Fourierreihen

Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiere Eigenschaft

$$(V) \iff f \in R([-\pi, \pi]) \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \ 2\pi\text{-periodisch}$$

Funktion f erfülle (V)

$$\Rightarrow f \in R([a, a+2\pi]) \quad \text{und} \quad \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

heißt eine **trigonometrische Reihe**

Orthogonalitätsrelationen Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{\sin(nx)}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} \, dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(kx)\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f erfülle (V). Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$ ↙ a_0 muss definiert sein

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow$ a_n und b_n heißen **Fourierkoeffizienten** von f.
Die zugehörige trigonometrische Reihe heißt **Fourierreihe**:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Falls f gerade ist, gilt:
$(\Leftrightarrow f(x) = f(-x))$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = 0$$

Falls f ungerade ist, gilt:
$(\Leftrightarrow f(x) = -f(-x))$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch. Die Funktion f heißt **stückweise glatt**

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine Zerlegung $\{t_0, \dots, t_n\}$ von $[-\pi, \pi]$
(d.h. $-\pi = t_0 < \dots < t_n = \pi$)

mit:

$$f \in C^1((t_{j-1}, t_j)) \quad (j = 1, \dots, n)$$ $\Rightarrow$ f muss nicht in den Punkten t_j stetig sein

und

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existieren die Grenzwerte

$$f(x-),\ f'(x-),\ f(x+),\ f'(x+)$$

Dann sei $$s_f := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$ $\Rightarrow$ f erfüllt (V)

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert gegen $s_f(x)$ bzw. gegen f

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ 2π-periodisch und stückweise glatt.

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe von f konvergiert in jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe von f konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f

$\Rightarrow$ Sind a_n und b_n die zugehörigen Fourierkoeffizienten,
so: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren absolut

Funktion f erfülle (V), a_n, b_n seien die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ ist konvergent

$\Rightarrow$ $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$ Parsevalsche Gleichung