Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Sei $(a^{(k)})$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, also $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$ mit
$a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n \quad (k \in \mathbb{N})$

$(a^{(k)})$ heißt **beschränkt**

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}: \ \|a^{(k)}\| \leq c.$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungswert** von $(a^{(k)})$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: a^{(k)} \in U_\varepsilon(x_0)$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

$(a^{(k)})$ heißt **konvergent**

$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n: \ \|a^{(k)} - a\| \to 0 \quad (k \to \infty)$

Hier heißt a der **Grenzwert** von $(a^{(k)})$ und man schreibt

$$a = \lim_{k \to \infty} a^{(k)} \quad \text{oder} \quad a^{(k)} \to a \quad (k \to \infty) \quad \text{oder} \quad a^{(k)} \to a$$

$\Rightarrow$ Ist $(a^{(k)})$ nicht konvergent, so heißt $(a^{(k)})$ **divergent**

Cauchykriterium

$(a^{(k)})$ ist konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ k, l \geq k_0: \ \|a^{(k)} - a^{(l)}\| < \varepsilon.$

Bolzano - Weierstraß

Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente Teilfolge

Fax 

Ist $(a^{(k)})$ konvergent, so ist $(a^{(k)})$ beschränkt und jede Teilfolge von $(a^{(k)})$ konvergiert gegen $\lim_{k\to\infty} a^{(k)}$

Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$:

$$(a^{(k)}) \xrightarrow{(k\to\infty)} a \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}: a_j^{(k)} \xrightarrow{(k\to\infty)} a_j$$

Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ entspricht also Konvergenz der Koordinaten

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** von A

$\iff$ Es existiert eine Folge $(a^{(k)})$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $a^{(k)} \xrightarrow{(k\to\infty)} a$

A ist abgeschlossen

$\Updownarrow$

Jeder Häufungspunkt von A gehört zu A $\iff$ Für jede konvergente Folge $(a^{(k)})$ in A gilt: $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} \in A$

A ist kompakt

$\iff$ Jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu A gehört