

Konvergenz im \mathbb{R}^n

Sei $(a^{(k)})$ eine Folge im \mathbb{R}^n , also $(a^{(k)}) = (a^{(k,1)}, a^{(k,2)}, \dots)$ mit
 $a^{(k)} = (a_n^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n \quad (k \in \mathbb{N})$

$(a^{(k)})$ heißt **beschränkt**

$$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}: \|a^{(k)}\| \leq c.$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungswert** von $(a^{(k)})$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: a^{(k)} \in U_\varepsilon(x_0) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}.$$

$(a^{(k)})$ heißt **konvergent**

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n: \|a^{(k)} - a\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Hier heißt a der **Grenzwert** von $(a^{(k)})$ und man schreibt

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} \text{ oder } a^{(k)} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty) \text{ oder } a^{(k)} \rightarrow a$$

\Rightarrow Ist $(a^{(k)})$ nicht konvergent, so heißt $(a^{(k)})$ **divergent**

Cauchy Kriterium

$$(a^{(k)}) \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad k, l \geq k_0: \|a^{(k)} - a^{(l)}\| < \varepsilon.$$

Bolzano - Weierstraß

Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente Teilfolge

Fax



Ist $(a^{(k)})$ konvergent, so ist $(a^{(k)})$ beschränkt und jede Teilfolge von $(a^{(k)})$ konvergiert gegen $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)}$

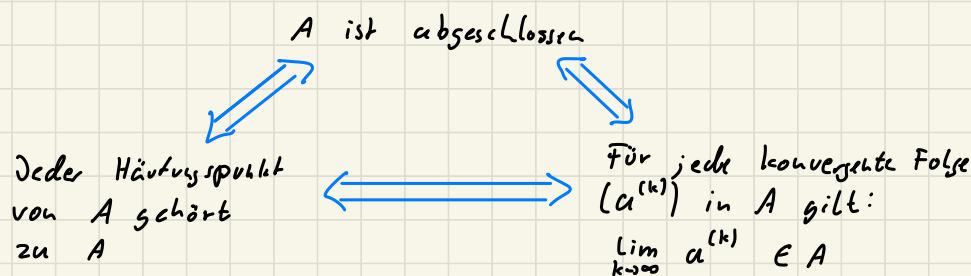
Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(a^{(k)}) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} a \iff \forall j \in \{1, \dots, n\} : a_j^{(k)} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} a_j$$

Konvergenz im \mathbb{R}^n entspricht also Konvergenz der Koordinaten

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt von A

\Leftrightarrow Es existiert eine Folge $(a^{(k)})$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $a^{(k)} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} x_0$



A ist kompakt

\Leftrightarrow Jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu A gehört