

Gara a Squadre - Gara Online

Filippo Beretta, Marco Cattazzo, Lorenzo Proserpio

27 Febbraio 2020

Qualche spunto utile...

Regolamento

Cari ragazzi, in questi tempi di pestilenza, in cui la società e i costumi lasciano spazio alla bestialità e alla lotta per la sopravvivenza, è buona norma, per noi che siamo consacrati alla Matematica, non perdere le buone abitudini e l'attitudine al pensiero astratto.

La teoria, come ben abbiamo potuto vedere, in nessun campo sostituisce un buon uso delle meningi... tuttavia in qualche caso può essere decisamente utile. Nella speranza che non abbiate dimenticato ciò che abbiamo fatto negli ultimi anni, ecco una piccola gara per mettere alla prova la vostra memoria, oltre che il vostro intuito e la vostra creatività. No, scherzo. I teoremi ve li riportiamo tutti, lo sappiamo che non ve li ricordate.

La difficoltà di oggi è che non potrete mostrare ai vostri compagni di squadra fogli, nè passare appunti: tutto ciò che potrete fare sarà spiegare "a parole" il vostro pensiero. In bocca al lupo!!

Sommatorie

$$\sum_{i=0}^n 1 = n + 1$$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=m}^n x^k = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} \quad x \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^n ix^i = x \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}$$

Inclusione Esclusione

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ &- \dots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \left| \bigcap_{k=1}^i A_{j_k} \right| \end{aligned}$$

Teorema Chicken McNuggets

Dati due interi positivi coprimi m, n , il più grande intero che non si può scrivere nella forma $am + bn$, per a, b interi nonnegativi è $mn - m - n$.

Una conseguenza del teorema è che ci sono esattamente $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ interi positivi che non possono essere espressi nella forma $am + bn$.

Funzioni ricorsive

Calcolare la funzione generatrice del termine n -esimo di una funzione ricorsiva x_n in cui il termine n -esimo è linearmente dipendente da un numero k finito di termini precedenti

$$x_n = \begin{cases} b_1 & n = 1 \\ \vdots & \vdots \\ b_k & n = k \\ a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} & n \geq k \end{cases}$$

- Scrivere il polinomio generatore della funzione:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + \dots + a_k x_{n-k}$$

\Downarrow

$$0 = \lambda^k - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - a_3 \lambda^{n-3} - \dots - a_k \lambda^{n-k}$$

- determinare le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ reali distinte del polinomio
- il valore del termine n -esimo è dato da una espressione del tipo

$$x_n = \alpha_1 (\lambda_1)^n + \alpha_2 (\lambda_2)^n + \alpha_3 (\lambda_3)^n + \dots + \alpha_k (\lambda_k)^n$$

per qualche $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- noto dunque che per trovare la funzione devo risolvere un sistema di k equazioni lineari in k incognite, le quali risultano quindi essere univocamente determinate.

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 (\lambda_1)^1 + \alpha_2 (\lambda_2)^1 + \alpha_3 (\lambda_3)^1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k)^1 \\ b_2 = \alpha_1 (\lambda_1)^2 + \alpha_2 (\lambda_2)^2 + \alpha_3 (\lambda_3)^2 + \dots + \alpha_k (\lambda_k)^2 \\ \vdots \\ b_k = \alpha_1 (\lambda_1)^k + \alpha_2 (\lambda_2)^k + \alpha_3 (\lambda_3)^k + \dots + \alpha_k (\lambda_k)^k \end{cases}$$

L'*n*-cameron.

Cornice

Inverno 1314, dal nord della penisola dilaga l'immane tragedia della peste gialla. 7 fanciulli e 7 fanciulle molto Pacifici, per scappare all'epidemia decidono di fuggire da Firenze nella campagna. Durante il periodo di isolamento forzato, scelgono di porre ogni giorno, a turno, un astruso problema matematico per trascorrere il tempo. Ecco di seguito alcune delle storie che questi si raccontano.

1. Prima giornata

Alibech diviene romita, e a questi Rustico Monaco insegna come rimette il diavolo in inferno. Per ciò ottenere, si deve individuare la soluzione della seguente questione. Sulla retta reale, dipingiamo di rosso tutti i punti che corrispondono agli interi della forma $81x + 100y$, dove x e y sono interi positivi. Dipingiamo i restanti interi di blu. Trovare il punto P sulla retta tale che, per ogni intero T , la riflessione di T rispetto a P è un punto intero di colore diverso da T . Se ne indichi la parte intera.

2. Seconda giornata

Melchisedech giudeo, al fine di sfuggire alla condanna di morte che pende sulla sua testa ad opera del Saladino, propone ai carcerieri le seguenti parole dal significato oscuro: "Si consideri l'equazione

$$3i^2 + 2j^2 = 77 \times 6^{2012}$$

Determinare quante soluzioni intere (i,j) essa abbia. Quante sono?" Le guardie, in preda ad uno stato confusionale, nulla possono e lasciano sfuggire il progioniero.

3. Terza giornata

Sul campo di battaglia Rinaldo d'Asti si aspetta che i soldati di Castel Guiglielmo attaccheranno risalendo l'Arno. Ha piazzato tre torce, due sulle rive opposte a est e a ovest. Rinaldo è sulla torre a 8km dal faro sulla riva est e a 5km dall'altro. Sa anche che la distanza tra le due torce è 8.9km. La terza torcia è piazzata su una boa nel fiume esattamente a metà della linea che congiunge i due fari sulle rive. La nave vedetta di Guiglielmo compare sulla linea delle tre torce e Rinaldo si accorge che il suo angolo di visuale tra la torcia sulla riva est e la nave vedetta coincide con il suo angolo di visuale tra la boa e la torcia sulla riva ovest. Calcola perciò immediatamente il rapporto tra la distanza della nave vedetta dalla torcia sulla riva est e quella della nave vedetta dal faro sulla riva ovest e, per preparare la difesa, comunica a Martellino quanto è lontana la nave vedetta dalla torcia sulla riva ovest. Quanti metri è lontana la nave vedetta dalla torcia sulla riva ovest?

4. Quarta giornata

Madonna Isabella, standosi con Leonetto, è maritata con Messer Lambertuccio. Per non incorrere nell'ira funesta del marito, propone a questi un indovinello: "Sia P_n il numero delle parole di n lettere che si possono comporre usando solo le lettere I, M, O e facendo in modo che non vi siano mai due vocali consecutive. Determinare quale resto si ottiene dividendo P_{2016} per 31"

5. Quinta giornata

Si narrano le vicende di Ezio Cardano, assassino matematico, il quale girava per i tetti della bionda Firenze eliminando tutti coloro che non sapevano risolvere le sue equazioni. A una delle sue vittime pose questo problema: siano a, b, c reali tali che $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 128$, $a^5 + b^5 + c^5 = 28800$. Quanto vale $a^3 + b^3 + c^3$?

6. Sesta giornata

Messer Gentil de' Carisendi, venuto da Modona, narra le meraviglie della nazione appena visitata. Vi sono 2009 città, che indichiamo con $C_1, C_2, \dots, C_{2009}$. La città C_i e la città C_j sono collegate da una corsa (andata e ritorno) se e solo se $(i - j)$ è dispari. Fissate 2 città collegate, le corse di andata e ritorno tra di esse sono operati dalla stessa confraternita. Al contrario, corse tra coppie diverse di città sono sempre operati da confraternite diverse. Un pellegrino vuol fare un viaggio che parte da una città a sua scelta e fa ritorno alla stessa città senza mai muoversi 2 volte con la stessa confraternita (il pellegrino può però passare più volte per la stessa città). Determinare il minimo numero di compagnie con le quali il turista *non* volerà durante il suo tour

7. Settima giornata

Ser Cepparello, in punto di morte, si accosta alla confessione. Al posto di confessare al santo frate i propri peccati, narra invece questa novella sull'Isola Kenoncé, abitata da cavalieri e furfanti (i cavalieri dicono sempre il vero, i furfanti sempre il falso): la novella del censimento sull'Isola Kenoncé. Gli emissari dell'Ufficio Censimento entrano in una locanda e rivolgono la stessa domanda a cinque avventori: «Quanti sono i furfanti su quest'isola?» Ricevono le seguenti risposte:

- Il loro numero diviso per 56 ha resto 19
- Il loro numero diviso per 132 ha resto 23
- Il loro numero diviso per 105 ha resto 13
- Il loro numero diviso per 162 ha resto 17
- Il loro numero diviso per 156 ha resto 37.

Il locandiere, un cavaliere, interviene e dice: "Gli abitanti dell'isola sono diecimila e le informazioni date dei cavalieri presenti permettono di stabilire la risposta in modo unico". Grazie al suo allenamento con i numeri, il frate interrompe Ser Cepparello e fornisce rapidamente la soluzione. Di quale numero si trattava?

8. Ottava giornata

Il monaco Narciso, per mostrare al proprio abate e a tutti i suoi confratelli l'importanza della geometria ai fini contemplativi, sceglie di proporre all'inizio della

Quaresima questo problema, da risolvere come espiazione dei peccati. “Il perimetro di un triangolo, espresso in millimetri, ‘e un numero intero, mentre la somma delle mediane ‘e 3 metri. Quanti diversi valori può assumere il perimetro?”

9. Nona giornata

Il re Carlo, vecchio e vittorioso, per mostrare ancora una volta alla sua corte la propria cultura, in punto di morte pronuncia queste parole: “Un grafo si dice *pre-tailandese* se ha 2014 vertici e da ogni vertice partono al massimo 4 lati. Sia T il massimo numero di triangoli che possono essere ottenuti in un grafo *pre-tailandese*. Determinare T ”

10. Decima giornata

Talano d’Imolese sogna che un lupo squarcia tutta la gola e ‘l viso alla moglie; dicele che se ne guardi. Questa, lupo incontrata, metti essi in fuga proponendo la seguente questione: “Trovare la somma della seguente espressione

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{728} + \sqrt{729}}$$

11. Undicesima giornata

Maestro Guglielmo, sommo artefice di arte divina e pagana nell’intagliatura del legno, vuole tassellare una scacchiera 10×1 usando quadratini di lato unitario di colore bianco o nero, e rettangoli di dimensione 2×1 di colore grigio, ma facendo in modo che i tasselli vicini siano sempre diversi. Evidentemente innervosito, chiede all’apprendista Boccadoro il numero di modi con cui si possa fare ciò.

12. Dodicesima giornata

La Marchesa di Monferrato, donna di amore e di tumultuose passioni, sta raccontando la magnificenza del palazzo del re di Francia, di cui è follemente innamorata. In particolare spiega che il palazzo ha 70 piani. Ogni piano ha 7 finestre rivolte verso sud. Ad ognuna di queste corrisponde un ufficio, un appartamento o una sala d’attesa. La distribuzione segue le seguenti regole: A ogni piano non possono esserci più sale d’attesa che uffici Una stanza sopra un appartamento è una sala d’attesa Se una stanza direttamente sopra ad un ufficio è adiacente a due altre stanze, allora queste ultime due stanze devono essere dello stesso tipo. In conclusione, chiede ai suoi invitati, qual è il numero minimo di uffici presenti nel palazzo?

13. Tredicesima giornata

Nella gran corte di Firenze, il matematico Tartaglia giunge ad una gran conclusione. Propone alle dame e ai fanciulli della corte, per loro diletto, il seguente indovinello da tale scoperto derivato: “Detto T_n l’ n -esimo numero triangolare, calcolare

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_1 + T_2} + \cdots + \frac{1}{T_1 + T_2 + \cdots + T_{20}}$$

Il risultato è una frazione che, ridotta ai minimi termini, sarà della forma $\frac{m}{n}$. Dare come risposta $m + n$ ”

14. Quattordicesima giornata

Il Soldano di Babilonia ne manda una sua figliuola a marito al re del Garbo, la quale per diversi accidenti in spazio di quattro anni alle mani di nove uomini perviene in diversi luoghi; ultimamente, restituita al padre per pulcella, ne va al re del Garbo, come prima faceva, per moglie. Tuttavia Sua maestà fatica a riconoscerla, e le domanda: “se davvero sei tu colei, ch’io un giorno presi in moglie, dimmi, presto, il numero delle funzioni f d’ \mathbb{R} in \mathbb{R} , le quali, per ogni punto (x, y) che s’abbia in stima, s’accordan colla seguente costrizione”

$$f(x) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y)))$$

15. Quindicesima giornata

Don Felice insegna a frate Puccio come egli diverrà beato facendo una sua penitenza; la quale frate Puccio fa, e don Felice in questo mezzo con la moglie del frate si dà buon tempo: infatti essi per tutto l’dì discorrono della sottile arte della Matematica. “Contami, cara, i grafi non isomorfi con 4 vertici, ch’io li riconosca” dice lui a lei. “Con piacere!” ella replica. Quale numero risponde la moglie di frate Puccio a Don Felice?

16. Sedicesima giornata

Fresco conforta la nepote che non si specchi, se gli spiacevoli, come diceva, l’erano a veder noiosi. Punta ella sul vivo, decide adornarsi con splendide collane di Borgogna, tutte diverse. Una collana di Borgogna è circolare chiusa, composta da 12 perle, 4 nere e 8 bianche. A meno di rotazioni nello spazio quante collane diverse possono esistere in questo modo?

17. Diciassettesima giornata

Andreuccio da Perugia, venuto a Napoli per comperar cavalli, nella notte viene sopreso da un grave accidente. Si trova invischiato nelle chiacchiere di Landolfo Rufolo, il quale vanvera le seguenti parole “il quadrato ABCD ha il lato di 576cm. Detto O il suo centro ed M il punto medio di CD prendiamo P in modo che la sua distanza da A sia uguale ad AB, la sua distanza da O sia uguale a OM e la sua distanza da D sia minore di quella da B (vedi figura 2). Indichiamo infine con Q il simmetrico di P rispetto alla retta OM e con H la proiezione di P su OQ. Quanto misura (in cm) il segmento PH?”. Andreuccio, dopo una breve esitazione, riesce ad uscire dalla situazione gravosa.



