Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (reellwertige Funktionen)

f heißt **in x_0 partiell differenzierbar nach x_i**

$:\Leftrightarrow f_{x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$ existiert

$\Rightarrow f_{x_i}(x_0)$ heißt die **partielle Ableitung von f in x_0 nach x_i**

f heißt **in x_0 partiell differenzierbar**

$:\Leftrightarrow f$ ist in x_0 partiell differenzierbar nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$.

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$

heißt **Gradient von f in x_0**

f heißt **auf D partiell differenzierbar**

$:\Leftrightarrow f$ ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. f_{x_i} **ist auf D vorhanden**

$:\Leftrightarrow f$ ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar nach x_i.

$\Rightarrow f_{x_i} : D \to \mathbb{R}$ ist die **partielle Ableitung von f nach x_i**

f heißt **auf D stetig partiell differenzierbar**

$:\Leftrightarrow f$ ist auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n} \in C(D, \mathbb{R})$ (sind stetig)

Satz von Schwarz

Sei: $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Jede partielle Ableitung von f der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentation. ($\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$)

f heißt **in x_0 differenzierbar**

$$:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{\|h\|} = 0$$

„$\cdot$" Skalarprodukt

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Dann:

$\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig und in x_0 partiell differenzierbar

$\Rightarrow$ a von oben ist eindeutig und es gilt $a = \text{grad} f(x_0)$

Dann heißt $f'(x_0) := a = \text{grad} f(x_0)$
die **Ableitung von f in** x_0.

D.h.: f ist in x_0 differenzierbar

$\Leftrightarrow$ f ist in x_0 partiell differenzierbar
UND $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \text{grad} f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$

Sei f auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ seien in x_0 stetig

$\Rightarrow$ f ist in x_0 differenzierbar.

Insbesondere: $f \in C^1(D, \mathbb{R}) \Longrightarrow f$ ist auf D differenzierbar

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g = (g_1, \dots, g_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

g heißt **in $t_0 \in I$ differenzierbar**

$\Longleftrightarrow$ $g_1, \dots, g_n$ sind in $t_0 \in I$ differenzierbar.

$\Rightarrow$ $g'(t_0) = (g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0))$

Seien $x^{(0)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$S[x^{(0)}, \dots, x^{(m)}] := \bigcup_{j=1}^{m} S[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$$

heißt **Streckenzug** durch $x^{(0)}, \dots, x^{(m)}$.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt ein **Gebiet**

M ist offen und zu je zwei Punkten $a, b \in M$ existieren $x^{(0)}, \dots, x^{(m)}$ mit

$$a = x^{(0)}, \; b = x^{(m)} \quad \text{und} \quad S[x^{(0)}, \dots, x^{(m)}] \subseteq M$$

Kettenregel

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t_0)$$

Skalarprodukt

Mittelwertsatz

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf D differenzierbar, es sein $a, b \in D$ und $S[a,b] \subseteq D$.

Dann existiert ein $\xi \in S[a,b]$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

Daraus folgt auch:

Ist D ein Gebiet, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D und gilt $f'(x) = 0$ $(x \in D)$, so ist f auf D konstant.

Ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ heißt **Richtung** oder **Richtungsvektor**

Sei $x_0 \in D$. f heißt **in x_0 in Richtung a differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ Es existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ heißt **Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung a**

Falls $a = e_j$ Einheitsvektor:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = f_{x_j}(x_0)$$

Falls f in x_0 differenzierbar:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$$

Für $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ und $a := \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$$

$\Rightarrow$ D.h. $\operatorname{grad} f(x_0)$ zeigt in die Richtung des höchsten Anstiegs

Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in D$.

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt **Hesse-Matrix von f in x_0.** (symmetrisch)

Satz von Taylor

Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $S[x_0, x_0+h] \subseteq D$.

Dann existiert ein $\xi \in S[x_0, x_0+h]$ mit

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}\left(H_f(\xi)\, h\right) \cdot h$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, g hat in $x_0 \in M$ ein

- lokales Maximum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: g(x) \leq g(x_0)$
- lokales Minimum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: g(x) \geq g(x_0)$
- globales Maximum $\Leftrightarrow \forall x \in M: g(x) \leq g(x_0)$
- globales Minimum $\Leftrightarrow \forall x \in M: g(x) \geq g(x_0)$

Ist f in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar und hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$

Ist $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, so gilt:

$H_f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum
$H_f(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Maximum
$H_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow$ f hat in x_0 kein lokales Extremum