Gara a Squadre - Simulazione

Filippo Beretta, Marco Cattazzo, Davide Ferloni & Lorenzo Proserpio

29 Novembre 2019

PROBLEMI

NOTA: I problemi dall'1 al 10 non possono essere svolti dai membri della squadra che frequentano il triennio.

1. **FERLO POLLICE VERDE** Il Saggio Ferlo, unico tra i responsabili della gara a squadre ad aver mai sostenuto un esame di Chimica, nella notte dell'ultimo Capodanno ha deciso di mettere a frutto le sue conoscenze piantando nel suo giardino un seme di una pianta sconosciuta. Analizzando fino ad ora la crescita dello stelo Ferlo ha rilevato che:

   - E' cresciuto di 3 millimetri il terzo giorno, il sesto, il nono e così via nei giorni multipli di 3 dalla semina;
   - E' cresciuto di 2 millimetri il secondo giorno, il quarto, l'ottavo e così via nei giorni pari, ma non multipli di 3 dalla semina;
   - E' cresciuto di 1 millimetro negli altri giorni.

   Determinare, se le cose continuano allo stesso modo, quanti millimetri sarà alto lo stelo nella notte del prossimo Capodanno (si consideri l'anno non bisestile).

2. **LA FINALISSIMA INTERNAZIONALE** Marco, Ferlo, Prose, Dade, Berry e Fra devono accompagnare i ragazzi della squadra del Majorana alla finalissima internazionale. A causa di alcune incompatibilità di carattere decidono di viaggiare a gruppi di 2, usando mezzi di trasporto diversi: aereo, treno, bus. Fra viaggia con Dade. Il Rispettabile Marco, che è un fighetto, prende l'aereo. L'Incosciente Prose non vuole assolutamente viaggiare con il Mago della Dialettica Berry, né prendere l'aereo. Il Saggio Ferlo non viaggia in treno. Determinare con quali mezzi viaggeranno i 6 allenatori.Per scrivere la risposta, usare la convenzione che $aereo = 1$, $treno = 2$, $autobus = 3$ ed indicare, da sinistra verso destra, i mezzi scelti da Fra, dall'Incosciente, dal Mago della Dialettica e dal Saggio.

3. **IL BARATTO** L'Incosciente Prose e Berry, Mago della dialettica, hanno convenuto che le una confezione di penne vale 560 centesimi di euro ed una scatola di gessetti ne vale 390.Poiché entrambi dispongono di tante confezioni di penne e tante scatole di gessetti, ma niente denaro contante, hanno deciso di usare gli oggetti come moneta di scambio. Ad esempio, se il primo deve al secondo 50 centesimi di euro, lo paga con 3 scatole di gessetti e si fa dare come resto 2 confezioni di penne, saldando così il debito con il passaggio di mano di 5 oggetti.Determinare il minimo numero di oggetti che devono passare di proprietà (pagamento più resto) per saldare un debito di 20 centesimi di euro.

4. **QUANTE SCARPE!** In una stanza buia ci sono 2 ceste, che indicheremo con A e B. La cesta A contiene 5000 scarpe destre: 1000 bianche, 1000 rosse, 1000 verdi, 1000 viola e 1000 gialle. La cesta B invece contiene 5000 scarpe sinistre, ma sempre degli stessi 5 colori della cesta A e nelle stesse quantità per ciascun colore.Il Saggio Ferlo deve prendere un paio di scarpe (una scarpa destra e una scarpa sinistra) che abbiano entrambe lo stesso colore ma, essendo buio, non può vedere i colori delle scarpe che prende. Ferlo, che è di fretta, decide quindi di prenderne un numero N_A dalla cesta A e un numero N_B dalla cesta B in modo che, tra le scarpe che ha preso ci siano necessariamente una scarpa destra ed una scarpa sinistra con lo stesso colore. Qual è il minimo valore che può avere $N_A + N_B$?

5. **SOGNO DI UNA NOTTE PRE ANALISI 1** Il Rispettabile Marco, dopo un'intensa giornata passata a preparare il parziale di Analisi 1, è pronto a ad andare a dormire. Rileggendo gli appunti, trova però un ultimo problema assegnato, quasi per scherzo, dalla prof C. da risolvere: "trovare il più piccolo intero con esattamente 30 divisori". Preso dalla sfida, rinuncia anche alle poche ore di sonno rimaste prima dell'esame per risolverlo. Riuscireste a dare una mano al povero Marco cosicché possa andare a dormire?

6. **GRIGLIATA NO SNITCH** Alla consueta grigliata tra i responsabili del corso delle olimpiadi di matematica, il Mastro Grigliaio Ferlo chiede al Berry quante salsicce debba preparare in totale. Il buon Berry, che non vuole certo lasciare Ferlo tranquillo, risponde che il numero richiesto è il prodotto della cifra delle unità e delle decine di 3^{2011}. Aiutate il Saggio Ferlo a scoprire quante salsicce debba grigliare.

7. **DO YOU MEAN ALGEBRA LINEARE?** Il Mago della Dialettica Berry sta aspettando da almeno tre settimane l'esito del suo esame parziale di Geometria 1, ma ancora tutto latita. Un giorno finalmente la prof C. si avvicina al Berry e gli sussurra che il suo voto al parziale corrisponde al numero di divisori dispari di 54054 che siano divisibili per 3. Sapreste aiutare Berry a scoprire il suo voto?

8. **LE GARE IN CASSAFORTE** La prof. Proserpio, dopo aver fotocopiato i testi della gara, ha deciso di rinchiuderli in una cassaforte per non permettere a nessuno di leggerli prima del dovuto. La combinazione della cassaforte della è formata da cinque cifre. Marco, incaricato di raccogliere le copie, ricorda che:

   - La prima cifra è 1;
   - Tutti i numeri formati considerando ogni coppia di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 2;
   - Tutti i numeri formati considerando ogni terna di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 3;
   - Tutti i numeri formati considerando ogni quaterna di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 4^2;
   - La combinazione, letta come numero di cinque cifre, è divisibile per 5.

   Scrivere nell'ordine le ultime quattro cifre della combinazione.

9. **I CASSETTI IN SALA PROFESSORI** Il professore ha chiesto all'Incosciente Prose di ritirare un documento dal suo cassetto in aula docenti. Quando Prose arriva si trova davanti un'enorme pannello con i cassetti numerati di forma quadrata con un numero dispari di cassetti su ciascun lato. Su ciascun cassetto è scritto un numero intero positivo. Prose nota subito una stranezza: i numeri sono disposti a spirale. Sul cassetto al centro c'è il numero 1, sul cassetto a sinistra di questo c'è il numero 2, sul cassetto sotto a quest'ultimo c'è il numero 3, sul cassetto a destra di questo il numero 4, e così via, finché il numero più grande compare sul cassetto in alto a sinistra. Per essere certo di memorizzare la situazione, cerca un'altra proprietà per caratterizzare la situazione e si accorge che la disposizione dei numeri è tale che il valore assoluto della differenza fra le somme dei numeri sulle due diagonali è il massimo possibile inferiore a 2011. Quanti sono i cassetti?

10. **21** I lugubri corridoi della Facoltà di Matematica pullulano di giocatori d'azzardo che si divertono a giocare il gioco della doppia testa-e-croce, con una moneta, tra due squadre di due giocatori. Oggi la squadra di Berry e Dade sfida quello di Prose e Marco, tutti e 4 noti ludopatici. Il gioco funziona nel seguente modo: un giocatore della prima squadra lancia la moneta: se esce croce, è eliminato dal gioco; se esce testa, non succede nulla. Ora, un giocatore dell'altra squadra lancia una moneta: se esce croce, è eliminato; se esce testa, elimina uno dei giocatori della prima squadra. Il gioco passa di nuovo alla prima squadra e si continua come dall'inizio. Perde la squadra che finisce prima i giocatori. Che probabilità ha la prima squadra (Berry e Dade) di vincere?
    Si dia la risposta scrivendo le prime quattro cifre del risultato diverse da 0,1 e 9, nell'ordine in cui compaiono. (Ad esempio, se il risultato fosse 5/7 = 0.714285714..., si dovrebbe scrivere 7428.)

11. **PICCOLO ARTISTA** Disegnando a caso su Desmos il saggio Ferlo nota che il grafico di $log(x)+log(y) = 3$ interseca una circonferenza di raggio $10\sqrt{61}$ centrata nell'origine del sistema di riferimento cartesiano. Si fornisca come risposta la somma delle coordinate (x, y) di tutti i punti di intersezione.

12. **FUNZIONALE INFAME** Visto che a Prose piace vedere la gioia negli occhi dei suoi studenti propone il seguente: sia f una funzione che ad ogni numero intero relativo associa un numero intero relativo. Si sa che, per ogni intero relativo x, si ha $f(-x) + 2 = -f(x)$ e $f(x + 1) + f(-x) = 0$. Indicare il valore di $f(2019)$.

13. **VIVA LA ...GEOMETRIA** Siccome geometria non piace a nessuno vi risparmio il preambolo pseudo-divertente. Sia ω una circonferenza di diametro AB e centro O. Si disegni una circonferenza ω_A che passi per O e A, e un'altra circonferenza ω_B che passo per O e B; inoltre ω_A e ω_B si incontrano in un punto C distinto da O. Si assuma che ω, ω_A e ω_B siano congruenti. Se $CO = \sqrt{3}$, quanto vale il perimetro di ΔABC?

14. **NON E' LA SOLITA...** Marco si sente caritatevole e decide di regalare punti ai suoi studenti; quanto vale il resto della divisione di $2^1 + 22^{11} + 222^{111} + ... + \underbrace{22...222^{11...111}}_{\text{2018 - due e 2018 - uno}}$ per 11?

15. **CARENZA DI CAFFEINA** Marco è pieno di monetine a causa del guasto alla macchinetta del caffè e stranamente poco indaffarato questo pomeriggio, dunque decide di occupare il tempo giocando nel modo seguente: Dispone in fila un certo numero di monete ognuna delle quali può mostrare Testa (T) oppure Croce (C). Per ogni moneta che mostra Testa conta quante monete che mostrano Croce ci sono prima di essa (non solo quelle immediatamente prima, ma tutte). Fa la somma dei numeri ottenuti e ottiene 136. Ripete la stessa operazione sulle Croci, contando per ogni Croce quante sono le teste precedenti. Ottiene 153. Sapendo che le prime due monete presentano facce diverse si determini il numero totale di monete.

16. **SICURAMENTE NON PROSE** Prima di partire a risolvere si indovini chi ha proposto il seguente problema: se $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 2x + 1$ quanto vale $f(-2021) + f(2019)$? *(Se la risposta eccede le 4 cifre si forniscano solo le 4 cifre meno significative).*

17. **ALLA FACCIA DI MARCO** Nonostante questo problema sia stato vivamente sconsigliato dal rispettabile Marco, l'incosciente Prose lo sfida e mette comunque il seguente problema. Sia dato un cubo di lato 1 nello spazio positivo (x^+, y^+, z^+). Con un vertice del cubo coincidente con l'origine $(0, 0, 0)$. Sia ora $A = (1, 1, 0)$ un vertice e $C = (0, 0, 1)$ un altro vertice. Sia ora $B = (1, 0, t)$ con $t \in (0, 1)$. Sia ora il piano passante per ABC, esso taglia il cubo ne punto $D = (0, 1, k)$. Si trovi per quale valore di t l'area di $[ABCD]$ è minima. (*Si dia come risposta la somma di t e dell'area di $[ABCD]$ troncati per difetto al primo decimale.*)

18. **SIMPATICI ESERCIZI PRECORSO** L'egregio prof. Z. da' un'idea curiosa per un problema. Sia dato un $36-agono$ regolare, si prendano 3 vertici distinti, qual è la probabilità che il triangolo individuato sia rettangolo? (*Si dia come risposta la somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*)

19. **XYXY... NON ERA PROPRIO COSI'** Il buon Prose vi aiuta e vi dice che nessun intero della forma $\overline{xyxy}$ (scritto in base 10) può essere un cubo perfetto (e stavolta non ha fatto un claim a caso, ma giura di saperlo dimostrare) . Trovare la più piccola base $b > 1$ per cui esiste un cubo perfetto della forma $\overline{xyxy}$ (scritto in base b) e dare come risposta tale cubo rappresentato nella base b.

20. **EASY MONEY** Sia dato un triangolo ΔPQR di area 1, il Berry sceglie un punto $X \in PQ$. Il saggio Ferlo sceglie un punto $Y \in QR$. Ora tocca ancora al Berry scegliere un punto $Z \in PR$. L'obbiettivo del Mago della Dialettica Berry è quello di massimizzare l'area di ΔXYZ. Qual è la più grande area che si può assicurare? (*Si dia come risposta le prime quattro cifre decimali.*)