Funktionenfolgen & -reihen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$; (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n: D \to \mathbb{R}$
und $s_n := f_1 + f_2 + \ldots + f_n \quad (n \in \mathbb{N})$

Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.

Dann ist $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in D)$
die Grenzfunktion von (f_n).

Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D punktweise konvergent

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent

Dann ist $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in D)$
die Summenfunktion von (f_n).

Beispiel:

D $= [0,1]$; $f_n(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$. Es gilt:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

f_n konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen f.

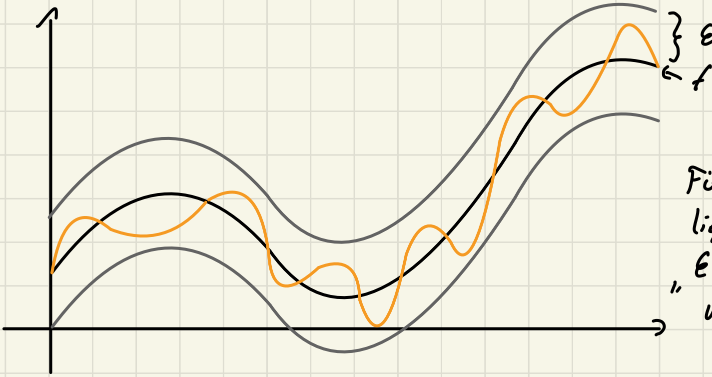
Bemerkung: Punktweise Konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in D: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Anschaulich:



Für $n \geq n_0$ liegt f_n im „ε-Schlauch" um f

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in D: \ |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

glm. konv. $\Rightarrow$ punktw. konv.

Kriterien

Folge (f_n) konvergiere auf D punktweise gegen $f: D \to \mathbb{R}$,
Folge (α_n) mit $\alpha_n \to 0$, $m \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\forall n \geq m \ \forall x \in D: \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

Kriterium von Weierstraß

Sei $m \in \mathbb{N}$, (c_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D: \quad |f_n(x)| \leq c_n$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$,
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Falls $[a,b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig.

(f_n) / $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$:

Sind alle f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist f in x_0 stetig

Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.

Falls (f_n) punktweise gegen f konvergiert und $\forall n \in \mathbb{N}: f_n \in C(D)$:

$$f \notin C(D) \implies f_n \text{ konvergiert nicht stetig}$$

Falls x_0 ein Häufungspunkt ist: $\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

Identitätssatz für Potenzreihen

Sei: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r>0$.
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in D)$$

(x_k) Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \to x_0$ und $f(x_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad a_n = 0.$$

insbesondere: $r = \infty$ und $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}$