

Funktionenfolgen & -reihen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$; (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$
und $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D **punktweise konvergent**

\Leftrightarrow Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.

Dann ist $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in D$)
die **Grenzfunktion** von (f_n) .

Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D **punktweise konvergent**

\Leftrightarrow Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent

Dann ist $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ($x \in D$)
die **Summenfunktion** von (f_n) .

Beispiel:

$D = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Es gilt:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

f_n konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen f .

Bemerkung: Punktweise Konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Anschaulich:



$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D: |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

glm. konv. \Rightarrow punkt. konv.

Kriterien

Folge (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
Folge (α_n) mit $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f .

Kriterium von Weierstraß

Sei $m \in \mathbb{N}$, (c_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D: |f_n(x)| \leq c_n$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$,
 $D := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Falls $[a, b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig.