

Gara a Squadre - Burnside's Lemma e Problemi da Evitare

Marco Cattazzo & Lorenzo Proserpio

10 Gennaio 2020

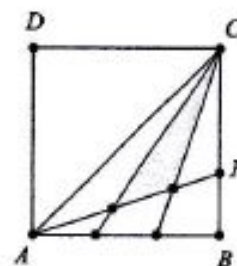
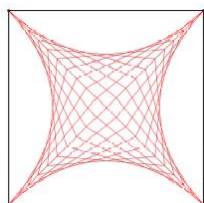
Lemma di Burnside

1. (*ProseTM, fuori contesto, ma divertente*) Nell'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ sono dati $n \in \mathbb{N}$ punti equidistanziati nell'intervallo le cui ascisse rispettive sono chiamate x_0, x_1, \dots, x_n con $x_0 = 0$ e $x_n = 1$. La somma del valore di tutte le ordinate di questi punti (chiamate rispettivamente y_2, \dots, y_{n-1} , tutti valori positivi tranne $y_1 = y_n = 0$) è $2n \in \mathbb{N}$. Si determini ora:
 - Il valore dell'area sottesa dalla figura delimitata dall'intervallo e dalla spezzata ottenuta congiungendo i punti al variare di n .
 - Se i punti fossero tanti quanti i numeri naturali cambierebbe qualcosa?
 - E se fossero tanti quanti i numeri reali?
2. Si trovi il numero di rotazioni che mandano icosaedro in un icosaedro sovrapponibile con quello iniziale.
3. Quanti cubi differenti si possono ottenere colorandone le facce con al più 5 colori?
4. Quanti sono i polinomi $p(x)$ di secondo grado a coefficienti e radici intere tali che $p(0) = 2010$?

Problemi da evitare alle Olimpiadi

"Certi problemi te li devi sentire con la pancia, che c'è la soluzione"
-Ignoto Matematico Italiano

1. **tricky TdN** Trovare tutte le coppie $(a; b)$ di numeri interi positivi tali che $a + 1$ sia un divisore di $b - 1$ e b sia un divisore di $a^2 + a + 2$.
2. **Brutte somme** Marco trova un passaggio segreto di forma quadrata, nascosto da una strana ragnatela, i cui fili sottili ma estremamente resistenti sono stati tessuti in una forma di stella a quattro punte. I fili portanti, divisi in 200 parti uguali dagli altri fili della tela, seguono le diagonali del quadrato. La trama è costituita da una successione di 100 rombi con le diagonali coincidenti con i fili portanti che si intrecciano l'uno con l'altro, in modo tale che ognuno di essi abbia una diagonale più grande e una più piccola del rombo successivo. Determina la percentuale dell'apertura del cunicolo che è occupata dalla ragnatela.
Scrivere come risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini
3. **Coordinate Cartesiane** Nell'isola di Eea Ulisse incontrò la maga Circe che, invaghita del nostro eroe, trasformò il resto della truppa in porci. Ulisse rimase sull'isola più di un anno fino a quando non riuscì a spezzare l'incantesimo grazie ad un'erba magica ricevuta in dono da Ermes. Il porcile, dove erano rindriusi i compagni di Ulisse, aveva la forma della regione ombreggiata nella figura accanto. Sapendo che il quadrato $ABCD$ ha il lato di $14m$, che AB è diviso in tre parti uguali e che $PC = 2BP$ calcolare l'area della regione ombreggiata, espressa in m^2 .



4. **Cifre e divisibilità** Un numero intero positivo è educato se è divisibile per la somma delle sue cifre. Per esempio, tutti i numeri da 1 a 10 sono educati; 11 non è educato; 12 è educato; 13, 14, 15, 16 e 17 non sono educati. Siano A, B, C e D i primi quattro numeri educati consecutivi maggiori di 10. Quanto vale D?
5. **partizioni di un intero** Si gioca con un mazzo di 52 carte: ci sono 13 tipi di carte, 4 per ciascun tipo. I tipi sono l'asso, le carte dal 2 al 10, e le tre figure: il Fante, la Donna e il Re. Nel gioco le carte hanno il valore stampato su di esse, ad eccezione dell'asso che ha valore 1 e delle figure che hanno valore 10. L'obiettivo del gioco è pescare carte dal mazzo cercando, sommando i valori delle carte pescate, di raggiungere il punteggio di 21, senza superarlo. Io gioco sempre allo stesso modo: continuo a pescare carte finché il punteggio che ottengo diventa 17 o supera quel valore. Per esempio, se ho pescato 2, 6, 10 smetto di prendere carte, mentre se ho pescato 2, 5, 9 ne prendo un'altra. Quante sono le sequenze di

carte con cui realizzo 21 con al massimo 4 carte?

Due sequenze sono distinte anche quando differiscono per l'ordine di pescata delle carte, mentre carte dello stesso tipo sono indistinguibili.

6. **polimini e simmetrie** Un polimino è una figura piana connessa (cioè "tutta unita", senza pezzi staccati), ottenuta unendo un numero finito di quadrati di lato unitario in modo che ogni quadrato abbia almeno un intero lato in comune con un altro quadrato. Tra i polimini di area 4 quelli di perimetro massimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni sono i seguenti:



Tra i polimini di area 6, quanti sono quelli di perimetro massimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni?

Alcuni problemi irrisolti di cui devo accorgermi

1. **Partizioni di un intero** Una partizione di un intero positivo è un modo di scrivere quell'intero come somma di interi positivi, senza tener conto dell'ordine degli addendi.
2. **Costruzione di infiniti primi** Costruzioni che generino (non che "intercettino") infiniti numeri primi di una certa forma.

A tal proposito è bene citare come esempio esplicativo di una costruzione che "intercetta" infiniti primi. Afferma infatti il **Teorema di Dirchelet** che dati due numeri interi coprimi a, b , esistono infiniti primi della forma $a + nb$, dove n è un intero positivo, o, in altre parole, ogni progressione aritmetica siffatta contiene infiniti numeri primi.

3. **Polimini** (A000105, OEIS).
4. **stima esatta del numero di numeri primi in un intervallo grosso**
5. **Congettura di Collatz** La congettura riguarda il seguente algoritmo:

- (a) Si prenda un intero positivo n .
- (b) Se $n = 1$, l'algoritmo termina.
- (c) Se n è pari, si divida per due; altrimenti si moltiplichi per 3 e si aggiunga 1.

È possibile formare una successione applicando la funzione ripetutamente prendendo come primo elemento un qualunque intero positivo e, ad ogni passaggio, applicare la funzione al risultato precedente. La congettura di Collatz asserisce che questo algoritmo giunge sempre a termine, indipendentemente dal valore di partenza.

6. **Congettura di Goldbach** ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi
7. **Problema di Landau (3/4)** Esistono infiniti numeri primi della forma $n^2 + 1$
8. **Congettura di Legendre** esiste sempre un numero primo compreso tra due quadrati perfetti consecutivi