistere un'unica misura Risk-neutral e pertanto il mercato risulta essere ancora completo.

Il motivo di una tale scelta è che per avere un effetto simile a quello evidenziato dalla Curva Smile, σ deve dipendere sia da x che da t . Nel caso però di una funzione deterministica $\sigma = \sigma(t, X_t)$ quello che si ottiene è una perfetta correlazione negativa con il prezzo dell'asset. Come detto precedentemente però, studi empirici mostrano che non c'è una completa correlazione tra volatilità e asset sottostante.

Questo mostra l'esistenza di una componente propria all'interno della volatilità che ci porta a dover considerare la volatilità come un processo stocastico σ_t .

7.1 Modelli a volatilità stocastica

Risulta evidente la necessità di riformulare il modello come

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dB_t^x,$$

dove σ_t è un processo stocastico positivo non perfettamente correlato con il moto Browniano $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ e che possiede quindi una componente aleatoria indipendente. Un tale modello è detto a volatilità stocastica.

7.2 Modelli "Mean-reverting"

Tipicamente si considera la volatilità come un processo di Itô che soddisfa un'equazione differenziale in cui compare un secondo moto Browniano.

Esistono diversi modelli così costruiti che condividono una caratteristica detta "Mean-reversion". Tale caratteristica è descritta dalla tendenza di un processo a tornare al suo valore medio definito dalla propria distribuzione.

Poniamo $\sigma_t = f(v_t)$, dove f è una funzione positiva e v_t il processo che descrive il comportamento della varianza dell'asset volatile. Un modello Mean-reverting è caratterizzato da un'equazione differenziale stocastica per il processo v_t del tipo

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \dots dB_t^v,$$

Dove $(B_t^v)_{t \geq 0}$ è un moto Browniano correlato a $(B_t^x)_{t \geq 0}$, κ è detto tasso di Mean-reversion e θ è il valore medio di v .

Un esempio di modelli Mean-reverting sono i processi di Feller o Cox-Ingersoll-Ross (CIR) definiti dalla seguente equazione differenziale stocastica per il processo v_t

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \epsilon\sqrt{v_t}dB_t^v.$$

In questi modelli la seconda componente Browniana $(B_t^v)_{t \geq 0}$ è tipicamente correlata al moto Browniano $(B_t^x)_{t \geq 0}$ del prezzo dell'asset volatile.

Per ogni $t \geq 0$ indicheremo con $\rho \in [-1, 1]$ il coefficiente di correlazione tra B_t^x e B_t^v che sarà tipicamente negativo.

Si osserva che la distribuzione di questi modelli ha le caratteristiche che ci aspettavamo, ovvero:

1. Una concentrazione della distribuzione attorno al valore medio grazie alla Mean-reversion
2. Una maggior pesantezza delle code dovuta all'impatto dei "Burst" causati dalla volatilità
3. Un'asimmetria tra la coda sinistra e la coda destra dovuta alla correlazione negativa

Il successo di questa teoria è dovuto al fatto che i modelli a volatilità stocastica per il pricing di opzioni Europee riproducono la curva Smile e per tanto si avvicinano alla realtà empirica dei dati.

7.3 Conclusione sui Modelli a volatilità stocastica

Per concludere questa sezione possiamo riassumere quanto detto nei seguenti aspetti positivi che riguardano i modelli a volatilità stocastica:

1. Modellano in maniera diretta il comportamento aleatorio della volatilità
2. Riproducono distribuzioni più realistiche con code più pesanti delle classiche distribuzioni Gaussiane
3. Evidenziano l'asimmetria caratteristica della volatilità ed in particolare replicano la curva Smile

Non dobbiamo però dimenticare che i modelli a volatilità stocastica non garantiscono l'ipotesi di completezza di mercato e pertanto non tutti i prodotti derivati possono essere replicati con queste strategie, portando gli investitori a richiedere maggiori garanzie.

Modello di Heston

Un caso particolare di questa tipologia di modelli è costituito dal modello di Heston in cui $\rho \neq 0$ e $f(v) = \sqrt{v}$.

In questo capitolo ci occuperemo dello studio e della calibrazione del modello di Heston. Infine studieremo varie tecniche di discretizzazione del modello e le applicheremo per calcolare il prezzo di un'opzione Europea di tipo Call.

Il modello di Heston approssima la curva Smile con ottima precisione tuttavia non garantisce la non-negatività della varianza che può talvolta essere 0 rendendo, in tali casi, il processo deterministico. Tuttavia, trattandosi di un processo Mean-reverting, la varianza rimane uguale a 0 solo per brevi istanti di tempo, di fatto causando un errore ragionevole nel modello.

Diamo ora una definizione formale del modello di Heston:

Definizione 8.1. Il modello di Heston è descritto dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_t^s, \\ dv_t &= \kappa (\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} dB_t^v. \end{aligned}$$

dove

$$dB_t^s = dW_t^s \quad \& \quad dB_t^v = \rho dW_t^s + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^v$$

Osserviamo che v_t , definito dai parametri κ , θ , e ε , è un processo CIR.

In questo modello $\kappa, \theta, \varepsilon \geq 0$ mentre W_t^s e W_t^v sono due moti Browniani indipendenti. Per ogni $t \geq 0$ indicheremo con $\rho \in [-1, 1]$ il coefficiente di correlazione tra la componente stocastica del processo dell'asset volatile e quella del processo della volatilità.

Ricordiamo che S_t indica il prezzo dell'asset sottostante al tempo t , e v_t il processo della varianza.

Il parametro κ misura la velocità con cui v_t torna al suo valore medio θ , ε rappresenta la volatilità della volatilità e μ è detto termine di Drift e rappresenta l'intensità con cui cambia il valore del processo dell'asset volatile.

8.1 Condizione di Feller

Facendo riferimento al capitolo 5 del libro [4], analizziamo le condizioni per cui il processo stocastico v_t sia maggiore di zero supponendo $v_0 > 0$.

8.1.1 Il caso generale

Supponiamo di avere un processo a valori in $I = (\ell, r)$ con $-\infty \leq \ell < r \leq \infty$, definito dalla seguente equazione differenziale stocastica

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t^x$$

dove $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni Borel-misurabili. La soluzione a questa equazione differenziale stocastica potrebbe non esistere globalmente bensì potrebbe essere caratterizzata da fenomeni di Break-down o Blow-up in tempi finiti.

Supponiamo che valgano le seguenti condizioni di Non Degenerazione (**ND**) e Locale Integrabilità (**LI**)

$$(\mathbf{ND}) \quad \sigma^2(x) > 0; \quad \forall x \in I$$

$$(\mathbf{LI}) \quad \forall x \in I, \exists \varepsilon > 0 \text{ t. c. } \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1 + |b(y)| dy}{\sigma^2(y)} < \infty$$

e definiamo la seguente funzione di scala

$$p(x) \triangleq \int_c^x \exp \left\{ -2 \int_c^\xi \frac{b(\zeta) d\zeta}{\sigma^2(\zeta)} \right\} d\xi; \quad x \in I$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Estendiamo p a $[-\infty, \infty]$ cosicché la nuova funzione definita sia continua sulla topologia estesa dei numeri reali.

Osserviamo che p dipende da c , tuttavia lo scopo di questa funzione è quello di determinare il comportamento di X_t sui bordi dell'intervallo I e in [4] si dimostra che il parametro c non influisce sull'analisi di tale comportamento.

Indichiamo ora con

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t \notin (\ell, r)\}$$

l'istante di tempo in cui il processo X_t esce fuori dall'intervallo I e assumiamo che $X_0 \in I$ cosicché $P[\tau > 0] = 1$.

La proposizione 5.22 in [4] descrive le relazioni tra il comportamento della funzione p e del processo stocastico X_t agli estremi dell'intervallo $I = (\ell, r)$, in particolare valgono le seguenti relazioni:

1. Se $p(\ell+) = -\infty$ e $p(r-) = \infty$, allora

$$P[\tau = \infty] = P\left[\sup_{0 \leq t < \infty} X_t = r\right] = P\left[\inf_{0 \leq t < \infty} X_t = \ell\right] = 1.$$

2. Se $p(\ell+) > -\infty$ e $p(r-) = \infty$, allora

$$P\left[\lim_{t \uparrow \tau} X_t = \ell\right] = P\left[\sup_{0 \leq t < \tau} X_t < r\right] = 1.$$

3. Se $p(\ell+) = -\infty$ e $p(r-) < \infty$, allora

$$P\left[\lim_{t \uparrow \tau} X_t = r\right] = P\left[\inf_{0 \leq t < \tau} X_t > \ell\right] = 1.$$

4. Se $p(\ell+) > -\infty$ e $p(r-) < \infty$

$$P\left[\lim_{t \uparrow \tau} X_t = \ell\right] = 1 - P\left[\lim_{t \uparrow \tau} X_t = r\right] = \frac{p(r-) - p(\ell+)}{p(r-) - p(\ell+)}.$$

8.1.2 Condizione di Feller nel modello di Heston

Nel modello di Heston il processo stocastico v_t è definito dall'equazione differenziale stocastica

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \varepsilon\sqrt{v_t}dB_t^v.$$

In analogia con quanto presentato precedentemente cerchiamo di individuare la condizione che garantisca la non-negatività di v_t supponendo che $v_0 > 0$.

Siano

$$I = (0, +\infty), \quad b(v_t) = \kappa(\theta - v_t), \quad \sigma(v_t) = \varepsilon\sqrt{v_t}, \quad \tau = \inf\{t \geq 0 : v_t \notin (0, +\infty)\}$$

da cui, posto $c = 1$, otteniamo

$$p(v) \triangleq \int_1^v \exp\left\{-2 \int_1^\xi \frac{b(\zeta)d\zeta}{\sigma^2(\zeta)}\right\} d\xi; \quad v \in I.$$

Facendo riferimento alla proposizione 5.22 in [4] precedentemente presentata, affinché $v_t > 0$ è necessario che $p(\ell+) = -\infty$.

Ciò si riduce nell'individuare delle condizioni sui parametri $\kappa, \theta, \varepsilon \geq 0$ affinché valga

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) = -\infty$$

Semplifichiamo prima il termine

$$\exp \left\{ -2 \int_1^\xi \frac{b(\zeta) d\zeta}{\sigma^2(\zeta)} \right\} d\xi$$

svolgendo i seguenti conti

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -2 \int_1^\xi \frac{\kappa (\theta - \zeta) d\zeta}{\varepsilon^2 \zeta} \right\} \\ &= \exp \left\{ -2 \left(\frac{\kappa \theta}{\varepsilon^2} \int_1^\xi \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\kappa}{\varepsilon^2} \int_1^\xi d\zeta \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -2 \left(\frac{\kappa \theta}{\varepsilon^2} [\log(\zeta)]_1^\xi - \frac{\kappa}{\varepsilon^2} [\zeta]_1^\xi \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -2 \left(\frac{\kappa \theta}{\varepsilon^2} [\log(\xi)] - \frac{\kappa}{\varepsilon^2} [\xi - 1] \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \left(\frac{2\kappa(\xi - 1) - 2\kappa\theta \log(\xi)}{\varepsilon^2} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \left(\frac{2\kappa\xi - 2\kappa\theta \log(\xi) - 2\kappa}{\varepsilon^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo questa catena di doppie implicazioni

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) &= \lim_{v \rightarrow 0^+} - \int_v^1 \exp \left\{ \left(\frac{2\kappa\xi - 2\kappa\theta \log(\xi) - 2\kappa}{\varepsilon^2} \right) \right\} d\xi = -\infty \\ &\iff \\ \lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) &= \lim_{v \rightarrow 0^+} \int_v^1 \exp \left\{ \left(\frac{2\kappa\xi - 2\kappa\theta \log(\xi) - 2\kappa}{\varepsilon^2} \right) \right\} d\xi = \infty \\ &\iff \\ \lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) &= \lim_{v \rightarrow 0^+} \int_v^1 \exp \left\{ \left(\frac{2\kappa\xi - 2\kappa}{\varepsilon^2} \right) \right\} \exp \left\{ \left(\frac{-2\kappa\theta \log(\xi)}{\varepsilon^2} \right) \right\} d\xi = \infty \\ &\iff \\ \lim_{v \rightarrow 0^+} p(v) &= \lim_{v \rightarrow 0^+} \int_v^1 c(\xi) \xi^{\frac{-2\kappa\theta}{\varepsilon^2}} d\xi = \infty \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale in particolare per $\frac{-2\kappa\theta}{\varepsilon^2} \leq -1$ da cui si ottiene la condizione di Feller per il nostro problema ovvero $2\kappa\theta \geq \varepsilon^2$.

Se v raggiunge lo zero la varianza è nulla, da cui il processo del prezzo dell'asset è deterministico. La calibrazione del modello talvolta può restituire parametri per cui un tale

fenomeno avviene.

In ogni caso, essendo il processo Mean-reverting, si ha sempre un'inversione, quindi la volatilità è nulla solo per brevi istanti di tempo.

8.2 Discretizzazione del modello di Heston

Per poter calcolare il prezzo di un'opzione Europea di tipo Call una possibile soluzione consiste nell'utilizzare il metodo Monte Carlo per approssimare

$$C(S_T, t, T, K) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)], \quad 0 \leq t \leq T,$$

Dove con \mathbb{Q} indichiamo la misura Risk-neutral.

Per applicarlo tuttavia è necessario discretizzare il processo a tempi continui e per farlo presenteremo 2 modelli di discretizzazione che useremo in seguito per calibrare il modello di Heston.

8.2.1 Schema di discretizzazione di Eulero-Maruyama

Il primo schema che presentiamo è lo schema di discretizzazione di Eulero-Maruyama. Per ottenerlo è sufficiente applicare l'espansione di Taylor al primo ordine.

Data una funzione h che ammette derivata prima e fissato un intervallo di tempo discreto Δ , otteniamo la seguente relazione

$$h(t + \Delta) = h(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(t)\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

Applicando questo schema al modello di Heston

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_t^s, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} dB_t^v, \end{aligned}$$

che possiamo pensare in notazione integrale

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} &= S_t + \int_t^{t+\Delta} \mu S_u du + \int_t^{t+\Delta} \sqrt{v_t} S_t dB_u^s, \\ v_{t+\Delta} &= v_t + \int_t^{t+\Delta} \kappa(\theta - v_u) du + \int_t^{t+\Delta} \varepsilon \sqrt{v_u} dB_u^v \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} &= S_t + \mu S_t \Delta + \sqrt{v_t} \Delta S_t \hat{Z}_t^s \\ v_{t+\Delta} &= v_t + \kappa(\theta - v_t) \Delta + \varepsilon \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^v \end{aligned}$$

dove, conoscendo dalla definizione di moto Browniano la validità della relazione $B_{t+\Delta} - B_t = \sqrt{\Delta} \hat{Z}_t$ con \hat{Z}_t Gaussian Standard, possiamo definire

$$\hat{Z}_t^s = Z_t^s \quad \& \quad \hat{Z}_t^v = \rho Z_t^s + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^v$$

Gaussian Standard con correlazione ρ costruite con due Gaussian Standard indipendenti Z_t^s e Z_t^v .

Qualora la condizione di Feller non fosse verificata ricordiamo che v_t può essere negativa per cui calcolarne la radice causerebbe problemi. Per evitare un tale fenomeno possiamo sostituire $v_{t+\Delta}$ con $v_{t+\Delta}^+ = \max(v_{t+\Delta}, 0)$. Chiaramente questa modifica può essere applicata allo schema di Eulero-Maruyama così come a tutti gli altri schemi di discretizzazione.

Ricordiamo che nel nostro caso, l'ordine di convergenza di un algoritmo misura la velocità con cui il valore atteso del modulo della differenza tra la soluzione reale e quella numerica converge a 0. Per lo schema di discretizzazione di Eulero-Maruyama l'ordine di convergenza è $\frac{1}{2}$.

8.2.2 Schema di discretizzazione di Milstein

Il secondo schema che presentiamo è quello di Milstein. In questo schema verrà sfruttata la formula di Itô per espandere i termini $\mu(S_t, t)$ e $\sigma(S_t, t)$.

Consideriamo il generico processo dell'asset volatile

$$dS_t = \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dB_t,$$

che formalmente possiamo scrivere come

$$S_{t+\Delta} = S_t + \int_t^{t+\Delta} \mu(S_s, s) ds + \int_t^{t+\Delta} \sigma(S_s, s) dB_s.$$

Applicando la formula di Itô a μ e σ otteniamo

$$d\mu = \left(\frac{\partial \mu(S_u, u)}{\partial S_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu(S_u, u)}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial \mu(S_u, u)}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dB_t$$

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma(S_u, u)}{\partial S_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(S_u, u)}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial \sigma(S_u, u)}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dB_t.$$

le derivate rispetto a t sono nulle, poichè stiamo supponendo che non ci sia dipendenza dal

tempo, i.e. $\mu = \mu(S_t)$ e $\sigma = \sigma(S_t)$. Combinando questi risultati otteniamo

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} = S_t &+ \int_t^{t+\Delta} \left[\mu(S_t, t) + \int_t^s \left(\frac{\partial \mu(S_u, u)}{\partial S_u} \mu(S_u, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu(S_u, u)}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) \right) du \right. \\ &+ \left. \int_t^s \frac{\partial \mu(S_u, u)}{\partial S_t} \sigma(S_u, u) dB_u \right] ds + \int_t^{t+\Delta} \left[\sigma(S_t, t) + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma(S_u, u)}{\partial S_t} \mu(S_u, u) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(S_u, u)}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) \right) du + \int_t^s \frac{\partial \sigma(S_u, u)}{\partial S_t} \sigma(S_u, u) dB_u \right] dB_s \end{aligned}$$

A questo punto ignorando i termini di ordine maggiore di 1 otteniamo

$$S_{t+\Delta} = S_t + \mu(S_t, t) \int_t^{t+\Delta} ds + \sigma(S_t, t) \int_t^{t+\Delta} dB_s + \int_t^{t+\Delta} \int_t^s \frac{\partial \sigma}{\partial S_u} \sigma(S_u, u) dB_u dB_s.$$

Osserviamo che il termine $dB_u dB_s$ rimane, dato che $dB_u dB_s = \mathcal{O}(\Delta)$ è di ordine 1.

Sfruttiamo ora il lemma di Itô

$$\int_t^{t+\Delta} B_s dB_s = \frac{1}{2} B_{t+\Delta}^2 - \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \Delta$$

da cui sostituendo nella formula precedente otteniamo

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta} \int_t^s \frac{\partial \sigma}{\partial S_u} \sigma(S_u, u) dB_u dB_s &\approx \frac{\partial \sigma}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) \int_t^{t+\Delta} \int_t^s dB_u dB_s \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) \int_t^{t+\Delta} (B_s - B_t) dB_s \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) \left(\left(\int_t^{t+\Delta} B_s dB_s \right) - B_t B_{t+\Delta} + B_t^2 \right) \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) \frac{1}{2} ((B_{t+\Delta} - B_t)^2 - \Delta) \end{aligned}$$

Possiamo allora riscrivere la relazione come

$$S_{t+\Delta} = S_t + S_t \mu_t \Delta + \sigma(S_t, t) \sqrt{\Delta} Z_t + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) \Delta (Z_t^2 - 1).$$

La precisione di questo modello è maggiore rispetto a quella utilizzata nello schema di discretizzazione di Eulero-Maruyama grazie all'espansione dei termini μ e σ .

Applicando questa tecnica al modello bidimensionale di Heston

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_t^s, \\ dv_t &= \kappa (\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} dB_t^v, \end{aligned}$$

otteniamo le seguenti relazioni esplicite per $S_{t+\Delta}$ e $v_{t+\Delta}$:

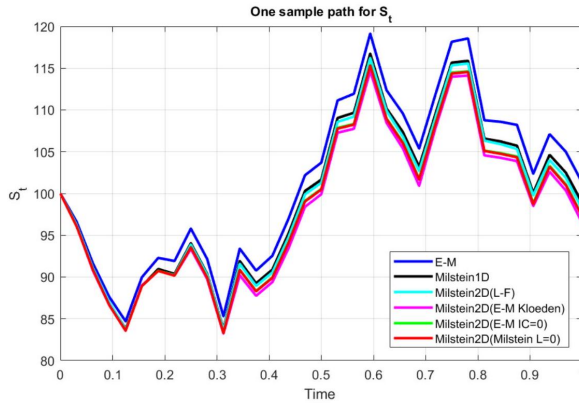
$$\begin{aligned}
S_{t+\Delta} &= S_t + \mu S_t \Delta + S_t \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^s + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon S_t I_{(2,1);t} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} S_t \Delta v_t + \frac{1}{4} \rho \varepsilon S_t \Delta \right) \left((\hat{Z}_t^s)^2 - 1 \right) \\
v_{t+\Delta} &= v_t + \kappa (\theta - v_t) \Delta + \varepsilon \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^v \\
&\quad + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \Delta \left((\hat{Z}_t^v)^2 - 1 \right)
\end{aligned}$$

Il termine $I_{(2,1);t}$ deriva dal doppio integrale stocastico

$$I_{(2,1)}[t, t + \Delta] = \int_t^{t+\Delta} \int_t^k dB_l^s dB_k^v$$

che però non può essere espresso sfruttando le componenti Gaussiane Standard correlate \hat{Z}_t^s e \hat{Z}_t^v come nel caso unidimensionale, nè se ne conosce la distribuzione.

Tale problema è affrontato nel dettaglio in [5] dove viene altresì eseguita un'analisi dettagliata delle differenze, in termini di precisione e velocità di convergenza, tra lo schema di Eulero-Maruyama e lo schema di Milstein, che è possibile visualizzare nei seguenti dati estrapolati da [5].



Methods	$\log(C)$ γ		$\log(C)$ γ	
	Asset Price S_T		Variance v_T	
E-M	2.0246	0.5206	-4.1083	0.8475
Milstein1D	1.7387	0.6058	-3.8249	1.0025
Milstein2D(L-F)	1.8918	0.5685	-3.8249	1.0025
Milstein2D(E-M Kloeden)	1.8667	0.5571	-3.8249	1.0025
Milstein2D(E-M IC = 0)	2.3461	1.0385	-3.8249	1.0025
Milstein2D(Milstein L = 0)	2.3617	1.0441	-3.8249	1.0025
Methods	Call Options V_T		Put Options V_T	
E-M	1.3511	0.4942	1.3196	0.5537
Milstein1D	1.1647	0.5993	0.9090	0.6143
Milstein2D(L-F)	1.1966	0.5402	1.2081	0.6022
Milstein2D(E-M Kloeden)	1.2164	0.5419	1.1319	0.5756
Milstein2D(E-M IC = 0)	1.8064	1.0463	1.4727	1.0283
Milstein2D(Milstein L = 0)	1.8391	1.0564	1.4667	1.0282

Riportiamo tali dati per giustificare la scelta di utilizzare Milstein unidimensionale piuttosto che quello bidimensionale. Dalla prima immagine si nota infatti che, all'aumentare degli istanti di tempo N , la differenza tra i vari schemi di Milstein implementati in [5] è meno evidente in termini di precisione rispetto a quella presente tra gli schemi di Milstein e di Eulero-Maruyama.

Inoltre la seconda tabella ci mostra che l'ordine di convergenza γ è sempre migliore nello schema di Milstein rispetto a quello di Eulero-Maruyama, tuttavia è necessario implementare algoritmi ottimizzati, come quelli studiati in [5], per raggiungere un ordine 1 di convergenza.

In conclusione quello che andremo a fare in questo studio sarà ignorare la variazione stocastica di v_t in S_t andando quindi a utilizzare il caso unidimensionale dello schema di Milstein.

Le relazioni per $S_{t+\Delta}$ e $v_{t+\Delta}$ nel caso unidimensionale sono:

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} &= S_t + \mu S_t \Delta + S_t \sqrt{v_t \Delta} \hat{Z}_t^s + \frac{1}{2} S_t \Delta v_t \left((\hat{Z}_t^s)^2 - 1 \right) \\ v_{t+\Delta} &= v_t + \kappa (\theta - v_t) \Delta + \varepsilon \sqrt{v_t \Delta} \hat{Z}_t^v + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \Delta \left((\hat{Z}_t^v)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

Osserviamo che i risultati ottenuti sono simili a quelli ottenuti con lo schema di Eulero-Maruyama eccetto che per la presenza di un termine ulteriore che ne migliora l'accuratezza.

8.3 Calibrazione del modello di Heston

Prima di poter utilizzare il modello per calcolare il prezzo di un'opzione Europea, è necessario conoscere i parametri da inserire al suo interno. Questi ultimi possono essere ricavati dai dati di mercato; il modello deve dunque essere calibrato.

Dato che i prezzi di mercato sono noti, l'idea sarà quella di confrontare tali prezzi con quelli ottenuti con il modello di Heston facendo variare i parametri e minimizzando la distanza quadratica tra il prezzo dell'opzione stimato e quello reale.

Rispetto alla misura Risk-neutral \mathbb{Q} , vale la seguente relazione che andremo ad approssimare con il metodo Monte Carlo

$$C(S_0, S_T, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

Facendo ora variare i parametri $\theta = (\kappa, \theta, \varepsilon, \mu, \rho, v_0)$ e analizzando un numero pari ad I di opzioni Europee di tipo Call, possiamo minimizzare la funzione di errore

$$\min_{\theta \in \Theta} E(\theta) = \sum_{i=1}^I \left(C^i(S_0, T^i, K^i, \theta) - C_{mkt}^i(S_0, T^i, K^i) \right)^2,$$

dove abbiamo indicato con Θ l'insieme di tutti i parametri.

Una volta ottenuto $\hat{\theta} \in \Theta$ che realizza $\min_{\theta \in \Theta} E(\theta)$, questo sarà espressione delle caratteristiche intrinseche del sottostante sul quale è basato il nostro prodotto derivato. Possiamo quindi utilizzare i parametri ottenuti nel modello di Heston per calcolare il prezzo di un prodotto derivato sullo stesso sottostante.

Presentiamo ora un'analisi degli algoritmi e dei risultati sulla calibrazione del modello, ottenuti in questo studio.

8.3.1 Algoritmi e Risultati

Il primo obiettivo che ci poniamo è quello di poter calcolare la seguente quantità

$$C(S_0, S_T, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

Come prima cosa ricordiamo che la misura Risk-Neutral \mathbb{Q} può essere ottenuta sfruttando il teorema di Girsanov applicato al modello bidimensionale di Heston.

Nel modello valgono le seguenti relazioni

$$dB_t^s = dW_t^s \quad \& \quad dB_t^v = \rho dW_t^s + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^v$$

e definiamo quello che si chiama nucleo di Girsanov rispetto al quale andremo a costruire \mathbb{Q}

$$d\tilde{W}_t^s = dW_t^s + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt \quad \& \quad d\tilde{W}_t^v = dW_t^v + \phi(t, S_t, v_t) dt$$

dove $\phi(t, S_t, v_t)$ è da determinare e per farlo osserviamo la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa (\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} dB_t^v \\ &= \kappa (\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} \left(\rho (d\tilde{W}_t^s - \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt) \right) + \varepsilon \sqrt{v_t} \left(\sqrt{1 - \rho^2} (d\tilde{W}_t^v - \phi(t, S_t, v_t) dt) \right) \\ &= \kappa (\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} (\rho d\tilde{W}_t^s + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}_t^v) + \varepsilon \sqrt{v_t} \left(-\rho \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} - \sqrt{1 - \rho^2} \phi(t, S_t, v_t) \right) dt \\ &= \kappa (\theta - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} (\rho d\tilde{W}_t^s + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}_t^v) + \lambda(t, S_t, v_t) dt \end{aligned}$$

Rifacendoci alla teoria presentata da Heston in [6], poniamo $\lambda(t, S_t, v_t) \triangleq \lambda v_t$, con λ coefficiente di Risk-Premium della varianza da determinare, cosicché v_t e s_t abbiano la stessa distribuzione rispetto ad entrambe le misure \mathbb{Q} e \mathbb{P} . Così facendo possiamo ottenere $\phi(t, S_t, v_t)$, \mathbb{Q} e le seguenti equazioni del modello di Heston rispetto a \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} dS_t &= r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\tilde{W}_t^s \\ dv_t &= \kappa' (\theta' - v_t) dt + \varepsilon \sqrt{v_t} d\tilde{W}_t^v \end{aligned}$$

dove $\kappa' = \kappa + \lambda$, $\theta' = \frac{\kappa \theta}{\kappa + \lambda}$ e i nuovi parametri da considerare saranno della forma $\theta = (\kappa, \theta, \varepsilon, \lambda, \rho, v_0)$. Essendo \tilde{W}_t^s e \tilde{W}_t^v due moti Browniani Standard rispetto alla misura \mathbb{Q} ottenuta dal teorema di Girsanov, possiamo riscrivere le equazioni dello schema di discretizzazione di Eulero

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} &= S_t + r S_t \Delta + S_t \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^s \\ v_{t+\Delta} &= v_t + \kappa' (\theta' - v_t) \Delta + \varepsilon \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^v \end{aligned}$$

e dello schema di discretizzazione Milstein unidimensionale

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} &= S_t + r S_t \Delta + S_t \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^s + \frac{1}{2} S_t \Delta v_t \left((\hat{Z}_t^s)^2 - 1 \right) \\ v_{t+\Delta} &= v_t + \kappa' (\theta' - v_t) \Delta + \varepsilon \sqrt{v_t} \Delta \hat{Z}_t^v + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \Delta \left((\hat{Z}_t^v)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

con \hat{Z}_t^s e \hat{Z}_t^v Gaussian Standard con correlazione ρ .

Grazie a questi schemi di discretizzazione siamo in grado di generare S_T a partire da S_0 sfruttando il seguente algoritmo

```

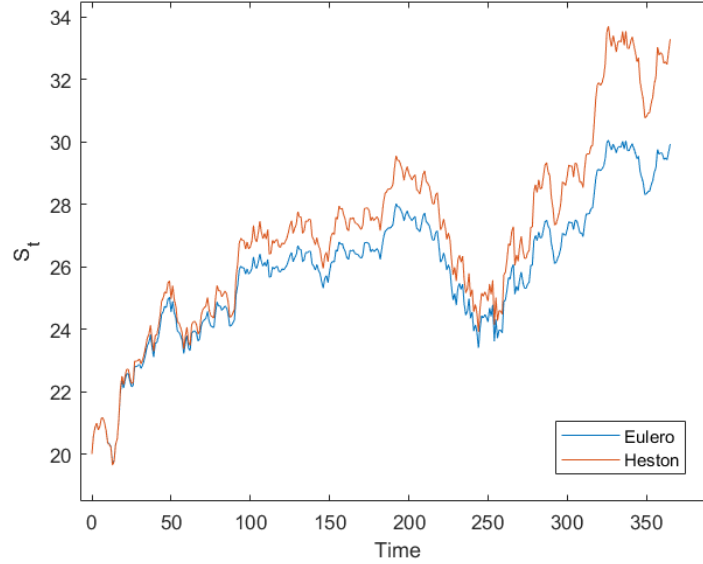
1 function [S_Euler,S_Milstein] = Discretizzazione(k,theta,
    epsilon,lambda,rho,v,r,S,T)
2 % v il valore iniziale della varianza
3 % k il tasso di Mean-Reversion
4 % theta valore medio della varianza
5 % lambda coefficiente Risk-Premium della varianza
6 % r il tasso di interesse del Risk-Free asset
7 % T il numero di intervalli da considerare
8 delta = 1/T;
9 S_Euler = S; % S_T - Schema di Eulero
10 S_Milstein = S; % S_T - Schema di Milstein % S il prezzo
    iniziale
11 vE = v;
12 vM = v;
13 B_s = normrnd(0,1,T,1);
14 B_v = normrnd(0,1,T,1);
15 Z_s = B_s;
16 Z_v = rho*Z_s + sqrt(1-(rho^2))*B_v;
17 % Calcolo di S_T con lo Schema di Eulero rispetto a Q
18 for j = 1:T
19 S_Euler = S_Euler + r*S_Euler*delta + S_Euler*sqrt(vE*delta)
    *Z_s(j);
20 vE = max((vE + (k*theta - (k+lambda)*vE)*delta + epsilon*
    sqrt(vE*delta)*Z_v(j)),0);
21 end
22 % Calcolo di S_T con lo Schema di Milstein rispetto a Q
23 for j = 1:T
24 S_Milstein = S_Milstein + r*S_Milstein*delta + S_Milstein*
    sqrt(vM*delta)*Z_s(j) + (0.5*S_Milstein*delta*vM)*((Z_s(j)
    ^2)-1);
25 vM = max((vM + (k*theta - (k+lambda)*vE)*delta + epsilon*
    sqrt(vM*delta)*Z_v(j) + (0.25*(epsilon^2)*delta)*((Z_v(j)
    ^2)-1)),0);
26 end
27 end

```

Fissiamo per esempio $\bar{\theta} = (3, 0.05, 0.3, 0.03, -0.8, 0.1)$, scegliamo una scadenza ad un

anno $T = 365$, un prezzo iniziale $S = 20\$$ e un tasso di interesse annuo del 3.717% che coincide con un tasso giornaliero $r = 0.01\%$.

Con questi dati siamo in grado di calcolare una traiettoria per S_t come quella del grafico che segue



Facendo 100 simulazioni, sfruttando il metodo Monte Carlo con una precisione $M = 10000$, e prendendone il valore medio e la deviazione standard otteniamo i seguenti risultati:

Euler Mean Value S_T	Milstein Mean Value S_T	Euler Std S_T	Milstein Std S_T
20.0004 \$	21.3625 \$	0.0460	0.0583

A questo punto possiamo calcolare

$$C(S_0, S_T, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

sfruttando il metodo Monte Carlo.

Come in precedenza, facendo 100 simulazioni con gli stessi parametri, otteniamo i seguenti risultati per $C(S_0, S_T, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$

Euler Mean Value C	Milstein Mean Value C	Euler Std C	Milstein Std C
9.6636 \$	10.9869 \$	0.0451	0.0548

Mostriamo ora che siamo in grado di approssimare il parametro $\hat{\theta} = (\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{v}_0)$ che realizza $\min_{\theta \in \Theta} (C(S_0, T, K, \theta) - C_{mkt}(S_0, T, K))$. Ci stiamo infatti chiedendo se dato un prezzo di mercato per il prodotto derivato, siamo in grado di determinare quei parametri che descrivono un comportamento del sottostante tale da giustificare il prezzo dell'opzione sul mercato.

Per farlo utilizzeremo la funzione *lsqnonlin* di MATLAB e gli schemi di discretizzazione per minimizzare il problema regolarizzato $\min_{\theta \in \Theta} (C(S_0, T, K, \theta) - C_{mkt}(S_0, T, K)) + \alpha \|\theta\|_2^2$

dove α è un parametro di regolarizzazione che in questo esempio sarà $\alpha = 0.0001$. Di seguito presentiamo gli algoritmi che verranno utilizzati.

Schema di discretizzazione di Eulero

```

1 function Parameters = function Parameters =
    Error_function_Euler(k,theta,epsilon,lambda,rho,v,r,S,T,M,
    strike,mkt_prices,alpha)
2 p_0 = [k,theta,epsilon,lambda,rho,v];
3 options.FunctionTolerance = 5e-2;
4 Parameters = lsqnonlin(@nestedfun,p_0,[0,0,0,-1,-1,0],[Inf,
    Inf,Inf,1,1,Inf],options);
5 function Price_error_Euler = nestedfun(p)
6 rng(4);
7 [E_Recursive_sum,~] = MonteCarlo(p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p
    (6),r,S,T,strike,M);
8 Price_error_Euler = [E_Recursive_sum-mkt_prices,alpha.*p];
9 end
10 end

```

Schema di discretizzazione di Milstein

```

1 function Parameters = Error_function_Milstein(k,theta,
    epsilon,lambda,rho,v,r,S,T,M,strike,mkt_prices,alpha)
2 p = [k,theta,epsilon,lambda,rho,v];
3 options.FunctionTolerance = 5e-2;
4 Parameters = lsqnonlin(@nestedfun,p,[0,0,0,-1,-1,0],[Inf,Inf
    ,Inf,1,1,Inf],options);
5 function Price_error_Milstein = nestedfun(p)
6 rng(4);
7 [~,M_Recursive_sum] = MonteCarlo(p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p
    (6),r,S,T,strike,M);
8 Price_error_Milstein = [M_Recursive_sum-mkt_prices,alpha.*p
    ];
9 end
10 end

```

Costruiamo un esempio che mostri la correttezza degli algoritmi. Supponiamo di avere i seguenti parametri $\hat{\theta} = (\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{v})$ che rappresentano le caratteristiche intrinseche dell'asset volatile su cui è basato il nostro prodotto derivato.

Supponiamo che con queste caratteristiche il prezzo di mercato $C_{mkt}(S_0, T, K)$ per l'opzione Europea di tipo Call con $S_0 = 20$, $T = 365$ e $K = 10$ fissati, sia circa $C = 15\$$.

Utilizziamo i parametri dell'esempio precedente nell'algoritmo sapendo che questi realizzavano un valore $C = 10\$$ e pertanto sono lontani da $\hat{\theta}$. Quello che ci aspettiamo è che il problema di minimizzazione ci restituisca dei parametri $\tilde{\theta}$ che siano in grado di replicare in maniera più fedele il prezzo $C = 15\$$.

Con questi dati iniziali, gli algoritmi *Error_function_Euler* e *Error_function_Milstein*, restituiscono i seguenti parametri:

$$\tilde{\theta}_{Euler} = (3.12, 5.35, 4.65, -0.43, -0.58, 3.02)$$

$$\tilde{\theta}_{Milstein} = (1.84, 0.93, 0.96, -0.02, -0.92, 0.51)$$

Facendo 100 simulazioni, sfruttando il metodo Monte Carlo con una precisione $M = 10000$, e prendendone il valore medio e la deviazione standard otteniamo i seguenti risultati per S_T

Euler Mean Value S_T	Milstein Mean Value S_T	Euler Std S_T	Milstein Std S_T
19.9655 \$	25.1676 \$	0.7043	0.1511

Osserviamo da subito che la deviazione standard è nettamente maggiore. Questo comportamento meno stabile è proprio quello che cercavamo, esso infatti giustificerebbe il valore maggiore del prezzo di mercato per l'opzione C rispetto a quello individuato nell'esempio iniziale. Ricordiamoci infatti che i prodotti che stiamo andando a prezzare sono strumenti di copertura contro la volatilità dei mercati.

Con questi nuovi parametri otteniamo i seguenti risultati per il prezzo di $C(S_0, S_T, T, K)$:

Euler Mean Value C	Milstein Mean Value C	Euler Std C	Milstein Std C
15.0595 \$	15.1280 \$	0.6699	0.1411

L'algoritmo ha pertanto trovato un parametro $\tilde{\theta}$ che sia in grado di approssimare con buona precisione un comportamento di S_t che giustifichi il prezzo $C = 15\$$ dell'opzione.

A questo punto con la stessa strategia potremmo risolvere il problema

$$\min_{\theta \in \Theta} E(\theta) = \sum_{i=1}^I (C^i(S_0, T^i, K^i, \theta) - C_{mkt}^i(S_0, T^i, K^i))^2,$$

avendo a disposizione dati di mercato di I opzioni Europee di tipo Call ($C_{mkt}^i(S_0, T^i, K^i)$) con differenti strike e scadenze. Quello che ci aspettiamo è che l'algoritmo individui un parametro $\tilde{\theta}$ che approssimi nella maniera più fedele possibile il comportamento di S_t in tutti gli scenari utilizzati per la calibrazione.

Questo parametro $\tilde{\theta}$ sarà espressione, al tempo $t = 0$, delle caratteristiche intrinseche del sottostante sul quale sono basate le opzioni $C^i(S_0, T^i, K^i)$ e ci permetterà quindi di determinare il prezzo di altre opzioni con differenti strike e scadenze.

Chiaramente, trattandosi di un modello primordiale, la pretesa sarebbe troppo ambiziosa. Il modello, pur essendo consistente, necessita di ulteriori dettagli e ottimizzazioni per restituire valori accurati. Resta senz'altro un buon punto di partenza per trattare il problema del pricing di Opzioni.

Riferimenti bibliografici

- [1] Nicolas Privault *Stochastic Finance*. Chapman & Hall/CRC FINANCIAL MATHEMATICS SERIES
- [2] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [3] Rama Cont *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, 28 October 2000
- [4] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] Paromita Banerjee, *Numerical Methods for Stochastic Differential Equations and Postintervention in Structural Equation Models*, January 2021
- [6] Steven L. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, 1993