

OliCommunity - Algebra

Lorenzo Proserpio

6 Novembre 2020

*E qui mi parlano di chances e talento
È che dovresti stare attento
Il secondo senza le prime non ha senso.
Dutch Nazari - "Fino a qui"*

Presentazione

Questa lezione sarà *itinerante*, vorrà dire che vi sorbirete pezzetti di teoria nel bel mezzo dello svolgimento degli esercizi. Come potete ben intuire dal titolo tratteremo principalmente i nostri amici polinomi e nel mentre faremo alcune considerazioni d'alta matematica, ovverosia del buonsenso fortemente applicato. Il mio è anche un tentativo di "ragionare" assieme a voi, come quasi se mi trovassi di fronte ad un problema in gara, quasi perchè ovviamente i problemi che mostrerò sono tutti preparati a priori, per evitare, come mi insegnò un saggio una sera in birreria, delle figure quantomeno di *palta*. Siete invitati a ragionare con me e, perchè no, anche contro di me. Ogni tanto è più importante lo *spunto* della soluzione vera e propria, per i problemi che lascio per casa vi invito a scrivere cosa vi sia venuto in mente nel mentre della soluzione, come se fosse un piccolo diario. Ovviamente tra un problema olimpico e l'altro, come mio solito, mi scapperà qualche divagazione fantascientifica messa appositamente per due motivi: il primo è farmi insultare dal team dei preparatori, il secondo è per incuriosirvi a proseguire il vostro cammino didattico lungo la strada impervia della matematica. Detto ciò direi che possiamo iniziare.

Problemi - Flusso di coscienza

1. (*Febbraio 2012*) Siano due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ distinti di grado minore o uguale a 3, a coefficienti interi e tali che:

$$p(1) = q(1), p(2) = q(2), p(3) = q(3)$$

$$p(-1) = -q(-1), p(-2) = -q(-2), p(-3) = -q(-3)$$

- Qual è il minimo valore che può assumere $[p(0)]^2 + [q(0)]^2$?
 - E se non dovessero essere necessariamente distinti?
 - E se non dovessero essere necessariamente a coefficienti interi?
2. Sia $f(x)$ una funzione reale, ad una variabile, definisco $f^2(x) = f(f(x))$ (f applicata due volte) e $f^n(x) = f(f(\dots(f(x))))$ (f applicata n volte). Facciamo osservazioni più o meno intelligenti su $f^n(x)$ se:

- $f(x) = x$? $f(x) = x + a$ con $a \in \mathbb{R}$? $f(x) = bx$ con $b \in \mathbb{R}$? $f(x) = ax + b$?
- $f(x) = x^2$? $f(x) = \lambda x(1 - x)$ con $\lambda > 0$? $f(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$ con $a_j \in \mathbb{R}$?
- $f(x) = |ax - b|$?
- *La mappa a tenda:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x & \text{se } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

3. (*AOPS*) Determinare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che $p(0) = 0$ e $p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$.

- Se togliessimo la prima condizione?

4. (*EGMO 2012*) Determinare tutte le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problemi - Da fare a casa

1. Dato un $p(x)$ a tre radici reali distinte, qual è il massimo numero di coppie di radici reali coincidenti di $p(x^3 - 3x)$?
2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:
 - (*Idempotenza*) $f(f(x)) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - (*AoPS*) $f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
 - (*AoPS*) $\lceil x \rceil f(y) = \lceil y \rceil f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
 - (*2003 Kazakhstan MO*) f sia un polinomio a coefficienti reali e soddisfi $f(x^2) = f(x)f(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.