Das Riemann-Integral

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion; $m := \inf f([a,b])$; $M := \sup f([a,b])$

$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a,b]$

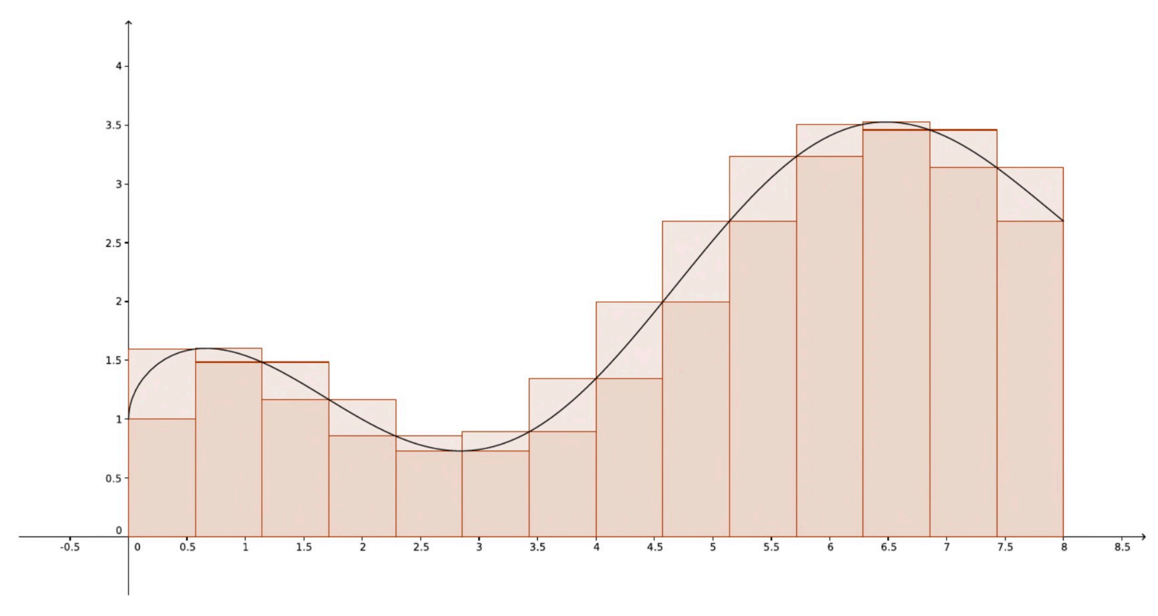
$\iff \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung.

$I_j := [x_{j-1}, x_j]$; $|I_j| := x_j - x_{j-1}$; $m_j := \inf f(I_j)$; $M_j := \sup f(I_j)$

$\Rightarrow \quad s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j \, |I_j|$ die **Untersumme** von f bezüglich Z

$\Rightarrow \quad S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j \, |I_j|$ die **Obesumme** von f bzgl. Z



Sei: $s_f := \sup\{ s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung}\}$

$S_f := \inf\{ S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung}\}$

$\Rightarrow$ f heißt **Riemann-Intgrierbar über** $[a,b] \iff s_f = S_f$

$\Rightarrow f \in R([a,b])$

Terminologie

$G, g: I \to \mathbb{R}$ Funktionen

G heißt eine Stammfunktion von g auf I

$\iff$ G ist auf I differenzierbar und $G' = g$

Besitzt $g: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so schreibt man für diese auch

$$\int g \, dx \quad \text{oder} \quad \int g(x) \, dx$$

Das heißt ein unbestimmtes Integral von g.

Riemannsches Integrabilitätskriterium

$$f \in R([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Z = Z(\varepsilon) \text{ Zerlegung}: \ S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f \in R([a,b])$ und besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen
Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei: $f \in R([a,b])$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

Es gilt:

- $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \quad (x, y \in [a,b])$
- F ist Lipschitz-Stetig
- Ist $f \in C([a,b]) \Rightarrow F \in C^1([a,b])$ und $F'(x) = f(x) \quad (x \in [a,b])$

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

Substitutionsregeln

Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man auch $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituiere $x = g(t)$

$\downarrow$ auf beiden Seiten ableiten

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$\Rightarrow$ „$dx = g'(t)\,dt$“

Seien $f, g \in R([a,b])$.

$f \leq g$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ und $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R([a,b])$

$C([a,b]) \subseteq R([a,b])$

Es sei: $c \in (a,b)$.

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b])$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Es sei $D := f([a,b])$ und mit einem $L \geq 0$ gelte für $h : D \to \mathbb{R}$:

$$|h(s) - h(t)| \leq L |s - t| \qquad (t, s \in D)$$

$\Rightarrow h \circ f \in R([a,b])$

$|f| \in R([a,b])$ und $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

$f \cdot g \in R([a,b])$

Falls $g(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$ und $\frac{1}{g}$ auf $[a,b]$ beschränkt
$\Rightarrow \frac{1}{g} \in R([a,b])$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_\alpha^\alpha f(x) \, dx := 0$$

$$\int_\beta^\alpha f(x) \, dx := - \int_\alpha^\beta f(x) \, dx$$

Es sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g \in C(I)$ und $x_0 \in I$ (fest).
Definiere $G : I \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Dann: $G \in C^1(I)$ und $G' = g$ auf I

Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt

- Ist $\{x \in [a,b] : f \text{ ist nicht stetig}\}$ endlich

$$\Downarrow$$

$$f \in R([a,b])$$

- Ist $f \in R([a,b])$ und $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ endlich

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

Sei (f_n) eine Folge mit $\begin{cases} f_n \in C^1([a,b]) \ (n \in \mathbb{N}), \\ (f_n(a)) \text{ ist konvergent}, \\ (f_n') \text{ konvergiert auf } [a,b] \text{ gleichmäßig} \\ \text{gegen } g : [a,b] \to \mathbb{R}. \end{cases}$

Dann: (f_n) konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig und für

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in [a,b]) \text{ gilt:}$$

$$f \in C^1([a,b]) \text{ und } f'(x) = g(x) \quad (x \in [a,b])$$

$\Rightarrow$ Grenzwerte dürfen getauscht werden

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \quad (x \in [a,b])$$