

5. Математические схемы моделирования систем. Основные подходы к построению математических моделей системы. Непрерывно-детерминированные модели. Дискретно-детерминированные модели. Дискретно-стохастические модели. Непрерывно-стохастические модели. Сетевые модели. Комбинированные модели.

Математическое моделирование многие считают скорее искусством, чем стройной и законченной теорией. Здесь очень велика роль опыта, интуиции и других интеллектуальных качеств человека. Поэтому невозможно написать достаточно формализованную инструкцию, определяющую, как должна строиться модель той или иной системы. Тем не менее отсутствие точных правил не мешает опытным специалистам строить удачные модели. К настоящему времени уже накоплен значительный опыт, дающий основание сформулировать некоторые принципы и подходы к построению моделей. При рассмотрении порознь каждый из них может показаться довольно очевидным. Но совокупность взятых вместе принципов и подходов далеко не тривиальна. Многие ошибки и неудачи в практике моделирования являются прямым следствием нарушения этой методологии.

Принципы определяют те общие требования, которым должна удовлетворять правильно построенная модель. Рассмотрим эти принципы.

1. Адекватность. Этот принцип предусматривает соответствие модели целям исследования по уровню сложности и организации, а также соответствие реальной системе относительно выбранного множества свойств. До тех пор, пока не решен вопрос, правильно ли отображает модель исследуемую систему, ценность модели незначительна.

2. Соответствие модели решаемой задаче. Модель должна строиться для решения определенного класса задач или конкретной задачи исследования системы. Попытки создания универсальной модели, нацеленной на решение большого числа разнообразных задач, приводят к такому усложнению, что она оказывается практически непригодной. Опыт показывает, что при решении каждой конкретной задачи нужно иметь свою модель, отражающую те аспекты системы, которые являются наиболее важными в данной задаче. Этот принцип связан с принципом адекватности.

3. Упрощение при сохранении существенных свойств системы. Модель должна быть в некоторых отношениях проще прототипа—в этом смысл моделирования. Чем сложнее рассматриваемая система, тем по возможности более упрощенным должно быть ее описание, умышленно утрирующее типичные и игнорирующее менее существенные свойства. Этот принцип может быть назван принципом абстрагирования от второстепенных деталей.

4. Соответствие между требуемой точностью результатов моделирования и сложностью модели. Модели по своей природе всегда носят приближенный характер. Возникает вопрос, каким должно быть это приближение. С одной стороны, чтобы отразить все сколько-нибудь существенные свойства, модель необходимо детализировать. С другой стороны, строить модель, приближающуюся по сложности к реальной системе, очевидно, не имеет смысла. Она не должна быть настолько сложной, чтобы нахождение решения оказалось слишком затруднительным. Компромисс между этими двумя требованиями достигается нередко путем проб и ошибок. Практическими рекомендациями по уменьшению сложности моделей являются:

- изменение числа переменных, достигаемое либо исключением несущественных переменных, либо их объединением. Процесс преобразования модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений называют агрегированием. Например, все типы ЭВМ в модели гетерогенных сетей можно объединить в четыре типа - ПЭВМ, рабочие станции, большие ЭВМ, кластерные ЭВМ;

- изменение природы переменных параметров. Переменные параметры рассматриваются в качестве постоянных, дискретные — в качестве непрерывных и т.д. Так, условия распространения радиоволн в модели радиоканала для простоты можно принять постоянными;

- изменение функциональной зависимости между переменными. Нелинейная зависимость заменяется обычно линейной, дискретная функция распределения вероятностей - непрерывной;

- изменение ограничений (добавление, исключение или модификация). При снятии ограничений получается оптимистичное решение, при введении — пессимистичное. Варьируя ограничениями, можно найти возможные граничные значения эффективности. Такой прием часто используется для нахождения предварительных оценок эффективности решений на этапе постановки задач;

- ограничение точности модели. Точность результатов модели не может быть выше точности исходных данных.

5. Баланс погрешностей различных видов. В соответствии с принципом баланса необходимо добиваться, например, баланса систематической погрешности моделирования за счет отклонения модели от оригинала и погрешности исходных данных, точности отдельных элементов модели, систематической погрешности моделирования и случайной погрешности при интерпретации и осреднении результатов.

6. Многовариантность реализаций элементов модели. Разнообразие реализаций одного и того же элемента, отличающихся по точности (а следовательно, и по сложности), обеспечивает регулирование соотношения «точность/сложность».

7. Блочное строение. При соблюдении принципа блочного строения облегчается разработка сложных моделей и появляется возможность использования накопленного опыта и готовых блоков с минимальными связями между ними. Выделение блоков производится с учетом разделения модели по этапам и режимам функционирования системы. К примеру, при построении модели для системы радиоразведки можно выделить модель работы излучателей, модель обнаружения излучателей, модель пеленгования и т.д.

В зависимости от конкретной ситуации возможны следующие подходы к построению моделей;

- непосредственный анализ функционирования системы;
- проведение ограниченного эксперимента на самой системе;
- использование аналога;

- анализ исходных данных.

Имеется целый ряд систем, которые допускают проведение непосредственных исследований по выявлению существенных параметров и отношений между ними. Затем либо применяются известные математические модели, либо они модифицируются, либо предлагается новая модель. Таким образом, например, можно вести разработку модели для направления связи в условиях мирного времени.

При проведении эксперимента выявляются значительная часть существенных параметров и их влияние на эффективность системы. Такую цель преследуют, например, все командно-штабные игры и большинство учений.

Если метод построения модели системы не ясен, но ее структура очевидна, то можно воспользоваться сходством с более простой системой, модель для которой существует.

К построению модели можно приступить на основе анализа исходных данных, которые уже известны или могут быть получены. Анализ позволяет сформулировать гипотезу о структуре системы, которая затем апробируется. Так появляются первые модели нового образца иностранной техники при наличии предварительных данных об их технических параметрах.

Разработчики моделей находятся под действием двух взаимно противоречивых тенденций: стремления к полноте описания и стремления к получению требуемых результатов возможно более простыми средствами. Достижение компромисса ведется обычно по пути построения серии моделей, начинающихся с предельно простых и восходящих до высокой сложности (существует известное правило: начинай с простых моделей, а далее усложняй). Простые модели помогают глубже понять исследуемую проблему. Усложненные модели используются для анализа влияния различных факторов на результаты моделирования. Такой анализ позволяет исключать некоторые факторы из рассмотрения.

Сложные системы требуют разработки целой иерархии моделей, различающихся уровнем отображаемых операций. Выделяют такие уровни, как вся система, подсистемы, управляющие объекты и др.

Этапы построения математической модели.

Сущность построения математической модели состоит в том, что реальная система упрощается, схематизируется и описывается с помощью того или иного математического аппарата. Можно выделить следующие основные этапы построения моделей.

1. Содержательное описание моделируемого объекта. Объекты моделирования описываются с позиций системного подхода. Исходя из цели исследования устанавливаются совокупность элементов, взаимосвязи между элементами, возможные состояния каждого элемента, существенные характеристики состояний и соотношения между ними. Например, фиксируется, что если значение одного параметра возрастает, то значение другого - убывает и т.п. Вопросы, связанные с полнотой и единственностью набора характеристик, не

рассматриваются. Естественно, в таком словесном описании возможны логические противоречия, неопределенности. Это исходная естественно-научная концепция исследуемого объекта. Такое предварительное, приближенное представление системы называют концептуальной моделью. Для того чтобы содержательное описание служило хорошей основой для последующей формализации, требуется обстоятельно изучить моделируемый объект. Нередко естественное стремление ускорить разработку модели уводит исследователя от данного этапа непосредственно к решению формальных вопросов. В результате построенная без достаточного содержательного базиса модель оказывается непригодной к использованию.

На этом этапе моделирования широко применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели.

2. Формализация операций. Формализация сводится в общих, чертах к следующему. На основе содержательного описания определяется исходное множество характеристик системы. Для выделения существенных характеристик необходим хотя бы приближенный анализ каждой из них. При проведении анализа опираются на постановку задачи и понимание природы исследуемой системы. После исключения несущественных характеристик выделяют управляемые и неуправляемые параметры и производят, символизацию. Затем определяется система ограничений на значения управляемых параметров. Если ограничения не носят принципиальный характер, то ими пренебрегают.

Дальнейшие действия связаны с формированием целевой функции модели. В соответствии с известными положениями выбираются показатели исхода операции и определяется примерный вид функции полезности на исходах. Если функция полезности близка к пороговой (или монотонной), то оценка эффективности решений возможна непосредственно по показателям исхода операции. В этом случае необходимо выбрать способ свертки показателей (способ перехода от множества показателей к одному обобщенному показателю) и произвести саму свертку. По свертке показателей формируются критерий эффективности и целевая функция.

Если при качественном анализе вида функции полезности окажется, что ее нельзя считать пороговой (монотонной), прямая оценка эффективности решений через показатели исхода операции неправомерна. Необходимо определять функцию полезности и уже на ее основе вести формирование критерия эффективности и целевой функции.

В целом замена содержательного описания формальным - это итеративный процесс.

3. Проверка адекватности модели. Требование адекватности находится в противоречии с требованием простоты, и это нужно учитывать при проверке модели на адекватность. Исходный вариант модели предварительно проверяется по следующим основным аспектам:

- Все ли существенные параметры включены в модель?
- Нет ли в модели несущественных параметров?
- Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами?
- Правильно ли определены ограничения на значения параметров?

Для проверки рекомендуется привлекать специалистов, которые не принимали участия в разработке модели. Они могут более объективно рассмотреть модель и заметить ее слабые стороны, чем ее разработчики. Такая предварительная проверка модели позволяет выявить грубые ошибки. После этого приступают к реализации модели и проведению исследований. Полученные результаты моделирования подвергаются анализу на соответствие известным свойствам исследуемого объекта. Для установления соответствия создаваемой модели оригиналу используются следующие пути:

- сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях;
- использование других близких моделей;
- сопоставление структуры и функционирования модели с прототипом.

Главным путем проверки адекватности модели исследуемому объекту выступает практика. Однако она требует накопления статистики, которая далеко не всегда бывает достаточной для получения надежных данных. Для многих моделей первые два пути приемлемы в меньшей степени. В этом случае остается один путь: заключение о подобии модели и прототипа делать на основе сопоставления их структур и реализуемых функций. Такие заключения не носят формального характера, поскольку основываются на опыте и интуиции исследователя.

По результатам проверки модели на адекватность принимается решение о возможности ее практического использования или о проведении корректировки.

4. Корректировка модели. При корректировке модели могут уточняться существенные параметры, ограничения на значения управляемых параметров, показатели исхода операции, связи показателей исхода операции с существенными параметрами, критерий эффективности. После внесения изменений в модель вновь выполняется оценка адекватности.

5. Оптимизация модели. Сущность оптимизации моделей состоит в их упрощении при заданном уровне адекватности. Основными показателями, по которым возможна оптимизация модели, выступают время и затраты средств для проведения исследований на ней. В основе оптимизации лежит возможность преобразования моделей из одной формы в другую. Преобразование может выполняться либо с использованием математических методов, либо эвристическим путем.

Основные подходы к построению моделей системы

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно-детерминированный, дискретно-детерминированный, дискретно-стохастический, непрерывно-стохастический, сетевой и обобщенный [8, 15, 18]. Соответственно этим подходам были разработаны типовые математические схемы создания моделей.

1. Непрерывно-детерминированный подход (D – схемы) основан на использовании систем дифференциальных уравнений в качестве математических моделей. Созданные на основе этого подхода модели исследуются, как правило, аналитическим способом. Например, процесс малых колебаний маятника описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$m \cdot l^2 \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + m \cdot g \cdot l \cdot \varphi(t) = 0$$

где m, l - масса и длина подвеса маятника; g - ускорение свободного падения; $\varphi(t)$ - угол отклонения маятника в момент времени t . Из этого уравнения свободного колебания маятника можно найти оценки интересующих характеристик. Одно из приложений непрерывно-детерминированного подхода – анализ систем автоматического управления непрерывными процессами, например, системы управления температурой печи.

Простейшую систему автоматического управления можно представить в следующем виде (рис. 1.3):

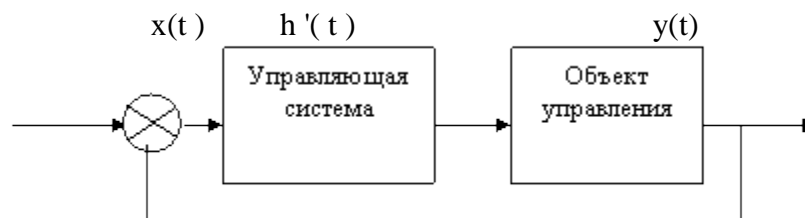


Рисунок 1.3

Разность между заданными $y_l(t)$ и действительным $y(t)$ законами изменения управляемой величины есть ошибка управления $h'(t) = y_l(t) - y(t)$. Если предписанный закон

изменения управляемой величины соответствует закону изменения входного (задающего) воздействия, т.е. $x(t)=y(t)$, то $h'(t)= x(t)-y(t)$. Принцип обратной связи (основной принцип систем автоматического управления): приведение в соответствие выходной переменной $y(t)$ ее заданному значению используется информация об отклонении $h'(t)$ между ними. Задачей системы автоматического управления является изменение выходных сигналов согласно заданному закону с определенной точностью (с допустимой ошибкой).

2. Дискретно-детерминированный подход (F – схемы) реализуется с помощью математического аппарата теории автоматов. Система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени. Математической моделью при этом подходе является конечный автомат, характеризующийся конечным множеством X входных сигналов, конечным множеством Y выходных сигналов, конечным множеством Z внутренних состояний, начальным состоянием $Z0 \in Z$; функцией переходов $g(z, x)$; функцией выходов $v(z, x)$. Автомат функционирует в дискретном автоматном времени, моментами которого являются такты (примыкающие друг к другу равные интервалы времени, каждому из которых соответствуют постоянные значения входного и выходного сигналов и внутренние состояния). задается конечный F – автомат таблицей переходов и выходов, либо с помощью графа.

Работа конечного автомата происходит по следующей схеме: в каждом t -м такте на вход автомата, находящегося в состоянии $z(t)$, подается некоторый сигнал $x(t)$, на который он реагирует переходом в $(t + 1)$ -м такте в новое состояние $z(t+1)$ и выдачей некоторого выходного сигнала. Например, автомат первого рода (автомат Мили) описывается следующим образом:

$$z(t+1)= g[z(t), x(t)], t=0,1,2,...;$$

$$y(t)=v[z(t), x(t)], t=0,1,2,...$$

Автомат, для которого функция выходов не зависит от входной переменной $x(t)$, называется автоматом Мура:

$$y(t)= v[z(t)], t=0,1,2,...$$

Дискретно-детерминированный подход применяется для описания широкого класса процессов функционирования реальных объектов в АСУ. Примеры таких объектов – узлы компьютера, устройства контроля, регулирования и управления, системы временной и пространственной коммутации в технике связи и т.д.

3. Дискретно-стохастический подход (P – схемы) использует в качестве математического аппарата вероятностные автоматы, которые можно определить как дискретные потактные преобразователи информации с памятью, функционирование которых в каждом такте зависит только от состояния памяти в них и может быть описано статистически. Для такого автомата характерно задание таблицы вероятностей перехода автомата в некоторое состояние и появления некоторого выходного сигнала в зависимости от текущего состояния и входного сигнала. Исследование автомата может проводиться как аналитическими, так и имитационными методами. Этот подход применим для изучения

эксплуатационных характеристик производственных объектов (например, надежности, ремонтпригодности, отказоустойчивости и т.п.).

4. Непрерывно-стохастический подход (Q – схема) применяется для формализации процессов обслуживания [11, 13, 14, 17]. Этот подход наиболее известен ввиду того, что большинство производственных (экономических, технических и т.д.) систем по своей сути – это системы массового обслуживания. Типовая математическая схема моделирования таких систем – Q – схема. В любой системе массового обслуживания можно выделить элементарный прибор. Соответственно в этом приборе выделяют некоторой емкости накопитель заявок, ожидающих обслуживания; канал обслуживания; потоки событий: поток заявок на обслуживание, характеризующийся моментами времени поступления и атрибутами (признаками) заявок (например, приоритетами), и поток обслуживания, характеризующийся моментами начала и окончания обслуживания заявок. Для исследования систем массового обслуживания применяются аналитические методы (раздел 2) и имитационные методы (раздел 3).

5. Сетевой подход (N – схема) используется для формализованного описания и анализа причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно протекает несколько процессов. Самым распространенным в настоящее время формализмом, описывающим структуру и взаимодействие параллельных систем и процессов, являются сети Петри.

6. Обобщенный подход (A – схема) применяется для описания любых видов систем и базируется на понятии агрегативной системы, представляющей собой формальную схему общего вида (A – схему). При агрегативном описании сложная система разбивается на конечное число частей (подсистем), с сохранением связей, обеспечивающих их взаимодействие. В свою очередь подсистемы также разбиваются на части. Процесс разбиения продолжается до тех пор, пока не образуются подсистемы, которые в условиях рассматриваемой задачи моделирования удобны для математического описания. В результате такой декомпозиции сложная система представляется в виде многоуровневой конструкции из взаимосвязанных элементов, объединенных в подсистемы различных уровней.