OliCommunity - Combinatoria

Roberto Lorenzi & Lorenzo Proserpio

16 Ottobre 2020

"- Barbossa: Non è possibile!
- Jack: Non è probabile..."
I pirati dei Caraibi - La maledizione della prima luna

Presentazione

Presentazione anche detta *disclaimer*, visto che siete ormai veterani dei corsi olimpionici è anche ora che iniziate a vedere un poco di formalismo, non lasciatevi spaventare da simboli o termini *oscuri* presenti nella parte di teoria, non sono nient'altro che modi difficili per sintetizzare concetti molto intuitivi e la sintesi non è sempre un dono, tolto quando Marco vi attacca una pezza da 45 minuti sull'esistenzialismo. Premesso ciò, in questa lezione ripasseremo molto velocemente gli aspetti basilari della combinatoria e vedremo la probabilità condizionata e alcuni modelli probabilistici discreti.

Teoria

Ripassino

- **Permutazioni:** il numero di modi in cui posso disporre n oggetti di cui r uguali e s uguali tra loro in n posti.

$$\frac{n!}{r!s!}$$

- **Disposizioni:** il numero di modi in cui posso disporre r oggetti estratti da n.

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

- **Combinazioni:** il numero di modi in cui posso disporre r oggetti estratti da n senza interessarsi dell'ordine.

$$\binom{n}{r}$$

- **Principio di inclusione-esclusione:** Sia A un insieme finito, denotiamo con $|A|$ il numero dei suoi elementi. Sia $\{A_j\}_{j=1,\dots,n}$ una famiglia di n insiemi, allora:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} \left|\bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k}\right|$$

Probabilità condizionata

- **Probabilità di A dato B**: la probabilità che succeda A sapendo che B è già successo.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- **Teorema di Bayes:** data $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ partizione ammissibile dello spazio degli eventi, sia A evento tale che $P(A) > 0$, allora:

$$P(E_j|A) = \frac{P(A|E_j)P(E_j)}{P(A)}$$

Principali modelli probabilistici discreti

Esperimento: prove ripetute ed indipendenti con probabilità di successo ad una singola prova p.

- **Binomiale (Bernoulli):**

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- **Binomiale Negativa (Pascal):**

$$P(X_r=k)=\binom{k+r-1}{r-1}=p^r(1-p)^k$$

- **Geometrica:**

$$P(X=k)=p(1-p)^k$$

Esperimento: estrazioni ripetute da una famiglia finita.
Scegliamo n oggetti senza rimpiazzo da $N=N_1+N_2$, con N_1 oggetti con una certa caratteristica e $(N-N_1)$ con un'altra caratteristica. Sia $n<N_1$. Il successo corrisponde all'estrazione di un oggetto tra gli N_1 .

- **Ipergeometrica:**

$$P(X=k)=\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Problemi - Riscaldamento

1. Quanti sono i sottoinsiemi di $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, che non sono sottoinsiemi né di $B=\{0,1,2,3,4,5\}$ né di $C=\{3,4,5,6,7,8,9\}$?
2. In quanti modi è possibile scrivere il numero 11 come somma ordinata di almeno due addendi positivi? (N.B. 3+8 e 8+3 sono da considerarsi due modi diversi).
3. Ai corsi Oli c'erano 200 partecipanti (*assolutamente non utopico*). Di questi, 150 si conoscevano già tra di loro, mentre gli altri 50 non conoscevano nessuno. Alla prima lezione quelli che già si conoscevano si erano tutti abbracciati, mentre quelli che non si conoscevano si sono presentati e si sono scambiati una stretta di mano (*Testo scritto prima del DPCM del 9 marzo 2020*). Quante furono le strette di mano?
4. Le uniche parole che sa pronunciare un Berry-stanchino sono *baba*, *bubu*, *popu* e *papa*. Quando forma frasi di esattamente tre parole (anche uguali tra loro) e non è in grado di pronunciare la parola *popu* dopo la parola *baba*. Quante diverse frasi può dire lo stanchino Berry?
5. Roberto e Jacopo giocano al seguente gioco: a turno lanciano un dado a sei facce finché non esce il numero 6, quando ciò accade l'ultimo ad aver lanciato il dado perde. Se il primo a lanciare il dado è Roby, qual è la probabilità che vinca Pollo?
6. Lorenzo ha un mazzo formato da 5 carte di cuori e 5 carte di picche. Dopo averle mescolate ne scopre a caso cinque mettendole ordinatamente in fila. Qual è la probabilità che sia le carte di cuori che le carte di picche scoperte siano vicine tra loro?
7. Quanti sono i numeri interi positivi minori di 1000 divisibili per almeno uno dei seguenti interi $\{7,11,23,37\}$?

Problemi - Probabilità condizionata

1. Dimostrare che se $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)>0$ allora vale la seguente proprietà: $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)$ $P(A_3|A_2\cap A_3)...P(A_n|A_{n-1}\cap...\cap A_1)$.
2. Si lancia ripetutamente un dado equilibrato, fino al momento in cui si ottiene un 6 per la prima volta.
   - Qual è la probabilità che il 6 esca per la prima volta al terzo lancio, sapendo che non è uscito al primo lancio?
   - Qual è la probabilità che il 6 esca per la prima volta al secondo lancio, sapendo che il primo 6 esce dopo un numero pari di lanci?
3. **(Paradosso delle tre carte)** Un'urna contiene tre carte: una di esse ha entrambi i lati neri, una entrambi i lati bianchi, l'ultima ha un lato nero e uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati: è nero. Qual è la probabilità che il secondo lato sia nero?
4. **(Urna di Polya)** Supponiamo che un'urna contenga 1 pallina rossa e 1 pallina bianca. Una pallina è estratta e se ne guarda il colore. Essa viene poi rimessa nell'urna insieme ad una pallina dello stesso colore (estrazione con rinforzo). Sia R_i l'evento "all'i-esima estrazione viene estratta una pallina rossa" e sia B_i l'evento "all'i-esima estrazione viene estratta una pallina bianca". Si calcolino:

- $P(R_2)$ e $P(R_3)$.
- Sapendo che la seconda estratta è una pallina rossa, è più probabile che la prima pallina estratta sia stata rossa o che sia stata bianca?

5. Un'urna contiene 2 palline rosse e 4 nere. Due giocatori Marco e Davide giocano nel modo sequente: le palline vengono estratte ad una ad una e messe da parte. Marco vince se l'ultima pallina è rossa, altrimenti vince Davide. Calcolare:
   - la probabilità che Marco vinca;
   - la probabilità che Marco vinca e che la prima pallina estratta è rossa;
   - la probabilità che Marco vinca sapendo che la prima pallina estratta è rossa.

Problemi - Probabilità discreta

1. La super tuta di Marco (che per una volta non è quella del Majo) è dotata di 5 sensori ancora in fase sperimentale. Ogni sensore ha probabilità $\frac{1}{2}$ di rompersi ogni giorno, indipendentemente dal funzionamento degli altri sensori e dai giorni che sono passati. Qual è il numero medio di giorni che impiegheranno a rompersi tutti i sensori?
2. In un'urna ci sono 10 biglie, di cui 6 blu e 4 rosse. A ogni minuto viene estratta una biglia e poi rimessa nell'urna. Qual è la probabilità che, nei primi 5 lanci, esattamente 2 biglie estratte siano blu?
3. Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 22 figurine (tutte diverse), tra le quali naturalmente ve ne possono essere alcune che egli già possiede. Qual è la probabilità che tra le figurine appena comprate ve ne siano almeno 20 che già possiede?

Il paradosso di Monty Hall - Per casa, ma non per caso...

In un gioco televisivo viene messo in palio 1 milione di euro. Per vincerlo il concorrente deve indovinare fra tre pacchi qual è quello che contiene l'assegno. Il concorrente sceglie a caso un pacco.

- Quanto vale la probabilità che il pacco scelto contenga il premio?

A questo punto sul banco son rimasti due pacchi ed il conduttore, che ne conosce il contenuto, ne apre uno vuoto, offrendo al concorrente la possibilità di cambiare il proprio pacco con quello rimanente. Calcolare la probabilità di vincere usando una delle seguenti strategie:

- conservando il pacco scelto inizialmente,
- cambiando pacco,
- giocando a testa o croce fra le due strategie.

Da assidui spettatori sapete che, quando i due pacchi rimasti sono entrambi vuoti, quello di destra viene aperto con frequenza p.

- Quanto vale la probabilità che il pacco scelto inizialmente contenga il premio, sapendo che il conduttore ha aperto il pacco di destra?

Per la variante domenicale del gioco vengono cambiate le regole: il conduttore non sa quale pacco contenga l'assegno e, dopo la scelta del concorrente, apre a caso uno dei due pacchi rimanenti. Se il conduttore trova l'assegno, questo viene devoluto in beneficenza, se non lo trova, il gioco procede offrendo al concorrente di riscegliere un pacco fra i due rimanenti.

- Quanto vale la probabilità che il pacco scelto inizialmente contenga il premio, sapendo che il conduttore ha aperto il pacco rimanente di destra e che questo si è rivelato vuoto?