Unendliche Reihen

Für eine Folge (a_n) wird $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als eine unendliche Reihe bezeichnet

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n \to \infty} s_n$ der Reihenwert

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

Eulersche Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

alternierende harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent (Leibnizkriterium)

Exponentialreihe

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (\forall r \in \mathbb{Q}: \; E(r) = e^r)$$

auch Exponentialfunktion

Monotoniekriterium

Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Cauchykriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \rightarrow 0 \ (n \to \infty)$! nicht $\Leftarrow$!

Analog: Gilt $a_n \not\rightarrow 0 \ (n \to \infty)$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Leibnizkriterium

(b_n) sei eine Folge mit
- (b_n) ist monoton fallend
- $b_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ ist konvergent

Majorantenkriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Definiere: $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

① Ist (c_n) unberschränkt $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

② Ist (c_n) beschränkt, definiere $\alpha := \limsup_{n \to \infty} c_n$

Falls:

- $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
- $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

($\alpha = 1 \Rightarrow$??)

Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

① Ist $c_n \geq 1$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

② Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n \to \infty} c_n$, $\beta := \liminf_{n \to \infty} c_n$.

- Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
- Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

$\Rightarrow$ Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, c_n sei konvergent, $\alpha := \lim_{n \to \infty} c_n$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\begin{cases} \text{absolut konvergent}, & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \langle \text{keine Aussage} \rangle, & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$

Terminologie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **absolut konvergent** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent (stärker als nur konvergent)

in diesem Fall:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent
- $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine Bijektion

Mit $b_n := a_{\varphi(n)}$ ist (b_n) nun eine **Umordnung** von (a_n)