# Funktionenfolgen & -reihen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$; $(f_n)$ eine Folge von Funktionen $f_n: D \to \mathbb{R}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad (n \in \mathbb{N})$

Die Funktionenfolge $(f_n)$ heißt auf $D$ punktweise konvergent

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.

Dann ist $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in D)$
die Grenzfunktion von $(f_n)$.

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf $D$ punktweise konvergent

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent

Dann ist $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in D)$
die Summenfunktion von $(f_n)$.

Beispiel:

D $= [0,1]$; $f_n(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$. Es gilt:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$f_n$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen $f$.

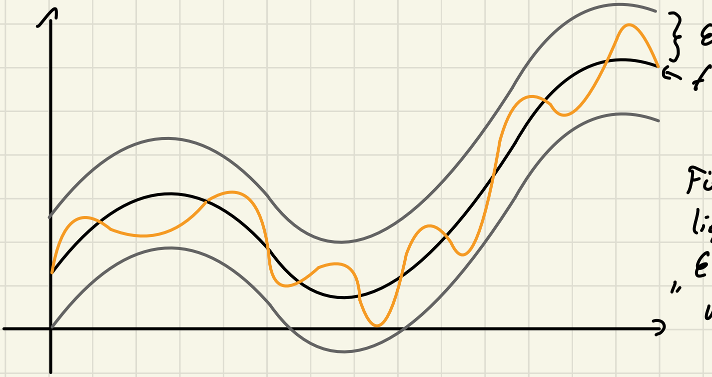
**Bemerkung:** Punktweise Konvergenz von $(f_n)$ auf $D$ gegen $f$ bedeutet:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$(f_n)$ konvergiert auf $D$ gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D: \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Anschaulich:




Für $n \geq n_0$ liegt $f_n$ im „$\varepsilon$-Schlauch" um $f$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf $D$ gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D: \; |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

glm. konv. $\Rightarrow$ punktw. konv.

Kriterien

Folge $(f_n)$ konvergiere auf $D$ punktweise gegen $f: D \to \mathbb{R}$, Folge $(\alpha_n)$ mit $\alpha_n \to 0$, $m \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\forall n \geq m \ \forall x \in D: \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Dann konvergiert $(f_n)$ auf $D$ gleichmäßig gegen $f$.

## Kriterium von Weierstraß

Sei $m \in \mathbb{N}$, $(c_n)$ eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D: \quad |f_n(x)| \leq c_n$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $D$ gleichmäßig

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Falls $[a,b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig.

$(f_n)$ / $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$:

Sind alle $f_n$ in $x_0 \in D$ stetig, so ist $f$ in $x_0$ stetig

Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.

Falls $(f_n)$ punktweise gegen $f$ konvergiert und $\forall n \in \mathbb{N}: f_n \in C(D)$:

$f \notin C(D) \Rightarrow f_n$ konvergiert nicht stetig

Falls $x_0$ ein Häufungspunkt ist: $\lim_{x \to x_0} \left( \lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

# Identitätssatz für Potenzreihen

Skript

Sei: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r>0$.
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in D)$$

$(x_k)$ Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \to x_0$ und $f(x_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad a_n = 0.$$

insbesondere: $r = \infty$ und $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

Internet

Potenzreihen $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ und $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$
$(x \in D)$

$(z_j)$ eine Folge mit $z_j \to x_0$ $(j \to \infty)$ und $z_j \neq a$ für alle $j$
und $P(z_j) = Q(z_j)$ für alle $j$

$\Rightarrow P(z) = Q(z)$