Die Fouriertransformation

Terminologie

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf $[a,b]$ stückweise stetig**

$\iff \exists\, t_0, t_1, \dots, t_m \in [a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{und} \quad g \in C((t_{j-1}, t_j)) \quad (j = 1, \dots, m)$$

UND es existieren die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$g(a+),\ g(b-),\ g(t_j+),\ g(t_j-) \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf $[a,b]$ stückweise glatt**

$\iff \exists\, t_0, t_1, \dots, t_m \in [a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{und} \quad g \in C^1((t_{j-1}, t_j)) \quad (j = 1, \dots, m)$$

UND es existieren die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$g(t_j+),\ g(t_j-),\ g'(t_j+),\ g'(t_j-) \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$g(a+),\ g'(a+),\ g(b-),\ g'(b-).$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig/glatt**

$\iff g$ ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise stetig/glatt

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig. Dann gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g'(x_0) = \frac{1}{2}\left(g'(x_0+) + g'(x_0-)\right)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f: I \to \mathbb{C}$ eine Funktion
$u(x) := Re(f)$, $v(x) := Im(f)$, sodass $f(x) = u(x) + i \cdot v(x)$

f heißt auf I differenzierbar

$\Leftrightarrow$ u und v sind auf I differenzierbar
$\Rightarrow f'(x) := u'(x) + i \cdot v'(x)$

Sei $I = [a,b]$ und $u, v \in R([a,b])$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \cdot \int_a^b v(x)\, dx$$

und f heißt integrierbar auf I.
Man schreibt: $f \in R([a,b], \mathbb{C})$