

Una giornata da Matematici

MARCO CATTAZZO & LORENZO PROSERPIO

2 Novembre 2018

1 Citazioni

Induzione Fortissima delle Gare a Squadre (NON è un teorema)

Dato un problema P di Algebra, Geometria o Calcolo Combinatorio, e data una funzione $f(n)$ candidata a soluzione del problema, se vale $f(n)$ per $n = 0, 1, 2, 3$, allora $f(n)$ vale per tutti gli n .

Riguardo agli strumenti e alle Dimostrazioni

Un matematico durante la sua vita di tutti i giorni è come un armaiolo abile, che con calma, perizia e ottimi materiali fabbrica un'arma snella e precisa, adatta a ogni tipo di situazione.

Un matematico durante una gara a squadre è come un armaiolo lanciato in un campo di battaglia: l'importante per sopravvivere non è tanto che sappia costruire delle armi, nè che siano belle, nè che siano comode. L'importante è che le abbia a disposizione e che sappia usarle.

2 Teoria

$$\sum_{i=0}^n 1 = n + 1$$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=m}^n x^k = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} \quad x \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^n ix^i = x \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}$$

3 Problemi

1. A lezione di Analisi Appena entrata in aula, una volta cessato il brusio degli studenti, la professoressa di analisi di Lorenzo inizia a scrivere le informazioni del corso. Gli studenti, allibiti, notano che invece del numero del suo ufficio la professoressa ha scritto il seguente problema:

Dato un polinomio $p(x)$ a tre radici reali distinte, qual'è il massimo numero di coppie di radici reali coincidenti di $p(x^3 - 3x)$?

Riuscirete a guidare i poveri studenti di Matematica bisognosi di chiarimenti verso l'ufficio della professoressa?

2. Incomprensioni in 4 dimensioni Al professore di analisi di Marco piace molto divagare e proporre agli studenti sfide nuove e accattivanti. L'ultima è stata calcolare il valore di un numero 4-ipercubico di lato 17. Marco a fine lezione subito corre a presentare il problema a Lorenzo, il quale però, stanco a causa delle due ore precedenti di Algebra, capisce pentatopico invece di 4-ipercubico. Quale numero sta cercando Lorenzo?

AIUTO: UN NUMERO PENTATOPICO È L'EVOLUZIONE IN 4 DIMENSIONI DI UN NUMERO TRIANGOLARE: SE UN NUMERO TRIANGOLARE $t_n = 1 + 2 + \dots + n$, UN NUMERO TETRAEDRICO $T_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, UN NUMERO PENTATOPICO DI LATO n È $p_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$

3. Estensione al continuo Il professore di Analisi scrive alla lavagna il seguente esercizio da risolvere:

Determinare il numero di soluzioni della seguente equazione:

$$\underbrace{|| \dots ||x - 0,5| - 0,5| \dots - 0,5|}_{2018 \text{ valori assoluti}} = 0$$

Lorenzo, in preda ad una crisi di "estensione al continuo" non prontamente trattenuta da Marco, risolve anche altre due varianti:

$$\underbrace{|| \dots ||x - 1| - 2| \dots - 1009|}_{2018 \text{ valori assoluti}} = 0$$

$$\underbrace{|| \dots ||2x - 1| - 0,5| \dots - \frac{1}{2^{124}}|}_{248 \text{ valori assoluti}} = 0$$

Solo che, invece di presentare al professore il risultato giusto, si confonde e risponde con la somma dei tre risultati. Che numero ha risposto Lorenzo?

4. Avete capito, no? Il professore di Algebra di Marco e Lorenzo è famoso per essere un tipo con la testa mooolto fra le nuvole. Una volta, mentre stava spiegando, ha affermato:

PROF: "Le diverse partizioni indotte da una relazione di equivalenza sul cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono esattamente... (si interrompe e fissa il vuoto per qualche attimo)... avete capito, no?"

Vedendo gli studenti con le facce completamente allucinate, ha ripreso:

PROF: "beh ma è ovvio, sono esattamente tante quante il resto modulo 9973 della somma $\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + \dots + \lfloor \log_2 2^{9973} \rfloor$ "

Gaia e Camilla si scambiano allora uno sguardo d'intesa, e subito scrivono sul loro quaderno il numero che completa la pagina di appunti.

Che numero hanno scritto Gaia e Camilla sul quaderno?

Camilla dà un piccolo aiuto a Lorenzo, che vedeva ancora perso a fissare intensamente la lavagna, con la mano sul mento mentre si liscia la barba: "Grazie a un teorema dimostrato dal famoso Fermat sappiamo che $a^p \equiv a \pmod{p}$ "

Marco, che ancora non aveva capito, chiede allora un suggerimento a Gaia. Lei, facendogli l'occhiolino, gli dice "9973 è un numero primo!"

5. Matematica fa paura Lorenzo e Marco si ritrovano nel weekend a preparare i corsi delle olimpiadi. Si sa che l'università di Matematica è famosa per la sua difficoltà, tanto che i suoi tassi di abbandono sono molto elevati. E proprio di questo discutevano quel pomeriggio Marco e Lorenzo.

LORENZO: "A inizio anno eravamo 243 in corso, ma ogni due settimane sparisce addirittura un terzo dei partecipanti!"

MARCO: "Hai ragione! E pensare che siamo in università solo da 10 settimane! E ogni settimana abbiamo solo 5 giorni di lezione! Però fin'ora non c'è mai stato nessun assente."

Sapete dire quanti studenti si sono seduti a lezione dal primo giorno di università?

6. In coda per il Microonde Lorenzo accompagna Marco a fare la kilometrica coda per scaldare il pranzo nel microonde della facoltà. In fila incontrano Davide e Francesco, che, per ingannare il tempo, propongono loro il seguente problema: Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che: $p(5) = 7$, $p(6) = -2$ e $p(0) < 10000$. Qual è il valore massimo che può assumere $p(0)$?

7. Riposo Meritato Dopo una lunga giornata di studio non c'è niente di meglio che svagarsi con una buona partita ai videogiochi. Ed ecco così che Marco e Lorenzo si trovano online per qualche partita. Teemo (plurale Teemo) è un simpatico animaletto velenoso protagonista di un gioco molto amato da Lorenzo. Nell'ultimo livello del gioco ci sono delle buche, numerate da 0 a un certo numero n . In ciascuna di esse si possono imprigionare dei Teemo e (supponendo che non intervengano animalisti...) in ogni momento sullo sfondo viene visualizzato il polinomio

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

dove a_i è il numero di Teemo nella buca i . Per completare il livello occorre che fare in modo che $p(7) = 33611$. Marco ci riesce riempiendo ogni buca con un numero di Teemo compreso tra 1 e 6. Quanti Teemo ha usato Marco per riuscirci?