Exercice 1 Soient X et Y deux v.a dont les fonctions de répartitions F_X et F_Y sont égales.
Que peut on dire de leurs densités de probabilités. Justifier votre réponse.

Exercice 2 La fontion définie par

$$F(x) = \begin{cases} \lambda(1-x^2) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \quad\text{ailleurs} \end{cases}$$

peut-elle être la fonction de répartition d'une v.a. (justifier votre réponse).

Exercice 3 On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si} \ -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité. On supposera désormais que k est égal à la valeur trouvée, et que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X.

   On séparera les cas $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ et $x \geq 1$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a, les valeurs de x telles que $\mathbb{P}(X > x) = a$.

Solution 1. Pour que f soit une densité de probabilité, on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} f(t)dt \ \text{ car } f \text{ est nulle à l'exterieur de } [-1,1] \\ &= \int_{-1}^{1} kt^2 dt = k\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{2}{3}k \end{aligned}$$

On doit donc avoir $k = 3/2$.

2. (a) <u>1^{er} cas</u> $x \in]-\infty, -1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) <u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-1}^{x} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) <u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

finalement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

3. On peut déjà noter que si $a \notin [0, 1]$ il n'y a pas de solution (une probabilité prends ses valeurs dans $[0, 1]$, d'autre part

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x).$$

On veut dont résoudre

$$1 - F_X(x) = a \Leftrightarrow F_X(x) = 1 - a$$

donc, puisque $1 - a \in [0, 1]$ et d'après la question précédente

(a) Si $a = 1$ on a une infinité de solutions $x \in]-\infty, -1]$

(b) Si $a = 0$ on a une infinité de solutions $x \in [1, +\infty[$

(c) Si $a \in]0,1[$ il faut résoudre

$$1/2(x^2+1) = 1-a$$

d'où

$$x^2 = 1-2a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-2a}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} 3/2t.t^2 dt \\
&= 3/2 \int_{-1}^{1} t^3 \\
&= 3/2 \left[t^4/4\right]_{-1}^{+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \geq 0$, c'est-à-dire telle que

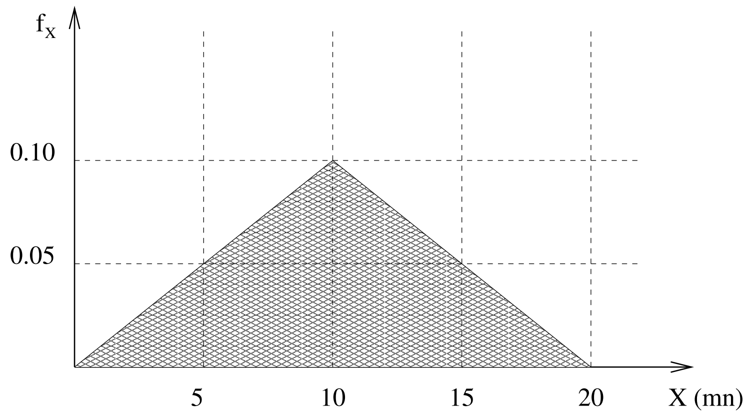
$$\mathbb{P}(X=k) = C(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. Expliciter $C(\lambda)$ en fonction de λ.

Rappel: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exercice 5 Attendre ou pas le bus.
Chaque matin pour vous rendre à l'IUT vous passez à coté d'un abri-bus et vous vous posez la même question : attendre un bus ou continuer à pied.

- Vérifier que la fonction définie ci-dessous (par son graphique) est une densité de probabilité.
- On suppose que le temps d'attente du bus a la densité de probabilité précédente. Si vous devez attendre plus de 15 mn, vous serez en retard. Quelle est la probabilité de cet événement (pas si rare pour certains!).
- Calculer $\mathbb{P}(X \leq 5)$ et $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 15)$.
- Quel est le temps d'attente moyen.



- Reprendre les questions précédentes dans le cas où le temps d'attente est modélisé par une densité de Poisson.

Exercice 6 On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes se trouvant entre deux amis dans la queue.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$.
2. Pour quelle valeur de k, $\mathbb{P}(X = k)$ est-il maximum?

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire de densité f_X avec

$$f_X(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1,0] \\ \alpha & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Représenter la densité de X.
- Déterminer α .
- Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
- Calculer $\mathbb{P}(X > 12)$.
- Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = X^2$, en déduire sa densité f_Y.
- Représenter les deux fonctions f_Y et F_Y.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire de densité f_X:

$$f_X(t) = Kt^2 \text{ si } t \in [-\alpha, \alpha], \ \ 0\text{sinon}$$

1. Représenter la densité de X.
2. Déterminer K en fonction de α.
3. Déterminer puis représenter la fonction de répartition F_X de X.
4. Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$.

Exercice 9 Soit X une v.a. qui suit une loi de densité f_X donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{\alpha}{t} & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f_X soit une densité de probabilité (dans toute la suite α sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1)$.