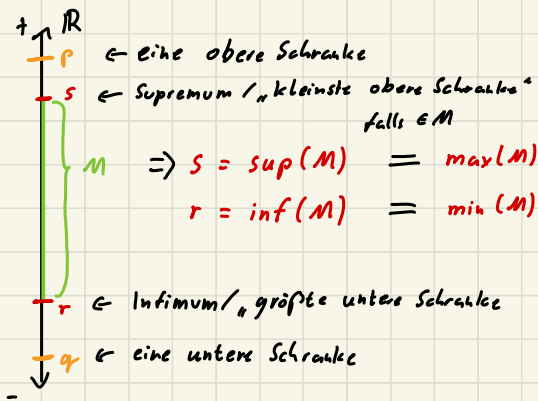


Allgemein wichtige Formeln

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

wichtige Gleichungen

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1 + nx$
($x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1$)



Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup(M)$.

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

"Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen"

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Verschiedene Mengen

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

"rationale Zahlen"

$$\Rightarrow p \text{ Primzahl} : \sqrt[p]{p} \notin \mathbb{Q}$$

Rationale Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

Folgen und Konvergenz $X \subseteq \mathbb{R}$ Menge

$$a: \mathbb{N} \rightarrow X$$

ist eine Folge in X

X ist abzählbar \Leftrightarrow Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$.

$$\text{z.B.: } a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

X ist überabzählbar $\Leftrightarrow X$ ist nicht abzählbar.

Für eine Folge (a_n) sei $M := \{a_1, a_2, \dots\}$

(a_n) ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

„ ε -Umgebung von a “

$\Leftrightarrow M$ ist (nach oben / nach unten) beschränkt

(a_n) ist konvergent, wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ existiert

$\Rightarrow (a_n)$ ist divergent, wenn der Grenzwert nicht existiert.

Falls $\forall \varepsilon > 0$

wichtige Grenzwerte (c Konstante)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0 \quad \text{für } |b| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ existiert nicht } \Rightarrow \text{divergent}$$

Grenzwertkriterien

Monotoniekriterium

(a_n) ist monoton wachsend/fallend und ist nach oben/unten beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

ichk ob das wichtig ist aber
 $(x, y \geq 0; p \in \mathbb{N})$ es steht auf

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \quad \text{S. 27 als wichtig}$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x-y|$$

Falls (a_n) konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \sqrt[p]{a}$$

$$a_n := \sqrt[n]{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$$

$$a_n := \sqrt[n]{c}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{c}) = 1$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \approx 2,7$$

Teilfolgen Sei (a_n) eine Folge

(n_1, n_2, n_3, \dots) sei eine Folge in \mathbb{N} mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Mit $b_k = a_{n_k}$ (also $b_1 = a_{n_1}, \dots$):

(b_k) ist eine Teilfolge von (a_n)

Häufungswert

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist HW

$$H(a_n) := \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist HW von } a_n \}$$

\Leftrightarrow Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k})
mit $a_{n_k} \rightarrow \alpha \quad (k \rightarrow \infty)$

z.B.: $a_n = (-1)^n$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_{2k} \rightarrow 1, \\ a_{2k-1} \rightarrow -1 \end{matrix} \Rightarrow \{-1, 1\} \in H(a_n)$$

Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in \mathbb{Q} mit $(r_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} x$.

Sei (a_n) konvergent gegen a und (a_{n_k}) eine beliebige Teilfolge:

$$a_{n_k} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} a.$$

$m \in \mathbb{N}$ ist **niedrig** für a_n , wenn: $\forall n \geq m : a_n \geq a_m$

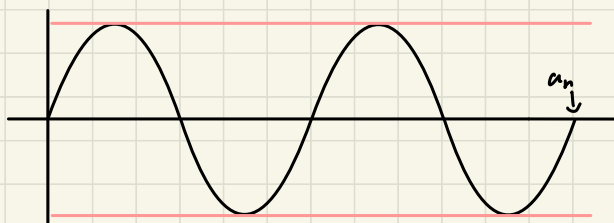
Für jede Folge a_n existiert eine monotone Teilfolge

Bolzano-Weierstraß

(a_n) sei beschränkt $\Rightarrow H(a_n) \neq \emptyset \Rightarrow (a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge

In diesem Fall gilt auch:

$$H(a_n) \text{ ist beschränkt, } \sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n) \\ \Leftrightarrow \max H(a_n) \text{ und } \min H(a_n) \text{ existieren}$$



Limes superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n := \max H(a_n)$$

Limes inferior

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n := \min H(a_n)$$

Ist a_n konvergent, so ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n, m > n_0: |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

\Downarrow

a_n heißt eine Cauchy-Folge

a_n ist konvergent $\Leftrightarrow a_n$ ist Cauchy-Folge

Cauchy-Kriterium

Falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow a_n$ ist Cauchy-Folge und somit konvergent!

Unendliche Reihen

Für eine Folge (a_n) wird $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ als eine unendliche Reihe bezeichnet

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ der Reihenwert

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

Eulersche Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ist divergent}$$

alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ ist konvergent} \quad (\text{Leibnizkriterium})$$

Exponentialreihe

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(\forall r \in \mathbb{Q}: E(r) = e^r)$$

auch Exponentialfunktion

Monotoniekriterium

Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Cauchy Kriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n \geq n_0: \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$! nicht \Leftarrow !

Analog: Gilt $a_n \not\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Leibnizkriterium

(b_n) sei eine Folge mit $\begin{cases} (b_n) \text{ ist monoton fallend} \\ b_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \end{cases}$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ ist konvergent

Majorantenkriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Definiere: $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

① Ist (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

② Ist (c_n) beschränkt, definiere $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$

Falls:

— $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

— $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

($\alpha = 1 \Rightarrow ??$)

Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

① Ist $c_n \geq 1$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

② Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$, $\beta := \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n$.

— Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

— Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

\Rightarrow Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, c_n sei konvergent,
 $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\begin{cases} \text{absolut konvergent,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$

<keine Aussage>, falls $\alpha = 1$

Terminologie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **absolut konvergent** $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent (stärker als nur konvergent)

in diesem Fall: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei eine Bijektion

Mit $b_n := a_{\varphi(n)}$ ist (b_n) nun eine **Umordnung** von (a_n)