Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (vektorwertige Funktionen)

Sei $x_0 \in D$.

f heißt **in x_0 partiell differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ Alle f_j sind in x_0 partiell differenzierbar

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0) := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Das ist die **Jacobi-Matrix von f in x_0.**

$f \in C^p(D, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f_j \in C^p(D, \mathbb{R}) \quad (j = 1, \dots, m)$

f heißt **in $x_0 \in D$ differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine $m \times n$-Matrix A mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0$$

$\Leftrightarrow$ Alle f_j sind in x_0 differenzierbar

$\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig

$\Rightarrow$ f ist in x_0 partiell differenzierbar

$\Rightarrow$ die Matrix A in obiger Definition ist eindeutig bestimmt:
$A = J_f(x_0)$

(in x_0 db) $\Rightarrow$ $f'(x_0) := J_f(x_0)$ heißt die **Ableitung von f in x_0**

Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D vorhanden und in x_0 stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.

Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, so ist f auf D differenzierbar.

Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrixprodukt}}}{\cdot} f'(x_0)$$

Satz über Implizit definierte Funktionen

Es sei $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Dann existieren $\delta, \eta > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

- $U_\delta(x_0) \times U_\eta(y_0) \subseteq D$
- $\forall x \in U_\delta(x_0) \; \exists_1 \, y =: g(x) \in U_\eta(y_0): \; f(x, y) = 0$
- $g \in C^1(U_\delta(x_0), \mathbb{R}^p)$
- $\forall x \in U_\delta(x_0): \; \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$
- $\forall x \in U_\delta(x_0): \; g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right)$

(Falls $f \in C^l(D, \mathbb{R}^p)$, $l \geq 2$ ist: $\quad g \in C^l(U_\delta(x_0), \mathbb{R}^p)$)

Umkehrsatz

Sei: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in D$.
Ist $\det f'(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(U_\delta(x_0))$ ist offen

f ist auf $U_\delta(x_0)$ injektiv

$f^{-1}: f(U_\delta(x_0)) \to U_\delta(x_0)$ ist in $C^1(f(U_\delta(x_0)), \mathbb{R}^n)$,

$$\det f'(x) \neq 0 \quad (x \in U_\delta(x_0))$$

und

$$(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \qquad (y \in f(U_\delta(x_0))).$$