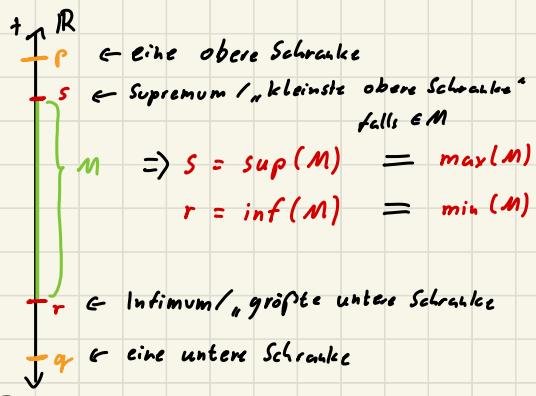


Allgemein wichtige Formeln

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

wichtige Gleichungen

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1 + nx$
($x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1$)



Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup(M)$.

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

„Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen“

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \\ = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Verschiedene Mengen

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

„rationale Zahlen“

$$\Rightarrow p \text{ Primzahl} : \sqrt[p]{p} \notin \mathbb{Q}$$

Rationale Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

Random Stuff

$$\log(x) := \ln(x) := E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

$$\log(1) = 0, \quad \log(e) = 1 \quad a^x = e^{x \cdot \log(a)}$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y) \quad \log(a^x) = \log(e^{x \cdot \log(a)}) = x \cdot \log(a)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\log(x^m) = m \cdot \log(x)$$

Folgen und Konvergenz $X \subseteq \mathbb{R}$ Menge

$a : \mathbb{N} \rightarrow X$

ist eine Folge in X

z.B.: $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

X ist abzählbar (\Leftrightarrow Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$)

X ist überabzählbar ($\Leftrightarrow X$ ist nicht abzählbar.)

Für eine Folge (a_n) sei $M := \{a_1, a_2, \dots\}$

(a_n) ist (nach oben/nach unten) beschränkt

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &:= (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

(\Rightarrow) M ist (nach oben/nach unten) beschränkt

" ε -Umgebung von a "

(a_n) ist konvergent, wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ existiert

$\Rightarrow (a_n)$ ist divergent, wenn der Grenzwert nicht existiert.

Falls $\forall \varepsilon > 0$

wichtige Grenzwerte (c konstante)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0 \quad \text{für } |b| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ existiert nicht} \Rightarrow \text{divergent}$$

Grenzwertkriterien

Monotoniekriterium

(a_n) ist monoton wachsend/fallend und ist nach oben/unten beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

idk ob das wichtig ist aber es steht auf S. 21 als wichtig

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-n} |x-y|$$

Falls (a_n) konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \sqrt[p]{a}$$

$$a_n := \sqrt[n]{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$$

$$a_n := \sqrt[n]{c}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{c}) = 1$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \approx 2,7$$

Teilfolgen Sei (a_n) eine Folge

(n_1, n_2, n_3, \dots) sei eine Folge in \mathbb{N} mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

Mit $b_k = a_{n_k}$ (also $b_n = a_{n_n}, \dots$):

(b_k) ist eine Teilfolge von (a_n)

Häufungswert

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist Hw

\Leftrightarrow Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k})
mit $a_{n_k} \rightarrow \alpha$ ($k \rightarrow \infty$)

$$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist Hw von } a_n\}$$

z.B.: $a_n = (-1)^n$

$$\Rightarrow a_{2k} \rightarrow 1, \quad a_{2k-1} \rightarrow -1 \quad \Rightarrow \{-1, 1\} \subseteq H(a_n)$$

Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in \mathbb{Q} mit $(r_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} x$.

Sei (a_n) konvergent gegen a und (a_{n_k}) eine beliebige Teilfolge:

$$a_{n_k} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} a.$$

$m \in \mathbb{N}$ ist niedrig für a_n , wenn: $\forall n \geq m : a_n \geq a_m$

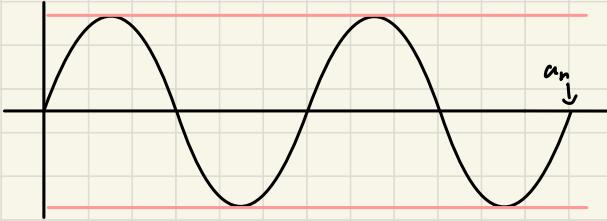
Für jede Folge a_n existiert eine monotone Teilfolge

Bolzano-Weierstraß

(a_n) sei beschränkt $\Rightarrow H(a_n) \neq \emptyset \Rightarrow (a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge

In diesem Fall gilt auch:

$H(a_n)$ ist beschränkt, $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$
 $\Leftrightarrow \max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$ existieren



Limes superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \\ := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \max H(a_n)$$

Limes interior

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \\ := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \min H(a_n)$$

Ist a_n konvergent, so ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n, m > n_0: \quad |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

↓

a_n heißt eine Cauchy-Folge

a_n ist konvergent $\Leftrightarrow a_n$ ist Cauchy-Folge

Cauchy-Kriterium

Falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow a_n$ ist Cauchy-Folge und somit konvergent!

Unendliche Reihen

Für eine Folge (a_n) wird $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als eine unendliche Reihe bezeichnet

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ der Reihenwert

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

Eulersche Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
 ist divergent

alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 ist konvergent (Leibnizkriterium)

Exponentialreihe

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

auch Exponentialfunktion

- $\forall r \in \mathbb{Q}: E(r) = e^r$
- $E(x) > 1$, falls $x > 0$, $E(x) > 0$, falls $x \in \mathbb{R}$
- $E(-x) = E(x)$
- $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$, stetig monotoner Wachstum

Reihenwert einer Umordnung

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent

Es existiert eine Umordnung (b_n) von (a_n) , sodass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \in \mathbb{R}$ beliebig
Es existiert eine divergente Umordnung

Monotonie kriterium

Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Cauchy kriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n \geq n_0: \left| \sum_{k=n_0+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$! nicht \Leftarrow !

Analog: Gilt $a_n \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Leibnizkriterium

(b_n) sei eine Folge mit $\overline{(b_n)}$ ist monoton fallend
 $b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ ist konvergent

Majorantenkriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Definiere: $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

① Ist (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

② Ist (c_n) beschränkt, definiere $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$

Falls:

$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

$(\alpha = 1 \Rightarrow ??)$

Quotientenkriterium Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

① Ist $c_n \geq 1$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

② Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$, $\beta := \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

\Rightarrow Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, c_n sei konvergent,
 $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Omn: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\begin{cases} \text{absolut konvergent, falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent, falls } \alpha > 1 \end{cases}$

\langle keine Aussage \rangle , falls $\alpha = 1$

Cauchyprodukt

Für zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird definiert für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \text{Cauchyprodukt}$$

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Termino Logie

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent (stärker als nur konvergent)

in diesem Fall: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei eine Bijektion

Mit $b_n := a_{\varphi(n)}$ ist (b_n) nun eine Umordnung von (a_n)

Ist a_n konvergent, so ist b_n konvergent,

Ist a_n absolut konvergent, so ist b_n absolut konvergent

Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{heißt Potenzreihe}$$

Definiere dazu

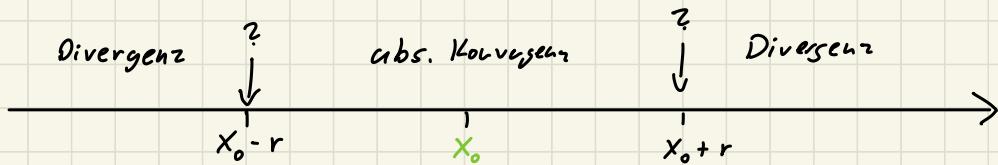
$$p := \begin{cases} \infty, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } p = \infty \\ \infty, & \text{falls } p = 0 \\ \frac{1}{p}, & \text{falls } p \in (0, \infty) \end{cases} = \frac{1}{p}''$$

r ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

Je nachdem wie x liegt lassen sich aussagen treffen:



Falls $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ist und $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ konvergiert, hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ den Konvergenzradius

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Cosinus

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sinus

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$-\sin(x) = \sin(-x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

q -adische Entwicklung

Für $x \in \mathbb{R}$ existiert eine größte $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$

$$[x] := k \quad \text{"Gauß-Klammer"}^{\prime \prime}$$

Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Sei (y_n) eine Folge mit $y_0 \in \mathbb{N}_0$ und $y_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$

$$\Rightarrow y_0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{q^n}$$

heißt ein q -adischer Bruch

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist ihre q -adische Entwicklung eindeutig bestimmt

$q = 10$: Decimalentwicklung

$q = 2$: Dualentwicklung

Grenzwerte bei Funktionen

$D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist Häufungspunkt von D , wenn eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \rightarrow x_0$

x_0 ist HP von 0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

$$D_\delta := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$$

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen

$f \leq g$ auf M , wenn gilt: $f(x) \leq g(x) \quad (x \in M)$.

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_\delta(x_0): |f(x) - a| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert \Leftrightarrow Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ist $f(x_n)$ konvergent

Cauchy-Kriterium $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0): |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt: $g(x_n) \rightarrow \infty$

(S. 59)

Stetigkeit

Begriffe Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

f heißt in x_0 stetig \Leftrightarrow Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt: $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

f heißt auf D stetig $\Leftrightarrow f$ ist in jedem $x \in D$ stetig

$C(D) := C(D, \mathbb{R}) := \{g: D \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}$

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen
stetig in x_0 ; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \alpha f + \beta g, f \cdot g, |f|$
sind stetig in x_0

D heißt abgeschlossen \Leftrightarrow Für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in D$

\Leftrightarrow Jeder Häufungspunkt von D gehört zu D

D heißt kompakt \Leftrightarrow Jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$

$\Leftrightarrow D$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Ist außerdem $D \neq \emptyset$, so existieren $\min D$ und $\max D$

Ist eine Menge M kompakt $\Rightarrow M$ ist abgeschlossen

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow f(D)$ ist beschränkt

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \quad \forall x \in D: |f(x)| \leq c$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend

\Leftrightarrow Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt immer $f(x_1) \leq f(x_2)$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend

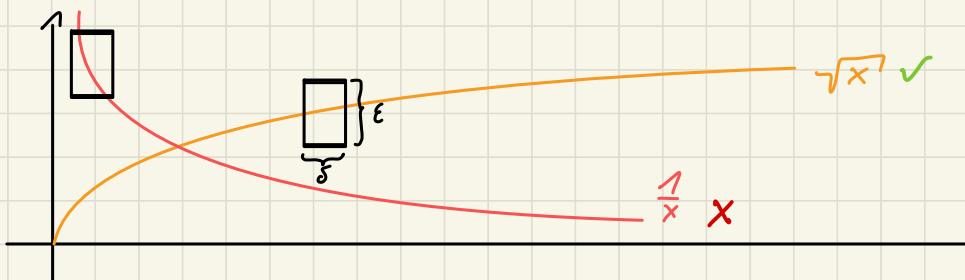
\Leftrightarrow Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt immer $f(x_1) < f(x_2)$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton $\Leftrightarrow f$ ist (streng) monoton wachsend oder f ist (streng) monoton fallend

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig

\Leftrightarrow Für (x_n) und (y_n) Folgen in D mit $x_n - y_n \rightarrow 0$, so gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



gleichmäßig stetig \Rightarrow stetig

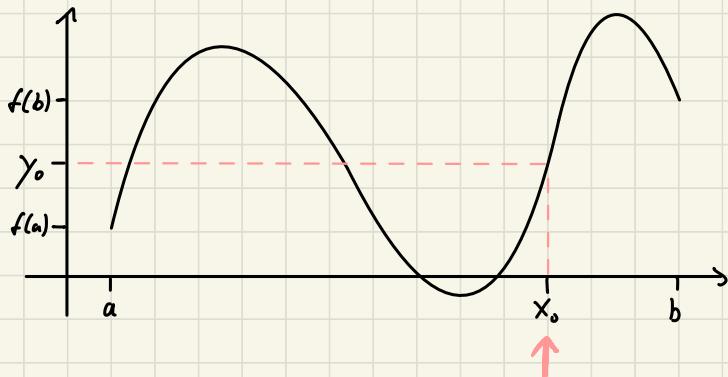
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig

$\Leftrightarrow \exists L \geq 0 \ \forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

f ist in x_0 stetig $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

falls x_0 Häufungspunkt in D ist $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Zwischenwertsatz $a, b \in \mathbb{R}; a < b; f \in C([a, b])$
 Sei $y_0 \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$



Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Nullstellensatz von Bolzano

Ist $f \in C([a, b])$ und $f(a) \cdot f(b) \leq 0$:

\Rightarrow Es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$

Nebenbei:

$$E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$

$\Rightarrow f(D)$ ist kompakt

Sei $f \in C([a, b]) \Rightarrow A := \min f([a, b])$
 $B := \max f([a, b])$
 $f([a, b]) = [A, B] \quad \text{d.h. ist Intervall}$

Ist f auf $I := [a, b]$ streng monoton ist f auf I invertierbar
und $f^{-1} \in C(f(I))$

Satz von Heine

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$

$\Rightarrow f$ ist auf D gleichmäßig stetig