Lineare DGL n-te Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$Ly := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$

$(Ly)(x) = b(x)$

Bsp.: $y'''(x) - y'(x) = 3 + 2x + x^2$

homogene Lösung

$y'''(x) - y'(x) = 0$

1. Bilde char. Polynom indem y durch λ „ersetzt" wird

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

2. Bestimme Nullstellen und ordne diese wieder nach $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (ohne konjugierte komplexe Werte)

$M := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+s}\}$

Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$

$M := \{0, 1, -1\}$

3. Bilde Fundamentalsystem aus M

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Sei k_j die zugehörige alg. Vielfachheit

$\Rightarrow e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x}$ sind linear unabh. Lösungen.

Fall 2: $\lambda_j = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, d.h. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$\Rightarrow e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x), \ldots, x^{(k_j - 1)} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$

und

$e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x), x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x), \ldots, x^{(k_j - 1)} e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$

sind $2 k_j$ linear unabh. Lösungen.

Für alle $\lambda_j \in M$ erhält man ein Fundamentalsystem

$\Rightarrow y_1(x) := e^{0x} = 1$; $y_2(x) := e^x$; $y_3(x) := e^{-x}$

bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

$\Rightarrow y_h(x) = a \cdot 1 + b \cdot e^x + c \cdot e^{-x} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

bildet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

spezielle inhomogene Lösung

$y_h(x) = a + b e^x + c e^{-x} \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

$b(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Wähle einen Ansatz:
Wähle $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und q ein Polynom von Grad m so, dass entweder:

$b(x) = q(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \cos(\delta x)$

oder

$b(x) = q(x) \cdot e^{\gamma x} \cdot \sin(\delta x)$

$\Rightarrow m = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$

Nutze dann den Ansatz für y_p mit p char. Polyn. von $(Ly)(x) = 0$

Fall 1: $p(\gamma + i\delta) \neq 0$
Wähle Ansatz $y_p(x) := (\hat{q}(x) \cdot \cos(\delta x) + \tilde{q}(x) \cdot \sin(\delta x)) e^{\gamma x}$

Fall 2: $\gamma + i\delta$ ist eine ν-fache NST von p
Wähle Ansatz $y_p(x) := x^{\nu} (\hat{q}(x) \cdot \cos(\delta x) + \tilde{q}(x) \cdot \sin(\delta x)) e^{\gamma x}$

($\hat{q}, \tilde{q}$ sind undefinierte Polynome vom Grad m)

$\Rightarrow$ 0 ist einfache NST von p

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$y_p(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$

2. Bilde $m+1$ Ableitungen

$y_p'(x) = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2$

$y_p''(x) = 2A_1 + 6A_2 x$

$y_p'''(x) = 6A_2$

3. Nutze Angabe und setze mit $b(x)$ gleich

$\rightsquigarrow 6A_2 - A_0 - 2A_1 x - 3A_2 x^2 = 3 + 2x + x^2$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\left.\begin{array}{rcl} -A_0 + 6A_2 &=& 3 \\ -2A_1 &=& 2 \\ -3A_2 &=& 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_0 = -5,\ A_1 = -1,\ A_2 = -\tfrac{1}{3}$$

$\Rightarrow y_p = -5x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$

4. Die allgemeine Lösung lässt sich mittels $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ bilden

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a + b e^x + c e^{-x} - 5x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$