Unendliche Reihen

Für eine Folge (a_n) wird $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als eine **unendliche Reihe** bezeichnet

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n\to\infty} S_n$ der **Reihenwert**

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

Eulersche Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

alternierende harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent (Leibnizkriterium)

Exponentialreihe

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

auch Exponentialfunktion

- $\forall r \in \mathbb{Q}: \quad E(r) = e^r$
- $E(x) > 1$, falls $x > 0$, $E(x) > 0$, falls $x \in \mathbb{R}$
- $E(-x) = E(x)^{-1}$
- $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$, streng monotones Wachstum

Reihenwert einer Umordnung

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent

Es existiert eine Umordnung (b_n) von (a_n), sodass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S \in \mathbb{R}$ beliebig

Es existiert eine divergierende Umordnung

Monotoniekriterium

Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Cauchykriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$! nicht $\Leftarrow$!

Analog: Gilt $a_n \not\to 0 \ (n \to \infty)$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Leibnizkriterium

(b_n) sei eine Folge mit
- (b_n) ist monoton fallend
- $b_n \to 0 \ (n \to \infty$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ ist konvergent

Majorantenkriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Definiere: $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

1. Ist (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent
2. Ist (c_n) beschränkt, definiere $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$

Falls:

- $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
- $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

$(\alpha = 1 \Rightarrow ??)$

Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

1. Ist $c_n \geq 1$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
2. Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$, $\beta := \liminf_{n\to\infty} c_n$.

- Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
- Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

$\Rightarrow$ Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, c_n sei konvergent, $\alpha := \lim_{n\to\infty} c_n$

Dann: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \langle \text{keine Aussage} \rangle, & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

Cauchyprodukt

Für zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird definiert für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 \quad = \text{Cauchyprodukt}$$

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Terminologie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **absolut konvergent** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent (stärker als nur konvergent)

in diesem Fall:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent
- $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine Bijektion

Mit $b_n := a_{\varphi(n)}$ ist (b_n) nun eine **Umordnung** von (a_n)

Ist a_n konvergent, so ist b_n konvergent,
ist a_n absolut konvergent, so ist b_n absolut konvergent