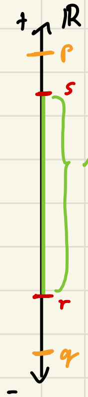
Allgemein wichtige Formeln

wichtige Gleichungen

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1 + nx$
  $(x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1)$

Sei: $M \subseteq \mathbb{R}$



$\leftarrow$ eine obere Schranke

$\leftarrow$ Supremum / „kleinste obere Schranke“

falls $\in M$

$\Rightarrow s = \sup(M) = \max(M)$

$r = \inf(M) = \min(M)$

$\leftarrow$ Infimum / „größte untere Schranke

$\leftarrow$ eine untere Schranke

Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup(M)$.

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

„Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen“

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Verschiedene Mengen

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

„rationale Zahlen“

$\Rightarrow p$ Primzahl : $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

Rationale Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

Random Stuff

$\log(x) := \ln(x) := E^{-1}(x) \quad (x \in (0,\infty))$

$\log(1) = 0, \quad \log(e) = 1$

$a^x = e^{x \cdot \log(a)}$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

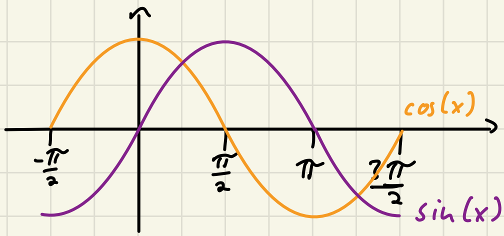
$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

$\log(a^x) = \log\left(e^{x \cdot \log(a)}\right) = x \cdot \log(a)$

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

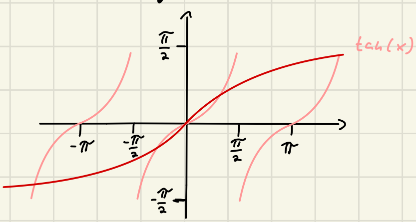
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\log(x^m) = m \cdot \log(x)$



$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$



$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\sin(x + \pi) = -\sin \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

$\sin(z + w) = \sin(z) \cdot \cos(w) + \sin(w) \cdot \cos(z)$

$\cos(z + w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(z) \cdot \sin(w)$

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$

geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 1)$$

Folgen und Konvergenz

$X \subseteq \mathbb{R}$ Menge

$a : \mathbb{N} \to X$
ist eine Folge in X

z. B.: $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

X ist abzählbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$.

X ist überabzählbar $\Leftrightarrow$ X ist <u>nicht</u> abzählbar.

Für eine Folge (a_n) sei: $M := \{a_1, a_2, \dots\}$

(a_n) ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$\Leftrightarrow$ M ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
$= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$
„ε-Umgebung von a"

(a_n) ist konvergent, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ existiert

$\Rightarrow$ (a_n) ist divergent, wenn der Grenzwert nicht existiert.

Falls $\forall \varepsilon > 0$

wichtige Grenzwerte

(c Konstante)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \quad \text{für } |b| < 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ existiert nicht $\Rightarrow$ divergent

Grenzwertkriterien

Monotoniekriterium

(a_n) ist monoton wachsend/fallend und ist nach oben/unten beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

idk ob das wichtig ist aber es steht auf S. 21 als wichtig

$(x, y \geq 0;\ p \in \mathbb{N})$

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x-y|$$

Falls (a_n) konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = a \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{(n\to\infty)} \sqrt[p]{a}$$

$a_n := \sqrt[n]{n}$; $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$

$a_n := \sqrt[n]{c}$; $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{c}) = 1$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \approx 2{,}7$$

Teilfolgen

Sei (a_n) eine Folge

$(n_1, n_2, n_3, \dots)$ sei eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

Mit $b_k = a_{n_k}$ (also $b_1 = a_{n_1}, \dots$):

(b_k) ist eine Teilfolge von (a_n)

Häufungswert

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist HW

$\iff$ Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \alpha \quad (k \to \infty)$

$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist HW von } a_n\}$

z.B.: $a_n = (-1)^n$

$\Rightarrow a_{2k} \to 1, \quad a_{2k-1} \to -1 \quad \Rightarrow \{-1, 1\} \subseteq H(a_n)$

Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in $\mathbb{Q}$ mit $(r_n) \xrightarrow{(n \to \infty)} x$.

Sei (a_n) konvergent gegen a und (a_{n_k}) eine beliebige Teilfolge:

$a_{n_k} \xrightarrow{(k \to \infty)} a$.

$m \in \mathbb{N}$ ist **niedrig** für a_n, wenn: $\forall n \geq m : a_n \geq a_m$

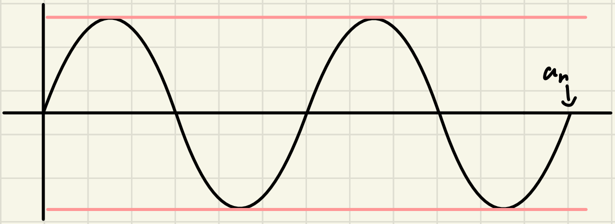
Für jede Folge a_n existiert eine monotone Teilfolge

Bolzano - Weierstraß

(a_n) sei beschränkt $\Rightarrow H(a_n) \neq \emptyset \Rightarrow (a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge

In diesem Fall gilt auch:

$H(a_n)$ ist beschränkt, $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$
$\hookrightarrow$ $\max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$ existieren



Limes superior

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \max H(a_n)$$

Limes inferior

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \min H(a_n)$$

Ist a_n konvergent, so ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow n, m > n_0 : \quad |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

a_n heißt eine **Cauchy-Folge**

a_n ist konvergent $\Leftrightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge

Cauchy-Kriterium

Falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge und somit konvergent!

Unendliche Reihen

Für eine Folge (a_n) wird $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
als eine **unendliche Reihe** bezeichnet

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n \to \infty} s_n$ der Reihenwert

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

Eulersche Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

alternierende harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent (Leibnizkriterium)

Exponentialreihe

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

auch Exponentialfunktion

- $\forall r \in \mathbb{Q}: \quad E(r) = e^r$
- $E(x) > 1$, falls $x > 0$, $E(x) > 0$, falls $x \in \mathbb{R}$
- $E(-x) = E(x)^{-1}$
- $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$, streng monotones Wachstum

Reihenwert einer Umordnung

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent

Es existiert eine Umordnung (b_n) von (a_n), sodass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \in \mathbb{R}$ beliebig
Es existiert eine divergierende Umordnung

Monotoniekriterium

Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Cauchykriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \to 0 \; (n \to \infty)$ **! nicht $\Leftarrow$!**

Analog: Gilt $a_n \not\to 0 \; (n \to \infty)$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Leibnizkriterium

(b_n) sei eine Folge mit
- (b_n) ist monoton fallend
- $b_n \to 0 \; (n \to \infty$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ ist konvergent

Majorantenkriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Definiere: $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

1. Ist (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent
2. Ist (c_n) beschränkt, definiere $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$

   Falls:
   - $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
   - $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

   ($\alpha = 1 \Rightarrow$??)

Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

1. Ist $c_n \geq 1$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
2. Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$, $\beta := \liminf_{n\to\infty} c_n$.
   - Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
   - Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

$\Rightarrow$ Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, c_n sei konvergent, $\alpha := \lim_{n\to\infty} c_n$

Dann:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent}, & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \langle\text{keine Aussage}\rangle, & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

Cauchyprodukt

Für zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird definiert für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 \quad = \text{Cauchy produkt}$$

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Terminologie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **absolut konvergent** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent (stärker als nur konvergent)

in diesem Fall:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent
- $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine Bijektion

Mit $b_n := a_{\varphi(n)}$ ist (b_n) nun eine **Umordnung** von (a_n)

Ist a_n konvergent, so ist b_n konvergent,
ist a_n absolut konvergent, so ist b_n absolut konvergent

Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{heißt} \quad \textbf{Potenzreihe}$$

Definiere dazu

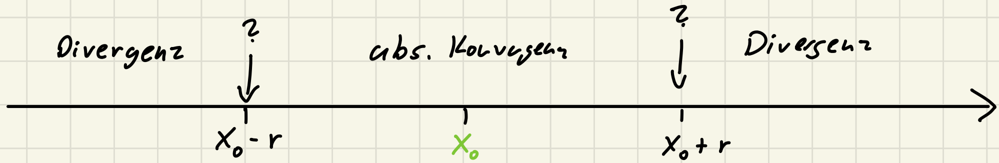
$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \left.\begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}\right\} \text{"} = \frac{1}{\rho}\text{"}$$

r ist der **Konvergenzradius der Potenzreihe**

Je nachdem wie x liegt lassen sich aussagen treffen:



Falls $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ ist und $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ konvergiert, hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ den Konvergenzradius

$$L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Cosinus

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sinus

$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$-\sin(x) = \sin(-x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

q-adische Entwicklung

Für $x \in \mathbb{R}$ existiert eine größter $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$

$[x] := k$ „Gauß-Klammern"

Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Sei (y_n) eine Folge mit $y_0 \in \mathbb{N}_0$ und $y_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$

$$\Rightarrow \quad y_0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{q^n}$$

heißt ein q-adischer Bruch

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist ihre q-adische Entwicklung eindeutig bestimmt

$q = 10$: Dezimalentwicklung
$q = 2$: Dualentwicklung

Grenzwerte bei Funktionen

$D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist **Häufungspunkt** von D, wenn eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \to x_0$

$$x_0 \text{ ist HP von } D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

$$D_\delta := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$$

$f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen

$f \leq g$ auf M, wenn gilt: $f(x) \leq g(x)$ $(x \in M)$.

Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_\delta(x_0)$: $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\quad \Leftrightarrow \quad$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ ist $f(x_n)$ konvergent

Cauchykriterium $\quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0)$: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $g: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $g(x_n) \to \infty$

(S. 59)

Stetigkeit

Begriffe Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

f heißt **in x_0 stetig** $\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$.

f heißt **auf D stetig** $\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ stetig

$C(D) := C(D, \mathbb{R}) := \{g: D \to \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}$

> $f, g: D \to \mathbb{R}$ Funktionen stetig in x_0; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
>
> $\Rightarrow \alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, $|f|$ sind stetig in x_0

D heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow$ Für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in D$

$\Leftrightarrow$ Jede Häufungspunkt von D gehört zu D

D heißt **kompakt** $\Leftrightarrow$ Jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in D$

$\Leftrightarrow$ D ist beschränkt und abgeschlossen.

Ist außerdem $D \neq \emptyset$, so existieren $\min D$ und $\max D$

Ist eine Menge M kompakt $\Rightarrow$ M ist abgeschlossen

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt** $\Leftrightarrow$ $f(D)$ ist beschränkt

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \ \forall x \in D: |f(x)| \leq c$

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend**

$\iff$ Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt immer $f(x_1) \leq f(x_2)$

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend**

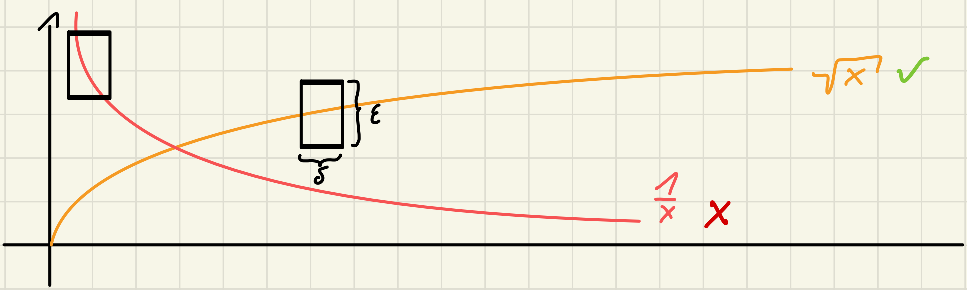
$\iff$ Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt immer $f(x_1) < f(x_2)$

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **(streng) monoton** $\iff$ f ist (streng) monoton wachsend oder f ist (streng) monoton fallend

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**

$\iff$ Für (x_n) und (y_n) Folgen in D mit $x_n - y_n \longrightarrow 0$, so gilt $f(x_n) - f(y_n)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$



gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**

$\iff \exists L \geq 0 \ \forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

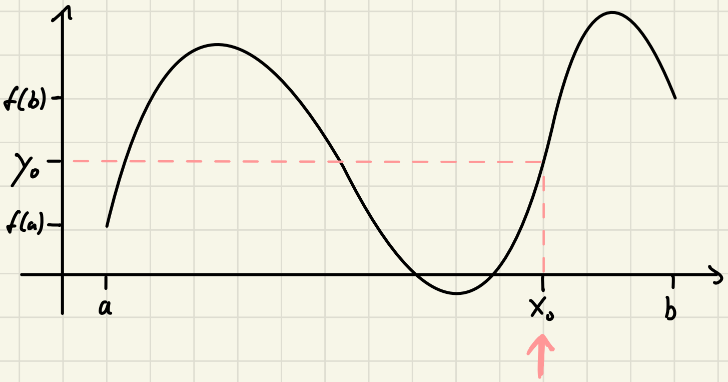
f ist in x_0 stetig $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

falls x_0 Häufungspunkt in D ist $\iff$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Zwischenwertsatz

$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f \in C([a,b])$

Sei $y_0 \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$



Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Nullstellensatz von Bolzano

Ist $f \in C([a,b])$ und $f(a) \cdot f(b) \leq 0$:

$\Rightarrow$ Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$

Nebenbei:

$E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$

$\Rightarrow f(D)$ ist kompakt

Sei $f \in C([a,b]) \Rightarrow$ $A := \min f([a,b])$
$B := \max f([a,b])$
$f([a,b]) = [A,B]$ d.h. ist Intervall

Ist f auf $I := [a,b]$ streng monoton ist f auf I invertierbar und $f^{-1} \in C(f(I))$

Satz von Heine

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$

$\Rightarrow f$ ist auf D gleichmäßig stetig

Funktionenfolgen & -reihen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$; (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n: D \to \mathbb{R}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \ldots + f_n \quad (n \in \mathbb{N})$

Die Funktionenfolge (f_n) heißt **auf D punktweise konvergent**

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.

Dann ist $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in D)$
die **Grenzfunktion** von (f_n).

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **auf D punktweise konvergent**

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent

Dann ist $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in D)$
die **Summenfunktion** von (f_n).

Beispiel:

D $= [0{,}1]$; $f_n(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$. Es gilt:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

f_n konvergiert auf $[0{,}1]$ punktweise gegen f.

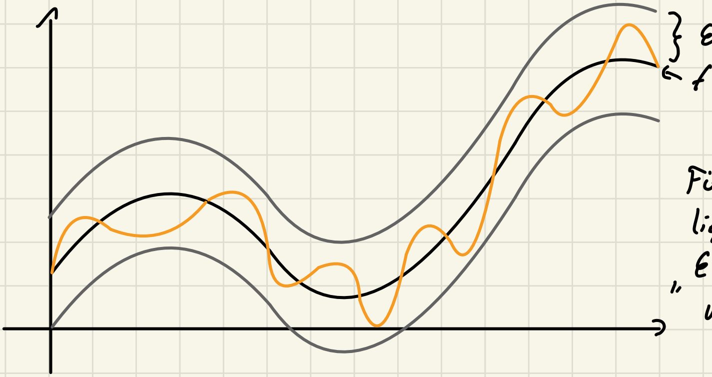
Bemerkung: Punktweise Konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D: \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Anschaulich:



Für $n \geq n_0$ liegt f_n im „ε-Schlauch" um f

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D: \; |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

glm. konv. $\Rightarrow$ punktw. konv.

Kriterien

Folge (f_n) konvergiere auf D punktweise gegen $f: D \to \mathbb{R}$,
Folge (α_n) mit $\alpha_n \to 0$, $m \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\forall n \geq m \ \forall x \in D: \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

Kriterium von Weierstraß

Sei $m \in \mathbb{N}$, (c_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D: \quad |f_n(x)| \leq c_n$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$,
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Falls $[a,b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig.

(f_n) / $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$:

Sind alle f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist f in x_0 stetig

Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.

Falls (f_n) punktweise gegen f konvergiert und $\forall n \in \mathbb{N}: f_n \in C(D)$:

$$f \notin C(D) \implies f_n \text{ konvergiert nicht stetig}$$

Falls x_0 ein Häufungspunkt ist: $\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

Identitätssatz für Potenzreihen

Skript

Sei: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r>0$.
$D := (x_0 - r, x_0 + r)$,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in D)$$

(x_k) Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \to x_0$ und $f(x_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad a_n = 0.$$

insbesondere: $r = \infty$ und $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

Internet

Potenzreihen $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ und $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$
$(x \in D)$

(z_j) eine Folge mit $z_j \to x_0$ $(j \to \infty)$ und $z_j \neq a$ für alle j
und $P(z_j) = Q(z_j)$ für alle j

$\Rightarrow P(z) = Q(z)$

Differentialrechnung

I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

f heißt in $x_0 \in D$ **differenzierbar**

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Ableitung von } f \text{ in } x_0} \text{ existiert}$$

f ist in x_0 differenzierbar
$\Downarrow$
f ist in x_0 stetig

f heißt **auf I differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in I$ differenzierbar.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $g: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$x_0 \in M$ heißt **innerer Punkt**

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(x_0) \subseteq M$

g hat in $x_0 \in M$ ein **lokales Maximum/Minimum**

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: \quad g(x) \leq g(x_0) \,/\, g(x) \geq g(x_0)$

g hat in $x_0 \in M$ ein **globales Maximum/Minimum**

$\Leftrightarrow \forall x \in M: \ g(x) \leq g(x_0) \,/\, g(x) \geq g(x_0)$

Sei f auf I differenzierbar.

Ist f' in x_0 differenzierbar $\Rightarrow$ f ist **in x_0 zweimal differenzierbar**

Ist f' auf I differenzierbar $\Rightarrow$ f ist **auf I zweimal differenzierbar**

Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt **auf I n-mal stetig differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ f ist auf I n-mal differenzierbar und $f^{(n)} \in C(I)$

$$\Downarrow$$

$$f', f'', \ldots \in C(I)$$

$C^n(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f$ ist auf I n-mal stetig differenzierbar

Differentationsregeln

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen

a) $(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (falls $f \cdot g$ diffbar)

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

d) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Kuriositäten

Ist $f \in C(I)$, streng monoton, in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Sei $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ sei innerer Punkt von I und

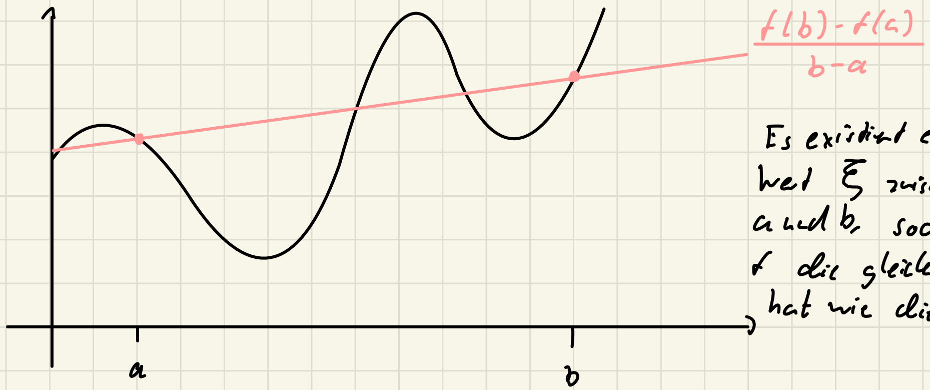
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

- Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum
- Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum
- Ist n ungerade hat f in x_0 kein lokales Extremum

Mittelwertsatz

Sei $f \in C([a,b])$ und f auf (a,b) differenzierbar. Dann:

$$\exists \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$



Es existiert ein Wert ξ zwischen a und b, sodass f die gleiche Steigung hat wie die Gerade

Regeln von l'Hospital

Sei $I := (a,b)$ (auch $a = -\infty$ und $b = \infty$ möglich)
Seien f, g auf I differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $(x \in I)$
und es sei $c = a$ oder $c = b$

$$L := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$ oder $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$, so ist $L = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Potenzreihe differenzieren

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$
$I := (x_0 - r, x_0 + r)$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $(x \in I)$.

Dann: f ist differenzierbar durch

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{mit Konvergenzradius } r$$

Abelscher Grenzwert

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0,1)$

Wenn die Potenzreihe auch in $x_0 + r$ konvergiert und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ für } x \in (x_0 - r, x_0 + r]$$

Dann: f ist stetig in $x_0 + r$

Analog für $x_0 - r$

Satz von Taylor

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f sei auf I $(n+1)$ mal differenzierbar.
Es seien $x, x_0 \in I$ und $x \neq x_0$
Dann existiert ein $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

also $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$T_n f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ ist ein Polynom von Grad $\leq n$

und heißt **Taylor-Polynom** von f im **Punkt** x_0

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ heißt **Restglied**

Das Riemann-Integral

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion; $m := \inf f([a,b])$; $M := \sup f([a,b])$

$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a,b]$

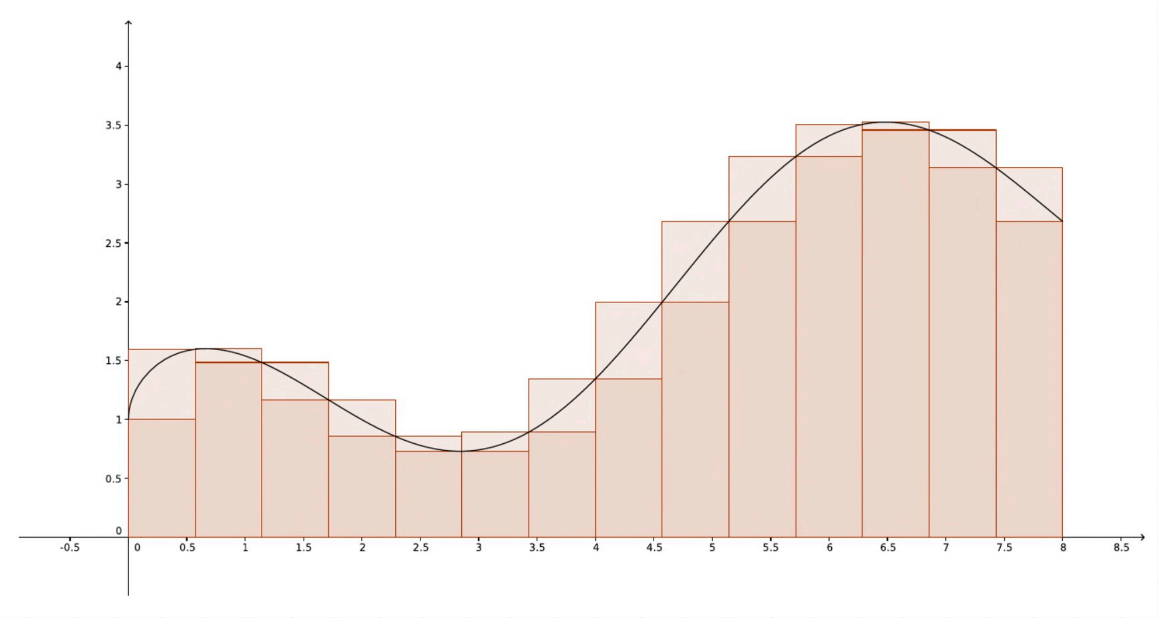
$\Leftrightarrow \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung.

$I_j := [x_{j-1}, x_j]$; $|I_j| := x_j - x_{j-1}$; $m_j := \inf f(I_j)$; $M_j := \sup f(I_j)$

$\Rightarrow \quad s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$ die **Untersumme** von f bezüglich Z

$\Rightarrow \quad S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|$ die **Obesumme** von f bzgl. Z



Sei $\quad s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung}\}$
$\quad\quad S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung}\}$

$\Rightarrow$ f heißt **Riemann-Integrierbar über** $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $s_f = S_f$

$\Rightarrow f \in R([a,b])$

Terminologie

$G, g: I \to \mathbb{R}$ Funktionen

G heißt eine Stammfunktion von g auf I

$\Leftrightarrow$ G ist auf I differenzierbar und $G' = g$

Besitzt $g: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so schreibt man für diese auch

$$\int g \, dx \quad \text{oder} \quad \int g(x) \, dx$$

Das heißt ein unbestimmtes Integral von g.

Riemannsches Integrabilitätskriterium

$$f \in R([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Z = Z(\varepsilon) \text{ Zerlegung}: \ S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f \in R([a,b])$ und besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen
Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei: $f \in R([a,b])$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

Es gilt:

- $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \quad (x,y \in [a,b])$
- F ist Lipschitz-Stetig
- Ist $f \in C([a,b]) \Rightarrow F \in C^1([a,b])$ und $F'(x) = f(x) \quad (x \in [a,b])$

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

Substitutionsregeln

Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man auch $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituiere $x = g(t)$

$\downarrow$ auf beiden Seiten ableiten

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$\Rightarrow$ „ $dx = g'(t)\,dt$ "

Seien $f, g \in R([a,b])$.

$f \leq g$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ und $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R([a,b])$

$C([a,b]) \subseteq R([a,b])$

Es sei: $c \in (a,b)$.

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b g \, dx$$

Es sei $D := f([a,b])$ und mit einem $L \geq 0$ gelte für $h : D \to \mathbb{R}$:

$$|h(s) - h(t)| \leq L |s - t| \qquad (t, s \in D)$$

$\Rightarrow h \circ f \in R([a,b])$

$|f| \in R([a,b])$ und $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

$f \cdot g \in R([a,b])$

Falls $g(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$ und $\frac{1}{g}$ auf $[a,b]$ beschränkt
$\Rightarrow \frac{1}{g} \in R([a,b])$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_\alpha^\alpha f(x) \, dx := 0$$

$$\int_\beta^\alpha f(x) \, dx := - \int_\alpha^\beta f(x) \, dx$$

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g \in C(I)$ und $x_0 \in I$ (fest).
Definiere $G : I \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Dann: $G \in C^1(I)$ und $G' = g$ auf I

Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt

- Ist $\{x \in [a,b] : f \text{ ist nicht stetig}\}$ endlich

$$\Downarrow$$

$$f \in R([a,b])$$

- Ist $f \in R([a,b])$ und $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ endlich

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

Sei (f_n) eine Folge mit $\begin{cases} f_n \in C^1([a,b]) \ (n \in \mathbb{N}), \\ (f_n(a)) \text{ ist konvergent}, \\ (f_n') \text{ konvergiert auf } [a,b] \text{ gleichmäßig} \\ \text{gegen } g : [a,b] \to \mathbb{R}. \end{cases}$

Dann: (f_n) konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig und für

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in [a,b]) \text{ gilt:}$$

$$f \in C^1([a,b]) \text{ und } f'(x) = g(x) \quad (x \in [a,b])$$

$\Rightarrow$ Grenzwerte dürfen getauscht werden

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \quad (x \in [a,b])$$

Uneigentliche Integrale

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $f \in R(J)$ für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$

Sei: $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < \beta$ und $f: [a, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt konvergent

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f(x)\,dx \quad \text{existiert}$$

$$\Rightarrow \int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Sei: $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\alpha < b$ und $f: (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ heißt konvergent

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \alpha+} \int_\alpha^b f(x)\,dx \quad \text{existiert}$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{t \to \alpha+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Die Konvergenz eines uneigentlichen Integrales ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Funktionenlimes

Sei nun $\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt konvergent

$$\Leftrightarrow \exists c \in (\alpha, \beta): \quad \int_\alpha^c f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_c^\beta f(x)\,dx \quad \text{sind konvergent}$$

Terminologie

$\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt **absolut konvergent**

$\Leftrightarrow \int_a^\beta |f(x)|\,dx$ ist konvergent

$\Downarrow$

$$\boxed{\int_a^\beta f(x)\,dx \text{ ist konvergent und } \left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|\,dx}$$

Cauchykriterium

$\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergiert

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in (a, \beta) \ \forall u, v \in (c, \beta): \left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Majorantenkriterium

Ist $|f| < h$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent

Minorantenkriterium

Ist $f \geq h \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergent

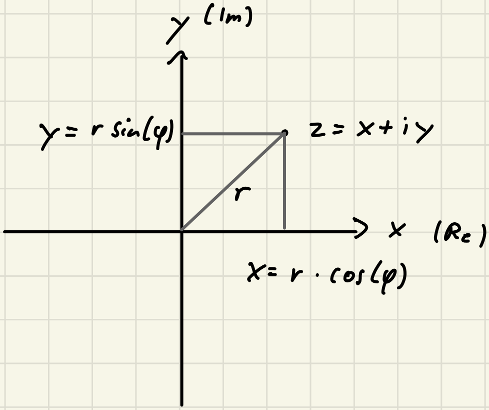
Die komplexe Exponentialfunktion

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

Sei: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z
- $\overline{z} := x - iy$ heißt komplex Konjugierte von z
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ $(z \in \mathbb{C})$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $z = x + iy \longmapsto e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$
  komplexe Exponentialfunktion
- $\forall t \in \mathbb{R}$: $|e^{it}| = 1$, $e^{-it} = \overline{e^{it}}$
- $e^{i\pi} = -1$
- $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$: $e^{z + 2k\pi i} = e^z$
- $\forall z \in \mathbb{C}$ $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Sei $z \in \mathbb{C}$. $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}: z = 2k\pi i$

Polarkoordinaten



$z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$

$r := |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

φ heißt **Argument** von z

$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}; \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}$

$\Rightarrow z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = |z| e^{i \cdot \arg(z)}$

Fundamentalsatz der Algebra

$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ sei ein Polynom mit Grad $n \geq 1$ mit $a_j \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Das Polynom hat genau $\deg(P(z))$ Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Sei: $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt **n-te Wurzel aus a**.

Definiere $r := |a|$ und $\varphi := \arg(a)$ (d.h. $a = r \cdot e^{i\varphi}$)

Für $k = 0, \dots, n-1$ sei

$$z_k := \sqrt[n]{r}\, e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

$\Rightarrow z_j \neq z_k$ für $j \neq k$

$\Rightarrow z$ ist eine n-te Wurzel aus $a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$

Für $a = 1$ heißen $z_0, \dots, z_{n-1}$ die n-ten **Einheitswurzeln**

$\Rightarrow z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt ein **Logarithmus von w.**

$\Rightarrow$ Sei $r = |w|$, $\varphi = \arg(w)$ (d.h. $w = r \cdot e^{i\varphi}$). Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$:

z ist Logarithmus von w

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log(|w|)}_{\text{log für } \mathbb{R}} + i\varphi + 2ki\varphi$$

Fourierreihen

Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiere Eigenschaft

$$(V) \iff f \in R([-\pi, \pi]) \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ } 2\pi\text{-periodisch}$$

Funktion f erfülle (V)

$$\Rightarrow f \in R([a, a+2\pi]) \text{ und } \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right)$$

heißt eine **trigonometrische Reihe**

Orthogonalitätsrelationen Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{\sin(nx)}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} \,dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(kx)\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f erfülle (V). Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N}_0) \swarrow$$ a_0 muss definiert sein

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow$ a_n und b_n heißen **Fourierkoeffizienten** von f.
Die zugehörige trigonometrische Reihe heißt **Fourierreihe**:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Falls f gerade ist, gilt:
($\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = 0$$

Falls f ungerade ist, gilt:
($\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$)

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Sei: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch. Die Funktion f heißt **stückweise glatt**

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine Zerlegung $\{t_0, \dots, t_n\}$ von $[-\pi, \pi]$
(d.h. $-\pi = t_0 < \dots < t_n = \pi$)

mit:

$$f \in C^1([t_{j-1}, t_j]) \quad (j = 1, \dots, n)$$

$\Rightarrow$ f muss nicht in den Punkten t_j stetig sein

und

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existieren die Grenzwerte

$$f(x-),\ f'(x-),\ f(x+),\ f'(x+)$$

Dann sei $$s_f := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$ $\Rightarrow$ f erfüllt (V)

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert gegen $s_f(x)$ bzw. gegen f

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ 2π-periodisch und stückweise glatt.

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe von f konvergiert in jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe von f konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f

$\Rightarrow$ Sind a_n und b_n die zugehörigen Fourierkoeffizienten, so:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren absolut

Funktion f erfülle (V), a_n, b_n seien die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ ist konvergent

$\Rightarrow$ $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$ Parsevalsche Gleichung

Raum $\mathbb{R}^n$

$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$; $e_n := (0, \dots, 0, 1)$

heißen **Einheitsvektoren**

Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ heißt **Skalarprodukt** von x und y
- $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ heißt **Norm** von x.

  $\|x\|^2 = x \cdot x$
- $\|x - y\|$ heißt **Abstand** von x und y

Seien $m, n, l \in \mathbb{N}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ eine reelle $m \times n$-Matrix

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ heißt **Norm von A**

Sei B eine reelle $n \times l$-Matrix

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ existiert

$\Rightarrow$ $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Gleichungen

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung
- $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$
- $\forall j \in \{1, \dots, n\}: |x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ heißt offene Kugel um x_0 mit Radius ε bzw. ε-Umgebung von x_0

$\Rightarrow \overline{U_\varepsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon$ heißt abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

A heißt **beschränkt**

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \; \forall a \in A: \; \|a\| \leq c$

A heißt **offen**

$\Leftrightarrow \forall a \in A \; \exists \delta = \delta(a) > 0: \; U_\delta(a) \subseteq A$

A heißt **abgeschlossen**

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen

A heißt **kompakt**

$\Leftrightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen

$\mathbb{R}^n$ ist offen, $\emptyset$ ist offen,
$\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\emptyset$ ist abgeschlossen

offene Kugeln sind offen

abgeschlossene Kugeln sind nicht offen
abgeschlossene Kugeln sind kompakt

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist abgeschlossen