Gara a Squadre - Corso avanzato

Marco Cattazzo & Lorenzo Proserpio

29 Novembre 2019

Alcune definizioni esistenziali

Molto meno noiosi dei problemi di matematica che danno a scuola, gli esercizi delle olimpiadi sono tuttavia irrisolubili, perché richiedono un colpo di genio impossibile. Quando si ascolta la soluzione la reazione è molto simile a quella che ha un uomo vedendo una bella ragazza: bocca aperta, salivazione eccessiva, commenti estasiati, a meno che si tratti di mezza pagina di calcoli senza nessuna astuzia dietro.

Di seguito esempi di problemi:

1. Una nave si trova in mare, è partita da Boston carica di indaco, ha un carico di duecento barili, fa vela verso Le Havre, l'albero maestro è rotto, c'è del muschio sul castello di prua, i passeggeri sono in numero di dodici, il vento soffia in direzione NNE, l'orologio segna le tre e un quarto del pomeriggio, si è nel mese di maggio. Si chiede l'età del capitano.
2. Gino Strada non riesce a ritrovare la strada per andare a trovare l'amico Gino D'Amico. Come fai a fargli cambiare idea relativamente ai buchi neri? Esprimi il risultato in endicasillabi ternari di secondo grado.
3. Quanti parallelogrammi servono per formare un parallelochilo?
4. Desiderio sta notando che il numero *inserire anno corrente* ha 217 divisori escludendo quelli dispari, primi, secondi e i dessert. Qual è il percorso più vicino per sconfiggere Carlo Magno?
5. Un quadrato è inscritto in una retta avente raggio pari a 1. Quanti quadrati si possono costruire a partire dal dodecagono avente lato pari a 43?
6. Considera il mondo riprodotto su una mappa piana. Riproduci la Pangea degli Omofobi Non Unti.
7. Marco sta disponendo *inserire anno corrente* Iphone X in fila in modo tale da rispettare il teorema della corda. Qual è il conto bancario di Marco? È cinese? Per rispondere ad entrambe le domande in unica risposta, dare la somma delle sillabe.

Alcune considerazioni iniziali

1. Una moneta circolare di diametro 1 cm viene lasciata cadere su un pavimento piastrellato con piastrelle esagonali di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta, una volta per terra, non tocchi neanche in un punto la fuga di una piastrella?
2. Sia dato un segmento AB di lunghezza fissata. Su questo segmento si prenda un generico punto P. Ora si chiami il punto medio di AB M_1. Ora si prendano i punti medi di AM_1 e M_1B e li si chiamino rispettivamente M_2 e M_3. Ora si ripeta all'infinito. E' vero o falso che prima o poi, per qualche $i \in \mathbb{N}$ all'iterazione i-*esima* un dato M_j coinciderà con P, a prescindere dalla scelta di P?
3. Quanti sono i solidi platonici?

Alcuni problemi imparziali

1. Presi tre punti a caso su una circonferenza di raggio unitario, qual è la probabilità che giacciano su una semicirconferenza? Fornire come risposta le prime 4 cifre decimali

2. Sono dati nel piano 25 punti uniti da segmenti, in modo tale che i segmenti non si intersechino mai tra di loro se non nei loro estremi. Trovare il numero massimo possibile di segmenti che è possibile disegnare tra i punti.

3. Alberto e Barbara decidono di ri-tassellare il loro modello gigante di pallone da calcio con pentagoni ed esagoni, non necessariamente regolari, coprendolo completamente e senza sovrapposizioni. Qual'è il massimo numero di pentagoni che possono inserire?

4. Alberto si trova alle pendici di un'alta collina conica. Alberto vuole andare a visitare la sua amata Barbara, che si trova ella stessa alle pendici di quello stesso colle, ma dalla parte diametralmente opposta rispetto alla base. Sapendo che la collina ha apotema 12hm e raggio di base 8hm. Qual'è il minimo percorso che Alberto dovrà percorrere per arrivare da Barbara? *La soluzione è del tipo $a\sqrt{b}$. Si dia come risposta $a + b$*

5. Le case di Alberto e Barbara distano tra di loro $250m$. Una dista dal fiume rettilineo che scorre lì vicino $200m$ più dell'altra. Le due parti sono dalla stessa parte rispetto al fiume. Alberto dopo una mattinata di studio decide di far visita a Barbara, ma prima di passare a trovarla scende al fiume a rinfrescarsi i piedi e le idee. Alberto, essendo ormai esperto in Geometria, calcola la strada più breve per fare ciò. Se alberto percorre una distanza di $800m$, quanto dista la più vicina delle due case dal fiume? *La soluzione è del tipo $\frac{a+b\sqrt{c}}{2}$. Rispondere con $a + b + c$.*

6. Dati 521 punti su un piano (521 è un numero primo) tali che a tre a tre sono contenuti in una circonferenza di raggio 7, determinare il raggio minimo della circonferenza che contiene sicuramente tutti i punti.

7. In un triangolo ABC si disegni la bisettrice BD. Si ha che $AD = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$. Se $AB = \sqrt{2}$ e $BC = 1$, si determini quanto vale in gradi $\angle ABD$.

8. Si consideri, in un riferimento cartesiano, una circonferenza il cui centro ha coordinate irrazionali. Quanti possono essere, al massimo, i punti con entrambe le coordinate razionali appartenenti alla circonferenza?

9. Una piramide ha per base un triangolo equilatero di lato 3, e i tre spigoli laterali sono uguali tra loro. Sia P un punto interno alla piramide, e siano x_a, x_b, x_c, x_d le distanze di P dalle quattro facce a, b, c, d. Indichiamo con h_a, h_b, h_c, h_d le quattro altezze della piramide relative alle corrispondenti facce. Qual'è il massimo valore della seguente funzione?

$$\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c} + \frac{x_d}{h_d}$$

10. Barbara rinviene uno strano oggetto in camera di Alberto, un tetraedro molto interessante, e inizia a studiarlo: ogni faccia ha inscritta una circonferenza di raggio $1mm$; vuole misurare il volume dell'oggetto, lo immerge in acqua e scopre che è di $1000mm^3$; prende un righello e misura accuratamente la somma delle lunghezze di tutti gli spigoli. Si accorge che è di $100mm$. Vedendo allora le circonferenze inscritte si pone questa domanda: Qual'è, in mm, il raggio della sfera inscritta nel tetraedro?

Alcuni approfondimenti spaziali

FraViga$^{\text{TM}}$ [Probabilità geometrica elementare]

A e B devono trovarsi (arrivare) al Bar tra le 21 e le 23, ma non si mettono d'accordo sull'orario. Entrambi arrivano e dopo 20 minuti se ne vanno. Qual'è la probabilità che si becchino? Risposta le prime 4 cifre significative

2. [Geometria analitica nello spazio]

Sia dato un cubo di lato 1 nello spazio positivo (x^+, y^+, z^+). Con un vertice del cubo coincidente con l'origine $(0, 0, 0)$. Sia ora $A = (1, 1, 0)$ un vertice e $C = (0, 0, 1)$ un altro vertice. Sia ora $B = (1, 0, t)$ con $t \in (0, 1)$. Sia ora il piano passante per ABC, esso taglia il cubo ne punto $D = (0, 1, k)$. Si trovi per quale valore di t l'area di $[ABCD]$ è minima. *Si dia come risposta la somma di t e dell'area di $[ABCD]$, eventualmente arrotondata alla seconda cifra decimale.*