CorsoOli - Squadre

Marco Cattazzo & Lorenzo Proserpio

21 Dicembre 2018

1 Teoria

Calcolare la funzione generatrice del termine n-esimo di una funzione ricorsiva x_n in cui il termine n-esimo è linearmente dipendente da un numero k finito di termini precedenti

$$x_n = \begin{cases} b_1 & n = 1 \\ \vdots & \vdots \\ b_k & n = k \\ a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} & n \geq k \end{cases}$$

- Scrivere il polinomio generatore della funzione:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + \cdots + a_k x_{n-k}$$
$$\Downarrow$$
$$0 = \lambda^k - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - a_3 \lambda^{n-3} - \cdots - a_k \lambda^{n-k}$$

- determinare le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ del polinomio
- il valore del termine n-esimo è dato da una espressione del tipo

$$x_n = \alpha_1 (\lambda_1)^n + \alpha_2 (\lambda_2)^n + \alpha_3 (\lambda_3)^n + \cdots + \alpha_k (\lambda_k)^n$$

  per qualche $\alpha_1, ...\alpha_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- noto dunque che per trovare la funzione devo risolvere un sistema di k equazioni lineari in k incognite, le quali risultano quindi essere univocamente determinate.

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 (\lambda_1)^1 + \alpha_2 (\lambda_2)^1 + \alpha_3 (\lambda_3)^1 + \cdots + \alpha_k (\lambda_k)^1 \\ b_2 = \alpha_1 (\lambda_1)^2 + \alpha_2 (\lambda_2)^2 + \alpha_3 (\lambda_3)^2 + \cdots + \alpha_k (\lambda_k)^2 \\ \vdots \\ b_k = \alpha_1 (\lambda_1)^k + \alpha_2 (\lambda_2)^k + \alpha_3 (\lambda_3)^k + \cdots + \alpha_k (\lambda_k)^k \end{cases}$$

2 Problemi

1. Saltelli Scoordinati Un bambino decide di salire una scala con $n \geq 1$ gradini superando ad ogni passo uno o due gradini. In quanti modi diversi potrà raggiungere il 24° gradino?

2. Rette in $\mathbb{R}^2$ Si determini il numero di regioni create da n rette nel piano se k di queste rette sono parallele e le altre $n - k$ intersecano tutte le altre con la condizione che tre rette non passino per uno stesso punto, sommando i casi in cui n=5 e k=2, n=7 e k=3.

3. Problemi di Parcheggio (†) Si determini il numero di modi in cui è possibile riempire una fila di n posti macchina utilizzando macchine blu e rosse, che occupano un posto auto, camion verdi, blu e gialli, che occupano due posti auto, e Limousine nere che invece ne occupano 3, nel caso in cui i posti auto siano 25.

non è necessario svolgere tutti i conti

4. Domino Disordinato (††) In quanti modi posso riordinare i miei 3D-Domino di dimensione $1 \times 1 \times 2$ in una scatola $1 \times 1 \times n$ con $n = 6$?

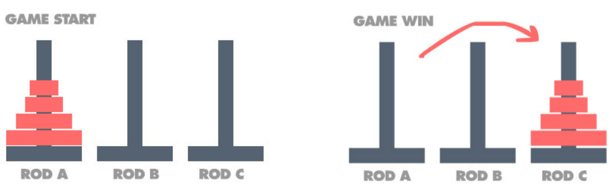
non è necessario svolgere tutti i conti

5. disuguaglianza di Jensen (†) Sia la seguente equazione funzionale di p a coefficienti reali.

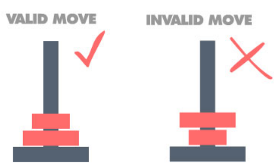
$$p(\frac{x+y}{2}) = \frac{p(x)+p(y)}{2}$$

È noto inoltre che $p(0) = 3$ e $p(1) = 5$. Quanto vale $p(7)$?

6. La torre di Hanoi La torre di Hanoi è un gioco che consiste di n anelli di varia misura e tre bastoncini; all'inizio del gioco gli anelli sono tutti sul primo bastoncino a sinistra in modo decrescente, cioè a partire da quello più grande in fondo fino al più piccolo in cima.

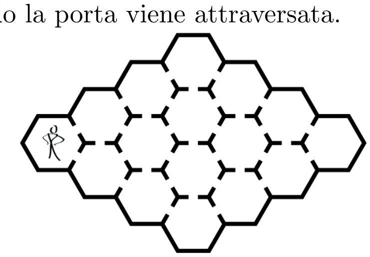


Spostando gli anelli tra i bastoncini si vuole ricostruire la stessa torre sul bastoncino più a destra: ogni volta però che un anello viene spostato su un bastoncino, esso deve essere più piccolo di tutti gli anelli già presenti sul bastoncino; in altre parole ad ogni passo del gioco ci dev'essere una pila decrescente di anelli (o nessun anello) su ogni bastoncino.



Qual'è il numero minimo di mosse necessario per completare una torre di Hanoi composta da 13 anelli? dare come risposta la somma dei divisori del numero di mosse.

7. Celle Complesse Oggi Lorenzo, vagando per i sotterranei del dipartimento, si è imbattuto nell'area riservata ai dottorandi. In quell'area la porta di ingresso ha una particolare serratura che funziona solo coi Badge universitari abilitati. Lorenzo, non essendo ancora formalmente un dottorando, lasciandosi chiudere la porta alle spalle, rimane incastrato nei sotterranei. Il sotterraneo consiste in un labirinto formato da 16 stanze esagonali, dove ogni coppia di stanze adiacenti è collegata da una porta. Inoltre ogni porta ha un sensore che si attiva quando la porta viene attraversata.



Su un cartello Lorenzo nota scritto che, per sbloccare la porta senza usare il badge si può anche partire dalla stanza iniziale (indicata dall'omino palestrato), attivare tutti i sensori e tornare alla stanza di partenza. Da bravo matematico, Lorenzo ha velocemente calcolato il numero minimo di porte che dovrà attraversare. Qual'è questo numero?

8. Moduli Molesti Quante sono le soluzioni intere di $|x| + 2|y| = 4022$?

9. Pestiferi Prodotti

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$

10. Polinomi Perseveranti Del polinomio $p(x)$ di 6° grado sappiamo che, per ogni x reale $p(x) \geq 1$.Sappiamo, inoltre, che $p(2014) = p(2015) = p(2016) = 1$ e $p(2017) = 2$ quanto vale $p(2018)$?

11. Eccessivi Elevamenti Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$f(f(x)^2 + y) = x^2 + y$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

12. Due Denominatori Trovare tutte le soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}^+$ di

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}.$$

13. Inutili Inversi Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ tali che:

$$\frac{x + f(y)}{xf(y)} = f(\frac{1}{y} + f(\frac{1}{x}))$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

14. Funzioni e Primi Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che per ogni $n > 1$ esiste almeno un primo p che divide n, per cui $f(n) = f(\frac{n}{p}) - 2f(p)$.
Sapendo che $f(2014) + f(2015) + f(2016) = 285$, quanto vale $|f(2017)|$?

15. Funzioni e Primi 2 Sia $f(n)$ il numero di numeri primi minori o uguali a n, e sia $g(n)$ il numero di numeri composti minori o uguali a n (nota che 1 non è nè primo nè composto).
Quanto vale
$f(1) + g(2) + f(3) + g(4) + \cdots + f(99) + g(100)$?