Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

Seien $n, m \in \mathbb{N}$; $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Funktion. Mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ hat f die Darstellung

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

wobei $f_j : D \to \mathbb{R}$. $\Rightarrow f = (f_1, \dots, f_m)$

Sei x_0 ein Häufungspunkt von D und $y_0 \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x^{(k)})$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt:

$$f(x^{(k)}) \to y_0 \quad (k \to \infty)$$

Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $y_0 = (y_1, \dots, y_m)$, so gilt:

$$f(x) \xrightarrow{(x \to x_0)} y_0 \iff \forall j \in \{1, \dots, m\}: f_j(x) \xrightarrow{(x \to x_0)} y_j$$

f heißt **in $x_0 \in D$ stetig**

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x^{(k)})$ in D mit $x^{(k)} \to x_0$ gilt:

$$f(x^{(k)}) \to f(x_0)$$

f heißt **auf D stetig**

$\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ stetig. Man schreibt:

$$f \in C(D, \mathbb{R}^m).$$

f heißt auf D beschränkt

$\Leftrightarrow \exists M \geq 0 \ \forall x \in D: \ \|f(x)\| \leq M.$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei linear

$\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Fax

Sei $x_0 \in D$ und $f, g: D \to \mathbb{R}^m$ und $h: D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen

$f = (f_1, .., f_m)$ ist in x_0 stetig $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, .., m\}: f_j$ ist in x_0 stetig

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: \ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

$f: D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ stetig, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(D) \subseteq E$ und es sei $g: E \to \mathbb{R}^p$ stetig in $f(x_0)$. Dann ist

$$g \circ f: D \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad \text{stetig in } x_0$$

Sei D kompakt (beschränkt & abgeschlossen) und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$.

$\Rightarrow f(D)$ ist kompakt $\Rightarrow$ beschränkt & abgeschlossen

$\Rightarrow$ Ist $m = 1$, so existieren $x_1, x_2 \in D$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad (x \in D)$$