Integration im $\mathbb{R}^n$

Sind $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$,

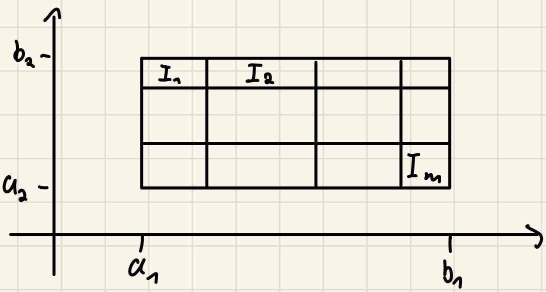
so heißt $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein **kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$**

$|I| := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ heißt **Inhalt/Volumen** von I

$$\Rightarrow |I| = 0 \iff \exists\, j \in \{1, \dots, n\} : b_j = a_j$$

Zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ sei eine Zerlegung Z_j von $[a_j, b_j]$ gegeben

$Z := Z_1 \times \dots \times Z_n$ ist dann eine **Zerlegung von I**



Ein Teilintervall $\tilde{I}$ von I bezüglich Z hat die Form

$$T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$$

wobei T_j jeweils ein Teilintervall bezüglich Z_j ist.

Es seien $I_1, \dots, I_m$ die Teilintervalle bzgl. Z. Dann gilt:

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m, \quad |I| = |I_1| + \dots + |I_m|.$$

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$s_f(Z)$ die **Untersumme** von f bzgl. Z
$S_f(Z)$ die **Obersumme** von f bzgl. Z

$$\Rightarrow s_f := \sup\{ s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \}$$
$$S_f := \inf\{ S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \}$$

$\Rightarrow f$ heißt **integrierbar über I**

$$\iff s_f = S_f \quad \Rightarrow \quad \int_I f(x)\, dx := s_f \ (= S_f)$$

Satz von Fubini $\quad n = p + q$

Sei I_1 ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^p$, I_2 ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^q$

$\Rightarrow I = I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(x,y) \in I$ mit $x \in I_1$, $y \in I_2$

$$\int_I f(x,y)\, d(x,y) = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)\, dx \right) dy$$
$$= \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$\Rightarrow$ Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden

Inhalt von Mengen

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

$$\Rightarrow \quad c_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

B heißt **messbar** $\Leftrightarrow c_B \in R(I)$

$\Rightarrow |B| := \int_I c_B(x)\, dx$ heißt der **Inhalt** von B.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$$\Rightarrow f_B(x) := \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Wähle ein kompaktes Intervall I mit $B \subseteq I$

f heißt **über B integrierbar** $\Leftrightarrow f_B \in R(I)$

Dann: $f \in R(B)$ und

$\int_B f(x)\, dx := \int_I f_B(x)\, dx$ ist das **Integral von f über B**

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar

- Ist $f \in C(B, \mathbb{R})$ beschränkt, so ist $f \in R(B)$
- Es gilt: $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ sind messbar

$f \in R(A \cup B) \iff f \in R(A) \cap R(B)$

$$\Rightarrow \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx - \int_{A \cap B} f(x)\,dx$$

Seien $f, g \in R(B)$ und $g \leq f$ auf B.

Definiere $M_{f,g} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in B,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$

Dann ist $M_{f,g}$ messbar im $\mathbb{R}^{n+1}$ und

$$|M_{f,g}| = \int_B (f-g)\,dx$$

Prinzip von Cavalieri (Um eine Dimension „vereinfachen")

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ messbar. $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}$
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a \leq z \leq b$ $(x,z) \in B$

Für $z \in [a,b]$ sei:

$$Q(z) := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in B\}$$

Weiterhin sei $Q(z)$ messbar für jedes $z \in [a,b]$.

$\Rightarrow z \longmapsto |Q(z)|$ ist integrierbar und

$$|B| = \int_a^b |Q(z)|\,dz$$

Rotationskörper

$a<b$, $f \in R([a,b])$ und $f \geq 0$ auf $[a,b]$

f rotiere im Beispiel um die x-Achse:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

$$\Rightarrow \quad |Q(x)| = \pi \cdot f(x)^2$$

$$\Rightarrow |B| = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

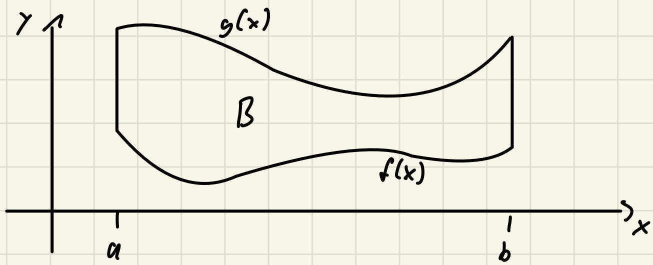
Normalbereiche

Seien $a,b \in \mathbb{R}$; $a<b$; $f,g \in C([a,b])$ und $f \leq g$ auf $[a,b]$.

Dann ist $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein **Normalbereich bzgl. der x-Achse**

$\Rightarrow$ B ist messbar

Für $h \in C(B, \mathbb{R})$:



$$\int_B h(x,y) \, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} h(x,y) \, dx \right) dy$$

Substitutionsregel

Sei: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $B \subseteq G$ kompakt und messbar

$B^\circ := \{x \in B : \exists \delta > 0 \text{ mit } U_\delta(x) \subseteq B\}$

Sei g auf dem inneren B° von B injektiv und

$$\det(g'(y)) \neq 0 \quad (y \in B^\circ)$$

Falls dann $A := g(B)$ und $f \in C(A, \mathbb{R})$ so ist A kompakt und messbar und es gilt:

$$\int_A f(x)\, dx = \int_B f(g(y)) \cdot |\det(g'(y))|\, dy$$

Polarkoordinaten $(n=2)$

$x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$ $\Rightarrow r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$g(r,\varphi) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$; $\det(g'(r,\varphi)) = r$

Für $A := \{(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], r \in [R_1, R_2]\}$

Damit definiere $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ ist $A = g(B)$.

Auf $B^\circ = (R_1, R_2) \times (\varphi_1, \varphi_2)$ ist g injektiv und $\det(g') \neq 0$.
Ist nun $f \in C(A, \mathbb{R})$, gilt:

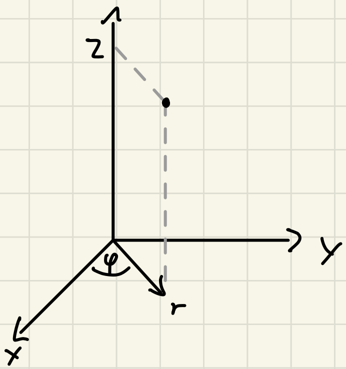
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_B f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot \underbrace{r}_{=|\det(g'(r,\varphi))|}\, d(r,\varphi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{R_1}^{R_2} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r\, dr \right) d\varphi$$

Zylinderkoordinaten $(n=3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos(\varphi) \\ y &= r\cdot\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad g(r,\varphi,z) := (r\cdot\cos(\varphi),\ r\cdot\sin(\varphi),\ z);$$

$$\det(g'(r,\varphi,z)) = r$$



wie Polarkoordinaten, plus z

$$(r\cdot\cos(\varphi),\ r\cdot\sin(\varphi),\ z) \in A$$

$$\Updownarrow$$

$$z \in [H_1, H_2],\ r \in [R_1, R_2],\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$$

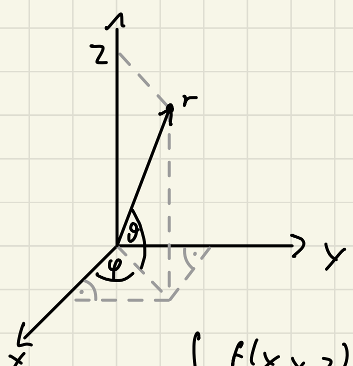
$$\int_A f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_B f(r\cdot\cos(\varphi),\ r\cdot\sin(\varphi),\ z)\cdot r\ d(r,\varphi,z)$$

Kugelkoordinaten $(n=3)$

Für $\varphi = [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$r = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x = r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\vartheta); \quad y = r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\vartheta); \quad z = r\cdot\sin(\vartheta)$$



$$g(r,\varphi,\vartheta) := (r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\vartheta),\ r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\vartheta),\ r\cdot\sin(\vartheta))$$

$$|\det(g'(r,\varphi,\vartheta))| = r^2\cdot\cos(\vartheta)$$

Für $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A = g(B)$ gilt für $f \in C(A, \mathbb{R})$

$$\int_A f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_B f(g(r,\varphi,\vartheta))\cdot r^2\cos(\vartheta)\ d(r,\varphi,\vartheta)$$