Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Sei $(a^{(k)})$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, also $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$ mit $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n \quad (k \in \mathbb{N})$

$(a^{(k)})$ heißt **beschränkt**

$\Leftrightarrow \exists c \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}: \ \| a^{(k)} \| \leq c.$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungswert** von $(a^{(k)})$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: a^{(k)} \in U_\varepsilon(x_0)$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

$(a^{(k)})$ heißt **konvergent**

$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n: \ \| a^{(k)} - a \| \to 0 \quad (k \to \infty)$

Hier heißt a der **Grenzwert** von $(a^{(k)})$ und man schreibt

$$a = \lim_{k \to \infty} a^{(k)} \quad \text{oder} \quad a^{(k)} \to a \quad (k \to \infty) \quad \text{oder} \quad a^{(k)} \to a$$

$\Rightarrow$ Ist $(a^{(k)})$ nicht konvergent, so heißt $(a^{(k)})$ **divergent**

Cauchykriterium

$(a^{(k)})$ ist konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ k, l \geq k_0: \ \| a^{(k)} - a^{(l)} \| < \varepsilon.$

Bolzano - Weierstraß

Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente Teilfolge

Fax 

Ist $(a^{(k)})$ konvergent, so ist $(a^{(k)})$ beschränkt und jede Teilfolge von $(a^{(k)})$ konvergiert gegen $\lim_{k\to\infty} a^{(k)}$

Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$:

$$(a^{(k)}) \xrightarrow{(k\to\infty)} a \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}: a_j^{(k)} \xrightarrow{(k\to\infty)} a_j$$

Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ entspricht also Konvergenz der Koordinaten

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** von A

$\iff$ Es existiert eine Folge $(a^{(k)})$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $a^{(k)} \xrightarrow{(k\to\infty)} a$

A ist abgeschlossen

Jeder Häufungspunkt von A gehört zu A

Für jede konvergente Folge $(a^{(k)})$ in A gilt: $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} \in A$

A ist kompakt

$\iff$ Jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu A gehört

Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

Seien $n, m \in \mathbb{N}$; $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Funktion. Mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ hat f die Darstellung

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

wobei $f_j : D \to \mathbb{R}$. $\Rightarrow f = (f_1, \ldots, f_m)$

Sei x_0 ein Häufungspunkt von D und $y_0 \in \mathbb{R}^m$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x^{(k)})$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt:

$$f(x^{(k)}) \to y_0 \quad (k \to \infty)$$

Ist $f = (f_1, \ldots, f_m)$ und $y_0 = (y_1, \ldots, y_m)$, so gilt:

$$f(x) \xrightarrow{(x \to x_0)} y_0 \iff \forall j \in \{1, \ldots, m\}: f_j(x) \xrightarrow{(x \to x_0)} y_j$$

f heißt **in $x_0 \in D$ stetig**

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x^{(k)})$ in D mit $x^{(k)} \to x_0$ gilt:

$$f(x^{(k)}) \to f(x_0)$$

f heißt **auf D stetig**

$\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ stetig. Man schreibt:

$$f \in C(D, \mathbb{R}^m).$$

f heißt auf D beschränkt

$\Leftrightarrow \exists M \geq 0 \ \forall x \in D: \ \|f(x)\| \leq M.$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei linear

$\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Fax

Sei $x_0 \in D$ und $f, g: D \to \mathbb{R}^m$ und $h: D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen

$f = (f_1, \dots, f_m)$ ist in x_0 stetig $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}: f_j$ ist in x_0 stetig

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: \ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

$f: D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ stetig, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(D) \subseteq E$ und es sei $g: E \to \mathbb{R}^p$ stetig in $f(x_0)$. Dann ist

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad \text{stetig in } x_0$$

Sei D kompakt (beschränkt & abgeschlossen) und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$.

$\Rightarrow f(D)$ ist kompakt $\Rightarrow$ beschränkt & abgeschlossen

$\Rightarrow$ Ist $m = 1$, so existieren $x_1, x_2 \in D$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad (x \in D)$$

Analysis in $\mathbb{C}$

Konvergenz von Folgen

Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow z_n \to z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad |z_n - z_0| \to 0$

$\operatorname{Re}(z_n) \longrightarrow \operatorname{Re}(z_0)$ und $\operatorname{Im}(z_n) \longrightarrow \operatorname{Im}(z_0)$

Sei $w \in \mathbb{C}$ und $z_n := w^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow |z_n| = |w|^n$ und es gilt:

Falls $|w| < 1$: $z_n \to 0$

Falls $|w| > 1$: (z_n) ist divergent

Falls $|w| = 1$:

$w = 1 \Rightarrow (z_n)$ ist konvergent

$w \neq 1 \Rightarrow (z_n)$ ist divergent

Unendliche Reihen

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $s_n := a_1 + .. + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent / divergent**

$\Leftrightarrow$ s_n ist konvergent / divergent

Alle Definitionen und Sätze für $\mathbb{R}$ gelten, bis auf die, die eine Ordnung vorraussetzen.

Trigonometrie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ;$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ; \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Funktionen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$u := Re(f): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und $v := Im(f): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

sodass $f(x) = u(x) + i\, v(x)$

Falls $u, v \in R([a,b], \mathbb{R})$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b u(x)\,dx + i \int_a^b v(x)\,dx$$

Fourierreihen im Komplexen

Sei: $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

$$\Rightarrow \quad c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

heißen **komplexe Fourierkoeffizienten** von f und

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

heißt die zugehörige **komplexe Fourierreihe**

Falls $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ist, kann c_n auch über die Fourierkoeffizienten für HM1 definiert werden:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$$

Sei: $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ und $x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ existiert und ist $\in \mathbb{C}$

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (reellwertige Funktionen)

f heißt **in x_0 partiell differenzierbar nach** x_i

$:\iff f_{x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$ existiert

$\Rightarrow f_{x_i}(x_0)$ heißt die **partielle Ableitung von f in x_0 nach x_i**

f heißt **in x_0 partiell differenzierbar**

$:\iff f$ ist in x_0 partiell differenzierbar nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$.

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$

heißt **Gradient von f in x_0**

f heißt **auf D partiell differenzierbar**

$:\iff f$ ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. f_{x_i} **ist auf D vorhanden**

$:\iff f$ ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar nach x_i.

$\Rightarrow f_{x_i} : D \to \mathbb{R}$ ist die **partielle Ableitung von f nach x_i**

f heißt **auf D stetig partiell differenzierbar**

$:\iff f$ ist auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n} \in C(D, \mathbb{R})$ (sind stetig)

Satz von Schwarz

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Jede partielle Ableitung von f der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation. ($\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$)

f heißt **in x_0 differenzierbar**

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n: \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{\|h\|} = 0$$

„$\cdot$" Skalarprodukt

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n: \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Dann:

$\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig und in x_0 partiell differenzierbar

$\Rightarrow$ a von oben ist eindeutig und es gilt $a = \text{grad} f(x_0)$

Dann heißt $f'(x_0) := a = \text{grad} f(x_0)$
die **Ableitung von f in x_0**.

D.h.: f ist in x_0 differenzierbar

$\Leftrightarrow$ f ist in x_0 partiell differenzierbar
UND $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \text{grad} f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Sei f auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ seien in x_0 stetig

$\Rightarrow f$ ist in x_0 differenzierbar.

Insbesondere: $f \in C^1(D, \mathbb{R}) \Longrightarrow f$ ist auf D differenzierbar

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g = (g_1, \dots, g_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

g heißt **in $t_0 \in I$ differenzierbar**

$\Leftrightarrow g_1, \dots, g_n$ sind in $t_0 \in I$ differenzierbar.

$\Rightarrow g'(t_0) = (g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0))$

Seien $x^{(0)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$S[x^{(0)}, \dots, x^{(m)}] := \bigcup_{j=1}^{m} S[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$

heißt **Streckenzug** durch $x^{(0)}, \dots, x^{(m)}$.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt ein **Gebiet**

M ist offen und zu je zwei Punkten $a, b \in M$ existieren $x^{(0)}, \dots, x^{(m)}$ mit

$a = x^{(0)}, \ b = x^{(m)}$ und $S[x^{(0)}, \dots, x^{(m)}] \subseteq M$

Kettenregel

$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t_0)$

Skalarprodukt

Mittelwertsatz

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf D differenzierbar, es seien $a, b \in D$ und $S[a,b] \subseteq D$.

Dann existiert ein $\xi \in S[a,b]$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

Daraus folgt auch:

Ist D ein Gebiet, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D und gilt $f'(x) = 0 \quad (x \in D)$, so ist f auf D konstant.

Ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ heißt **Richtung** oder **Richtungsvektor**

Sei $x_0 \in D$. f heißt **in x_0 in Richtung a differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ Es existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ heißt **Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung a**

Falls $a = e_j$ Einheitsvektor:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = f_{x_j}(x_0)$$

Falls f in x_0 differenzierbar:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$$

Für $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ und $a := \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$$

$\Rightarrow$ D.h. $\operatorname{grad} f(x_0)$ zeigt in die Richtung des höchsten Anstiegs

Sei: $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in D$.

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x_0) & f_{x_1 x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x_0) & f_{x_n x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt **Hesse-Matrix von f in x_0.** (symmetrisch)

Satz von Taylor

Sei: $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $S[x_0, x_0+h] \subseteq D$.

Dann existiert ein $\xi \in S[x_0, x_0+h]$ mit

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}\left(H_f(\xi)\, h\right) \cdot h$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, g hat in $x_0 \in M$ ein

- lokales Maximum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: g(x) \leq g(x_0)$
- lokales Minimum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: g(x) \geq g(x_0)$
- globales Maximum $\Leftrightarrow \forall x \in M: g(x) \leq g(x_0)$
- globales Minimum $\Leftrightarrow \forall x \in M: g(x) \geq g(x_0)$

Ist f in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar und hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$

Ist $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, so gilt:

$H_f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum
$H_f(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Maximum
$H_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow$ f hat in x_0 kein lokales Extremum

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (vektorwertige Funktionen)

Sei $x_0 \in D$.

f heißt **in x_0 partiell differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ Alle f_j sind in x_0 partiell differenzierbar

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0) := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Das ist die **Jacobi-Matrix von f in x_0.**

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$f \in C^p(D, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f_j \in C^p(D, \mathbb{R}) \quad (j = 1, \dots, m)$

f heißt **in $x_0 \in D$ differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine $m \times n$-Matrix A mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0$$

$\Leftrightarrow$ Alle f_j sind in x_0 differenzierbar

$\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig

$\Rightarrow$ f ist in x_0 partiell differenzierbar

$\Rightarrow$ die Matrix A in obiger Definition ist eindeutig bestimmt:
$A = J_f(x_0)$

(in x_0 db) $\Rightarrow$ $f'(x_0) := J_f(x_0)$ heißt die **Ableitung von f in x_0**

Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D vorhanden und in x_0 stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.
Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, so ist f auf D differenzierbar.

Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Matrixprodukt

Satz über Implizit definierte Funktionen

Es sei $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Dann existieren $\delta, \eta > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

- $U_\delta(x_0) \times U_\eta(y_0) \subseteq D$
- $\forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists_1\ y =: g(x) \in U_\eta(y_0) : f(x, y) = 0$
- $g \in C^1(U_\delta(x_0), \mathbb{R}^p)$
- $\forall x \in U_\delta(x_0) : \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$
- $\forall x \in U_\delta(x_0) : g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right)$

(Falls $f \in C^l(D, \mathbb{R}^p)$, $l \geq 2$ ist: $g \in C^l(U_\delta(x_0), \mathbb{R}^p)$)

Umkehrsatz

Sei: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in D$.
Ist $\det f'(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(U_\delta(x_0))$ ist offen

f ist auf $U_\delta(x_0)$ injektiv

$f^{-1}: f(U_\delta(x_0)) \to U_\delta(x_0)$ ist in $C^1(f(U_\delta(x_0)), \mathbb{R}^n)$,

$$\det f'(x) \neq 0 \quad (x \in U_\delta(x_0))$$

und

$$(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \qquad (y \in f(U_\delta(x_0))).$$

Integration im $\mathbb{R}^n$

Sind $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$,

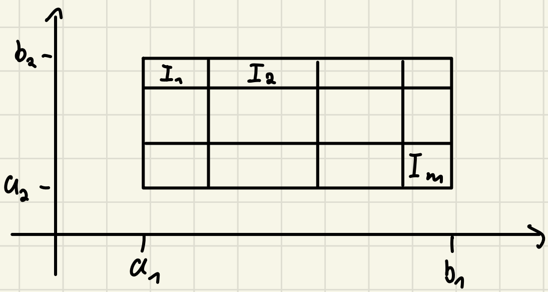
so heißt $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein **kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$**

$|I| := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ heißt **Inhalt/Volumen** von I

$$\Rightarrow |I| = 0 \iff \exists j \in \{1, \dots, n\} : b_j = a_j$$

Zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ sei eine Zerlegung Z_j von $[a_j, b_j]$ gegeben

$Z := Z_1 \times \dots \times Z_n$ ist dann eine **Zerlegung von I**



Ein Teilintervall $\tilde{I}$ von I bezüglich Z hat die Form

$$T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$$

wobei T_j jeweils ein Teilintervall bezüglich Z_j ist.

Es seien $I_1, \dots, I_m$ die Teilintervalle bzgl. Z. Dann gilt:

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m, \quad |I| = |I_1| + \dots + |I_m|.$$

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$s_f(Z)$ die **Untersumme** von f bzgl. Z

$S_f(Z)$ die **Obersumme** von f bzgl. Z

$$\Rightarrow s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\}$$
$$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\}$$

$\Rightarrow f$ heißt **integrierbar über** I

$$\iff s_f = S_f \quad \Rightarrow \quad \int_I f(x)\,dx := s_f \; (= S_f)$$

Satz von Fubini $\quad n = p+q$

Sei I_1 ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^p$, I_2 ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^q$

$\Rightarrow I = I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(x,y) \in I$ mit $x \in I_1$, $y \in I_2$

$$\int_I f(x,y)\, d(x,y) = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)\, dx \right) dy$$
$$= \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$\Rightarrow$ Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden

Inhalt von Mengen

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

$$\Rightarrow \quad c_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

B heißt **messbar** $\Leftrightarrow c_B \in R(I)$

$\Rightarrow |B| := \int_I c_B(x)\, dx$ heißt der **Inhalt** von B.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$$\Rightarrow f_B(x) := \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Wähle ein kompaktes Intervall I mit $B \subseteq I$

f heißt **über B integrierbar** $\Leftrightarrow f_B \in R(I)$

Dann: $f \in R(B)$ und

$\int_B f(x)\, dx := \int_I f_B(x)\, dx$ ist das **Integral von f über B**

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar

- Ist $f \in C(B, \mathbb{R})$ beschränkt, so ist $f \in R(B)$
- Es gilt: $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ sind messbar

$$f \in R(A \cup B) \iff f \in R(A) \cap R(B)$$

$$\Rightarrow \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx - \int_{A \cap B} f(x)\,dx$$

Seien $f, g \in R(B)$ und $g \leq f$ auf B.

Definiere $M_{f,g} := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in B,\ g(x) \leq y \leq f(x) \}$

Dann ist $M_{f,g}$ messbar im $\mathbb{R}^{n+1}$ und

$$|M_{f,g}| = \int_B (f-g)\,dx$$

Prinzip von Cavalieri (Um eine Dimension „vereinfachen")

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ messbar. $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}$
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a \leq z \leq b$ $(x,z) \in B$

Für $z \in [a,b]$ sei:

$$Q(z) := \{ x \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in B \}$$

Weiterhin sei $Q(z)$ messbar für jedes $z \in [a,b]$.

$\Rightarrow z \longmapsto |Q(z)|$ ist integrierbar und

$$|B| = \int_a^b |Q(z)|\,dz$$

Rotationskörper $a<b$, $f \in R([a,b])$ und $f \geq 0$ auf $[a,b]$

f rotiere im Beispiel um die x-Achse:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

$$\Rightarrow \quad |Q(x)| = \pi \cdot f(x)^2$$

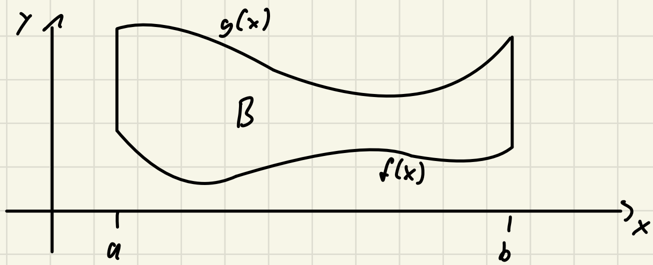
$$\Rightarrow |B| = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Normalbereiche

Seien $a,b \in \mathbb{R}$; $a<b$; $f,g \in C([a,b])$ und $f \leq g$ auf $[a,b]$.

Dann ist $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein **Normalbereich bzgl. der x-Achse**

$\Rightarrow$ B ist messbar



Für $h \in C(B, \mathbb{R})$:

$$\int_B h(x,y) \, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} h(x,y) \, dx \right) dy$$

Substitutionsregel

Sei: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $B \subseteq G$ kompakt und messbar

$B^o := \{x \in B : \exists \delta > 0 \text{ mit } U_\delta(x) \subseteq B\}$

Sei g auf dem inneren B^o von B injektiv und

$\det(g'(y)) \neq 0 \quad (y \in B^o)$

Falls dann $A := g(B)$ und $f \in C(A, \mathbb{R})$ so ist A kompakt und messbar und es gilt:

$$\int_A f(x)\, dx = \int_B f(g(y)) \cdot |\det(g'(y))|\, dy$$

Polarkoordinaten $(n=2)$

$x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$g(r, \varphi) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$; $\quad \det(g'(r,\varphi)) = r$

Für $A := \{(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], r \in [R_1, R_2]\}$

Damit definiere $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ ist $A = g(B)$.

Auf $B^o = (R_1, R_2) \times (\varphi_1, \varphi_2)$ ist g injektiv und $\det(g') \neq 0$,
Ist nun $f \in C(A, \mathbb{R})$, gilt:

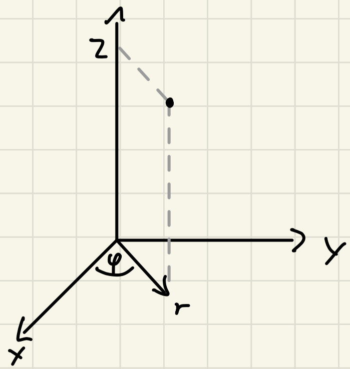
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_B f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot \underbrace{r}_{= |\det(g'(r,\varphi))|}\, d(r,\varphi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{R_1}^{R_2} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r\, dr \right) d\varphi$$

Zylinderkoordinaten (n=3)

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}\right\} \; g(r,\varphi,z) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z);$$

$$\det(g'(r,\varphi,z)) = r$$



wie Polarkoordinaten, plus z

$$(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z) \in A$$

$$\Updownarrow$$

$$z \in [H_1, H_2],\; r \in [R_1, R_2],\; \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$$

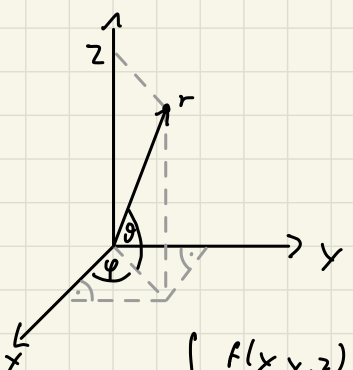
$$\int_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_B f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z) \cdot r \; d(r,\varphi,z)$$

Kugelkoordinaten (n=3)

Für $\varphi = [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$r = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\vartheta); \quad y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta); \quad z = r \cdot \sin(\vartheta)$$



$$g(r,\varphi,\vartheta) :=$$
$$(r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta))$$

$$|\det(g'(r,\varphi,\vartheta))| = r^2 \cdot \cos(\vartheta)$$

Für $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A = g(B)$ gilt für $f \in C(A, \mathbb{R})$

$$\int_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_B f(g(r,\varphi,\vartheta)) \cdot r^2 \cos(\vartheta) \; d(r,\varphi,\vartheta)$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung

$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$

getrennte Veränderliche

$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}; \quad y(0) = 2$

Trenne Veränderliche, Merkregel:

$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$,

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\, dy = -x\, dx$

$\Rightarrow \int y\, dy = -\int x\, dx + \tilde{c}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{c} \Rightarrow y^2 = -x^2 + c \quad (c = 2\tilde{c})$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{c - x^2}$

Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = \pm\sqrt{c - x^2} \quad (x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}))$

-> Bestimme c mittels AWP

$2 = y(0) = \pm\sqrt{c} \Rightarrow 2 = \sqrt{c} \Rightarrow c = 4$

Damit ist die Lösung für das AWP:

$y(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Definitionsbereich angeben mit x_0 (x des AWPs) enthalten!

$(x \in (-2, 2))$

$y'(x) = \alpha(x) \cdot y(x) + s(x)$

lineare DGL

$y'(x) = \alpha(x) \cdot y(x)$ ist die zugehörige homogene Gleichung

$y'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=:\alpha(x)} \cdot y(x) + \underbrace{x}_{=:s(x)}$

Wähle $\beta(x)$ als Stammfunktion von $\alpha(x)$

$\beta(x) := -\log(x) \qquad (x \in (0, \infty))$

Allgemeine Lösung der zug. homog. Gl. ist $C \cdot e^{\beta(x)}$ $(C \in \mathbb{R})$

$y_h(x) = C \cdot e^{-\log(x)} = \frac{C}{x} \qquad (C \in \mathbb{R})$

Verwende Ansatz für y_p: $\quad y_p(x) = C(x) \cdot e^{\beta(x)}$

$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\log(x)} = C(x) \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y_p'(x) = C'(x) \cdot \frac{1}{x} \cancel{- C(x) \cdot \frac{1}{x^2}}$

$\overset{!}{=} -\frac{1}{x} \cdot y_p(x) + x$ (Setze in Ausgangsfunktion ein hier $y'(x) = -\frac{1}{x} \cdot y(x) + x$)

$= \cancel{-\frac{1}{x^2} C(x)} + x$

$\Rightarrow C'(x) \cdot \frac{1}{x} = x \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = x^2$

Wähle jetzt ein C als Stammfunktion für C'

$C(x) := \frac{1}{3}x^3 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad (x \in (0, \infty))$

Dann ist die allgemeine Lösung:

$y(x) = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2 \qquad (C \in \mathbb{R},\ x \in (0, \infty))$

$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)\cdot(y(x))^{\alpha}$

Bernoullische DGL

Es muss gelten $g, h \in C(I,\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$y'(x) + y(x)^2 - x\,y(x) - \frac{y(x)}{x} = 0, \quad y(1) = 1$$

$$\Rightarrow g(x) = -(x + \tfrac{1}{x}), \quad h(x) := 1; \quad \alpha = 2$$

Multipliziere DGL mit $(1-\alpha)\,y(x)^{-\alpha}$

$$(1-\alpha)\,y(x)^{-\alpha} = -y(x)^{-2}$$

$$\Rightarrow -y'(x)\,y(x)^{-2} + (x + \tfrac{1}{x})\,y(x)^{-1} - 1 = 0$$

Betrachte Substitution $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$, auch für AWP

$$z(x) = y(x)^{-1}, \quad z'(x) = -y(x)^{-2}\cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-y'(x)\,y(x)^{-2}}_{z'(x)} + (x + \tfrac{1}{x})\underbrace{y(x)^{-1}}_{z(x)} - 1 = 0$$

$$= z'(x) + (x + \tfrac{1}{x})\,z(x) - 1 = 0; \quad z(1) = y(1)^{-1} = 1$$

Bestimme Lösung mittels bekannter Methode

$y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^2(x) = k(x)$

Riccatische Differentialgleichung

Rate zunächst eine Lösung und setze dann in Formel ein:

Sind y_1, y_2 Lösungen der DGL, so gilt für $u := y_1 - y_2$

$$u'(x) = -\big(g(x) + 2h(x)\cdot y_2(x)\big)\cdot u(x) - h(x)\cdot u^2(x)$$

$$y'(x) = (1-x)\,y(x)^2 + (2x-1)\,y(x) - x, \quad y(1) = 2$$

$$\Rightarrow g(x) := 1-2x, \quad h(x) := x-1, \quad k(x) := -x$$

Rate Lösung und setze $\varphi(x) := a \quad (a \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow a = 1$ erfüllt diese Gleichung.

$\Rightarrow \varphi(x) = 1$ ist eine Lösung der DGL

Nutze $u = y - \varphi$

$$u'(x) = -\underbrace{\big((1-2x) + 2(x-1)\,\varphi(x)\big)}_{-1}\,u(x) - (x-1)\,u(x)^2$$

$$\Leftrightarrow u'(x) = u(x) + (1-x)\,u(x)^2$$

$$\Leftrightarrow u'(x) - u(x) + (x-1)\,u(x)^2 = 0$$

Man erhält eine Bernoullische-DGL

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$y_1'(x) = a_{11} \cdot y_1(x) + a_{12} \cdot y_2(x) + \ldots + a_{1n} \cdot y_n(x) + b_1(x)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(x) = a_{n1} \cdot y_1(x) + a_{n2} \cdot y_2(x) + \ldots + a_{nn} \cdot y_n(x) + b_n(x)$$

$$\Rightarrow \; y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y'(x) = A\,y(x) + b(x)$$

Bsp.:

$$y'(x) = A\,y(x) + b; \quad y(0) = y_0;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad b(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ 2xe^x \end{pmatrix}; \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

homogene Lösung

$$y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}_{=A} y(x)$$

1. Bestimme EW λ_j von A und alg. Vielfachheiten k_j

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\underbrace{(2-\lambda)(2+\lambda)}_{\text{3. bin. Formel}} + 4$$
$$= -(4 - \lambda^2) + 4 = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad k_1 = 2$$

2. Ordne die Eigenwerte: $\{\lambda_{m+s+1} = \overline{\lambda_{m+1}}, \ldots, \lambda_r = \overline{\lambda_{m+s}}\} \notin M$

$$M := \{\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+s}}_{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}\}$$

$$M := \{0\}$$

3. Bestimme für jeden Eigenwert eine Basis von $V_j := \ker[(A - \lambda_j \mathbb{1})^{k_j}]$

$$\rightsquigarrow \ker(A - 0\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

ergänzen

$$\ker[(A - 0\mathbb{1})^2] = \ker(A^2) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

4. $\lambda_j \in M$ und v ein Basisvektor von V_j.

Setze $\displaystyle y(x) := e^{\lambda_j x} \cdot \sum_{l=0}^{k_j - 1} \frac{x^l}{l!} \cdot (A - \lambda_j \mathbb{1})^l \cdot v$

$$= e^{\lambda_j x} \cdot \left(v + \frac{x}{1!}(A - \lambda_j \mathbb{1})v + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda_j \mathbb{1})^2 v + \ldots\right)$$

Falls $\lambda_j \in \mathbb{R}$: y ist eine Lösung
Falls $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ sind linear unabhängige Lösungen

$$\rightsquigarrow y_1(x) = e^{0x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad y_2(x) = e^{0x} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot (A - 0\mathbb{1}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 4x \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ y_1 & y_2 bilden ein Fundamentalsystem des homogenen DGL-Systems

5. Die Allgemeine Lösung setzt sich aus dem Fundamentalsystem zusammen

$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ ist die allgemeine Lösung des DGL-Systems

inhomogene Lösung

1. Für ein Fundamentalsystem $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ (der homogenen Gleichung) definiere

$$Y(x) := (y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $Y(x)$ ist $n \times n$ Matrix namens Fundamentalsystem/-matrix

Setze $Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+1 \\ 2 & 4x \end{pmatrix}$

2. Nutze Ansatz $y_p(x) = Y(x) \cdot c(x)$ $(c: I \to \mathbb{R}^n)$

y_p ist ein Lösung $\Leftrightarrow$ $c'(x) = (Y(x))^{-1} b(x)$

Wähle dann Stammfunktion $c(x) = \int (Y(x))^{-1} b(x)\, dx$ und erhalte y_p.

$$\Rightarrow (Y(x))^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4x & -(2x+1) \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & x + \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow c'(x) = (Y(x))^{-1} \cdot b(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Wähle } c(x) = \begin{pmatrix} e^x(x-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $y_p(x) = (x-1)e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ allgemeine inhomogene Lösung:

$$y(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 4x \end{pmatrix} + (x-1)e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Falls gegeben, löse AWP durch einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \\ 4 \cdot 0 \end{pmatrix} + (0-1)e^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 2; \; C_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Lösung des AWPs lautet: $y(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (x-1)e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lineare DGL n-te Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$Ly := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$

$(Ly)(x) = b(x)$

Bsp.: $y'''(x) - y'(x) = 3 + 2x + x^2$

homogene Lösung

$y'''(x) - y'(x) = 0$

1. Bilde char. Polynom indem y durch λ „ersetzt" wird

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

2. Bestimme Nullstellen und ordne diese wieder nach $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (ohne konjugierte komplexe Werte)

$M := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+s}\}$

Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$

$M := \{0, 1, -1\}$

3. Bilde Fundamentalsystem aus M

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Sei k_j die zugehörige alg. Vielfachheit

$\Rightarrow e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x}$ sind linear unabh. Lösungen.

Fall 2: $\lambda_j = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, d.h. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$\Rightarrow e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x), x e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x), \ldots, x^{(k_j-1)} e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x)$

und

$e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta x), x\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta x), \ldots, x^{(k_j-1)} e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta x)$

sind $2k_j$ linear unabh. Lösungen.

Für alle $\lambda_j \in M$ erhält man ein Fundamentalsystem

$\Rightarrow y_1(x) := e^{0x} = 1$; $y_2(x) := e^x$; $y_3(x) := e^{-x}$

bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

$\Rightarrow y_h(x) = a\cdot 1 + b\cdot e^x + c\cdot e^{-x} \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

bildet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

spezielle inhomogene Lösung

$y_h(x) = a + be^x + ce^{-x} \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

$b(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Wähle einen Ansatz:
Wähle $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und q ein Polynom vom Grad m so, dass entweder:

$b(x) = q(x)\cdot e^{\gamma x}\cdot\cos(\delta x)$

oder

$b(x) = q(x)\cdot e^{\gamma x}\cdot\sin(\delta x)$

$\Rightarrow m = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$

Nutze dann den Ansatz für y_p mit p char. Polyn. von $(Ly)(x) = 0$

Fall 1: $p(\gamma + i\delta) \neq 0$
Wähle Ansatz $y_p(x) := (\hat{q}(x)\cdot\cos(\delta x) + \tilde{q}(x)\cdot\sin(\delta x))e^{\gamma x}$

Fall 2: $\gamma + i\delta$ ist eine ν-fache NST von p
Wähle Ansatz $y_p(x) := x^\nu(\hat{q}(x)\cdot\cos(\delta x) + \tilde{q}(x)\cdot\sin(\delta x))e^{\gamma x}$

($\hat{q}, \tilde{q}$ sind undefinierte Polynome vom Grad m)

$\Rightarrow$ 0 ist einfache NST von p

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$y_p(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$

2. Bilde $m+1$ Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 \\ y_p''(x) &= 2A_1 + 6A_2 x \\ y_p'''(x) &= 6A_2 \end{aligned}$$

3. Nutze Angabe und setze mit $b(x)$ gleich

$\rightsquigarrow 6A_2 - A_0 - 2A_1 x - 3A_2 x^2 = 3 + 2x + x^2$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\left.\begin{aligned} -A_0 + 6A_2 &= 3 \\ -2A_1 &= 2 \\ -3A_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_0 = -5, A_1 = -1, A_2 = -\tfrac{1}{3}$$

$\Rightarrow y_p = -5x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$

4. Die allgemeine Lösung lässt sich mittels $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ bilden

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a + be^x + ce^{-x} - 5x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$

Die Fouriertransformation

Terminologie

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf $[a,b]$ stückweise stetig**

$\iff \exists\, t_0, t_1, \dots, t_m \in [a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{und} \quad g \in C\big((t_{j-1}, t_j)\big) \quad (j = 1, \dots, m)$$

UND es existieren die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$g(a+),\ g(b-),\ g(t_j+),\ g(t_j-) \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf $[a,b]$ stückweise glatt**

$\iff \exists\, t_0, t_1, \dots, t_m \in [a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{und} \quad g \in C^1\big((t_{j-1}, t_j)\big) \quad (j = 1, \dots, m)$$

UND es existieren die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$g(t_j+),\ g(t_j-),\ g'(t_j+),\ g'(t_j-) \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$g(a+),\ g'(a+),\ g(b-),\ g'(b-).$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig/glatt**

$\iff$ g ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise stetig/glatt

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig. Dann gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g'(x_0) = \frac{1}{2}\left(g'(x_0+) + g'(x_0-)\right)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f: I \to \mathbb{C}$ eine Funktion
$u(x) := Re(f)$, $v(x) := Im(f)$, sodass $f(x) = u(x) + i \cdot v(x)$

f heißt auf I differenzierbar

$\iff$ u und v sind auf I differenzierbar
$\Rightarrow f'(x) := u'(x) + i \cdot v'(x)$

Sei $I = [a,b]$ und $u, v \in R([a,b])$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \cdot \int_a^b v(x)\, dx$$

und f heißt integrierbar auf I.
Man schreibt: $f \in R([a,b], \mathbb{C})$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f \in R([a,b], \mathbb{C})$ für jedes Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ heißt (absolut) konvergent

$\iff$ $\int_{-\infty}^{\infty} Re(f(t))\, dt$ und $\int_{-\infty}^{\infty} Im(f(t))\, dt$ sind (absolut) konvergent

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt := \int_{-\infty}^{\infty} Re(f(t))\, dt + i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} Im(f(t))\, dt$$

Ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ absolut konvergent, so heißt f absolut integrierbar

Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig
Es gilt:

- f ist absolut integrierbar $\iff$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ ist konvergent
- Ist f absolut integrierbar und $|g| \leq |f|$ auf $\mathbb{R}$, so ist g absolut integrierbar

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, f und f' absolut integrierbar und f habe endlich viele Unstetigkeitsstellen.
Dann ist f auf $\mathbb{R}$ beschränkt und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar.
Für $s \in \mathbb{R}$ definiere $g_s(t) := f(t) \cdot e^{-ist}$ $(t \in \mathbb{R})$. Es gilt:

- g_s ist stückweise stetig
- g_s ist absolut integrierbar
- Für $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ist} \, dt$ gilt:
  - $\hat{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt
  - $\lim_{s \to \pm\infty} \hat{f}(s) = 0$ (Satz von Riemann-Lebesgue)
  - $\hat{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig

$\hat{f}$ heißt die **Fouriertransformierte** von f.
Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ heißt **Fouriertransformation** und ist Isomorphismus von S nach S (linear und bijektiv)

Cauchyscher Hauptwert

Falls $\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \, dx$ existiert, nennt man das den Cauchyschen Hauptwert und man schreibt

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \, dx$$

Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx := \lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{0} f(x) \, dx + \lim_{\alpha \to \infty} \int_{0}^{\alpha} f(x) \, dx \neq \lim_{\gamma \to \infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(x) \, dx$$

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar.
Dann:
$$\forall t\in\mathbb{R}: \quad CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)e^{ist}\,ds = \frac{1}{2}\left(f(t+)+f(t-)\right)$$

Falls f stetig auf $\mathbb{R}$ ist:
$$\forall t\in\mathbb{R}: f(t) = CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\cdot e^{ist}\,ds$$

Sei $V := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} : f$ ist stückweise stetig und absolut integrierbar $\}$

Sei $f\in V$ (V komplexer VR), $h\in\mathbb{R}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sei definiert durch
$$f_h(t) := f(t+h)$$
Dann ist $f_h\in V$ und $\hat{f_h}(s) = e^{ish}\hat{f}(s) \quad (s\in\mathbb{R})$

Seien $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ Funktionen so, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)\cdot f_2(x)\,dx$$
für jedes $t\in\mathbb{R}$ konvergent ist.

Dann heißt $f_1 * f_2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$
$$(f_1 * f_2)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)\cdot f_2(x)\,dx$$
die **Faltung** von f_1 und f_2.

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar und f_1 beschränkt.
Dann:

- $\forall t \in \mathbb{R}: \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) \cdot f_2(x)\, dx$ konvergiert absolut.
- $f_1 * f_2$ ist stetig und absolut integrierbar und $(\hat{f}_1 * \hat{f}_2)(s) = \hat{f}_1(s) \cdot \hat{f}_2(s)$
- $|(\hat{f}_1 * \hat{f}_2)(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|\, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, stetig und absolut integrierbar.
Weiter sei f' absolut integrierbar. Dann gilt:

$$f' \in V \quad \text{und} \quad \underline{\hat{f'}(s) = is \cdot \hat{f}(s)} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

f sei stetig und absolut integrierbar.
f heißt **bandbeschränkt**

$\Leftrightarrow$ Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f ist außerhalb eines beschränkten Intervalls 0
$\Rightarrow$ In diesem Fall kann man f mit einem Raster $\{kT : k \in \mathbb{Z}\}, T > 0$ darstellen

Abtasttheorem von Shannon

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar und

$$\exists b > 0: \hat{f}(s) = 0 \quad (s \in \mathbb{R} \setminus (-b, b)).$$

Dann gilt für jedes $T < \frac{\pi}{b}$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit $\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ „Sinus cardinalis"

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt **schnell fallend**

$\Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}_0 : t \mapsto t^m f^{(n)}(t)$ ist beschränkt auf $\mathbb{R}$.

$S := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ ist schnell fallend} \}$ heißt
Schwartz-Raum

Seien $f, g \in S$, p ein Polynom und $k \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $k^{(n)}$ beschränkt auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:

- f ist absolut integrierbar und $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha f + \beta g \in S$
- $kf, pf, \overline{f}, \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f), t \mapsto f(-t) \in S$.
- $\hat{f} \in S$ und $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ist} \, ds \quad (t \in \mathbb{R})$
- $f^{(n)} \in S \quad (n \in \mathbb{N})$ und $\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R})$
- $f_h \in S \quad (h \in \mathbb{R})$ und $\hat{f_h}(s) = e^{ish} \cdot \hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R})$
- $f * g \in S$ und $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$
- Für $h(t) := e^{\frac{-t^2}{2}} \quad (t \in \mathbb{R})$ gilt: $h \in S$ und $\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h$ auf $\mathbb{R}$

Für $f, g \in S$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot \overline{\hat{g}(s)} \, ds$$

Insb. für $f = g$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|^2 \, ds$$