Folgen und Konvergenz

$X \subseteq \mathbb{R}$ Menge

$a : \mathbb{N} \to X$
ist eine Folge in X

z.B.: $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

X ist abzählbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$.

X ist überabzählbar $\Leftrightarrow$ X ist nicht abzählbar.

Für eine Folge (a_n) sei: $M := \{a_1, a_2, \dots\}$

(a_n) ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$\Leftrightarrow$ M ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$
„ε-Umgebung von a"

(a_n) ist konvergent, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)$ existiert

$\Rightarrow$ (a_n) ist divergent, wenn der Grenzwert nicht existiert.

Falls $\forall \varepsilon > 0$

wichtige Grenzwerte

(c Konstante)

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} b^n = 0 \quad \text{für } |b| < 1$$

$\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$ existiert nicht $\Rightarrow$ divergent

Grenzwertkriterien

Monotoniekriterium

(a_n) ist monoton wachsend/fallend und ist nach oben/unten beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

idk ob das wichtig ist aber es steht auf S. 21 als wichtig

$(x, y \geq 0; p \in \mathbb{N})$

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x-y|$$

Falls (a_n) konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = a \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{(n\to\infty)} \sqrt[p]{a}$$

$$a_n := \sqrt[n]{n}; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$$

$$a_n := \sqrt[n]{c}; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{c}\right) = 1$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \approx 2{,}7$$

Teilfolgen

Sei (a_n) eine Folge

$(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ sei eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Mit $b_k = a_{n_k}$ (also $b_1 = a_{n_1}, \ldots$):

(b_k) ist eine Teilfolge von (a_n)

Häufungswert

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist HW

$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist HW von } a_n\}$

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k})
mit $a_{n_k} \to \alpha \quad (k \to \infty)$

z. B.: $a_n = (-1)^n$

$\Rightarrow a_{2k} \to 1, \quad a_{2k-1} \to -1 \quad \Rightarrow \{-1, 1\} \subseteq H(a_n)$

Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in $\mathbb{Q}$ mit $(r_n) \xrightarrow{(n \to \infty)} x$.

Sei (a_n) konvergent gegen a und (a_{n_k}) eine beliebige Teilfolge:

$a_{n_k} \xrightarrow{(k \to \infty)} a$.

$m \in \mathbb{N}$ ist **niedrig** für a_n, wenn: $\forall n \geq m : a_n \geq a_m$

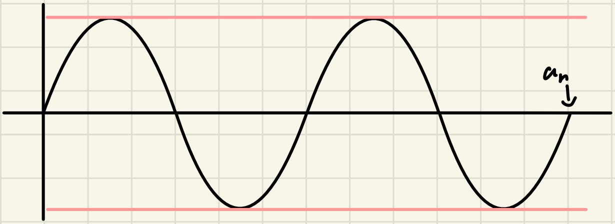
Für jede Folge a_n existiert eine monotone Teilfolge

Bolzano - Weierstraß

(a_n) sei beschränkt $\Rightarrow H(a_n) \neq \emptyset \Rightarrow (a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge

In diesem Fall gilt auch:

$H(a_n)$ ist beschränkt, $\sup H(a_n)$, $\inf H(a_n) \in H(a_n)$
$\hookrightarrow$ $\max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$ existieren



Limes superior

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \max H(a_n)$$

Limes inferior

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \min H(a_n)$$

Ist a_n konvergent, so ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow n,m > n_0 : \quad |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

a_n heißt eine **Cauchy-Folge**

a_n ist konvergent $\Leftrightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge

Cauchy-Kriterium

Falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge und somit konvergent!