

The dynamic vehicle routing problem with stochastic customer requests and multiple delivery routes



Lorenzo Sciandra, Stefano Vittorio Porta, Jean-François Côté

Anno accademico 2021-2022

Abstract – In questa tesina è stato analizzato e leggermente esteso il lavoro del Professor [Jean-François Côté](#) riguardo ad un problema di routing dinamico multi-veicolo con clienti stocastici. Il problema analizzato, che sarà di seguito descritto, si presenta oggi in moltissimi contesti reali, soprattutto per quanto riguarda il settore degli e-commerce online, per garantire la consegna di più ordini nello stesso giorno in cui sono stati richiesti: **same day deliver** (es: Amazon Prime, Uber Eats, Glovo, etc.). Il lavoro verte sulla realizzazione di un algoritmo esatto, un Branch & Bound, che permetta di analizzare la qualità delle soluzioni ottenute dall'algoritmo euristico Branch & Regret proposto da Jean-François Côté e dai suoi colleghi.

1 Definizione del Problema

Matematicamente il problema è definibile con un grafo diretto $G = (L \cup \{0\}, A)$ dove L è l'insieme dei nodi o posizioni possibili dei **clienti**, 0 è il **deposito** e A è l'insieme di archi con associati **tempo di viaggio** t_{ij} e **costo** c_{ij} per passare dal nodo i al nodo j .

Viene definito con T l'**orizzonte temporale** ossia le ore lavorative del deposito e quindi l'orario

limite dal quale può partire un **veicolo**.

R è invece l'insieme delle **richieste dei clienti** per i quali dobbiamo caricare dal deposito gli oggetti ordinati per essere consegnati. Di queste generalmente solo poche sono conosciute fin dall'inizio dell'orizzonte temporale, la maggior parte infatti diventeranno note col procedere del tempo, questo è l'aspetto **dinamico** del problema: non tutto è conosciuto a priori.

Ogni richiesta k è caratterizzata da un **release time** r_k che è il tempo nella quale questa diventa nota e da una finestra temporale per la consegna. La finestra è un intervallo $[e_k, l_k]$ i cui estremi rappresentano rispettivamente il primo e l'ultimo possibile tempo di arrivo per servire il cliente k . Se un veicolo arriva prima di e_k deve aspettare fino ad e_k per iniziare il servizio.

Quando eventi futuri risultano conosciuti solo dalla loro distribuzione di probabilità, il problema viene definito **stocastico**. In questo problema distribuzioni di probabilità riguardanti il numero di clienti che chiederanno il servizio, il momento in cui lo faranno, la loro posizione e le finestre temporali sono generate usando dati di scenari passati. Ad esempio è previsto che il tasso di arrivo delle richieste future sia un processo di Poisson con parametro λ_i con i indice del luogo della richiesta.

Per quanto riguarda la consegna abbiamo un numero finito e fisso M di veicoli considerati, per semplicità, con capacità illimitata. Il percorso di un veicolo inizia dal deposito, serve un certo numero di clienti e ritorna al deposito. Formalmente una route è una sequenza $[-1, r_1, \dots, r_n, -1]$ dove $1 \leq r_i \leq |R|$ sono le richieste tutte distinte e -1 rappresenta il depot. Il **costo di un percorso** è $c(p) = c_{-1, r_1} + c_{r_1, r_2} + \dots + c_{r_n, -1}$.

La funzione obiettivo è gerarchica: prima si massimizza sul numero di richieste servite e poi si minimizza sulla distanza di viaggio.

Un **piano di instradamento** è un insieme di routes $\{p_1, \dots, p_M\}$, una per ogni veicolo, che serve ogni cliente esattamente una volta. Il piano assegna ad ogni cliente un solo predecessore ed un solo successore all'interno del percorso. Il **costo di viaggio di un piano** è la somma dei costi delle sue routes e quindi $\sum_{i=1}^M c(p_i)$. Le decisioni prese durante l'esecuzione sono basate su un **piano prescelto** che evolve nel tempo. Il piano prescelto viene selezionato da una **funzione di consenso** e tutti gli altri mantenuti devono essere consistenti con esso.

2 Modellazione del Problema

Il problema è stato modellato come un **Dynamic Pickup and Delivery Problem with Time Windows and Release Dates**. Ogni richiesta k ha quindi associata una coppia di nodi (i, j) in cui i è il deposito con il pickup del materiale da consegnare e j è il punto in cui risiede il cliente e dove dovrà avvenire quindi la consegna. Sia la raccolta che la consegna hanno associata una finestra temporale all'interno della quale l'azione dovrà avvenire e, rispettivamente si parla di $[r_k, l_k]$ per la raccolta al deposito e $[e_k, l_k]$ per la consegna al cliente. Come si fa generalmente per problemi dinamici l'**ottimizzazione è event-driven**, ossia viene performata ogni volta che si hanno nuove informazioni veicolate da un nuovo evento che si è verificato nel sistema. Quando si presenta un nuovo evento si colleziona tutto ciò che si conosce e si esegue un passo di ottimizzazione che pianifica le routes da eseguire. Gli eventi che vengono considerati sono:

1. si ha una nuova richiesta nota e c'è un veicolo al deposito pronto per partire
2. un veicolo ha finito una route e arriva al deposito

3. un veicolo ha terminato il tempo di attesa al deposito: se le richieste note sono poche il veicolo ha infatti la possibilità di aspettare che ce ne siano un certo numero minimo per avere soluzione migliore e più robusta riguardo a ciò che dovrà accadere
4. una consegna è stata completata

Ogni volta che si verifica un evento abbiamo 3 algoritmi a disposizione:

- **Reoptimization**: classico metodo usato per risolvere problemi dinamici:

Algorithm 1 Reoptimization

```
Create a plan  $s$  that contains the requests known at time 0
while there is an event  $\vee$  time = 0 do
    Lock all performed actions in plan  $s$ 
    Add the new_requests to  $s$ 
    Optimize  $n$  and implement the new_actions
end while
```

- **Two lookahead algorithms**: che cercano di anticipare le informazioni future per fare migliori pianificazioni. Questi usano scenari probabilistici con informazione stocastica campionata: nello specifico ad essere campionata è la distribuzione di probabilità che riguarda la presenza/assenza di una richiesta e il suo istante temporale. Ottimizzando gli scenari si ottengono routes, una per scenario, contententi la gestione sia di richieste note che di probabili richieste future. Ovviamente un veicolo prima di partire deve aspettare (al deposito) che queste si verifichino per sapere se caricare o meno il materiale da consegnare. I due approcci usati e uniti nel codice di Jean-François Côté sono quelli proposti in Bent e Van Hentenryck[1] e Hvattum, Løkketangen e Laporte [2] che andremo nel seguito a descrivere.

2.1 Esempio

Come esempio mettiamoci, per semplicità, nel caso in cui ci sia un solo veicolo ($M = 1$), l'orizzonte temporale sia $T = 44$ e ci troviamo al tempo $t = 20$. Il nostro veicolo, dopo aver seguito la route 11 – 29 – 8 ed essere tornato al deposito (evento 2 in [Modellazione del Problema](#) scatenante la ripianificazione), genera 4 scenari diversi contententi richieste future reali etichettate con un numero e richieste future probabili, senza identificatore numerico. Una volta fatto ciò ottimizzerà tutti gli scenari cercando un piano per ognuno di questi, come come mostra l'immagine 1.

Ovviamente, nel processo di ottimizzazione, il numero di scenari deve essere maggiore di 1 in modo da poter esplorare meglio la randomicità del problema e avere piani più robusti, che mi permettano di affrontare meglio il futuro. Una volta ottimizzati tutti gli scenari bisognerà scegliere quale usare, o meglio, quali azioni andare ad effettuare nel mio piano reale. Per far questo si usano i due algoritmi prima menzionati che *"guardano nel futuro"* e che ora andremo a spiegare meglio.

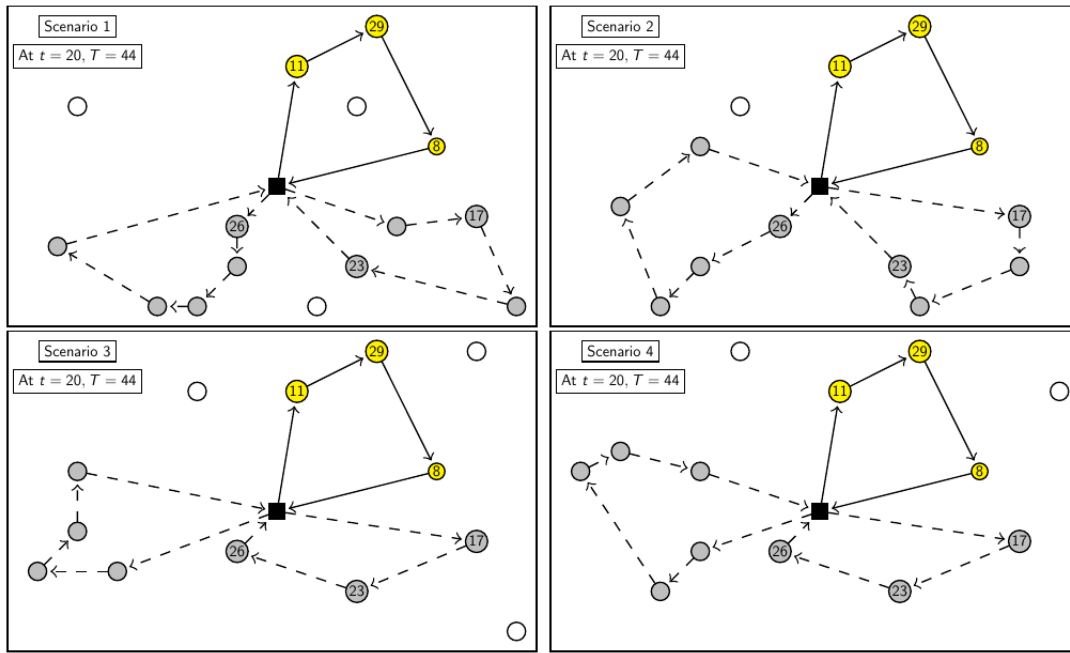


Figura 1 – Scenari Ottimizzati

2.2 Scenario-Based Planning Approach

Nel paper [1] si propone di scegliere come scenario finale quello che presenta il migliore score ottenuto con una certa **funzione consenso**, in questo caso mediante una **Route Similarity**. Entrando nei dettagli ad ogni piano viene associato come score la somma delle volte in cui una sua route compare uguale anche nei piani ottenuti per altri scenari. In questo caso con "*compare uguale*" intendiamo proprio che devono risultare le stesse richieste e nello stesso ordine. Non vengono considerate nel conteggio le route che contengono almeno una richiesta futura e per le quali dobbiamo attendere.

Algorithm 2 Scenario-based planning approach

```

Create a plan  $s$  that contains the requests known at time 0
while there is an event  $\forall$  time = 0 do
  Lock all performed actions in plan  $s$ 
  Add the new_requests to  $s$ 
  Create a scenario set  $\Omega$  of fictive_requests
  for each scenario  $w \in \Omega$  do
     $s_w = s \cup w$ 
    Optimize  $s_w$ 
  end for
  Implement the plan  $s_w$  having the highest score  $f(s_w)$ 
end while

```

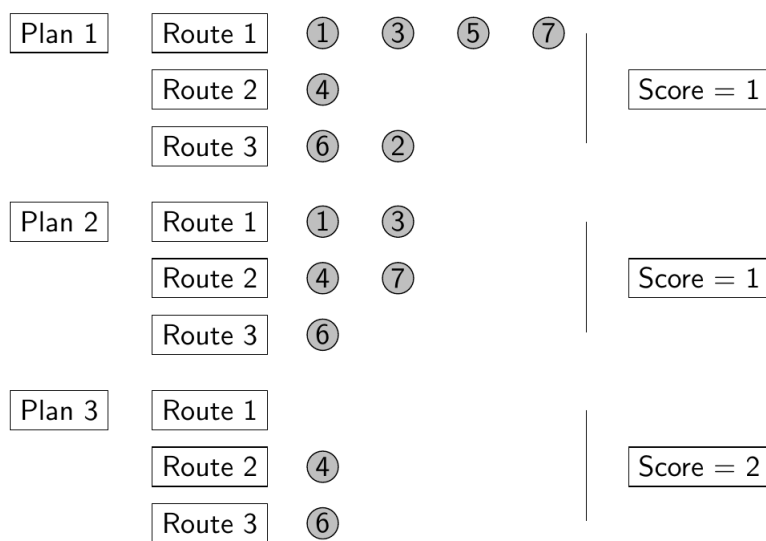


Figura 2 – Route Similarity

Questo criterio, mostrato in 2, risulta però **miope** e non riesce a comprendere il trend reale che si sta verificando: sceglie sempre la strategia che richiede impegno minimo. Nello specifico quando i piani per i vari scenari sono molto diversi sarà scelto quello con meno routes e tutte molto corte, dato che avranno più probabilità (dal momento che sono composte da poche mosse) di presentarsi in altri piani. Per questo Jean-François e i suoi collaboratori hanno proposto due diverse **funzioni consenso**:

1. **Assignment Similarity** : lo score di ogni piano è la somma di tutti i numeri di volte in cui la coppia (richiesta, numero di route) nel piano si presenta allo stesso modo in altri piani. Questo permette di non favorire il più corto:

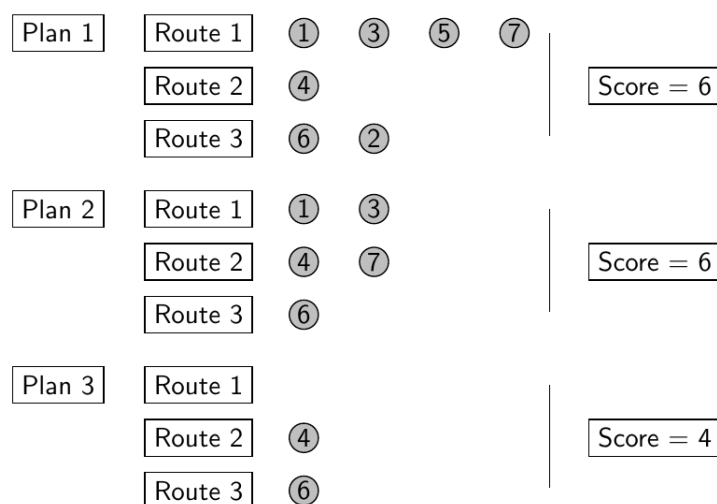


Figura 3 – Assignment Similarity

2. **Edit Distance**: lo score di ogni piano è la somma dei numeri di cambiamenti che necessita

per essere uguale agli altri piani. In questo caso, a differenza dei precedenti, più lo score è basso meglio è:

Plan 1	Route 1	① ③ ⑤ ⑦		Score = 9
	Route 2	④		
	Route 3	⑥ ②		
Plan 2	Route 1	① ③		Score = 7
	Route 2	④ ⑦		
	Route 3	⑥		
Plan 3	Route 1			Score = 8
	Route 2	④		
	Route 3	⑥		

Figura 4 – Edit Distance

Il problema che dobbiamo ora affrontare è: *queste 3 diverse funzioni consenso possono non essere concordi sulla scelta del piano da eseguire, come le combiniamo?*

Un altro problema che vorremmo risolvere che interessa il SBPA è che ogni piano risulta troppo specializzato per lo scenario previsto, il che ovviamente può non presentarsi. Si è infatti dimostrato che scegliere uno dei piani randomicamente, senza nessuna funzione consenso, porta comunque a buone performances. Si vorrebbe quindi definire un criterio che non risulti dipendente da un solo scenario considerato, ma che sia mediamente buono. Per far questo abbiamo bisogno del Branch & Regret.

2.3 Branch & Regret

L'approccio proposto in Hvattum, Løkketangen e Laporte [2] è simile al precedente SBPA, ma prevede alcuni passi aggiuntivi a livello algoritmico. Nello specifico una volta ottimizzati e risolti tutti gli scenari ci si assicura, forzandole, che ogni richiesta conosciuta e reale sia servita nello stesso intervallo di tempo in tutti i piani e che in ogni piano ogni veicolo visiti le stesse richieste. Lo pseudocodice è mostrato in 0.

Questo algoritmo può essere combinato, come sottoprocedura, nel precedente SBPA, inserendo la chiamata al posto del for di riga 6. Entrando nei dettagli il B&R prende le richieste non fissate reali e va a vedere quale sarebbe la media dei costi in tutti gli scenari se ognuna di questa (una per volta) venisse gestita nella prossima route o in una delle successive. Si sceglie l'alternativa migliore e si fissa in tutti gli scenari. Una volta fatto ciò per tutte le richieste l'algoritmo viene rieseguito non per fissare le richieste nelle route, ma per fissarne l'ordine. Quest'idea non si applica bene direttamente al nostro problema in questione perchè richiede che tutte le routes siano definite prima che il veicolo parta e quindi che tutto ciò che deve essere consegnato sia già caricato, ma come già accennato precedentemente, noi vorremmo aspettare che le richieste si verifichino.

Algorithm 3 Branch-and-Regret

```

 $L = \{ \text{set of unfixed\_requests} \}$ 
while !empty( $L$ ) do
    Select a request  $k \in L$ 
    Visit  $k$  inside the next time interval and solve all scenarios
    Visit  $k$  after the next time interval and solve all scenarios
    Fix  $k$  to the least cost alternative
     $L = L \setminus \{k\}$ 
end while
Repeat for fixing the next visit of each vehicle

```

2.3.1 Diverso Schema di Branch

Nel B&R la fase di **Branch** consiste nel scegliere se una certa richiesta vada gestita ora o in futuro, mentre la fase di **Regret** consiste nel fissare l'alternativa con il costo più conveniente. Per adattarlo all'esigenze del problema in questione Jean-François e i suoi colleghi hanno proposto un diversa fase di braching con schema:

- **go_now**: se la richiesta k farà parte di una route che parte ora
- **wait**: se la richiesta k sarà assegnata ad una route che partirà dopo
- **reject**: se la richiesta k non sarà servita

Un possibile albero generato dal B&R può essere il seguente:

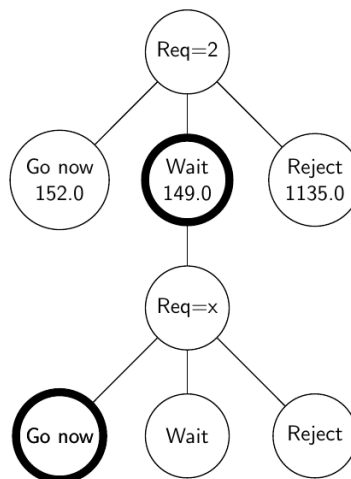


Figura 5 – Branch & Regret View

Tra tutte le richieste non servite viene scelta la $k = 2$ che sarà gestita con l'azione che presenta costo minimo tra tutti i piani, in questo caso **wait**. La richiesta immediatamente successiva x può invece portare ad un costo complessivo minimo se gestita immediatamente. Il processo di ottimizzazione procede in questo e viene stoppato quando tutti i piani implementano le stesse alternative di gestione di ogni richiesta reale. A questo punto viene selezionato un piano con una delle 3 funzioni consenso prima definite.

3 Implementazione

Lo scopo della nostra tesina è stato quello di verificare l'idea proposta da Jean-François e dai suoi colleghi. Nello specifico abbiamo implementato un algoritmo esatto, un Branch & Bound, in grado di trovare la il miglior percorso all'interno dell'albero delle decisioni. Così facendo è possibile verificare quando, in che modo e in quali contesti la soluzione individuata dalla loro implementazione si discosti dalla migliore.

Ovviamente per poter sviluppare il nostro algoritmo si è resa necessaria l'implementazione di una nuova classe dedicata all'ottimizzazione mediante Branch & Bound, basandoci anche su parte delle API già presenti nel progetto, senza le quali sarebbe stato necessario un lavoro molto più a basso livello. In questo caso invece, ci siamo potuti concentrare su strutture dati e algoritmi ad alto livello, permettendo uno sviluppo, testing e debugging più rapido e semplice, anche grazie all'adozione di linee guida e pattern suggeriti anche da Jean-François.

L'algoritmo viene richiamato all'interno di una funzione wrapper `Optimize()` spesso implementata da Jean-François nella sua libreria per guidare tutto il processo ottimizzatorio e di simulazione a partire dall'istanziatura iniziale delle variabili necessarie per proseguire con la gestione di ogni evento lungo tutto l'orizzonte temporale e la stampa finale dei risultati. Esattamente come prima indicato a livello teorico, al verificarsi di ogni evento saranno generati n scenari e ottimizzati. L'ottimizzatore sfrutta un'implementazione dell'ALNS [3] sviluppata da Jean-François che effettua un numero di iterazioni di distruzione e ricostruzione parziale dei percorsi generati in modo da cercare di ottimizzarli. Il numero di iterazioni è specificato da un parametro impostato prima dell'inizio della ricerca di soluzioni.

3.1 Branch & Bound

Abbiamo realizzato il Branch & Bound sia in versione iterativa che ricorsiva e a loro volta entrambe sia in versione Best-First che Depth-First. Tutte le versioni sono void e la migliore soluzione intera si troverà, alla fine dell'esecuzione, nello spazio di memoria puntato dal puntatore passato in input. Per spiegare correttamente il Branch & Bound dividiamolo nelle sue parti fondamentali.

3.1.1 Branching

Preso un certo nodo dell'albero delle decisioni i suoi figli vengono ottenuti, all'inizio della procedura, con la chiamata a `GetNextActionDecisions()`. Quest'ultima funzione andrà ad assegnare il vettore `current_decisions` con una triplice versione della decisione selezionata una per ogni tipo di azione che possiamo performare su di essa: *go_now*, *wait*, *don't deliver*. Se questo vettore è vuoto vuol dire che abbiamo già analizzato tutte le possibilità per tutte le richieste reali per ora note e possiamo terminare, aggiornando eventualmente la miglior soluzione trovata con quella corrente.

Nel caso invece in cui ci sia ancora almeno una richiesta reale da analizzare andiamo ad ottimizzare ogni scenario forzando in ognuno di essi tutte le decisioni precedentemente prese insieme a quella nuova corrente da considerare. E' importante quindi mantenere un vettore di `working_decisions` che vada aggiornato mano a mano che una richiesta è gestita. Si andranno quindi a generare i nuovi nodi, figli della `current_decision` che saranno immediatamente esplorati nel caso Depth-First ed inseriti nella lista dei nodi da esplorare nel caso Best-First.

A dire il vero entrambe le visite sono gestite con coda con la sola differenza che per la prima questa è semplicemente una LIFO, mentre per la seconda deve essere ordinata ogni volta che vengono inseriti nuovi nodi.

3.1.2 Bounding

La fase di bounding permette di evitare parte dell'esplorazione dell'albero. Nello specifico, prima di fare la chiamata ricorsiva su un nodo, o equivalentemente prima di espanderlo ed inserire i figli nella lista nella versione iterativa, ci si accerta che abbia un costo medio su tutti gli scenari minore dell'ottimo finora trovato e possa quindi migliorare la nostra soluzione corrente.

3.1.3 Best-First vs Depth-First

L'albero generato dal B&B può essere esplorato in due modi diversi, il cui controllo avviene tramite un parametro globale dell'ottimizzazione che permette di scegliere un'**esplorazione in profondità** oppure una **Best First**. Entrambe sono realizzate con una lista di nodi con la sola differenza che il primo approccio prevede di usarla in maniera LIFO, mentre il secondo inserisce ed estrae i nodi da esplorare in accordo con il loro valore di costo medio. C'è da precisare il fatto che nel caso nella versione ricorsiva questo non porta ad un approccio Best-First globale, complessivo di tutte le richieste nell'albero, come invece accade per la versione iterativa. Quello che si origina è invece una Best-First a livello in cui ogni padre decide prima di esplorare i figli più promettenti. Questo verrà chiarito con un paio di esempi di esecuzione.

4 Risultati

Per accorgerci dell'eventuale differenza di piano ottimo restituito dal Branch & Regret rispetto a quello reale trovato con il Branch & Bound abbiamo deciso di stampare, durante la generazione dell'albero, comandi [Graphviz](#) che ci permettessero di visualizzare graficamente la situazione. Ci spieghiamo meglio.

Per fare questo abbiamo definito una classe di supporto **BBNode** (Branch&Bound Node) che contiene tutte le informazioni rilevanti riguardo alla posizione di un nodo nell'albero:

- ID univoco del nodo
- ID della richiesta considerata
- ID del nodo genitore
- Tipo di decisione che il nodo rappresenta
- Costo raggiunto per poter svolgere la decisione correlata al nodo
- Puntatori ai BBNode figli

Una volta generato completamente tutto l'albero, che sarà semplicemente un vettore di **BBNode**, questo viene post-processato aggiungendo ad ogni nodo informazioni booleane riguardo l'appartenenza al percorso ottimo e a quello definito dal B&R.

A questo punto ciclando sul vettore si stampa per ogni nodo la dichiarazione del nodo stesso

e l'arco che lo collega univocamente al padre. Mostriamo ora delle immagini di esempio per evidenziare diversi tipi possibili di esecuzione:

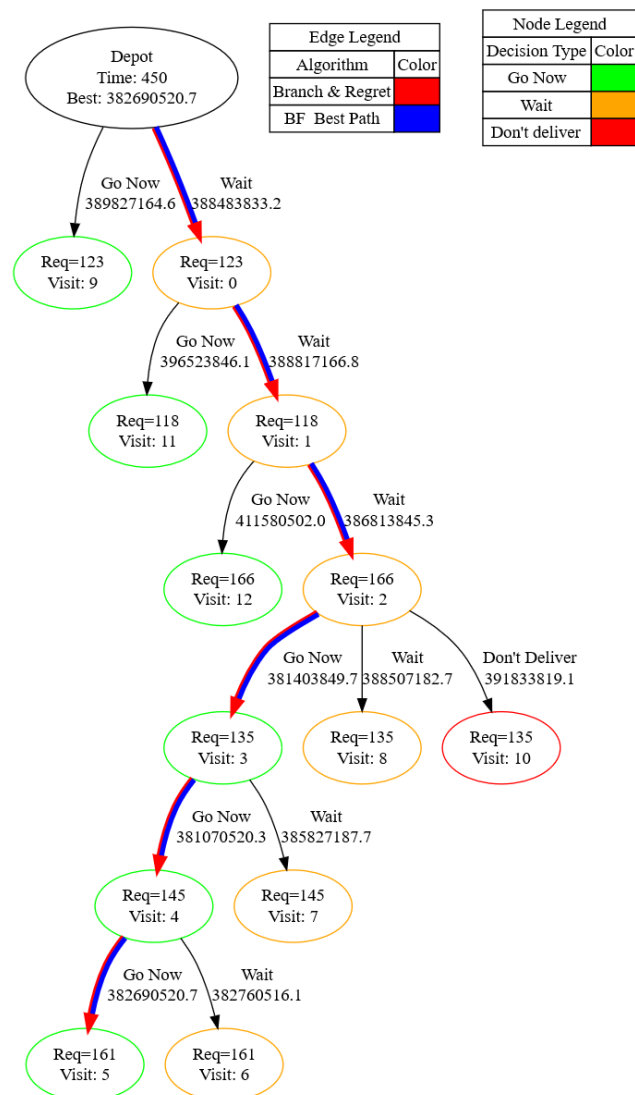


Figura 6 – B&B Best-First e B&R scelgono lo stesso percorso

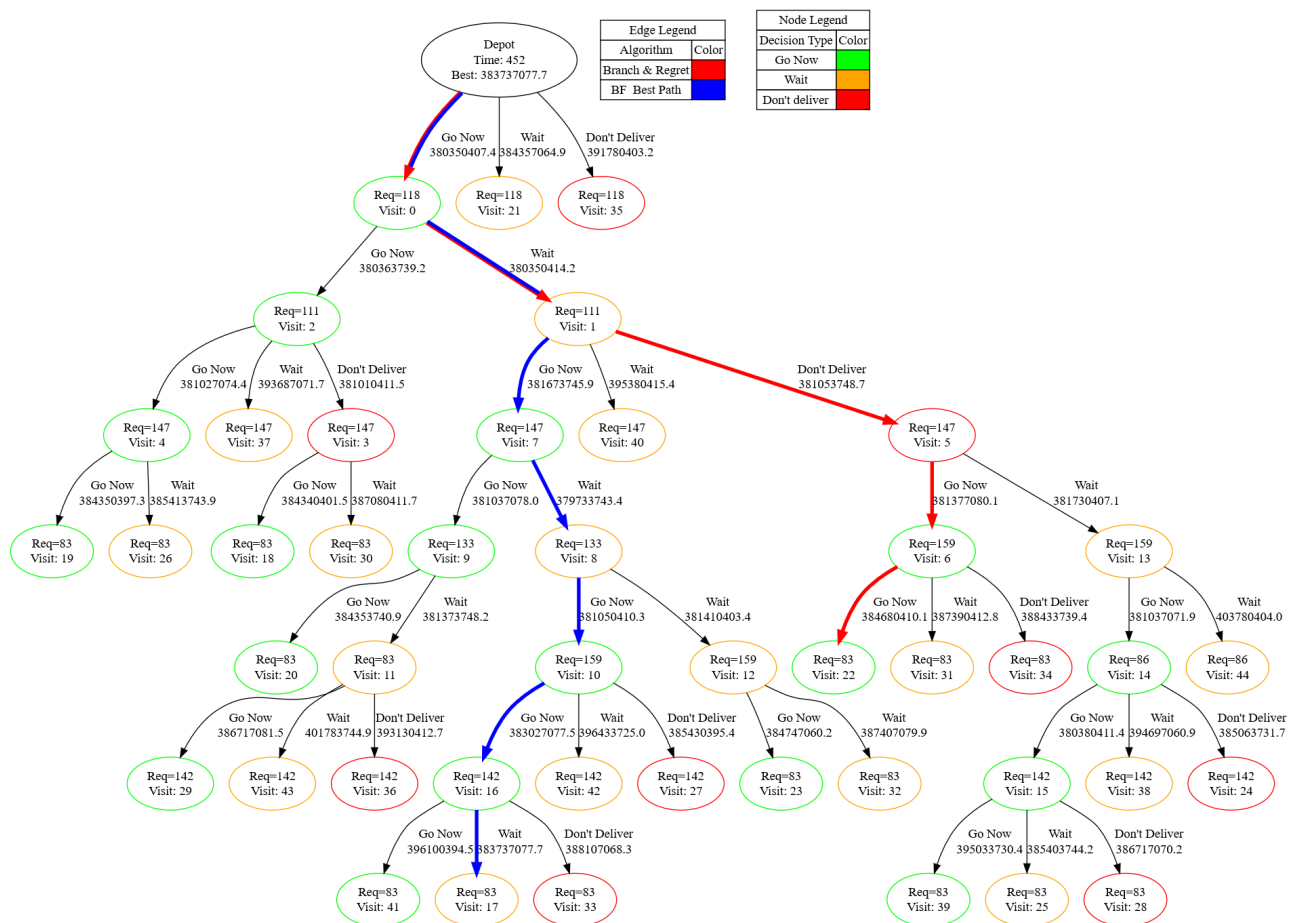


Figura 7 – B&B Best-First trova un percorso migliore del B&R

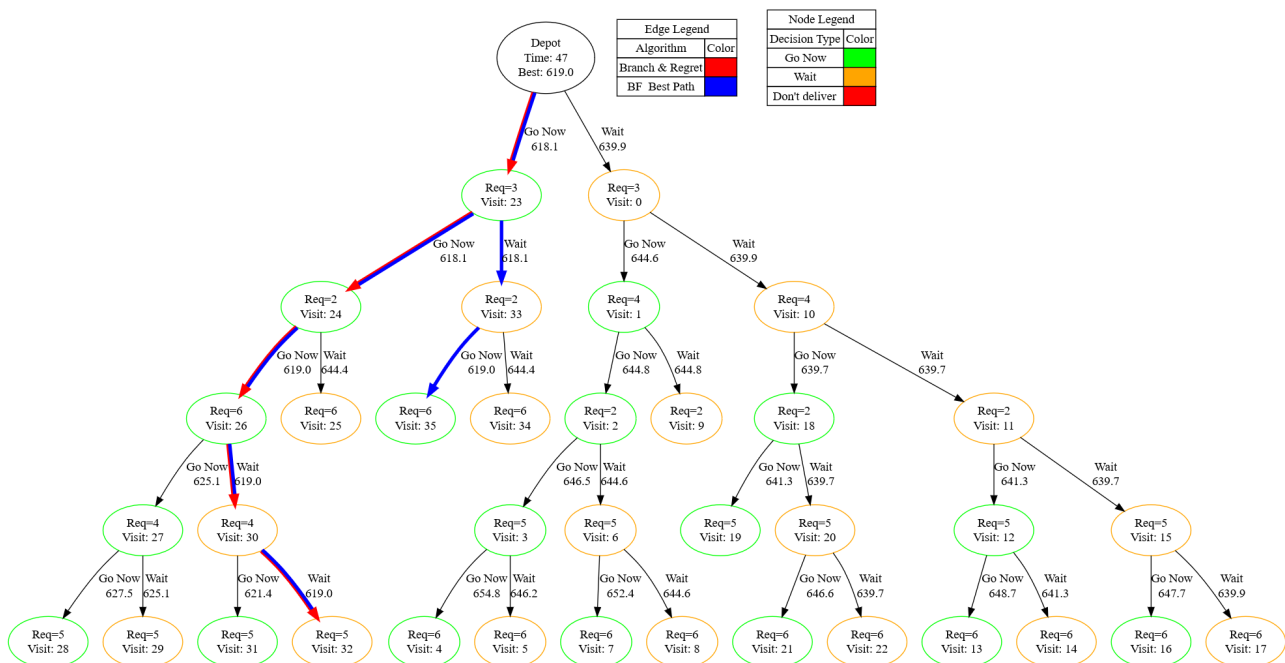


Figura 8 – B&B Best-First a livello che trova due percorsi ottimi di uguale costo

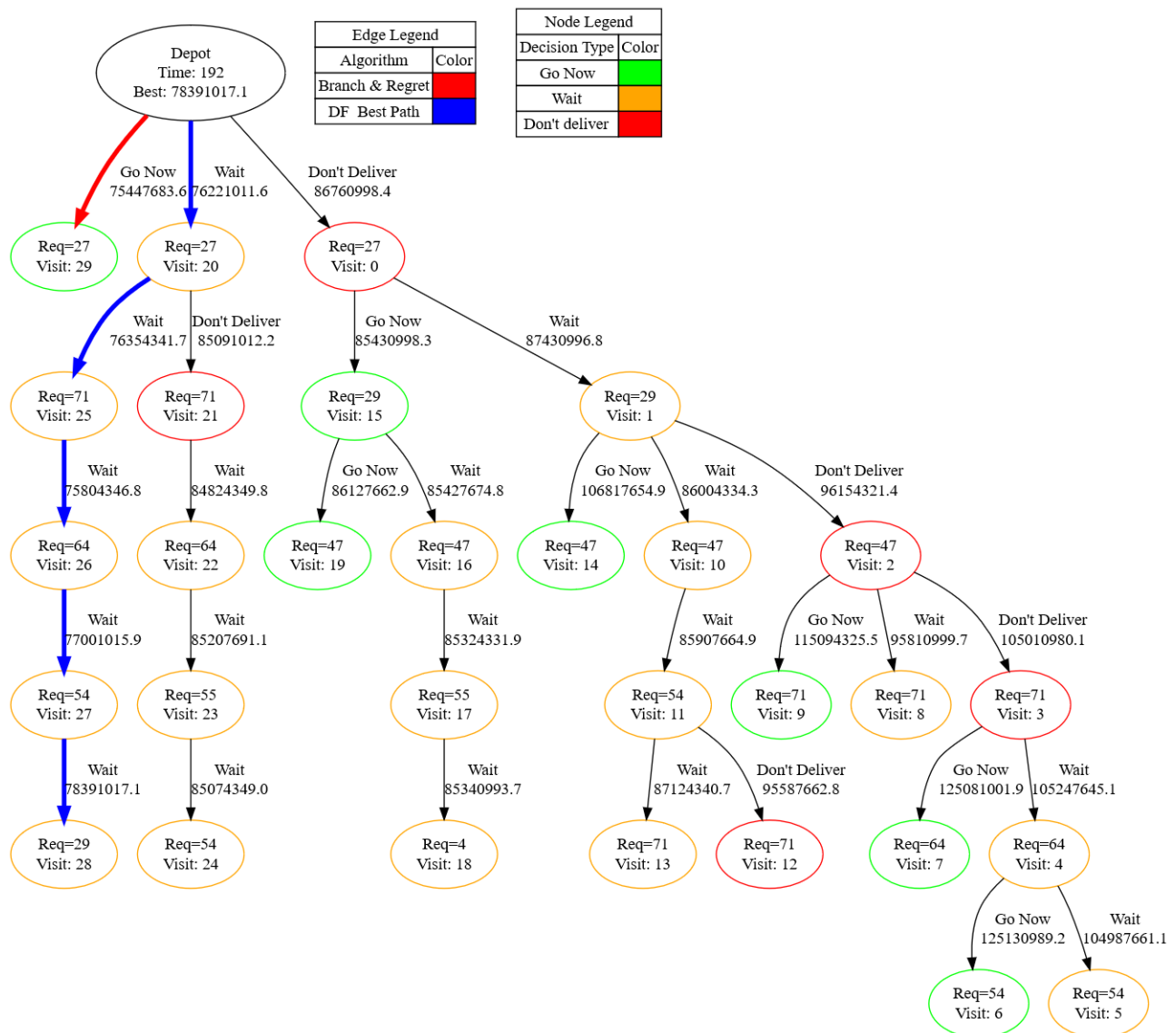


Figura 9 – B&B Dept-First trova un percorso migliore del B&R

4.1 Considerazioni e Conclusioni

Per mostrare e confrontare i risultati del B&B da noi implementato con il B&R di Jean-François è necessario accennare al fatto che nel codice l'algoritmo B&B, esattamente come il B&R, non viene chiamato nel caso in cui il piano preveda sole wait. Questa situazione che a primo avviso potrebbe sembrare rara capita invece circa il 90% delle volte per semplici istanze. In questi casi il costo del B&R coincide con il B&B e le differenze tra i due algoritmi è pressochè nulla. Vediamo ora invece le differenze tra i due algoritmi nel caso in cui la sequenza di azioni non sia composta da sole wait. Tutti i risultati che saranno mostrati prevede l'esecuzione di 100 iterazioni di ALNS, 30 scenari generati e 10 veicoli.

Le istanze che abbiamo usato per fare i test fanno parte del benchmark disponibile sul [sito di Jean-François](#). Le istanze del problema vengono classificate in base a molte delle loro caratteristiche che vengono messe in successione nel nome del file stesso. Prendiamo come esempio di problema `TWdf_C_1_hom_1_actual.txt` e proviamo a descrivere le sue caratteristiche:

- **TWdf**:
- **C_1**:
- **hom_1**:
- **actual**:

Sono state da noi considerate 810 istanze eseguite sia con B&B che con B&R in modo che tenessero in considerazione una buona varietà di caratteristiche. Abbiamo preso tutti e i tre tipi principali **TWdf**, **TWh**, **TWh_R** con varianti **C_X**, **R_X** e **RC_X** con $1 \leq X \leq 9$. Di ognuno di questi tipi di istanze è stato fissato l'attributo **hom_1**, strettamente correlato con la complessità del problema, e l'attributo **actual**.

La computazione è stata eseguita tramite uno script Python 3.10 (`runner.py`), da noi sviluppato, sia sul Branch&Bound con esplorazione Best-First, sia sul programma di Jean-François, per un totale di 1620 esecuzioni. Il tempo di calcolo per il B&B è di 3443.94 secondi (circa 57 minuti), mentre il B&R ha richiesto circa il doppio: 6571 secondi (circa 110 minuti). Dopo ogni computazione i risultati prodotti dai programmi vengono salvati in file `.txt`

Una volta ottenuti i file di output, un altro script (`extractor.py`) utilizza Regex per leggere i files `.txt` e comprimere le uniche informazioni per noi utili presenti nelle stampe di output in un nuovo file `.csv`. Il risultato di questa fase ci permette di passare dai 1620 file di output, uno per ogni run, ad una sola tabella `csv` una per il B&B e una per il B&R, con le seguenti colonne:

- **Problem**: Il nome del problema risolto
- **Instance**: Quale delle 30 istanze del problema è stata analizzata
- **Cost**: Il costo della migliore soluzione identificata
- **Dist**: La distanza totale da tutti i mezzi
- **Time**: Il tempo (in secondi) richiesto per completare la computazione

- **Events:** Il numero di eventi che si sono considerati
- **Skipped:** Il numero di eventi/piani saltati perché composti solo da attese (wait)

Mostreremo ora alcuni grafici ottenuti da un terzo e ultimo script Python (`analyzer.py`) che abbiamo implementato che attraverso le librerie **pandas**, **numpy** e **matplotlib** ci ha permesso facilmente di confrontare i risultati compressi dallo script precedente.

Nei grafi che mostreremo ogni punto rappresenta la media calcolata su tutte le 90 istanze con le prime due caratteristiche del nome coincidenti. Ogni punto sarà plottato mostrando esplicitamente il valore dell'ordinata corrispondente con deviazione standard.

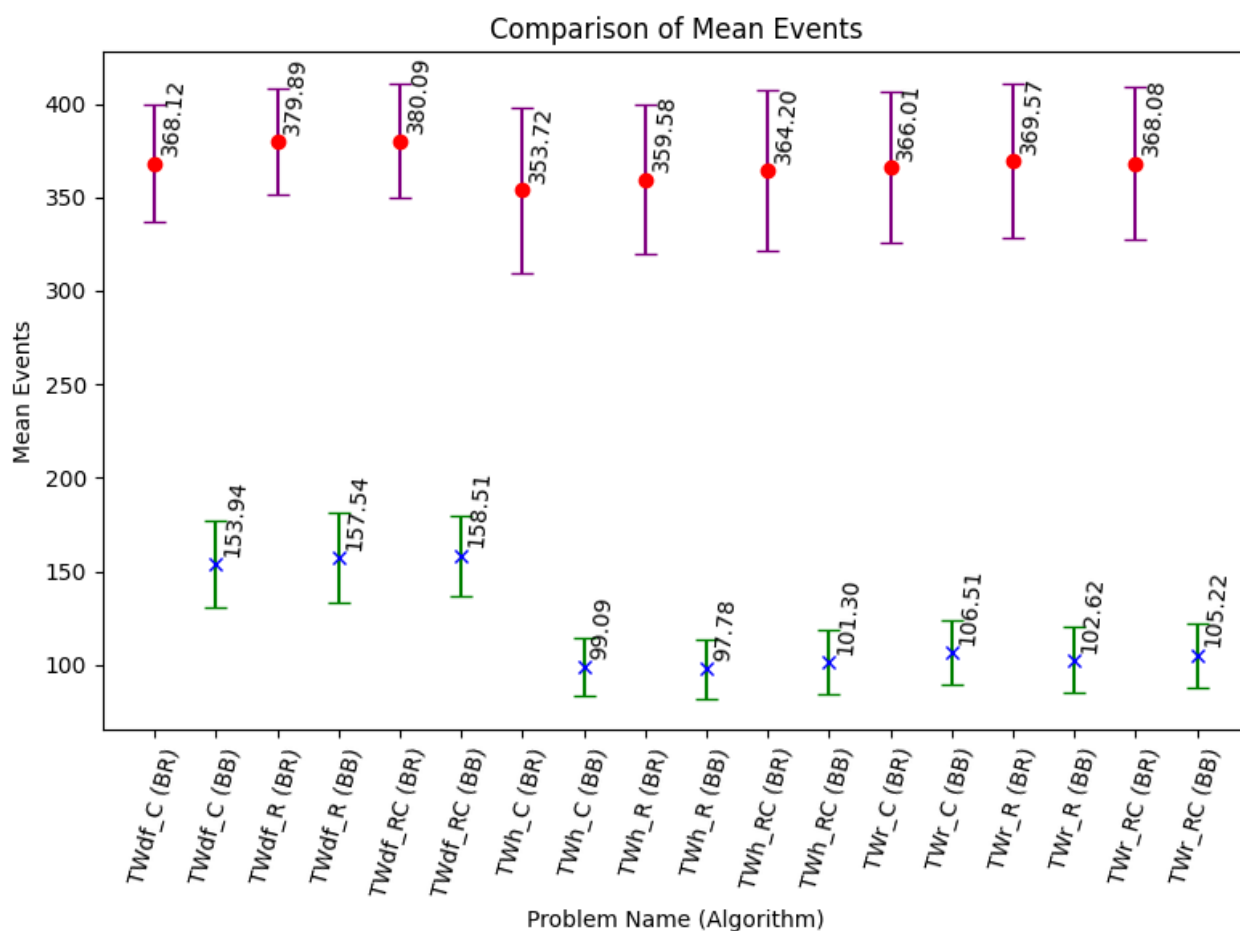


Figura 10 – B&B vs B&R: numero medio di eventi

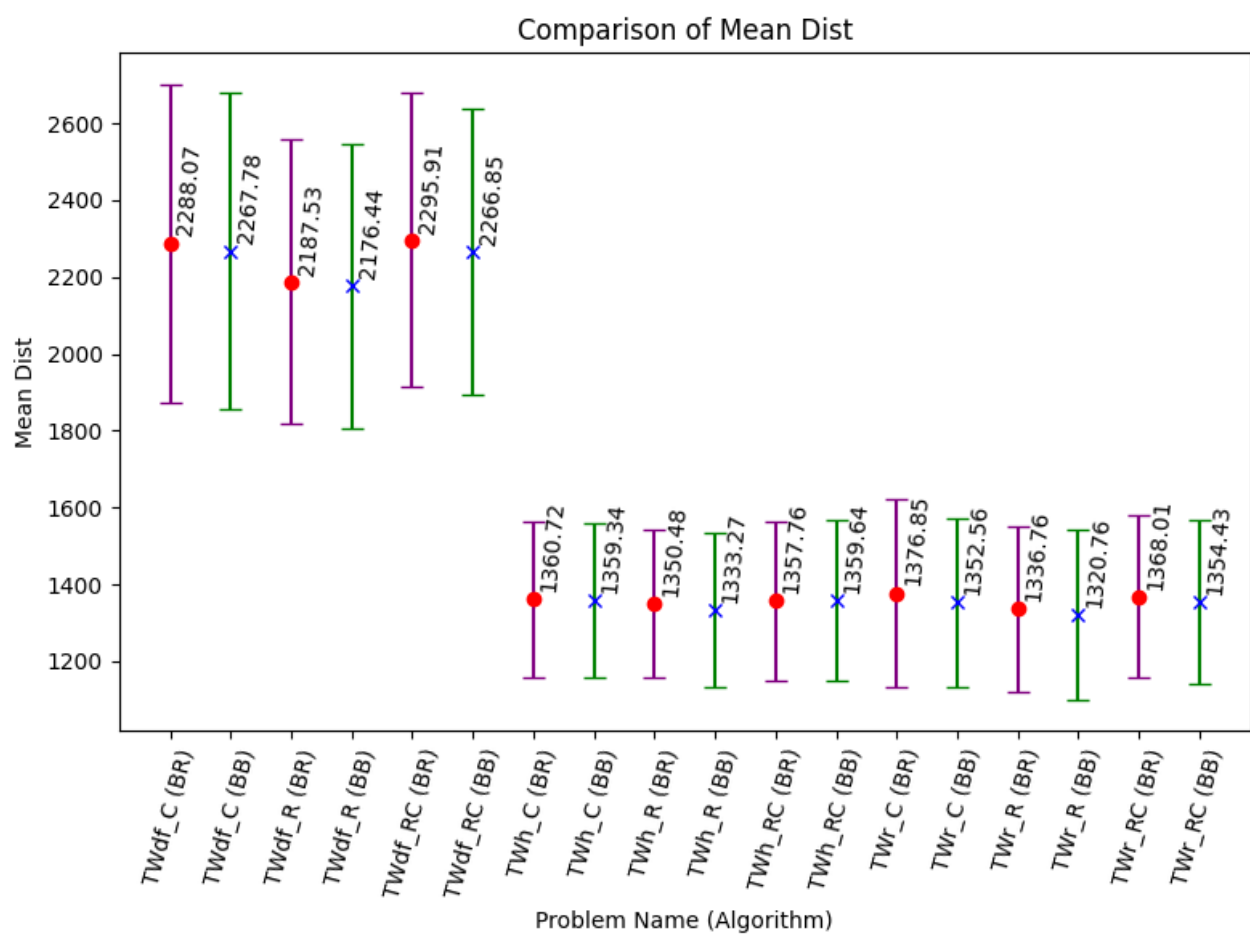


Figura 11 – B&B vs B&R: distanza media percorsa

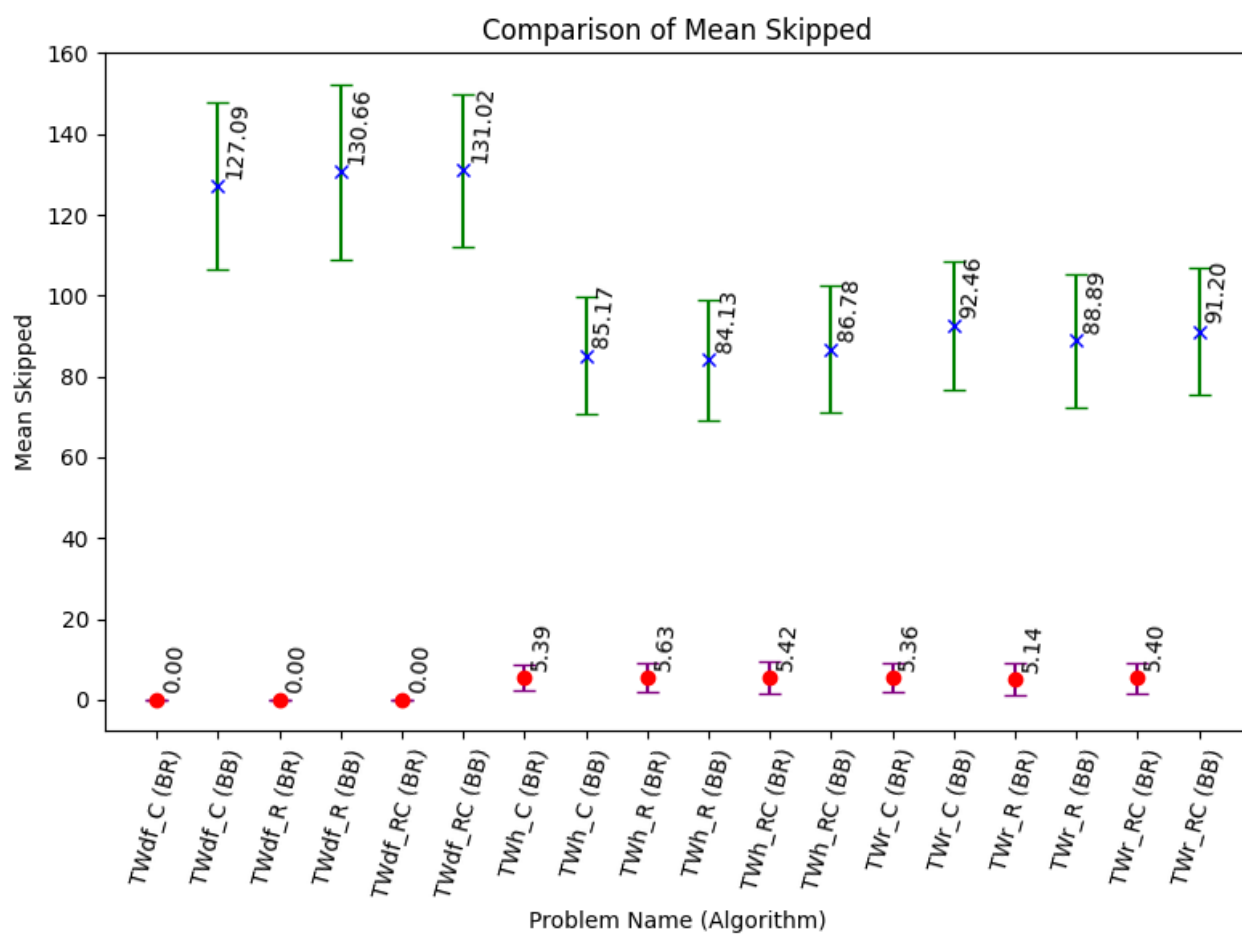


Figura 12 – B&B vs B&R: numero medio di eventi/piani saltati

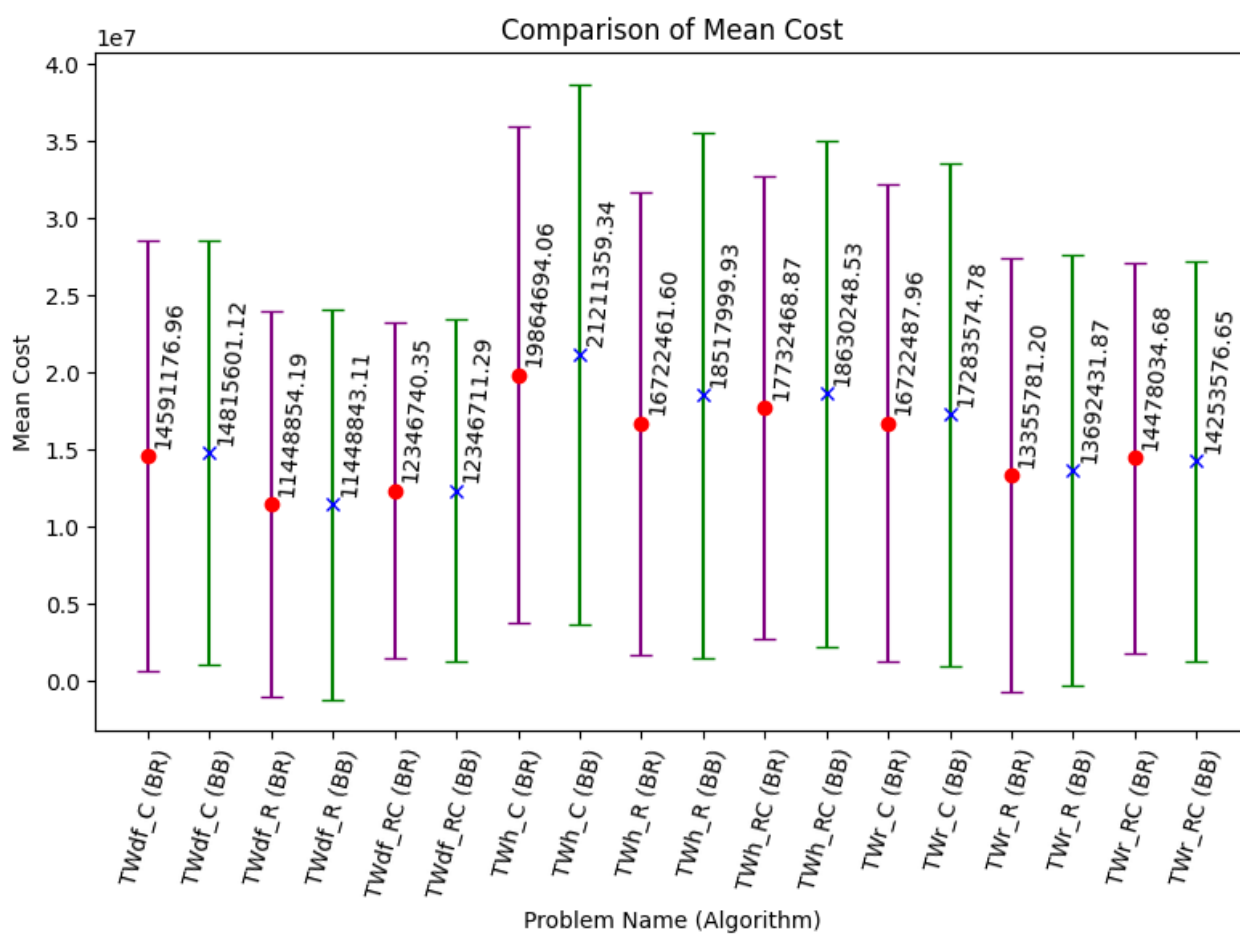


Figura 13 – B&B vs B&R: costo medio delle soluzioni

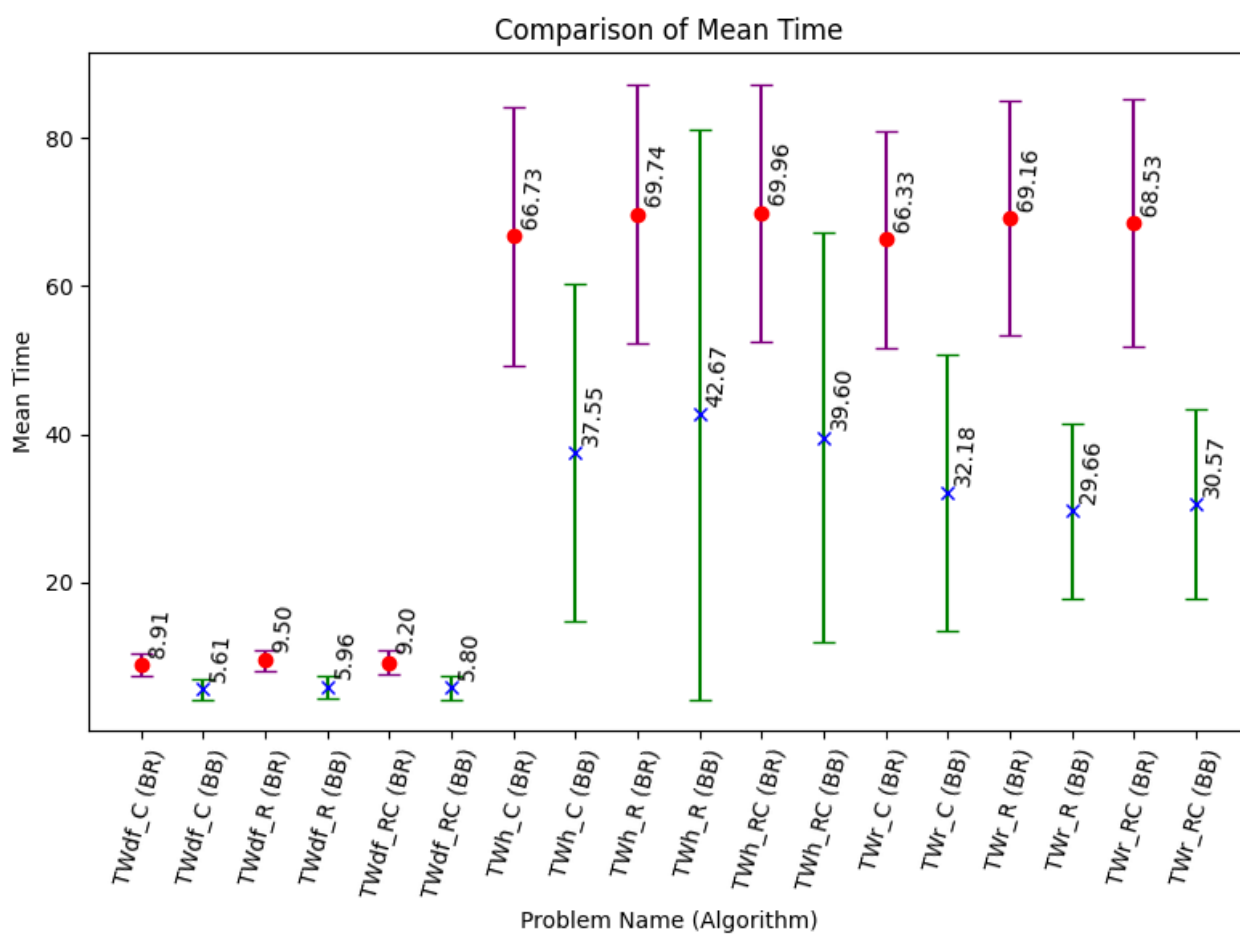


Figura 14 – B&B vs B&R: tempo medio necessario per completare la computazione

Bibliografia

- [1] Russell Bent e Pascal Van Hentenryck. “Scenario-Based Planning for Partially Dynamic Vehicle Routing with Stochastic Customers”. Em: *Operations Research* 52 (dez. de 2004), pp. 977–987. DOI: [10.1287/opre.1040.0124](https://doi.org/10.1287/opre.1040.0124).
- [2] Lars Magnus Hvattum, Arne Løkketangen e Gilbert Laporte. “A branch-and-regret heuristic for stochastic and dynamic vehicle routing problems”. Em: *Networks* 49.4 (2007), pp. 330–340. DOI: <https://doi.org/10.1002/net.20182>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/net.20182>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.20182>.
- [3] David Pisinger Stefan Ropke. “An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows.” Em: *Trans-portion science* 40.4 (2006), pp. 455–472. DOI: [10.1287/trsc.1050.0135](https://doi.org/10.1287/trsc.1050.0135).