CorsoOli - Squadre

Marco Cattazzo & Lorenzo Proserpio

26 febbraio 2020

1 Prefazione

Scopo di questo incontro è aiutare te e i tuoi compagni a individuare i tuoi punti di forza tra le "materie" olimpioniche. Ricordiamole:

- punti, rette, circonferenze $\Longrightarrow$ *geometria*
- numeri interi, divisibilità $\Longrightarrow$ *teoria dei numeri*
- numeri reali, polinomi, funzioni $\Longrightarrow$ *algebra*
- contare, giochi, altro $\Longrightarrow$ *combinatoria*

È importante, ai fini di un buon lavoro di squadra, conoscere i punti forti e le debolezze dei tuoi compagni, soprattutto per chiedere un consiglio, un controllo in caso di necessità a chi è un po' più esperto di te in quell'argomento. Accanto al titolo degli esercizi può essere utile annotarsi la tipologia di problema, in modo da capire subito, a colpo d'occhio, di che tipo di problema si tratta, senza dover stare ogni volta a rileggere tutto il testo. Prima però...

2 Test di autovalutazione

Prima del test, mi sembra di sentirmi più a mio agio con:

◯ *geometria*
◯ *teoria dei numeri*
◯ *algebra*
◯ *combinatoria*

A1. Ruffini, questo sconosciuto!
siano a, b, c le radici del polinomio $p(x) = 2x^3 + 11x^2 - 427x + 414$. Si determini p(a+b+c)

A2. Polinomi irriducibili... o quasi
scomponi in $\mathbb{R}$ il seguente polinomio, sapendo che la somma di due delle radici è 4:

$$p(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$$

Indica come risultato il prodotto dei coefficienti dei fattori del polinomio

C1. La torre di Radice
Sul giardino a forma di scacchiera 8×8, la Regina Rossa ordina alla Torre di spostarsi dalla casella d'angolo in cui è posizionata nella casella d'angolo opposta, in modo tale che si trovi su questa ultima dopo esattamente 6 mosse. Inoltre, ordina che ad ogni mossa la torre cambi direzione svoltando a sinistra di $90°$ (il segmento individuato dalla mossa successiva forma un angolo di $270°$ rispetto al segmento della precedente). Ogni mossa della Torre consiste nel percorrere qualsiasi distanza non nulla lungo le righe o le colonne della scacchiera. quanti sono i percorsi possibili per soddisfare gli ordini della Regina?

C2. Turisti Galattici
Nell'universo di Pi-Zone, ogni punto è rappresentato da una matrice 2×2 di reali positivi. Una persona può teletrasportarsi dal punto M al punto M' moltiplicando una riga oppure una colonna per un numero reale. Per esempio, è possibile teletrasportarsi da $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}$ e poi a $\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 6 & 80 \end{pmatrix}$. Una *Attrazione Turistica* è un punto dove ognuna delle entrate della matrice associata è $1, 2, 4, 8$ oppure 16. Una compagnia vuole costruire un hotel in determinati punti tali che da ogni attrazione turistica sia accessibile almeno un hotel teletrasportandosi, anche più volte. Qual'è il minimo numero di hotel necessari?

G1. Pocket Temple
Il mini-tempio di Mathena è formato da una base quadrata di lato 2 m, al cui interno stanno due colonne uguali, ognuna con base un cerchio. Quanti millimetri può misurare, al massimo, il raggio delle due colonne?

G2. Quadriforza
Il simbolo della Quadriforza si ottiene tramite un processo chiamato quadratizzazione di un poligono. Dato un poligono iniziale, si costruisce su ogni suo lato un quadrato esterno al poligono. Ora si considerano i due quadrati costruiti su ogni coppia di lati consecutivi, e si unisce con un segmento i due vertici, uno per quadrato, non appartenenti al poligono iniziale e più vicini tra loro: i lati più esterni così ottenuti formano un poligono più grande. Per esempio, partendo da un triangolo equilatero di lato 4, Unlink lo quadratizza e ottiene un esagono. Non contento, quadratizza anche questo: quanto vale l'area della figura ottenuta?

T1. L'incontro
Nel Maggio di moltissimi anni fa, diversi matematici si ritrovarono in una locanda; si accorsero subito di essere esattamente tanti quanti gli interi n, compresi tra 100 e 10000, tali che il loro fattoriale $n!$ è un multiplo di 2^{n-1}. Dopo essersi contati, decisero che erano nel giunto numero per intraprendere il pellegrinaggio alla tomba di Archimede. Quanti erano?

T2. Come finisce?
Trova le ultime tre cifre di 7^{9999}.

Dopo il test, mi sembra di sentirmi più a mio agio con:

◯ *geometria*
◯ *teoria dei numeri*
◯ *algebra*
◯ *combinatoria*

3 Simulazione di gara

1. Semplici sommatorie □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Trova la somma delle cifre in base 10 della sommatoria:

$$5\sum_{k=1}^{99} k(k+1)(k^2+k+1)$$

2. Crescite irregolari □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Radice si accorge improvvisamente che sta ricominciando a crescere. Tuttavia non si tratta di una crescita graduale. Radice è cresciuta in sei passi distinti, e ogni volta di un multiplo intero dell'altezza precedente. È possibile che durante qualche passo questo multiplo fosse 1. Prima del primo passo era alta esattamente un cubito, e dopo il sesto era alta 12! cubiti. In quanti modi diversi può essere cresciuta Radice?

3. Divis. non scontata □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Trova tutti gli interi positivi per cui $2^n + n \mid 8^n + n$ e scrivi come risultato la somma dei valori assoluti di tali interi.

4. Cifre amare □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*
Si consideri il polinomio $2x^3 - 11x^2 + 4x + 6$ e siano a, b, c le sue radici. Sia poi

$$D_k \stackrel{df}{=} (a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b))^k$$

e sia k_1 il più piccolo valore intero positivo di k tale che la prima cifra da sinistra di D_k sia 7, e k_2 il più piccolo valore intero positivo di k tale che la prima cifra da sinistra di D_k sia 9. Calcolare $k_1 \times k_2$

5. Geometria Bogon □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

I Bogon hanno scoperto i due autostoppisti sulla loro nave! Ora il sovrintendente Krylov-Bogonlyubov li ha costretti a risolvere un problema della terribile Geometria Bogon, la seconda peggiore di tutto l'universo. Hanno di fronte un triangolo ABC con $AB = 7623$ e $BC = 8000$. Detto M il punto medio di BC, sono stati costretti a scegliere punti D,E sui segmenti AC,AB rispettivamente, in modo che $ABMD$ e $ACME$ siano ciclici. Per liberarsi, devono trovare il massimo valore di AC tale che $BCDE$ sia ciclico. Qual è questo valore?

6. Olimpiadi □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Pochi sanno che, come il loro equivalente sportivo, anche le Olimpiadi della Matematica furono inventate nell'antica Grecia; esse erano intitolate, giustamente, agli dei dell'Olimpo della Matematica. La specialità dei Greci era la geometria; difatti si incontravano esercizi come questo: "Sia ABC un triangolo acutangolo con $AC > CB$. Siano CD la mediana uscente da C,CH l'altezza relativa alla base AB, E e F i punti di intersezione della perpendicolare ad AB passante per D rispettivamente con la parallela ad AB passante per C e il lato AC. Sapendo che $HB = DH$ dire quanto vale il rapporto tra le aree dei triangoli HBC e CEF". E voi sapreste risolverlo?

7. Problema Conflittuale □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

4 punti vengono scelti all'interno di un rettangolo 3x4. Dimostra che tra questi ce ne sono due con distanza $\leq \frac{25}{8}$.

8. Lorenzo si incarta □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Lorenzo ha in mano le carte da 1 a 10 ordinate in ordine crescente. Prima considera le carte da 1 a 3 e le ridispone a piacere in uno dei sei modi possibili (può anche lasciarle ordinate così come sono). Considera poi le carte dalla posizione 2 alla posizione 4, e ripete il procedimento. Per esempio, la sua prima mossa potrebbe comporre l'ordine 3,2,1,4,5,.., mentre la seconda 3,4,2,1,5,6,... .Continua finchè ha ridisposto le carte in posizione 8, 9 e 10. Determina il numero di possibili ordinamenti che Lorenzo può ottenere.

9. Il quadrato che quadra □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Si dica per quanti valori di n: $n^2 + 340$ è un quadrato.

10. Accettansi soluzioni □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Trova tutte le soluzioni intere di $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ e scrivi come risultato la somma (algebrica) di tutte le soluzioni.

11. Polinomi Particolari □*Alg* □*Comb* □*Geom* □*Nt*

Quanti sono i polinomi non nulli $p(x)$ di secondo grado che hanno come radici i numeri 3 e 4, i cui coefficienti sono tutti numeri interi relativi minori di 100?