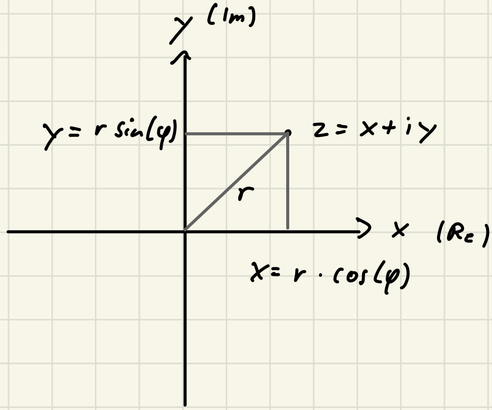
Die komplexe Exponentialfunktion

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

Sei: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ **Betrag** von z
- $\overline{z} := x - iy$ heißt **komplex Konjugierte** von z
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ $(z \in \mathbb{C})$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $z = x + iy \longmapsto e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$
  komplexe Exponentialfunktion
- $\forall t \in \mathbb{R}$: $|e^{it}| = 1$, $e^{-it} = \overline{e^{it}}$
- $e^{i\pi} = -1$
- $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$: $e^{z + 2k\pi i} = e^z$
- $\forall z \in \mathbb{C}$ $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Sei $z \in \mathbb{C}$. $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}: z = 2k\pi i$

Polarkoordinaten



$z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$

$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

φ heißt **Argument** von z

$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$; $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$

$\Rightarrow z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = |z| e^{i \cdot \arg(z)}$

Fundamentalsatz der Algebra

$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ sei ein Polynom mit Grad $n \geq 1$ mit $a_j \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Das Polynom hat genau $\deg(P(z))$ Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Sei: $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt **n-te Wurzel aus a**.

Definiere $r := |a|$ und $\varphi := \arg(a)$ (d.h. $a = r \cdot e^{i\varphi}$)

Für $k = 0, \dots, n-1$ sei

$$z_k := \sqrt[n]{r}\, e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

$\Rightarrow z_j \neq z_k$ für $j \neq k$

$\Rightarrow z$ ist eine n-te Wurzel aus $a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$

Für $a = 1$ heißen $z_0, \dots, z_{n-1}$ die **n-ten Einheitswurzeln**

$\Rightarrow z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt ein **Logarithmus von** w.

$\Rightarrow$ Sei $r = |w|$, $\varphi = \arg(w)$ (d.h. $w = r \cdot e^{i\varphi}$). Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$:

z ist Logarithmus von w

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log(|w|)}_{\log \text{ für } \mathbb{R}} + i\varphi + 2ki\varphi$$