Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{heißt} \quad \textbf{Potenzreihe}$$

Definiere dazu

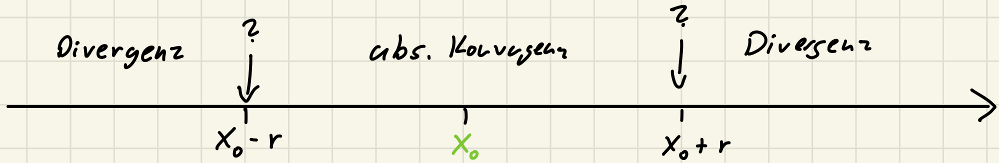
$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \left.\begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}\right\} \text{"} = \frac{1}{\rho} \text{"}$$

r ist der **Konvergenzradius der Potenzreihe**

Je nachdem wie x liegt lassen sich Aussagen treffen:



Falls $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ ist und $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ konvergiert, hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ den Konvergenzradius

$$L := \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Cosinus

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Sinus

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

$-\sin(x) = \sin(-x)$

$\cos(x) = \cos(-x)$