Uneigentliche Integrale

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $f \in R(J)$ für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$

Sei: $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < \beta$ und $f: [a, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt konvergent

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f(x)\,dx \quad \text{existiert}$$

$$\Rightarrow \int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Sei: $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\alpha < b$ und $f: (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ heißt konvergent

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \alpha+} \int_\alpha^b f(x)\,dx \quad \text{existiert}$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{t \to \alpha+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Die Konvergenz eines uneigentlichen Integrales ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Funktionenlimes

Sei nun $\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt konvergent

$$\Leftrightarrow \exists c \in (\alpha, \beta): \int_\alpha^c f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_c^\beta f(x)\,dx \quad \text{sind konvergent}$$

Terminologie

$\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt **absolut konvergent**

$\Longleftrightarrow \int_a^\beta |f(x)|\,dx$ ist konvergent

$\Downarrow$

$\int_a^\beta f(x)\,dx$ ist konvergent und $\left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|\,dx$

Cauchykriterium

$\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergiert

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in (a,\beta) \ \forall u,v \in (c,\beta): \left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Majorantenkriterium

Ist $|f| < h$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta h(x)$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent

Minorantenkriterium

Ist $f \geq h \geq 0$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta h(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergent