Allgemein wichtige Formeln

Sei: $M \subseteq \mathbb{R}$

wichtige Gleichungen

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1 + nx$
  $(x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1)$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

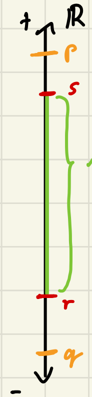
„Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen"

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



← eine obere Schranke

← Supremum / „kleinste obere Schranke"

falls $\in M$

$\Rightarrow s = \sup(M) = \max(M)$

$r = \inf(M) = \min(M)$

← Infimum / „größte untere Schranke"

← eine untere Schranke

Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup(M)$.

Verschiedene Mengen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

„rationale Zahlen"

$\Rightarrow p$ Primzahl : $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

Rationale Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

Folgen und Konvergenz

$X \subseteq \mathbb{R}$ Menge

$a : \mathbb{N} \to X$
ist eine Folge in X

z.B.: $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

X ist abzählbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$.

X ist überabzählbar $\Leftrightarrow$ X ist nicht abzählbar.

Für eine Folge (a_n) sei: $M := \{a_1, a_2, \dots\}$

(a_n) ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$\Leftrightarrow$ M ist (nach oben / nach unten) beschränkt

$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
$= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$
„ε-Umgebung von a"

(a_n) ist konvergent, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ existiert

$\Rightarrow$ (a_n) ist divergent, wenn der Grenzwert nicht existiert.

Falls $\forall \varepsilon > 0$

wichtige Grenzwerte

(c Konstante)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \quad \text{für } |b| < 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ existiert nicht $\Rightarrow$ divergent

Grenzwertkriterien

Monotoniekriterium

(a_n) ist monoton wachsend/fallend und ist nach oben/unten beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

idk ob das wichtig ist aber es steht auf S. 21 als wichtig

$(x, y \geq 0; p \in \mathbb{N})$

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x-y|$$

Falls (a_n) konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = a \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{(n\to\infty)} \sqrt[p]{a}$$

$a_n := \sqrt[n]{n}$; $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$

$a_n := \sqrt[n]{c}$; $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{c}) = 1$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \approx 2{,}7$$

Teilfolgen

Sei (a_n) eine Folge

$(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ sei eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Mit $b_k = a_{n_k}$ (also $b_1 = a_{n_1}, \ldots$):

(b_k) ist eine Teilfolge von (a_n)

Häufungswert

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist HW

$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist HW von } a_n\}$

$\iff$ Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k})
mit $a_{n_k} \to \alpha \quad (k \to \infty)$

z.B.: $a_n = (-1)^n$

$\Rightarrow a_{2k} \to 1, \quad a_{2k-1} \to -1 \quad \Rightarrow \{-1, 1\} \subseteq H(a_n)$

Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in $\mathbb{Q}$ mit $(r_n) \xrightarrow{(n\to\infty)} x$.

Sei (a_n) konvergent gegen a und (a_{n_k}) eine beliebige Teilfolge:

$a_{n_k} \xrightarrow{(k\to\infty)} a$.

$m \in \mathbb{N}$ ist **niedrig** für a_n, wenn: $\forall n \geq m : a_n \geq a_m$

Für jede Folge a_n existiert eine monotone Teilfolge

Bolzano - Weierstraß

(a_n) sei beschränkt $\Rightarrow H(a_n) \neq \emptyset \Rightarrow (a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge

In diesem Fall gilt auch:

$H(a_n)$ ist beschränkt, $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$
↳ $\max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$ existieren

Limes superior

$$\limsup_{n \to \infty} a_n := \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n := \max H(a_n)$$

Limes inferior

$$\liminf_{n \to \infty} a_n := \underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n := \min H(a_n)$$

Ist a_n konvergent, so ist

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a := \lim_{n \to \infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n, m > n_0 : \quad |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

a_n heißt eine **Cauchy-Folge**

a_n ist konvergent $\Leftrightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge

Cauchy-Kriterium

Falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge und somit konvergent!

Unendliche Reihen

Für eine Folge (a_n) wird $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als eine **unendliche Reihe** bezeichnet

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert**

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

Eulersche Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

alternierende harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent (Leibnizkriterium)

Exponentialreihe

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

auch Exponentialfunktion

- $\forall r \in \mathbb{Q}: \; E(r) = e^r$
- $E(x) > 1$, falls $x > 0$, $E(x) > 0$, falls $x \in \mathbb{R}$
- $E(-x) = E(x)^{-1}$
- $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$, streng monotones Wachstum

Reihenwert einer Umordnung

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent

Es existiert eine Umordnung (b_n) von (a_n), sodass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \in \mathbb{R}$ beliebig

Es existiert eine divergierende Umordnung

Monotoniekriterium

Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Cauchykriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$! nicht $\Leftarrow$!

Analog: Gilt $a_n \not\to 0 \ (n \to \infty)$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Leibnizkriterium

(b_n) sei eine Folge mit
- (b_n) ist monoton fallend
- $b_n \to 0 \ (n \to \infty$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ ist konvergent

Majorantenkriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

Definiere: $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

① Ist (c_n) unberschränkt $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

② Ist (c_n) beschränkt, definiere $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$

Falls:

- $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
- $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

($\alpha = 1 \Rightarrow$??)

Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

① Ist $c_n \geq 1$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

② Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$, $\beta := \liminf_{n\to\infty} c_n$.

- Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent
- Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent

$\Rightarrow$ Es sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$, $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, c_n sei konvergent, $\alpha := \lim_{n\to\infty} c_n$

Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\begin{cases} \text{absolut konvergent}, & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \text{<keine Aussage>}, & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$

Cauchyprodukt

Für zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird definiert für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \quad = \text{Cauchyprodukt}$$

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Terminologie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **absolut konvergent** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent (stärker als nur konvergent)

in diesem Fall:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent
- $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine Bijektion

Mit $b_n := a_{\varphi(n)}$ ist (b_n) nun eine **Umordnung** von (a_n)

Ist a_n konvergent, so ist b_n konvergent,
ist a_n absolut konvergent, so ist b_n absolut konvergent

Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{heißt} \quad \textbf{Potenzreihe}$$

Definiere dazu

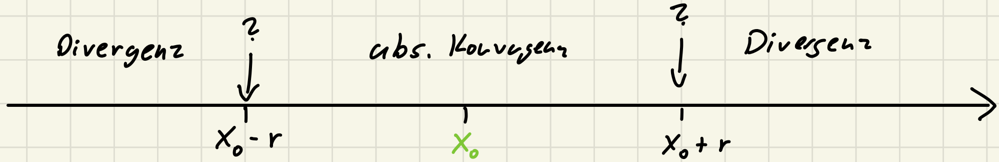
$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \left.\begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}\right\} \text{"} = \frac{1}{\rho}\text{"}$$

r ist der **Konvergenzradius der Potenzreihe**

Je nachdem wie x liegt lassen sich Aussagen treffen:



Falls $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ ist und $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ konvergiert, hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ den Konvergenzradius

$$L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Cosinus

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sinus

$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$-\sin(x) = \sin(-x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

q-adische Entwicklung

Für $x \in \mathbb{R}$ existiert eine größter $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$

$[x] := k$ „Gauß-Klammern"

Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Sei (y_n) eine Folge mit $y_0 \in \mathbb{N}_0$ und $y_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$

$$\Rightarrow \quad y_0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{q^n}$$

heißt ein q-adischer Bruch

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist ihre q-adische Entwicklung eindeutig bestimmt

$q = 10$: Dezimalentwicklung
$q = 2$: Dualentwicklung

Grenzwerte bei Funktionen

$D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist **Häufungspunkt** von D, wenn eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \to x_0$

x_0 ist HP von $D \iff \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

$D_\delta := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$

$f, g: D \to \mathbb{R}$ Funktionen

$f \leq g$ auf M, wenn gilt: $f(x) \leq g(x)$ $(x \in M)$.

Grenzwerte

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_\delta(x_0): |f(x) - a| < \varepsilon.$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\iff$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ ist $f(x_n)$ konvergent

Cauchykriterium $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0): |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $g: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \iff$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $g(x_n) \to \infty$

(S. 59)