Stetigkeit

Begriffe

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

f heißt **in x_0 stetig** $\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$.

f heißt **auf D stetig** $\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ stetig

$C(D) := C(D, \mathbb{R}) := \{g: D \to \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}$

> $f, g: D \to \mathbb{R}$ Funktionen stetig in x_0; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
>
> $\Rightarrow \alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, $|f|$ sind stetig in x_0

D heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow$ Für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in D$

$\Leftrightarrow$ Jede Häufungspunkt von D gehört zu D

D heißt **kompakt** $\Leftrightarrow$ Jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in D$

$\Leftrightarrow$ D ist beschränkt und abgeschlossen.

Ist außerdem $D \neq \emptyset$, so existieren $\min D$ und $\max D$

Ist eine Menge M kompakt $\Rightarrow$ M ist abgeschlossen

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt** $\Leftrightarrow$ $f(D)$ ist beschränkt

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \; \forall x \in D: |f(x)| \leq c$

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend**
$\iff$ Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt immer $f(x_1) \leq f(x_2)$

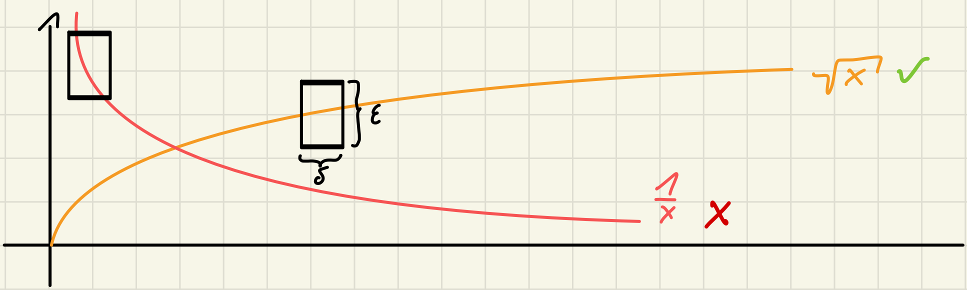
$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend**
$\iff$ Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt immer $f(x_1) < f(x_2)$

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **(streng) monoton** $\iff$ f ist (streng) monoton wachsend oder f ist (streng) monoton fallend

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**

$\iff$ Für (x_n) und (y_n) Folgen in D mit $x_n - y_n \to 0$, so gilt $f(x_n) - f(y_n)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$



gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**

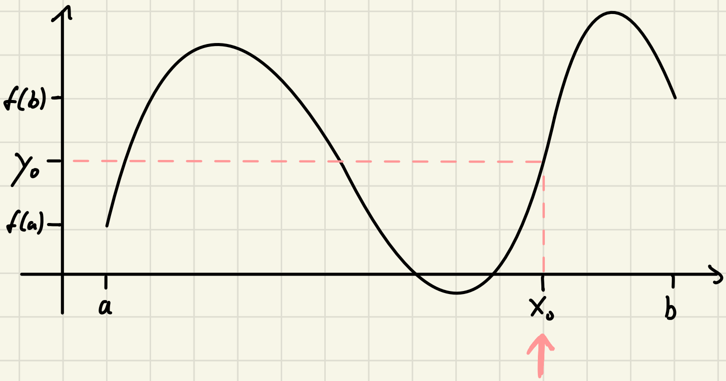
$\iff \exists L \geq 0 \; \forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

f ist in x_0 stetig $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$:
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

falls x_0 Häufungspunkt in D ist $\iff$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Zwischenwertsatz

$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f \in C([a,b])$
Sei $y_0 \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$



Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Nullstellensatz von Bolzano

Ist $f \in C([a,b])$ und $f(a) \cdot f(b) \leq 0$:

$\Rightarrow$ Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$

Nebenbei:

$E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$

$\Rightarrow f(D)$ ist kompakt

Sei $f \in C([a,b]) \Rightarrow$ $A := \min f([a,b])$
$B := \max f([a,b])$
$f([a,b]) = [A,B]$ d.h. ist Intervall

Ist f auf $I := [a,b]$ streng monoton ist f auf I invertierbar und $f^{-1} \in C(f(I))$

Satz von Heine

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$

$\Rightarrow f$ ist auf D gleichmäßig stetig