Test du générateur (pseudo) aléatoire. Simulation de variables aléatoires discrètes

La méthode `rand` du module random permet de simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (tous les réels entre 0 et 1 ont la même probabilité d'être choisis).

Exemple introductif : Loi de Bernoulli

On cherche à simuler un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. On peut facilement, en utilisant un générateur de nombres pseudo-aléatoires (`rand`), simuler ce genre de jeu.

En effet, à partir de la variable aléatoire uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$ on définit la variable aléatoire $X = \mathbb{I}_{\{\mathcal{U}<\frac{1}{2}\}}$, on a lors

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, il suffit de "tirer" un nombre pseudo-aléatoire entre $[0, 1]$ puis de comptabiliser un pile s'il est supérieur à $\frac{1}{2}$, sinon un face.

Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, on procède de la même manière.

Notons enfin, que ce procédé va nous permettre de simuler des lois discètes à valeurs dans $\{1, ...N\}$.

Exercice 1 On considère une variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans $\{2, 3, 4, 5\}$ et de loi

i	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = i)$	0.25	0.125	0.5	0.125

Ecrire une fonction python simulant cette variable aléatoire. Tester votre fonction (on fera un grand nombre de tirages et on comparera les fréquences théoriques et observées).

Exercice 2 Ecrire une fonction python qui simule une variable aléatoire uniforme sur le carré unité. Vérifier graphiquement votre fonction (il suffit de faire un grand nombre de tirage puis d'afficher les points).

Ecrire une fonction python qui simule une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 3 Ecrire une fonction simulant le résultat du lancer d'un dé non pipé à six faces.
Pour tester la validité de cette fonction, calculer la fréquence de sortie d'un chiffre entre 1 et 6 au bout de N tirages (prendre N très grand).

Exercice 4 Générer un vecteur de taille $N = 1000$ (i.e. une matrice de dimension $(1, N)$). dont les composantes sont des réalisations indépendantes de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$ avec la fonction rand. Tracer l'histogramme correspondant avec la fonction histplot. Augmenter $N(N = 10000, 100000...)$. Que constatez-vous ?
Ecrire une fonction python simulant une loi binomiale de paramètres n et p (qu'on passera en paramètres d'entrée de la fonction).

Le paradoxe du chevalier de Méré

Est-il avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ? Est-il avantageux de parier sur l'apparition d'un double-six, quand on lance 24 fois deux dés ?
Le chevalier de Méré, qui était un grand joueur, avait remarqué que le premier jeu était avantageux. Se laissant abuser par un soi-disant argument d'homothétie, le chevalier considérait que le deuxième pari était aussi avantageux : en lançant un dé, il y a 6 issues ; en lançant deux 2 dés, il y en a 36, soit 6 fois plus. Puisqu'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant le dé 4 fois de suite, il doit être avantageux de miser sur l'apparition d'un double-six en lançant un dé 24=4x6 fois de suite.
Malheureusement pour le chevalier, les règles des probabilités sont plus complexes, et c'est Pascal qui calcula la vraie probabilité, très légèrement inférieure à 0.5 : le deuxième jeu n'est pas avantageux.

En effectuant un grand nombre de simulation des deux jeux précédents, vérifier que le premier jeu est avantageux alors que le second ne l'est pas, contrairement à l'intuition du chevalier de Méré. . . .