Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}\cdot y_1(x) + a_{12}\cdot y_2(x) + \dots + a_{1n}\cdot y_n(x) + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}\cdot y_1(x) + a_{n2}\cdot y_2(x) + \dots + a_{nn}\cdot y_n(x) + b_n(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y'(x) = A\,y(x) + b(x)$$

Bsp.:

$$y'(x) = A\,y(x) + b; \quad y(0) = y_0;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad b(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ 2xe^x \end{pmatrix}; \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

homogene Lösung

$$y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}_{=A} y(x)$$

1. Bestimme EW λ_j von A und alg. Vielfachheiten k_j

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\underbrace{(2-\lambda)(2+\lambda)}_{3.\text{ bin. Formel}} + 4$$

$$= -(4-\lambda^2) + 4 = \lambda^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad k_1 = 2$

2. Ordne die Eigenwerte: $\{\lambda_{m+s+1} = \overline{\lambda_{m+1}}, \dots, \lambda_r = \overline{\lambda_{m+s}}\} \notin M$

$$M := \{\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_m}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+s}}_{\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\}$$

$M := \{0\}$

3. Bestimme für jeden Eigenwert eine Basis von $V_j := \ker[(A - \lambda_j \mathbb{1})^{k_j}]$

$$\rightsquigarrow \ker(A - 0\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\ker[(A - 0\mathbb{1})^2] = \ker(A^2) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

ergänzen

4. $\lambda_j \in M$ und v ein Basisvektor von V_j.

Setze $$y(x) := e^{\lambda_j x} \cdot \sum_{l=0}^{k_j - 1} \frac{x^l}{l!} \cdot (A - \lambda_j \mathbb{1})^l \cdot v$$

$$= e^{\lambda_j x} \cdot \left(v + \frac{x}{1!}(A - \lambda_j \mathbb{1})v + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda_j \mathbb{1})^2 v + \dots\right)$$

Falls $\lambda_j \in \mathbb{R}$: y ist eine Lösung

Falls $\lambda_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ sind linear unabhängige Lösungen

$$\rightsquigarrow y_1(x) = e^{0x}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad y_2(x) = e^{0x}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\cdot(A - 0\mathbb{1})\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1+2x \\ 4x \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow y_1$ & y_2 bilden ein Fundamentalsystem des homogenen DGL-Systems

5. Die Allgemeine Lösung setzt sich aus dem Fundamentalsystem zusammen

$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ ist die allgemeine Lösung des DGL-Systems

inhomogene Lösung

1. Für ein Fundamentalsystem $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ (der homogenen Gleichung) definiere

$$Y(x) := (y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow Y(x)$ ist $n\times n$ Matrix namens Fundamentalsystem/-matrix

Setze $$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+1 \\ 2 & 4x \end{pmatrix}$$

2. Nutze Ansatz $y_p(x) = Y(x)\cdot c(x) \quad (c: I \to \mathbb{R}^n)$

y_p ist eine Lösung $\iff c'(x) = (Y(x))^{-1} b(x)$

Wähle dann Stammfunktion $c(x) = \int (Y(x))^{-1} b(x)\, dx$ und erhalte y_p.

$$\Rightarrow (Y(x))^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4x & -(2x+1) \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & x + \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow c'(x) = (Y(x))^{-1}\cdot b(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Wähle } c(x) = \begin{pmatrix} e^x(x-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $y_p(x) = (x-1)e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ allgemeine inhomogene Lösung:

$$y(x) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2x+1 \\ 4x \end{pmatrix} + (x-1)e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Falls gegeben, löse AWP durch einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\cdot 0+1 \\ 4\cdot 0 \end{pmatrix} + (0-1)e^0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\iff C_1 = 2; \; C_2 = 0$

$\Rightarrow$ Die Lösung des AWPs lautet: $$y(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (x-1)e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$