Summary

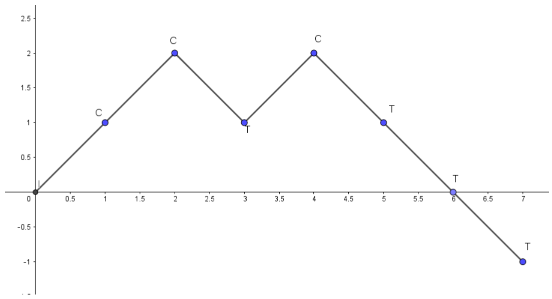
Con la sua moneta ben equilibrata, il gioco *Testa o Croce* sembra l'archetipo del gioco paritario. La realtà smentisce questa impressione frettolosa: la bella simmetria iniziale spesso volge rapidamente a vantaggio esclusivo di uno dei due giocatori.

Introduzione

Il primo esempio quando capita di parlare di probabilità è sicuramente quello del *Testa o Croce*; tutti sappiamo che, mettendoci in condizioni ottimali (ovverosia quasi impossibili), se una moneta non truccata viene lasciata cadere la probabilità che cada su *Testa* è $1/2$, esattamente come quella che cada su *Croce*. Dunque se iniziaste a giocare con me al seguente gioco: "Io ricevo 1 euro da voi se esce *Testa*, voi ricevete 1 euro da me se esce *Croce*" sareste tutti d'accordo che, in modo del tutto casuale, io o voi ci troveremmo in vantaggio sull'altro ad un certo punto (ovvero uno dei due avrà un bilancio positivo) e che, eventualmente, la situazione si possa ribaltare quando la fortuna cambia campo. La questione allora è quella di determinare la porzione del tempo durante il quale ogni giocatore conduce il gioco. Essendo il gioco perfettamente simmetrico ci si aspetterebbe che, giocando per un lasso di tempo relativamente lungo, ogni giocatore conduca il gioco per circa il 50% del tempo, tuttavia questo è solo un'intuizione e un'intuizione non è una dimostrazione matematica. Di fatto Paul Lévy nel 1939 dimostra un teorema noto con il nome *Legge dell'arcoseno* (in realtà sono tre) che dimostra come quest'intuizione in realtà sia sbagliata.

Linea Spezzata

Si può dare una rappresentazione grafica della situazione del gioco con l'aiuto di una spezzata che parte dall'origine O e che si costruisce a poco a poco salendo di un gradino ogni volta che la moneta cade su *Croce* e scendendo di un gradino quando cade su *Testa*. Così, se i primi lanci forniscono la sequenza CCTCTTT, la spezzata è la seguente:



Sull'asse delle ordinate si ha il vostro bilancio (se siete in positivo state vincendo voi, se siete in negativo sto vincendo io), mentre su quello delle ascisse vi è il numero dei lanci. Poiché i lanci della moneta sono indipendenti gli uni dagli altri e la moneta è equilibrata, tutte le spezzate che si possono costruire fermandosi al lancio n hanno la stessa probabilità. Il loro numero è piuttosto facile da calcolare. Ad ogni tappa del tracciato, si ha la scelta tra due direzioni. Dunque ad n lanci il numero di spezzate è 2^n e la probabilità di ciascuna di esse è allora $1/2^n$. Data una spezzata, possiamo considerare equivalenti lo studio del tempo in cui essa si trova al di sopra dell'asse delle x e lo studio del numero di segmentini che la costituiscono e che si trovano sulla metà superiore del piano, esclusi quei segmenti con l'estremità destra o sinistra sull'asse delle x.

Quanti punti al di sopra dell'asse delle ascisse?

Fissiamo il numero di lanci a $2n$ (per semplicità nei calcoli). Si dimostra che il numero di spezzate aventi esattamente $2k$ segmenti al di sopra dell'asse delle x è uguale a:

$$C_{2k}^{k} C_{2(n-k)}^{n-k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

A tale conclusione si arriva attaverso il *principio di riflessione* (si veda l'Appendice). Dividendo la quantità precedente per 2^{2n} (che è il numero delle spezzate), si ottiene la probabilità che voi conduciate $2k$ volte su un gioco che dura un tempo $2n$. Tuttavia se consideriamo tempi di gioco sufficientemente lunghi (ovvero sia un numero elevato di lanci), si può approssimare la probabilità ottenuta con espressioni più semplici utilizzando la formula di Stirling, che riporto per completezza in ambo le versioni:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1 \quad \text{o equivalentemente} \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

di cui lascio una dimostrazione nell'appendice.

Quantifichiamo

Utilizzando la formula di Stirling arriviamo ad approssimare la probabilità che voi conduciate il gioco esattamente $2k$ volte su un gioco di $2n$ lanci di *Testa o Croce* con la quantità seguente:

$$P_{2n}(2k) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Ora se attuiamo la sostituzione (semplicemente riscaliamo n) $n \mapsto 1$ e consideriamo un numero elevato di lanci possiamo esprimere la probabilità che voi siate in vantaggio per una certa percentuale di tempo $[a,b] \subseteq [0,1]$ a partire dalla porzione di piano cartesiano sottesa dal grafico della funzione $f(x)$:

$$x \longmapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

(tale funzione è una funziona valida per essere una densità di probabilità su $[0,1]$ in quanto è continua quasi ovunque, positiva ed integrabile su $[0,1]$ e il valore dell'integrale su $[0,1]$ risulta 1). Bene, non ci resta da fare altro se non svolgere i conti applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{b} - \arcsin\sqrt{a})$$

Ed ecco spiegato il nome del teorema di Lévy, di fatto spunta fuori inaspettatamente una funzione goniometrica. Ora che sappiamo quantificare il tutto, è tempo di una conclusione.

Conclusione

Inserendo i numeri nella nostra formula otteniamo che vi è una probabilità di circa due terzi che uno dei due giocatori conduca per più del 75% del tempo! Ad aggravare la situazione, si può inoltre dimostrare che il giocatore in vantaggio lo sarà "largamente" per la maggior parte del tempo. La morale della favola è che l'uguaglianza teorica della possibilità non è garanzia di equilibrio a lungo termine e che non sempre l'intuizione e la matematica vanno a braccetto.

Appendice

(1) Ovviamente uno scritto interessante di matematica non è completo senza qualcosa lasciato al lettore. In questo caso vi lascio da dimostrare da soli il *principio di riflessione*. Tale principio afferma che: "Dati due interi positivi a e b, il numero di linee spezzate che hanno come coordinate dei vertici solo coppie di numeri interi, di origine O (per intenderci $(0,0)$ nel piano cartesiano) e che finiscono la loro corsa (dopo $2n$ segmenti) sull'ordinata $(b+a)$ è uguale al numero di linee spezzate che raggiungono come punto finale il punto di ordinata $(b-a)$ essendo passate per un punto di ordinata $-a$". Sembra molto complicato, in realtà basta farsi qualche disegnino e trovare una biiezione tra ogni percorso del primo tipo con uno del secondo (*Hint*: il nome "principio di riflessione" non è casuale).

(2) Approssimazione di Stirling:

Dimostrazione. Ve ne sono innumerevoli, vi offro, a mio avviso quella più immediata. Sappiamo che la funzione Γ interpola i fattoriali. Più precisamente:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{n\ln x - x}\,\mathrm{d}x$$

Operando il cambio di variabile $t = nz$ si ha che:

$$n! = \int_0^\infty e^{n\ln x - x}\,\mathrm{d}x = e^{n\ln n} n \int_0^\infty e^{n(\ln y - y)}\,\mathrm{d}y$$

Dato che $\ln y - y$ è $C^2((0,+\infty))$ ed ha un unico massimo globale in $x_0 = 1$ che appartiene all'intervallo e la sua derivata seconda è $-1/x^2$, sempre minore di zero, possiamo applicare il metodo di Laplace per stimare l'integrale:

$$\int_0^\infty e^{n(\ln y - y)}\,\mathrm{d}y \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n}$$

e dunque

$$n! \sim e^{n\ln n} n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

□

Credits

- P.Deheuvels, *La probabilité, le hashard et la certitude*, Presses Universitaires de France, 1982.
- E.Lesigne, *Pile ou Face*, Ellipses, 2001.