

Hunger Games - Il Conto della Rivolta

CORSOOLI - SQUADRE
MARCO CATTAZZO & LORENZO PROSERPIO

7 marzo 2019

Regolamento di Gara

- Prima dell'inizio della gara è necessario scegliere un consegnatore: questi sarà incaricato di portare al tavolo di gara i fogli contenenti le risposte. Sarà l'unico a potersi alzare dal tavolo.
- Entro i primi 15 minuti di gara è possibile scegliere un problema jolly: il punteggio che la squadra guadagnerà con la risoluzione questo problema sarà raddoppiato. Anche eventuali punti di penalità saranno raddoppiati.
- Durante la gara non è possibile usare alcuno strumento di calcolo nè di disegno (No, nemmeno il righello. No, nemmeno le tavolette di cioccolato. No, nemmeno il tubo delle Pringles per fare i cerchi.).
- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre.
- Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale a x .
- Se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la soluzione non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime 4 cifre
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1416$$

- Se ti sei divertito e vuoi rimanere aggiornato sui progetti delle Olimpiadi della Matematica puoi mandare una e-mail alla professoressa P.Proserpio (p.proserpio@liceodesio.gov.it). Ti aspettiamo!

THE HUNGER GAMES



Per aspiranti tributi

1. Eccentrica Gara a Integral City

A Integral City si è svolta una gara di eccentricità e sono state date valutazioni con un massimo di 10 punti. Il voto medio dei partecipanti è stato 7. Inoltre il voto medio dei maschi è stato 6.5, mentre quello delle femmine è stato 8. Se i maschi partecipanti sono 10, quante sono le femmine?

2. Una storia sempre più assurda

Il giogo di Integral City dura ormai da svariati decenni, tanto che è uso comune per gli Integralini (Abitanti di Integral City) inventare leggende a riguardo. Una volta a una festa ho sentito un eccentrico signore spararla talmente grossa da affermare che i decenni sarebbero stati addirittura $(10^8 + 1)(10^4 + 1)(10^2 + 1)(10^1 + 1)$. Al che, tutta la sala è scoppiata a ridere, in quanto in realtà il dominio è durato ben meno di quel numero: solo la somma delle sue cifre. Sapresti dire da quanti decenni dura la dittatura?

3. Gli studi di Pen

La sorella di $\mathbb{K}tniss$, Penrose, per gli amici Pen, si sta preparando per affrontare l'esame per diventare medico nel distretto 13, ma lì la vita è sempre più dura, e i futuri medici devono imparare a leggere i dosaggi delle medicine scritti nei modi più complicati possibile. Il dosaggio di gocce repellenti da somministrare è uguale al numero dei divisori positivi di $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$. Quant'è il dosaggio che Penrose dovrà amministrare? (Tra i divisori di un numero devono essere contati anche 1 e il numero stesso.)

4. Lo spreco della Capitale

Il bilancio di quest'anno delle tonnellate di cibo sprecato da Integral City è impressionante: è uguale alla somma delle cifre di $(10^{2019} + 1)^3$. A quanto ammonta?

5. La dura riconquista

Il distretto 13 ha deciso di riprendersi il terreno che gli è stato rubato dai potenti di Integral City. Così, dal primo all'ultimo giorno dell'anno, il povero distretto e la ricca città hanno intrapreso una guerra alquanto singolare: infatti ogni mattina il distretto riprendeva $20 m^2$ di territorio e ogni pomeriggio Capitol City gliene sottraeva un po', precisamente $20 m^2$ nei giorni pari e $19 m^2$ nei giorni dispari. Quanto è vasto il territorio recuperato dal distretto alla fine dell'anno (in m^2)?

6. Estenuanti allenamenti

Come è noto, i tributi del distretto 1 si allenano fin da bambini per partecipare agli Hunger Games, e non solo fisicamente. Qualsiasi bambino delle elementari ha fatto così tanti esercizi di matematica che conosce persino il numero dei numeri di tre cifre tali che la loro cifra delle decine è media aritmetica della prima e dell'ultima cifra. Sapresti dire qual'è questo numero?

7. Corsa da Peeuler (†)

All'interno dell'Arena, $\mathbb{K}tniss$ si trova alle pendici di una montagna di forma conica tale che la sua sezione è un triangolo equilatero di lato 17 m. Per soccorrere il suo amato Peeuler deve raggiungerlo nel punto che si trova anch'esso alle pendici della montagna, ma dalla parte esattamente opposta rispetto

a quella in cui si trova ora. $\mathbb{K}tniss$ sa che deve percorrere il percorso più breve possibile se vuole salvare Peeuler. Si indichi come risposta il quadrato della lunghezza del percorso di $\mathbb{K}tniss$.

8. La Libreria di $Eff(i)e$

$Eff(i)e$ sta cercando un modo creativo per risistemare il giusto numero di libri nella sua biblioteca (è mogano!!). Tuttavia, a causa delle sue necessità estetiche, vuole inserire solo un numero di libri che sia un quadrato perfetto. Se nella sua libreria stanno attualmente 2010-2011 libri, e $Eff(i)e$ vorrebbe che ne rimanessero almeno 100, quante possibilità diverse ha di scegliere il numero di libri da inserire? (si ricorda che un quadrato perfetto è un numero che si può scrivere come n^2 con n numero naturale)

9. I Plotoni di Integral City

I plotoni di Integral City sono allo sbando. Ogni plotone consta di $n^5 - 5n^3 + 4n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 3$. Il presidente S_{noole} vorrebbe che riformassero lo schieramento in modo tale da avere il numero b più alto possibile di soldati in prima linea. Si chiede dunque qual'è il numero b più grande che divide $n^5 - 5n^3 + 4n$ qualsiasi sia il numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Dopo aver giustiziato qualche decina di strateghi incapaci di trovare la risposta, si rivolge a te. Sarai in grado di dargli la risposta che cerca?

10. Farina del mio sacco

Peeuler ha 10 sacchi di farina bianca e 10 sacchi di farina integrale, che non deve assolutamente contaminare. In quanti modi può mettere in fila 10 sacchi in modo tale che tra due sacchi qualsiasi di farina bianca non ci sia mai un sacco di farina integrale?

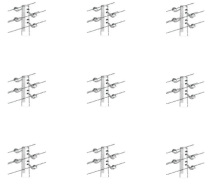
11. Trappole sulla Scacchiera

Il presidente S_{noole} è sempre più spietato, e decide di suddividere il territorio dell'arena come fosse una scacchiera 8×8 , in cui righe e colonne sono numerate da 1 a 8. In ogni area delineata dalla scacchiera, S_{noole} decide di posizionare delle trappole seguendo questa regola: guarda il numero di riga e colonna corrispondenti all'area, li somma, e vi posiziona tante trappole quanto è il risultato della somma. Quante trappole posiziona in tutto sulla scacchiera?



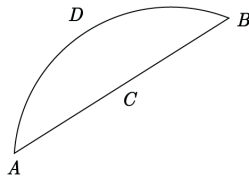
12. Il campo di Ro(te)lle

Ro(te)lle deve creare un campo elettromagnetico per disturbare le frequenze trasmesse da Integral City. Per farlo sia poggia ai 9 tralicci della corrente, disposti come in figura, e forma tutti i possibili triangoli non degeneri che hanno i vertici in tre dei punti dati. Quanti triangoli forma Rotella? (si ricorda che un triangolo è degenere se presenta un angolo di 180°)



13. Le armi di ϕnnick

Ro(te)lle sta preparando delle nuove armi laser per ϕnnick, che consistono in un'impugnatura a forma di segmento circolare il cui progetto puoi vedere qui sotto. C è il punto medio del segmento AB , mentre D è il punto medio dell'arco AB . AB misura 30 cm e CD misura 5 cm. L'impugnatura genera una lama laser a completare la circonferenza di cui è segmento. Tuttavia qualcosa non funziona. Ci vogliono delle batterie che contengano un numero di S_q^{uirl} di energia pari a $\frac{A_d}{\pi}$, dove A_d è il valore dell'area del disco. Sai dire quanti S_q^{uirl} di energia dovrà inserire Ro(te)lle per far funzionare l'arma?



14. Evacuazione nel distretto 13

Integral City sta per iniziare a bombardare il distretto 13. Scatta l'allarme e alla gente viene imposto di rifugiarsi nel rifugio antimissili. L'accesso al rifugio, 3km sotto terra, si raggiunge tramite carrelli che scorrono lungo una passatoia a forma di vite cilindrica, il cui raggio di base misura $\frac{\sqrt{30}}{\pi}$ hm (1/10 di km). Le persone viaggiano dunque sulla superficie della vite, muovendosi lungo la filettatura. Sapendo che la filettatura compie precisamente 30 giri attorno alla vite, quanti km percorrerà la popolazione del distretto per spostarsi dalla superficie al rifugio?

15. Il portafortuna di G_{ale}

Ogni abitante dei distretti, si sa, ha il proprio personale portafortuna contro la mietitura. G_{ale} stringe forte il suo, formato incollando 27 dadi a 6 facce tra loro in modo da formare un grande cubo. I dadi sono orientati in modo che le somme dei valori leggibili su ciascuna faccia del cubo siano, in un qualche ordine, 14,22,30,38,46,54. Quanto vale la somma di tutte le facce dei dadi che, essendo state incollate tra loro, non si leggono più?

Per chi si trova nell'arena...

Il presidente S_{noole} ha dato il meglio di sé con questi velenosi tranelli... il tasso di sopravvivenza a questi problemi è veramente basso... se vuoi avventurarti per questo percorso, fallo a tuo rischio e pericolo!



16. Banchetto a \int ntegral+City

Per celebrare l'inizio degli Hunger Games, a Integral City è in corso una grande festa. I tavoli del banchetto hanno la forma di triangoli rettangoli con lati di lunghezza intera. Inoltre ogni tavolo ha almeno un cateto la cui lunghezza è un numero primo minore di 20. Il presidente ha insistito affinché non ci fossero due tavoli con forme congruenti. Quanto vale al massimo la somma delle aree dei tavoli presenti al banchetto? *Due triangoli si considerano congruenti se si possono sovrapporre l'uno all'altro tramite rotazioni, traslazioni e simmetrie. $((m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2))$. Proprio strana questa terna!*

17. Il vestito di Cinna

Si sa che Cinna è un amante della perfezione: il suo ultimo vestito per $E_{ff}(i)$ terminava con uno strascico cucito con ben tre pezzi di stoffe diverse, di lunghezza p, a e b (in cm). Il numero $p^a + p^b$ è un cubo perfetto. Il numero p è primo e $a < b \leq 2018$. Quanto è lungo al massimo lo strascico di $E_{ff}(i)$?

18. Caccia agli sponsor

La vita nell'arena, si sa, dipende dagli sponsor. Spesso questi fanno richieste assurde ai tributi, quali dire che coefficiente si ottiene per x^{11} dopo aver svolto i prodotti e sommato i termini simili nella seguente espressione: $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 2014x^{2013})^9$.

19. Localizzazione a \int ntegral

In modo molto schematico, la Coin presenta l'obiettivo della missione al Comando: Nel quadrato $ABCD$ di \int ntegral+City si prende il punto P sul lato CD e il punto Q sul lato DA , distinti dai vertici, in modo che i segmenti AP e BQ si intersechino in un punto T interno al quadrato. Trovare, in cm^2 , l'area del triangolo ABT , sapendo che quella del triangolo ATQ è $14cm^2$, mentre quelle dei quadrilateri $BCPT$ e $TPDQ$ sono, rispettivamente, $551 cm^2$ e $100cm^2$.

20. I salti di Rue

La piccola Rue sta saltando di ramo in ramo in fuga, e per tentare di schivare gli assalti degli altri tributi si affida alla dea bendata: "Tiro 9 volte un dado a 4 facce, e per ogni tiro mi comporto come segue: se esce 1 mi sposto di 2m a Nord, se esce 2 mi sposto di 2m a Est, se esce 3 mi sposto di 2m a Sud, se esce 4 mi sposto di 2m a Ovest". Ma i tributi dei distretti 1 e 2 le hanno teso una trappola: si sono appostati lungo la circonferenza di raggio 10m centrata nel punto di partenza di Rue. Qual'è la probabilità che i tributi catturino Rue? (fornire come risposta la somma di numeratore e denominatore ridotti ai minimi termini)

21. Altre bombe sui distretti

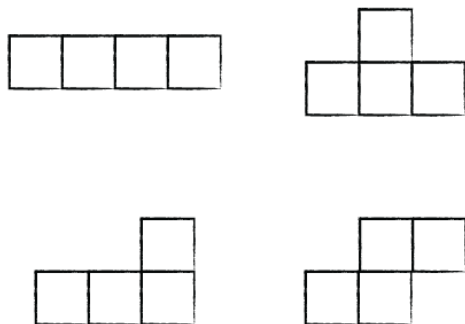
I bombardamenti di Integral City sono stati sempre più frequenti negli ultimi tempi: si pensi che in un solo anno sono stati addirittura 2013. I numeri di decessi a seguito dei bombardamenti, $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ sono tali che, per ogni $1 \leq n \leq 2013$, si ha $n^2 a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Se $a_1 = 2013$, quanto vale $1/a_{2013}$?

22. Il missile di Ro(te)lle

Ro(te)lle è alle prese con l'impostazione delle coordinate di destinazione della navicella che porterà Ktniss a registrare un Pass-Pro nel distretto 12, ma qualcosa non va, le informazioni sono incomplete: Dato nel piano cartesiano il pentagono $ABCDE$, siano $P \equiv (-21, 26)$, $Q \equiv (-42, -65)$, $R \equiv (7, -52)$, $S \equiv (49, 13)$ e $T \equiv (35, 78)$ rispettivamente i punti medi di AB, BC, CD, DE ed EA . Per poter impostare la navicella, Ro(te)lle deve come minimo trovare la somma delle coordinate di A. Puoi aiutarlo tu?

23. Le truppe di Gale

In aiuto del distretto 8, bombardato da Integral City, accorrono le truppe del distretto 13, capitanate da Gale. Gale, dopo aver suddiviso il distretto in quadratini unitari, ordina a ogni squadra di presidiare la zona in modo tale da formare sulla mappa una figura piana connessa (cioè "tutta unita", senza pezzi staccati), ottenuta unendo un numero finito di quadrati di lato unitario in modo che ogni quadrato abbia almeno un intero lato in comune con un altro quadrato. Tra i pattugliamenti possibili di area 4, quelli di perimetro massimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni sono i seguenti:



Quanti sono invece quelli di perimetro massimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni che coprano un'area di 6 quadratini?

24. La strategia di Hay Jitch

Mentre sono sul treno che porterà i due vincitori a fare il giro di tutta Integral City, Hay Jitch, Effe(i) e Ktniss giocano a uno strano solitario:

Si gioca con un mazzo di 52 carte: ci sono 13 tipi di carte, 4 per ciascun tipo. I tipi sono l'asso, le carte dal 2 al 10, e le tre figure: Il Fante, la Donna e il Re. Nel gioco le carte hanno il valore stampato su di esse, ad eccezione dell'asso che ha valore 1 e delle figure che hanno valore 10. L'obiettivo del gioco è pescare carte dal mazzo cercando, sommando il valore delle carte pescate, di raggiungere il punteggio di 21, senza superarlo.

Hay Jitch: "Io gioco sempre allo stesso modo: continuo a pescare carte finché il punteggio che ottengo diventa 17 o supera quel valore. Per esempio, se ho pescato 2,6,10 smetto di prendere carte, mentre se ho pescato 2,5,9 ne prendo un'altra." Quante sono le sequenze di carte in cui Hay Jitch realizza 21 con al massimo 4 carte? (due sequenze sono distinte anche quando differiscono per l'ordine di pescata delle carte, mentre carte dello stesso tipo sono indistinguibili)

25. Il codice di Seⁿeca

In quanto capo stratega, grazie al suo codice personale Seⁿeca era l'unico e solo a poter attivare tutte le trappole dell'arena. Alla morte di Seⁿeca, $\mathcal{P}(l)$ utarch dovette patire le pene dell'inferno per recuperare il codice, andato perduto. L'unico indizio trovato era un bigliettino con scritto: "Sia $p(x)$ un polinomio di grado 1987 con la seguente proprietà: quando lo si divide per i binomi $(x+3)$, $(x+2)$, $(x+1)$, $(x-1)$, $(x-2)$ e $(x-3)$, si ottengono come resti, rispettivamente, 1, 2, 3, 5, 6 e 1987. Indichiamo con $r(x)$ il polinomio che si ottiene come resto dividendo $p(x)$ per il polinomio $b(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$. Il codice è il termine noto di $r(x)$ ". Sapreste aiutare $\mathcal{P}(l)$ utarch a prendere il controllo dell'Arena?

26. I missili della Coin

Nel bunker della centrale operativa del distretto 13, la direttrice Coin rileva un missile che si comporta in modo molto strano. Il missile punta inizialmente verso il punto di coordinata $x = 2015$ e fa solo deviazioni che lo porterebbero a cambiare il suo punto d'impatto di distanza 1, in avanti o all'indietro, ma sempre sullo stesso asse x . Quando però punta su un multiplo di 6, la deviazione successiva può solo essere in avanti. Quante diverse sequenze di 15 deviazioni può fare il missile?

27. Il palazzo del presidente S_noole

Il palazzo del presidente S_noole a Integral City è costruito su sei livelli. Quello più in basso ha la forma di un prisma retto la cui base è un ottagono regolare di lato 10, e la cui altezza è a sua volta lunga 10. I livelli successivi hanno anch'essi la forma di prismi retti, le cui basi sono (nell'ordine) ettagonale, esagonale, pentagonale, quadrata e triangolare. Rispetto al precedente, ogni livello ha altezza doppia e lati di base lunghi la metà. Inoltre gli assi dei diversi prismi coincidono. Quanto misura la superficie visibile della torre?

28. Le Ghiandaie di Cinna

Alla sfilata dei tributi, lo stilista Cinna ha studiato un modo ingegnoso per attirare gli sponsor: predispone una scala spettacolare con $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2019}$ gradini, dove $p_1, p_2, \dots, p_{2019}$ sono numeri primi distinti; I gradini che corrispondono a divisori di N (compresi il primo e l' N -esimo gradino) sono speciali e sono inizialmente illuminati di verde. Durante la sfilata, 2019 ghiandaie ammaestrate salgono una dopo l'altra la scala; per $i = 1, 2, \dots, 2019$, l' i -esima ghiandaia salta p_i gradini alla volta, partendo ai piedi della scala (salta sul gradino p_i , poi sul $2p_i$ e così via finché non raggiunge il gradino N). Ogni volta che una ghiandaia salta su un gradino speciale, questo cambia colore: da verde diventa rosso, da rosso verde. Quanti saranno i gradini illuminati di verde alla fine dell'esibizione?

29. Le arene di Se^n eca

Per gli $2^{13} - 1^\circ$ Hunger Games, Se^n eca, il capo stratega, aveva fatto costruire attorno al terreno di gara due grosse arene circolari concentriche. Tuttavia non è vissuto abbastanza a lungo da mostrarne le peculiari caratteristiche al presidente S_n oole. Il suo successore, $\mathcal{P}(l)$ utarch, lancia un raggio laser a partire dall'entrata, che si trova sull'arena più esterna, in modo che colpisca l'arena interna per la prima volta in un punto fissato, corrispondente alla posizione della Cornucopia (Entrata e Cornucopia non sono allineate con il centro delle arene). Il raggio si divide in tanti raggi diversi, perché, mentre l'arena esterna è completamente riflettente, l'arena più interna è semiriflettente: cioè, quando viene colpita da un raggio di luce quest'ultimo si divide in due raggi, uno che viene riflesso e uno che attraversa lo specchio senza mutare direzione. Al loro 2014° contatto con l'arena (contando come primo contatto quello in corrispondenza del tempio), i raggi svaniscono. S_n oole nota soddisfatto che esistono due punti A e B tali che ogni possibile percorso dei raggi termina in uno di essi, e inoltre che il percorso più lungo possibile misura il doppio di quello più corto. Quanto vale il rapporto tra i raggi dei due specchi? *Si risponda indicando la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*

30. La poesia di $Eff(i)$ e

Nonostante la guerra, è dura per un Integralino perdere le proprie abitudini. Per questo $Eff(i)$ e, benché con indosso una orrenda uniforme grigia, si dà all'arte, alla letteratura, e perché no, anche alla matematica:

"Considerate duemila dannati
mille sceglietene per la malvagia
gara a squadre - che sian radunati!"

Carnot dimonio con occhi di bragia
loro scrutando, si fè richiedente
del numero maggior che non disagio

di esser primo e tre cifre avente
e divisor del numero di scelte
rispondere tu sai correttamente?"

