Differentialgleichungen 1. Ordnung

$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$

getrennte Veränderliche

$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}; \quad y(0) = 2$

Trenne Veränderliche, Merkregel:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\ dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x)\ dx \ ,$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\ dy = -x\,dx$$
$$\Rightarrow \int y\ dy = -\int x\ dx + \tilde{c}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{c} \Rightarrow y^2 = -x^2 + c \quad (c = 2\tilde{c})$$
$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = \pm\sqrt{c-x^2} \quad (x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}))$

-> Bestimme c mittels AWP

$$2 = y(0) = \pm\sqrt{c} \Rightarrow 2 = \sqrt{c} \Rightarrow c = 4$$

Damit ist die Lösung für das AWP:

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Definitionsbereich angeben mit x_0 (x des AWPs) enthalten!

$$(x \in (-2, 2))$$

$y'(x) = \alpha(x)\cdot y(x) + s(x)$

lineare DGL

$y'(x) = \alpha(x)\cdot y(x)$ ist die zugehörige homogene Gleichung

$$y'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=:\alpha(x)}\cdot y(x) + \underbrace{x}_{=:s(x)}$$

Wähle $\beta(x)$ als Stammfunktion von $\alpha(x)$

$$\beta(x) := -\log(x) \qquad (x \in (0,\infty))$$

Allgemeine Lösung der zug. homog. Gl. ist $C \cdot e^{\beta(x)}$ $(C \in \mathbb{R})$

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\log(x)} = \frac{C}{x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Verwende Ansatz für y_p: $\quad y_p(x) = C(x)\cdot e^{\beta(x)}$

$$y_p(x) = C(x)\cdot e^{-\log(x)} = C(x)\ \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow y_p'(x) = C'(x)\cdot\frac{1}{x}\ \cancel{- C(x)\cdot\frac{1}{x^2}}$$
$$\overset{!}{=} -\frac{1}{x}\cdot y_p(x) + x \qquad \left(\text{Setze in Ausgangsfunktion ein hier } y'(x) = -\frac{1}{x}\cdot y(x) + x\right)$$
$$= \cancel{-\frac{1}{x^2}\ C(x)} + x$$
$$\Rightarrow C'(x)\cdot\frac{1}{x} = x \iff C'(x) = x^2$$

Wähle jetzt ein C als Stammfunktion für C'

$$C(x) := \frac{1}{3}x^3. \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad (x \in (0,\infty))$$

Dann ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2 \qquad (C \in \mathbb{R},\ x \in (0,\infty))$$