

CorsoOli - Squadre

MARCO CATTAZZO & LORENZO PROSERPIO

26 febbraio 2020

1 Gara - I compagni di Squadra

UNO.

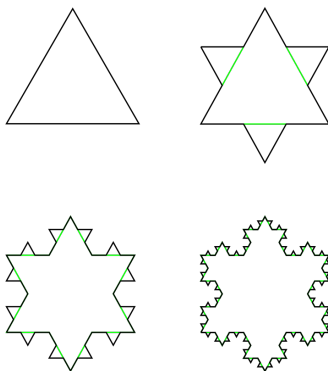
$p(x)$ è un polinomio di 6° grado, per ogni x reale si sa che $p(x) \geq 1$. Sappiamo anche che $p(2014) = p(2015) = p(2016) = 1$ e $p(2017) = 2$. Qual è il valore di $p(2018)$?

DUE.

Mathio e Luigbnitz sono finalmente giunti al duello finale contro Brouwer. Ormai Mathio e la principessa Peachtagor distano solo 150 m l'uno dall'altra, ma Brouwer si è messo proprio a metà strada tra di loro. Una pianta kernivora osserva divertita la scena da un punto equidistante da Mathio e dalla principessa, e distante 100 m sia da Brouwer che da Luigbnitz. Mathio si prepara ad attaccare Brouwer, sapendo che il fratello è lì vicino a lui: per la precisione Luigbnitz e Brouwer hanno la stessa distanza da Mathio. Qual è in m^2 l'area del triangolo delimitato da Mathio, Luigbnitz e Peachtagor?

TRE.

Calcola l'area della Curva di Coch generata a partire da un triangolo equilatero di lato $\sqrt{\frac{500}{\sqrt{3}}}$. La costruzione parte da un'isola a forma di triangolo equilatero. Quindi, sul terzo centrale di ciascuno dei tre lati di lunghezza unitaria, si colloca un promontorio a forma di triangolo equilatero, dai lati uguali a $\frac{1}{3}$ del lato di partenza. Si ottiene così un esagono regolare stellato, o stella di David. Allo stesso modo si procede per ciascuno dei suoi dodici lati, e così di seguito, per un numero infinito di volte.



QUATTRO.

Calcolare la somma delle aree di tutti i diversi rettangoli che hanno perimetro di 400 cm ed aventi i lati che, in centimetri, hanno misura intera.

CINQUE.

Una successione è così definita:

$$\begin{aligned} t_1 &= 143 \\ t_2 &= 1000 \\ t_{(n+1)} &= \frac{(1+t_n)}{t_{(n-1)}} \end{aligned}$$

Trova t_{2008}

SEI.

La principessa Rosalindeberg è prigioniera da qualche parte nella Enorme Foresta Piana. Per trovarla Mathio e Luigbnitz attivano contemporaneamente due rilevatori che stanno all'interno della foresta, a 10 km di distanza l'uno dall'altro. Le spie su entrambi i rilevatori si accendono e ciò significa che la principessa deve essere abbastanza vicina, per cui esiste un cerchio del raggio di 10 km che contiene al suo interno i due rilevatori e la principessa. Quanto misura in km^2 l'area della zona di foresta dove devono cercare la principessa?

SETTE.

Per quanti n naturali: $(\sqrt{n} + \sqrt{n + 2009^{2009}})^{(1/41)}$ è intero?

OTTO.

Sia a_1, a_2, \dots, a_{16} una permutazione di 1, 2, ..., 16 tali che $a_k - a_j \neq a_j - a_i$ $1 \leq i < j < k \leq 16$

NOVE.

Abbiamo due gruppi composti da molti bambini. Il primo gruppo è formato da bambini senza zaino che occupano 1 spazio, il secondo gruppo da bambini con lo zaino che occupano 2 spazi. In quanti modi si può formare con i bambini una fila di 14 spazi?

DIECI.

In quanti modi si può scrivere il numero 3600 come somma di interi positivi dispari consecutivi?

UNDICI.

Ognuno dei 300 soldati dell'esercito di Spartin ha un numero scritto sullo scudo; questo numero è pari al numero di zeri con cui termina $n!$, dove n varia da 1 a 300. Quindi, per esempio, l'ultimo soldato $n = 300$ ha sullo scudo il numero 74, perché $300!$ termina con 74 zeri. Sugli scudi degli Spartini però non compaiono tutti i numeri naturali tra 0 e 74, ma ne mancano alcuni. Qual è la somma di tutti i numeri mancanti?

DODICI. ††

Il grande Archimede ha fatto costruire attorno alla città di Siracusa due grossi specchi circolari concentrici per i suoi esperimenti. Archimede lancia un raggio di luce a partire dal porto, che si trova sullo specchio più esterno, in modo che colpisca lo

specchio interno per la prima volta in un punto fissato, corrispondente alla posizione del tempio di Mathena (il porto e il tempio non sono allineati con il centro degli specchi). Il raggio si divide in tanti raggi diversi, perché lo specchio più interno è semiriflettente: cioè, quando viene colpito da un raggio di luce quest'ultimo si divide in due raggi, uno che viene riflesso e uno che attraversa lo specchio senza mutare direzione. Al loro 2014° contatto con uno specchio (contando come primo contatto quello in corrispondenza del tempio), i raggi svaniscono. Archimede nota che esistono due punti A e B tali che ogni possibile percorso dei raggi termina in uno di essi, e inoltre che il percorso più lungo possibile misura il doppio di quello più corto. Quanto vale il rapporto tra i raggi dei due specchi? Si risponda indicando la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

TREDICI.

Le Schede Galattiche contengono semplici problemi come il seguente. Consideriamo tutti i numeri che in base 2016 hanno esattamente dieci cifre e si scrivono in tale base usando solo le cifre zero e uno. Quanti di questi numeri sono multipli di cento? Con 'cento', si intende il numero 100 in base dieci.

QUATTORDICI. †

Un distributore automatico contiene infinite caramelle di due tipi: quelle da 1024 milligrammi (che escono premendo il tasto bianco) e quelle da 1003 milligrammi (che escono premendo il tasto nero). Un bimbo, premendo più volte a suo piacere i tasti bianco e nero, prende delle caramelle e le mette nel suo sacchetto. Sia k il massimo numero intero positivo tale che, qualunque sia la sequenza dei tasti premuti dal bimbo, il sacchetto non conterrà mai k milligrammi di caramelle. Scrivere le ultime 4 cifre di k (cioè migliaia, centinaia, decine e unità). Se si ritiene che tale k non esista indicare come risposta 0.

QUINDICI.

La Torre dell'Alto Consiglio, sul pianeta Coruscant, è costruita su sei livelli. Quello più in basso ha la forma di un prisma retto la cui base è un ottagono regolare di lato 10, e la cui altezza è a sua volta lunga 10. I livelli successivi hanno anch'essi la forma di prismi retti, le cui basi sono (nell'ordine) ettagonale, esagonale, pentagonale, quadrata e triangolare. Rispetto al precedente, ogni livello ha altezza doppia e lati di base lunghi la metà. Inoltre gli assi dei diversi prismi coincidono. Quanto misura la superficie visibile della torre?

SEDICI.

Il papà di Ada, Beatrice, Carlo e Dario vuole dividere tra di loro 2018 caramelle (tutte uguali) in modo tale che Ada e Carlo abbiano un numero dispari di caramelle. In quanti modi può farlo? (dare solo le ultime quattro cifre).

DICIASSETTE.

Un'urna contiene 100 biglie, di cui 50 nere e 50 bianche. Si estrarrebbero le biglie una ad una, finché non sono state estratte tutte. Qual è la probabilità che, ad ogni istante, il numero di biglie nere estratte fino a quel momento sia sempre minore o uguale a quello di urne bianche estratte? Esprimi il risultato come somma di numeratore e denominatore ridotti ai minimi termini

DICIOTTO. †

Per celebrare la vittoria contro la Fondazione dei Mercanti, su Naboo è in corso una grande festa. I tavoli del banchetto hanno la forma di triangoli rettangoli con lati di lunghezza intera. Inoltre ogni tavolo ha almeno un cateto la cui lunghezza è un numero primo minore di 20. La regina Atiyala ha insistito affinché non ci fossero due tavoli con forme congruenti (su Naboo mettere due tavoli uguali è come non metterne nessuno). Quanto vale al massimo la somma delle aree dei tavoli presenti al banchetto? Due triangoli si considerano congruenti se si possono sovrapporre l'uno all'altro tramite rotazioni, traslazioni e simmetrie. $((m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Proprio strana questa terna!)

DICIANNOVE.

Sia $p(x)$ un polinomio tale che: $p(p(x)) = p(x) + p(x + 8)$. Quanto vale $p(2018)$?

VENTI.

Mario torna ogni sera dal lavoro col treno che arriva in stazione alle 17.40 dove trova la moglie a riceverlo, e poi tornano a casa insieme. Una sera Mario arriva col treno alle 17.00 e decide di incamminarsi incontro alla moglie. Quando la incontra modifica la sua velocità per procedere insieme; arrivano, così, assieme a casa 30 minuti prima del solito. Supponendo che la moglie cammini sempre alla stessa velocità e che sia partita da casa in modo da arrivare in stazione alle 17.40 precise e che Mario, quando sono insieme, adegui la velocità a quella della moglie, stabilisci per quanto tempo (minuti) Mario ha camminato da solo.