Les indispensables en mathématiques

Loris Caruhel

22/03/2025

Table des matières

1 Les fractions

- **Addition :** $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d + b \times c}{b \times d}}$
- **Soustraction :** $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d - b \times c}{b \times d}$
- **Multiplication :** $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$
- **Division :** $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$
- **Simplification :** $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}, \quad k \neq 0$
- **Puissance :** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- **Inverse :** $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$

2 Les puissances

- **Produit :** $\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$
- **Inverse :** $\boxed{\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}}$
- **Quotient :** $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$
- **Puissance d'un quotient :** $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$
- **Puissance de puissance :** $\boxed{(a^n)^m = a^{n\times m}}$
- **Exposants identiques :** $\boxed{a^n \times b^n = (ab)^n}$
- **Exposant fractionnaire :** $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$
- Pour n **impair** $\boxed{(-a)^n = -a^n}$
- Pour n **pair** $\boxed{(-a)^n = a^n}$
- $\boxed{a^0 = 1}$

3 Les identités remarquables

3.1 Puissance 2 :

— $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

— $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

— $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

— $\boxed{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}$

3.2 Puissance 3 :

— $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

— $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

— $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$

— $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

4 Les racines

- **Produit :** $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$
- **Quotient :** $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$
- **Racine d'une puissance :** $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$
- **Produit de racines :** $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$
- **Racine d'un carré parfait :** $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$
- **Racine carrée de zéro :** $\boxed{\sqrt{0} = 0}$
- **Racine carrée d'un nombre négatif (complexe) :** $\boxed{\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \quad (\text{si } a > 0)}$
- **Racine carrée d'une somme :** $\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$
- **Limites :**
  - $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0}$
  - $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty}$

5 Exponentielles et logarithme

- **Produit :** $\boxed{ln(ab) = ln(a) + ln(b)}$
- **Division :** $\boxed{ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)}$
- **Propriété 1 :** $\boxed{ln(a^n) = nln(a)}$
- **Propriété 2 :** $\boxed{ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)}$
- **Propriété 3 :** $\boxed{ln(\frac{1}{b}) = -ln(b)}$
- **Propriété 4 :** $\boxed{ln(e^x) = x}$
- **Propriété 5 :** $\boxed{e^{ln(x)} = x}$
- **Limites :**
  - $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$
  - $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$
  - $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty}$
  - $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} ln(x) = +\infty}$

6 Trigonométrie

6.1 Fonctions trigonométriques

- $\boxed{sin(x)}$
- $\boxed{cos(x)}$
- $\boxed{tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}} \quad sur \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad avec \quad k \in \mathbb{Z}$
- **Réciproques :**
  - $\boxed{arcsin(x) = y \Leftrightarrow sin(y) = x} \quad sur \quad x \in [-1, 1]$
  - $\boxed{arccos(x) = y \Leftrightarrow cos(y) = x} \quad sur \quad x \in [-1, 1]$
  - $\boxed{arctan(x) = y \Leftrightarrow tan(y) = x} \quad sur \quad x \in \mathbb{R}$
- **Hyperboliques :**
  - $\boxed{sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$
  - $\boxed{cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$
  - $\boxed{tanh(x) = \dfrac{sinh(x)}{cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$
- **Hyperboliques réciproques :**
  - $\boxed{arsinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}$
  - $\boxed{arcosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} \quad sur \quad x \geq 1$
  - $\boxed{artanh(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)} \quad sur \quad |x| < 1$
- **Complémentaires (secondaires) :**
  - **Cotangente :** $\boxed{cot(x) = \dfrac{1}{tan(x)} = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}} \quad sur \quad x \neq k\pi$
  - **Sécante :** $\boxed{sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}} \quad sur \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

- **Cosécante :** $\boxed{csc(x) = \dfrac{1}{sin(x)}}$ $\quad sur \quad x \neq k\pi$

- **Complémentaires hyperboliques :**

  - $\boxed{coth(x) = \dfrac{1}{tanh(x)} = \dfrac{cosh(x)}{sinh(x)}}$ $\quad sur \quad x \neq 0$

  - $\boxed{sech(x) = \dfrac{1}{cosh(x)}}$

  - $\boxed{csch(x) = \dfrac{1}{sinh(x)}}$ $\quad sur \quad x \neq 0$

7 Les dérivés

7.1 Rappel du principe des dérivés

La dérivée d'une fonction $f(x)$ représente le taux de variation de cette fonction. Elle peut être dénotée $f'(x)$ ou encore $\frac{df}{dx}$. Le calcul et l'étude de la dérivée sont des notions importantes dans l'étude des fonctions.

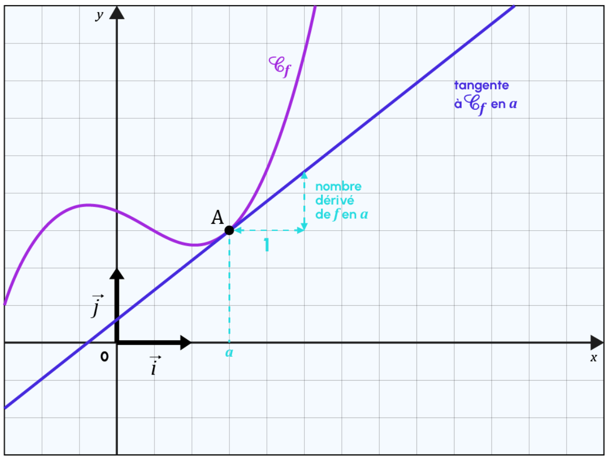

FIGURE 1 – Représentation d'une tangente

Le signe de la dérivée permet d'indiquer les variations de la fonction f. C'est ce qui représente la tangente à la fonction. Et la dérivée elle-même représente le coefficient directeur de la tangente à f au point.

Une dérivé est représenter par le coefficient directeur de la tangente :

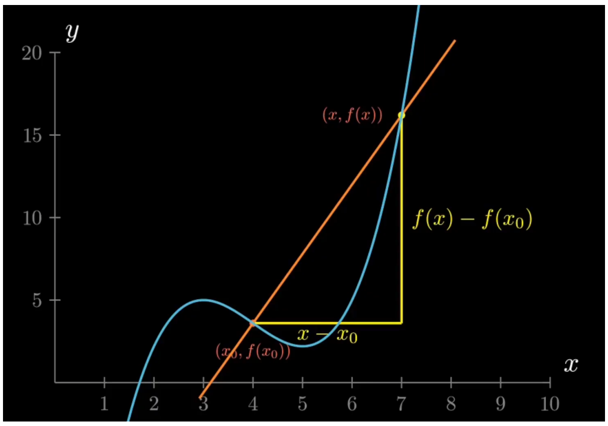

FIGURE 2 – Représentation du coefficient directeur

Donc par déduction, c'est la limite de ce coefficient directeur vers le point $(x_0, f(x_0))$
Nous avons donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Une fonction peut ne pas avoir de dérivé en tout point de celle-ci.

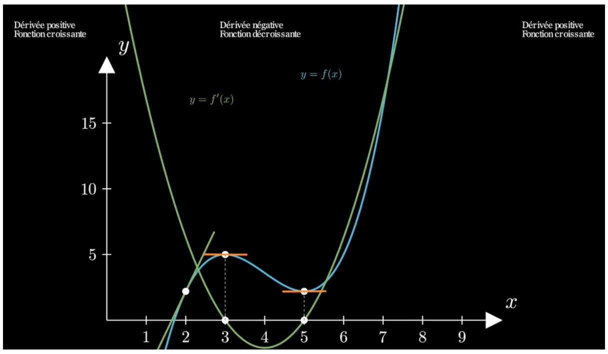

FIGURE 3 – Déduire le signe de la fonction

Grâce à $f'(x)$ nous pouvons voir ici que les points où elle s'annule sont les changements de variation de la fonction $f(x)$.

7.2 Dérivés des fonctions usuelles

Table 1: Tableau des dérivés usuelles

Fonction f	Dérivé f'	Domaine de définition D_f
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = u$	$f'(x) = u'$	
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$	
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	
$f(x) = \frac{1}{u^n}$	$f'(x) = -\frac{nu'}{u^{n-1}}$	
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$f(x) = ln(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$	
$f(x) = sin(u)$	$f'(x) = u'cos(u)$	
$f(x) = cos(u)$	$f'(x) = -u'sin(u)$	
$f(x) = tan(u)$	$f'(x) = u'(1 + tan^2(u))$	

Fonction f	Dérivé f'	Domaine de définition D_f
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$	
$f(x) = uv$	$f'(x) = u'v + uv'$	
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$f(x) = au$	$f'(x) = au'$	
$f(x) = (f \circ g)(x)$	$f'(x) = g'(x)(f'(x) \circ g(x))$	

8 Les primitives usuelles

Table 2: Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Primitives F	Domaine de définition D_f
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1; 0\}$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{ln(a)} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln(\|x\|) + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}_+$
$f(x) = ln(x)$	$F(x) = xln(x) - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = sin(x)$	$F(x) = -cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(x)$	$F(x) = sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)(x)$	$F(x) = -ln(\|cos(x)\|) + C$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$f(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$F(x) = tan(x) + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = u'u^n$	$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1; 0\}$
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'}{u^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u} + C$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$f(x) = \frac{u'}{u^n}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$f(x) = \frac{u'}{u}$	$F(x) = ln(\|u\|) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'cos(u)$	$F(x) = sin(u) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'sin(u)$	$F(x) = -cos(u) + C$	$\mathbb{R}$

Fonction f	Primitives F	Domaine de définition D_f
$f(x) = u'tan(u)$	$F(x) = -ln\|cos(u)\| + C$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$