$$y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\cdot(y(x))^{\alpha}$$

Bernoullische DGL

Es muss gelten $g, h \in C(I,\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$y'(x) + y(x)^2 - x\,y(x) - \frac{y(x)}{x} = 0, \quad y(1) = 1$$

$$\Rightarrow g(x) = -(x + \tfrac{1}{x}), \quad h(x) := 1; \quad \alpha = 2$$

Multipliziere DGL mit $(1-\alpha)\,y(x)^{-\alpha}$

$$(1-\alpha)\,y(x)^{-\alpha} = -y(x)^{-2}$$

$$\Rightarrow -y'(x)\,y(x)^{-2} + (x + \tfrac{1}{x})\,y(x)^{-1} - 1 = 0$$

Betrachte Substitution $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$, auch für AWP

$$z(x) = y(x)^{-1}, \quad z'(x) = -y(x)^{-2}\cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-y'(x)\,y(x)^{-2}}_{z'(x)} + (x + \tfrac{1}{x})\underbrace{y(x)^{-1}}_{z(x)} - 1 = 0$$

$$= z'(x) + (x + \tfrac{1}{x})\,z(x) - 1 = 0; \quad z(1) = y(1)^{-1} = 1$$

Bestimme Lösung mittels bekannter Methode

$$y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^2(x) = k(x)$$

Riccatische Differentialgleichung

Rate zunächst eine Lösung und setze dann in Formel ein:

Sind y_1, y_2 Lösungen der DGL, so gilt für $u := y_1 - y_2$

$$u'(x) = -\left(g(x) + 2h(x)\cdot y_2(x)\right)\cdot u(x) - h(x)\cdot u^2(x)$$

$$y'(x) = (1-x)\,y(x)^2 + (2x-1)\,y(x) - x, \quad y(1) = 2$$

$$\Rightarrow g(x) := 1-2x, \quad h(x) := x-1, \quad k(x) := -x$$

Rate Lösung und setze $\varphi(x) := a$ $(a \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow a = 1$ erfüllt diese Gleichung.

$\Rightarrow \varphi(x) = 1$ ist eine Lösung der DGL

Nutze $u = y - \varphi$

$$u'(x) = -\underbrace{\left((1-2x) + 2(x-1)\,\varphi(x)\right)}_{-1}\,u(x) - (x-1)\,u(x)^2$$

$$\Leftrightarrow u'(x) = u(x) + (1-x)\,u(x)^2$$

$$\Leftrightarrow u'(x) - u(x) + (x-1)\,u(x)^2 = 0$$

Man erhält eine Bernoullische-DGL