

Appunti del corso Sistemi e circuiti elettrici lineari

Docente del corso: dott. Arturo Popoli, PhD
Appunti di: Lorenzo Murace

Primo Semestre a.a. 2025/2026

Contents

1 Cenni di Elettromagnetismo	5
1.1 Forza di Lorentz, campo elettrico e campo magnetico	5
1.2 Equazioni di Maxwell	5
1.2.1 Legge di Gauss per \vec{E}	5
1.2.2 Legge di Gauss per \vec{B}	6
1.2.3 Legge di Faraday-Neumann-Lenz	6
1.2.4 Legge di Ampère- Maxwell	7
1.3 Proprietà dei campi solenoidali (\vec{B}, \vec{J}_t)	8
1.4 Equazione di continuità	8
2 Elettromagnetismo nella materia	10
2.1 Polarizzazione elettrica	10
2.2 Magnetizzazione	12
3 Ricapitolazione: Leggi dell'elettromagnetismo nella materia	13
4 Introduzione ai circuiti elettrici a parametri concentrati	14
4.1 Definizioni fondamentali	14
4.1.1 Parti del circuito	14
4.1.2 Grandezze	15
4.2 Leggi di Kirchhoff - Leggi topologiche	16
4.3 Potenza ed energia	17
4.4 Leggi costitutive - Introduzione e classificazione	19
4.5 Collegamenti di bipoli in serie e parallelo	20
5 Resistore lineare	21
5.1 Resistori in serie e partitore di tensione	21
5.2 Resistori in parallelo e partitore di corrente	22
5.3 Cortocircuito	22
5.4 Circuito aperto	22
5.5 Trasformazioni triangolo-stella nella connessione di resistori	23
6 Generatori indipendenti di tensione e di corrente	24
6.1 Generatori ideali	24
6.2 Generatori reali	27
6.3 Generatori pilotati	27
7 Metodi generali per analisi dei circuiti	32
7.1 Metodo delle equazioni di Kirchhoff	32
7.2 Metodo dei potenziali di nodo	32
7.2.1 Potenziali di nodo per rami controllabili in tensione - rami di tipo 1 e 2	33
7.2.2 Potenziali di nodo per rami non controllabili in tensione - rami di tipo 3	36

7.2.3	Potenziali di nodo in presenza di generatori pilotati	37
8	Componenti dinamici	41
8.1	Condensatore ideale	41
8.2	Induttore ideale	42
9	Regime Sinusoidale	44
9.1	Introduzione alla risoluzione di un circuito in regime sinusoidale	44
9.2	Trasformata di Steinmetz	45
9.3	Metodo Simbolico	46
9.4	Leggi topologiche e costitutive in dominio simbolico	48
9.5	Legge di Ohm simbolica	51
9.6	Potenza in regime sinusoidale	54
9.7	Rifasamento	61
10	Proprietà dei circuiti lineari e teoremi delle reti	64
10.1	Sovrapposizione degli effetti	64
10.2	Teorema di Thevenin	65
10.3	Teorema di Norton	70
10.4	Trasformazione bipolo Thevenin - bipolo Norton	73
10.5	Teoremi di Thevenin e Norton in regime sinusoidale	73
11	Doppi bipoli (componenti biporta)	77
11.1	Rappresentazioni esplicite di un doppio bipolo	79
11.1.1	Rappresentazione R	80
11.1.2	Rappresentazione G	83
11.1.3	(Non) esistenza di una rappresentazione	85
11.1.4	Rappresentazioni ibride H e H'	86
11.1.5	Rappresentazioni T, T'	88
11.2	Doppi bipoli in regime sinusoidale	90
11.3	Connessioni tra doppi bipoli	94
11.3.1	Bipoli in serie a un doppio bipolo	94
11.3.2	Bipoli in parallelo (alle porte) di un doppio bipolo	94
11.3.3	Collegamento in serie tra doppi bipoli	95
11.3.4	Collegamento in parallelo tra doppi bipoli	96
11.3.5	Collegamento di doppi bipoli in cascata	97
11.3.6	Calcoli con doppi bipoli in serie e parallelo	97
12	Circuiti dinamici in regime transitorio	99
12.1	Circuiti dinamici di ordine 1	99
12.1.1	Circuito RC - Evoluzione libera	99
12.1.2	Circuito RL - Evoluzione libera	103
12.1.3	RC - Evoluzione forzata	106
12.1.4	Scomposizione della risposta di circuiti del primo ordine ed evoluzione forzata di un circuito RL	108
12.2	Circuiti dinamici di ordine 2	109

12.2.1	RLC serie - Evoluzione libera	110
12.2.2	RLC serie - Evoluzione forzata	119
12.2.3	RLC parallelo - Evoluzione forzata	123
12.3	Calcolo delle costanti A_1 e A_2	126
12.4	Risonanza	126
12.4.1	Risonanza - RLC serie	126
12.4.2	Antirisonanza - RLC parallelo	129
13	Validità dei circuiti a parametri concentrati	132
13.1	Criterio del tempo di transito	132

1 Cenni di Elettromagnetismo

1.1 Forza di Lorentz, campo elettrico e campo magnetico

Trattata perché interazione tra particelle cariche e campi.

Definizione 1. *Forza di Lorentz*

$$F = q(E + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Definizione 2. *Campo elettrico.* Si dice campo elettrostatico quello prodotto da cariche ferme. Le sue linee di campo (LDC) sono aperte (non sono presenti loop). Non distinti campo generato da cariche e campo generato da campi magnetici variabili perché hanno lo stesso effetto sulle cariche. Se $\vec{v} = 0$,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (2)$$

Definizione 3. *Campo di induzione magnetica.* Se $\vec{E} = 0$,

$$B = \frac{F}{qv\sin(\theta)} \quad (3)$$

Il verso è dato da regola della mano destra, con θ angolo racchiuso tra i vettori \vec{v} e \vec{B} . Le linee di campo magnetico escono dal polo nord (rosso) e entrano nel polo sud (nero). I poli magnetici terrestri sono invertiti rispetto a quelli geografici (per cui le linee escono dal polo sud della Terra e vanno al polo nord)

1.2 Equazioni di Maxwell

Sia nel vuoto sia nella materia.

1.2.1 Legge di Gauss per \vec{E}

Legge 1 (Legge di Gauss per E). (*Le cariche positive sono sorgenti del campo; le cariche negative sono pozzi.*) In ogni punto dello spazio, la divergenza del campo elettrico è direttamente proporzionale alla densità di carica volumetrica nel punto. Il flusso attraverso una superficie chiusa è direttamente proporzionale alla carica netta racchiusa.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Legge di Gauss per E in forma locale})$$

Data definizione di divergenza come limite del flusso per unità infinitesima di volume, densità volumetrica, costante di dielettrica del vuoto ϵ_0

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Legge di Gauss per E in forma integrale})$$

1.2.2 Legge di Gauss per \vec{B}

Legge 2 (Legge di Gauss per B). (*Non esistono monopoli magnetici.*) Il flusso del campo magnetico attraverso qualunque superficie chiusa è nullo

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{Legge di Gauss per B in forma locale})$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{Legge di Gauss per B in forma integrale})$$

Definizione 4 (Campo solenoidale). *Un campo che ha sempre flusso nullo attraverso una superficie chiusa si dice solenoidale.*

Teorema 1 (Relazione tra campi e potenziale vettore). *Un campo solenoidale \vec{B} ammette sempre un campo vettoriale potenziale, detto potenziale vettore \vec{A} , tale che $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.*

1.2.3 Legge di Faraday-Neumann-Lenz

Legge 3 (Legge di Faraday-Neumann-Lenz). *Il rotore del campo elettrico è dato dalla derivata parziale di B rispetto al tempo, cambiata di segno (Lenz). La circuitazione di \vec{E} lungo una curva chiusa Γ è uguale alla derivata temporale del flusso di \vec{B} concatenato¹ a Γ . Le variazioni temporali di \vec{B} generano un \vec{E} le cui linee di campo sono chiuse attorno a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, dunque circolano attorno a \vec{B} .*

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Legge di Faraday in forma locale})$$

Definizione 5 (Rotore). *Limite della circuitazione per unità infinitesime di superficie. Calcolabile come determinante formale della matrice con righe (1) i versori, (2) gli operatori derivata parziale e (3) le componenti del vettore (campo vettoriale) a cui è applicato l'operatore.*

Passaggio alla forma integral tramite il Teorema di Stokes.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (\text{Legge di Faraday in forma integrale})$$

Esempio 1. Si consideri un filo di rame chiuso Γ sospeso sopra un magnete permanente, e una superficie S che abbia come bordo Γ .

- Se i due oggetti sono fermi uno rispetto all'altro. Il flusso di \vec{B} attraverso S è diverso da 0, ma la sua derivata è nulla. Dunque la circuitazione del campo magnetico lungo Γ è nulla e non si ha corrente.

¹Per tutti i campi solenoidali, si dimostra il valore del flusso non dipende dalla superficie S che il campo attraversa ma soltanto dal bordo di tale superficie S , Γ , a cui il flusso viene dunque detto *concatenato*

- Se $v \neq 0$, il flusso di \vec{B} attraverso S è variabile. Per la legge di Faraday si instaura una circuitazione di \vec{E} lungo Γ e dunque una corrente.

Definizione 6 ((provvisoria) forza elettromotrice (f.e.m.)). *Lavoro per unità di carica compiuto da campi non conservativi (o campi di origine non elettrica).*

Visto come generato da \vec{E} generato per induzione, ma potrebbe essere anche una batteria: il concetto dovrà dunque essere generalizzato.

1.2.4 Legge di Ampère- Maxwell

Legge 4 (Legge di Ampère- Maxwell). . .

La densità di corrente totale $\vec{J}_t = \vec{J} + \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t}$ produce un \vec{B} . Le LDC di \vec{B} sono avvolte attorno a quelle di \vec{J}_t .

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) = \vec{J} + \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Legge di Ampère-Maxwell in forma locale})$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Ampère-Maxwell in forma integrale})$$

μ_0 permeabilità magnetica del vuoto.

\vec{J} densità di corrente di conduzione ($\vec{J} = \rho \vec{v}$; $i = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$).

$F = \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ è detta *forza magnetomotrice*, in analogia con la forza elettromotrice nella Legge di Faraday. Scriviamo μ_0 all'interno dell'integrale al primo membro per rendere evidente che si tratta di una uguaglianza tra correnti all'osservazione del secondo membro.

Proprietà: \vec{J}_t è solenoidale.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right)) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Siccome il primo membro è uguale a 0 per le proprietà degli operatori differenziali, anche $\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$, cioè \vec{J}_t è solenoidale.

Dunque valgono le stesse proprietà osservate sopra per la circuitazione di \vec{E} :

- $\oint_S \vec{J}_t \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S$ chiusa
- Le LDC sono chiuse
- $\int_S \vec{J}_t \cdot d\vec{S}$ è un flusso concatenato a Γ bordo di S .

Osservazione:

$$\oint_{\Gamma} 1/\mu_0 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_t \cdot d\vec{S}$$

La circuitazione di $1/\mu_0 \vec{B}$ lungo una curva chiusa Γ è pari al flusso di \vec{J}_t concatenato con Γ . Questo fa sì che possa circolare corrente anche in un circuito aperto, finché si ha una variazione di campo magnetico.

1.3 Proprietà dei campi solenoidali (\vec{B}, \vec{J}_t)

Indichiamo con \vec{U} un campo solenoidale.

Ricordiamo il risultato ottenuto sopra: $\nabla \cdot \vec{U} = 0 \iff \oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0$.

Definizione 7 (Tronco di tubo di flusso). *Superficie tubolare definita dalle LDC di \vec{U} tangenti a due curve chiuse Γ_1 e Γ_2 , che delimitano superfici S_1 e S_2 . Chiamiamo S_l la superficie laterale del tubo, con normale \hat{n}_l . La superficie del tronco di tubo di flusso è $S = S_l \cup S_1 \cup S_2$. S è chiusa.*

Consideriamo il flusso di \vec{U} attraverso la superficie S , per trarne alcune conclusioni.

$$\oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{U} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{U} \cdot d\vec{S} + \int_{S_l} \vec{U} \cdot d\vec{S}$$

I segni nell'espressione sono scelti in modo che la normale punti sempre all'esterno, mentre il verso di percorrenza della curva è determinato dalla direzione delle LDC.

$\oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0$ per definizione di campo solenoidale.

$\int_{S_l} \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0$ Perché la superficie è parallela alle linee di flusso per costruzione.

Pertanto, $\int_{S_1} \vec{U} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{U} \cdot d\vec{S}$. Da cui si ricava che il flusso di \vec{U} attraverso qualunque sezione del tubo di flusso è costante. Siccome:

- Γ_1 e Γ_2 sono arbitrarie.
- \vec{U} è solenoidale, quindi le LDC sono chiuse.

Dunque, i tubi di flusso di \vec{U} sono chiusi e $\int_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \text{cost}$ $\forall S$ sezione del tubo.

Si osservi che $\int_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = i$, dunque la corrente è la stessa lungo ogni sezione di un tubo di flusso, ed è possibile parlare del flusso di \vec{J}_t (corrente) relativo all'intero tubo di flusso.

Definizione 8 (Circuito Elettrico). *Tubo di flusso (totale, considerato nella sua interezza) di \vec{J}_t .*

Proprio per la proprietà osservata sopra, il circuito è definito proprio dal fatto che è attraversato dalla stessa corrente in ogni punto.

Definizione 9 (Circuito Magnetico). *Tubo di flusso (totale, considerato nella sua interezza) di \vec{B} .*

(Non saranno trattati nel corso)

1.4 Equazione di continuità

Legge 5 (Equazione di Continuità (di conservazione della carica)). *La corrente di conduzione uscente da una superficie chiusa S è pari alla diminuzione della carica Q in essa contenuta per unità di tempo.*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{Equazione di continuità in forma locale})$$

\vec{J} è corrente di conduzione. Equazione di conservazione. Tramite il Teorema della Divergenza (prima separiamo i membri e integriamo sul volume)

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$

$$i_c(t) = -\frac{d}{dt} Q \quad (\text{Equazione di continuità in forma integrale})$$

2 Elettromagnetismo nella materia

2.1 Polarizzazione elettrica

La capacità di un campo elettrico di influenzare la materia viene detto *polarizzazione elettrica*.

Ci limitiamo, in questa sezione, alla trattazione del comportamento di materiali dielettrici, ossia materiali la cui conducibilità elettrica $\sigma \sim 10^{-6} \div 10^{-7} S/m$ (Siemens/metro).

Legge 6 (Legge di Ohm locale).

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{E} &= \rho \vec{J}\end{aligned}\quad (\text{Legge di Ohm locale})$$

σ conducibilità elettrica.

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ resistività elettrica.

Sostanze dielettriche:

- Materiali apolari: *polarizzazione per deformazione* A riposo, hanno un centro positivo e un esterno negativo, con baricentri positivo e negativo sovrapposti. Quando sottoposti a un campo elettrico, si deformano, e i due baricentri vengono spinti in due direzioni opposte, separandosi: si ottiene un sistema con una carica $+q$ e $-q$ a una distanza d , ossia un dipolo elettrico elementare, con momento di dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$. Questa separazione porta alla generazione di un ulteriore campo, che interagisce con quello applicato, modificando il campo risultante percepito.
- Materiali Polari: *polarizzazione per orientamento*. Esempio: acqua (distillata). Anche in assenza di \vec{E} esterno, i baricentri delle cariche positive e negative non corrispondono, ed è dunque già un dipolo elettrico elementare, con $\vec{p}_{cp} = q \cdot \vec{d}$. All'applicazione di un campo esterno \vec{E} , la carica positiva percepisce una forza concorde con il campo elettrico e quella negativa una disconcorde: si genera un momento torcente che porta all'allineamento del momento di dipolo al campo esterno e il campo generato dalla molecola si addiziona a quello esterno. Il forno a microonde ad esempio funziona sfruttando questo meccanismo: il campo elettrico variabile fa muovere le molecole d'acqua, e gli alimenti si scaldano per la dissipazione di energia tramite calore a livello molecolare.

Difficile descrivere il fenomeno a livello microscopico in una forma utile ed esaustiva, perciò lo facciamo a livello macroscopico, tramite una funzione continua nello spazio, che vale per entrambe le tipologie. Determiniamo un punto \vec{X} e un volume infinitesimo che lo circonda V . V contiene diversi dipoli: ne consideriamo una distribuzione casuale. Definiamo: $\Delta\vec{p} = \sum_{i \in V} \vec{p}_i$. Vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}$, con le dimensioni $\frac{C}{m^2}$: è un momento di dipolo elettrico per unità di volume.

Si può dimostrare che $\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p$ con ρ_p detta *densità di carica di polarizzazione*. Si può dunque descrivere il fenomeno come se fosse presente una densità di carica (di polarizzazione) dentro il materiale, la quale genera un campo.

Nel vuoto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nella materia:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

ρ_p è difficile da rilevare: è necessario trovare un modo per esprimere questa relazione.

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

Definiamo il vettore *Campo di spostamento elettrico*.

Definizione 10 (Campo di spostamento elettrico).

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Siccome \vec{P} è funzione di \vec{E} , anche \vec{D} lo è:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \Rightarrow \vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$$

Detto $\bar{\alpha}$ tensore di polarizzazione (determinato sperimentalmente nell'ambito della fisica della materia),

$$\vec{P} = \bar{\alpha} \vec{E}$$

Per un materiale non lineare, le entrate di $\bar{\alpha}$ dipendono dal modulo delle componenti di \vec{E} . Per un materiale isotropo e lineare, invece, $\bar{\alpha}$ si riduce a un multiplo, detto *suscettività elettrica* (χ_e) della matrice identità. Dunque, per un materiale isotropo e lineare:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

con $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, e ha valore 1 nel vuoto ~ 1 nell'aria, $2 \div 5$ nei solidi isolanti e ~ 80 nei liquidi isolanti.

Ne risulta dunque che tutte le proprietà qualitative di \vec{E} già studiate valgono anche per \vec{D} .

2.2 Magnetizzazione

Essendo il magnetismo un fenomeno quantistico a livello microscopico, le teorie che consideriamo vengono ancora utilizzate soltanto perché funzionanti a livello macroscopico, non perché sostanzialmente corrette.

Si considera un'ipotetica traiettoria chiusa circolare di un elettrone in rotazione attorno a un nucleo come una spira percorsa da corrente, che racchiude una superficie. Tale spira costituisce un dipolo magnetico elementare, con momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = i\Delta\vec{S}\hat{n} = i\Delta\vec{S}$, misurato in $A \cdot m^2$. Ci chiediamo dunque come reagisca un atomo o molecola così costituito se sottoposto a un campo di induzione magnetica.

$\vec{B} \neq 0$ orienta la spira portando la normale ad esservi parallela. Attuiamo una descrizione macroscopica analoga a quella impiegata per la polarizzazione elettrica per allineamento. $\Delta\vec{m} = \sum_{i \in V} m_i$ attorno a un punto \vec{X} . $\vec{M}(\vec{X}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V}$: momento di dipolo magnetico per unità di volume, misurata in A/m . Si può dimostrare che:

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_m$$

con \vec{J}_m densità di corrente di magnetizzazione.

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{J}_p$$

con \vec{J}_p densità di corrente di polarizzazione.

Nel vuoto: $\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B}) = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t}$.

Nella materia: $\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B}) = \vec{J} + \vec{J}_m \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{J}_p}{\partial t}$.

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B}) = \vec{J} + \vec{J}_m \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{J}_p$$

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Definiamo dunque il campo magnetico

Definizione 11 (Campo magnetico).

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (A \cdot m^{-1})$$

Per evitare ambiguità, si definisce $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ campo di induzione magnetica). Siccome \vec{M} è funzione di \vec{H} , anche \vec{B} lo è.

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

Analogamente a quanto fatto per la descrizione del fenomeno della polarizzazione elettrica, si definisce un tensore di magnetizzabilità, che nel caso di

materiali isotropi e lineari si porta alla relazione $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, con χ_m detto *suscettività magnetica*.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

In questo modo si è espresso \vec{H} soltanto in funzione delle correnti libere e di polarizzazione elettrica, ma non di polarizzazione magnetica. Da qui, è poi possibile determinare \vec{B} . Per un materiale isotropo e lineare, $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, con $\mu_r = 1 + \chi_m$ *permeabilità magnetica relativa*. μ_r ha valori: 1 nel vuoto, ~ 1 nell'aria, < 1 nei materiali diamagnetici, > 1 nei materiali paramagnetici e $\gg 1$ per materiali ferromagneticci.

3 Ricapitolazione: Leggi dell'elettromagnetismo nella materia

1. Legge di Gauss per il campo di spostamento elettrico

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

2. Legge di Gauss per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

3. Legge di Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_{B,\Gamma}$$

4. Legge di Ampère

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi_{J,S} + \Phi_{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},S} = i + i_s$$

5. Equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \rightarrow \quad i = -\frac{dQ}{dt}$$

6. Relazioni di legame materiale

Per materiali isotropi e lineari:

- $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$
- $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
- $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)$ dove \vec{E}_i sono i campi elettrici *impressi*, cioè di origine non elettrica.

4 Introduzione ai circuiti elettrici a parametri concentrati

4.1 Definizioni fondamentali

Si distinguerà d'ora in poi tra:

circuito fisico : ha luogo nella realtà ed è costituito da componenti materiali (es. un filo in cui circola corrente, la stessa per ogni sezione, in quanto è un tubo di flusso di \vec{J}_t). Risolverlo significa risolvere le equazioni di Maxwell nella materia che costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali $f(x, y, z, t)$. Si ottiene come risultato una soluzione esatta, analitica per i valori di tutti i campi in ogni posizione nello spazio: problema 3D (tre coordinate spaziali e una temporale)

circuito a parametri concentrati : Rappresentazione approssimata di un circuito fisico, mediante *componenti (circuitali)* e *collegamenti ideali*. Utile a una risoluzione approssimata ma comunque affidabile e più rapida del sistema. Rinunciando alla descrizione accurata (in termini di coordinate spaziali), risolvere il circuito significa risolvere un sistema di equazioni differenziali ordinarie: problema 0D (solo coordinata temporale).

Si fonda su tre ipotesi:

- i collegamenti sono ideali ($\sigma = \infty \iff \rho = 0$)
- lo spazio esterno ai collegamenti e ai componenti è perfettamente isolante ($\sigma = 0 \iff \rho = \infty$)
- nello spazio esterno, (1) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$, cosicché \vec{E} sia conservativo e $\vec{E} = -\nabla\varphi$ dove φ è il potenziale elettrico, misurato in V e (2) $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$, cosicché $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ e dunque \vec{J} è un campo solenoidale ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$). Da queste due condizioni derivano le Leggi di Kirchhoff.

4.1.1 Parti del circuito

Definizione 12 (componente). *Sottosistema delimitato da una superficie limite che può essere attraversata da correnti sono in corrispondenza dei terminali, ossia le regioni di contatto con i collegamenti esterni.*

Un componente con 2 terminali è detto dipolo; uno con 3, tripolo, uno con n , n -polo.

Definizione 13 (Nodo (polo)). *Un nodo (o polo) si intende indistintamente una delle due seguenti configurazioni:*

1. terminale isolato
2. insieme di più terminali connessi da collegamenti ideali.

Definizione 14 (Ramo). *Tratto del circuito che unisce due nodi adiacenti.*

Legge 7 (Principio di invarianza topologica). *Osserviamo che alcuni fatti soltanto alcuni fatti sono rilevanti per il comportamento del circuito.*

Influenzano il comportamento del circuito:

- la tipologia dei componenti
- la topologia del circuito

Non influenzano il comportamento del circuito:

- la posizione dei componenti nello spazio (infatti la sua rappresentazione non corrisponde a posizioni spaziali nella realtà)
- la forma dei collegamenti (che infatti sono ideali)

Definizione 15 (Maglia). *Percorso chiuso formato da rami del circuito che attraversa una sequenza chiusa di nodi, senza passare più di una volta per lo stesso nodo.*

4.1.2 Grandezze

Definizione 16 (Corrente). *La consideriamo dovuta a un moto di cariche positive (+), per convenzione.*

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{dQ}{dt}$$

con S generica perché il circuito è un tubo di flusso per J campo solenoidale (per le ipotesi sopra).

Ne risulta che:

$$\Delta Q = \int_t^{t+\Delta t} i(t) dt$$

È necessario definire un verso di riferimento (VDR) per effettuare il calcolo di una corrente i tra due punti, in analogia con la necessità di assegnare un verso alla normale della superficie per calcolare il flusso. Tale verso è (1) arbitrario e (2) costante nel tempo. Effettuati i calcoli, è possibile che il verso effettivo risulti concorde ($i > 0$) oppure discorde ($i < 0$) con quello di riferimento.

Definizione 17 (Tensione). *Variazione di energia per unità di carica quando una carica puntiforme si sposta da un A a B .*

$$v_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = -(\varphi(B) - \varphi(A)) = \varphi_A - \varphi_B$$

Tensione e differenza di potenziale in generale non sono la stessa cosa. Coincidono soltanto nel caso in cui $\nabla \times \vec{E} = 0$, ossia se \vec{E} è conservativo.

Per calcolare la tensione tra due punti, è necessario determinare un verso di riferimento, arbitrario e costante. Se $v_{AB} > 0$, una carica che si sposta da A a B perde energia potenziale elettrica. Viceversa, $v_{AB} < 0$, una carica che si sposta da A a B perde energia.

4.2 Leggi di Kirchhoff - Leggi topologiche

Legge 8 (Legge di Kirchhoff delle correnti - LKC). *La somma algebrica delle correnti attraverso qualsiasi superficie S chiusa esterna alle superfici limite dei componenti è nulla.*

Per esempio, si consideri una superficie che taglia tre rami e include un nodo (S_1 in Figura 1). Possibile considerare anche una superficie che include più nodi. Oppure ancora, una superficie che circondi sostanzialmente soltanto un nodo (S_2 in Figura 1): in questo caso prende il nome di legge nodale.

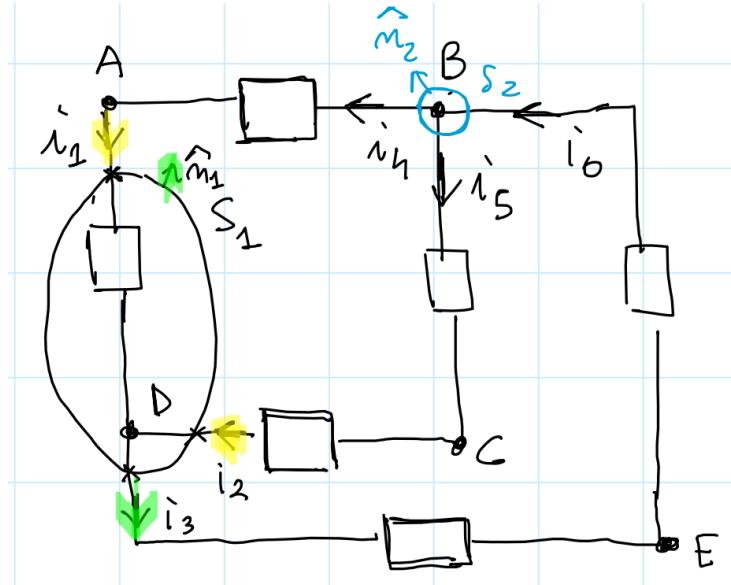


Figura 1

Indaghiamo il collegamento tra la LKC e la Teoria dei campi. Considero un circuito e una superficie che circondi un nodo tra più rami. Risulta (considerando il riferimento di Figura 1, e indicando le superficie di sezione del filo con apici):

$$\oint_{S_2} \vec{J}_t \cdot d\vec{S} = \oint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S'_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S''_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} - \int_{S'''_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = i_4 + i_5 - i_6.$$

Dunque la LKC è una conseguenza del carattere solenoidale di \vec{J} (fuori dalle superficie limite dei componenti).

Conseguenze della LKC:

corrente di ramo. Un bipolo in generale avrebbe una corrente entrante e una uscente distinte. Ma per la LKC la loro somma algebrica deve essere nulla, dunque devono essere uguali.

corrente in un ramo aperto (circuito aperto). La corrente in un ramo aperto può soltanto essere nulla, altrimenti si avrebbe una corrente entrante nel nodo terminale e nessuna corrente uscente.

Legge 9 (Legge di Kirchhoff delle tensioni - LKT). *La somma algebrica delle tensioni lungo una curva chiusa esterna Γ alle superfici limite dei componenti passante per una sequenza di nodi è nulla.*

Per esempio, considerando la Figura 2, assegnato verso di riferimento a Γ_1 e alle tensioni tra i nodi. Un caso particolare si ottiene considerando la curva Γ_2 , coincidente con una maglia del circuito.

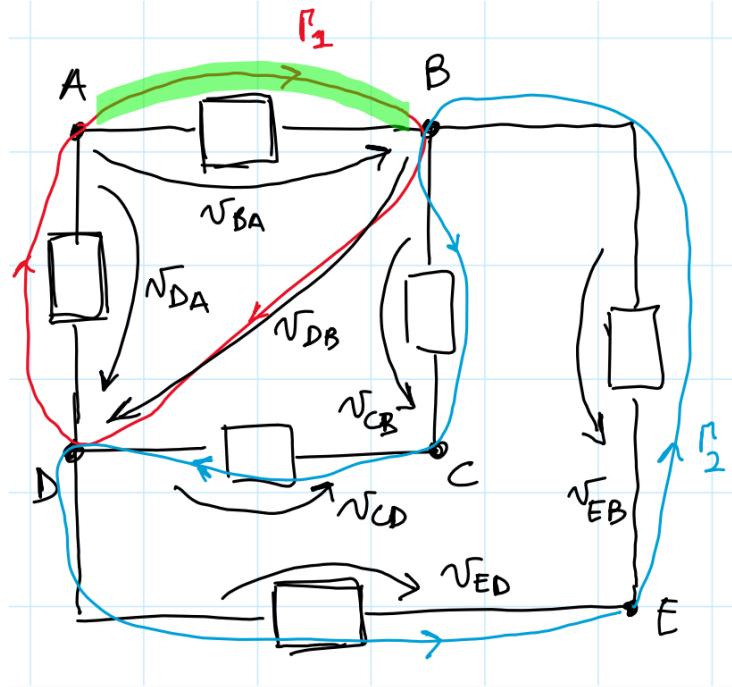


Figura 2

Indaghiamo il collegamento tra la LKT e la Teoria dei campi.

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_{B,\Gamma_1} = 0 = \sum_i \int_{A_i}^{B_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_i v_{A_i B_i}$$

4.3 Potenza ed energia

Definizione 18 (Potenza per un bipolo). Consideriamo un bipolo generico sottoposto a una generica $v(t)$, attraversato da una $i(t)$. Definiamo la potenza istantanea (assorbita o erogata dal componente) $p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dQ} \frac{dQ}{dt} =$

$v(t)i(t)$.

In circuiti in regime stazionario (corrente continua), $p(t) = P$ è la potenza, costante nel tempo.

Convenzioni nei versi di riferimento (calcolo potenza):

convenzione dell'utilizzatore VDR i entrante nel polo (+) (definito in base a v): cariche da (+) a (-), quindi perdono energia (potenziale). L'energia (potenza) viene assorbita (dissipata) dal componente, dunque detto *utilizzatore*. $vi = P_A$ Potenza assorbita (se negativa, il componente eroga energia).

convenzione del generatore VDR i uscente dal polo (+): cariche da (-) a (+), quindi guadagnano energia. L'energia (potenza) viene erogata dal componente. $vi = P_E$ Potenza erogata (se negativa, il componente assorbe energia).

Enunciamo ora un teorema fondato sulla validità delle Leggi di Kirchhoff.

Teorema 2 (Teorema di conservazione della potenza istantanea). *Per ogni circuito elettrico, la somma algebrica delle potenze erogate è uguale alla somma algebrica delle potenze istantanee assorbite.*

Se n sono componenti eroganti e m sono utilizzatori.

$$\sum_{i=1}^n P_{E,i}(t) = \sum_{j=1}^m P_{A,j}(t)$$

Nella L5 è proposto un esempio di verifica del teorema.

Implicazioni del teorema di conservazione della potenza istantanea. Siccome è valido anche nei circuiti reali. Ne vediamo alcuni esempi per la rete elettrica nazionale. Su dati.terna.it è possibile trovare dati sul fabbisogno nazionale nel tempo. L'andamento del fabbisogno è molto vario nel tempo (giorni, ore, mesi). Le fonti sono varie perché è necessario avere una adeguata adattabilità al fabbisogno, e l'accumulo di energia non è facile ed esteso. L'idroelettrico (programmabile) è ormai al massimo, perché gli specchi d'acqua sfruttabili sono quasi al limite. Con quelle rinnovabili non programmabili è difficile ottenere di più in maniera affidabile.

Confronto tra i profili di produzione francese (con molto nucleare) e italiano (con più rinnovabili ma anche più gas).

Mappa dei consumi come indice di produttività della regione

Interventi sulla rete elettrica al 2030 e 2034: molti collegamenti. Obiettivo: renderla più "magliata" per consentire continuità elettrica. L'Italia è avanzata come paese industriale proprio grazie all'affidabilità della rete elettrica.

Crisi elettrica in Texas nel Febbraio 2021. Il Texas, per pagare meno tasse federali non è connesso alla rete elettrica federale (esistono una rete Western e una Eastern, con poche connessioni perché in mezzo ci sono le Montagne Rocciose) (dunque ha una rete propria, connessa con Messico e altri, ma molto più fragile:

per questo è molto più esposto). Vedi immagini di Houston prima e dopo gli eventi ([wikipedia](#)). Le elevate spese italiane per l'interconnessione interna e con altri paesi ha grandi importanza per l'affidabilità della rete.

Ipotizzato lo stoccaggio dell'energia, per aumentare la penetrazione delle fonti di energia non programmabili. Per piccole comunità elettriche può funzionare (UPS). Per potenze molto elevate, sopperire alla non-programmabilità con le attuali batterie non è possibile, per costi e disponibilità di materiali. Tra le direzioni di sperimentazione, superconduttori e riciclo di batterie dall'automotive. Si sente di alcuni paesi che ottengono l'80% della loro energia dal fotovoltaico, ma si tratta sempre di paesi piccoli: impossibile per fabbisogni più elevati.

Definizione 19 (Energia assorbita ed erogata).

$$W(t) = \int_t^{t+\Delta t} p(t)dt = \int_t^{t+\Delta t} v(t)i(t)dt$$

Secondo la convenzione già illustrata per la potenza, si parla di *energia assorbita* W_A ed *energia erogata* W_E . Se $p(t) = P$, $W(\Delta t) = P\Delta t$.

Unità di misura comuni, oltre ai J, sono i Wh e il suo multiplo kWh.

4.4 Leggi costitutive - Introduzione e classificazione

Mentre le leggi di Kirchhoff sono *leggi topologiche*, studiamo ora le leggi che caratterizzano il comportamento di particolari componenti del circuito: le *leggi costitutive*, nella forma $f(v(t), i(t)) = 0$. Classificazione dei componenti:

In base alla forma della legge costitutiva (LC)

Senza memoria (anche detti resistivi, algebrici, adinamici) LC algebrica. Es. $v(t) = \alpha i(t) + \gamma$.

Con memoria (dinamici) LC integro-differenziale. Es. $v(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^t i(t)dt$

In base alla linearità lineari o non lineari.

In base alla tempo-varianza

Tempo-invarianti La dipendenza temporale non è esplicita (t compare soltanto come argomento di $v(t), i(t)$)

Tempo-varianti La dipendenza temporale è esplicita. Tutti i componenti lo sono, ma alcuni si possono approssimare a tempo-invarianti.

In base ad attività o passività:

Passivi: $W_A(t) = \int_{-\infty}^t p_A(t)dt \geq 0 \quad \forall t$. Il componente può anche erogare energia, ciò che lo definisce è che l'energia totale assorbita sia sempre positiva (può erogare soltanto energia assorbita, non ne genera).

Attivi: $\exists t \mid W_A(t) < 0$.

In base alla potenza scambiata:

Dissipativi: $p_A(t) \geq 0 \quad \forall t$

Inerti: $p_A(t) = 0 \quad \forall t$

In base al tipo di controllo

controllati in tensione Nella LC, $v(t)$ è la variabile indipendente

controllati in corrente Nella LC, $i(t)$ è la variabile indipendente.

4.5 Collegamenti di bipoli in serie e parallelo

Definizione 20 (Serie). (1) Due bipoli sono collegati in serie se condividono un nodo a cui non afferiscono altri rami. Si osserva che in una configurazione del genere, i componenti in serie sono attraversati dalla stessa corrente; pertanto si può dare una definizione più generale di "collegamento in serie" (la 2). (2) Due o più bipoli sono in serie se sono attraversati dalla stessa corrente.

Definizione 21 (Parallelo). (1) Due o più bipoli sono collegati in parallelo se sono connessi alla stessa coppia di nodi. Si osserva che in una configurazione del genere, i componenti in parallelo sono sottoposti alla medesima tensione; pertanto si può dare un'ulteriore definizione di "collegamento in parallelo" (la 2). (2) Due o più bipoli sono in parallelo se sono sottoposti alla stessa tensione.

5 Resistore lineare

Definizione 22 (Resistore lineare). *Componente circuitale in cui si "concentra" la proprietà fisica della resistenza elettrica. È più che un semplice modello del resistore fisico, in quanto può assumere le proprietà di resistenza di altre parti del circuito.*

Legge 10 (Legge costitutiva del resistore lineare).

$$v(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = Gv(t)$$

secondo la convenzione dell'utilizzatore. R è detta resistenza elettrica ed è misurato in Ω (Ohm); $G = \frac{1}{R}$ conduttanza elettrica, misurata in S (Siemens)

Classificazione del componente:

- Controllato in corrente e in tensione;
- Lineare (R non dipende da $i(t)$; G non dipende da $v(t)$);
- Senza memoria;
- Tempo-invariante (R è costante);
- Passivo ($p_A(t) = Ri^2(t) = Gv^2(t) \geq 0 \Rightarrow W_A(t) \geq 0$);

5.1 Resistori in serie e partitore di tensione

Resistori in serie:

$$LKT_\Gamma : v = \sum_k v_k = (\sum_k R_k)i = R_{eq}i$$

con $R_{eq} = \sum_k R_k$. Posso dunque semplificare il circuito considerando la serie come un unico resistore con resistenza R_{eq} .

Definizione 23 (Partitore di tensione). *Serie di resistori. Ci interessiamo alla caduta di tensione dopo ciascun resistore.*

Detta v la tensione applicata alla serie, la caduta di tensione sul resistore k -esimo è

$$v_k = \frac{R_k}{R_{eq}}v$$

5.2 Resistori in parallelo e partitore di corrente

Resistori in parallelo:

$$LKC_A : i = \sum_k i_k = \sum_k G_k v = (\sum_k G_k) v = G_{eq} v$$

con $G_{eq} = \sum_k G_k = \frac{1}{R_{eq}}$, da cui $R_{eq} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{R_k}}$. Posso dunque semplificare il circuito considerando la serie come un unico resistore con resistenza R_{eq} .

Definizione 24 (Partitore di corrente). *Parallelo di resistori. Ci interessiamo alla corrente che scorre in ciascun resistore.*

Detta i la corrente che scorre nel parallelo, la corrente che scorre nel resistore k -esimo è

$$i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i = \frac{R_{eq}}{R_k} i$$

5.3 Cortocircuito

Nel caso in cui uno dei rami del parallelo abbia resistenza nulla, tutta la corrente passa in quel ramo, e la tensione ai due capi risulta nulla. Definiamo un ramo così caratterizzato *componente cortocircuito*.

Definizione 25 (Componente cortocircuito). *Tratto di conduttore ideale*

Legge 11 (Legge costitutiva del cortocircuito).

$$v(t) = 0 \quad \forall i(t)$$

Osserviamo che questo è un componente inerte ($p_A(t) = 0 \quad \forall i(t)$); Un cortocircuito reale ha una resistenza molto piccola ma finita, dunque vi può circolare un'elevata corrente, che può essere dissipata in calore al punto da generare, ad esempio, incendi.

5.4 Circuito aperto

Simmetricamente, nel caso in cui un ramo abbia resistenza infinita, tutta la corrente passa nel ramo opposto, e tale si comporta come un circuito aperto.

Definizione 26 (Componente circuito aperto). *Tratto con resistenza infinita.*

Legge 12 (Legge costitutiva del cortocircuito).

$$i(t) = 0 \quad \forall v(t)$$

Osserviamo che anche questo è un componente inerte ($p_A(t) = 0 \quad \forall v(t)$).

5.5 Trasformazioni triangolo-stella nella connessione di resistori

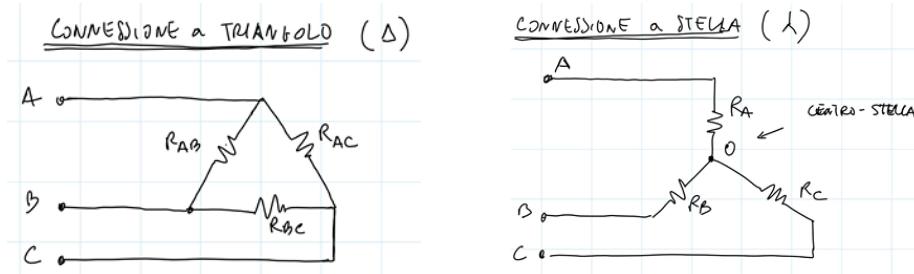


Figura 3. Configurazioni di resistori a triangolo (a sinistra) e a stella (a destra).

Per ottenere la **stella equivalente al triangolo**:

- 1 Aggiungere un centro-stella;
- 2 Disegnare R_A , R_B , R_C
- 3 Si dimostra che:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \quad (\text{trasformazioni triangolo-stella})$$

$$R_C = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

Nel caso particolare $R_{AB} = R_{BC} = R_{AC} = R_\Delta$, $R_A = R_B = R_C = R_\Delta/3$.

Al contrario, per ottenere il **triangolo equivalente alla stella**:

- 1 Rimuovere centro-stella;
- 2 Disegnare R_{AB} , R_{BC} , R_{AC}
- 3 Si dimostra che:

$$R_{AB} = \frac{R_AR_B + R_BR_C + R_AR_C}{R_C}$$

$$R_{BC} = \frac{R_AR_B + R_BR_C + R_AR_C}{R_A} \quad (\text{trasformazioni stella-triangolo})$$

$$R_{AC} = \frac{R_AR_B + R_BR_C + R_AR_C}{R_B}$$

Nel caso particolare $R_A = R_B = R_C = R_{stella}$, $R_{AB} = R_{BC} = R_{AC} = 3R_{stella}$.

Per un esercizio sul tema, si faccia riferimento all'Esercizio 3. L'esercizio è riportato in seguito perché comprende un generatore, componente che sarà trattato nel prossimo capitolo.

6 Generatori indipendenti di tensione e di corrente

6.1 Generatori ideali

Definizione 27 (Generatore indipendente di tensione). *Nella notazione U.S., il simbolo è un cerchio con un segno + e uno - che ne indicano la polarità. Chiamiamo V_g la fem del generatore. Nella notazione UE e ITA, il simbolo è un cerchio contenente una freccia che indica nel verso della polarizzazione. Per questo componente si utilizza la convenzione dell'utilizzatore.*

Legge 13 (Legge costitutiva del generatore di tensione).

$$v(t) = V_g \quad \forall i(t)$$

Classificazione:

- Controllato in corrente (non possibile scriverlo in una forma controllata in tensione)
- Non lineare
- Senza memoria
- Attivo (Comportamento energetico: $P_E(t) = V_g i(t)$, per ogni caso; può anche assorbire energia oltre a erogarne)

Definizione 28 (Generatore indipendente di corrente). *Nella notazione U.S., il simbolo è un cerchio con una freccia verso l'alto che indica il verso di riferimento della corrente generata. Chiamiamo I_g la corrente generata dal generatore. Nella notazione UE e ITA, il simbolo è un cerchio contenente un trattino. Per questo componente si utilizza la convenzione dell'utilizzatore.*

Legge 14 (Legge costitutiva del generatore di corrente).

$$i(t) = I_g \quad \forall v(t)$$

Classificazione:

- Controllato in tensione (non possibile scriverlo in una forma controllata in corrente)
- Non lineare

- Senza memoria
- Attivo (Comportamento energetico: $P_E(t) = v(t)I_g$, per ogni caso; può anche assorbire energia oltre a erogarne)

Per giustificare il fatto che dei generatori possano assorbire energie, si pensi a componenti reali modellizzati da questi componenti, quali le batterie delle auto elettriche, che possono assorbire energia dalle frenate.

Sono circuiti impossibili:

- Generatore di tensione cortocircuitato.
- Generatore di corrente in serie a un circuito aperto.

Esercizio 1. In Figura 4, siano $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 1\Omega$, $I_g = 1A$.

Verifichiamo il teorema di conservazione della potenza. Si semplifica il circuito,

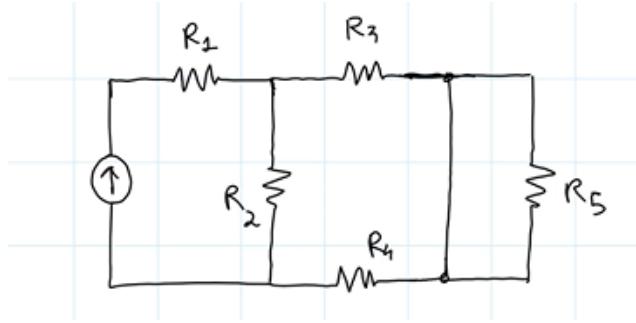


Figura 4

considerando che:

1. R_5 è in parallelo al cortocircuito (Figura 5)

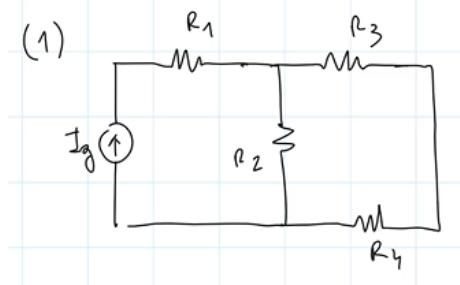


Figura 5

2. R_3 e R_4 sono in serie, con resistenza equivalente $R_{eq1} = 6\Omega$ (Figura 6)

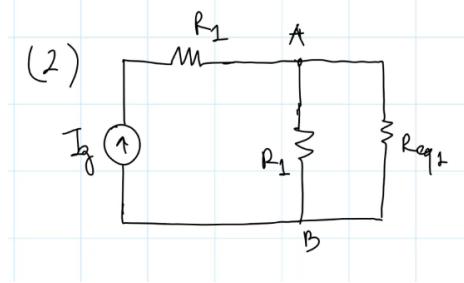


Figura 6

3. R_2 è in parallelo a R_{eq1} , con $R_{eq2} = 3\Omega$ (Figura 7)

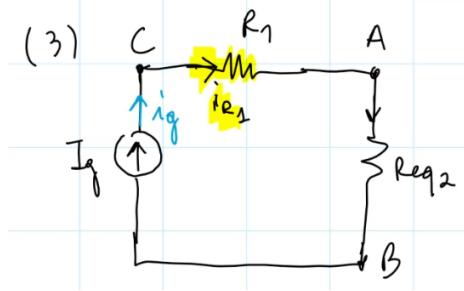


Figura 7

4. R_1 è in serie a R_{eq2} con $R_{eq} = 4\Omega$

$$P_{A,R_{eq}} = R_{eq} i_{eq}^2 = 4\Omega \cdot (1A)^2 = 4 W$$

$$P_{E,I_g} = V_g \cdot I_g = v_{R_{eq}} I_g = R_{eq} i_{R_{eq}} I_g = 4 W = P_{A,R_{eq}}$$

Calcoliamo anche la potenza assorbita da ciascun resistore. Procediamo a ritroso nella semplificazione del circuito:

- dalla Figura 7, $P_{A,R_1} = R_1 i_{R_1}^2 = 1 W$;
- dalla Figura 6, $i_{R_2} = \frac{E_{eq1}}{R_2 + R_{eq1}} = 0,5 A$, dunque $P_{A,R_2} = R_2 i_{R_2}^2 = 1,5 W$;
- dalla Figura 5, $i_{R_3} = i_{R_1} - i_{R_2} = 0,5 A$, da cui $P_{A,R_3} = 1 W$ e $P_{A,R_4} = 1 W$.

Risulta comunque che:

$$P_{E,g} - \sum_k P_{A,R_k} = 0$$

6.2 Generatori reali

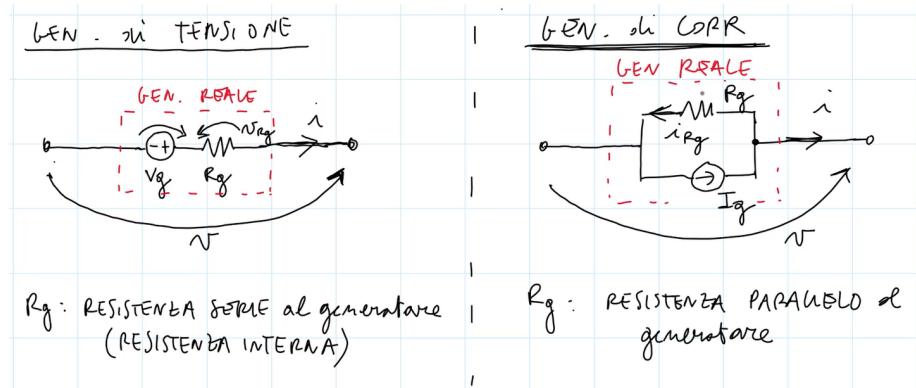


Figura 8. Schema della rappresentazione di generatori reali tramite componenti ideali.

Per un generatore di tensione, un generatore reale può essere rappresentato come un generatore reale in serie a una resistenza interna (detta resistenza serie, R_g) (A sinistra in Figura 8).

$$LKT : v = V_g - v_{R_g} = V_g - R_g i$$

v_{R_g} è detta *caduta di tensione* sulla resistenza interna. A parità di corrente erogata, maggiore è la resistenza interna, minore la tensione effettivamente generata dal generatore reale. Per questa ragione, in ambito circuitale, la fem è definita come la tensione "a vuoto" di un generatore reale, ed è dunque distinta dalla tensione effettivamente generata dal generatore in attività.

Per un generatore di corrente, un generatore reale può essere rappresentato come un generatore reale in parallelo a una resistenza interna (detta resistenza parallelo, R_g) (A destra in Figura 8).

$$LKC : i = I_g - i_{R_g} = I_g - \frac{v}{R_g}$$

A pari tensione, all'aumentare della resistenza parallelo, aumenta la corrente effettivamente erogata, fino al valore di I_g .

6.3 Generatori pilotati

Definizione 29. Un generatore la cui variabile (tensione/corrente) imposta dal generatore viene pilotata da un'altra tensione/corrente del circuito.

Generatore di tensione pilotato in tensione $v(t) = \alpha v_k(t) \quad \forall i(t)$, con α detto *guadagno in tensione*.

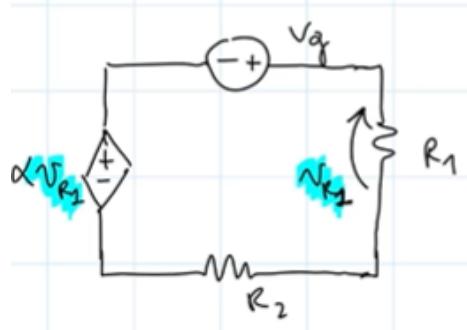


Figura 9. Esempio di circuito contenente un generatore di tensione pilotato in tensione

Generatore di tensione pilotato in corrente $v(t) = r i_k(t) \quad \forall i(t)$, con r detto *resistenza di trasferimento*

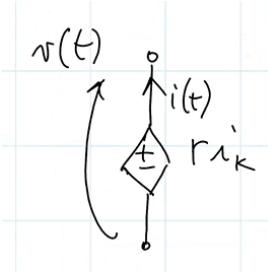


Figura 10. Simbologia per un generatore di tensione pilotato in corrente

Generatore di corrente pilotato in corrente $i(t) = \beta v(t) \quad \forall v(t)$, con β detto *guadagno in corrente*.

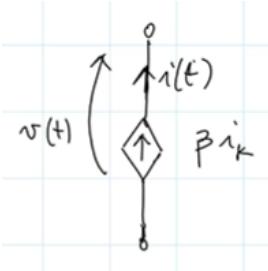


Figura 11. Simbologia per un generatore di corrente pilotato in corrente

Generatore di corrente pilotato in tensione $i(t) = gv_k(t) \quad \forall v(t)$, con g detto *conduttanza di trasferimento*.

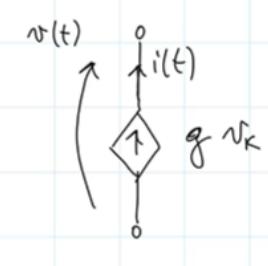


Figura 12. Simbologia per un generatore di corrente pilotato in tensione

Classificazione:

- senza memoria
- non lineari
- attivi

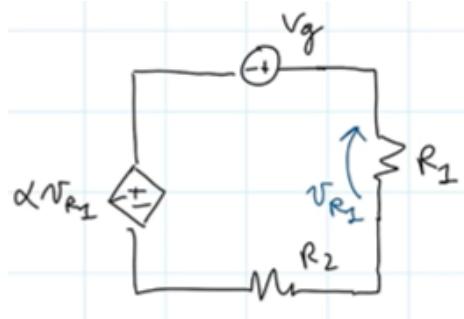


Figura 13

Esercizio 2. Siano: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $V_g = 45V$, $\alpha = 3$. Calcolare la corrente circolante nel circuito.

- scrivere una LK che includa la variabile pilotata del generatore.

$$LKT_I = V_g - v_{R_1} - v_{R_2} + \alpha v_{R_1}$$

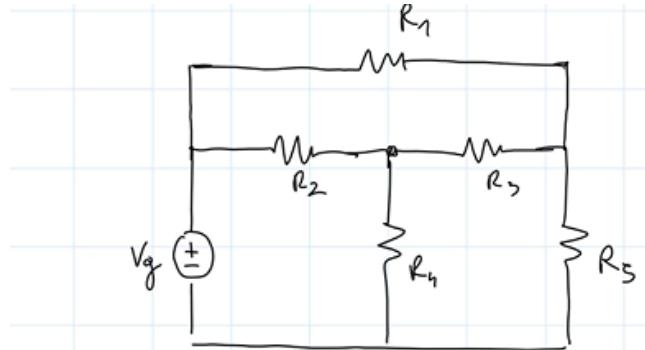
- Eventualmente, sostituire le tensioni/correnti nella LK con leggi costitutive.

$$LKT_I = V_g - R_1 i - R_2 i + \alpha R_1 i$$

Da cui:

$$i = \frac{V_g}{R_1(1 - \alpha) + R_2} = 15 \text{ A}$$

Esercizio 3. Calcolare $P_{E,g}$ nel circuito in Figura 14.



$$R_1 = 6 \Omega, R_2 = 24 \Omega, R_3 = 6 \Omega \\ R_4 = 6 \Omega, R_5 = 9 \Omega, V_g = 36 V$$

Figura 14

Procediamo alla trasformazione stella-triangolo dei resistori 2, 3 e 4. Ottieniamo il circuito in Figura 15.

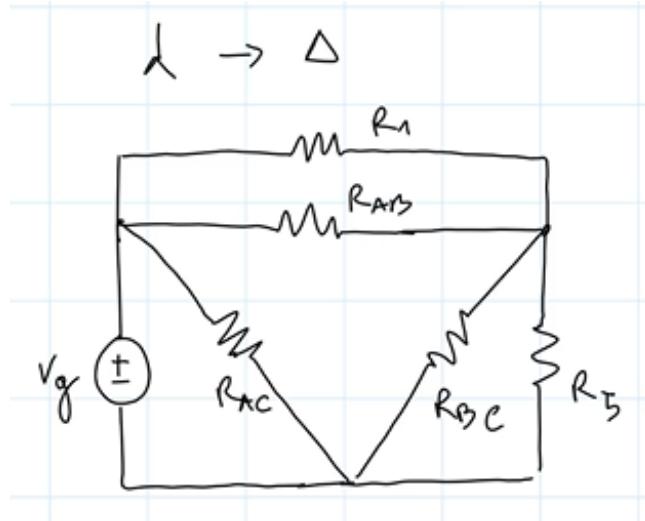


Figura 15

Applicando le trasformazioni triangolo-stella, $R_{AB} = 54 \Omega$, $R_{BC} = 13,5 \Omega$, $R_{AC} = 54 \Omega$. Procediamo con la semplificazione serie-parallelo:

- R_1 è in parallelo a R_{AB} , con $R_{eq1} = \frac{27}{5} \Omega$;
- R_5 è in parallelo a R_{BC} , con $R_{eq2} = \frac{27}{5} \Omega$;
- R_{eq1} e R_{eq2} sono in serie con $R_{eq3} = \frac{54}{5} \Omega$;
- R_{AC} è in parallelo a R_{eq3} , con $R_{eq} = 9 \Omega$.

Risulta dunque che $P_{E_g} = P_{A,R_{eq}} = \frac{V_g^2}{R_{eq}} = 144W$.

Analogamente, si può risolvere l'esercizio applicando una trasformazione triangolo-stella, ottenendo il circuito in Figura 16.

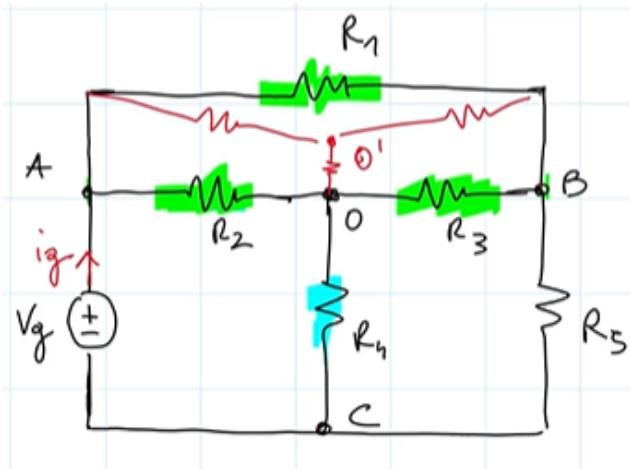


Figura 16

Applicando le trasformazioni stella-triangolo, $R_A = 4 \Omega$, $R_B = 1 \Omega$, $R_O = 4 \Omega$. Procediamo con la semplificazione serie-parallelo:

- R_O è in serie con R_4 , con $R_{eq1} = 10\Omega$
- R_B è in serie con R_5 , $R_{eq2} = 10\Omega$;
- R_{eq1} è in parallelo a R_{eq2} , con $R_{eq3} = 5 \Omega$;
- R_{eq1} e R_{eq2} sono in serie con $R_{eq3} = \frac{54}{5} \Omega$;
- R_A è in serie a R_{eq3} , con $R_{eq} = 9 \Omega$.

Risulta quindi, $P_{E_g} = P_{A,R_{eq}} = \frac{V_g^2}{R_{eq}} = 144W$, coerentemente con quanto risultante dalla prima risoluzione.

7 Metodi generali per analisi dei circuiti

Passiamo in rassegna metodi che permettano la soluzione di circuiti di complessità arbitraria.

Un metodo *a forza bruta* consiste nel risolvere un sistema con LKC per ogni superficie chiusa, LKT per ogni sequenza chiusa di nodi e le leggi costitutive di ogni componente. Porta sicuramente a una soluzione, ma potenzialmente con un numero infinito di equazioni. Osserviamo dunque la necessità di individuare *Metodi ridotti*.

7.1 Metodo delle equazioni di Kirchhoff

IDEA: esistono due proprietà fondamentali dei circuiti connessi:

Proprietà 1 La scrittura della LKT per un insieme di maglie linearmente indipendenti² origina un sistema di equazioni linearmente indipendenti.

Il numero massimo di maglie indipendenti m , detti r il numero di rami e n il numero di nodi del circuito, $m = r - n + 1$.

Proprietà 2 La scrittura delle LKC per $n - 1$ nodi di un circuito con n nodi origina un sistema di equazioni linearmente indipendenti.

Dunque, per descrivere la topologia di un circuito connesso, bastano m LKT e $n - 1$ LKC.

Pertanto, il *Metodo delle equazioni di Kirchhoff*, consiste nello scrivere m LKT, $n - 1$ LKC e r leggi costitutive. Sono cioè sufficienti $(m) + (n - 1) + r = (r - n + 1) + (n - 1) + r = 2r$ equazioni per risolvere il circuito.

In questo modo però non si tiene conto delle proprietà delle connessioni in serie (la corrente è la stessa nella serie). La considerazione di questa proprietà porta al prossimo metodo.

7.2 Metodo dei potenziali di nodo

Oltre alle due proprietà viste sopra, si tiene conto della proprietà delle serie. Riformuliamo dunque la definizione di nodo, e di conseguenza quella di ramo.

Definizione 30 (Nodo (definizione operativa)). *Punto del circuito a cui afferiscono 3 o più rami (non soltanto 2 come nella definizione rigorosa)*

Definizione 31 (Ramo (definizione operativa)). *Un ramo non coincide più necessariamente con un bipolo, ma può essere anche una serie di bipoli.*

Introduciamo inoltre il concetto di *potenziale elettrico nodale*. Ricordando la Definizione 17, e chiamando e la funzione potenziale elettrico, possiamo porre a 0 il potenziale di un nodo, considerandolo collegato a terra.

Dunque il *Metodo dei potenziali di nodo* consiste in:

²Un insieme di maglie linearmente indipendenti è un insieme di maglie in un cui ciascuna maglia contiene almeno un ramo che non appartiene a nessuna altra

- 1 Selezionare un nodo di riferimento, e porne convenzionalmente il potenziale a 0;
- 2 Applicare la LKC ai rimanenti $n - 1$ nodi;
- 3 Esprimere le $n - 1$ correnti che compaiono nelle LKC, in funzione dei potenziali di nodo ($i_k(t) = f(e_k, e_h)$).³
- 4 Risolvere il sistema lineare formato da $n - 1$ equazioni, per ottenere i potenziali di nodo, e ricavare le correnti.

Per la possibilità di scrivere la soluzione della rete "a prima vista", questo metodo è anche detto *per ispezione (diretta)*.

7.2.1 Potenziali di nodo per rami controllabili in tensione - rami di tipo 1 e 2

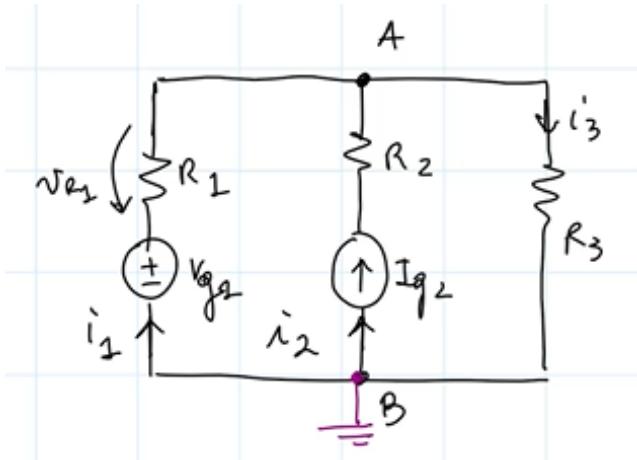


Figura 17. Circuito relativo all'Esercizio 4

Esercizio 4. Nella Figura 17, siano $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $V_{g1} = 30V$, $I_{g2} = -3 A$. Risolvere il circuito tramite il metodo dei potenziali di nodo.

- 1 Poniamo $e_B = 0$.
- 2 $LKC_A : i_3 - i_1 - i_2 = 0$
- 3 Vediamo alcuni procedimenti generali per ricavare le f per rami di tipo analogo a quelli che compaiono in questo circuito.

³Questo passaggio richiede l'ipotesi implicita di lavorare con componenti controllabili in tensione.

Rami di tipo 1 (1 e 3 in questo circuito) Rami contenenti resistore e generatore di tensione. LKT: $v_{AB} + v_{R_1} - V_{g1} = 0$, dunque $i_1 = G_1 V_{g1} + G_1(e_B - e_A) = f_1(e_A, e_B)$ e, analogamente, $i_3 = G_3(e_A - e_B)$.

Ramo di tipo 2 (ramo 2 in questo circuito) $i_2 = I_{g2}$ per la legge costitutiva del generatore stesso. Rami di tipo 2 non introducono incognite nel sistema in realtà.

$$4 \quad LKC_A : f_3(e_A, e_B) - f_1(e_A, e_B) - f_2(e_A, e_B) = 0 \\ LKC_A : -G_1 V_{g1} - G_1(e_B - e_A) - I_{g2} + G_3(e_A - e_B) = 0$$

$$e_A = \frac{G_1 V_{g1} + I_{g2}}{G_3 + G_1} = 20,25 \text{ V}$$

Risulta dunque che $i_3 = 6,75 \text{ A}$, $i_2 = I_{g2} = -3 \text{ A}$, $i_1 = \frac{V_{g1} - e_A}{R_1} = 9,75 \text{ A}$.

Facendo riferimento all'equazione risolvente del circuito in Esercizio 4,

$$-G_1 V_{g1} - G_1(e_B - e_A) - I_{g2} + G_3(e_A - e_B) = 0$$

La possiamo riorganizzare in:

$$(G_1 + G_3)e_A - (G_1 + G_3)e_B = G_1 V_{g1} + i_{g2}$$

$$\left(\sum_{\substack{\text{rami} \\ \text{connessi ad } A}} G_{\text{ramo}} \right) e_A - \sum_{\substack{\text{rami} \\ \text{tra } A \text{ e altri}}} G_{\text{ramo}} e_{\text{altro}} = \\ = \sum_k^{n_{\text{gen}}} I_{g,k}$$

Nel caso di reti binodali, il calcolo si riduce al Teorema di Millman

$$V = \frac{\sum_k i_{c.c.,k}}{\sum_k G_k}$$

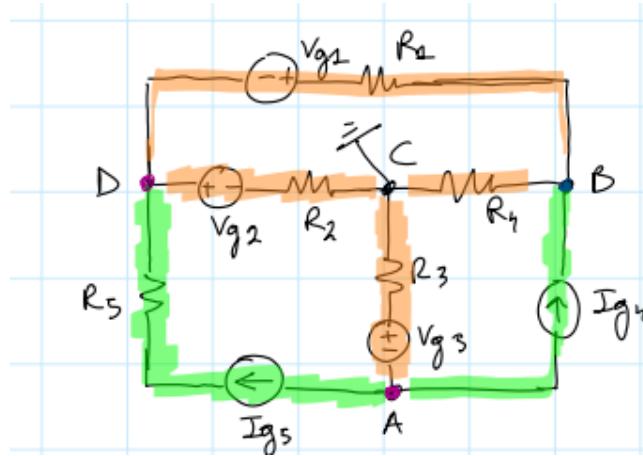


Figura 18. Circuito relativo all'Esercizio 5

Esercizio 5. Nella Figura 17, siano $R_1 = R_2 = \dots = R_5 = 1 \Omega$, $V_{g1} = 3 V$, $V_{g2} = 13 V$, $V_{g3} = 12 V$, $I_{g4} = 4 A$, $I_{g5} = 3 A$. Risolvere il circuito tramite il metodo dei potenziali di nodo e scrivere il sistema risolvente per ispezione.

Pongo a terra in nodo C, $e_C = 0$.

$$\begin{cases} e_c = 0 \\ G_3 e_A - G_3 e_C = G_3 V_{g3} - I_{g4} - I_{g5} \\ (G_1 + G_4) e_B - G_4 e_C - G_1 e_D = V_{g1} G_1 + I_{g4} \\ (G_1 + G_2) e_D - G_2 e_C - G_1 e_B = -G_1 V_{g1} + G_2 V_{g2} + I_{g5} \end{cases}$$

Risoluzione tramite il Metodo di Cramer. (La prima è detta matrice delle conduttanze [K])

$$\begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 + G_3 & -G_1 \\ 0 & -G_1 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_3 V_{g3} - I_{g4} - I_{g5} \\ G_1 V_{g1} + I_{g4} \\ -G_2 V_{g1} + G_2 V_{g2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e_A = \frac{\det[K_1]}{\det[K]} \\ e_B = \frac{\det[K_2]}{\det[K]} \\ e_D = \frac{\det[K_3]}{\det[K]} \end{cases}$$

Utilizzando il Metodo di Laplace per il calcolo dei determinanti,

$$\det(K) = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \det(K_1) = -57$$

$$\det(K_1) = -57, \det(K_2) = 27, \det(K_3) = 33.$$

Dunque,

$$\begin{cases} e_A = \frac{-57}{3} = -19 \text{ V} \\ e_B = \frac{27}{3} = 9 \text{ V} \\ e_D = \frac{33}{3} = 11 \text{ V} \end{cases}$$

Prendendo i VDR delle correnti seguendo le direzioni dei generatori, procediamo al calcolo.

$$i_1 = \frac{V_{g1} - e_B - e_D}{R_1} = 5 \text{ A}$$

In maniera analoga, utilizzando LKT e LKC, $i_2 = 2 \text{ A}$, $i_3 = -7 \text{ A}$, $i_4 = -9 \text{ A}$, $i_5 = I_{g5} = 3 \text{ A}$.

7.2.2 Potenziali di nodo per rami non controllabili in tensione - rami di tipo 3

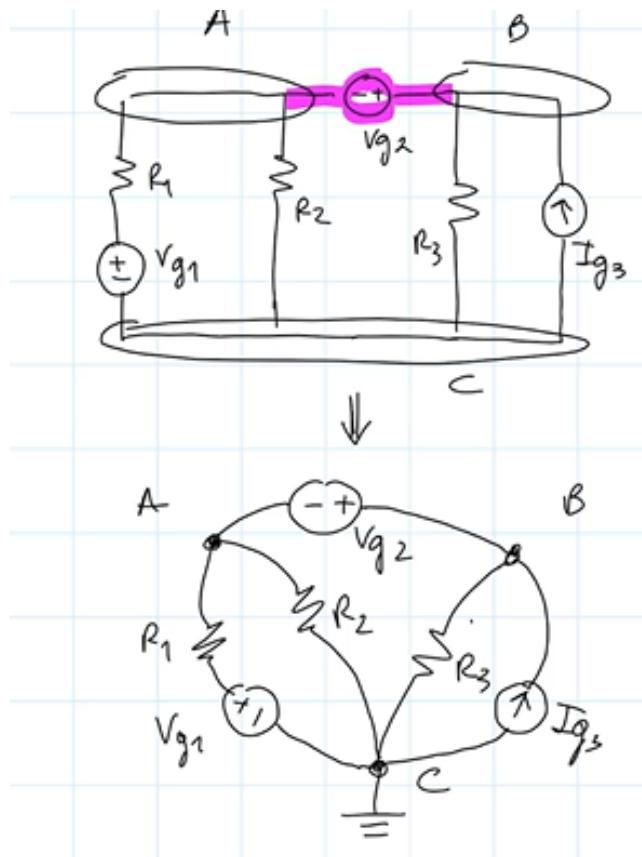


Figura 19

Esercizio 6. 1. Scelta nodo di riferimento

2. Scrittura del sistema come se le correnti dei rami di tipo 3 fossero note
3. Aggiunta di un'equazione per ogni ramo di tipo 3 (vincolo tra i potenziali nodali dato dal generatore).

$$\begin{cases} e_C = 0 \\ (G_1 + G_2)e_A = G_1 V_{g1} - I_{g2} \\ G_3 e_B = I_{g3} + I_{g2} \\ e_B - e_A = V_{g2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & 0 & 1 \\ 0 & G_3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ I_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 V_{g1} \\ I_{g3} \\ V_{g2} \end{bmatrix}$$

Possibile risolverlo con Cramer o per sottrazione membro a membro dell'equazione per A con quella per B.

In questo caso, con un solo ramo di tipo 3, sarebbe possibile risolvere il circuito anche mettendo a terra il nodo A, in modo da ottenere calcoli più convenienti.

$$\begin{cases} e_A = 0 \\ (G_1 + G_2 + G_3)e_C - G_3 e_B = G_1 V_{g1} - I_{g2} \\ G_3 e_B = I_{g3} + I_{g2} \\ e_B = V_{g2} \end{cases}$$

$$e_C = \frac{G_3 V_{g2} - G_1 V_{g1} - I_{g3}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$i_{g2} = i_{R3} - I_{g3}$$

7.2.3 Potenziali di nodo in presenza di generatori pilotati

Esercizio 7 (Generatore di tensione pilotato in tensione). Si faccia riferimento alla Figura 20

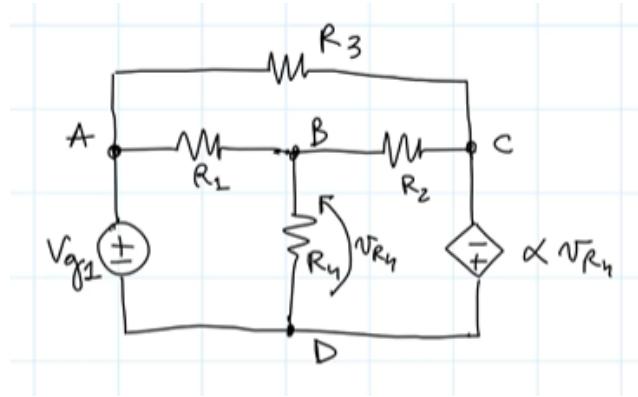


Figura 20

Esprimo la variabile di controllo come $f(e_k, e_4)$: $v_{g2} = \alpha v_{R4}$.

$$\begin{cases} e_D = 0 \\ e_C = -v_{g2} = \alpha v_{R4} = -\alpha e_B \\ e_A = v_{g1} \\ (G_1 + G_4 + G_2)e_B - G_2e_C - G_1e_A = 0 \end{cases}$$

$$e_B = \frac{G_1 V_{g1}}{G_1 + G_4 + G_2(1 + \alpha)}$$

Esercizio 8 (Generatore di tensione pilotato in corrente). Si faccia riferimento alla Figura 21

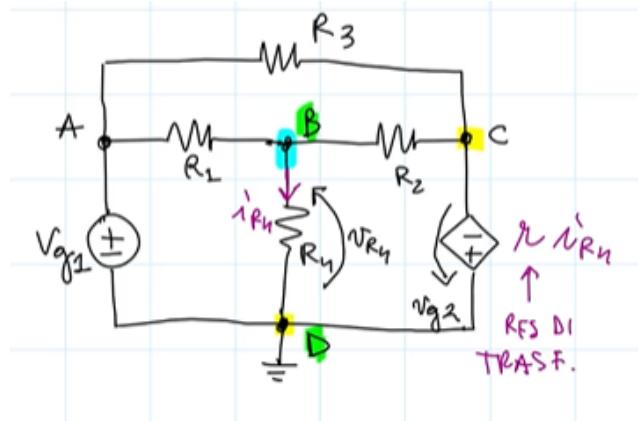


Figura 21

Esprimo la variabile di controllo come $f(e_k, e_4)$: $i_{R4} = G_4 v_{R4} = G_4(e_B -$

e_D).

$$\begin{cases} e_D = 0 \\ e_C = -vg2 = -rG_4e_B \\ e_A = v_{g1} \\ (G_1 + G_4 + G_2)e_B - G_2e_C - G_1e_A = 0 \end{cases}$$

$$e_B = \frac{G_1V_{g1}}{G_1 + G_4 + G_2(1 + rG_4)}$$

Esercizio 9 (Generatore di corrente pilotato in corrente). Si faccia riferimento alla Figura 22

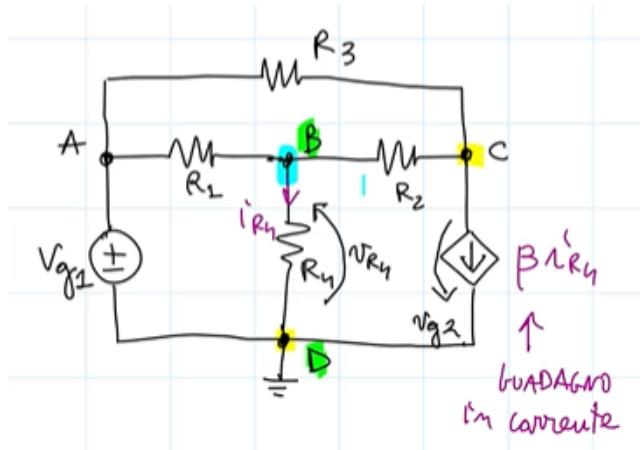


Figura 22

Il ramo del generatore è ora di tipo 2, quindi può essere regolarmente inserito nel sistema risolvente.

$$\begin{cases} e_D = 0 \\ e_A = v_{g1} \\ (G_3 + G_2)e_C - G_2e_B - G_3e_A = -ig2 = \beta i_{R4} = \beta G_4e_B \\ (G_1 + G_4 + G_2)e_B - G_2e_C - G_1e_A = 0 \end{cases}$$

Ed è dunque possibile risolvere il sistema, essenzialmente ridotto a un sistema di due equazioni (linearmente indipendenti) in due incognite.

Esercizio 10 (Generatore di corrente pilotato in tensione). Si faccia riferimento alla Figura 23

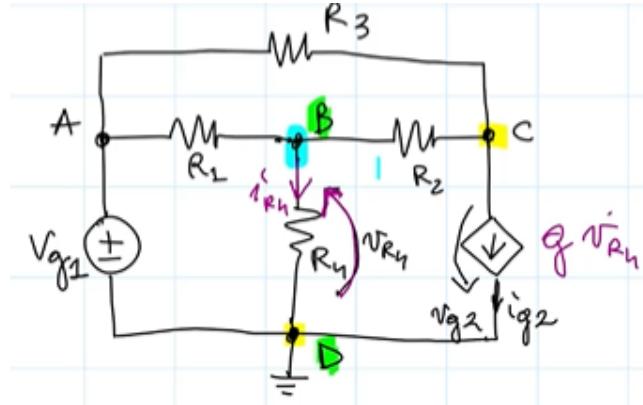


Figura 23

Il ramo del generatore è ora di tipo 2, quindi può essere regolarmente inserito nel sistema risolvente.

$$\begin{cases} e_D = 0 \\ e_A = v_{g1} \\ (G_3 + G_2)e_C - G_2e_B - G_3e_A = -ig2 = gv_{R4} = -ge_B \\ (G_1 + G_4 + G_2)e_B - G_2e_C - G_1e_A = 0 \end{cases}$$

Ed è dunque possibile risolvere il sistema, essenzialmente ridotto a un sistema di due equazioni (linearmente indipendenti) in due incognite.

8 Componenti dinamici

8.1 Condensatore ideale

Definizione 32 (Condensatore ideale). *Componente di un circuito a parametri concentrati in cui si "concentra" la proprietà della capacità (C).*

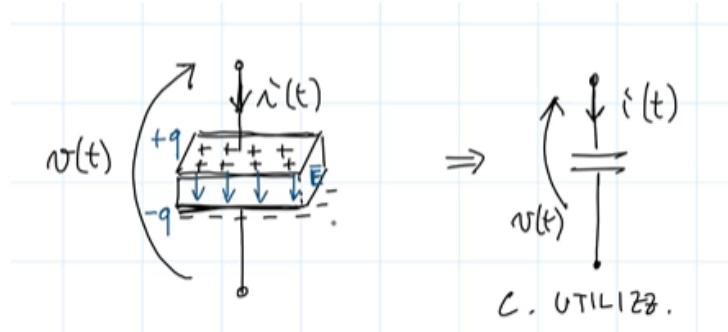


Figura 24. Rappresentazione schematizzata e simbolo in un circuito a parametri concentrati di un condensatore ideale

$$q(t) = Cv(t)$$

$$\frac{d}{dt}q(t) = C \frac{d}{dt}v(t)$$

Legge 15 (Legge costitutiva del condensatore ideale).

$$i(t) = C \frac{d}{dt}v(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

Classificazione:

- *lineare*
- *controllato in tensione o in corrente*
- *con memoria (dinamico)*
- *se $v(t) = \text{cost}$, si comporta come un circuito aperto.*
- *componente passivo*

$$W_A(t) = C \int_{-\infty}^t v(t) \frac{dv(t)}{dt} dt = C \int_0^{v(t)} v dv = \frac{1}{2} Cv^2(t) \geq 0$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è dovuta al campo elettrico. Si dice dunque che $v(t)$ è la variabile di stato di un condensatore, perché, da sola, ne determina lo stato (Energia).

Osserviamo la proprietà di continuità di $v(t)$.
Se $v(t)$ è discontinua al tempo $t = \tau$

$$v(\tau^-) \neq v(\tau^+)$$

$$\Rightarrow i(\tau) = C \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{\tau} = \infty$$

Perciò varrebbe l'assurdo

$$P_A(\tau) = v(\tau)i(\tau) = \infty$$

Se ne conclude che non è possibile avere una tensione discontinua ai capi di un condensatore. Ossia $v(\tau^-) = v(\tau^+) \quad \forall \tau$.

Per un condensatore piano, $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{s}{d}$.

8.2 Induttore ideale

Definizione 33 (Induttore ideale). *Componente di un circuito a parametri concentrati in cui si "concentra" la proprietà dell'induttanza (L).*

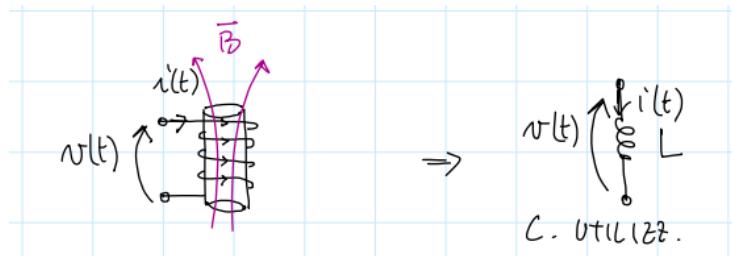


Figura 25. Rappresentazione schematizzata e simbolo in un circuito a parametri concentrati di un induttore ideale

$$\Phi(\vec{B}, t) = Li(t)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B}, t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

Legge 16 (Legge costitutiva dell'induttore ideale).

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt$$

Classificazione:

- *lineare*
- *controllato in corrente o in tensione*
- *con memoria (dinamico)*
- *se $i(t) = \text{cost}$, si comporta come un cortocircuito.*
- *componente passivo*

$$W_A(t) = L \int_{-\infty}^t i(t) \frac{di(t)}{dt} = L \int_0^{v(t)} idi = \frac{1}{2} Li^2(t) \geq 0$$

L'energia immagazzinata nell'induttore è dovuta al campo magnetico. $i(t)$ è la variabile di stato dell'induttore.

Osserviamo la proprietà di continuità di $i(t)$.
Se $i(t)$ è discontinua al tempo $t = \tau$

$$\begin{aligned} i(\tau^-) &\neq i(\tau^+) \\ \Rightarrow v(\tau) &= L \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{\tau} = \infty \end{aligned}$$

Perciò varrebbe l'assurdo

$$P_A(\tau) = v(\tau)i(\tau) = \infty$$

Se ne conclude che non è possibile avere una corrente discontinua ai capi di un induttore. Ossia $i(\tau^-) = i(\tau^+) \quad \forall \tau$.

9 Regime Sinusoidale

Definizione 34 (Regime Sinusoidale). *Condizione di funzionamento di un circuito a parametri concentrati in cui tutte le tensioni e le correnti sono rappresentabili tramite funzioni di tipo sinusoidale e isofrequenziali.*

Sinusoide:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

Siano:

- A_M l'ampiezza dell'oscillazione (quanto vale il valore massimo rispetto allo 0);
- ω la pulsazione, in (rad/s). Vale $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, con f frequenza, ossia numero di cicli al secondo e T periodo, ossia tempo necessario per il compimento di un ciclo;
- α fase iniziale.

Proprietà delle funzioni sinusoidali.

- È sempre possibile esprimere un seno come coseno e viceversa ($\sin(x) = \cos(x - \pi/2) \leftrightarrow \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$), perciò si può parlare genericamente di funzioni sinusoidali, e trattarne una soltanto non causa perdita di generalità;
- Valor medio nullo.

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} T/2a(t)dt = 0$$

- Valore efficace (anche detto RMS, root mean square) A in rapporto fisso con l'ampiezza

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t)dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

9.1 Introduzione alla risoluzione di un circuito in regime sinusoidale

Come abbiamo già visto per circuiti in corrente diretta, in generale la soluzione di un circuito può essere ottenuta applicando direttamente le Leggi di Kirchhoff:

$$Soluzione \longleftrightarrow \begin{cases} LKT : f(v_k(t)) \\ LKC : f(i_k(t)) \end{cases} LC$$

Nel caso di circuiti in regime sinusoidale, questo sistema presenta peculiare difficoltà tecniche dovute alla presenza delle funzioni sinusoidali stesse nelle LKT e LKC, e dalla presenza di leggi costitutive integro-differenziali.

Siccome le derivate e gli integrali delle sinusoidi sono a loro volta sinusoidi, sappiamo comunque che tutte le tensioni e correnti sono descritte da sinusoidi. Osserviamo anche che ogni sinusoide in un circuito in regime sinusoidale, nota la pulsazione, è descritta da due valori (ampiezza e fase iniziali). Proviamo dunque a operare con numeri complessi, descritti a loro volta dai valori di ampiezza e fase, per poi sviluppare un metodo generale che consenta la risoluzione di circuiti in regime sinusoidale con calcoli più semplici.

Il passaggio da sinusoidi a numeri complessi può essere effettuato in maniera semplice tramite la *Trasformata di Steinmetz*

9.2 Trasformata di Steinmetz

Definizione 35 (Trasformata di Steinmetz). *Operatore lineare che associa ad una sinusoide di pulsazione ω data un numero complesso in modo univoco.*

$$S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\sqrt{2}}{T} \frac{1}{2} A_M e^{j\alpha} T = A e^{j\alpha} = \underline{A}$$

Il numero complesso \underline{A} è chiamato fasore rappresentativo di $a(t)$. Questa trasformata può essere intesa come un caso particolare della Trasformata di Fourier.

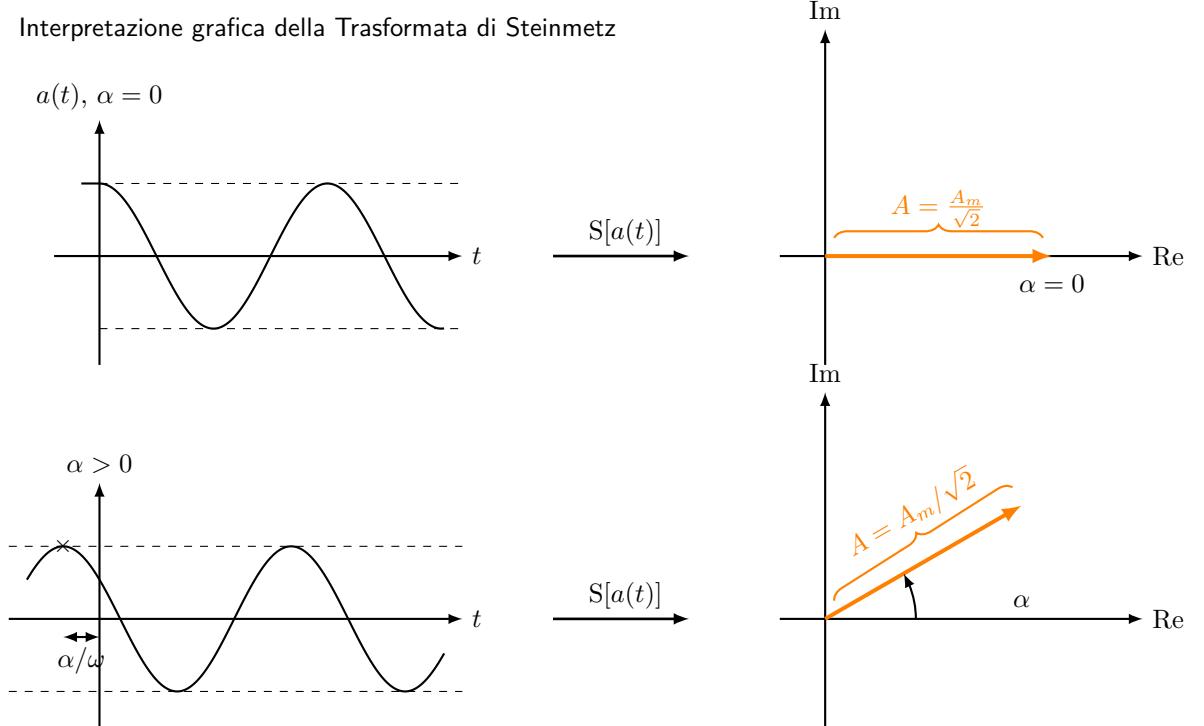


Figura 26. Interpretazione grafica della Traformata di Steinmetz

Definizione 36 (Antitrasformata di Steinmetz). *Operatore lineare che associa ad un fasore la sinusode di pulsazione ω nota.*

$$S^{-1}[\underline{A}] = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{A} e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(A e^{j(\omega t + \alpha)}) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = a(t)$$

Il numero complesso $f(t) = \sqrt{2} \underline{A} e^{j\omega t}$ è chiamato fasore rotante. Si veda la Figura 27 per un'interpretazione grafica dell'antitrasformata. L'esponenziale di modulo unitario con fase variabile nel tempo, con pulsazione ω consente il passaggio al dominio temporale

Proprietà della Trasformata di Steinmetz e operazioni con i fasori:

- linearità. Si dimostra facilmente dalla linearità della distributività della moltiplicazione tra numeri complessi e dalla linearità dell'operatore integrale.

$$\text{Se } c(t) = a(t) + b(t), \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = [\operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B)] + j[\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)] = \sqrt{\underline{A}^2 + \underline{B}^2} e^{j(\alpha_A + \alpha_B)}.$$

- Moltiplicazione per uno scalare $K \in \mathbb{R}$. $\underline{C} = K \underline{A} = K A e^{j\alpha} \iff$

$$\begin{cases} C = KA \\ \arg(\underline{C}) = \begin{cases} \arg(\underline{A}), k > 0 \\ \arg(\underline{A}) + \pi, k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

- Moltiplicazione interna (Moltiplicazione per un numero complesse) $\underline{Z} \in$

$$\underline{C} = Z A e^{j\alpha_z + \alpha} \iff \begin{cases} C = Z A \\ \arg(\underline{C}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{A}) \end{cases}.$$

- Trasformata della derivata.

$$S\left[\frac{d}{dt}a(t)\right] = S[-\omega A_M \cos(\omega t + \alpha + \pi/2)] = \omega A_M / \sqrt{2} e^{j\alpha + \pi/2} = \omega \underline{A} e^{j\pi/2} = j\omega \underline{A}$$

In questo modo, le operazioni di derivata temporale vengono ricondotte a operazioni algebriche.

$$\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j\omega \underline{X}$$

- Trasformata della funzione integrale.

Analogamente,

$$\int x(t) dt \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{X}$$

9.3 Metodo Simbolico

Possiamo dunque utilizzare trasformata e antitrasformata di Steinmetz per l'analisi di un circuito in regime sinusoidale evitando equazioni integro-differenziali, risolvendo quelle algebriche associate nel campo simbolico (complesso) associato, secondo il percorso in Figura 28

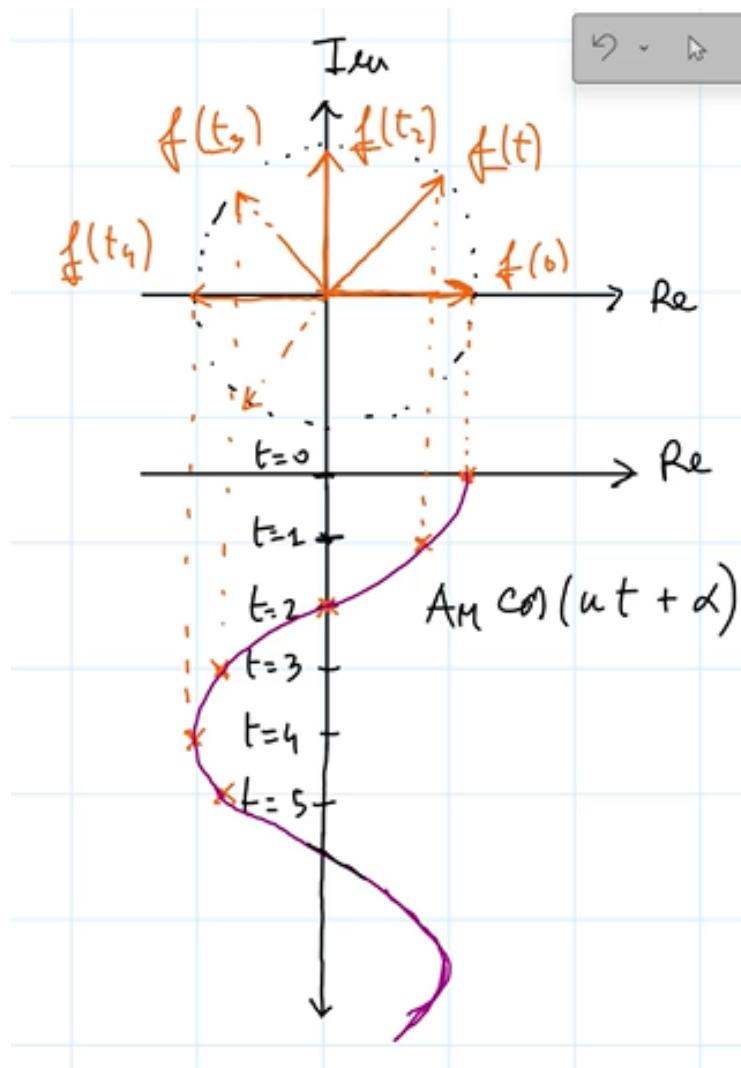


Figura 27. Interpretazione grafica dell'antitrasformata di Steinmetz

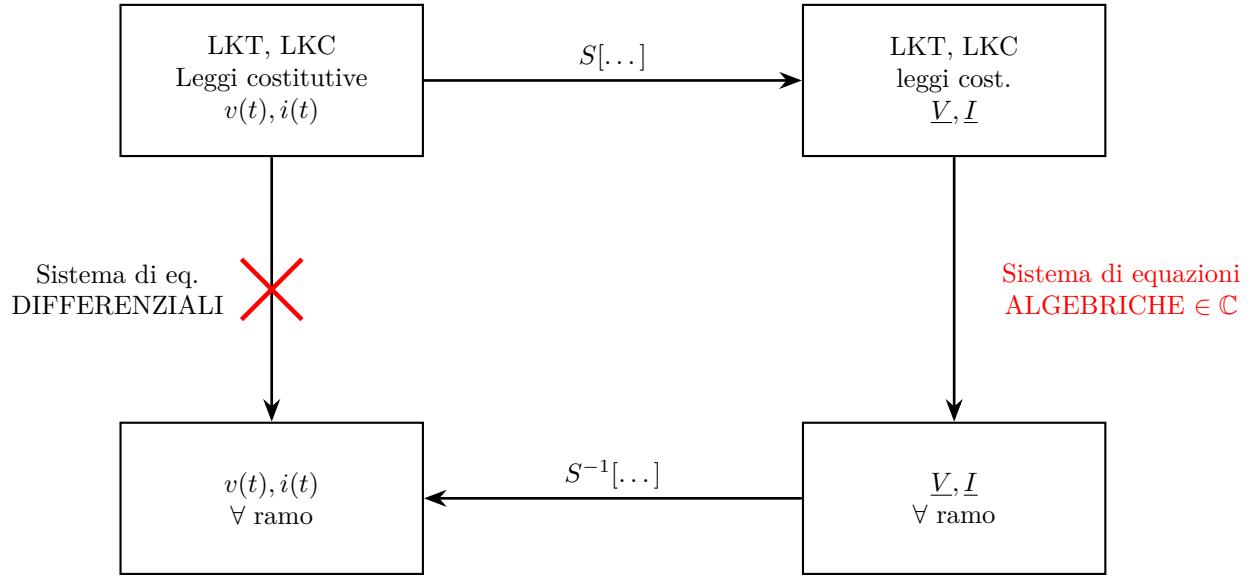


Figura 28. Schema del percorso di analisi nel dominio del tempo e della frequenza per circuiti in regime sinusoidale applicando il Metodo Simbolico, tramite la Trasformata di Steinmetz

9.4 Leggi topologiche e costitutive in dominio simbolico

Legge 17 (Legge di Kirchhoff delle correnti).

$$LKC : \sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad \xrightarrow{S[\dots]} \quad \sum_{k=1}^n \underline{I}_k(t) = 0$$

Legge 18 (Legge di Kirchhoff delle tensioni).

$$LKT : \sum_{k=1}^m v_k(t) = 0 \quad \xrightarrow{S[\dots]} \quad \sum_{k=1}^n \underline{V}_k(t) = 0$$

Legge 19 (Legge costitutiva del resistore lineare).

$$\underline{V} = R \underline{I}$$

Nel campo complesso, dunque, i fasori rappresentativi di corrente e tensione sono in fase (Figura 29b). Nel dominio temporale, saranno rappresentati da due sinusoidi in fase, con ampiezza, in generale, differente (Figura 29a).

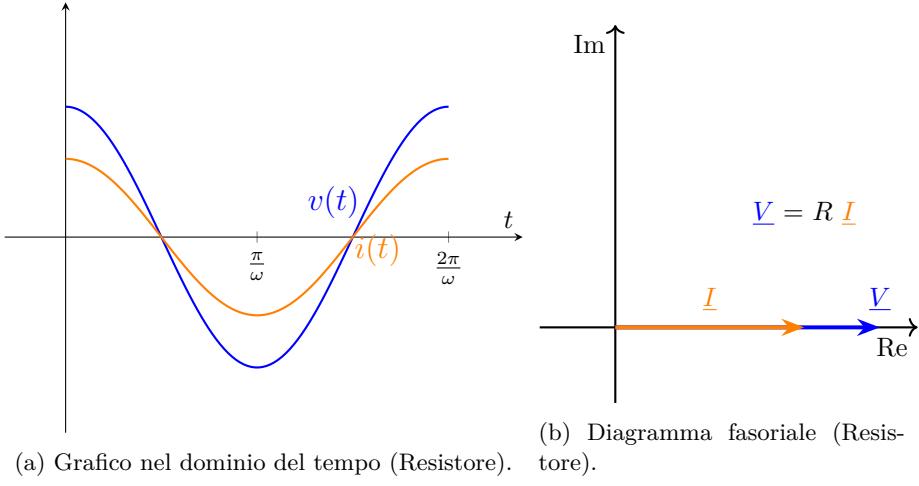


Figura 29. Confronto tra dominio del tempo e simbolico per un resistore.

Legge 20 (Legge costitutiva del condensatore).

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{S[\dots]} \underline{I} = j\omega C \underline{V}$$

$$\underline{V} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

Nel campo complesso, il fasore rappresentativo della corrente è sfasato di $\pi/2$ (in positivo) rispetto alla tensione (Figura 30b). Nel dominio temporale, dunque, la corrente risulta "in anticipo" di una fase $\pi/2$ rispetto alla tensione (Figura 30a). Si dice anche che il fasore della corrente è in quadratura in anticipo rispetto alla tensione. Si ottiene la stessa conclusione considerando che $\frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$.

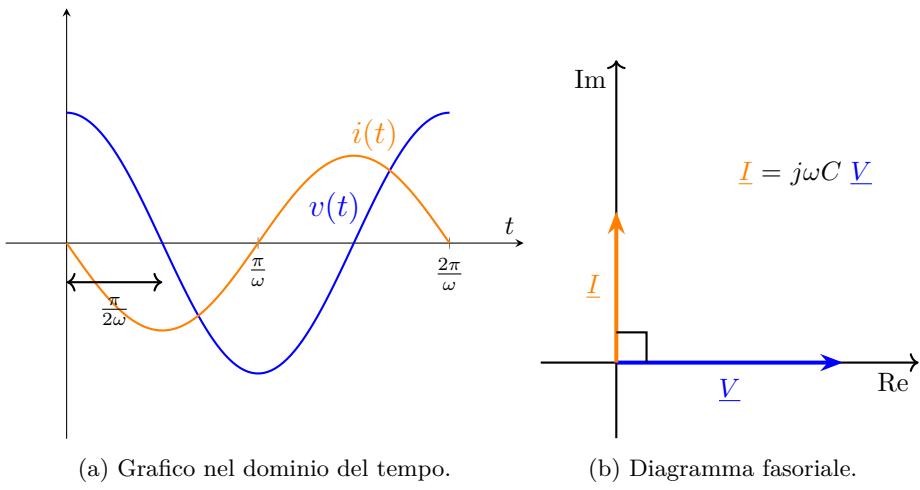


Figura 30. Confronto tra dominio del tempo e dominio simbolico per un condensatore.

Legge 21 (Legge costitutiva dell'induttore).

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{S[\dots]} \underline{V} = j\omega LI$$

$$\underline{I} = -j \frac{\underline{V}}{\omega L}$$

Nel campo complesso, il fasore rappresentativo della corrente è sfasato di $\pi/2$ (in negativo) rispetto alla tensione (Figura 31b). Nel dominio temporale, dunque, la corrente risulta "in anticipo" di una fase $\pi/2$ rispetto alla tensione (Figura 31a). Si dice anche che il fasore della corrente è in quadratura in ritardo rispetto alla tensione. Si ottiene la stessa conclusione considerando che $\frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$.

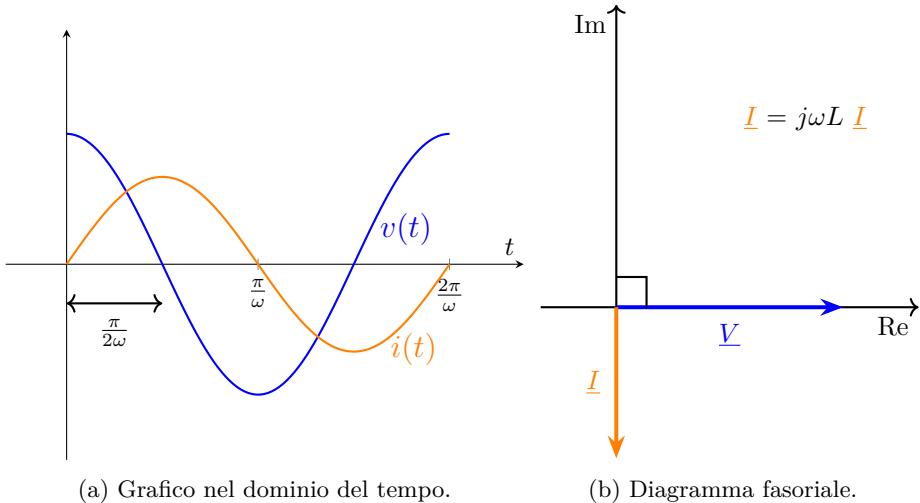


Figura 31. Confronto tra dominio del tempo e dominio simbolico per un induttore.

9.5 Legge di Ohm simbolica

Osserviamo, dunque, che per i componenti descritti sopra, i fasori tensione e corrente sono sempre proporzionali, con costanti diverse (Figura 32). Definiamo dunque l'**impedenza** come tale costante di proporzionalità. Questa grandezza ci sarà utile per formulare l'equivalente della Legge di Ohm in dominio simbolico.

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: } V = RI \\
 \text{Circuit diagram: A series circuit with a voltage source } V, \text{ a resistor } R, \text{ and an inductor } L. \\
 \text{Equation: } V = RI \\
 \text{Current: } I = \frac{V}{R} \\
 \text{Induced EMF: } -\frac{V}{L}I \\
 \text{Final Equation: } \frac{V}{I} = R + \frac{1}{L} \\
 \\[10pt]
 \text{Diagram 2: } V = -\frac{J}{wC}I \\
 \text{Circuit diagram: A series circuit with a voltage source } V, \text{ a capacitor } C, \text{ and an inductor } L. \\
 \text{Equation: } V = -\frac{J}{wC}I \\
 \text{Current: } J = \frac{V}{wC} \\
 \text{Induced EMF: } \frac{V}{I} \\
 \text{Final Equation: } \frac{V}{I} = -\frac{J}{wC} \\
 \\[10pt]
 \text{Diagram 3: } V = JWLI \\
 \text{Circuit diagram: A series circuit with a voltage source } V, \text{ an inductor } L, \text{ and a capacitor } C. \\
 \text{Equation: } V = JWLI \\
 \text{Current: } J = \frac{V}{WL} \\
 \text{Induced EMF: } \frac{V}{I} \\
 \text{Final Equation: } \frac{V}{I} = JW(L+C)
 \end{array}$$

Figura 32

Definizione 37 (Impedenza). Definiamo Impedenza $\underline{Z} \in \mathbb{C}$

$$\underline{Z} = \frac{V}{I}$$

Essa rappresenta quanto il bipolo a cui è riferita si oppone al passaggio di una corrente alternata in regime sinusoidale.

Chiamiamo sfasamento la quantità $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \alpha_V - \alpha_I$ e reattanza la parte immaginaria dell'impedenza, mentre notiamo che la parte reale dell'impedenza coincide con la resistenza del componente. La reattanza può assumere qualunque valore reale. La resistenza di un componente non è mai negativa, ma nell'analisi dei circuiti equivalenti che condurremo in seguito è possibile che emergano resistenze negative.

$$\underline{Z} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha_V - \alpha_I)} = Z \cos(\varphi) + jZ \sin(\varphi) = R + jX$$

Seguendo il procedimento contrario,

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \tan(X/R), & R > 0 \\ \tan(X/R) \pm \pi, & R < 0 \end{cases}$$

Studiamo l'impedenza dei bipoli considerati.

- *Per un resistore,*

$$Z_R = R$$

$$\varphi_R = \arg(\underline{Z}_R) = 0$$

Un bipolo di questo tipo, con reattanza nulla, è detto ohmico;

- *Per un condensatore, la resistenza è nulla. Si osservi che la reattanza è negativa.*

$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = X_C \iff \begin{aligned} Z_C &= \frac{1}{\omega C} \\ \varphi_C &= \arg(\underline{Z}_C) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- *Per un induttore, la resistenza è nulla. Si osservi che la (reattanza) è positiva*

$$\underline{Z}_L = j\omega L = X_L \iff \begin{aligned} Z_L &= \omega L \\ \varphi_L &= \arg(\underline{Z}_L) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Definizione 38 (Ammettenza). *Analogamente a come abbiamo introdotto la conduttanza come reciproco della resistenza, definiamo l'Ammettenza*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{V} e^{j(-\varphi)} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\left(-\frac{X}{R^2 + X^2}\right) = G + jB$$

dove G è la conduttanza, e coincide con $1/R$ nel caso di un bipolo ohmico; e B è detto suscettanza e in caso di bipolo induttivo o capacitivo $B = -1/X$.

Legge 22 (Legge di Ohm simbolica). Con riferimento al bipolo generico in Figura 33 con la convenzione dell'utilizzatore, valgono le seguenti relazioni, che esprimono la Legge di Ohm in dominio simbolico:

$$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I} \longleftrightarrow v = Ri$$

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{V} \longleftrightarrow i = Gv$$

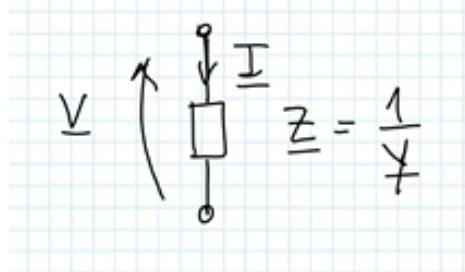


Figura 33

Esercizio 11. Con riferimento al circuito in Figura 34

- Trovare i fasori delle correnti in tutti i rami del circuito
- Determinare l'andamento temporale di $i_{g1}(t)$

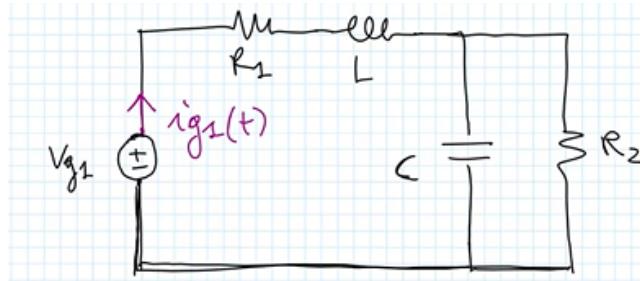


Figura 34. $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ mF}$, $V_{g1} = 12\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/2)$, $\omega = 2\pi f$, $f = 10^3 \text{ rad/s}$

Soluzione. Come indicato nello schema in Figura 28:

1. Circuito in dominio simbolico
2. Trasformazione di Steinmetz delle leggi costitutive
3. Soluzione di $\underline{V}, \underline{I}$
4. Antitrasformazione di Steinmetz per ottenere $v(t), i(t)$.

Dunque, per la risoluzione dell'esercizio, si può scrivere il sistema:

$$\begin{cases} \underline{V}_{g1} = S[V_{g1}] = 12e^{j\pi/2} = j12 \\ \underline{Z}_{R1} = 1 \\ \underline{Z}_{R2} = 2 \\ \underline{Z}_L = j\omega L = j \\ \underline{Z}_C = \frac{j}{\omega C} = -j \end{cases}$$

Osserviamo che le semplificazioni in serie e parallelo utilizzate per resistori, funzionano in maniera analoga per le impedenze:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{serie} &= \sum_k \underline{Z}_k \\ \underline{Z}_{parallelo} &= \frac{1}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} \end{aligned}$$

Semplificando il nostro circuito, otteniamo:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{eq1} = Z_{R1} + \underline{Z}_L = 1 + j \\ \underline{Z}_{eq2} = \frac{\underline{Z}_C \underline{Z}_{R2}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{R2}} = 0,4 - j0,8 \\ \underline{Z}_{eq3} = \underline{Z}_{eq1} + \underline{Z}_{eq2} = 1,4 + j0,2 \end{cases}$$

Risulta dunque:

$$\underline{I}_{g1} = \frac{\underline{V}_{g1}}{\underline{Z}_{eq3}} = 1,2 + j8,4$$

Facendo riferimento al circuito originario,

$$\begin{cases} \underline{I}_{R1} = \underline{I}_L = \underline{I}_{g1} \\ \underline{I}_C = \underline{I}_{g1} \frac{\underline{Z}_{R2}}{\underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_C} = -2,4 + j7,2 \\ \underline{I}_{R2} = \underline{I}_{g1} - \underline{I}_C = 3,6 + j1,2 \end{cases}$$

E infine, considerando che

$$\begin{cases} I_{g1} = \sqrt{Re(\underline{I}_{g1})^2 + Im(\underline{I}_{g1})^2} = \sqrt{1,2^2 + 8,4^2} = 8,49 \text{ A} \\ arg(\underline{I}_{g1}) = atan(8,4/1,2) = 1,43 \text{ rad} \end{cases}$$

si ottiene:

$$i_{g1}(t) = S^{-1}[\underline{I}_{g1}] = \sqrt{2}I_{g1}\cos(\omega t + arg(\underline{I}_{g1})) = \sqrt{2}I_{g1}\cos(\omega t + arg(\underline{I}_{g1})) = 8,49\sqrt{2}\cos(2000\pi t + 1,43) \text{ A}$$

9.6 Potenza in regime sinusoidale

In generale, sappiamo che $p_A(t) = v(t)i(t)$ (W). In regime sinusoidale, tuttavia è possibile trovarne un'espressione più funzionale. Consideriamo $\alpha_V = 0$

e $\alpha_I = -\varphi$, per semplificare i calcoli, senza perdita di generalità. Consideriamo una corrente in ritardo perché, generalmente, nelle applicazioni pratiche, la corrente è effettivamente in ritardo, perché i sistemi sono dominati da componente induttiva.

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) = I_M \cos(\omega t) \cos(\varphi) + I_M \sin(\omega t) \sin(\varphi) = i_a(t) + i_r(t)$$

Chiamiamo il primo termine della corrente, $i_a(t)$, in fase con la tensione, corrente attiva, mentre il secondo termine, $i_r(t)$, in quadratura con la tensione corrente reattiva.

$$p(t) = v(t) \cdot (i_a(t) + i_r(t)) = v(t)i_a(t) + v(t)i_r(t)$$

Studiamo ora i due termini dell'espressione della potenza.

Definizione 39 (Potenza istantanea attiva). *Chiamiamo potenza istantanea attiva il termine:*

$$p_a(t) = v(t)i_a(t) = V_M \cos(\omega t) I_M \cos(\omega t) \cos(\varphi) = V_M I_M \cos^2(\omega t) \cos(\varphi) = \frac{V_M I_M}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \cos(\varphi)$$

Da considerazioni analitiche, o dalla rappresentazione in Figura 35, si osserva che:

- ha frequenza doppia rispetto a $v(t)$ e $i(t)$
- ha valore medio $\neq 0$
- è unidirezionale ($p_a(t) \geq 0 \quad \forall t$)
- $w(t) = \int p(t) dt \geq 0$ (ombreggiato in Figura 35).
- essa è associata ai bipoli ohmici, o alla componente ohmica di bipoli non puri.

Per questo si conclude che la potenza istantanea attiva produce un lavoro "utile".

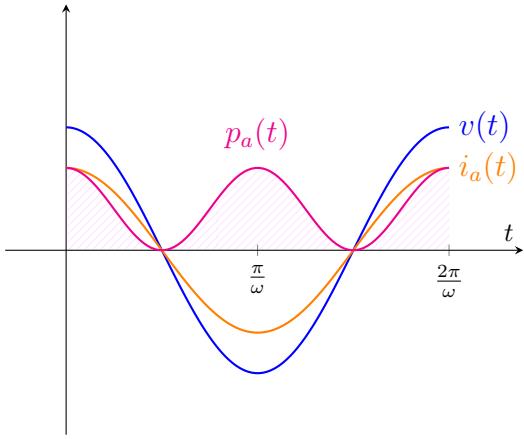


Figura 35. Possibile andamento della potenza istantanea attiva, per valori arbitrari di V_M , I_M e $\cos(\varphi)$. Si osservi che nel caso estremale in cui

Definizione 40 (Potenza istantanea reattiva). *Chiamiamo potenza istantanea reattiva il termine:*

$$p_r(t) = v(t)i_r(t) = V_M \cos(\omega t) I_M \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{V_M I_M}{2} \sin(2\omega t) \sin(\varphi)$$

Da considerazioni analitiche, o dalla rappresentazione in Figura 36, si osserva che:

- ha frequenza doppia rispetto a $v(t)$ e $i(t)$
- ha valore medio = 0
- è bidirezionale ($p_a(t) \geq 0$)
- $w(t) = \int_{-T/2}^{T/2} p(t)dt = 0$ (ombreggiato in Figura 36).
- essa è associata ai bipoli reattivi, o alla componente reattiva di bipoli non puri.

Per questo si conclude che la potenza istantanea reattiva non produce lavoro utile (perché non produce lavoro netto).

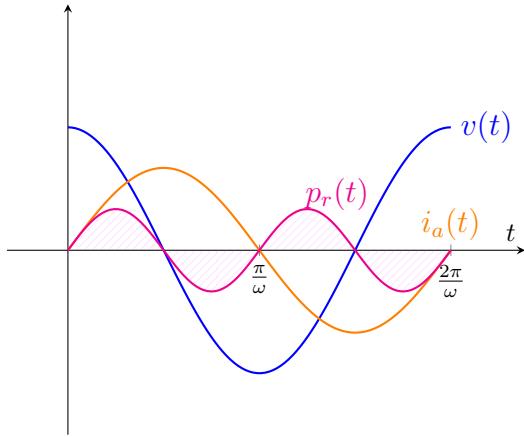


Figura 36. Possibile andamento della potenza istantanea reattiva, per valori arbitrari di V_M , I_M e $\cos(\varphi)$

Ricapitolando:

- Per componenti ohmici (R), la potenza è attiva, e il lavoro è dissipato in forma di energia termica.
- Per componenti reattivi (L , C), la potenza è reattiva e il lavoro compiuto è trasferimento di energia tra i componenti, ed è immagazzinata come energia elettrostatica (C) o magnetica (L); in alcune fasi assorbono energia, in una altra la restituiscono al generatore: il flusso è bidirezionale, e la bidirezionalità è necessaria al funzionamento del componente all'inversione della polarità.

Definizione 41 (Potenza attiva). *Chiamiamo Potenza attiva il valor medio della potenza istantanea su un periodo.*

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{V_M I_M}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \cos(\varphi) + \frac{V_M I_M}{2} \sin(2\omega t) \sin(\varphi) \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi) \right] = \frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi) = VI \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Si osserva dunque l'utilità dell'introduzione dei valori efficaci nella trattazione del regime sinusoidale: consentono di esprimere la potenza attiva in una forma più compatta.

Ci si riferisce comunemente a valori efficaci anche nel quotidiano, quando si dice che la tensione in un impianto domestico è 230 V (una volta 220 V). Il fattore $\cos(\varphi)$ è detto fattore di potenza.

- $\varphi = 0$: se $v(t)$ e $i(t)$ sono in fase, $\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow P = VI$;

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$: se $i(t)$ è in quadratura in ritardo su $v(t)$, $\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow P = 0 \forall V, I$.

Definizione 42 (Potenza reattiva). Chiamiamo Potenza reattiva l'ampiezza della potenza istantanea reattiva.

$$Q = \frac{V_M I_M}{2} \sin(\varphi) = VI \sin(\varphi) \quad (VA_r)$$

Q è misurata in VA_r , Volt-Ampère reattivi. Q misura l'entità dello scambio di potenza istantanea reattiva tra componenti reattivi e generatori.

- $\varphi = 0$: se $v(t)$ e $i(t)$ sono in fase, $Q = 0$;
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$: se $i(t)$ è in quadratura in ritardo rispetto a $v(t)$ sono in quadratura, $Q = VI$.

Definizione 43 (Potenza complessa).

$$\underline{N} = \underline{VI^*} = V e^{j\alpha_V} I e^{j\alpha_I} = V I e^{j\varphi} = V I \cos(\varphi) + j V I \sin(\varphi) = P + j Q$$

Risulta dunque:

$$\begin{cases} P = \operatorname{Re}(\underline{N}) \\ Q = \operatorname{Im}(\underline{N}) \end{cases}$$

Nel caso di generatori, l'unica relazione impiegabile in dominio complesso è (con convenzione del generatore),:

$$\underline{N}_E = \underline{VI^*}$$

Nel caso di bipoli passivi (con convenzione dell'utilizzatore),

$$\underline{N}_A = \underline{VI^*} = \underline{ZI^2} = RI^2 + jXI^2$$

- Resistore: $Z_R = R \Rightarrow \underline{N}_{A,R} = Z_R I^2 = RI^2$;
- Induttore: $Z_L = j\omega L \Rightarrow \underline{N}_{A,L} = \underline{Z_L I^2} = j\omega LI^2 \quad (Q = \omega LI^2 > 0)$;
- Condensatore: $Z_C = -\frac{j}{\omega C} \Rightarrow \underline{N}_{A,C} = \underline{Z_C I^2} = -\frac{j}{\omega C} I^2 \quad (Q = -\frac{1}{\omega C} I^2 < 0)$;

È possibile disegnare il numero complesso \underline{N} su un piano denominato triangolo delle potenze (Figura 37). L'angolo di \underline{N} con l'asse reale è φ , la proiezione di \underline{N} sull'asse reale è P , quello sull'asse immaginario Q . $N = |\underline{N}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (VA) è detto potenza apparente, e rappresenta l'entità delle sollecitazioni subite dal componente. Le caratteristiche di carico di un trasformatore sono spesso espresse proprio in VA .

Esercizio 12. Facendo riferimento alla Figura 38

- calcolare i fasori delle correnti in tutti i rami del circuito

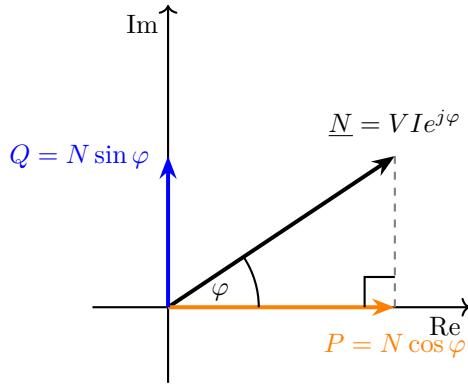


Figura 37. Triangolo delle potenze.

- verificare la conservazione della potenza complessa

$$\sum \underline{N}_E = \sum \underline{N}_A$$

$$\begin{cases} \sum \underline{P}_E = \sum \underline{P}_A \\ \sum \underline{Q}_E = \sum \underline{Q}_A \end{cases}$$

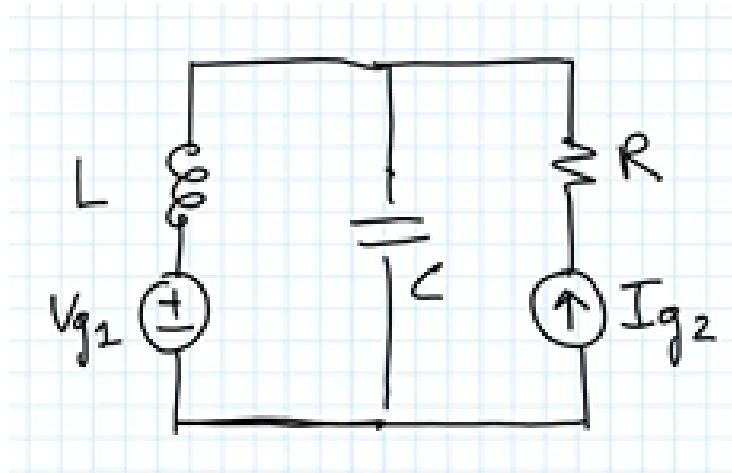


Figura 38. $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 500 \mu\text{F}$, $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, $V_{g1}(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2) \text{ V}$, $I_{g2}(t) = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/2) \text{ A}$.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_L &= j\omega L = j \\
\underline{Z}_C &= -\frac{j}{\omega C} = -j2 \\
Z_R &= R = 1 \Omega \\
\underline{V}_{g1} &= S[V_{g1}(t)] = 10e^{j0} = 10 \\
\underline{I}_{g2} &= S[I_{g2}(t)] = 4e^{j\pi/2} = j4 \\
\begin{cases} \underline{e}_B = 0 \\ (\underline{Y}_L + \underline{Y}_C)\underline{e}_A - \underline{Y}_L\underline{e}_B - \underline{Y}_C\underline{e}_B = \underline{Y}_L\underline{V}_{g1} + \underline{I}_{g2} \\ \underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{\underline{Z}_L} \cdot \frac{\underline{Z}_L^*}{\underline{Z}_L^*} = \frac{j\omega L}{\omega^2 L^2} = -\frac{j}{\omega L} = -j \\ \underline{Y}_C = j/2 \end{cases} \\
\underline{e}_A &= \frac{\underline{Y}_L\underline{V}_{g1} + \underline{I}_{g2}}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_C} = 12 \\
|\underline{e}_A| &= 12 V
\end{aligned}$$

Procediamo dunque al calcolo dei fasori delle correnti, utilizzando la convenzione del generatore per \underline{I}_{g1} e quella dell'utilizzatore per \underline{I}_C .

$$\begin{cases} \underline{I}_C = \frac{\underline{V}_C}{\underline{Z}_C} = \underline{e}_A \underline{Y}_C = j6 \\ \underline{I}_{g1} = \underline{I}_C - \underline{I}_{g2} = j2 \end{cases}$$

Procediamo infine alla verifica della conservazione della potenza complessa.
Innanzitutto calcoliamo la tensione simbolica ai capi del generatore di corrente, utilizzando la LKT.

$$\begin{aligned}
\underline{V}_{g2} &= \underline{e}_A + Z_R \underline{I}_{g2} = 12 + j4 \\
\underline{N}_{E,g1} &= \underline{V}_{g1} \underline{I}_{g1}^* = -j20 \\
P_{E,g1} &= 0; \quad Q_{E,g1} = -20 VAr \\
\underline{N}_{E,g2} &= 16 - j48 \\
P_{E,g2} &= 16 W; \quad Q_{E,g2} = -48 VAr \\
\underline{N}_{A,L} &= \underline{Z}_L \underline{I}_L^2 = \underline{Z}_L \underline{I}_{g1}^2 = j4 \\
P_{A,L} &= 0; \quad Q_{A,L} = 4 VAr \\
\underline{N}_{A,C} &= \underline{Z}_C \underline{I}_C^2 = -j72 \\
P_{A,C} &= 0; \quad Q_{A,C} = -72 VAr \\
N_{A,R} &= R \underline{I}_{g2}^2 = 16 W = P_{A,R}
\end{aligned}$$

Verifica:

$$\underline{N}_{E,g1} + \underline{N}_{E,g2} = \underline{N}_{A,L} + \underline{N}_{A,C} + N_{A,R}$$

In alternativa:

$$\begin{aligned}
Re : \quad P_{E,g2} &= P_{A,R} \\
Im : \quad Q_{E,g1} + Q_{E,g2} &= Q_{A,L} + Q_{A,C}
\end{aligned}$$

9.7 Rifasamento

Prendiamo come riferimento una piccola rete elettrica operante a bassa tensione (Figura 39).

Immaginiamo un regime sinusoidale con una linea di trasmissione non ideale, che avrà dunque una certa impedenza Z_L , che per semplicità può essere concentrata in un punto specifico della linea, nella rappresentazione di circuito a parametri concentrati. Ipotizziamo anche che l'utilizzatore sia di tipo ohmico-induttivo (condizione verosimile per gli apparecchi elettrici comunemente presenti nelle abitazioni). La corrente sarà dunque in ritardo rispetto alla tensione.

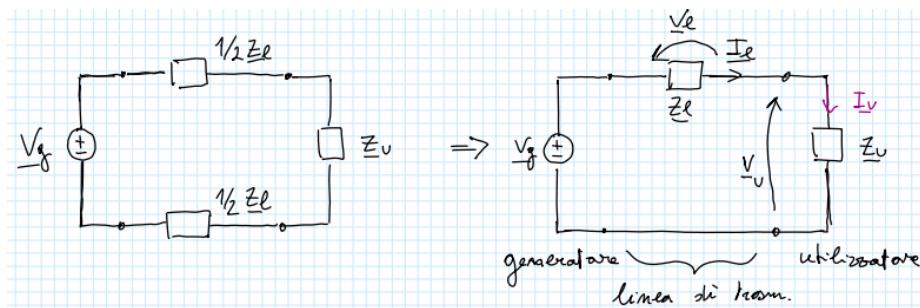


Figura 39. Schema di un piccolissima rete di distribuzione a bassa tensione

L'obiettivo del distributore è garantire

- la potenza attiva necessaria all'utilizzatore (P_U),
- la tensione richiesta dalle apparecchiature in utilizzo (V_U).

Nel fare questo, il distributore deve gestire:

1. la "caduta di tensione" sulla linea l

$$LKT : V_U + V_L = V_g \Rightarrow V_U = V_G - V_l$$

$$|V_U| = |V_G - V_l| = |V_G - Z_l I_U|$$

La componente resistiva dell'impedenza della linea

$$R_l = \rho \frac{l}{S}$$

è determinata (1) dalla resistività ρ specifica del materiale, ottima per il rame, superato soltanto dall'argento, troppo costoso per costruirvi una linea elettrica, (2) dalla lunghezza necessaria per raggiungere l'utilizzatore, (3) dalla sezione del filo, che tuttavia non è conveniente aumentare, sia perché aumenterebbe il peso del filo, con ulteriori complicazioni, sia perché, per effetto Bell, la corrente alternata tende a concentrarsi sulle pareti

del filo, e non scorre uniformemente. Non potendo dunque intervenire sulla resistenza della linea, è conveniente ridurre la corrente circolante nella linea.

2. Perdite Joule sulla linea

$$P_{J,l} = R_l I_l^2$$

Anche per questa ragione, il distributore è incentivato a minimizzare la corrente circolante nella linea.

Ricordando che $I_U = I_l$,

$$P_U = V_U I_U \cos(\varphi) \Rightarrow I_l = \frac{P_U}{V_U \cos(\varphi)}$$

Risulta dunque che I_l è minima per $\varphi = 0$, e cresce all'aumentare dello sfasamento. Lo sfasamento generato dai dispositivi utilizzatori, impone al distributore la necessità di far circolare maggiore corrente sulla linea, per soddisfare i requisiti di tensione e potenza garantiti all'utente.

Siccome la potenza reattiva non viene pagata dall'utente, la normativa tutela il distributore imponendo all'utilizzatore il *rifasamento* della corrente, pena il pagamento di penali. Questo viene attuato tramite il collegamento in parallelo di un componente capacitivo (Figura 40), nel quale scorrerà una corrente I_C .

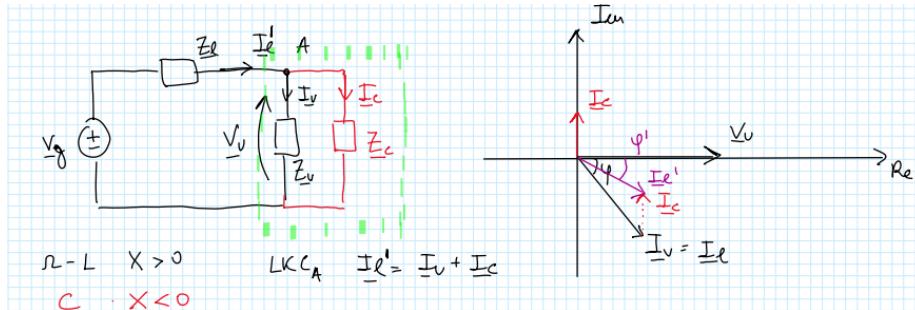


Figura 40

Grazie a I_C ,

$$I_l' = \frac{P_U}{V_U \cos \varphi'} < \frac{P_U}{V_U \cos \varphi} = I_l$$

Quanto al rifasamento, la normativa prevede:

- $\cos \varphi \geq 0,95$ nessuna penale,
- $0,7 \leq \cos \varphi < 0,95$ penali proporzionali alla Q_A ,
- $\cos \varphi > 0,7$ rifasamento obbligatorio.

A questo punto ci chiediamo quanto deve valere C per consentire il rifasamento necessario. Nelle successive considerazioni, consideriamo trascurabile la caduta di tensione percepita dall'utilizzatore a causa del condensatore collegato in parallelo. Nelle reti reali, tale approssimazione è pienamente giustificata dalle caratteristiche costruttive della rete oltre che dalla piccola entità relativa.

Prima del rifasamento (come in Figura 37),

$$\tan\varphi = \frac{Q_U}{P_U}$$

Dopo il rifasamento, siccome la reattanza capacitiva compensa il contributo induttivo alla potenza reattiva, l'angolo φ' risulta ridotto.

$$\tan\varphi' = \frac{Q_U + Q_C}{P_U}$$

Detta V_C la tensione applicata ai capi del condensatore:

$$\tan\varphi' - \tan\varphi = \frac{Q_C}{P_U} = -\frac{\omega C V_C^2}{P_U}$$

Dunque la capacità da porre in parallelo ai dispositivi utilizzatori per ridurre lo sfasamento da φ a φ' è pari a:

$$C = \frac{\tan\varphi - \tan\varphi'}{\omega V_C^2} P_U$$

10 Proprietà dei circuiti lineari e teoremi delle reti

In questa sezione, passeremo in rassegna alcuni teoremi relativi a circuiti elettrici -che possono essere parimenti interpretati come generici sistemi in cui tensioni e correnti sono segnali- che contengono soltanto componenti lineari o componenti non lineari nelle regioni lineari del loro funzionamento (diodi, filtri operazionali,...). Osserveremo queste proprietà su circuiti in regime stazionario soltanto per semplicità di trattazione e notazione. Si noti, comunque, che i risultati ottenuti sono facilmente generalizzabili anche a circuiti in regime dinamico.

10.1 Sovrapposizione degli effetti

Proprietà 1 (Sovrapposizione degli effetti). *In un circuito lineare, qualunque $v(t)$, $i(t)$ è dato dalla somma algebrica degli effetti dei generatori indipendenti quando essi agiscono uno alla volta.*

$$v(t) = f(g_1, g_2, \dots, g_n) = \sum_{k=1}^n f_k(g_k)$$

$$i(t) = h(g_1, g_2, \dots, g_n) = \sum_{k=1}^n h_k(g_k)$$

N.B.: Questa proprietà è valida soltanto per grandezze lineari. Non è valida, ad esempio per il calcolo delle potenze, in quanto il valore della potenza dipende dal quadrato della corrente.

Esercizio 13. Risolviamo il circuito in Figura 41 utilizzando la sovrapposizione degli effetti.

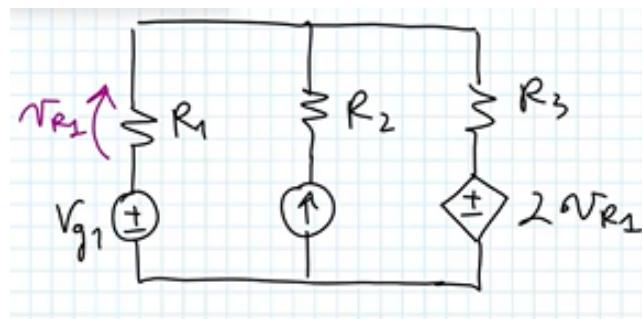


Figura 41

Per la risoluzione, adottiamo i seguenti passaggi:

1. Assegno VDR a tutte le correnti e tensioni;

2. spengo tutti i generatori indipendenti tranne il k -esimo;
3. calcolo correnti e tensioni parziali dovute all'effetto del g_k ;
4. sommo correnti e tensioni parziali.

Soluzione:

1. Nello svolgimento, consideriamo il VDR delle correnti sempre "verso l'alto" nel ramo.
2. e 3. Spegnere V_{g1} è equivalente a sostituirlo con un cortocircuito.

$$\begin{cases} e_B = 0 \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) e_A = I_{g2} + \frac{2e_A}{R_3} \end{cases}$$

$$e_A = \frac{I_{g2}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}}$$

$$\begin{cases} i'_1 = -\frac{e_A}{R_1} \\ i'_2 = I_{g2} \\ i'_3 = \frac{e_A}{R_1} - I_{g2} \end{cases}$$

Spegnere I_{g2} è equivalente a sostituirlo con un ramo aperto (o un interruttore aperto). Il circuito si riduce quindi sostanzialmente a una sola maglia.

$$LKT : V_{g1} + v_1 + v_2 - 2v_1 = 0$$

$$V_{g1} + (R_1 - R_3)i''_1 = 0$$

Risulta dunque:

$$\begin{cases} i''_1 = i''_3 = \frac{V_{g1}}{R_3 - R_1} \\ i''_2 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} i_1 = i'_1 + i''_1 \\ i_2 = i'_2 + i''_2 \\ i_3 = i'_3 + i''_3 \end{cases}$$

10.2 Teorema di Thevenin

Vediamo ora due teoremi che sono conseguenza della sovrapposizione degli effetti.

Teorema 3 (Teorema di Thevenin). Enunciato: è possibile rappresentare una rete lineare e adinamica tramite un bipolo equivalente formato da un generatore di tensione in serie a un resistore senza alterare la caratteristica $v - i$ della rete.

Consideriamo un circuito L lineare adinamico, controllabile in corrente ($v_{AB} = v_{AB}(i)$), di complessità arbitraria. Supponiamo che L sia collegato a una rete di complessità arbitraria, indifferentemente lineare o meno. Il teorema dunque consente di ridurre L a un generatore V_T in serie a un resistore R_T , come in Figura 42

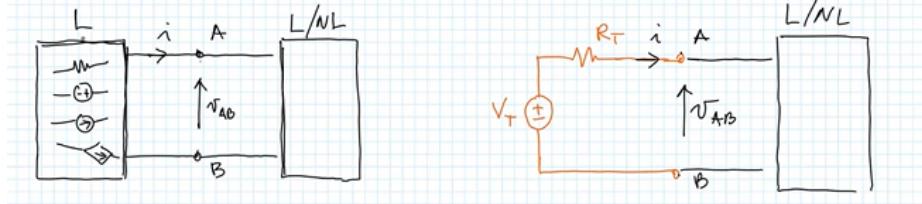


Figura 42

Ci chiediamo dunque quanto devono valere V_T e R_T perché sia rispettata l'equivalenza.

Per valutare V_T consideriamo $A - B$ di Figura 42 aperto (ossia con i due nodi staccati dal circuito arbitrario, che agisce da generatore di tensione indipendente) (in alto in Figura 43). Otteniamo la tensione a vuoto $v_{AB,0}$. Siccome la corrente circolante nel circuito è nulla, non si ha caduta di tensione sul resistore. Perciò

$$V_T = v_{AB,0}$$

Per valutare R_T , spengo i generatori indipendenti in L . Ipotizziamo di collegare un generatore di corrente I_0 tra A e B (in basso in Figura 43).

$$LKT : R_T = \frac{v_{AB}}{I_0}$$

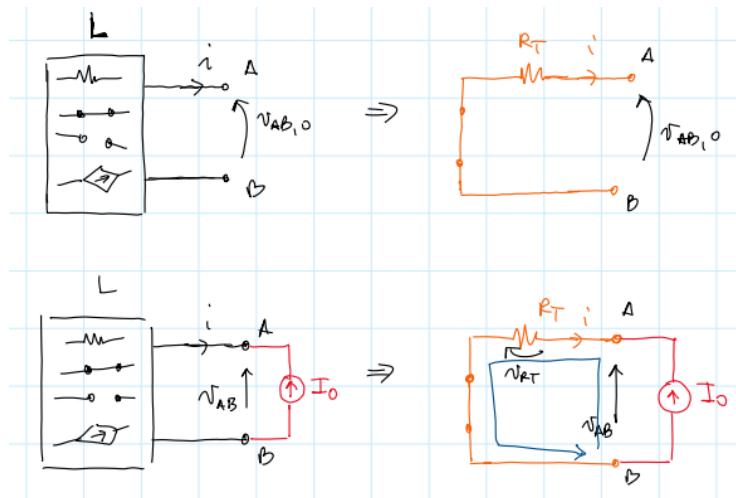


Figura 43

Nel caso in cui L non contenga generatori pilotati, si ha un caso particolare: il calcolo della R_T si riduce al calcolo della R_{eq} vista da $A - B$.

Esercizio 14. Si consideri il circuito in Figura 44.
Determinare il bipolo di Thevenin equivalente ai capi di R_U .

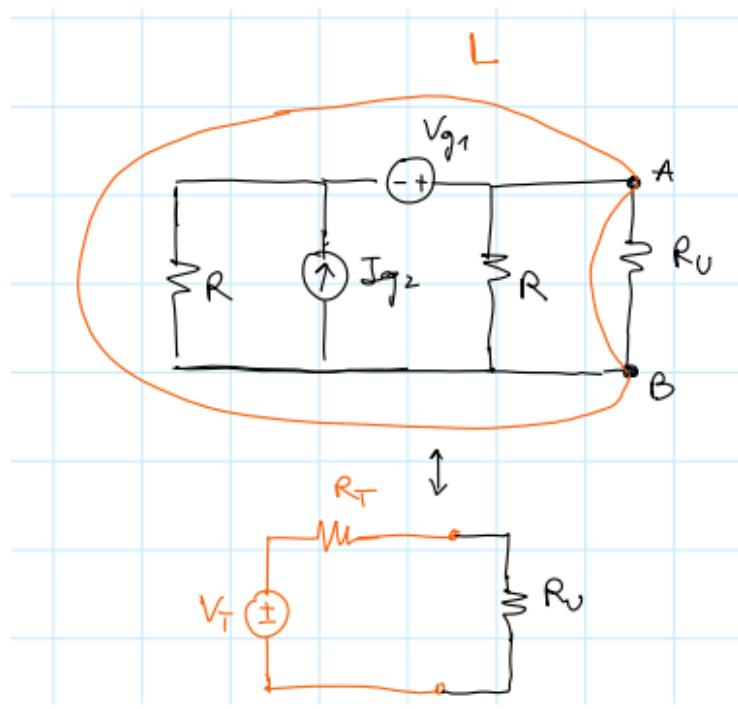


Figura 44

Per il calcolo di $V_T = v_{AB,0}$ è possibile utilizzare il metodo dei potenziali di nodo, semplificando il circuito come in Figura 45.

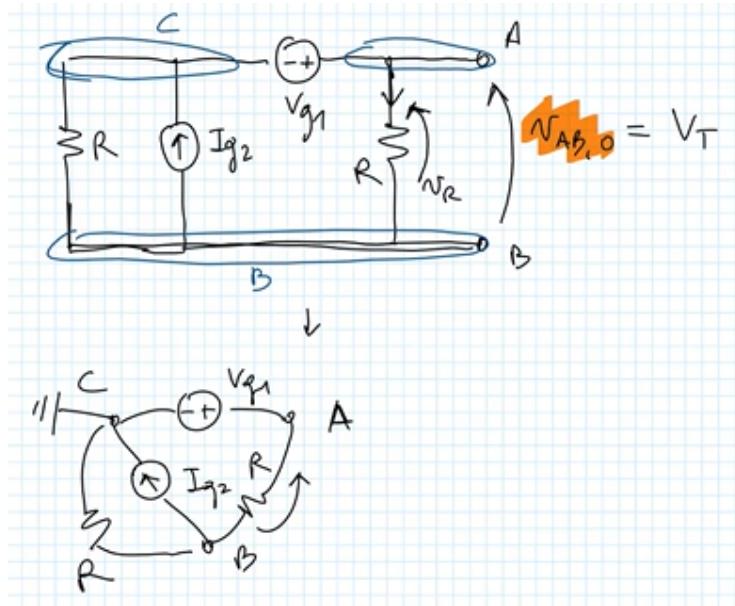


Figura 45

$$\begin{cases} e_C = 0 \\ e_A = V_{g1} \\ (1/R + 1/R)e_B - 1/Re_A = -I_{g1} \end{cases}$$

Da cui

$$e_B = \frac{V_{g1} - I_{g2}R}{2}$$

$$V_T = e_A - e_B = \frac{V_{g1} + I_{g2}R}{2}$$

Per il calcolo della R_T , non essendo presenti generatori pilotati, è sufficiente calcolare la resistenza equivalente del circuito ottenuto spegnendo i generatori indipendenti. Risulta facilmente che

$$R_T = R_{eq} \frac{R}{2}$$

Alternativamente, tramite il metodo generale, è possibile considerare un generatore di corrente I_0 collegato ad $A - B$.

$$R_T = \frac{v_{AB}}{I_0} = \frac{R_{eq}I_0}{I_0} = R_{eq}$$

Se volessimo calcolare i_{R_U} :

$$i_{R_U} = \frac{\frac{V_{g1} + I_{g2}R}{2}}{\frac{R}{2} + R_U}$$

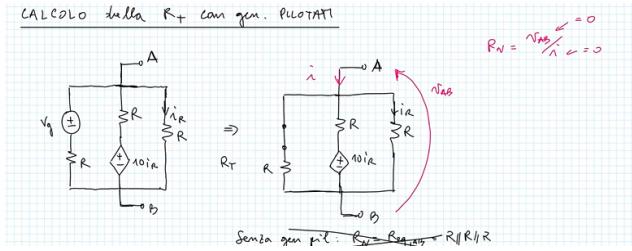


Figura 46

Esempio 2 (Calcolo della R_T con generatori pilotati). Considerando il circuito in Figura 46, applichiamo il teorema di Thevenin.

Siccome a generatori spenti i generatori pilotati non sono attivi, è necessario collegare un generatore indipendente di corrente I_0 in parallelo al dipolo Thevenin. v_{AB} sarà dunque "scalata" in base all'entità di I_0 , e risulterà

$$R_T = \frac{v_{AB}}{I_0}$$

10.3 Teorema di Norton

Vediamo ora il teorema "duale" del Teorema di Thevenin.

Teorema 4 (Teorema di Norton). Enunciato: è possibile rappresentare un circuito lineare e adinamico L controllabile in tensione tramite un bipolo equivalente costituito da un generatore indipendente di corrente I_N in parallelo a un resistore R_N senza alterare la caratteristica $i - v$ del circuito L .

Analogamente a quanto fatto per il teorema di Thevenin, è possibile rappresentare tale semplificazione come in Figura 47.

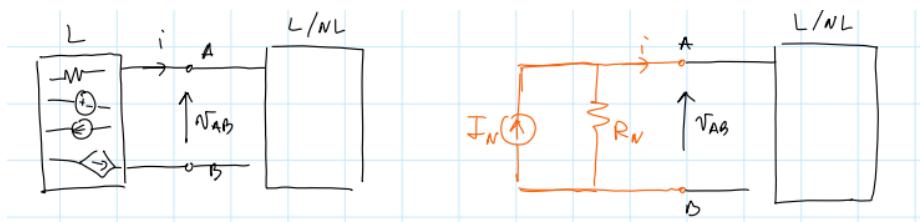


Figura 47

Ci chiediamo quanto devono valere dunque I_N e R_N per rispettare l'equivalenza.

$$LKC : i = I_N - i_{R_N} = I_N - \frac{v_{AB}}{R_N}$$

Per ottenere il valore di I_N , possiamo cortocircuitare i nodi A e B , in modo tale da ottenere $v_{AB} = 0$ e chiamiamo la corrente circolante nel sistema cortocircui-

tato i_{CC} . Dunque,

$$I_N = i_{CC}$$

Per ottenere il valore di R_N , possiamo spegnere tutti i generatori indipendenti in L . Così non avremmo corrente circolante. Imponiamo dunque $v_{AB} = V_0$.

$$i = -i_{RN} = -\frac{V_0}{R_N}$$

Questo è esattamente il funzionamento di un tester: il dispositivo contiene una piccola batteria che impone una tensione nota tra i puntali e misura la corrente che vi scorre.

Nel caso particolare in cui L non contenga generatori pilotati,

$$R_N = R_{eq,AB}$$

Esercizio 15. Si consideri lo stesso circuito dell'esercizio precedente (in alto in Figura 44).

Determinare il bipolo di Norton equivalente ai capi di R_U .

Al fine di determinare I_N , cortocircuitiamo A e B e disegniamo il circuito equivalente "collassando" i nodi in singoli punti (Figura 48). Notiamo che nel resistore collegato ad A e B non scorre corrente perché la tensione ai suoi capi è nulla. La corrente $I_N = i_{CC}$ che scorre nel cortocircuito tra A e B è dunque $i_{CC} = i_{g1}$.

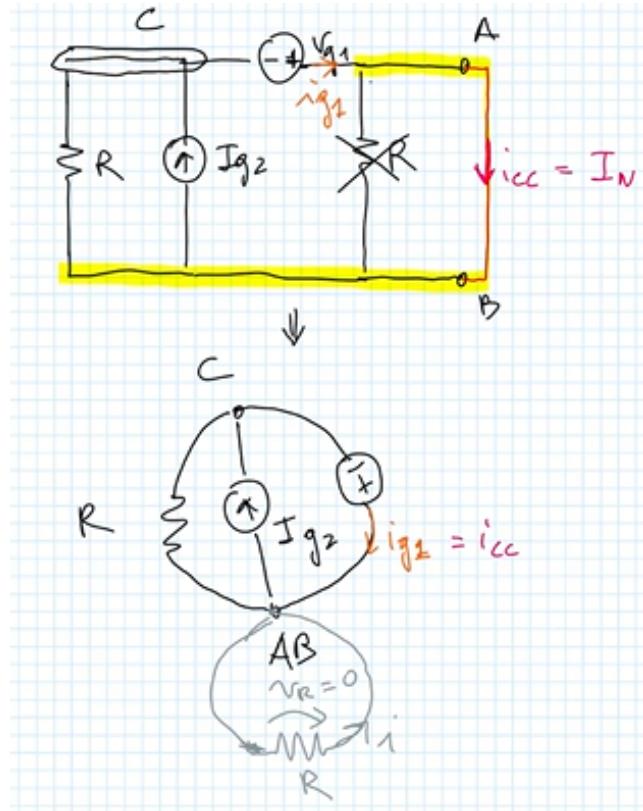


Figura 48

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_{g1}}{R}$$

$$I_N = i_{CC} = i_{g1} = i_R + I_{g2} = \frac{V_{g1}}{R} + I_{g2}$$

Per il calcolo della R_N , non essendo presenti generatori pilotati, è sufficiente calcolare la resistenza equivalente del circuito ottenuto spegnendo i generatori indipendenti. Risulta facilmente che

$$R_N = R_{eq} \frac{R}{2}$$

Se volessimo calcolare i_{R_U} , risulterebbe, con la formula del partitore di corrente:

$$i_{R_U} = \frac{R_N}{R_N + R_U} = \frac{\frac{V_{g1}}{2} + I_{g2}R}{\frac{R}{2} + R_U}$$

Come è naturale aspettarsi, il risultato è lo stesso individuato tramite il Teorema di Thevenin nell'esercizio precedente.

10.4 Trasformazione bipolo Thevenin - bipolo Norton

Per attuare una trasformazione da un bipolo Thevenin a un bipolo Norton, determiniamo le seguenti condizioni di equivalenza:

1. A generatori spenti, il valore di resistenza deve essere lo stesso, dunque

$$R_T = R_N$$

2. A bipoli cortocircuitati, $i_{CC,T} = i_{CC,N}$, da cui

$$\frac{V_T}{R_T} = I_N$$

Esempio 3. Considerando il circuito in Figura 49, notiamo che non è possibile effettuare semplificazioni serie-parallelo. Sostituendo però il generatore di tensione e il resistore in serie con un generatore di corrente con resistore in parallelo (evidenziati nella figura) è possibile risolvere più facilmente il circuito.

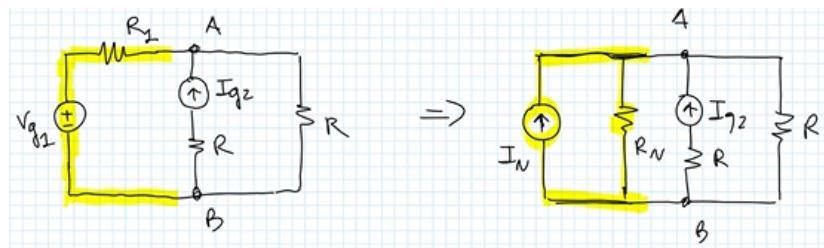


Figura 49

$$\begin{cases} R_N = R_1 \\ I_N = \frac{V_{g1}}{R_1} \end{cases}$$

10.5 Teoremi di Thevenin e Norton in regime sinusoidale

È possibile applicare i teoremi di Thevenin e Norton anche in regime sinusoidale nonostante le funzioni sinusoidali non siano lineari in quanto il passaggio al dominio simbolico è attuato tramite un operatore lineare, la Trasformata di Steinmetz. Nel dominio simbolico, dunque, valgono: il principio di sovrapposizione degli effetti, i teoremi di Thevenin e Norton e la trasformazione dei bipoli. Tuttavia, si considereranno i fasori al posto delle grandezze circuituali dirette e le impedenze al posto delle resistenze.

Esercizio 16. Calcolare la $i_2(t)$ nel circuito in Figura 50 usando il teorema di Thevenin.

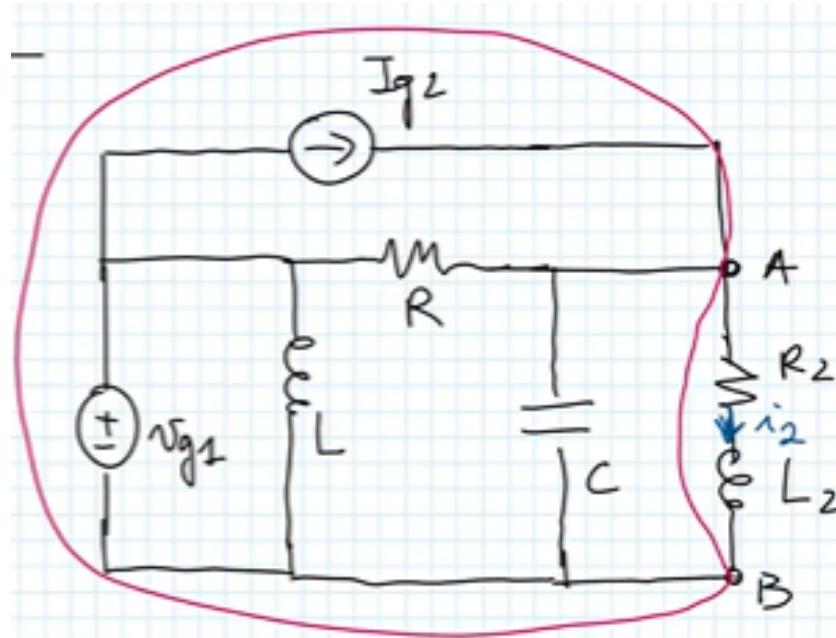


Figura 50. $R = R_2 = 10 \Omega$, $V_{g1}(t) = 10\sqrt{2}\cos(50t + \pi/4) V$, $I_{g2}(t) = 3\sqrt{2}\cos(50t) A$, $C = 5 mF$, $L = 40 mH$, $L_2 = 120 mH$.

Innanzitutto, attuiamo il passaggio al dominio simbolico.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V}_{g1} = 10e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{10}{\sqrt{2}} + j\frac{10}{\sqrt{2}} \\ \underline{I}_{g2} = 3 \\ \underline{Z}_L = j\omega L = j2 \\ \underline{Z}_{L_2} = j\omega L_2 = j6 \\ \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -j4 \\ Z_R = Z_{R_2} = 10 \Omega \\ \underline{Z}_{eq2} = Z_{R_2} + \underline{Z}_{L_2} = 10 + j6 \end{array} \right.$$

Procediamo dunque al calcolo dei valori dei componenti del bipolo Thevenin.
Procediamo innanzitutto al calcolo della \underline{V}_T (Figura 51).

$$\underline{V}_T = \underline{V}_{AB,0} = \underline{e}_A - \underline{e}_B$$

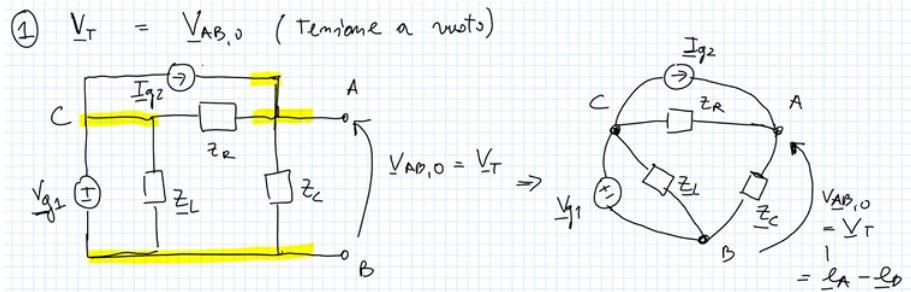


Figura 51

$$\begin{cases} \underline{e}_B = 0 \\ \underline{e}_C = V_{g1} \\ (\underline{Y}_R \underline{Y}_C) \underline{e}_A - \underline{Y}_R \underline{e}_C = \underline{I}_{g2} \\ V_T = \underline{e}_A = j0, 25 \end{cases}$$

Siccome non sono presenti generatori pilotati semplicemente spegniamo i generatori indipendenti e calcoliamo l'impedenza equivalente (Figura 52):

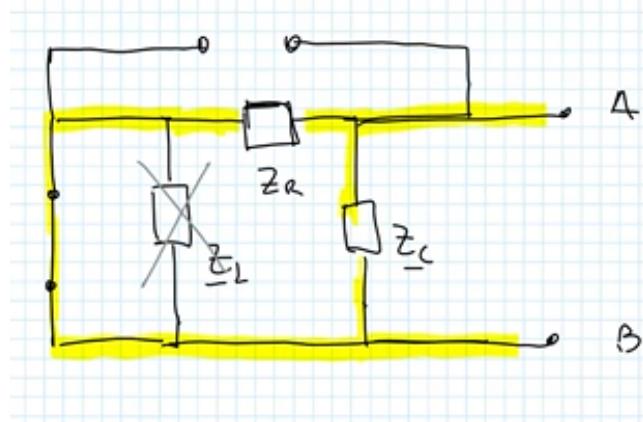


Figura 52. Circuito semplificato nella condizione di generatori spenti. Si noti che non scorre corrente su Z_L , che è in parallelo a un cortocircuito

$$Z_T = Z_{eq,AB} = \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R} = 1,38 - j3,45$$

Naturalmente, è possibile ottenere lo stesso risultato tramite il metodo generale, funzionante anche in presenza di generatori pilotati, a costo di calcoli ridondanti. Collegando il dipolo equivalente Thevenin a un dipolo con $Z_{eq,2}$, possiamo

determinare

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{V}_t}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_{eq,2}} = 0,41 - j1,13$$

$$i_2(t) = S^{-1}[\underline{i}_2] = 1,2\sqrt{2}\cos(50t - 1,22)$$

Analogamente, si potrebbe svolgere lo stesso esercizio individuando un bipolo di Norton equivalente.

11 Doppi bipoli (componenti biporta)

Sinora abbiamo considerato bipoli, ossia componenti con due porte, con una tensione applicata ai due capi e una corrente che vi scorre attraverso. Per questi, abbiamo visto che esiste sicuramente una legge costitutiva in forma implicita $f(v, i) = 0$, che può spesso essere esplicitata. Notiamo che per descrivere componenti di questo tipo possono essere descritti da una sola tensione e una sola corrente, in relazione tramite una sola equazione.

Ci occupiamo ora invece di *quadrupoli* (Figura 53).

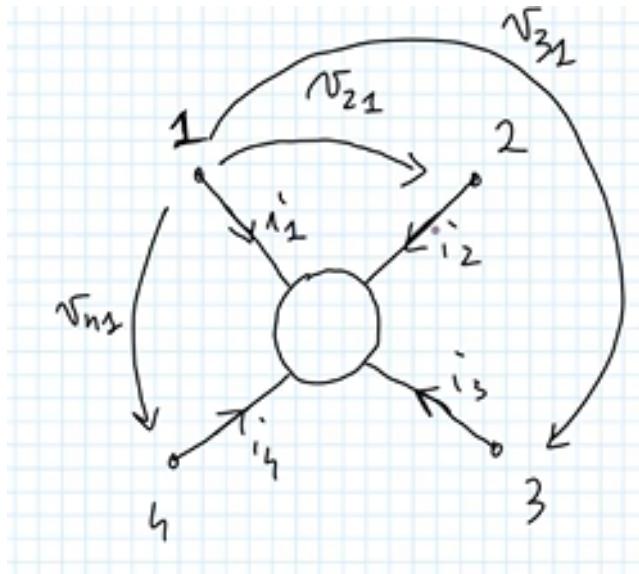


Figura 53

Siccome si hanno quattro correnti (una per ogni porta) e una tensione per ogni combinazione di porte, la legge costitutiva sarà composta da tre equazioni, che legano tre tensioni e tre correnti, mentre la quarta tensione e la quarta corrente possono essere determinate tramite le leggi di Kirchhoff. La legge costitutiva di un quadrupolo ha quindi la forma:

$$\begin{cases} f_1(v_{21}, v_{31}, v_{41}, i_1, i_2, i_3) = 0 \\ f_2(v_{21}, v_{31}, v_{41}, i_1, i_2, i_3) = 0 \\ f_3(v_{21}, v_{31}, v_{41}, i_1, i_2, i_3) = 0 \end{cases}$$

N.B.: le quattro correnti sono, in generale, diverse tra loro.

Definizione 44 (Porta). *In un circuito a parametri concentrati, si dice porta un coppia di terminale di un componente in cui la corrente entrante è uguale alla corrente uscente.*

Un bipolo è sempre considerabile come una *uno-porta*.

Definizione 45 (Doppio bipolo (biporta/2-porte)). *Un doppio bipolo è un quadrupolo i cui terminali formano due porte. È dunque possibile rappresentare un doppio dipolo come in Figura 54, a partire da un quadrupolo generico, e definendo le due porte distinte come convenzionalmente porta di ingresso (1-1') e porta di uscita (2-2').*

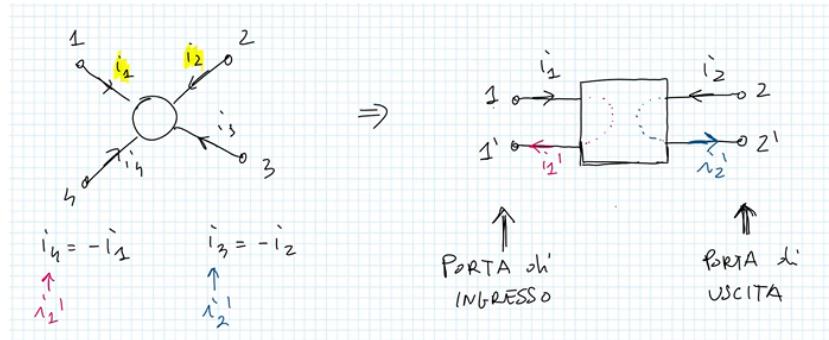


Figura 54

La descrizione di un doppio bipolo + attuata in riferimento alle *variabili di porta*, ossia le coppie (i_1, v_1) e (i_2, v_2) . La legge costitutiva di un doppio bipolo generico avrà dunque la forma:

Legge 23 (Legge costitutiva di un doppio bipolo).

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

Anche un tripolo può essere visto come un doppio bipolo, vedendo uno dei tre poli (nodo 3 in Figura 55). Estendendo il nodo 3 in due porzioni, si verifica poi facilmente che $i_3 = -(i_1 + i_2)$, in cui i_1 e i_2 sono le correnti che scorrono sovrapposte sul terzo nodo. La teoria elaborata per i doppi bipoli può dunque essere estesa anche ai tripoli, e questo consente di parlare in generale di grandezze relative ai tripoli, indipendentemente dal funzionamento del componente stesso (transresistenza, transammettenza,...).

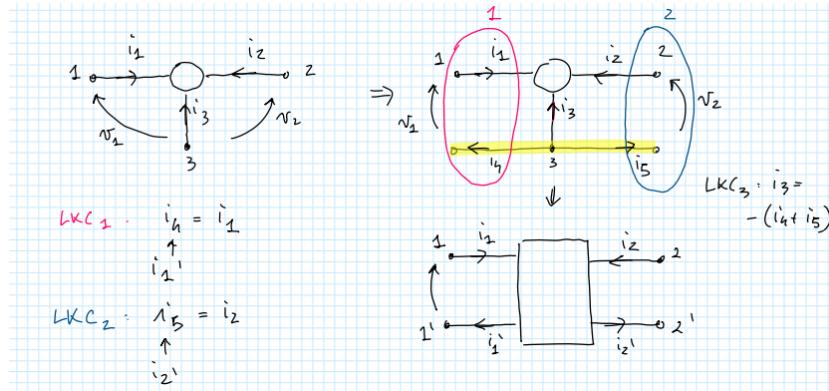


Figura 55

Ancora più in generale, un intero circuito può essere interpretato come un doppio bipolo (Figura 56). Selezionando quattro nodi di un generico circuito e collegandovi dei terminali, per la LKC risulta necessaria la condizione di porta (la corrente in uscita da un terminale è uguale a quella in entrata nell'altro.)

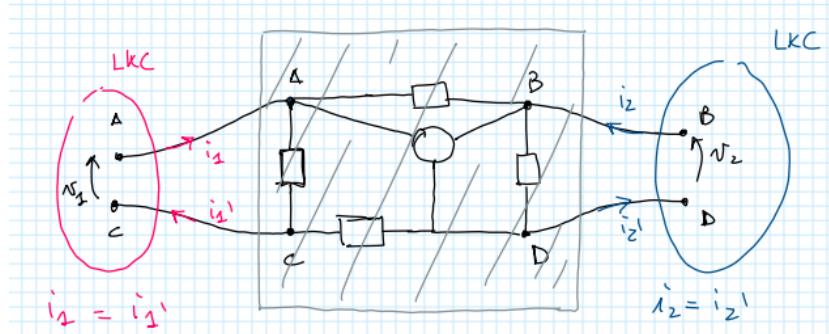


Figura 56

11.1 Rappresentazioni esplicite di un doppio bipolo

Tenendo a mente la forma implicita in legge 23, prendiamo in considerazione un doppio bipolo resistivo, lineare, tempo-invariante. In questo caso possiamo scrivere la forma implicita in una forma generale più specifica:

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + b_{11}i_1 + b_{12}i_2 = 0 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + b_{21}i_1 + b_{22}i_2 = 0 \end{cases}$$

in cui i coefficienti a_{ij} e b_{ij} sono costanti. Notiamo che questa equazione ha fondamentalmente la stessa funzione di $1 v + (-R) i = 0$, per un bipolo.

Il sistema appena proposto può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0$$

la quale può essere riscritta, in forma compatta come:

$$[a][v] + [b][i] = 0$$

Il nostro obiettivo è però scrivere leggi costitutive (*rappresentazioni*) esplicite, ossia una forma della legge costitutiva in cui due variabili di porta sono espresse in funzione delle altre. Ne esistono dunque diverse possibilità. Ad esempio:

$$1) \begin{cases} v_1 = f_1(i_1, i_2) \\ v_2 = f_2(i_1, i_2) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} v_2 = f_1(v_2, i_1) \\ i_2 = f_2(v_2, i_1) \end{cases}$$

La 1) è la forma controllata in tensione, la 2) è invece una forma ibrida. Ciascuna delle 6 forme può essere utile in particolari contesti.

11.1.1 Rappresentazione R

Ipotesi: entrambe le porte sono controllabili in corrente.

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$[v] = [R][i]$$

La matrice $[R]$ è detta *matrice resistenza*. I parametri r_{ij} sono detti *parametri r*.

Per ricavare r_{ij} in un generico doppio bipolo, è possibile utilizzare il **metodo delle prove semplici**:

1. Mantenendo la porta 2 aperta, si ha $i_2 = 0$. Si può dunque forzare una corrente nota $i_1 = I_0$ collegando un generatore indipendente di corrente tra i terminali della porta 1.

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{v_1}{i_0} \Big|_{i_2=0} \\ r_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{v_2}{i_0} \Big|_{i_2=0} \end{cases}$$

r_{11} è detta *resistenza di ingresso (con uscita aperta)* o *autoresistenza alla porta 1*, ed è un parametro che si trova a catalogo per i componenti, e

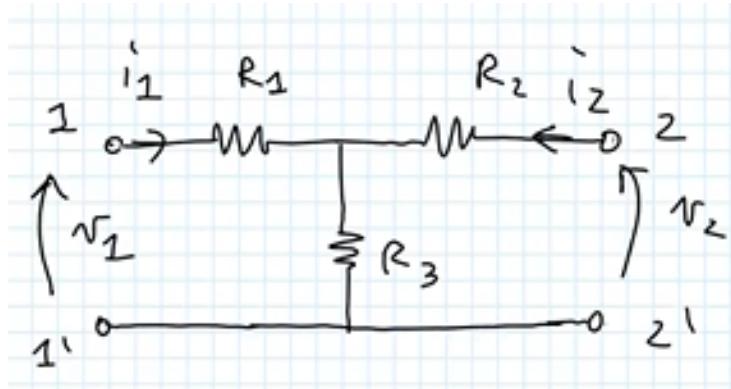


Figura 57. Configurazione di resistori a T. $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$

indica il termine di proporzionalità tra la tensione generata sulla porta 1 e la corrente forzata su di essa.

r_{21} è detta *resistenza di trasferimento (dalla porta 1 alla porta 2)* o *transresistenza*, ed è anch'esso un parametro che si trova a catalogo per i componenti, e indica il termine di proporzionalità tra la tensione generata sulla porta 2 e la corrente forzata sulla porta 1.

2. Mantenendo la porta 1 aperta, si ha $i_1 = 0$. Si può dunque forzare una corrente nota $i_2 = I_0$ collegando un generatore indipendente di corrente tra i terminali della porta 1. Similmente a quanto sopra, quindi:

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{v_1}{I_0} \Big|_{i_1=0} \\ r_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{v_2}{I_0} \Big|_{i_1=0} \end{cases}$$

r_{12} è dunque la *resistenza di trasferimento (dalla porta 2 alla porta 1)* o *transresistenza*. r_{22} è detta *resistenza di uscita (con entrata aperta)* o *autoresistenza (alla porta 2)*.

È dunque possibile scrivere la matrice $[R]$ con le entrata così determinate. Se $r_{12} = r_{21}$, il doppio bipolo è *reciproco*. Si dimostra che tutti i doppi bipoli che contengono solo resistori sono reciproci.

Esercizio 17. Calcolare i parametri r di una configurazione di resistori a T (Figura 57)

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

Procediamo quindi alla prima prova semplice, mantenendo aperta la porta 2 ($i_2 = 0$, $i_1 = I_0$, Figura 58).

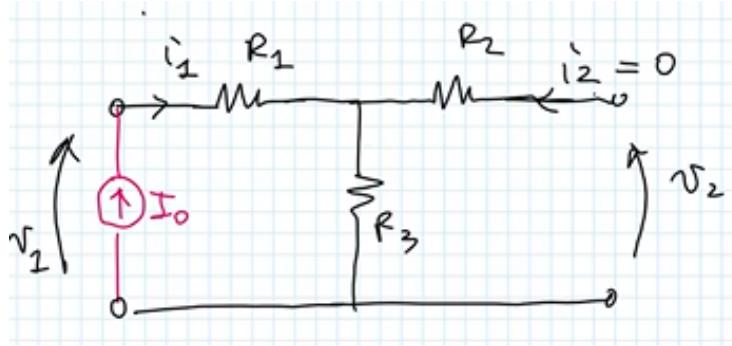


Figura 58

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + R_3)I_0 \\ v_2 = R_3 I_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{(R_1 + R_3)I_0}{I_0} = 60 \Omega \\ r_{21} = \frac{R_3 I_0}{I_0} = 40 \Omega \end{cases}$$

In maniera del tutto simile, procediamo alla seconda prova semplice: $i_1 = 0$, $i_2 = I_0$, Figura 59.

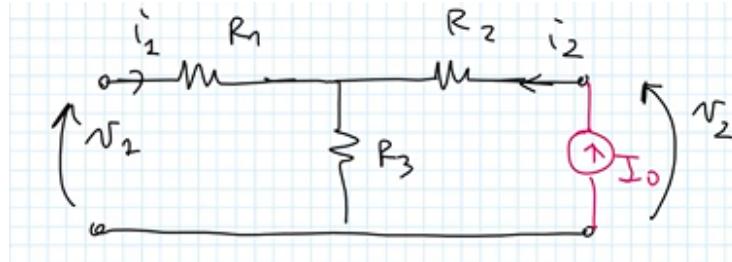


Figura 59

$$\begin{cases} v_2 = (R_2 + R_3)I_0 \\ v_1 = R_3 I_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{R_3 I_0}{I_0} = 40 \Omega \\ r_{22} = \frac{(R_2 + R_3)I_0}{I_0} = 70 \Omega \end{cases}$$

Dunque:

$$R = \begin{bmatrix} 60 & 40 \\ 40 & 70 \end{bmatrix}$$

Notiamo appunto che il bipolo risulta reciproco, avendo transammettenze uguali.

11.1.2 Rappresentazione G

Ipotesi: entrambe le porte sono controllabili in tensione.

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$[i] = [G][v]$$

La matrice $[G]$ è detta *matrice resistenza*. I parametri r_{ij} sono detti *parametri g o parametri conduttanza*.

Anche in questo caso, è possibile determinare i componenti conduttanza tramite il metodo delle prove semplici.

Come nel caso precedente, l'obiettivo è annullare, in ciascuna prova semplice, il termine relativo alla variabile indipendente di una delle due porte (in questo caso, alternativamente $v_1 = 0$ e $v_2 = 0$)

1. Mantenendo la porta 2 aperta, si ha $v_2 = 0$. Si può dunque forzare una tensione nota $v_1 = V_0$ collegando un generatore indipendente di corrente tra i terminali della porta 1.

$$\begin{cases} g_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{i_1}{V_0} \Big|_{v_2=0} \\ g_{21} = \frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{i_2}{V_0} \Big|_{v_2=0} \end{cases}$$

g_{11} è detta *conduttanza di ingresso (in cortocircuito)* o *autoconduttanza alla porta 1*, ed è indica il termine di proporzionalità tra la corrente nella porta di ingresso e la tensione imposta su di essa, quando la porta di uscita è cortocircuitata.

r_{21} è detta *conduttanza di trasferimento (dalla porta 1 alla porta 2)* o *transconduttanza* e indica il termine di proporzionalità tra la corrente che scorre nella porta 2 e la tensione forzata sulla porta 1.

2. Mantenendo la porta 1 aperta, si ha $v_1 = 0$. Si può dunque forzare una tensione nota $v_2 = V_0$ collegando un generatore indipendente di tensione tra i terminali della porta 2. Similmente a quanto sopra, quindi:

$$\begin{cases} g_{12} = \frac{i_1}{v_2} \Big|_{v_1=0} = \frac{i_1}{V_0} \Big|_{v_1=0} \\ g_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0} = \frac{i_2}{V_0} \Big|_{v_1=0} \end{cases}$$

g_{12} è dunque la *conduttanza di trasferimento (dalla porta 2 alla porta 1)* o *transconduttanza*. g_{22} è detta *conduttanza di uscita (con entrata cortocircuitata) o autoconduttanza (alla porta 2)*

È dunque possibile scrivere la matrice $[G]$ con le entrata così determinate. Se $g_{12} = g_{21}$, il doppio bipolo è *reciproco*. Come per la rappresentazione r, si dimostra che tutti i doppi bipoli che contengono solo resistori sono reciproci.

Esercizio 18. Calcolare i parametri g della configurazione di resistori in Figura 60.

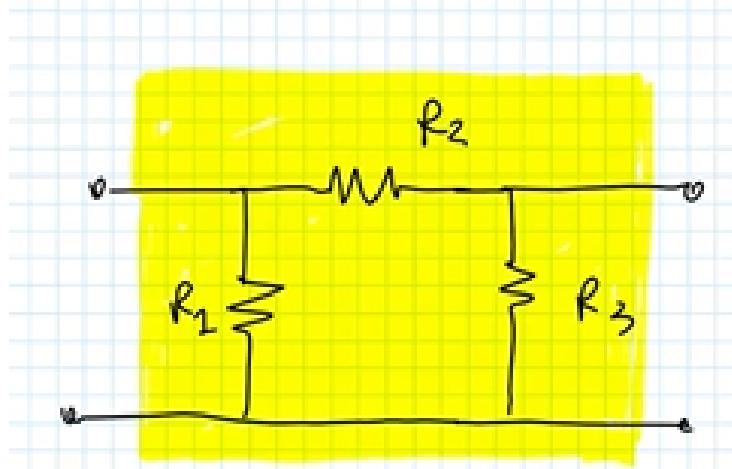


Figura 60. $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}i_1 + g_{12}i_2 \\ i_2 = g_{21}i_1 + g_{22}i_2 \end{cases}$$

Procediamo quindi alla prima prova semplice, cortocircuitando la porta 2 ($v_2 = 0$, $v_1 = V_0$, Figura 61).

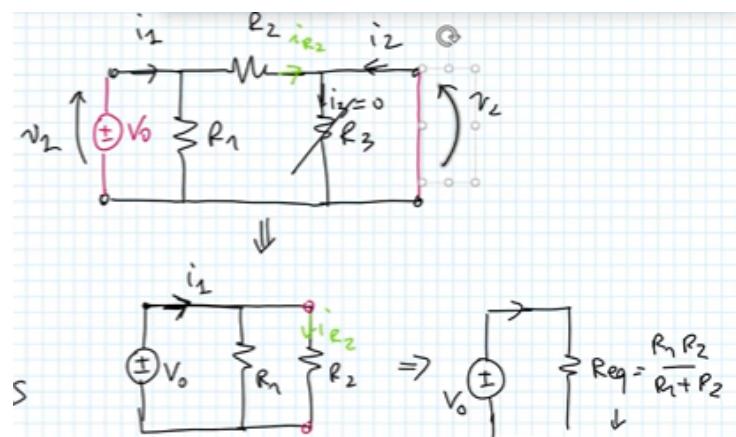


Figura 61

$$\begin{cases} g_{11} = \frac{i_1}{V_0} = \frac{(G_1+G_2)V_0}{V_0} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \ S \\ g_{21} = \frac{i_2}{V_0} = \frac{-G_2V_0}{V_0} = -\frac{1}{30} \ S \end{cases}$$

Si noti che è totalmente ammissibile che un parametro g sia negativo, come in questo caso g_{21} , in quanto è dovuto dal verso della corrente entrante dalle porte nell'analisi del circuito. In maniera del tutto simile, procediamo alla seconda prova semplice: $v_1 = 0$, $v_2 = V_0$. Si ottiene:

$$\begin{cases} g_{12} = -\frac{1}{30} \ S = g_{12} \\ g_{22} = \frac{1}{30} + \frac{1}{40} \ S \end{cases}$$

11.1.3 (Non) esistenza di una rappresentazione

Siccome avevamo notato che non tutte le rappresentazioni sono possibili per tutti i circuiti. È possibile osservare la non applicabilità di una rappresentazione perché si manifestano incongruenze all'analisi circuitale. Procediamo a vederne un caso particolare.

Esempio 4. Proviamo a calcolare i parametri g in riferimento al doppio bipolo considerato in Figura 62

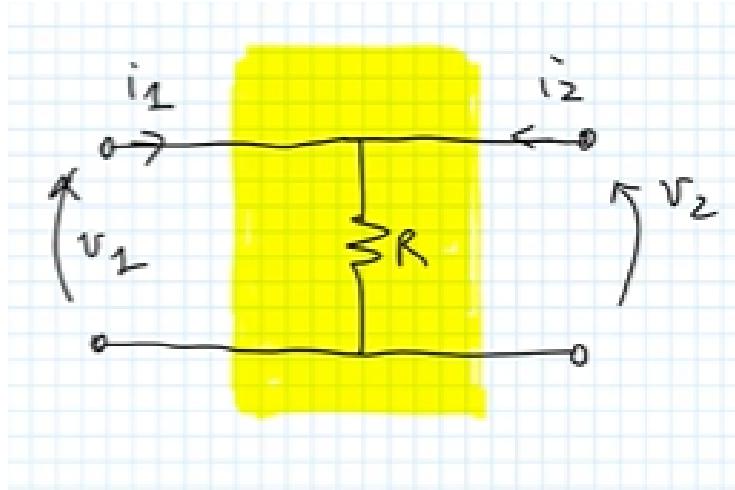


Figura 62

Alla prima prova semplice, dovremmo cortocircuitare la porta 2 e imporre una tensione costante alla porta 1. Ma considerando la maglia che comprende i due rami che chiudono le porte (cortocircuito e generatore di tensione), violeremmo la LKT (Figura 63).

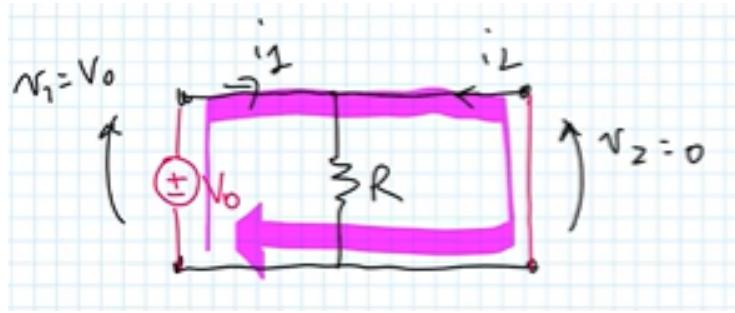


Figura 63

$$LKT : v_1 - v_2 = 0$$

Ma

$$v_0 - \neq 0$$

Dunque non è possibile utilizzare la rappresentazione G per questo doppio bipolo.

11.1.4 Rappresentazioni ibride H e H'

Abbiamo esplorato finora rappresentazioni concettualmente corrispondenti alle descrizioni per i bipoli. Vediamo ora configurazioni in cui le variabili indipendenti sono ibride (una tensione e una corrente).

Chiamiamo rappresentazione H quella in cui le variabili indipendenti sono i_1 e v_2 :

$$\begin{cases} v_1 = v_1(i_1, v_2) = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = i_2(i_1, v_2) = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases}$$

In forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo la matrice $[H]$ così composta *matrice ibrida diretta*. Questa rappresentazione è quella utilizzata preferenzialmente per caratterizzare componenti tripolari, per le ragioni che saranno chiare in seguito.

Prove semplici:

Come nel caso precedente, l'obiettivo è annullare, in ciascuna prova semplice, il termine relativo a una delle due variabili indipendenti per ciascuna prova (in questo caso, alternativamente $i_1 = 0$ e $v_2 = 0$)

1. Cortocircuitando la porta 2, si ha $v_2 = 0$. Si può dunque imporre una corrente nota $i_1 = I_0$ collegando un generatore indipendente di corrente tra i terminali della porta 1.

$$\begin{cases} h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{v_1}{I_0} \Big|_{v_2=0} \\ h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{i_2}{I_0} \Big|_{v_2=0} \end{cases}$$

h_{11} è una *resistenza di ingresso (in cortocircuito)*
 h_{21} è detta *guadagno di corrente (dalla porta 1 alla porta 2, in cortocircuito)*.

2. Mantenendo, invece, aperta la porta 1 aperta, si ha $i_1 = 0$. Si può dunque forzare una tensione nota $v_2 = V_0$ collegando un generatore indipendente di tensione tra i terminali della porta 2. Similmente a quanto sopra, quindi:

$$\begin{cases} h_{12} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{v_1}{V_0} \Big|_{i_1=0} \\ h_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{i_2}{V_0} \Big|_{i_1=0} \end{cases}$$

h_{12} è dunque il *guadagno in tensione (dalla porta 2 alla porta 1) con ingresso aperto (o a vuoto)*. h_{22} è detta *conduttanza di uscita (con entrata cortocircuitata)*.

È dunque possibile scrivere la matrice $[H]$ con le entrate così determinate. I parametri di guadagno consentono di utilizzare componenti come amplificatori di tensione o corrente. Anche senza conoscere il funzionamento interno del componente, i parametri, indicati a catalogo, ne descrivono il funzionamento. Se $g_{12} = g_{21}$, il doppio bipolo è *reciproco*. Come per la rappresentazione r, si dimostra che tutti i doppi bipoli che contengono solo resistori sono reciproci.

Chiamiamo rappresentazione H' la rappresentazione in cui le variabili indipendenti sono v_1 e i_2 :

$$\left\{ i_1 = i_1(v_1, i_2) = h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2v_2 = v_2(v_1, i_2) = h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2 \right.$$

In forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo la matrice $[H']$ così composta *matrice ibrida inversa*.

Prove semplici:

Come nel caso precedente, l'obiettivo è annullare, in ciascuna prova semplice, il termine relativo a una delle due variabili indipendenti per ciascuna prova (in questo caso, alternativamente $v_1 = 0$ e $i_2 = 0$)

1. Aprendo la porta 2, si ha $i_2 = 0$. Si può dunque impostare una tensione nota $v_1 = V_0$.

$$\begin{cases} h'_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{i_1}{V_0} \Big|_{i_2=0} \\ h'_{21} = \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{v_2}{V_0} \Big|_{i_2=0} \end{cases}$$

h'_{11} è una *conduttanza di ingresso (in cortocircuito)*.

h'_{21} è detta *guadagno in tensione (dalla porta 1 alla porta 2, con uscita aperta)*. Notiamo che queste informazioni sono complementari a quelle fornite dalla matrice ibrida diretta.

2. Cortocircuitando, invece, la porta 1, si ha $v_1 = 0$. Si può dunque imporre $i_2 = I_0$:

$$\begin{cases} h'_{12} = \frac{i_1}{i_2} \Big|_{v_1=0} = \frac{i_1}{I_0} \Big|_{v_2=0} \\ h'_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{v_1=0} = \frac{v_2}{I_0} \Big|_{v_1=0} \end{cases}$$

h'_{12} è dunque il *guadagno in corrente* (dalla porta 2 alla porta 1) con ingresso in cortocircuito. h'_{22} è detta *resistenza di uscita* (con entrata cortocircuitata).

In maniera del tutto analoga agli altri casi considerati, è dunque possibile scrivere la matrice $[H']$ con le entrate così determinate.

11.1.5 Rappresentazioni T, T'

Definiamo T la rappresentazione di *trasmissione diretta*, in cui esprimiamo le grandezze di una porta in funzione di quelle all'altra.

Consideriamo la *rappresentazione trasmissione diretta*, e scriviamo le grandezze in entrata in funzione di quelle in uscita:

$$\begin{cases} v_1 = t_{11}v_2 - t_{12}i_2 \\ i_1 = t_{21}v_2 - t_{22}i_2 \end{cases}$$

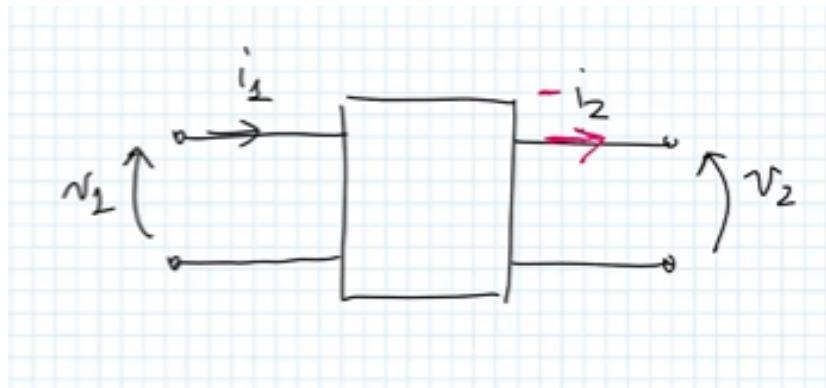


Figura 64. Si noti il cambio di verso della corrente i_2 rispetto alle convenzioni precedentemente utilizzate

Per convenzione, siccome questa rappresentazione viene utilizzata soprattutto per l'analisi di sistemi con doppi bipoli in cascata, si considera i_2 con segno opposto e verso di riferimento opposto (Figura 64), in modo che il verso di riferimento della corrente di uscita sia corrispondente a quello della corrente in entrata del doppio bipolo collegato in cascata. Concettualmente, comunque, il sistema matematico è del tutto equivalente agli altri già analizzati, perché il

segno negativo davanti al termine di i_2 "neutralizza" il cambio di verso di riferimento.

Si noti anche che gli indici dei parametri non hanno, per necessità, il significato di riferimento tra una porta e l'altra, ma sono attribuiti in base all'ordine di comparsa delle variabili nel sistema.

In forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo la matrice $[T]$ così composta *matrice trasmissione diretta*, con parametri t , *parametri trasmissione diretti*.

Per la *rappresentazione trasmissione inversa*, esprimiamo le variabili in uscita in funzione di quelle in entrata:

$$\begin{cases} v_2 = t'_{11}v_1 - t'_{12}i_1 \\ i_2 = t'_{21}v_1 - t'_{22}i_1 \end{cases}$$

Con segno negativo davanti alla corrente per ragioni analoghe a quanto sopra.

In forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo la matrice $[T']$ così composta *matrice trasmissione inversa*, con parametri t' , *parametri trasmissione inversi*.

Osserviamo come effettuare le prove semplici per la rappresentazione t . Analogamente ai casi precedenti, dobbiamo cercare di annullare una variabile indipendente per ricavare i valori dei parametri in condizioni "semplificate".

1. Mantendo la porta 2 aperta, si ha $i_2 = 0$.

$$\left\{ t_{11} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_2=0} \quad t_{21} = \frac{i_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} \right.$$

A questo punto, però, non sarebbe possibile imporre una tensione nota V_0 alla porta 2, in maniera analoga a come abbiamo gestito gli altri casi, perché non è possibile contemporaneamente collegare il generatore di tensione e mantenere la porta aperta. Risulta dunque necessario effettuare una prova semplice per ciascun parametro: ne sono necessarie in tutto quattro, anziché soltanto due. Partendo da:

$$\left\{ v_2 = t'_{11}v_1 - t'_{12}i_1i_2 = t'_{21}v_1 - t'_{22}i_1 \right.$$

consideriamo di aprire la porta 2 e:

1.1 imponiamo $v_1 = V_0$.

$$t_{11} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_2=0} = \frac{V_0}{v_2} \Big|_{i_2=0}$$

1.2 imponiamo $i_1 = I_0$.

$$t_{21} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0} = \left. \frac{I_0}{v_2} \right|_{i_2=0}$$

2. Cortocircuitando, invece, aperta la porta 2, si ha $v_2 = 0$. Similmente a quanto sopra, quindi:

2.1 imponiamo $v_1 = V_0$

$$t_{12} = - \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{v_2=0} = \left. \frac{V_0}{i_2} \right|_{v_2=0}$$

2.2 imponiamo $i_1 = I_0$

$$t_{22} = - \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_2=0} = \left. \frac{I_0}{i_2} \right|_{v_2=0}$$

Il procedimento è del tutto analogo nel caso dei parametri t' , con l'imposizione di valori noti per le variabili relative alla porta di uscita anziché a quella di ingresso.

11.2 Doppi bipoli in regime sinusoidale

È possibile estendere tutte le premesse e i procedimenti relativi al regime stazionario appena osservati in dettaglio al regime sinusoidale, tramite l'analisi in dominio simbolico, semplicemente effettuando le opportune corrispondenze con i valori simbolici. Dunque, ogni valore v può essere sostituito da un \underline{V} , ogni i da un \underline{I} , e analogamente per le proprietà circuitali. Nel caso della rappresentazione R,

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

$$[v] = [R][i]$$

La corrispettiva rappresentazione in regime simbolico è:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

$$[\underline{V}] = [\underline{Z}][\underline{I}]$$

In cui $[\underline{Z}]$ è detta *matrice impedenza*, e le sue entrate *parametri impedenza*.

- \underline{Z}_{11} Impedenza di ingresso con uscita aperta (a vuoto)
- \underline{Z}_{21} Impedenza di trasferimento con uscita aperta
- ...

In maniera del tutto analoga:

$$\begin{aligned}[R] &\leftrightarrow [Z] \\ [G] &\leftrightarrow [Y] \\ [H] &\leftrightarrow [H] \\ [H'] &\leftrightarrow [H'] \\ [T] &\leftrightarrow [T] \\ [T] &\leftrightarrow [T']\end{aligned}$$

In cui le matrici H , H' , T , T' mantengono lo stesso nome e lo stesso significato, ma hanno entrate complesse anziché reali. La matrice Y è detta *matrice ammettenza*.

Esercizio 19. Determinare i parametri \underline{T} del circuito in Figura 65 intepretandolo come un doppio bipolo.

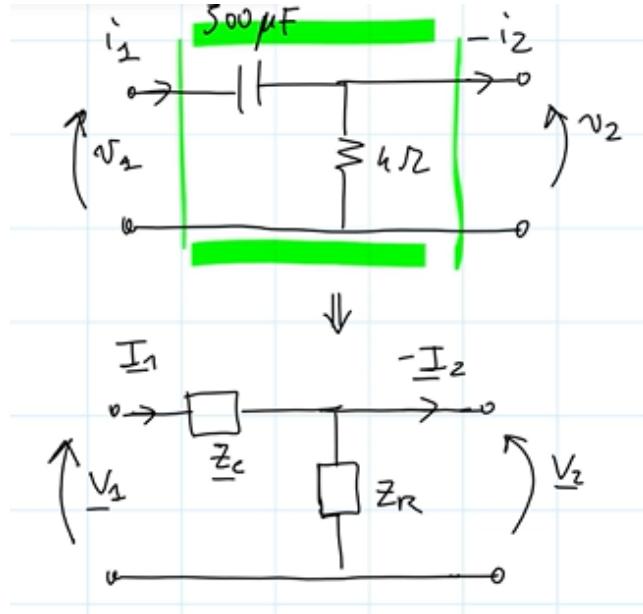


Figura 65

$$\begin{aligned}\underline{Z}_C &= -\frac{1}{\omega C} = -j2 \\ Z_R &= 4 \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{t}_{11} \underline{V}_2 - \underline{t}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{t}_{21} \underline{V}_2 - \underline{t}_{22} \underline{I}_2 \end{cases}$$

Effettuiamo quindi le prove semplici.

1. Facendo riferimento alla Figura 66,

$$\underline{t}_{11} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{\underline{V}_0}{\underline{V}_2} \Big|_{I_2=0}$$

Considero ora che $\underline{V}_2 = \underline{V}_R = Z_R \underline{I}_R = Z_R \frac{\underline{V}_0}{Z_C + Z_R}$. Perciò

$$\underline{t}_{11} = \frac{\underline{V}_0}{Z_R \frac{\underline{V}_0}{Z_C + Z_R}} = \frac{Z_C + Z_R}{Z_R}$$

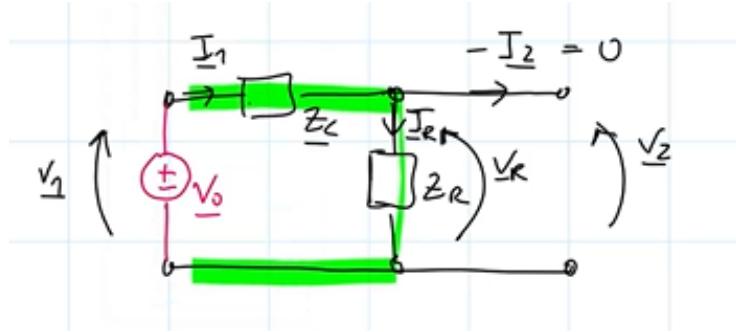


Figura 66

2. Facendo riferimento alla Figura 67,

$$\underline{t}_{21} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{\underline{I}_0}{\underline{V}_2} \Big|_{I_2=0}$$

Considero ora che $\underline{V}_2 = \underline{V}_R = Z_R \underline{I}_R = Z_R \underline{I}_0$. Perciò

$$\underline{t}_{21} = \frac{\underline{I}_0}{Z_R \underline{I}_0} = \frac{1}{Z_R}$$

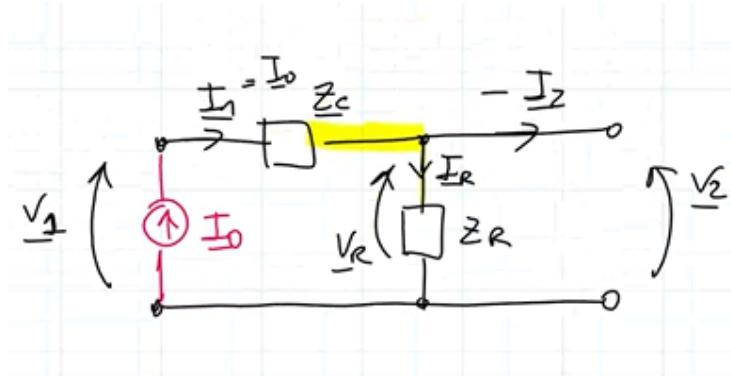


Figura 67

3. Facendo riferimento alla Figura 68,

$$t_{12} = - \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} = - \frac{V_0}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

. Notiamo che $I_2 = -I_1 = -\frac{V_0}{Z_C}$. Dunque:

$$t_{12} = - \frac{V_0}{\frac{V_0}{Z_C}} = Z_C$$

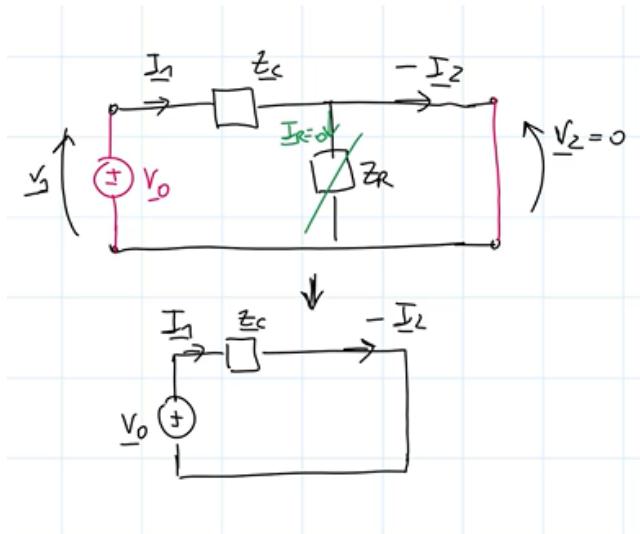


Figura 68

4. Facendo riferimento alla ??,

$$\underline{t}_{22} = - \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right|_{V_2=0} = - \left. \frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_2} \right|_{V_2=0}$$

. Notiamo che $\underline{I}_2 = -\underline{I}_0$. Dunque:

$$\underline{t}_{12} = - \frac{\underline{I}_0}{-\underline{I}_0} = 1$$

11.3 Connessioni tra doppi bipoli

11.3.1 Bipoli in serie a un doppio bipolo

Presentiamo il caso in cui il doppio bipolo sia rappresentabile tramite rappresentazione \underline{Z} . Facendo riferimento alla Figura 69, osserviamo che le impedenze connesse in serie a un doppio bipolo si sommano alle impedenze di ingresso/uscita del doppio bipolo.

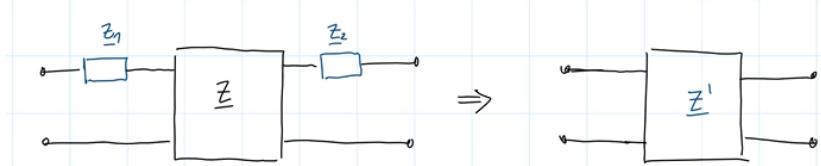


Figura 69

Dunque se la matrice impedenza associata al doppio bipolo iniziale è:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

La matrice associata al sistema serie è:

$$\underline{Z}' = \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_1 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_2 \end{bmatrix}$$

11.3.2 Bipoli in parallelo (alle porte) di un doppio bipolo

Presentiamo il caso in cui il doppio bipolo sia rappresentabile tramite rappresentazione \underline{Y} . Analogamente al caso precedente, facendo riferimento alla Figura 70, osserviamo che le ammettenze connesse in parallelo a un doppio bipolo si sommano alle ammettenze di ingresso/uscita del doppio bipolo.

Dunque se la matrice impedenza associata al doppio bipolo iniziale è:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

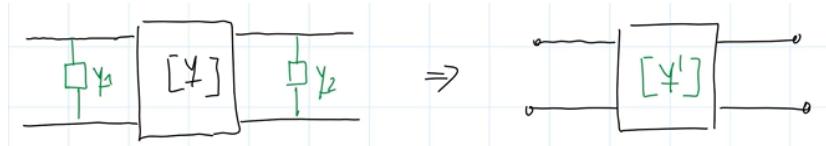


Figura 70

La matrice associata al sistema serie è:

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_1 & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_2 \end{bmatrix}$$

Nel caso di configurazioni più complesse o miste, è necessario risolvere il circuito complesso, e, in generale, non è possibile attuare una semplificazione diretta di questo tipo.

11.3.3 Collegamento in serie tra doppi bipoli

Consideriamo due doppi bipoli rappresentabili tramite rappresentazione \underline{Z} , come in Figura 71. Analogamente ai bipoli, anche due doppi bipoli collegati in serie saranno attraversati dalla stessa corrente in ingresso e in uscita: questa è la ragione del collegamento in figura. Dunque, osserviamo le conseguenze del collegamento in serie:

$$\begin{cases} \underline{I}_{1a} = \underline{I}_{1b} = \underline{I}_1 \\ \underline{I}_{2a} = \underline{I}_{2b} = \underline{I}_2 \\ \underline{V}_1 = \underline{V}_{1a} + \underline{V}_{1b} \\ \underline{V}_2 = \underline{V}_{2a} + \underline{V}_{2b} \end{cases}$$

Perciò è possibile considerare la serie dei due bipoli come un unico doppio bipolo, con correnti e tensioni in ingresso e uscita descritti dal sistema appena considerato. Per determinare la rappresentazione \underline{Z}_{eq} del nuovo doppio bipolo ottenuto, osserviamo che:

$$\begin{aligned} a : \quad [\underline{V}_a] &= [\underline{Z}_a][\underline{I}] \\ b : \quad [\underline{V}_b] &= [\underline{Z}_b][\underline{I}] \end{aligned}$$

Dunque:

$$[\underline{V}] = [\underline{V}_a] + [\underline{V}_b] = ([\underline{Z}_a] + [\underline{Z}_b])[\underline{I}]$$

. Quindi, definita $\underline{Z}_{eq} = [\underline{Z}_a] + [\underline{Z}_b]$, la legge costitutiva del doppio bipolo ottenuto è:

$$[\underline{V}] = [\underline{Z}_{eq}][\underline{I}]$$

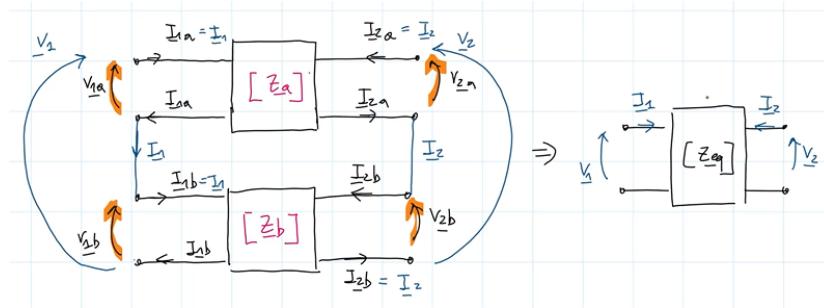


Figura 71. Collegamento in serie di due doppi bipoli

11.3.4 Collegamento in parallelo tra doppi bipoli

Consideriamo due doppi bipoli rappresentabili tramite rappresentazione \underline{Y} , come in Figura 72. Analogamente ai bipoli, anche due doppi bipoli collegati in parallelo saranno sottoposti alla stessa tensione. Dunque, osserviamo le conseguenze del collegamento in parallelo:

$$\begin{cases} \underline{V}_{1a} = \underline{V}_{1b} = \underline{V}_1 \\ \underline{V}_{2a} = \underline{V}_{2b} = \underline{V}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1b} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{2a} + \underline{I}_{2b} \end{cases}$$

Perciò è possibile considerare il parallelo dei due bipoli come un unico doppio bipolo, con relazioni tra correnti e tensioni in ingresso e uscita dei due doppi bipoli e quelle del doppio bipolo risultante descritte dal sistema appena considerato. Analogamente al caso precedente della serie di doppi bipoli, per determinare la rappresentazione \underline{Y}_{eq} del nuovo doppio bipolo ottenuto, osserviamo che:

$$\begin{aligned} a : \quad & [\underline{I}_a] = [\underline{Z}_a][\underline{V}] \\ b : \quad & [\underline{I}_b] = [\underline{Z}_b][\underline{V}] \end{aligned}$$

Dunque:

$$[\underline{I}] = [\underline{I}_a] + [\underline{I}_b] = ([\underline{Y}_a] + [\underline{Y}_b])[\underline{V}]$$

. Quindi, definita $[\underline{y}_{eq}] = [\underline{Y}_a] + [\underline{Y}_b]$, la legge costitutiva del doppio bipolo ottenuto è:

$$[\underline{I}] = [\underline{y}_{eq}][\underline{V}]$$

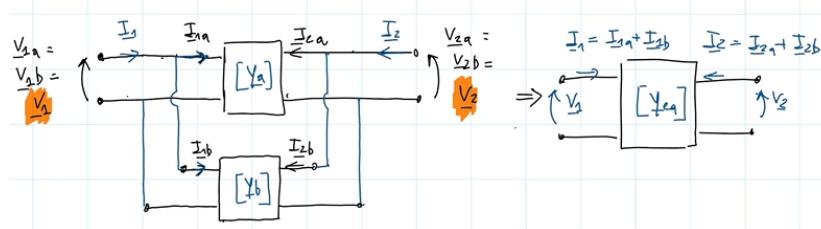


Figura 72. Collegamento in parallelo di due doppi bipoli

11.3.5 Collegamento di doppi bipoli in cascata

Consideriamo due bipoli rappresentabili in trasmissione diretta (rappresentazione \underline{T}) collegati come in Figura 73. Tale collegamento è detto *in cascata*.

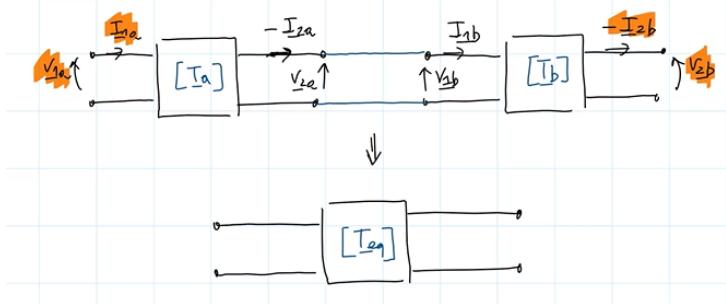


Figura 73. Collegamento in cascata di due doppi bipoli

Omettendo dimostrazione e calcoli, osserviamo che il doppio bipolo equivalente risulta descritto dalla relazione

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = ([\underline{T}_a]) \cdot [\underline{T}_b] \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

In cui

$$[\underline{T}_{eq}] = [\underline{T}_a] \cdot [\underline{T}_b]$$

11.3.6 Calcoli con doppi bipoli in serie e parallelo

Nel caso in cui si abbia una rappresentazione non ideale per effettuare i calcoli relativi a serie o parallelo, o di altra natura, è possibile effettuare la conversione tramite l'ausilio di opportune tabelle simboliche, che permettono di ottenere ogni rappresentazione a partire da ciascuna delle altre cinque, ammesso che tale rappresentazione esista per il componente considerato. Per questo corso, l'utilizzo delle tabelle è consigliato soltanto per verificare i risultati, in quanto sarà richiesto di determinare i parametri di diverse rappresentazioni unicamente tramite prove semplici, come esercizio. Nel caso in cui si tenti di utilizzare

questo metodo per una conversione verso una rappresentazione non ammessa per il componente in analisi, si ottiene un determinante nullo, che rende impossibile procedere con i calcoli. Si noti, infine, che in alcuni casi, nelle tabelle di conversione i parametri t possono essere indicati, ad esempio, con le lettere A , B , C , D , anziché con i doppi pedici, onde evitare confusione concettuale in merito alle relazioni con porte di entrata e uscita.

12 Circuiti dinamici in regime transitorio

Ci occupiamo in questa sezione dell'analisi di circuiti dinamici in regime transitorio.

Definizione 46 (Circuito dinamico). *Un circuito è detto dinamico quando contiene almeno un componente dinamico. Si definisce ordine del circuito il numero di componenti dinamici presenti nel circuito. L'ordine del circuito determina il comportamento generale del circuito.*

Definizione 47 (Regime transitorio). *Il regime transitorio è l'evoluzione temporale di $v(t)$, $i(t)$ che si osserva tra una condizione di regime stazionario/periodico e un'altra. Sapendo studiare queste fasi, si ha un'idea del comportamento di un circuito in tutti gli istanti del suo utilizzo, che è prevalentemente stazionario o periodico, e in cui le fasi transitorie sono dovute all'accensione, allo spegnimento, o al cambiamento di topologia del circuito, ad esempio tramite l'attivazione di interruttori.*

12.1 Circuiti dinamici di ordine 1

12.1.1 Circuito RC - Evoluzione libera

Consideriamo un circuito come in Figura 74, in cui:

- $t < 0$: $v_C = V_0$, $\frac{d}{dt}v_C = 0$;
- $t = 0$: commutazione interruttore.

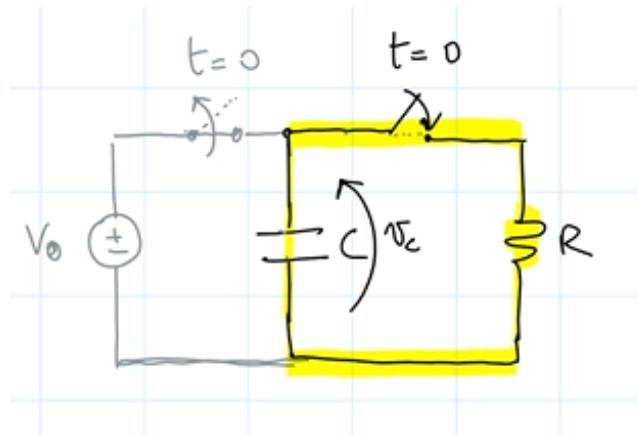


Figura 74. Circuito riferimento per lo studio del transitorio di un circuito RC. Il condensatore viene caricato per $t < 0$ e lasciato scaricare successivamente, grazie alla commutazione degli interruttori.

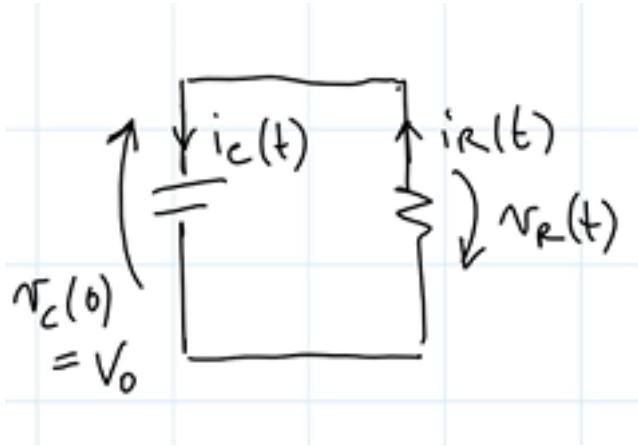


Figura 75. Schema del circuito RC con versi di riferimento (VDR) assegnati al fine di effettuare i calcoli necessari

Per la proprietà di continuità della tensione osservata per il condensatore,

$$\begin{aligned} v_C(0^-) &= v_C(0^+) = V_0 \\ Q_C(0^-) &= Q_C(0^+) = CV_0 \\ E_C(0^-) &= E_C(0^+) = \frac{1}{2}CV_0^2 \end{aligned}$$

Studiamo dunque ciò che avviene per $t \geq 0$, quando si innesca un regime transitorio (di scarica, come vedremo in seguito). Facendo riferimento ai VDR in Figura 75, osserviamo che:

$$LKT : v_R(t) + v_C(t) = 0$$

$$Ri_R(t) + v_C(t) = 0$$

$$LKC : i_R(t) = i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Dunque otteniamo l'equazione differenziale di primo grado lineare omogenea:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

Integrando tramite il metodo di separazione delle variabili

$$\int_{v_C(0)}^{v_C(t)} \frac{dv_C}{v_C} = -\int_{0}^t \frac{dt}{RC}$$

si ottiene:

$$[\ln|v_C|]_{v_C(0)}^{v_C(t)} = -\frac{t}{RC}$$

Da cui, con pochi semplici passaggi algebrici, si giunge all'equazione dell'evoluzione libera (o *evoluzione naturale*) di v_C :

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_C(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_0 e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Questo andamento è descritto graficamente in section 12.1.1:

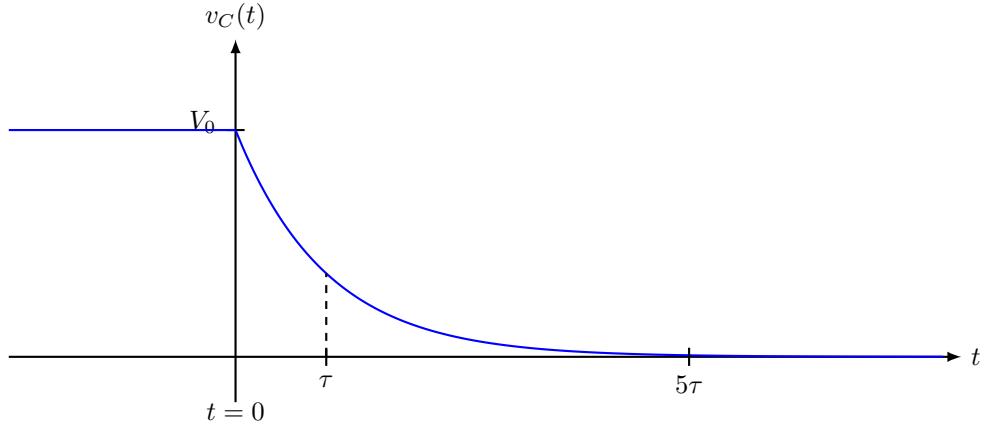


Figura 76. Evoluzione temporale libera della tensione in un circuito RC in regime transitorio

Notiamo in particolare che gli unici parametri che influenzano la risposta sono V_0 e RC . Con RC maggiore, $\frac{t}{RC}$ diminuisce e la risposta è più lenta; e viceversa. Vista l'importanza di RC , che è definito dalle caratteristiche dei componenti circuituali scelti. Vista l'importanza di questo termine, la definiamo *costante di tempo* del circuito:

$$\tau = RC(s)$$

Tramite una semplice analisi dimensionale è possibile verificare che il prodotto RC è una quantità di tempo, e si misura in secondi.

$v_C(t = \infty) = 0$. Ci chiediamo però dopo quanto tempo possiamo considerare il transitorio approssimativamente concluso. Notiamo innanzitutto che in un tempo τ la tensione si riduce di circa il 63% (vedi section 12.1.1).

$$v_C(\tau) = V_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \frac{V_0}{e} \approx 0,37V_0$$

Notiamo anche che:

$$v_C(5\tau) < 1\%V_0$$

Dunque possiamo considerare il transitorio concluso approssimativamente dopo un tempo di 5τ .

Similmente, possiamo indagare l'andamento della corrente nel tempo.

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \Rightarrow C \frac{d}{dt}(V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}) = C(-\frac{1}{\tau})V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = (-\frac{V_0}{R})e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{v_C(t)}{R}$$

L'andamento della corrente nel tempo durante il transitorio è dunque rappresentata in section 12.1.1. Notiamo la discontinuità della corrente: questo è l'esito dell'idealità del circuito, con induttanza nulla. Per circuiti reali, con componenti induttiva non nulla, per quanto minima, si avrà una salita della corrente molto rapida, ma non nettamente discontinua come rappresentata nel grafico.

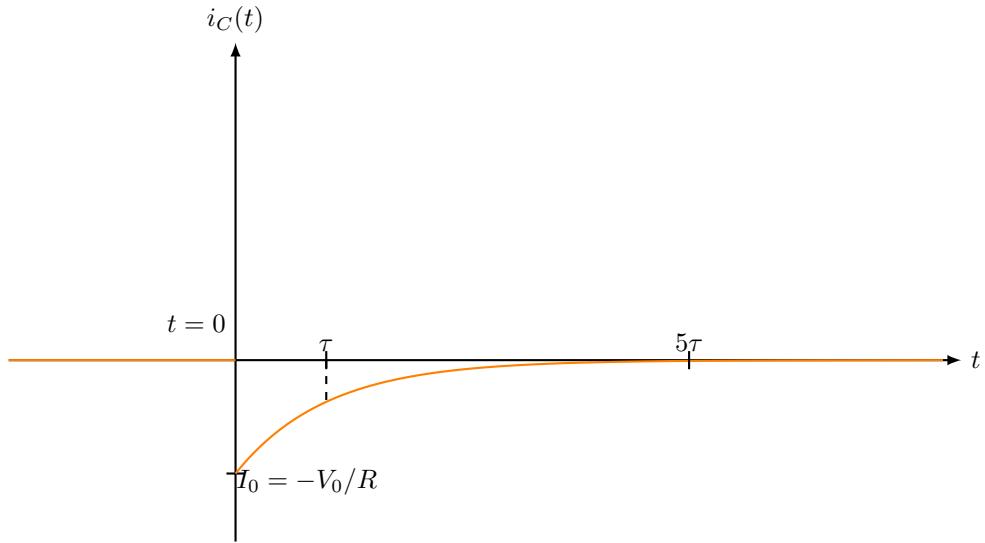


Figura 77. Evoluzione temporale libera della corrente attraverso il resistore (nonché attraverso il condensatore) di un circuito RC in regime transitorio

Osserviamo il bilancio energetico durante il transitorio. Verifichiamo la conservazione dell'energia durante il transitorio.

$$p_{A,C}(t) = v_C(t)i_C(t) = -\frac{V_0^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$p_{A,R}(t) = v_R(t)i_R(t) = \frac{V_0^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

- La potenza erogate dal condensatore, nonché assorbita dal resistore, è un esponenziale negativo. Notiamo che la costante di tempo dell'andamento della potenza è dimezzata rispetto a quella dell'evoluzione della corrente e della tensione.

- Il condensatore assorbe una potenza negativa, ossia eroga potenza; il resistore assorbe una potenza positiva. Risulta dunque che C alimenta R durante il transitorio, fino a quando non esaurisce l'energia che aveva immagazzinato in precedenza, nella condizione di $v_C = V_0$.

Estendiamo il ragionamento al calcolo delle energie scambiate durante il transitorio.

$$E_{A,R}(t) = \int_0^t p_{A,R}(t) dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{V_0^2 C}{2} \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^t = -\frac{CV_0^2}{2} (e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1) = \frac{CV_0^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}})$$

Osserviamo, per completezza:

$$E_{A,R}(0) = 0$$

$$E_{A,R}(\infty) = \frac{CV_0^2}{2}$$

Dunque all'istante iniziale, il resistore è ancora a tensione nulla, perciò non assorbe energia. Osserviamo invece che, dopo tempo infinito, tutta l'energia immagazzinata nel condensatore al tempo $t = 0$ viene dissipata dal resistore.

12.1.2 Circuito RL - Evoluzione libera

Seguiamo un procedimento analogo per studiare un circuito RL in evoluzione libera. Consideriamo un circuito come in Figura 78, in cui:

- $t < 0$: $v_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$;
- $t = 0$: commutazione interruttore.

Affinché l'induttore venga caricato, deve essere connesso a un generatore di corrente per $t < 0$

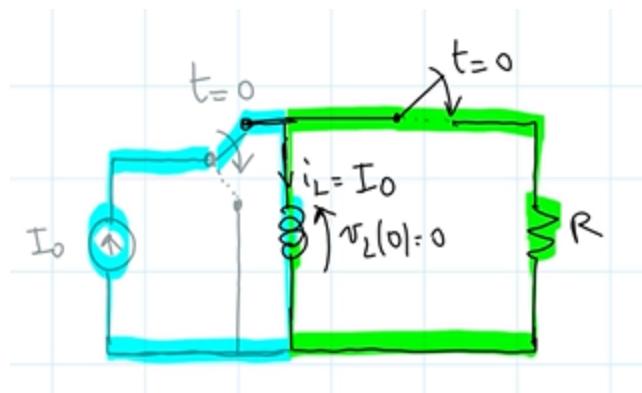


Figura 78. Circuito di riferimento per lo studio del transitorio di un circuito RL. L'induttore viene caricato per $t < 0$ e lasciato scaricare successivamente, grazie alla commutazione degli interruttori.

Per la proprietà di continuità della corrente osservata per l'induttore,

$$\begin{aligned} i_L(0^-) &= i_L(0^+) = I_0 \\ \Phi_L(0^-) &= \Phi_L(0^+) = L i_L \\ E_L(0^-) &= E_L(0^+) = \frac{1}{2} L I_0^2 \end{aligned}$$

Studiamo dunque ciò che avviene per $t \geq 0$, quando si innesca un regime transitorio di scarica.

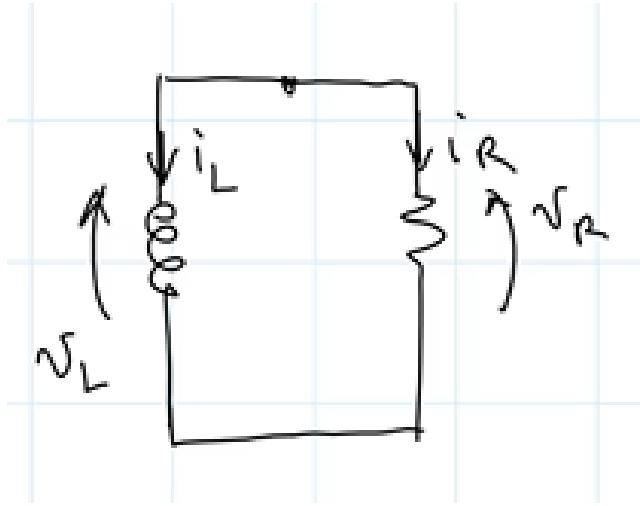


Figura 79. Schema del circuito RL con versi di riferimento (VDR) assegnati al fine di effettuare i calcoli necessari

Facendo riferimento ai VDR in Figura 79, osserviamo che:

$$LKC : i_R(t) + i_L(t) = 0$$

$$\frac{v_L(t)}{R} + i_L = 0$$

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

Dunque otteniamo l'equazione differenziale di primo grado lineare omogenea:

$$\frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

Notando l'analogia con l'equazione già risolta per il circuito RC in evoluzione libera, si ottiene direttamente

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

in cui, in questo caso, $\tau = \frac{R^4}{L}$ è la *costante di tempo* del circuito RL. Questo circuito ha quindi un comportamento duale a quello del circuito RC, nel senso che il comportamento della corrente di questo è analogo a quello della tensione dell'altro (section 12.1.2), e viceversa.

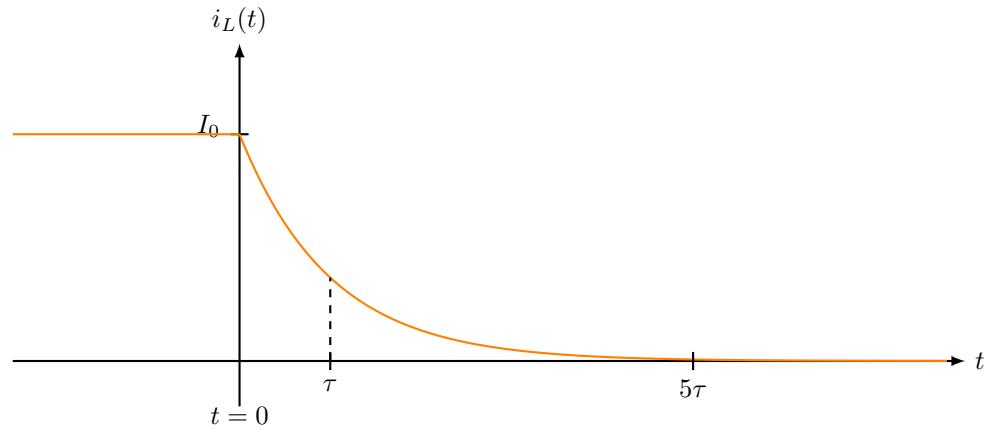


Figura 80. Evoluzione temporale libera della corrente in un circuito RL in regime transitorio

L'andamento della tensione nel circuito RL può essere ricavato facilmente:

$$v_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ L \frac{di_L}{dt} = L \frac{1}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -Ri_L(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Questo andamento è graficato in section 12.1.2

⁴Anche in questo caso è possibile verificare che questa quantità ha le unità di misura di un tempo tramite una semplice analisi dimensionale

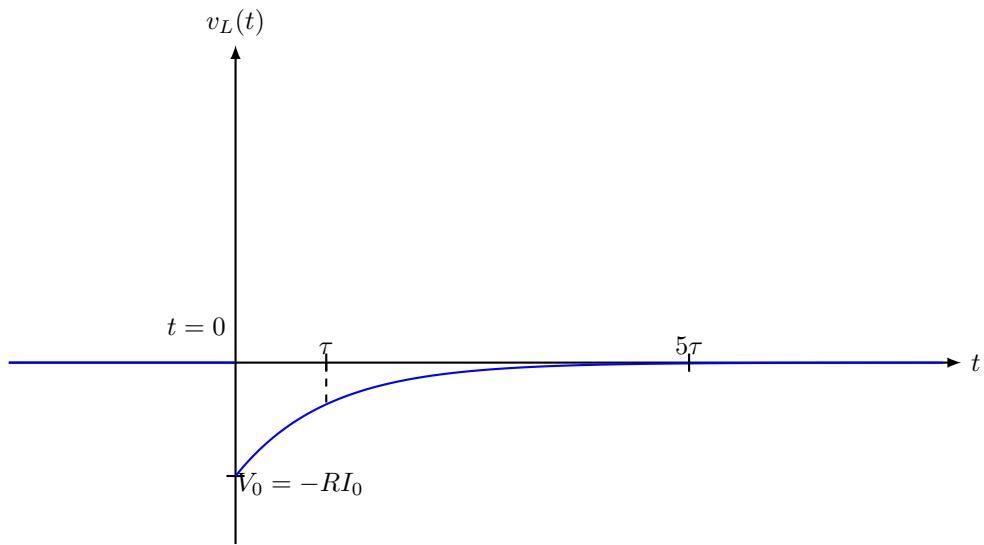


Figura 81. Evoluzione temporale libera della tensione sull'induttore di un circuito RL in regime transitorio

Anche in questo caso, in maniera duale al precedente, la discontinuità nella tensione è dovuta all'ipotesi ideale di capacità nulla nel circuito. Anche relativamente al bilancio energetico, valgono considerazioni e risultati analoghi a quelli mostrati per il circuito RC.

12.1.3 RC - Evoluzione forzata

Consideriamo il circuito in Figura 82, costituito da un generatore collegato in serie a un interruttore, un resistore e un condensatore carico.

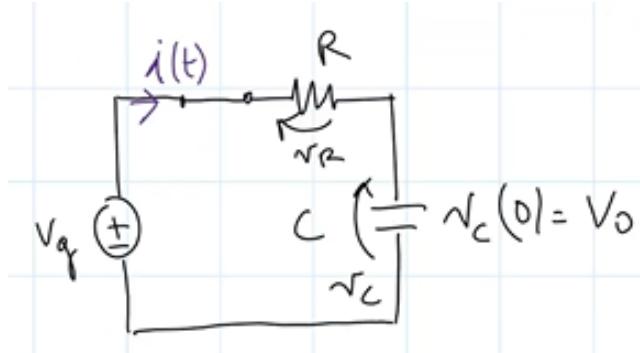


Figura 82. Circuito RC con generatore indipendente di tensione costante, con VDR di tensioni e correnti per riferimento per i calcoli successivi

Per $t < 0$, l'interruttore è aperto, con $v_C(0) = 0$ e $\frac{d}{dt}v_C(t) = 0$. A $t = 0$ si verifica la commutazione dell'interruttore. Ci proponiamo di studiare il transitorio del condensatore. Ci aspettiamo in ogni caso che per $t = \infty$, cioè a transitorio concluso, $v_C(\infty) = V_g$. È possibile trarre questa conclusione dal fatto che la corrente sul condensatore $i_C(\infty) = C \frac{dv_C}{dt}(\infty) = 0$ quando si raggiunge nuovamente un regime stazionario, in cui la tensione ai capi del condensatore non varia. Essendo $v_R(\infty) = Ri_R(\infty) = 0$, risulta necessariamente $v_C(\infty) = V_g$.

Considerando i VDR in Figura 82,

$$LKT : V_g = v_R(t) + v_C(t)$$

$$V_g = Ri(t) + v_C(t)$$

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = V_g$$

Otteniamo dunque un'equazione differenziale lineare di primo grado, a coefficienti costanti, non omogenea, che può ancora una volta essere risolta per separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} \int_{v_C(0)=V_0}^{v_C(t)} \frac{dv_C}{V_g - v_C(t)} &= \int_0^t \frac{dt}{RC} \\ \ln \left(\frac{|v_C - V_g|}{|V_0 - V_g|} \right) &= -\frac{t}{RC} \\ v_C(t) &= V_g + (V_0 - V_g)e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

Notiamo che $\lim_{t \rightarrow \infty} v_C(t) = V_g$, coerentemente con le nostre considerazioni preliminari. Notiamo anche che, ancora una volta coerentemente con le ipotesi iniziali:

$$v_C(0) = V_0$$

Per visualizzare graficamente l'andamento della tensione nel tempo durante l'evoluzione forzata, notiamo innanzitutto che i parametri che possono essere modificati "da progettisti" per determinare il comportamento del circuito sono V_0 , V_g e $\tau = RC$. L'andamento della tensione è rappresentato in Figura 83. Notiamo che il caso particolare per $V_g = 0$, $V_0 > 0$ corrisponde all'evoluzione libera.

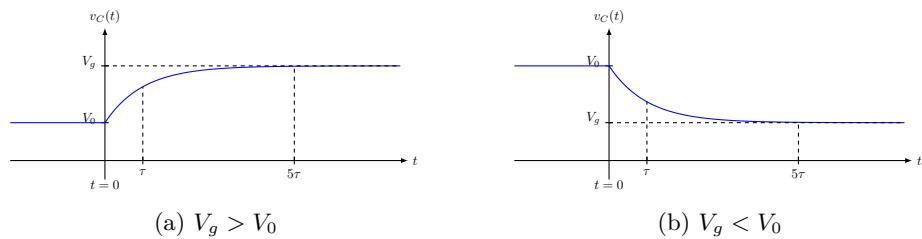


Figura 83. Andamento della tensione sul condensatore di un circuito RC in regime transitorio in evoluzione forzata

12.1.4 Scomposizione della risposta di circuiti del primo ordine ed evoluzione forzata di un circuito RL

Possiamo vedere la risposta $v_C(t) = V_g + (V_0 - V_g)e^{-\frac{t}{\tau}}$ come composta da:

- una risposta a regime: $v_{C,r} = V_g$, ossia una parte permanente;
- una risposta transitoria: $v_{C,t}(t) = (V_0 - V_g)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Questa può anche essere chiamata *risposta temporanea*, perché si esaurisce con il passare del tempo: $v_{C,t}(\infty) = 0$.

Notiamo che, noto il valore di τ , bastano due informazioni per determinare $v_C(t)$, ossia $v_C(0) = V_0$ e $v_C(\infty) = V_g$.

$$v_C(t) = v_{C,t}(t) + v_{C,r} = [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty)$$

Dunque, siccome abbiamo osservato che il circuito RL ha un comportamento duale a quello del circuito RC,

$$i_L(t) = i_{L,t}(t) + i_{L,r} = [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

In sintesi, possiamo concludere che la risposta completa di un circuito del 1° ordine dipende da:

1. Valore **iniziale** della variabile di stato ($v_C(0)$ o $i_L(0)$)
2. Valore **finale** della variabile di stato ($v_C(\infty)$ o $i_L(\infty)$)
3. Costante di tempo τ ($\tau_C = RC$ o $\tau_L = \frac{L}{R}$)

Esercizio 20. Determinare $i_L(t)$ durante il transitorio nel circuito in Figura 84

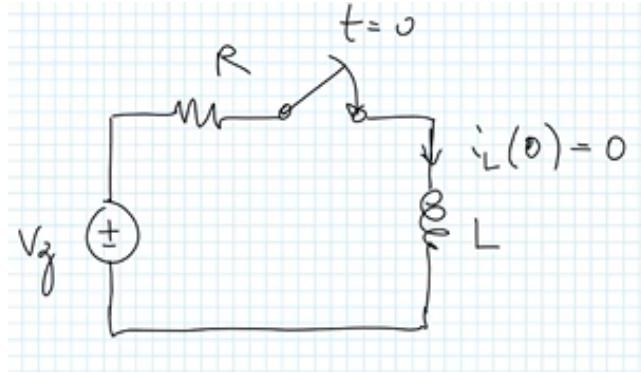


Figura 84

Sarebbe possibile risolvere questo esercizio anche usando le leggi di Kirchhoff e risolvendo le equazioni differenziali risultanti. Tramite la scomposizione della risposta, tuttavia, è possibile pervenire più rapidamente a una soluzione.

$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Studiamo poi il circuito a $t = 0^-$, in regime stazionario con interruttore aperto: siccome il ramo contenente l'induttore è aperto,

$$i_L(0^-) = 0$$

Per un'analisi in più passaggi, si può prima osservare che l'induttore in regime stazionario si comporta come un cortocircuito, e dunque sostituirlo nel circuito dato con tale componente, per poi notare che, con l'interruttore aperto, su di esso non scorre alcuna corrente. Per le proprietà di continuità della corrente sull'induttore, poi,

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_L(0) = 0$$

Determiniamo infine $i_L(\infty)$. Notiamo che a $t = \infty$, si avrà interruttore chiuso e il transitorio sarà concluso, e si sarà instaurato un nuovo regime stazionario, diverso da quello iniziale. Nuovamente, si può considerare l'induttore come un cortocircuito e calcolare la corrente che vi scorre attraverso, ossia la risposta a regime, come:

$$i_L(\infty) = \frac{V_g}{R}$$

Perciò,

$$i_L(t) = [0 - \frac{V_g}{R}]e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V_g}{R} = \frac{V_g}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Notiamo che per la risoluzione di un circuito dinamico del primo ordine in regime transitorio è necessario risolvere due circuiti in regime stazionario, uno per $t = 0$ e uno per $t = \infty$. Per un circuito del primo ordine generale, cioè con un solo componente dinamico connesso a una rete complessa di componenti non dinamici, è possibile ottenere direttamente la soluzione tramite l'individuazione del circuito equivalente di Thevenin o Norton. Come abbiamo visto, i due teoremi sono sostanzialmente equivalenti, e si può dimostrare che portano alla stessa soluzione per questi circuiti, grazie alle relazioni $R_T = R_N$ e $V_T = R_T I_N$. Tuttavia, per comodità nel calcolo e nell'analisi del circuito, spesso può essere conveniente utilizzare:

- l'equivalente Thevenin se il componente dinamico collegato è un condensatore ($\tau = R_T C$);
- l'equivalente Norton se il componente dinamico collegato è un induttore ($\tau = \frac{L}{R_N}$)

12.2 Circuiti dinamici di ordine 2

Per la definizione di ordine, questi circuiti contengono due componenti dinamici. Questi circuiti corrispondono al caso reale, in quanto è impossibile, nella realtà, avere un circuito con induttanza o capacità davvero nulla. Questi circuiti portano a equazioni differenziali di secondo ordine per la risoluzione del

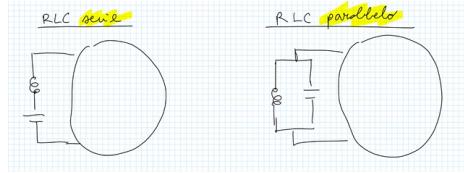


Figura 85. Confronto tra i due tipi generali di circuiti del secondo ordine. A sinistra, RLC serie; a destra, RLC parallelo.

loro transitorio. Esistono due tipi di circuiti di questo tipo, denominati *RLC serie* e *RLC parallelo*, in cui *serie* e *parallelo* sono riferiti al tipo di collegamento tra i componenti L e C (??). Analogamente ai circuiti del primo ordine, trovare una soluzione generale a questi due tipi di circuito permette di risolvere tutti i circuiti del secondo ordine, a seguito di opportune semplificazioni circuitali.

12.2.1 RLC serie - Evoluzione libera

Consideriamo, ad esempio, un circuito come in Figura 86, che rappresenta il caso realistico in cui il transitorio è innescato dalla chiusura di un interruttore. Altri scenari possibili potrebbero essere più complicati.

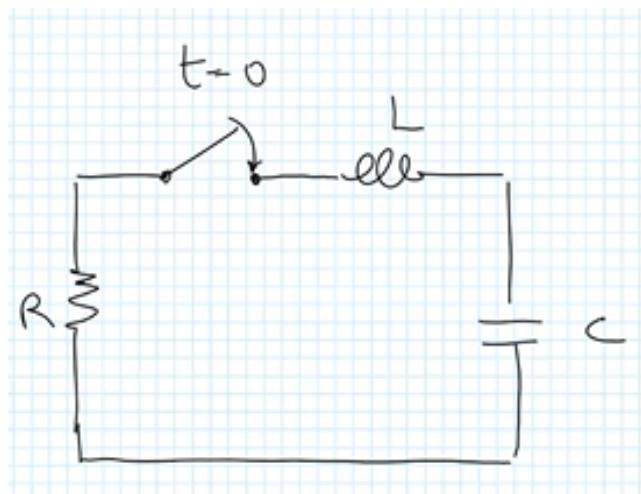


Figura 86

Per $t = 0^-$, il circuito è in regime stazionario, con interruttore aperto, e $i_L(0^-) = I_0$, $v_C(0^-) = V_0$. Notiamo che non è possibile che scorra una corrente sull'induttore in questa configurazione, ma seguiamo una trattazione generale con I_0 non necessariamente nulla per dare una soluzione più generale del transitorio.

Al tempo $t = 0$ si chiude l'interruttore e si innesca il transitorio.

A $t = 0^+$, grazie alle proprietà di continuità delle variabili di stato sui nostri componenti dinamici, sappiamo che $i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$ e $v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$. Ci proponiamo dunque di studiare il comportamento del circuito per $t \geq 0$ (Figura 87).

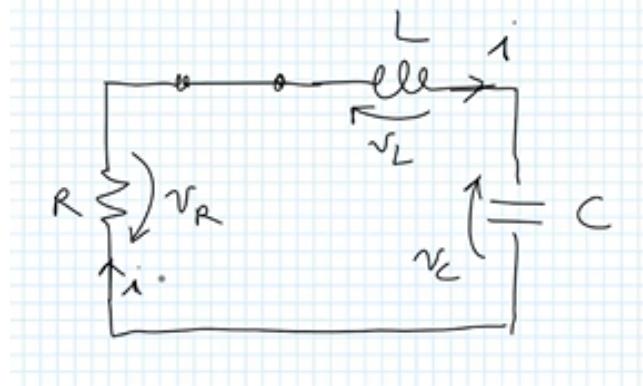


Figura 87

$$LKT : v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$$

Utilizzando le leggi costitutive e notando che la corrente che attraversa i tre componenti, collegati in serie, è la stessa,

$$\begin{aligned} Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t idt &= 0 \\ R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) &= 0 \\ \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Si ottiene dunque un'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine 2, a coefficienti costanti, omogenea. Le condizioni iniziali necessarie alla risoluzione del problema di Cauchy associato a questa equazione differenziale ordinaria sono:

1. $i(0^+) = i_L(0^+) = I_0$
2. $\frac{di}{dt}|_{0^+} = \frac{di_L}{dt}|_{0^+}$, la quale deve essere ricavata dallo studio del circuito a $t = 0^+$. Siccome $v_L = L \frac{di_L}{dt}$, $\frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L}$. Per determinare $v_L(0^+)$ utilizziamo già ora un metodo generale, poi utilizzabile anche negli esercizi. Per $t = 0^+$, si possono considerare il condensatore come un generatore indipendente di tensione (V_0) e l'induttore come un generatore indipendente di corrente (I_0), che possiamo comunque descrivere tramite la convenzione dell'utilizzatore (Figura 88).

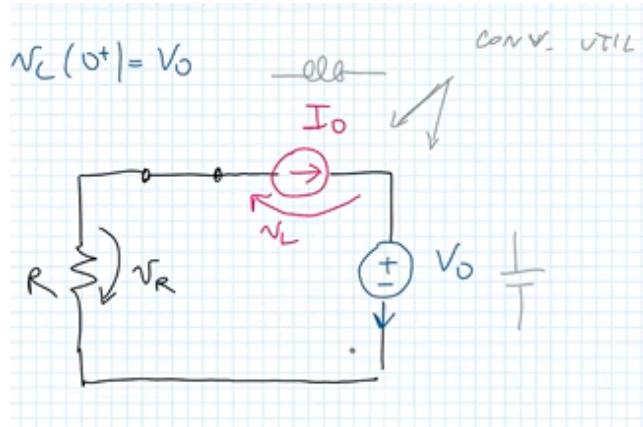


Figura 88. Circuito RLC serie semplificato a $t = 0^+$ tramite le condizioni iniziali per ricavare $v_L(0^+)$

$$v_L(0^+) = -(v_R(0^+) + V_0) = -(RI_0 + V_0)$$

Perciò,

$$\frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = -\frac{RI_0 + V_0}{L}$$

Procediamo dunque alla risoluzione dell'equazione differenziale associata al sistema (Equazione (4)), con polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

. Chiamiamo:

- $\lambda_{1,2}$ *frequenze naturali* del circuito, perché rappresentano la frequenza dell'oscillazione dell'esponenziale complesso (o sinuosoide) che rappresenta la soluzione, come si vedrà in seguito, e hanno dimensioni di una frequenza fisica (Hz);
- $\alpha = \frac{R}{2L}$ *fattore di smorzamento*, per le ragioni che saranno chiare con la risoluzione;
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *pulsazione di risonanza*, in continuità con quanto è possibile osservare dall'analisi di circuiti LC, in particolare per quanto riguarda la frequenza di risonanza del circuito.

Il polinomio caratteristico assume quindi la forma

$$\lambda^2 + 2\alpha + \omega_0^2 = 0$$

E le soluzioni (con $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$):

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}$$

Le soluzioni possibili in base ai valori dei parametri sono:

1. $\Delta > 0$ (*Risposta sovrasmorzata*);
2. $\Delta = 0$ (*Risposta smorzata critica*);
3. $\Delta < 0$ con $\alpha > 0$ (*Risposta sottosmorzata*);
4. $\Delta < 0$ con $\alpha = 0$ (*Risposta senza smorzamento*).

Procediamo dunque ad analizzarle in dettaglio:

1. *Risposta sovrasmorzata*

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha > \omega_0$, ossia fattore di smorzamento maggiore della pulsazione di risonanza.

Osserviamo che questo caso si verifica per valori della resistenza grandi relativamente a capacità e induttanza.

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R} < 0$$

La soluzione è dunque del tipo

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

con A_1, A_2 (in questo caso così come nei successivi) parametri costanti che dipendono dalle soluzioni iniziali. Osserviamo che la soluzione ha una forma analoga a quella vista per circuiti del primo ordine, con esponenziali negativi (con forma variabile in base ai valori dei due parametri).

$$i(0) = A_1 + A_2$$

Notiamo anche che $\tau = -\frac{1}{\lambda}$. Un possibile andamento è rappresentato in item 1. In generale, comunque, lo smorzamento è rapido, e dominato dall'esponenziale più lento, e si può osservare al massimo un estremante relativo (massimo o minimo, il base ai valori relativi di $A_1, A_2, \lambda_1, \lambda_2$).

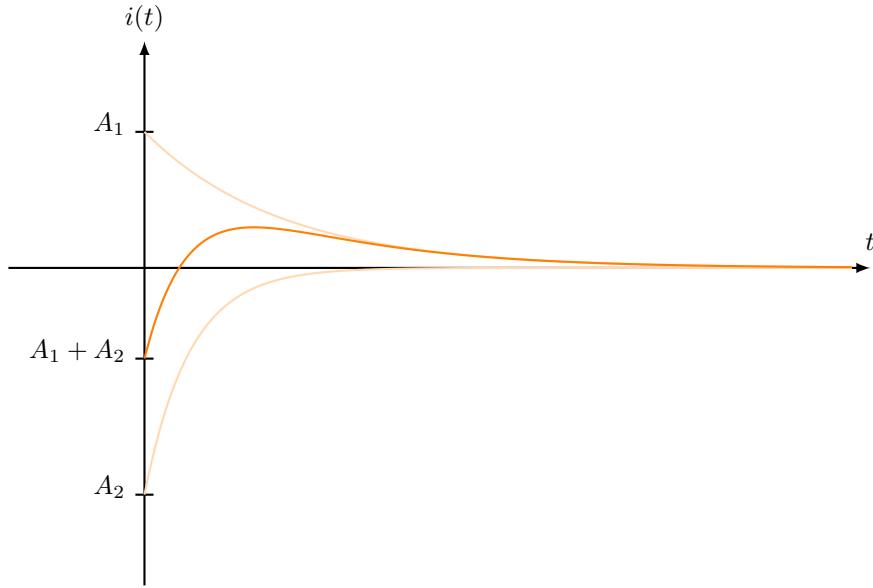


Figura 89

2. Risposta smorzata critica

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \omega_0$, ossia fattore di smorzamento uguale alla pulsazione di risonanza.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \in \mathbb{R} < 0$$

La soluzione è dunque del tipo

$$i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

Notiamo che uno dei due parametri pre-esponenziali è moltiplicato per un termine lineare (t). Il comportamento sarà dunque simile a quello precedente, ma con specificità da questo termine, che declina più lentamente dell'altro. Nell'andamento di $i(t)$ può essere presente un massimo (o un minimo, in base ai valori dei parametri) anche più grande (in valore assoluto) della corrente I_0 o del valore iniziale, a un istante τ_M (item 2), il che può essere un vantaggio o una minaccia per il corretto funzionamento o l'integrità del circuito. Questa è la risposta non oscillatoria che arriva a regime più velocemente, perciò è indicata per circuiti in cui è necessario un transitorio breve, ma in cui non può essere accettata una risposta oscillatoria.

$$i(0) = A_1$$

Determiniamo il tempo al quale si verifica il massimo valore della corrente, calcolando la derivata e trovando l'istante in cui si annulla:

$$\frac{d}{dt}[(A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}] = (-\alpha A_1 e^{-\alpha t} - \alpha A_2 t e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t})$$

$$\tau_M = \frac{A_2 - \alpha A_1}{\alpha A_2} = \frac{1}{\alpha} - \frac{A_1}{A_2}$$

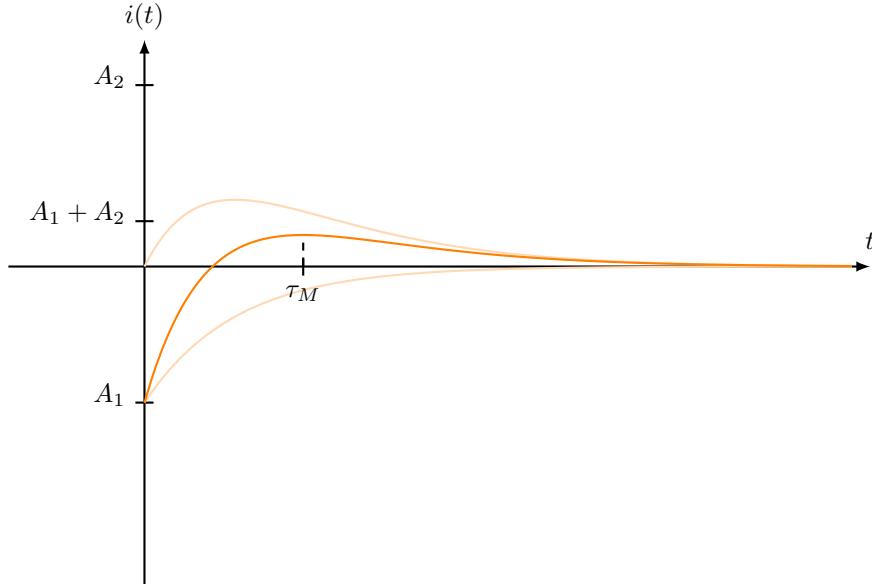


Figura 90

3. Risposta sottosmorzata

$\Delta < 0$ ($\alpha > 0$) $\Leftrightarrow \alpha < \omega_0$, ossia fattore di smorzamento minore alla pulsazione di risonanza, con fattore di smorzamento comunque positivo.

Detto $\beta = \sqrt{-\Delta}$,

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta \in \mathbb{C}$$

Dunque $\lambda_{1,2}$ sono complesse coniugate (come previsto dal corollario del Teorema Fondamentale dell'Algebra). La soluzione è dunque del tipo

$$i(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)]$$

Detti $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ e $\phi = -\text{atan}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$, si può scrivere in maniera equivalente

$$i(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \phi)$$

$$i(0) = A \cos \phi$$

L'andamento è del tipo indicato in item 3, è cioè una risposta oscillante smorzata con andamento esponenziale.

- Ha tempo caratteristico unico $\tau = \frac{1}{\alpha}$;
- ha frequenza di oscillazione $f = \frac{\beta}{2\pi}$ e quindi periodo $T = \frac{2\pi}{\beta}$;

- è la risposta che tende a regime più velocemente in assoluto.
- ha primo massimo o minimo con valore assoluto piuttosto alto, ed è quindi una risposta "violenta". Per questo è ad esempio utilizzata nelle candele dei motori a benzina, per innescare la combustione, dove il circuito ha smorzamento basso, per garantire scariche forti ripetute nel tempo.
- Questa è la risposta che decade più velocemente all'interno della fascia di tolleranza, per valori di α minori di ω_0 ma *sufficientemente grandi*, anche se la risposta smorzata critica è quella che decade più rapidamente asintoticamente⁵.

5

- (a) Dimostrazione del decadimento asintotico. Si dimostra che, a parità di pulsazione naturale ω_0 , la risposta critica si assesta asintoticamente più rapidamente. Siano $i_{crit}(t) = (A_1 + A_2)t e^{-\omega_0 t}$ la risposta critica e $E_{sotto}(t) = Ae^{-\alpha t}$ l'inviluppo della risposta sottosmorzata (con $0 < \alpha < \omega_0$). Poniamo $\delta = \omega_0 - \alpha$; dato che siamo in regime sottosmorzato, risulta $\delta > 0$. Analizzando il limite del rapporto delle ampiezze per $t \rightarrow \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|i_{crit}(t)|}{E_{sotto}(t)} \propto \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \cdot e^{-\omega_0 t}}{e^{-\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\delta t}}$. Per la gerarchia degli infiniti, l'esponenziale al denominatore (con $\delta > 0$) domina sulla crescita lineare del numeratore, annullando il limite. Perciò i_{crit} è infinitesimo di ordine superiore, cioè si annulla asintoticamente più rapidamente.
- (b) Dimostrazione per l'assestamento a tempo finito. Vogliamo determinare per quali valori di smorzamento $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0}$ l'*errore residuo* (cioè la differenza tra il valore della corrente durante il momento del transitorio considerato e il valore a regime) dell'inviluppo sottosmorzato rientra più rapidamente nella fascia di tolleranza arbitraria ϵ (ad esempio $\epsilon = 0.02$ o 0.05) rispetto a quello critico. Per il caso critico, la condizione di velocità nulla a $t = 0$ impone che il coefficiente del termine pre-esponenziale lineare bilanci esattamente il decadimento esponenziale, fissando univocamente, per l'*errore residuo* (ossia la differenza tra il valore transitorio al tempo t e il valore a regime), la forma $\rho_{crit}(t) = (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$. Per il caso sottosmorzato, il tempo di assestamento è dettato dal decadimento dei massimi relativi, descritti dall'inviluppo esponenziale: $\rho_{sotto}(t) = e^{-\zeta \omega_0 t}$. Definiamo t_{sotto} come il tempo di assestamento dell'inviluppo sottosmorzato, ovvero l'istante in cui l'inviluppo interseca la soglia ϵ :

$$\epsilon = \rho_{sotto}(t_{sotto}) = e^{-\zeta \omega_0 t_{sotto}} \implies t_{sotto} = \frac{\ln(1/\epsilon)}{\zeta \omega_0}$$

Affinché il sistema sottosmorzato sia più rapido di quello critico, è necessario che all'istante t_{sotto} (quando il sottosmorzato è appena entrato in tolleranza) il sistema critico si trovi ancora *fuori* dalla fascia, ovvero presenti un errore residuo maggiore. Imponiamo dunque la condizione:

$$\rho_{crit}(t_{sotto}) > \epsilon$$

Sostituendo l'espressione della risposta critica $\rho_{crit}(t) = (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$ e ricordando che $\epsilon = e^{-\zeta \omega_0 t_{sotto}}$:

$$(1 + \omega_0 t_{sotto})e^{-\omega_0 t_{sotto}} > e^{-\zeta \omega_0 t_{sotto}}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $e^{\omega_0 t_{sotto}}$ si ottiene la diseguaglianza trascendente:

$$1 + \omega_0 t_{sotto} > e^{(1-\zeta)\omega_0 t_{sotto}}$$

Questa relazione conferma che, fissata una tolleranza (che determina univocamente il prodotto $\omega_0 t_{sotto}$), esiste un intervallo di valori $\zeta < 1$ per i quali il tempo di assestamento risulta inferiore rispetto al caso critico ($\zeta = 1$). Poiché la diseguaglianza ricavata è trascendente e non risolvibile analiticamente per ζ , consideriamo un caso pratico fissando

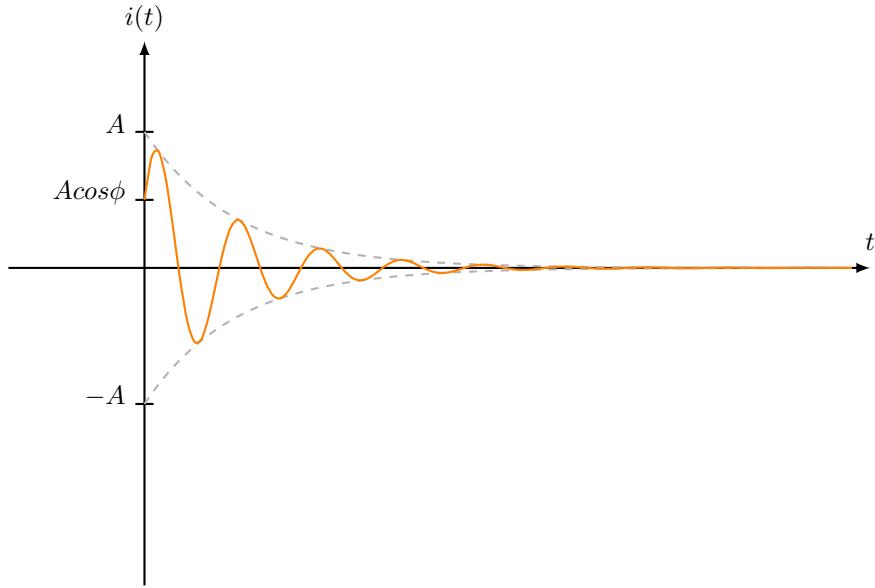


Figura 91

4. *Risposta senza smorzamento* $\Delta < 0$, ($\alpha = 0$), ossia fattore di smorzamento nullo.

$$\lambda_{1,2} = \pm j\beta$$

In questo caso le soluzioni sono complesse coniugate, e puramente immaginarie. La soluzione è dunque del tipo

$$i(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

Detti, similmente a prima, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ e $\phi = -\text{atan}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$, si può

la soglia all'1% ($\epsilon = 0.01$). Il tempo di assestamento normalizzato per il caso critico si ottiene risolvendo numericamente l'equazione:

$$(1 + \omega_0 t_{crit})e^{-\omega_0 t_{crit}} = 0.01 \implies \omega_0 t_{crit} \approx 6.64$$

Per il caso sottosmorzato, il tempo di assestamento è dato da:

$$e^{-\zeta \omega_0 t_{sotto}} = 0.01 \implies \omega_0 t_{sotto} = \frac{\ln(100)}{\zeta} \approx \frac{4.605}{\zeta}$$

Imponendo la condizione di maggior rapidità $t_{sotto} < t_{crit}$:

$$\frac{4.605}{\zeta} < 6.64 \implies \zeta > \frac{4.605}{6.64} \approx 0.69$$

Questo risultato dimostra che, per una richiesta di precisione dell'1%, qualsiasi smorzamento nell'intervallo $0.69 < \zeta < 1$ garantisce un assestamento più rapido rispetto al caso critico, pur in presenza di oscillazioni (che restano però confinate nell'inviluppo).

scrivere in maniera equivalente.

$$i(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Notiamo che non è presente alcun termine di smorzamento esponenziale. Questo risulta coerente con $\alpha = 0 \Leftrightarrow R = 0$, in cui la dissipazione di energia è nulla.

$$i(0) = A \cos(\phi)$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Osserviamo oscillazioni permanenti con pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Notiamo con questo esempio limite che i componenti dinamici portano a una risposta oscillante, dovuta allo scambio di energia tra induttori e condensatori, mentre quelli resistivi portano a uno smorzamento, una risposta dissipativa. Come progettisti, possiamo bilanciare il contributo di questi componenti nei circuiti per modularne la risposta.

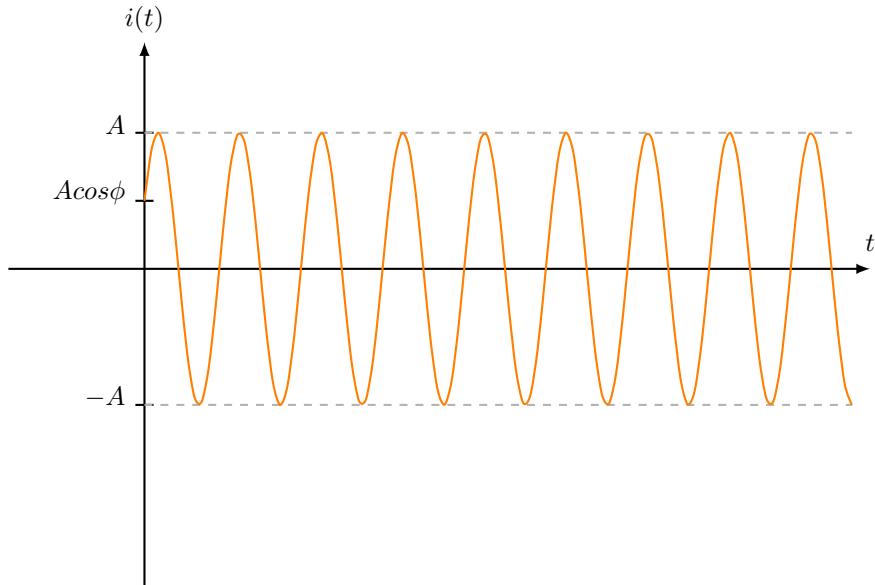


Figura 92

Per ricapitolare, osserviamo gli andamenti delle quattro risposte a confronto in Figura 93, ottenute mantenendo la stessa ω_0 e facendo variare α come descritto nella legenda. Osserviamo in particolare la differente altezza dei picchi, e il fatto che la risposta sottosmorzata è quella che porta all'assestamento più velocemente⁶

⁶Per quanto alla nota precedente, in questo caso la risposta sottosmorzata entra più rapidamente nel regime oscillante.

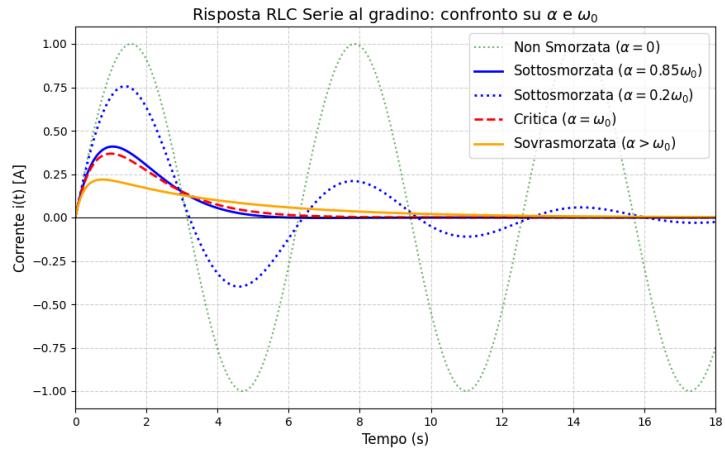


Figura 93

12.2.2 RLC serie - Evoluzione forzata

Facciamo riferimento a Figura 94, con regime stazionario con interruttore aperto per $t = 0^-$, chiusura dell'interruttore per $t = 0$, transitorio per $t \geq 0$

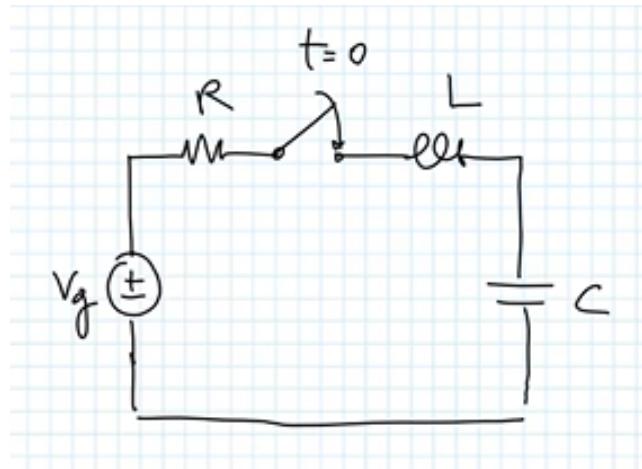


Figura 94

damente in una generica fascia di tolleranza arbitraria, valutabile visivamente, in quanto si è selezionato un valore di $\zeta = 0.85$, adatto a mostrare il decadimento iniziale rapido, anche se questo non mostra la natura oscillatoria della risposta

Con calcoli analoghi a quelli svolti nel caso dell'evoluzione libera,

$$LKT : v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = V_g$$

Utilizzando le leggi costitutive e notando che la corrente che attraversa i tre componenti, collegati in seri, è la stessa $i(t) = i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$,

$$\begin{aligned} RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2i}{dt^2} + v_C(t) &= V_g \\ \frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) &= V_g \end{aligned} \quad (5)$$

Notiamo quindi che la forma è la stessa dell'Equazione (4), in cui però l'incognita è $v_C(t)$ anziché $i(t)$, e l'Equazione (5) non è omogenea. Sfruttiamo la linearità del circuito, quindi scomponiamo la risposta completa in una risposta transitoria $v_{C,t}(t)$ e una a regime $v_{C,r}$:

$$v_C(t) = v_{C,t}(t) + v_{C,r}$$

Per la risposta transitoria,

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = 0$$

che è esattamente identica nella forma all'Equazione (4). Dunque, in base alla presenza dei componenti R, L, C, il circuito può avere una risposta transitoria di uno dei quattro tipi già descritti sopra.

1. $\Delta > 0$ (*Risposta sovrasmorzata*);
2. $\Delta = 0$ (*Risposta smorzata critica*);
3. $\Delta < 0$ con $\alpha > 0$ (*Risposta sottosmorzata*);
4. $\Delta < 0$ con $\alpha = 0$ (*Risposta senza smorzamento*).

Rimangono da determinare soltanto i parametri A_1 , A_2 , dipendenti dalle condizioni iniziali:

1. $v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$
2. $\frac{dv_C}{dt}|_{0^+}$, la quale deve essere ricavata dallo studio del circuito a $t = 0^+$, similmente a quanto fatto per la corrente nel circuito in evoluzione libera. Sostituiamo dunque il condensatore con un generatore di tensione V_0 e l'induttore con un generatore di corrente I_0 . Dal circuito così ottenuto è poi possibile determinare il valore di $\frac{dv_C}{dt}|_{0^+}$ sfruttando il fatto che $\frac{dv_C}{dt} = Ci_C$.

Per determinare la risposta a regime, è sufficiente, poi, effettuare un'analisi del circuito in regime stazionario a $t = \infty$, considerando che gli induttori sono equivalenti a cortocircuiti e i condensatori a rami aperti (Figura 95).

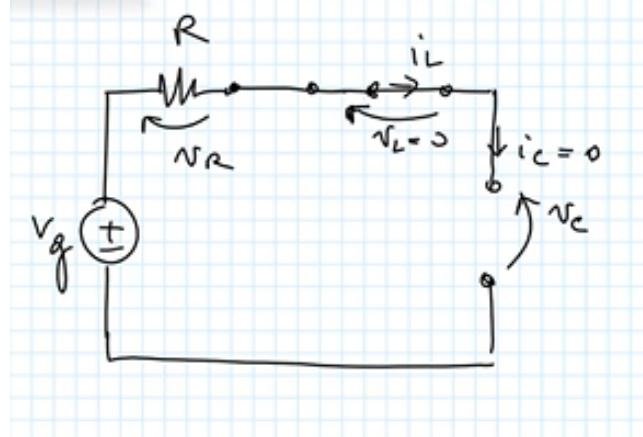


Figura 95

$$LKT : v_C(\infty) = V_g - v_R(\infty) = V_g + R i_R = V_g$$

Osserviamo nel grafico in Figura 96 l'andamento della risposta completa nel tempo in base a diversi valori della resistenza, dunque di α del circuito.

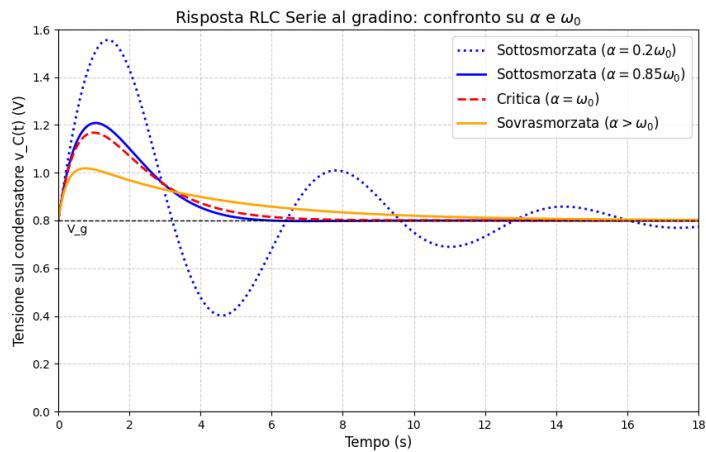


Figura 96

Siccome la forma delle soluzioni alle equazioni differenziali è la stessa per

tutti i circuiti, nella risoluzione degli esercizi è soltanto necessario determinare i valori iniziali e finali (tramite l'analisi a *istanti strategici*) per ottenere la soluzione specifica. Gli esercizi proposti sono dunque studi semplificati di transitori.

Esercizio 21 (Studio semplificato di un transitorio). *Si consideri il circuito in Figura 97*

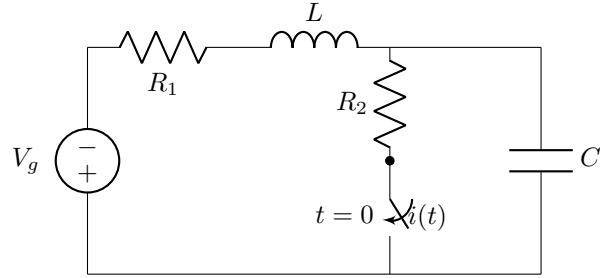


Figura 97

Si determinino: $i_L(0^-)$, $i_C(0^-)$, $\frac{di_L}{dt}|_{0^+}$, $\frac{dv_C}{dt}|_{0^+}$, $E_L(\infty)$, $E_C(\infty)$. Iniziamo studiando il circuito a $t = 0^-$, con interruttore chiuso, in regime stazionario. Il circuito si semplifica come in Figura 98

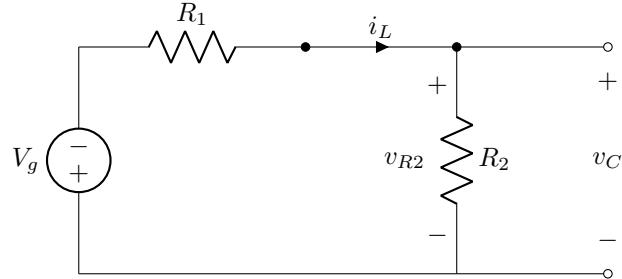


Figura 98

$$i_L(0^-) = \frac{V_g}{R_1 + R_2}$$

$$v_C(0^-) = R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{V_g}{R_1 + R_2}$$

Studiamo il circuito a $t = 0^+$. Per le proprietà di continuità, analogamente a quanto osservato nella teoria precedente, possiamo considerare i componenti dinamici come generatori indipendenti, mantenendo i VDR scelti in precedenza (Figura 99).

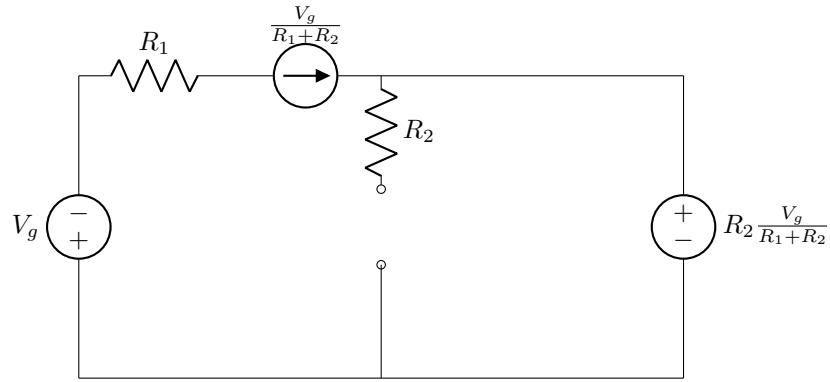


Figura 99

$$\frac{dv_c}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_L}{C} = \frac{1}{C} \frac{V_g}{R_1 + R_2} \text{ (V} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$\frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{v_L}{L} = \frac{V_g - v_R - v_C}{L} = \frac{V_g}{L} \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = 0$$

Studiamo il circuito a $t = \infty$ (Figura 100).

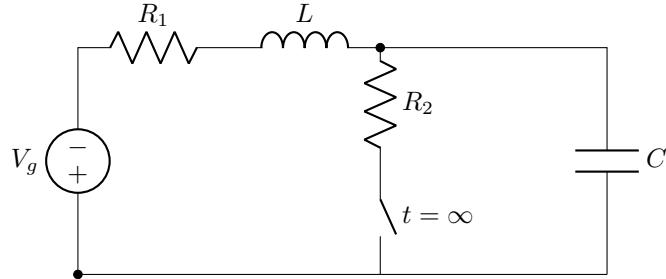


Figura 100

$$E_L(\infty) = \frac{1}{2} L i_L^2(\infty) = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_g}{R_1} \right)^2$$

$$E_C(\infty) = \frac{1}{2} C v_C^2(\infty) = \frac{1}{2} C (R i_{R_2}(\infty))^2 = 0$$

12.2.3 RLC parallelo - Evoluzione forzata

Analizziamo un circuito RLC parallelo, direttamente in evoluzione forzata. Da questa trattazione, poi, è possibile ricavare come caso particolare l'evoluzione

libera. Consideriamo, ad esempio, un circuito come in Figura 101, che rappresenta il caso realistico in cui il transitorio è innescato dalla chiusura di un interruttore. Altri scenari possibili potrebbero essere più complicati.

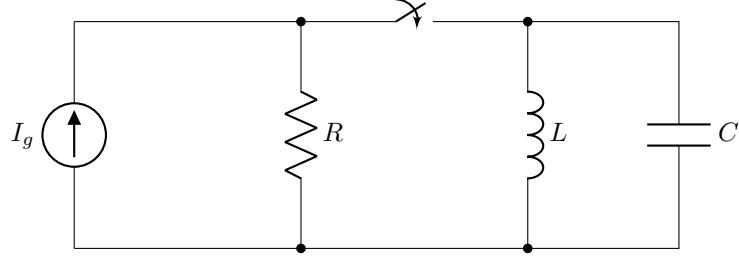


Figura 101

Applichiamo lo stesso metodo già utilizzato per RLC serie per indagare il comportamento del circuito per $t \geq 0$, durante il transitorio.

$$\begin{aligned}
 LKC: \quad & i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = I_g \\
 & \frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C \frac{dv}{dt} = I_g \\
 & \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L(t) + C \frac{d^2 i_L}{dt^2} = I_g \\
 & \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} I_g \tag{6}
 \end{aligned}$$

Notiamo che l'Equazione (6) è molto simile all'Equazione (5), con l'unica differenza che in questo caso è la tensione la funzione incognita. In questo caso, ω_0 ha lo stesso valore in funzione dei parametri del sistema ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), mentre $\alpha = \frac{1}{2RC}$. Dunque anche in questo caso il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$$

Siccome il circuito è lineare, possiamo leggere la risposta completa come somma di una risposta transitoria e una regime:

$$i_L(t) = i_{L,t}(t) + i_{L,R}$$

La risposta transitoria può avere le forme già descritte sopra:

1. $\Delta > 0$, *Risposta sovrasmorzata*;
2. $\Delta = 0$, *Risposta smorzata critica*;
3. $\Delta < 0$ con $\alpha > 0$, *Risposta sottosmorzata*;

4. $\Delta < 0$ con $\alpha = 0$, *Risposta senza smorzamento.*

I parametri A_1 , A_2 dipendono dalle condizioni iniziali, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$; $\frac{di_L}{dt}|_{0^+}$, che può essere ottenuta analizzando il circuito all'istante iniziale, considerando i componenti dinamici come generatori indipendenti per quell'istante, in modo del tutto analogo a quanto sopra.

Per determinare la risposta a regime, consideriamo il circuito per $t = \infty$, a transitorio concluso (Figura 102). Dunque, banalmente,

$$i_{L,R} = I_g$$

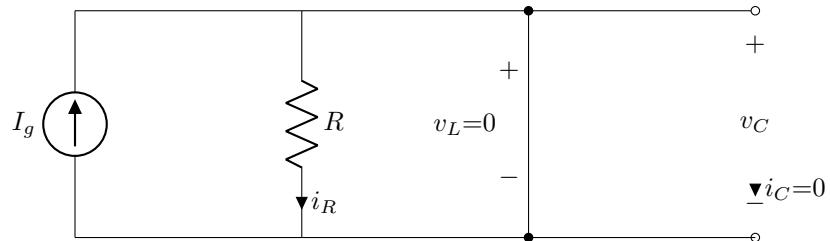


Figura 102

Perciò, gli andamenti possibili per la risposta $i_L(t) = i_{L,t}(t) + I_g$ sono rappresentati in Figura 103.

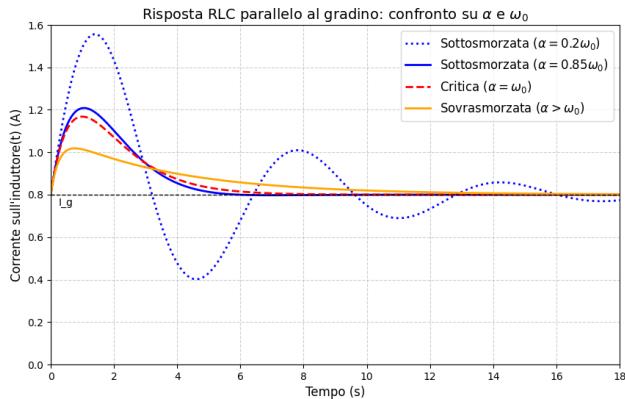


Figura 103

Nel grafico, generato per opportuni valori delle condizioni iniziali adatti a mostrare la stretta analogia, notiamo, come previsto la totale somiglianza degli andamenti con quelli graficati in Figura 96.

Omettiamo per semplicità lo studio delle altre variabili del circuito, che possono essere semplicemente determinati tramite le leggi di Kirchhoff.

12.3 Calcolo delle costanti A_1 e A_2

Il calcolo è analogo per tutti i casi. Prendendo, ad esempio, il caso della risposta sovrassmorzata, esse possono essere ricavate dal seguente sistema di due equazioni in due incognite, dove i valori di $x(t)$ e della sua derivata possono essere determinati per ispezione diretta, come mostrato sopra.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ \frac{dx}{dt} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Per semplificare i calcoli, siccome A_1 e A_2 sono costanti, possiamo studiare il sistema per $t = 0^+$, e usare i necessari valori dall'ispezione del circuito, come anticipato sopra:

$$\begin{cases} x(0^+) = A_1 + A_2 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{0^+} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \\ \begin{aligned} A_1 &= x(0^+) - A_2 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{0^+} &= \lambda_1 x(0^+) - \lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_2 = \lambda_1 x(0^+) + A_2(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned} \\ \begin{aligned} A_1 &= \frac{\left. \frac{dx}{dt} \right|_{0^+} - \lambda_2 x(0^+)}{\lambda_1 - \lambda_2} A_2 = \frac{\left. \frac{dx}{dt} \right|_{0^+} - \lambda_1 x(0^+)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \end{cases}$$

Per le altre forme, si ottengono forme analoghe (non identiche, in quanto la forma di partenza è differente).

12.4 Risonanza

12.4.1 Risonanza - RLC serie

Esploriamo in questa sezione il concetto di *risonanza* in un circuito RLC. Consideriamo un ramo di un circuito RLC serie in regime sinusoidale, come in Figura 104, e indaghiamone il comportamento al variare della frequenza ω di oscillazione della tensione nel circuito.

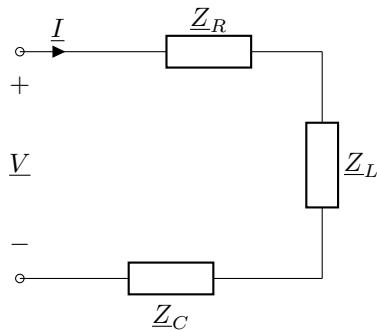


Figura 104

$$\underline{Z} = Z_R + \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + jX$$

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Notiamo che la reattanza del sistema, all'aumentare della frequenza, ha un termine che aumenta e uno che diminuisce. Ci chiediamo dunque se esista un valore ω_0 tale da annullare la reattanza:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Notiamo che questo valore è proprio quello che abbiamo impiegato come *frequenza di risonanza* nella descrizione dei transitori. Questa è l'origine del termine: per $\omega = \omega_0$, il circuito si dice operante in condizione di risonanza, e

$$\underline{Z} = R + j0 = R$$

L'interesse per questo circuito è legato alle proprietà dell'andamento della corrente che scorre nel circuito al variare della frequenza.

ω	X	$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\sqrt{R^2 + X^2}}$
0	$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0 - \infty = -\infty$	0
ω_0	0	$\frac{V}{R}$
∞	∞	0

Ci aspettiamo dunque un andamento della corrente che esibisca un picco alla frequenza di risonanza e tenda a 0 a $\omega = \pm\infty$. Tale picco sarà più alto tanto più piccola la resistenza. Per una resistenza nulla, si avrebbe un comportamento asintotico: se non opportunamente limitato, la corrente tenderà all'infinito (Figura 105). All'atto pratico, salirà fino al limite di protezione del generatore utilizzato, imposto dai produttori per evitare danni irreversibili ai circuiti interni e collegati.

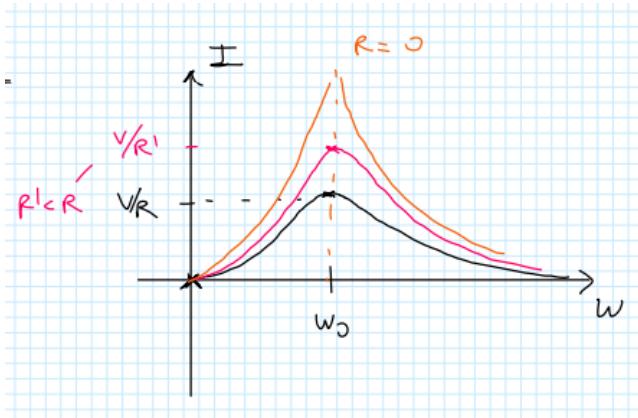


Figura 105

Analizziamo anche l'andamento di $\varphi = \varphi(\omega) = \arg(\underline{Z})$.

ω	$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \tan^{-1}(\frac{X}{R})$
0	$\tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$
ω_0	$\tan^{-1}(0) = 0$
∞	$\tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$

Notiamo dunque che lo sfasamento dovrà avere un andamento analogo a quello della funzione arcotangente, con radice in ω_0 . A basse frequenze ($\omega < \omega_0$), il circuito è dominato dal comportamento capacitivo; al contrario, alle alte frequenze ($\omega > \omega_0$), dal comportamento induttivo. Per $\omega = \omega_0$, il comportamento è ohmico, puramente resistivo, con corrente e tensione in fase (Figura 106). Questo deve essere tenuto in considerazione per ottenere il comportamento desiderato da induttori e condensatori in regime sinusoidale.

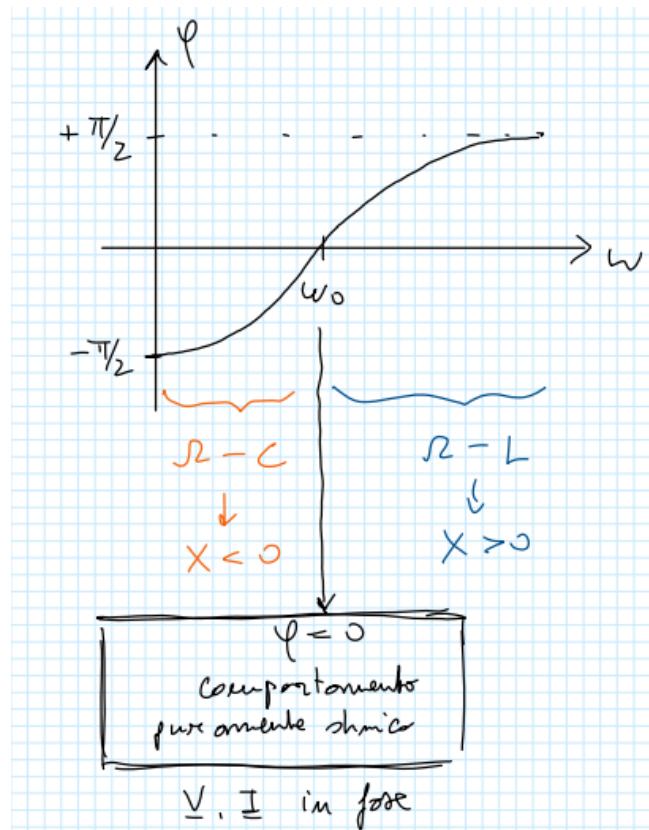


Figura 106

12.4.2 Antirisonanza - RLC parallelo

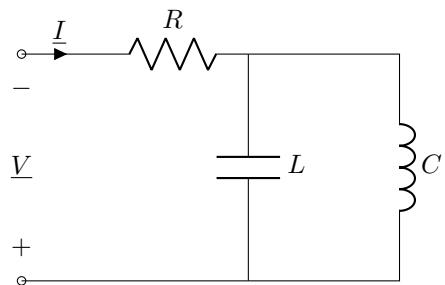


Figura 107

Consideriamo il circuito in Figura 107, e proseguiamo con considerazioni analoghe.

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{j\omega L \cdot (-\frac{j}{\omega C})}{j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = -j \frac{\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

Dunque,

$$X(\omega) = -\frac{\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

Osserviamo che non esiste alcun valore di *omega* che annulla la reattanza. Osserviamo, anzi, che la reattanza tende a infinito per *omega* = ω_0 :

$$X(\omega_0) = -\frac{\frac{L}{C}}{0}$$

ω	X
0	0
ω_0^-	∞
ω_0^+	$-\infty$
∞	0

L'andamento della reattanza è quindi quello rappresentato in Figura 108, che ha comportamento duale a quello della risonanza: si ha comportamento ohmico-induttivo per basse frequenze e ohmico-capacitivo ad alte frequenze. Le correnti tendono ad annullarsi in prossimità della pulsazione di antirisonanza.

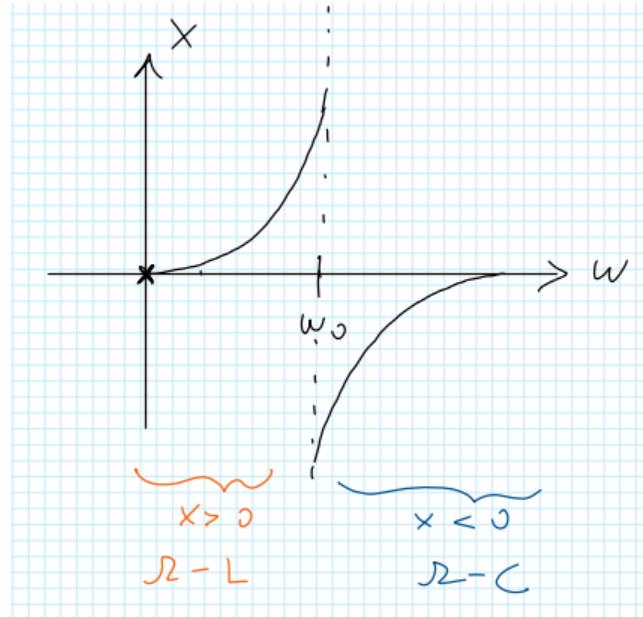


Figura 108

Notiamo che per $\omega = 0$, il parallelo RC è visto come un cortocircuito, con $Z_L = 0$ e $Z_C = \infty$ e tutta la corrente scorre sull'induttore, che si comporta come un circuito aperto, mentre il condensatore come un cortocircuito.

Per $\omega = \infty$, il comportamento è perfettamente speculare, con il condensatore che si comporta come cortocircuito e l'induttore come circuito aperto.

Per $\omega = \omega_0$, nessuno dei due componenti ha impedenza infinita o nulla, tuttavia il parallelo dei due ha impedenza infinita, e perciò la corrente entrante e uscente dal parallelo è nulla. I due componenti singolarmente sentono la tensione V applicata ai capi del ramo (la caduta sul resistore è nulla perché non scorre corrente). Perciò su essi, nel ramo interno al parallelo in realtà si ha una corrente, e per la LKC $I_C = I_L = jV\omega C = -\frac{jV}{\omega L}$, detta *corrente di circolazione*. In fase di progettazione, è dunque necessario verificare che anche questa corrente sia compatibile con le caratteristiche dei componenti, e non rischi di danneggiarli.

13 Validità dei circuiti a parametri concentrati

Ricordiamo che le Leggi di Kirchhoff derivano dall'ipotesi di completo isolamento dei componenti, cioè dall'assenza di variazione di campo di induzione magnetica e di campo elettrico al di fuori dei componenti circuituali.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0 \implies \nabla \times \vec{E} = 0 \implies LKT$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0 \implies \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \implies LKC$$

In DC le due condizioni sopra indicate sono sempre vere: il regime è stazionario dunque $\frac{d}{dt} = 0$. In AC e in transitorio, tanto più alta è la frequenza di oscillazione tanto maggiori sono i valori delle derivate, perciò è legittimo porsi il problema di quale sia la frequenza per la quale il modello a parametri concentrati è completamente inefficace, e dà dunque predizioni inaccurate. Procediamo dunque a studiare un criterio veloce, per quanto rudimentale, per determinare quantitativamente il limite dell'applicazione del modello a parametri concentrati a specifici circuiti.

13.1 Criterio del tempo di transito

Consideriamo un frequenza f caratteristica del circuito in analisi. Per un transitorio non si può considerare una frequenza unica, tuttavia in prima approssimazione il ragionamento può essere analogo. Per il circuito in analisi, vale dunque che il periodo è $T = \frac{1}{f}$.

Detti τ_P ritardo di propagazione, d_{max} la massima distanza tra due punti del circuito e c la velocità della luce, il modello a parametri concentrati è valido se risulta:

$$T \gg \tau_P = \frac{d_{max}}{c}$$

Se questo è valido, infatti, le variazioni dei campi sono abbastanza lente da permettere di considerare \vec{B} e \vec{D} circa costanti nel tempo durante τ_P . Osserviamo dunque quali sono le dimensioni massime di un circuito a diverse frequenze comuni per alcune applicazioni. In gran parte delle applicazioni attuali, il modello a parametri concentrati risulta sufficiente per una buona progettazione. Soprattutto su piccola scala, e per elevata precisione, è possibile scontrarsi con i limiti: in tal caso è necessario fare riferimento a teorie più complesse, ripartendo dalle Leggi di Maxwell. In realtà, inoltre, per tali scopi è spesso indispensabile anche tenere conto di fenomeni quantistici.

f	T	d_{max}
50 Hz	20 ms	6000 km
1 MHz	1 μs	300 m
1 GHz	1 ns	0,3 m
10 GHz	100 ps	3 cm