

Branch & Bound per TSP simmetrico

Lorenzo Sciandra, Stefano Vittorio Porta

Anno accademico 2020-2021

Abstract – In questa tesina sarà analizzato e risolto il problema del TSP simmetrico con un Branch & Bound che fa uso degli 1-tree. Dopo la formulazione matematica del TSP si farà vedere come un rilassamento lagrangiano su un insieme di vincoli ci conduca ad un problema molto più semplice da risolvere, polinomiale a tutti gli effetti. Dopo aver mostrato una procedura risolutiva del calcolo dell'1-tree ed uno schema di Branch del problema originario seguirà, a fine della trattazione teorica, un'analisi dell'implementazione effettuata in Java.

1 Introduzione

Il problema del commesso viaggiatore, spesso indicato come **Travelling Salesman Problem** (TSP), è uno dei casi di studio classici dell'informatica teorica e della teoria della complessità computazionale. Il nome nasce dalla sua più tipica rappresentazione: dato un insieme di città, e note le distanze tra ciascuna coppia di esse, trovare il tragitto di minima percorrenza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una ed una sola volta e ritornare alla città di partenza. Al problema TSP è associabile un grafo non orientato $G(V, E)$ con costi c_{ij} associati agli archi, da cui si richiede di determinare un insieme di archi $C^* \subset E$ con costo minimo possibile. Tale insieme C^* deve formare un *ciclo hamiltoniano*, cioè un ciclo che passi una ed una sola volta per ogni nodo del grafo. Il problema che analizzeremo è la versione simmetrica del TSP ossia $c_{ij} = c_{ji} \forall i, j \in V$, e quindi ogni arco è percorribile in entrambe le direzioni spendendo lo stesso costo.

Il TSP è un problema NP-hard, nella precisione NP-completo e per questo algoritmi che lo risolvono all'ottimo richiedono una complessità in tempo più che polinomiale nell'istanza trattata ($P \neq NP$).

Analizzeremo in questa tesina un approccio risolutivo basato sul **Branch & Bound**, che garantisce di trovare l'ottimo del problema in un tempo che può essere esponenziale. L'idea alla base di questa tecnica algoritmica è quella di partizionare con la fase di **Branching** lo spazio delle soluzioni in più sottospazi, non per forza disgiunti la cui unione restituisca però tassativamente la regione iniziale. Avendo a che fare con spazi ridotti questi risulteranno di più facile analisi attraverso l'applicazione della fase di **Bounding**, in cui saranno valutate le soluzioni raggiungibili da una ipotetica ricerca nello spazio degli stati, permettendo di potare interi sottoalberi qualora la migliore soluzione garantita fosse peggiore di quella già ottenuta.

2 Formulazione Matematica

Un ciclo hamiltoniano è tale che su ogni nodo incidano esattamente due archi ed inoltre togliendo un nodo n qualsiasi e i suoi due archi incidenti si ottiene un albero sui rimanenti nodi $|V| - 2$. Una possibile formalizzazione matematica del tsp che tiene conto di questo risulta quindi la seguente:

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} \\
 (1) \quad &\sum_{j \in V, i \neq j} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in V \\
 (2) \quad &\sum_{(i,j) \in E, i,j \neq n} x_{ij} = |V| - 2 \\
 (3) \quad &\sum_{(i,j) \in E(U)} x_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subseteq V \setminus \{n\} : |U| \geq 3 \\
 (4) \quad &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E
 \end{aligned}$$

Il vincolo (1) impone che su ogni nodo $i \in V$ incidano esattamente due nodi, mentre (2) e (3) garantiscono che una volta scelto un nodo n , $V \setminus \{n\}$ risulti un albero e quindi abbia $|V| - 2$ archi e sia privo di cicli nell'albero.

Dato un sottoinsieme di nodi $U \subseteq V$ abbiamo che $E(U) = \{(i, j) \mid i, j \in U\}$. Osservando che ogni ciclo sui nodi in U deve avere $|U|$ archi in $E(U)$, per eliminare i cicli abbiamo inserito il vincolo (3). Il vincolo (4) modella invece il dominio delle variabili decisionali che assumono valore 1 se il corrispondente arco viene inserito nel ciclo hamiltoniano e 0 altrimenti.

Una volta che si ha a che fare con la formulazione matematica del TSP un possibile modo per produrre un rilassamento e quindi un **Lower Bound** al problema potrebbe essere quello di applicare il rilassamento continuo al vincolo d'interezza delle variabili (4).

L'approccio che abbiamo noi adottato prevede invece un rilassamento Lagrangiano sul vincolo (1) che ci conduce al problema di trovare il minimo 1-tree, una volta impostati i moltiplicatori lagrangiani λ_i a 0, ossia eliminando il vincolo (1) per tutti i nodi tranne che per il nodo selezionato n .

3 Rilassamento Lagrangiano

Una volta introdotti dei moltiplicatori lagrangiani λ_i per ogni nodo, portando in funzione obiettivo otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{k \in V} \lambda_k (2 - \sum_{j \in V, k \neq j} x_{kj}) \\
 (5) \quad &\sum_{j \in V, j \neq n} x_{nj} = 2 \\
 (2) \quad &\sum_{(i,j) \in E, i,j \neq n} x_{ij} = |V| - 2 \\
 (3) \quad &\sum_{(i,j) \in E(U)} x_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subseteq V \setminus \{n\} : |U| \geq 3 \\
 (4) \quad &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E
 \end{aligned}$$

Per comodità notazionale abbiamo portato in funzione obiettivo anche il moltiplicatore λ_n per il nodo n , che verrà però impostato a 0. Dato che abbiamo rilassato vincoli di uguaglianza andremo a considerare i migliori moltiplicatori lagrangiani non solo maggiori o uguali a 0, ma anche negativi. Per valori fissati dei vari λ_k il rilassamento lagrangiano è facilmente risolvibile con una procedura che mostreremo a breve, che consente di individuare l'1-tree di costo minimo.

Riscrivendo la funzione obiettivo otteniamo:

$$l(\lambda) = \min \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_i - \lambda_j) \cdot x_{ij} + 2 \cdot \sum_{k \in V} \lambda_k$$

I costi associati agli archi risultano quindi aggiornati:

$$c'_{ij} = c_{ij} - \lambda_i - \lambda_j$$

Da questa riformulazione si può facilmente passare al duale lagrangiano che consisterà nell'individuazione dei valori $\lambda^* = (\lambda_k^*)_{k \in V}$ per cui il valore di $l(\lambda)$ sia il più grande possibile. Un possibile modo di procedere in questa direzione sarebbe quella di partire da possibili moltiplicatori lagrangiani (come $\lambda_k = 0, \forall k$) e poi migliorare la soluzione diminuendo il peso dei nodi λ_i con grado superiore a 2 e accrescere il peso dei nodi con grado inferiore a 2. Una semplice formuletta applicabile potrebbe essere la seguente:

$$\lambda'_i = \lambda_i + 2 - \deg(i) \text{ (grado di } i \text{ nell'1-tree minimo)}$$

4 1-Tree

Come precedentemente accennato una possibile e valida assegnazione dei moltiplicatori lagrangiani è quella di impostarli tutti a 0, andando di fatto ad eliminare i vincoli per ricondurci al problema di trovare l'1-tree di costo minimo.

Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato ed un suo nodo n chiamiamo **1-tree** un sottografo $H = (V, E_H)$ di G con $E_H \subset E$ e con le seguenti proprietà:

1. in E_H ci sono esattamente 2 archi incidenti sul nodo n ;
2. se escludiamo da H il nodo n ed i suoi 2 archi incidenti su di esso ne risulta un albero sull'insieme di nodi $V \setminus \{n\}$. Alternativamente si può affermare che H contiene un ciclo passante per il nodo selezionato n .

Da questa definizione segue che $|E_H| = |V|$.

L'aspetto importante degli 1-tree è che ogni ciclo hamiltoniano risulta un 1-tree, non è invece vero il viceversa. Se indichiamo con S' l'insieme di tutti gli 1-tree calcolabili dato un grafo G e con S la regione ammissibile del TSP, abbiamo che $S \subset S'$. In altre parole il problema:

$$\min_{H \in S'} \sum_{(i,j) \in E_H} c_{ij}$$

risulta essere un rilassamento per il problema del TSP simmetrico e la sua risoluzione restituisce quindi un lower bound per il valore ottimo del problema del TSP.

La formulazione matematica dell'1-tree risulta infatti essere la seguente:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ (5) \quad &\sum_{j \in V, j \neq n} x_{nj} = 2 \\ (2) \quad &\sum_{(i,j) \in E, i, j \neq n} x_{ij} = |V| - 2 \\ (3) \quad &\sum_{(i,j) \in E(U)} x_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subseteq V \setminus \{n\} : |U| \geq 3 \\ (4) \quad &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E \end{aligned}$$

Come si può notare questa risulta identica al rilassamento lagrangiano prima mostrato, una volta impostati i vari $\lambda_i = 0$.

Mostreremo ora la procedura per risolvere in tempo polinomiale il problema del minimo 1-tree.

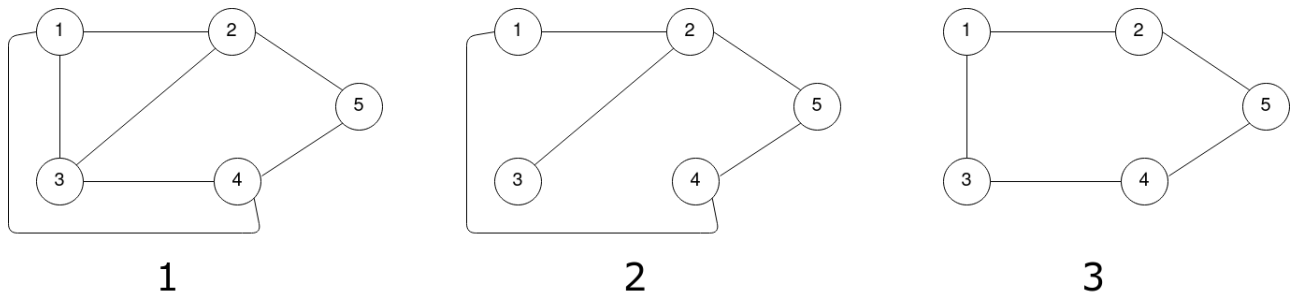


Figura 1 – Nell’immagine 1 è proposta un’istanza di grafo $G(V, E)$ non orientato. Le figure 2 e 3 rappresentano due suoi 1-tree di cui 3 è anche un ciclo hamiltoniano.

5 Calcolo del Lower Bound e Upper Bound

Una semplice procedura per calcolare un 1-tree di costo minimo e generare quindi un **lower bound** al problema del TSP segue i successivi passi:

1. Si calcoli l’MST T sul grafo ottenuto da G scartando il nodo prescelto n e tutti gli archi incidenti su di esso. Sia E_T l’insieme degli archi della soluzione trovata;
2. Si aggiungano ad E_T i due archi (n, k) e (n, h) a distanza minima tra quelli incidenti sul nodo n .
3. Si restituisca l’1-tree $H = (V, E_H)$ con $E_H = E_T \cup \{(n, k), (n, h)\}$.

Il costo della procedura appena proposta risulta dominato dal calcolo dell’MST, risolvibile facilmente con un algoritmo greedy come quello di Kruskal in tempo $O(m \cdot \log n)$. La selezione al passo 2 della coppia degli archi di costo minore è ottenibile invece con una semplice scansione degli archi $O(m)$.

Al costo di un maggiore sforzo computazionale si possono anche calcolare tutti gli 1-tree minimi variando la scelta del nodo n tra tutti i $|V|$ nodi del grafo. Come lower bound complessivo si potrà in questo modo scegliere il migliore ottenuto, ovvero il più grande trovato.

Per quanto riguarda il calcolo e l’aggiornamento dell’**upper bound**, ricordiamo che questo si basa sull’identificazione di soluzioni ammissibili durante l’esecuzione dell’algoritmo. Una volta calcolato un 1-tree se questo risulta anche un ciclo hamiltoniano, ossia ogni nodo presenta grado 2, si può aggiornare l’upper bound se presenta un costo minore di quello per ora trovato. All’inizio del procedimento l’upper bound sarà impostato a $+\infty$.

6 Schema di Branch

Ci occuperemo ora di mostrare come sarà partizionata la regione ammissibile S in più sottoinsiemi. Se non siamo nel caso fortunato in cui la soluzione del rilassamento è un ciclo hamiltoniano, tale soluzione sarà allora un 1-tree che contiene esattamente un sottociclo. Dobbiamo introdurre una regola di suddivisione il cui scopo è impedire il formarsi nei nodi figli di tale sottociclo. Indichiamo con: $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_r, j_r)\}$ gli archi che compongono tale sottociclo. Il primo nodo figlio verrà generato imponendo che l’arco (i_1, j_1) non faccia parte della soluzione, ossia impostando $x_{i_1 j_1} = 0$. Il secondo nodo figlio sarà ottenuto imponendo che sia presente l’arco (i_1, j_1) , ma sia assente l’arco (i_2, j_2) , ovvero impostando $x_{i_1 j_1} = 1$ e $x_{i_2 j_2} = 0$. Il procedimento continua in questo modo fino all’ r -esimo figlio che avrà tutti i primi $r - 1$ archi del sottociclo e non conterrà l’ultimo, quindi $\forall k = 1, 2, \dots, r - 1$ $x_{i_k j_k} = 1$ e $x_{i_r j_r} = 0$.

Ad ogni nodo saranno quindi associati due insiemi:

1. E_0 contenente tutti gli archi che non devono essere considerati;
2. E_1 contenente tutti gli archi che devono essere in soluzione.

Naturalmente sarà anche necessario che $E_0 \cap E_1 = \emptyset$.

Per ogni figlio si dovrà quindi risolvere un sottoproblema del tipo $S(E_0, E_1)$ contenente tutti i cicli hamiltoniani formati sicuramente dagli archi in E_1 e privi degli archi in E_0 . Per il calcolo del lower bound di un sotto problema $S(E_0, E_1)$ si usa la stessa procedura analizzata nel paragrafo precedente imponendo però la presenza degli archi E_1 ed escludendo quelli in E_0 per il calcolo dell'MST e nella scelta dei 2 archi per il nodo n . In particolare si risolverà sempre il problema dell'MST con l'algoritmo greedy di Kruskal, ma inizializzando l'insieme E_T con gli archi in E_1 non incidenti sul nodo n , invece che impostarlo come insieme vuoto. Una volta fatto ciò durante l'esecuzione dell'algoritmo non dovranno essere presi in considerazione gli archi in E_0 . Ottenuto l'albero di copertura T a questi saranno aggiunti i migliori (con costo più basso) archi incidenti in n . Nel caso in cui E_1 contenesse tali archi saranno selezionati altrimenti si sceglieranno i migliori non presenti in E_0 .

Per il branching di un nodo interno, al sottociclo $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_r, j_r)\}$ individuato andranno tolti gli archi in E_1 , che non possono non essere presenti nei figli che saranno generati. Una volta scremato l'insieme di archi si procederà alla stessa maniera.

Con questa regola di branching i nodi figli di un dato nodo continueranno ad essere sottoinsiemi della regione ammissibile del padre.

7 Criteri di chiusura dei nodi

Un nodo dell'albero di branch P_i viene chiuso quando:

1. $\hat{z} \leq LB(P_i)$, ossia quando il lower bound fornito è maggiore del migliore ciclo hamiltoniano per ora trovato, in tal caso il nodo viene **chiuso per bound**;
2. non si riesce a calcolare un 1-tree per il nodo, non c'è soluzione ammissibile per il rilassamento, in tal caso il nodo sarà **chiuso per inammissibilità**;
3. l'1-tree generato dal rilassamento risulta essere un ciclo hamiltoniano, il nodo verrà allora **chiuso per ottimalità**.

Nell'ultimo caso delineato qualora il nodo presentasse anche un costo migliore e quindi minore dell'attuale soluzione trovata, questa verrebbe aggiornata.

8 Analisi dell'implementazione