Analysis in $\mathbb{C}$

Konvergenz von Folgen

Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow z_n \to z_0 \iff |z_n - z_0| \to 0$

$\iff$

$Re(z_n) \longrightarrow Re(z_0)$ und $Im(z_n) \longrightarrow Im(z_0)$

Sei $w \in \mathbb{C}$ und $z_n := w^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow |z_n| = |w|^n$ und es gilt:

Falls $|w| < 1$: $z_n \to 0$

Falls $|w| > 1$: (z_n) ist divergent

Falls $|w| = 1$:

$w = 1 \Rightarrow (z_n)$ ist konvergent

$w \neq 1 \Rightarrow (z_n)$ ist divergent

Unendlich Reihen

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $s_n := a_1 + .. + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent / divergent**

$\Leftrightarrow$ s_n ist konvergent / divergent

Alle Definitionen und Sätze für $\mathbb{R}$ gelten, bis auf die, die eine Ordnung voraussetzen.

Trigonometrie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Funktionen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$u := Re(f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und $v := Im(f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

sodass $f(x) = u(x) + i\, v(x)$

Falls $u, v \in R([a,b], \mathbb{R})$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b u(x)\,dx + i \int_a^b v(x)\,dx$$

Fourierreihen im Komplexen

Sei: $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

$$\Rightarrow \quad c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

heißen **komplexe Fourierkoeffizienten** von f und

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

heißt die zugehörige **komplexe Fourierreihe**

Falls $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ist, kann c_n auch über die Fourierkoeffizienten für HM1 definiert werden:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$$

Sei: $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ und $x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ existiert und ist $\in \mathbb{C}$