

# Das Riemann-Integral

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $m := \inf f([a, b])$ ,  $M := \sup f([a, b])$

$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  heißt eine **Zerlegung** von  $[a, b]$

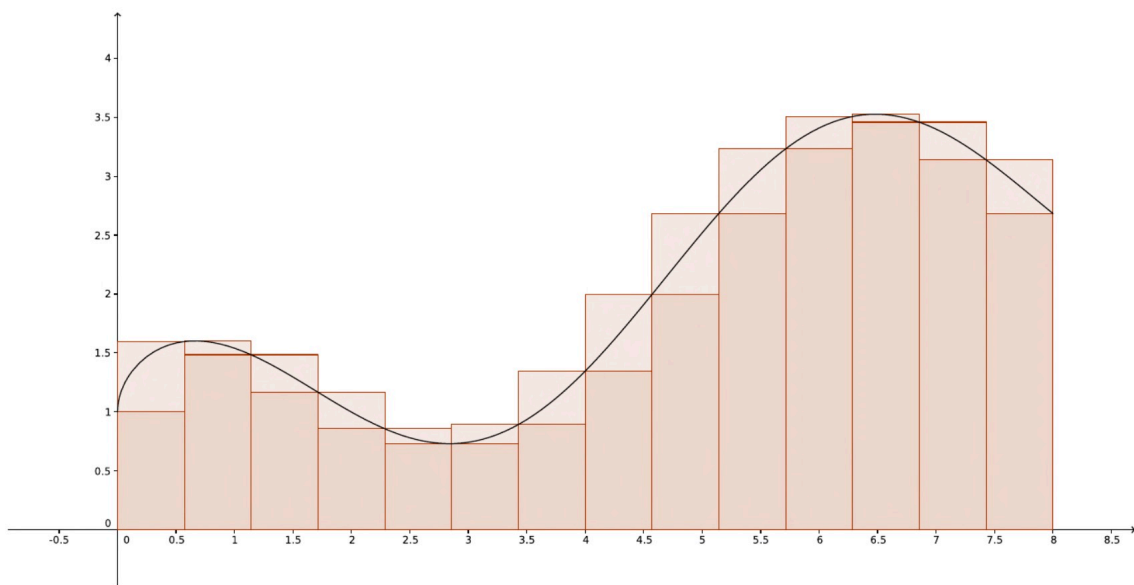
$$\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung.

$I_j := [x_{j-1}, x_j]$ ,  $|I_j| := x_j - x_{j-1}$ ,  $m_j := \inf f(I_j)$ ,  $M_j := \sup f(I_j)$

$\Rightarrow s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j|$  die **Untersumme** von  $f$  bezüglich  $Z$

$\Rightarrow S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j|$  die **Obersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$



Sei  $s_f := \sup \{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung}\}$   
 $S_f := \inf \{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung}\}$

$\Rightarrow f$  heißt **Riemann-Integrierbar** über  $[a, b] \Leftrightarrow s_f = S_f$

$\Rightarrow f \in R([a, b])$

## Termino Logie

$G, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen

$G$  heißt eine **Stammfunktion** von  $g$  auf  $I$

$\Leftrightarrow G$  ist auf  $I$  differenzierbar und  $G' = g$

Besitzt  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion, so schreibt man für diese auf

$$\int g \, dx \quad \text{oder} \quad \int g(x) \, dx$$

Das heißt ein **unbestimmtes Integral** von  $g$ .

# Riemannsches Integrabilitätskriterium

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z = Z(\varepsilon) \text{ Folge: } S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

## 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist  $f \in R([a, b])$  und besitzt  $f$  auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion  $F$ ,  
so ist 
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen  
Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen

## 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei  $f \in R([a, b])$  und

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

Es gilt:

- $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt \quad (x, y \in [a, b])$
- $F$  ist Lipschitz-Stetig
- Ist  $f \in C([a, b]) \Rightarrow F \in C^1([a, b])$  und  $F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b])$

## Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

## Substitutionsregeln

Ist  $y = y(x)$  eine differenzierbare Funktion, so schreibt man auch  $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituiere  $x = g(t)$

↓ auf beiden Seiten ableiten

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$$\Rightarrow \text{„} dx = g'(t) dt \text{“}$$

Seien  $f, g \in R([a, b])$ .

$$f \leq g \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\alpha f + \beta g \in R([a, b]) \text{ und } \int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$$

Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, so ist  $f \in R([a, b])$

$$C([a, b]) \subseteq R([a, b])$$

Es sei  $c \in (a, b)$ .

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow f \in R([a, c]) \wedge f \in R([c, b])$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Es sei  $D := f([a, b])$  und mit einem  $L \geq 0$  gelte für  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s - t| \quad (t, s \in D)$$

$$\Rightarrow h \circ f \in R([a, b])$$

$$|f| \in R([a, b]) \text{ und } \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

$$f \cdot g \in R([a, b])$$

Falls  $g(x) \neq 0$  ( $x \in [a, b]$ ) und  $\frac{1}{g}$  auf  $[a, b]$  beschränkt  
 $\Rightarrow \frac{1}{g} \in R([a, b])$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := - \int_b^a f(x) \, dx$$

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $g \in C(I)$  und  $x_0 \in I$  (fest).

Definiere  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Dann:  $G \in C^1(I)$  und  $G' = g$  auf  $I$

Sei  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt

- Ist  $\{x \in [a, b]: f \text{ ist nicht stetig}\}$  endlich

$\Downarrow$

$$f \in R([a, b])$$

- Ist  $f \in R([a, b])$  und  $\{x \in [a, b]: f(x) \neq g(x)\}$  endlich

$\Downarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

Sei  $(f_n)$  eine Folge mit  $\begin{cases} f_n \in C^1([a, b]) \quad (n \in \mathbb{N}), \\ (f_n(a)) \text{ ist konvergent,} \\ (f'_n) \text{ konvergiert auf } [a, b] \text{ gleichmäßig} \\ \text{gegeben } g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$

Dann:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig und für

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in [a, b]) \quad \text{gilt:}$$

$$f \in C^1([a, b]) \quad \text{und} \quad f'(x) = g(x) \quad (x \in [a, b])$$

$\Rightarrow$  Grenzwert dürfen getauscht werden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = f'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \quad (x \in [a, b])$$