

Statistiques : Devoir Surveillé
15 mai 2023

Nom Prénom :

Corrigé

Groupe :

L'épreuve dure 45min.

Les calculatrices sont autorisées, mais pas de documents.

Bon travail!

Une chercheuse désire examiner la relation qu'il peut exister entre l'habilité en lecture (X) et le nombre d'heures de lecture par semaine (Y). X est mesuré en laboratoire à l'aide d'un test d'habilité en lecture (noté sur 50) alors que Y est estimé par les personnes elles-mêmes. 10 personnes ont été échantillonnées. Les résultats sont :

Personne	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	20	5	5	40	30	35	5	5	15	40
Y	5	1	2	7	8	9	3	2	5	8

1. Pour les variables statistiques X et Y, quelle est la population ? Quel est l'effectif total ?
L'univers image ?

Pour X et Y, la population est l'ensemble des personnes {A, B, C, ..., I, J} et l'effectif total est 10.
L'univers image de X est {5, 15, 20, 30, 35, 40}
Celui de Y est {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9}

2. Parmi l'ensemble des valeurs prises par la variable X, laquelle est le mode ? Justifier votre réponse.

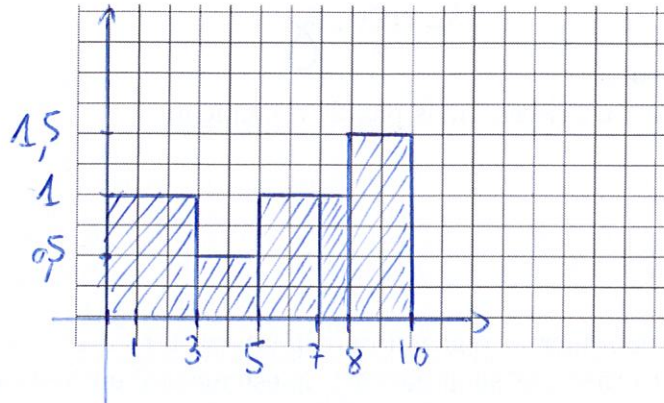
Le mode est 5 car son effectif, 4, est le + élevé.

3. Compléter ci-dessous le tableau statistique de la variable Y avec les modalités indiquées :

Valeurs de Y	[0,3[[3,5[[5,7[[7,8[[8,10[
Effectifs	3	1	2	1	3

pour quest. 4: Effectif corrigé
1 0,5 1 1 1,5

4. Représenter sur le quadrillage ci-dessous l'histogramme de Y associé aux modalités de la question précédente.



5. Calculer la moyenne \bar{X} des notes de lecture et la moyenne \bar{Y} des heures de lecture.

Poser les calculs que vous faites : ce sera au moins la moitié des points.

$$\bar{X} = \frac{1}{10} (20 + 5 + 5 + 40 + 30 + 35 + 5 + 5 + 15 + 40) = \frac{1}{10} \times 200 = 20$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{10} (5 + 1 + 2 + 7 + 8 + 9 + 3 + 2 + 5 + 8) = \frac{1}{10} \times 50 = 5$$

6. Calculer la variance $\overset{\text{Var}(X)}{\cancel{X}}$ des notes de lecture et la variance $\overset{\text{Var}(Y)}{\cancel{Y}}$ des heures de lecture.

Poser les calculs que vous faites : ce sera au moins la moitié des points.

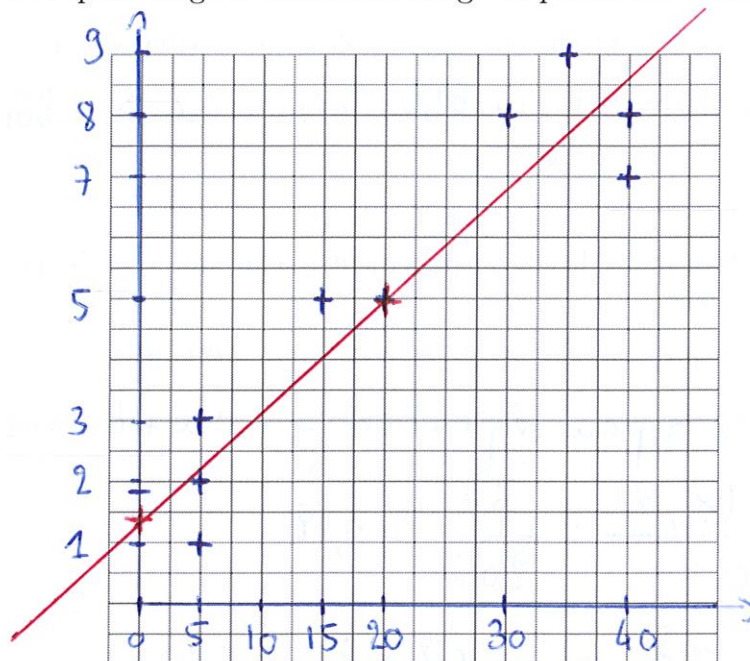
$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{1}{10} \left((20-20)^2 + (5-20)^2 + (5-20)^2 + (40-20)^2 + \dots + (15-20)^2 + (40-20)^2 \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(0^2 + 15^2 + 15^2 + 20^2 + 10^2 + 15^2 + 15^2 + 15^2 + 5^2 + 20^2 \right) = 205 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \frac{1}{10} \left((5-5)^2 + (1-5)^2 + (2-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2 + (3-5)^2 + (2-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(0 + 16 + 9 + 4 + 9 + 16 + 4 + 9 + 0 + 9 \right) = \frac{1}{10} 76 = 7,6 \end{aligned}$$

Nom Prénom :

Groupe :

7. Représenter sur le quadrillage ci-dessous le nuage de points de Y en fonction de X.



8. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.

Poser les calculs que vous faites : ce sera au moins la moitié des points.

On commence par calculer la covariance de X et Y :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{10} \left((20-20) \times (5-5) + (5-20) \times (1-5) + (5-20) \times (2-5) + (40-20) \times (7-5) \right. \\ &\quad \left. + (30-20) \times (8-5) + (35-20) \times (9-5) + (5-20) \times (3-5) + (5-20) \times (2-5) + (15-20) \times (5-5) \right. \\ &\quad \left. + (40-20) \times (8-5) \right) = \frac{1}{10} \times (0 + 60 + 45 + 40 + 30 + 60 + 30 + 45 + 0 + 60) \\ &= \frac{1}{10} \times 370 = 37 \end{aligned}$$

$$\text{Puis } \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{37}{\sqrt{205} \sqrt{7,6}} \approx 0,94$$

9. Les variables X et Y sont-elles corrélées faiblement ? fortement ? Expliquez pourquoi.

Elles sont fortement corrélées car $0,54 > 0,866$.

10. Calculer l'équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X , puis la tracer sur votre graphique précédent.

Poser les calculs que vous faites : ce sera au moins la moitié des points.

Cette droite a pour équation $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} = \frac{37}{205} \approx 0,18$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 5 - 0,18 \times 20 = 1,4$$

Cette droite passe par les points $x=0, y=1,4$

$$\text{et } x=20, y=0,18 \times 20 + 1,4 = 5$$