Raum $\mathbb{R}^n$

$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$; $e_n := (0, \dots, 0, 1)$

heißen **Einheitsvektoren**

Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ heißt **Skalarprodukt** von x und y
- $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ heißt **Norm** von x.

  $\|x\|^2 = x \cdot x$
- $\|x - y\|$ heißt **Abstand** von x und y

Seien $m, n, l \in \mathbb{N}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ eine reelle $m \times n$-Matrix

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ heißt **Norm von A**

Sei B eine reelle $n \times l$-Matrix

$\Rightarrow A \cdot B$ existiert

$\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Gleichungen

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung
- $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$
- $\forall j \in \{1, \dots, n\} : |x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ heißt offene Kugel um x_0 mit Radius ε bzw. ε-Umgebung von x_0

$\Rightarrow \overline{U_\varepsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon$ heißt abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

A heißt **beschränkt**

$\iff \exists c \geq 0 \; \forall a \in A: \; \|a\| \leq c$

A heißt **offen**

$\iff \forall a \in A \; \exists \delta = \delta(a) > 0: \; U_\delta(a) \subseteq A$

A heißt **abgeschlossen**

$\iff \mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen

A heißt **kompakt**

$\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen

$\mathbb{R}^n$ ist offen, $\quad$ $\emptyset$ ist offen,
$\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\quad$ $\emptyset$ ist abgeschlossen

offene Kugeln sind offen

abgeschlossene Kugeln sind nicht offen
abgeschlossene Kugeln sind kompakt

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist abgeschlossen