

# Gara a Squadre - Corso base

Marco Cattazzo & Lorenzo Proserpio

13 Dicembre 2019

## Introduzione semiseria alla Logica

La logica, se ben usata, permette di far passare per vera una qualsiasi boiata immane. Ecco ad esempio:

- Mia nonna fuma
- I treni fumano

QUINDI Mia nonna è un treno.

Tuttavia questo ragionamento verrebbe messo in dubbio da quei pignoli saccenti che applicano la teoria degli insiemi, che con la loro stridula vocina rispondono "Ma così dici che i treni fumano, ma non che tutto ciò che fuma sia un treno, gnègnè". Ma proprio grazie alla logica possiamo controbattere, in attesa che una slavina colpisca gli adoratori di Eulero Venn (Venn è il cognome da nubile), dio degli insiemi.

*(Note a Nonciclopedia: Eulero e Venn non sono la stessa persona: Leonhard Euler, matematico svizzero, sec XVIII, John Venn, logico e statistico inglese, sec XIX)*

Cosa è meglio? La felicità eterna o un panino al prosciutto? Potrebbe sembrare che la felicità eterna sia meglio, ma in realtà non è così. Dopotutto, niente è meglio della felicità eterna, e un panino al prosciutto è certamente meglio di niente. Dunque segue logicamente che un panino al prosciutto è meglio della felicità eterna

## Alcuni fatti importanti

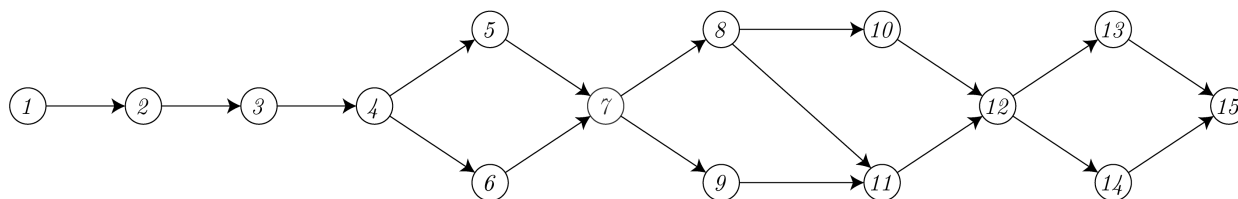
Per un buon logico, o in generale per chiunque si avvicini al mondo della Matematica, è importante ricordare i seguenti fatti:

- In logica la congiunzione **o... oppure**, salvo diversamente specificato, si assume come disgiuntiva inclusiva, ovvero  $P \text{ o } Q$  è vera sia che una sola tra  $P$  e  $Q$  sia vera, sia che lo siano entrambe.
- La congiunzione **e**, se e solo se diversamente specificato, si assume come disgiuntiva esclusiva, ovvero  $P \text{ o } Q$  è vera solo se una sola tra  $P$  e  $Q$  è vera, e non è vera se lo sono entrambe.
- La congiunzione **e** si dice congiunzione logica, ovvero  $P \& Q$  è vera se e solo se entrambe  $P$  e  $Q$  sono vere.
- ATTENZIONE! Quando assumo vera la negazione dell'espressione  $P \& Q$ , ovvero considero vera una espressione del tipo  $NON(P \& Q)$ , non sto dicendo che sia  $P$  che  $Q$  sono false!! Sto dicendo che è falsa la loro *congiunzione*, ovvero che  $P$  è falsa,  $Q$  è falsa, oppure lo sono entrambe. Dunque

$$NON(P \& Q) \equiv (NON P) \text{ o } (NON Q)$$

- L'operatore *implica* ( $\longrightarrow$ ) compare poco nei problemi dei furfanti e dei cavalieri, ma è bene capire lo stesso come funziona, in modo da non trovarsi impreparati nel caso ciò accada. Mi trovo di fronte a qualcosa del genere quando un personaggio dice una frase del tipo **se..allora**. Esempio: Due persone  $(A,B)$  sono sedute una accanto all'altra.  $B$  dice: "Se  $A$  è un cavaliere, allora io sono un cavaliere"; questo problema ammette le seguenti possibilità:  $(C,C)$ ,  $(F,C)$ ,  $(F,F)$ .
- Se  $P$  è falsa, allora  $P \longrightarrow Q$  è automaticamente vera
- Se  $Q$  è vera, allora  $P \longrightarrow Q$  è automaticamente vera
- L'unico modo perchè  $P \longrightarrow Q$  sia falsa è che  $P$  sia vera e  $Q$  sia falsa

## Folle corsa logica su un grafo orientato



## Il campo di gara:

1. **Infarinatura sulle isole** Epimenide afferma di mentire. Sta dicendo la verità?
2. **Ma le Bahamas no, eh?** Marco e Lorenzo decidono di passare capodanno in un villaggio vacanze nello splendido arcipelago di *Playas In Dualidad*, in breve PID, e in particolare su *Cayley*, isola tropicale abitata da una popolazione afflitta da un tabù molto particolare: i nativi dell'isola si dividono infatti storicamente in Cavalieri, che dicono sempre la verità, e Furfanti, che mentono sempre. L'impresa di prenotare i biglietti si preannuncia però più difficile del previsto: in agenzia viaggi trovano infatti cinque impiegati autoctoni, che vogliono verificare che effettivamente Marco e Lorenzo saranno in grado di sopravvivere sull'isola. Gli impiegati pongono sul tavolo tre biglietti, X,Y,Z, dicendo che uno solo è valido per recarsi a PID.

A: X è il biglietto giusto

B: Y è il biglietto giusto

C: A e B non sono entrambi furfanti

D: A è un furfante o B è un cavaliere

E: Io sono un furfante o C e D sono dello stesso tipo.

Ce la farete ad aiutare i nostri eroi a raggiungere l'isola?

3. **Chi si fa i fatti suoi...** Arrivati sull'isola, mentre Marco è impegnato a fare una passeggiata esplorativa, Lorenzo esce a fare la spesa. Giunto in cassa, trova un ragazzo e una ragazza che litigano con la cassiera del supermercato, la quale accusa la ragazza di aver rubato l'ultimo panettone rimasto sullo scaffale. Lorenzo, incuriosito dalla situazione, decide di ficcare il naso negli affari della sfortunata coppia, cercando di aiutarli a cavarsi d'impiccio. Subito sussurra dolcemente una frase all'orecchio della ragazza, che, sollevata, la ripete: "Chi ha commesso il furto certamente è un Furfante!". Davvero Lorenzo è riuscito a scagionare la gentil dama agli occhi della cassiera?
4. **Ora pro nobis sancta Teo genitrix** Marco, si sa, è troppo attratto dall'antropologia religiosa per farsi scappare la visitina al tempio dell'isola, dedicato a Mathena, e dunque allunga la sua passeggiata per capitolarcisi. Si ritrova nel bel mezzo di una funzione (lol) religiosa, in cui uno degli abitanti, un cavaliere, preposto al servizio sacerdotale, così predicava:

"Sapete dunque, fratelli, che l'aldilà è diviso in quattro galassie, e ciascuna contiene, esattamente in numero di 2496, gli eletti, prescelti dalla Dea. Tuttavia il sacro *Tractatus* è oscuro sulla parte che riguarda il numero di cavalieri e di furfanti che accederanno a queste galassie. Sta scritto infatti che, per  $n = 1, 2, \dots, 1248$ , le anime della galassia del Nord così parlano:

- L'anima del Nord di numero  $2n - 1$  dice : "Almeno  $n$  anime della galassia del Sud sono cavalieri"
- L'anima del Nord di numero  $2n$  dice : "Almeno  $n$  anime della galassia del Sud sono furfanti"

E altrettanto dicono quelli della galassia del Sud degli abitanti della galassia del Nord. Per  $n = 1, 2, \dots, 2496$ , le anime della galassia dell'Est e dell'Ovest così parlano:

- L'anima dell'Est di numero  $n$  dice : "Almeno  $n$  abitanti dell'aldilà sono cavalieri"
- L'anima dell'Ovest di numero  $n$  dice : "Almeno  $n$  abitanti dell'aldilà sono furfanti"

"Interessante!- pensa Marco - Nella religione della dea Mathena i cavalieri eletti sicuramente sono come minimo ..." Qual'è il numero che sta pensando Marco?

INFO Marco e Lorenzo si spostano sulla vicina isola di *Estrellas Diametrales*, in breve ED, in visita turistica. Quest'isola, siccome è decisamente meno tradizionalista dell'altra, presenta anche una terza categoria di persone, ovvero i Normali, che, ribellatisi ai tabù, possono liberamente dire la verità o mentire quando vogliono. Tuttavia sulle isole PID è stato promulgato un curioso decreto, che stabilisce che un Cavaliere può sposare solo un Furfante, e un Furfante solo un Cavaliere. Un Normale è dunque costretto a sposare un altro Normale.

5. **Due persone sincere, ma dicono la verità?** Lorenzo chiacchiera coi vicini di ombrellone, una coppia sposata, che così si racconta:

Mr.A: Mia moglie non è normale (*affermazione ben condivisibile, tra l'altro*)

Mrs.A: Mio marito non è normale (*affermazione ben condivisibile, tra l'altro*)

Cosa sono Mr e Mrs A?

6. **Due persone ridicole, ma mentiranno?** Marco, nel mezzo di una avvincente partita di bocce, chiacchiera con gli avversari, una coppia sposata, che così si racconta:

Mr.B: Mia moglie è normale (*vien naturalmente da sospettare ch'egli menta*)

Mrs.A: Mio marito è normale (*vien naturalmente da sospettare ch'ella menta*)

Cosa sono Mr e Mrs B?

7. **Come distrarre gli avversari giocando al Due** Durante una partita di briscola in spiaggia con Alberto e Barbara, Marco e Lorenzo vengono a sapere che l'isola di ED è decisamente meno progressista di quanto vogliano far credere. Gli abitanti infatti sono divisi in caste, come di seguito definito. I Furfanti sono la casta di rango più basso. I Normali sono la casta di rango intermedio. I Cavalieri sono la casta di rango più alto. Ovviamente parlare del proprio rango in pubblico è motivo di imbarazzo, dunque Alberto e Barbara per rimanere sul vago affermano ciò:

Alberto Il mio rango è più basso di quello di Barbara

Barbara Non è vero!

Ciò è sufficiente a capire di che rango sono Alberto e Barbara e quali delle frasi sono vere?

8. **Che fastidio l'animazione** Tornati sull'isola di *Cayley*, notate che in spiaggia i tre fastidiosi animatori del villaggio vacanze hanno messo in fila in un modo molto particolare tutti i partecipanti del campo estivo locale. I tre animatori si sono messi in testa alla fila, in modo tale da poter far ripetere a ciascuno, loro tre compresi, la frase: "Il numero di coloro che non appartengono al mio gruppo e sono in fila davanti a me è pari". Oltre a questo, i tre animatori, a partire dal primo, dicono le seguenti frasi: "Siamo in coda ben in 999", "I cavalieri sono esattamente 666", "Ci sono almeno tre furfanti in fila".

Marco, sfaticato, tenta di contare il numero di cavalieri in fila, ma prontamente interviene Lorenzo a sollevarlo dalla fatica. HA. SPOILER. Quale numero ha spoilerato Lorenzo?

9. **Si mangia e si beve!** Curiosi di provare la cucina locale, partecipano al sontuoso banchetto in onore della dea Mathena. Prima di sedersi, notano che all'enorme tavolo circolare dove si tiene il banchetto, come da tradizione, al brindisi, ognuno dei 2015 partecipanti accuratamente disposti, invece che "cin-cin" grida "i miei due vicini di tavolo sono di due tipi differenti!" Quanti possono essere al massimo i cavalieri seduti a tavola?

10. **Pestiferi elett.. ehm... pappagalli** Marco, perso nelle sue algebre, si avvia con Lorenzo alla riserva naturale di *Cayley*, dove, gli ha detto un abitante che giurava di essere un cavaliere, esistono solo due specie di pappagalli molto particolari: i pappagalli normali e i pappagalli intelligenti. Un pappagallo normale ripete sempre, esattamente l'ultima frase detta; un pappagallo intelligente dice sempre la verità.

Marco Questi pappagalli in fila sono normali o intelligenti?

Lorenzo Non lo so. Proviamo a chiederglielo. (Rivolto ai pappagalli) Lui (Indicando Marco) vuole fare la stessa domanda a ciascuno di voi.

Marco (rivolto ai pappagalli) Quanti dei pappagalli al tuo fianco sono normali?

1-pappagallo Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

2-pappagallo Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

...

2015-pappagallo Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

Lorenzo Ogni pappagallo ha detto che esattamente uno dei pappagalli al suo fianco è normale: sono metà intelligenti e metà normali.

Marco Non è possibile! In totale sono un numero dispari! Ti sbagli, non sappiamo esattamente quanti sono quelli intelligenti. Però ho calcolato il massimo numero possibile di pappagalli intelligenti ed anche il minimo numero possibile.

Quanto vale la differenza tra il più grande e il più piccolo dei due numeri che Marco ha calcolato?

11. **Beve bene chi beve ultimo** Centrale di polizia su *Cayley* molto affollata: ci sono 2015 sospettati di una rapina in banca: tra di loro c'è il colpevole e tutti i sospettati sanno chi esso sia. Marco e Lorenzo, in quanto ancora sbronzi dalla sera prima di sidro della razionalità, vengono convocati in caserma per risolvere il caso. Tocca a Lorenzo, in quanto più minaccioso dei due, interrogare i sospetti.

Lorenzo Abbiamo dato a tutti loro il siero della verità?

Marco Sì. E durerà per mesi. Ma lo sai che funziona male, a rimbalzo?

Lorenzo Che cosa vuoi dire?

Marco Se chi l'ha ricevuto mente un giorno, allora dice la verità il giorno dopo.

Lorenzo Ascolta, facciamo così: oggi facciamo la domanda «Chi è il colpevole?» a qualche sospettato, uno alla volta. L'interrogato deve rispondere, altrimenti si fa cinque anni di carcere per favoreggiamento. Mettiamo tutti in gattabuia di notte. Domani facciamo ancora la stessa domanda a chi vogliamo tra i sospettati. E continuiamo così fino a che non scopriremo il colpevole.

Marco A proposito, c'è uno dei sospettati che dice sempre la verità.

Lorenzo Questo è importante. Sai dirmi chi è?

Marco No.

Lorenzo Fa lo stesso. Cominciamo perché ci vorranno giorni per finire questa indagine.

Dopo quante domande, come minimo, Lorenzo ha la certezza di sapere chi è il colpevole?

12. **Ammazzare il tempo all'infinito** Ci sono persone che ammazzano il tempo nell'attesa che il tempo li ammazzi. Marco e Lorenzo, ciascuno ammazza il tempo dell'altro, si sfidano a colpi di indovinelli ed equazioni funzionali. Volete ammazza anche voi un po' del loro tempo? *O uno qualsiasi di loro due?*

Nell'inferno di Mathena, vivono infiniti abitanti  $A_0, A_1, A_2, \dots$ . Ciascun abitante è ovviamente un furfante, e allora mente sempre, oppure è un cavaliere, e allora dice sempre la verità. Un giorno, tutte le anime  $A_{2n}$  (quelle di indice pari) dicono la seguente frase: «All'inferno c'è solo un numero finito di cavalieri». Cosa si può dire del numero di furfanti e cavalieri sull'isola?

INFO Una terribile epidemia di *Contosia Geomelitica* è scoppiata su *Cayley*. La malattia non presenta sintomi esteriori, ma gli abitanti che la contraggono non riescono più a dire Sì oppure No, ma al posto di queste particelle rispondono, non necessariamente in questo ordine, Bal e Da.

13. **Interesse estroflesso** Marco si propone, per comunicare coi malati, di scoprire cosa significhi Bal, e pensa a una domanda che gli permetta di farlo (ricorda che il malato potrà rispondere solo Bal o Da).

14. **Interesse entroflesso** Lorenzo invece non è interessato in ciò che significa Bal, ma vuole scoprire, per tenersene alla larga, se un personaggio è Furfante oppure no, in quanto solo questi ultimi sono infettivi. Come può farlo in una sola domanda, per minimizzare il rischio di contagio?

15. **Manco a tornare si sta in pace** Siamo arrivati alla fine della vacanza. Marco e Lorenzo pensano di affidarsi alle due Hostess per capire in quale dei due gates dell'aeroporto imbarcarsi, ma scoprono che una delle due è un Cavaliere, e l'altra un Furfante. Purtroppo dietro di loro c'è una coda sterminata, quindi possono fare una sola domanda, la stessa, a entrambe le hostess, e sperare in bene. Ma Marco e Lorenzo, da buoni matematici, sanno che c'è un modo per sapere con certezza la risposta giusta. Quale?