# Differentialrechnung

$I$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$f$ heißt in $x_0 \in D$ **differenzierbar**

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Ableitung von } f \text{ in } x_0} \text{ existiert}$$

$f$ ist in $x_0$ differenzierbar

$\Downarrow$

$f$ ist in $x_0$ stetig

$f$ heißt **auf $I$ differenzierbar**

$\Leftrightarrow$ $f$ ist in jedem $x \in I$ differenzierbar.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $g: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$x_0 \in M$ heißt **innerer Punkt**

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(x_0) \subseteq M$

$g$ hat in $x_0 \in M$ ein **lokales Maximum / Minimum**

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M: \quad g(x) \leq g(x_0) \, / \, g(x) \geq g(x_0)$

$g$ hat in $x_0 \in M$ ein **globales Maximum / Minimum**

$\Leftrightarrow \forall x \in M: \; g(x) \leq g(x_0) \, / \, g(x) \geq g(x_0)$

Sei $f$ auf $I$ differenzierbar.

Ist $f'$ in $x_0$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ ist **in $x_0$ zweimal differenzierbar**

Ist $f'$ auf $I$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ ist **auf $I$ zweimal differenzierbar**

Sei $n \in \mathbb{N}$. $f$ heißt auf $I$ n-mal stetig differenzierbar

$\Leftrightarrow$ $f$ ist auf $I$ n-mal differenzierbar und $f^{(n)} \in C(I)$

$\Downarrow$

$f', f'', \ldots \in C(I)$

$C^n(I) := \{f: I \to \mathbb{R} : f$ ist auf $I$ n-mal stetig differenzierbar

# Differentiationsregeln

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $f, g: I \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbare Funktionen

a) $(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (falls $f \cdot g$ diffbar)

c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

d) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

# Kuriositäten

Ist $f \in C(I)$, streng monoton, in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Sei $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ sei innerer Punkt von $I$ und

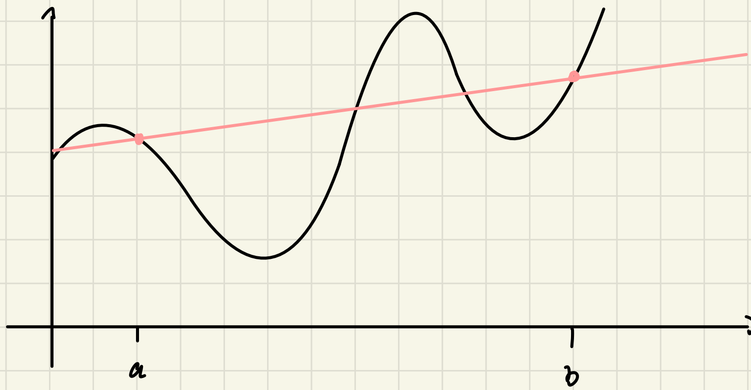
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

- Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Maximum
- Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum
- Ist $n$ ungerade hat $f$ in $x_0$ kein lokales Extremum

## Mittelwertsatz

Sei $f \in C([a,b])$ und $f$ auf $(a,b)$ differenzierbar. Dann:

$$\exists\, \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$




$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Es existiert ein Wert $\xi$ zwischen a und b, sodass f die gleiche Steigung hat wie die Gerade

## Regeln von l'Hospital

Sei $I := (a,b)$ (auch $a = -\infty$ und $b = \infty$ möglich)
Seien $f, g$ auf $I$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $(x \in I)$
und es sei $c = a$ oder $c = b$

$$L := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$

oder $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$

so ist $L = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

## Potenzreihe differenzieren

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$
$I := (x_0 - r,\ x_0 + r)$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $(x \in I)$.

Dann: $f$ ist differenzierbar durch

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x - x_0)^{n-1}$$ mit Konvergenzradius $r$

## Abelscher Grenzwert

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0,1)$

Wenn die Potenzreihe auch in $x_0 + r$ konvergiert und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ für } x \in (x_0 - r, x_0 + r]$$

Dann: $f$ ist stetig in $x_0 + r$

Analog für $x_0 - r$

## Satz von Taylor

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f$ sei auf $I$ $(n+1)$ mal differenzierbar.
Es seien $x, x_0 \in I$ und $x \neq x_0$
Dann existiert ein $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

also $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$T_n f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$

und heißt **Taylor-Polynom von $f$ im Punkt** $x_0$

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ heißt **Restglied**