Les indispensables en mathématiques

Loris Caruhel

22/03/2025

Table des matières

1 Vocabulaires

Fonction injective

Une fonction $f : A \to B$ est **injective** si :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Cela signifie que deux éléments différents de A ont des images différentes.
- Pas de doublons dans les images.

Exemple : $f(x) = 2x$ est injective sur $\mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ ne l'est pas, car $f(2) = f(-2) = 4$.

Fonction surjective

Une fonction $f : A \to B$ est **surjective** si :

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y$$

- Toutes les valeurs possibles dans B sont atteintes.

Exemple : $f(x) = x^3$ est surjective sur $\mathbb{R}$. $f(x) = e^x$ ne l'est pas sur $\mathbb{R}$, car son image est strictement positive.

Fonction bijective

Une fonction est **bijective** si elle est à la fois **injective et surjective**.

- Elle associe chaque élément de A à un unique élément de B, et couvre tout B.
- Elle possède une **fonction réciproque** f^{-1}.

Exemple : $f(x) = x + 3$ est bijective sur $\mathbb{R}$.

Fonction réversible

Une fonction est **réversible** si on peut revenir en arrière, c'est-à-dire s'il existe une fonction inverse f^{-1} telle que :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Remarque : Une fonction est réversible si et seulement si elle est bijective.

Fonction différentiable

Une fonction est **différentiable** si elle admet une dérivée, c'est-à-dire si elle est "lisse", sans saut ni point anguleux.
Exemples :

- $f(x) = \sin(x)$ est différentiable partout.
- $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en $x = 0$, car elle présente une pointe.

2 Les fractions

— **Addition :** $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d + b \times c}{b \times d}}$

— **Soustraction :** $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d - b \times c}{b \times d}$

— **Multiplication :** $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

— **Division :** $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$

— **Simplification :** $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}, \quad k \neq 0$

— **Puissance :** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

— **Inverse :** $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$

3 Les puissances

— **Produit :** $\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$

— **Inverse :** $\boxed{\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}}$

— **Quotient :** $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$

— **Puissance d'un quotient :** $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$

— **Puissance de puissance :** $\boxed{(a^n)^m = a^{n\times m}}$

— **Exposants identiques :** $\boxed{a^n \times b^n = (ab)^n}$

— **Exposant fractionnaire :** $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

— Pour n **impair** $\boxed{(-a)^n = -a^n}$

— Pour n **pair** $\boxed{(-a)^n = a^n}$

— $\boxed{a^0 = 1}$

4 Les identités remarquables

4.1 Puissance 2

— $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

— $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

— $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

— $\boxed{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}$

4.2 Puissance 3

— $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

— $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

— $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$

— $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

5 Les racines

- **Produit :** $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$
- **Quotient :** $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$
- **Racine d'une puissance :** $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$
- **Produit de racines :** $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$
- **Racine d'un carré parfait :** $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$
- **Racine carrée de zéro :** $\boxed{\sqrt{0} = 0}$
- **Racine carrée d'un nombre négatif (complexe) :** $\boxed{\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \quad (\text{si } a > 0)}$
- **Racine carrée d'une somme :** $\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$
- **Limites :**
  - $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0}$
  - $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty}$

6 Exponentielles et logarithme

- **Produit :** $\boxed{ln(ab) = ln(a) + ln(b)}$
- **Division :** $\boxed{ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)}$
- **Propriété 1 :** $\boxed{ln(a^n) = nln(a)}$
- **Propriété 2 :** $\boxed{ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)}$
- **Propriété 3 :** $\boxed{ln(\frac{1}{b}) = -ln(b)}$
- **Propriété 4 :** $\boxed{ln(e^x) = x}$
- **Propriété 5 :** $\boxed{e^{ln(x)} = x}$
- **Limites :**
  - $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$
  - $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$
  - $\boxed{\lim_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty}$
  - $\boxed{\lim_{x \to -\infty} ln(x) = +\infty}$

7 Trigonométrie

7.1 Fonctions

7.1.1 Originales

— $\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$

— $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$

— $\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots}$ sur $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

7.1.2 Réciproques

— $\boxed{\arcsin(x) \quad \text{sur} \quad x \in [-1, 1]}$

— $\boxed{\arccos(x) \quad \text{sur} \quad x \in [-1, 1]}$

— $\boxed{\arctan(x) \quad \text{sur} \quad x \in \mathbb{R}}$

7.1.3 Hyperboliques

— $\boxed{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

— $\boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

— $\boxed{\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}$

7.1.4 Hyperboliques réciproques

— $\boxed{arsinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}$

— $\boxed{arcosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$ $sur \quad x \geq 1$

— $\boxed{artanh(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)}$ $sur \quad |x| < 1$

7.1.5 Complémentaires (secondaires)

— **Cotangente :** $\boxed{\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$ $sur \quad x \neq k\pi$

— **Sécante :** $\boxed{\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}}$ *sur* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

— **Cosécante :** $\boxed{\csc(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}}$ *sur* $x \neq k\pi$

7.1.6 Complémentaires hyperboliques

— $\boxed{\coth(x) = \dfrac{1}{\tanh(x)} = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}}$ *sur* $x \neq 0$

— $\boxed{sech(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}}$

— $\boxed{csch(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)}}$ *sur* $x \neq 0$

7.2 Propriétés

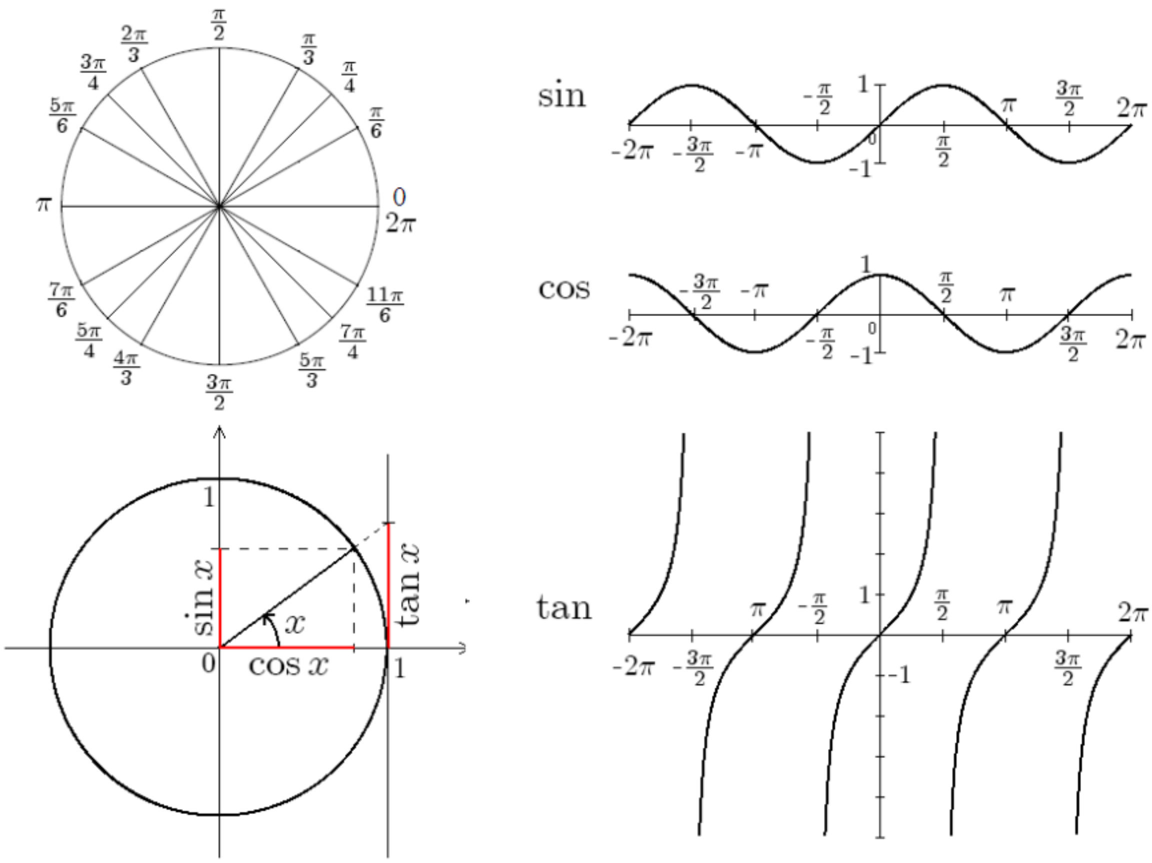

Figure 1 – Quelques propriétés des fonctions de base

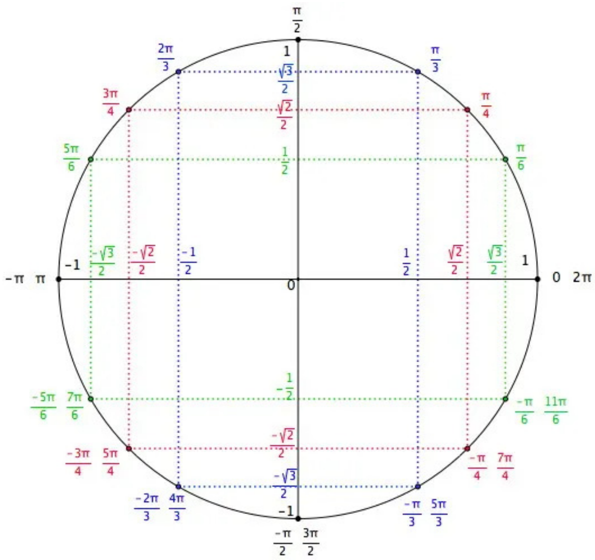

FIGURE 2 – Cercle trigonométrique

7.3 Fondamentales

7.3.1 Identités trigonométriques fondamentales

— $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

— $\boxed{\tan x \cdot \cot x = 1}$

— $\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$

— $\boxed{\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$

— $\boxed{1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

— $\boxed{1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}}$

— $\boxed{\sec x = \dfrac{1}{\cos x}}$

— $\boxed{\csc x = \dfrac{1}{\sin x}}$

7.3.2 Formules de somme et différence

— $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b}$

— $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b}$

— $\boxed{\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}}$

7.3.3 Angles associés

— $\boxed{\sin(\pi + a) = -\sin a}$

— $\boxed{\cos(\pi + a) = -\cos a}$

— $\boxed{\tan(\pi + a) = \tan a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

— $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a}$

— $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a}$

— $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cot a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

— $\boxed{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a}$

— $\boxed{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - a\right) = -\sin a}$

— $\boxed{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - a\right) = -\cot a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7.3.4 Arguments doubles

— $\boxed{\sin(2a) = 2\sin a \cos a}$

— $\boxed{\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a}$

— $\boxed{\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7.3.5 Arguments triples

— $\boxed{\sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a}$

— $\boxed{\cos(3a) = -3\cos a + 4\cos^3 a}$

— $\boxed{\tan(3a) = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7.3.6 Formules de Carnot

— $\boxed{1 + \cos(2a) = 2\cos^2 a}$

— $\boxed{1 - \cos(2a) = 2\sin^2 a}$

7.3.7 Formules de Simpson

— $\boxed{\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]}$

— $\boxed{\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]}$

— $\boxed{\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]}$

7.3.8 Développements tangentiels

— $\boxed{\tan(a) + \ tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a) \times \cos(b)}}$

— $\boxed{\tan(a) = \frac{\sin(2a)}{2\cos^2(a)}}$

8 Les dérivés

8.1 Rappel du principe des dérivés

La dérivée d'une fonction $f(x)$ représente le taux de variation de cette fonction. Elle peut être dénotée $f'(x)$ ou encore $\frac{df}{dx}$. Le calcul et l'étude de la dérivée sont des notions importantes dans l'étude des fonctions.

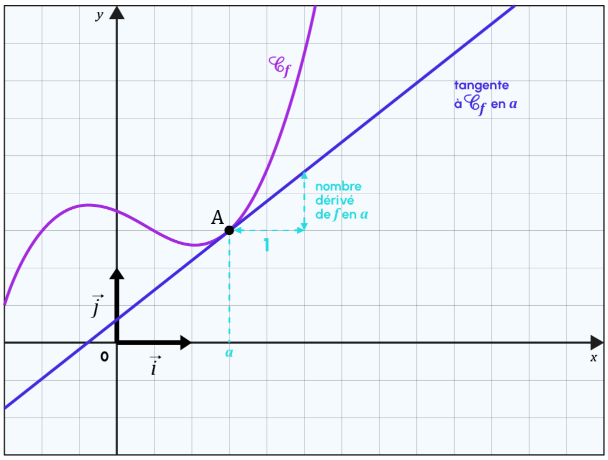

FIGURE 3 – Représentation d'une tangente

Le signe de la dérivée permet d'indiquer les variations de la fonction f. C'est ce qui représente la tangente à la fonction. Et la dérivée elle-même représente le coefficient directeur de la tangente à f au point.

Une dérivé est représenter par le coefficient directeur de la tangente :

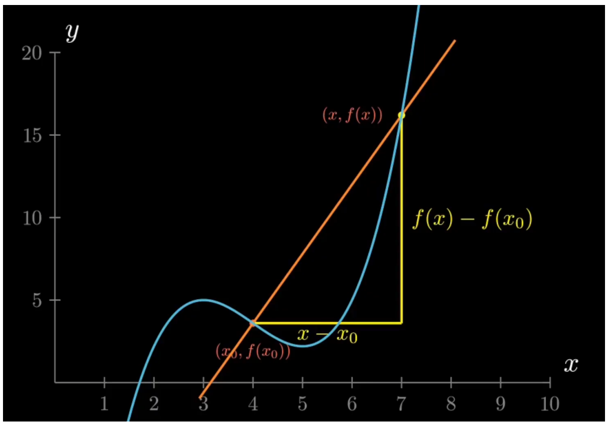

FIGURE 4 – Représentation du coefficient directeur

Donc par déduction, c'est la limite de ce coefficient directeur vers le point $(x_0, f(x_0))$
Nous avons donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Une fonction peut ne pas avoir de dérivé en tout point de celle-ci.

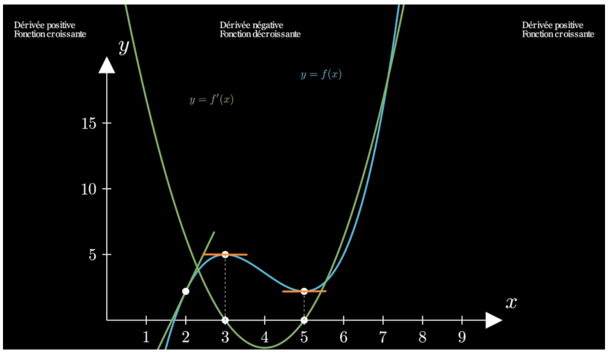

FIGURE 5 – Déduire le signe de la fonction

Grâce à $f'(x)$ nous pouvons voir ici que les points où elle s'annule sont les changements de variation de la fonction $f(x)$.

8.2 Dérivés des fonctions usuelles

TABLE 1: Tableau des dérivés usuelles

Fonction f	Dérivé f'	Domaine de définition D_f
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = u$	$f'(x) = u'$	
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$	
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	
$f(x) = \frac{1}{u^n}$	$f'(x) = -\frac{nu'}{u^{n-1}}$	
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$f(x) = ln(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$	
$f(x) = sin(u)$	$f'(x) = u'cos(u)$	
$f(x) = cos(u)$	$f'(x) = -u'sin(u)$	
$f(x) = tan(u)$	$f'(x) = u'(1 + tan^2(u))$	

Fonction f	Dérivé f'	Domaine de définition D_f
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$	
$f(x) = uv$	$f'(x) = u'v + uv'$	
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$f(x) = au$	$f'(x) = au'$	
$f(x) = (f \circ g)(x)$	$f'(x) = g'(x)(f'(x) \circ g(x))$	

9 Les primitives usuelles

Table 2: Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Primitives F	Domaine de définition D_f
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1; 0\}$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{ln(a)} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln(\|x\|) + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}_+$
$f(x) = ln(x)$	$F(x) = xln(x) - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = sin(x)$	$F(x) = -cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(x)$	$F(x) = sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)(x)$	$F(x) = -ln(\|cos(x)\|) + C$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$f(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$F(x) = tan(x) + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = u'u^n$	$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1; 0\}$
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'}{u^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u} + C$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$f(x) = \frac{u'}{u^n}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$f(x) = \frac{u'}{u}$	$F(x) = ln(\|u\|) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'cos(u)$	$F(x) = sin(u) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'sin(u)$	$F(x) = -cos(u) + C$	$\mathbb{R}$

Fonction f	Primitives F	Domaine de définition D_f
$f(x) = u'tan(u)$	$F(x) = -ln\|cos(u)\| + C$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

10 Intégrales

10.1 Propriétés de l'intégrale

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \text{(Chasles)}}$$

$$\boxed{f(x) \geq sur[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{(Positivité)}}$$

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \quad \text{(Linéarité)}}$$

10.2 Intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode inspirée de la dérivation d'un produit de fonctions.

Formule générale

$$\boxed{\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx}$$

Justification (à partir de la dérivée d'un produit)

On sait que :

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)\, v(x)\right) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

En intégrant des deux côtés :

$$\int \frac{d}{dx}\left(u(x)\, v(x)\right) dx = \int u'(x)\, v(x)\, dx + \int u(x)\, v'(x)\, dx$$

Or, par la propriété fondamentale de l'intégration :

$$u(x)\, v(x) = \int u'(x)\, v(x)\, dx + \int u(x)\, v'(x)\, dx$$

En isolant l'intégrale cherchée :

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

Choix des fonctions

On choisit :

— $u(x)$: une fonction facile à dériver,

— $v'(x)$: une fonction facile à intégrer.

Exemple

Calculons :

$$\int x\,e^x\,dx$$

On choisit :

$$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx$$

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$

11 Le changement de variable

Le changement de variable est une méthode fondamentale utilisée en mathématiques pour simplifier une expression, résoudre une équation, ou effectuer un calcul (comme une dérivée, une intégrale, ou une équation différentielle).

Principe général

On remplace une variable x par une nouvelle variable u, définie par une fonction :

$$u = \varphi(x)$$

Cela permet de transformer un problème en fonction de x en un problème en fonction de u, souvent plus simple à traiter.

But

Le but est de :

— simplifier une expression complexe,

— adapter une fonction à une forme connue,

— utiliser une symétrie ou une substitution astucieuse,

— résoudre plus facilement une équation ou une intégrale.

Exemple : résolution d'équation

Résolvons l'équation suivante :

$$x^4 + 2x^2 - 8 = 0$$

On pose :

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 = u^2$$

L'équation devient :

$$u^2 + 2u - 8 = 0$$

On résout :

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow u = 2 \text{ ou } u = -4$$

On revient à la variable x :

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \qquad (\text{car } x^2 = -4 \text{ n'a pas de solution réelle})$$

Remarque

Le changement de variable doit être :

— **bijectif*** (ou du moins localement injectif*) pour être réversible*,

— **différentiable*** si on travaille avec des fonctions continues, dérivables ou intégrables,

— accompagné d'un retour à la variable initiale si nécessaire.

12 Limites usuelles

13 Polynômes