

Gara a Squadre - Corso per il Triennio

Marco Cattazzo & Lorenzo Proserpio

15 Novembre 2019

1 Breve guida esemplificativa all'Approccio

Approccio del corso alla risoluzione dei problemi, brevemente esemplificato (NON è un teorema)

Data una proprietà $P(n)$ candidata a soluzione di un problema di Algebra, Geometria o Calcolo Combinatorio, se $P(n)$ vale per $n = 0, 1, 2, 3$, allora vale per tutti gli n .

Approccio del corso alle dimostrazioni, brevemente esemplificato

Si racconta la storia di due promettenti matematici, uno dei quali, al termine di una lezione a un gruppo di professionisti, chiese: "Ora risponderò alle domande". Un membro dell'assemblea alzò la mano e disse: "Non mi pare di aver visto la dimostrazione del primo lemma" "Questa non è una domanda".

Approccio del matematico alla risoluzione dei problemi, brevemente esemplificato

La seguente battuta illustra perfettamente la differenza tra un fisico e un matematico. Un fisico e un matematico stavano viaggiando in aereo dalla West Coast a un laboratorio di ricerca in Washington DC. A entrambi fu chiesto di scrivere una relazione sul viaggio. Per esempio, sorvolando il Kansas superarono una pecora nera. Il fisico scrisse: "c'è una pecora nera in Kansas". Il matematico scrisse: "Esiste - da qualche parte nel Midwest - una pecora - nera nella parte superiore"

Approccio del corsista ai "professori" (niente, qui la battuta è anche nel titolo), brevemente esemplificato

All'università degli studi di Milano circola la seguente spiegazione riguardo al significato della parola "ovvio", quando usata dai diversi professori nel corso delle spiegazioni. Non userò i nomi, ma le lettere.

*Quando il professor F. dice che qualcosa è ovvio,
significa che se vai a casa e ci pensi su un paio di settimane, realizzerai che è vero.*

*Quando il professor D. dice che qualcosa è ovvio,
significa che se vai a casa e ci pensi su per il resto della tua vita, POTREBBE venire il giorno in cui ti accorgerai che è vero.*

*Quando il professor M. dice che qualcosa è ovvio,
significa che alla classe era ben noto da almeno due settimane.*

*Quando il professor L. dice che qualcosa è ovvio,
significa che probabilmente è falso.*

2 Problemi

Problemi dimostrativi

Tutti i dimostrativi hanno lo stesso punteggio. I punteggi degli esercizi svolti parzialmente saranno attribuiti in base all'utilità di quanto concluso.

Esercizio Dario e Mario sono stati fatti prigionieri da un mago. Egli, intenzionato ad ucciderli, offre loro un'unica alternativa per salvarsi: dovranno vincere ad un gioco da lui ideato. I due avranno la notte per concordare una strategia, ma il giorno seguente non potranno più comunicare in alcun modo. Il gioco sarà il seguente: Dario entra in una stanza con il mago che gli mostra le 52 carte di un mazzo, disposte a faccia in su sopra un tavolo; Dario può scambiare tra loro due carte e fatto ciò ha terminato la sua parte nel gioco. A questo punto entra nella stanza Mario, che si ritrova le carte, come lasciate da Dario, ma girate a faccia in giù. Il mago allora pronuncia il nome di una carta, e Mario può scoprire al massimo 26 carte per trovarla; se vi riesce, i due sono liberi, altrimenti la morte li attenderà. Se foste nei panni di uno dei due amici (e non foste masochisti) sapreste suggerire una strategia che vi garantisca di salvarvi?

Esercizio Sia σ una permutazione dell'insieme $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Si dimostri che esistono due permutazioni σ_1 e σ_2 dello stesso insieme A tali che $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \text{id}$.

Esercizio Si dimostri che se $n \in \mathbb{N}$ ha $p - 1$ cifre tutte uguali ad 1, con p primo diverso da 2, 3, o 5, allora n è divisibile per p .

Problemi a risposta numerica

Consideriamo tutti ben ovvio il fatto che provando tutte le possibili risposte ragionevoli, durante una gara, abbia come esito quello di individuare la risposta corretta. Tuttavia ci permettiamo di far notare la poca efficienza a livello di classifica di questa strategia. Sarebbe decisamente più opportuno invece ragionare sul problema e arrivare a una soluzione "dimostrata".

Esercizio Si trovi il resto di 2^{1990} quando viene diviso per 1990.

Esercizio Si consideri la permutazione su $\{1, 2, \dots, 12\}$ così definita:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 7 & 8 & 3 & 1 & 9 & 4 & 2 & 5 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Si consideri poi $\tau = (1, 11, 12)(6, 10, 9)$. Si dia come risposta il minimo m intero tale che $\sigma^m = \tau^{-1} \sigma \tau$. Può essere decisamente utile avere sott'occhio la scomposizione in cicli disgiunti di $\sigma, \sigma^2, \sigma^5, \sigma^7$

Esercizio Maga Magò ha un mazzo di 52 carte, disposte in pila, con il dorso in alto. Magò separa il mazzetto costituito dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge, e lo mette sotto la pila. Ora tutte le carte sono nuovamente in pila, ma non tutte hanno ancora il dorso in alto: le sette in fondo sono girate al contrario. Magò ripete l'operazione precedente finché non si verifica di nuovo che tutte le carte hanno il dorso in alto. In totale quanti mazzetti di 7 carte ha girato Magò?

Esercizio Calcolare le ultime due cifre di $^{2019}2019$. Si noti che $^a b$ è la forma compatta per b tetratto a , ovvero $\underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{b \text{ volte}}$