Die Fouriertransformation

Terminologie

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf $[a,b]$ stückweise stetig**

$\Leftrightarrow \exists\, t_0, t_1, \dots, t_m \in [a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{und} \quad g \in C\big((t_{j-1}, t_j)\big) \quad (j = 1, \dots, m)$$

UND es existieren die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$g(a+),\ g(b-),\ g(t_j+),\ g(t_j-) \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf $[a,b]$ stückweise glatt**

$\Leftrightarrow \exists\, t_0, t_1, \dots, t_m \in [a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{und} \quad g \in C^1\big((t_{j-1}, t_j)\big) \quad (j = 1, \dots, m)$$

UND es existieren die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$g(t_j+),\ g(t_j-),\ g'(t_j+),\ g'(t_j-) \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$g(a+),\ g'(a+),\ g(b-),\ g'(b-).$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig/glatt**

$\Leftrightarrow$ g ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise stetig/glatt

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig. Dann gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g'(x_0) = \frac{1}{2}\big(g'(x_0+) + g'(x_0-)\big)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f: I \to \mathbb{C}$ eine Funktion
$u(x) := \mathrm{Re}(f)$, $v(x) := \mathrm{Im}(f)$, sodass $f(x) = u(x) + i \cdot v(x)$

f heißt auf I differenzierbar

$\Leftrightarrow$ u und v sind auf I differenzierbar
$\Rightarrow f'(x) := u'(x) + i \cdot v'(x)$

Sei $I = [a,b]$ und $u, v \in R([a,b])$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \cdot \int_a^b v(x)\, dx$$

und f heißt integrierbar auf I.
Man schreibt: $f \in R([a,b], \mathbb{C})$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f \in R([a,b], \mathbb{C})$ für jedes Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ heißt (absolut) konvergent

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(f(t))\, dt$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}(f(t))\, dt$ sind (absolut) konvergent

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(f(t))\, dt + i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}(f(t))\, dt$$

Ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ absolut konvergent, so heißt f absolut integrierbar

Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig
Es gilt:

- f ist absolut integrierbar $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ ist konvergent

- Ist f absolut integrierbar und $|g| \leq |f|$ auf $\mathbb{R}$,
  so ist g absolut integrierbar

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, f und f' absolut integrierbar und f habe endlich viele Unstetigkeitsstellen
Dann ist f auf $\mathbb{R}$ beschränkt und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar
Für $s \in \mathbb{R}$ definiere $g_s(t) := f(t) \cdot e^{-ist}$ $(t \in \mathbb{R})$ Es gilt:

- g_s ist stückweise stetig
- g_s ist absolut integrierbar
- Für $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ist}\, dt$ gilt:
  - $\hat{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt
  - $\lim_{s \to \pm\infty} \hat{f}(s) = 0$ (Satz von Riemann-Lebesgue)
  - $\hat{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig

$\hat{f}$ heißt die **Fouriertransformierte** von f.
Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ heißt **Fouriertransformation** und ist Isomorphismus von S nach S (linear und bijektiv)

Cauchyscher Hauptwert

Falls $\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx$ existiert,
nennt man das den Cauchyschen-Hauptwert und man schreibt

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx$$

Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{0} f(x)\, dx + \lim_{\alpha \to \infty} \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx$$

$$\neq \lim_{\gamma \to \infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(x)\, dx$$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar.
Dann:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ist} \, ds = \frac{1}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right)$$

Falls f stetig auf $\mathbb{R}$ ist:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \; f(t) = CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{ist} \, ds$$

Sei $V := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} :$ f ist stückweise stetig und absolut integrierbar $\}$

Sei $f \in V$ (V komplexer VR), $h \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f_h(t) := f(t+h)$$

Dann ist $f_h \in V$ und $\hat{f}_h(s) = e^{ish} \hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R})$

Seien $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen so, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) \cdot f_2(x) \, dx$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ konvergent ist.

Dann heißt $f_1 * f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(f_1 * f_2)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) \cdot f_2(x) \, dx$$

die **Faltung** von f_1 und f_2.

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar und f_1 beschränkt.
Dann:

- $\forall t \in \mathbb{R}: \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) \cdot f_2(x)\, dx$ konvergiert absolut.
- $f_1 * f_2$ ist stetig und absolut integrierbar und $(\widehat{f_1 * f_2})(s) = \hat{f}_1(s) \cdot \hat{f}_2(s)$
- $|(\widehat{f_1 * f_2})(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|\, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, stetig und absolut integrierbar.
Weiter sei f' absolut integrierbar. Dann gilt:

$$f' \in V \quad \text{und} \quad \underline{\widehat{f'}(s) = is \cdot \hat{f}(s)} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

f sei stetig und absolut integrierbar.
f heißt **bandbeschränkt**

$\Leftrightarrow$ Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f ist außerhalb eines beschränkten Intervalls 0
$\Rightarrow$ In diesem Fall kann man f mit einem Raster $\{kT : k \in \mathbb{Z}\}, T > 0$ darstellen

Abtasttheorem von Shannon

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar und

$$\exists b > 0: \hat{f}(s) = 0 \quad (s \in \mathbb{R} \setminus (-b, b)).$$

Dann gilt für jedes $T < \frac{\pi}{b}$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit $\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ „Sinus cardinalis"

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt **schnell fallend**

$:\Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}_0: \ t \mapsto t^m f^{(n)}(t)$ ist beschränkt auf $\mathbb{R}$.

$S := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ ist schnell fallend} \}$ heißt **Schwartz-Raum**

Seien $f, g \in S$, p ein Polynom und $k \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $k^{(n)}$ beschränkt auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:

- f ist absolut integrierbar und $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}: \ \alpha f + \beta g \in S$
- $kf, pf, \overline{f}, \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f), t \mapsto f(-t) \in S$.
- $\hat{f} \in S$ und $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ist} \, ds \quad (t \in \mathbb{R})$
- $f^{(n)} \in S \ (n \in \mathbb{N})$ und $\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R})$
- $f_h \in S \ (h \in \mathbb{R})$ und $\hat{f_h}(s) = e^{ish} \cdot \hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R})$
- $f * g \in S$ und $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$
- Für $h(t) := e^{\frac{-t^2}{2}} \ (t \in \mathbb{R})$ gilt: $h \in S$ und $\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h$ auf $\mathbb{R}$

Für $f, g \in S$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot \overline{\hat{g}(s)} \, ds$$

Insb. für $f = g$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|^2 \, ds$$