Corso Intermedio - Geometria Razionale

Lorenzo Proserpio & Roberto Lorenzi

18 Dicembre 2020

Di tutte le scienze, la più assurda, la più capace di soffocare ogni specie di genio, è la geometria.
Voltaire (1764) - "Jeannot e Colin"

Presentazione

Con l'incontro di oggi vorremmo darvi un'idea su come risolvere e scrivere correttamente (soprattutto senza perdere punti inutilmente) i dimostrativi geometrici che vi aspetteranno nella gara provinciale delle olimpiadi. La lezione sarà fortemente interattiva e chiederemo, alla fine di ogni esercizio, a qualcuno di voi di ricostruire i punti chiave della soluzione. Vedremo, inoltre, come, utilizzando semplicemente gli strumenti e le definizioni più basilari, si possono risolvere efficacemente problemi complicati (ma non complessi). Comprendiamo il vostro possibile astio, da me (Lorenzo) condiviso, verso la geometria razionale, per questo ogni tanto ci saranno degli intermezzi in cui vi racconterò delle cose che spero reputiate interessanti e che servono palesemente a fare marketing per invogliarvi ad intraprendere all'università la strada della matematica.

Teoria

Luoghi di punti

- **Asse di un segmento:** il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento A e B.

$$P \in \text{asse di } AB \iff \overline{PA} = \overline{PB}$$

- **Bisettrice di un angolo:** il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati a e b che individuano l'angolo α.

$$P \in \text{bisettrice di } \alpha \iff d(a,P) = d(b,P)$$

- **Circocentro del triangolo:** il luogo dei punti del piano equidistante dai vertici del triangolo.

$$P \text{ circocentro di } ABC \iff \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

- **Incentro del triangolo:** il luogo dei punti del piano equidistante dai lati del triangolo.

$$P \text{ incentro di } ABC \iff d(a,P) = d(b,P) = d(c,P)$$

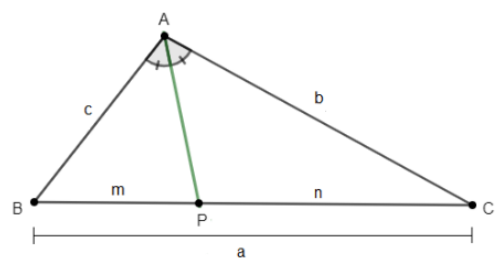
Disuguaglianza triangolare

Dati due punti A e B si ha che $\forall C$ vale:

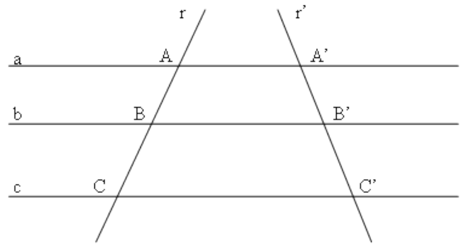
$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

Teoremi gettonati alle gare non precedentemente visti

- **Teorema della bisettrice:** In un triangolo due lati stanno fra loro come le parti in cui resta diviso il terzo lato dalla bisettrice dell'angolo interno ad esso opposto. Tradotto: $AB : AC = BP : PC$.



- **Teorema di Talete:** Se un fascio di rette parallele è tagliato da 2 trasversali, i segmenti staccati su una trasversale sono proporzionali ai corrispondenti sull'altra trasversale. Tradotto $AB : A'B' = BC : B'C'$.



Come si può fare a dimostrare...

1. che un triangolo non può avere due angoli retti senza utilizzare che la somma degli angoli interni è π rad?
2. che gli angoli interni di un n-agono regolare misurano $\frac{(n-2)\cdot\pi}{n}$ rad?
3. che un n-agono convesso ha $n \cdot (n-3)/2$ diagonali?

Problemi tratti da gare

1. (*Febbraio 2015*) Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$ interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N. Dimostrare che:
   - il quadrilatero $ABCM$ è inscrittibile in una circonferenza;
   - i triangoli ANB e ABM sono simili.
2. (*Febbraio 2018*) Siano ABC un triangolo e P un suo punto interno. Sia H il punto sul lato BC tale che la bisettrice dell'angolo $\widehat{AHP}$ sia perpendicolare alla retta BC . Sapendo che $\widehat{ABC} = \widehat{HPC}$ e $\widehat{BPC} = 130°$, determinare la misura dell'angolo $\widehat{BAC}$.
3. (*Febbraio 2014*) Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano AM, BN e CL le mediane, che si intersecano nel baricentro G. Siano M', N' e L' i punti medi di AG, BG e CG, rispettivamente. Mostrare che i sei punti M, M', N, N', L, L' giacciono su una circonferenza se e solo se ABC è equilatero.
4. (*Febbraio 2011*) Da un punto L partono due strade rettilinee che formano un angolo acuto α. Lungo una delle due strade ci sono due lampioni, posizionati in P e Q, tali che $LP = 40m$ e $LQ = 90m$. Eva si trova in E sull'altra strada, e vede i due lampioni sotto un angolo $\widehat{PEQ}$. A che distanza da L si trova Eva, se $\widehat{PEQ}$ ha la massima ampiezza possibile?

Per uno spunto creativo e uno sguardo al futuro...

1. L'astuto Ulisse, per poter ascoltare il canto delle sirene, aveva tappato le orecchie dei suoi compagni con la cera e si era fatto legare all'albero della nave. Le sirene si trovano nella zona (finita) individuata dagli isolotti A, B, C, D, disposti in modo tale che $AB \perp BC$, $AD \perp DC$ e $AD = DC$. La zona aveva un'estensione di $3,61\ km^2$. Se la nave di Ulisse era salpata dall'isolotto D e seguiva una rotta perpendicolare alla linea congiungente gli isolotti A e B, calcolare quanti metri aveva dovuto percorrere la nave per uscire dalla zona delle sirene.
2. Lorenzo abita in una casa vicino al fiume, deve andare a prendere l'acqua per poi portarla da Roberto. Sapendo che Lorenzo per arrivare a casa di Roberto non deve guadare il fiume, determinare il percorso più breve che può fare partendo da casa sua.

   Legge di Snell: se θ_A e θ_B sono gli angoli di incidenza e rifrazione e n_A e n_B sono gli indici di rifrazione dei due materiali allora vale:
   $$n_A\theta_A = n_B\theta_B$$

   Principio di Fermat: il percorso γ che segue la luce fissati il punto di partenza e di arrivo (A e B) è quello che rende stazionario il funzionale del cammino ottico:
   $$c\tau(\gamma) = \int_\gamma n(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$