Variables aléatoires et densités

Sommaire

1 Théorie des Probabilité

1.1 Définitions

Espace d'évènements : Univers
ensemble des possibles ou **univers** (fini ou pas)
$\omega \in \Omega$ issues ou évènements élémentaires.

Quelques exemples d'expériences aléatoires (EA)
Lancer d'une pièce, $\Omega = \{F, P\}$, $card(\Omega) = 2$.
Lancer d'un dé jusqu'à l'obtention d'un 6 : $\Omega = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ ensemble infini dénombrable.
Choisir un nombre au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0, 1]$ infini non dénombrable.

événement ensemble des issues de l'expérience qui vérifent une propriété donnée.
C'est donc une partie A de Ω, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples :
EA1 On obtient "face" : A = {F}.
EA2 On obtient le premier 6 entre le troisième coup et le septième coup (inclus)
EA3 On choisit un nombre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, $A =]\frac{1}{2}, 1]$.

1.2 Espaces probabilisables

Définition *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. On appellera tribu sur Ω toute famille F de parties de Ω telle que*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$ *(Ω est appelé l'évènement certain)*

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ *(stabilité de F pour la complémentation)*

iii) $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. *Stabilité de F pour la réunion.*

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est alors appelé espace d'événements.
Cet espace n'est evidemment pas unique :

- **Algèbre la plus simple**
  $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$.
- **Algèbre de Bernoulli**
  $\mathcal{F} = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$, où A désigne un évènement ($A \subset \Omega$).
- **Algèbre complète**
  Dans ce cas $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Suivant le choix de la tribu on aura un modèle probabiliste plus ou moins rafiné.
permettra de décrire de manière plus ou moins judicieuse l'expérience aléatoire.
Ω est fini ou infini on choisit généralement l'algèbre complète.
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne forme pas une tribu : on considère l'ensemble des intersections et réunions dénombrables d'intervalles de $\mathbb{R}$: ensemble des Boréliens..

Définition *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace d'évènement, on appelle* **probabilité** *sur cet espace toute application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}$ vérifiant :*

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *la probabilité de l'évènement certain est 1 (normalisation)*

ii) $\forall A \in \mathcal{F}\ \mathbb{P}(A) \in [0,1]$

iii) Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est alors appelé *espace probabilisé.*
Propriétés.

i) $\mathbb{P}$ est une fonction croissante, i.e. pour tout couple d'évènements (A,B) tel que A implique B, on a $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

en particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

ii)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

iii) Formule de Poincaré

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &+ \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}) \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i)\end{aligned}$$

1.3 Le cas dénombrable

Si $\Omega = \bigcup_{i\in I}(\omega_i)$, $I \subset \mathbb{N}$ est fini ou dénombrable, il suffit de connaitre la probabilité des évènements élémentaires ω_i,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{j\in J}(\omega_j)) = \sum_{j\in J} \mathbb{P}(\omega_j)$$

Si $\Omega = \omega_1, \ldots \omega_N$ est fini on obtient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{1\leq i\leq N} \omega_i) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\omega_i) = 1.$$

Si l'on suppose les ω_i équiprobables

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{N}$$

Pour tout évènement $A = \bigcup_{1\leq i\leq n} \{\omega_i\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{n}{N}$$

on retrouve ainsi une définition classique mais particulière et intuitive de la probabilité :
Lorsque les issues d'une EA sont en nombre fini et équiprobables, la probabilité d'un évènement associé à cette épreuve est le rapport du nombre de cas "favorables" au nombre de cas possibles.
Limitations : Ω infini.
Si Ω est infini on ne peut pas avoir équiprobabilité.

1.4 Exemples

Exemples :
EA1 : lancé d'une pièce,
$\Omega = \{P, F\}$, on peut choisir $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
Si la pièce n'est pas truquée notre probabilité est entièrement définie par

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1,\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(\{F\} = \mathbb{P}\{P\} = \frac{1}{2}$$

EA2 : lancé d'un dé jusqu'à l'obtention d'un 6.
On a $\Omega = \mathbb{N}$ et on choisit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
On définit alors la probabilité $\mathbb{P}$ sur les singletons par :

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6}$$

la probabilité de faire 1,2,3,4 ou 5 aux (i-1) premiers coups est alors $\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$ et $\frac{1}{6}$ la probabilité de faire 6 au ième coup.
vérifier (exercice) que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

EA3 : choisir "uniformément" un nombre entre 0 et 1.
Dans ce cas $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des Boréliens

de $[0,1]$.
On définit alors $\mathbb{P}$ par

$$\mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}(]a,b]) = \mathbb{P}([a,b[) = \mathbb{P}(]a,b[) = b-a$$

on peut noter qu'on a lors $\forall a \in [0,1],\ \mathbb{P}(\{a\}) = 0$. On dit que c'est un événement presque impossible.

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définitions

On notera $\mathbb{P}_A(B)$, la probabilté de B sachant que A s'est réalisé

Définition *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements sur cet espace tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors la la probabilité de B sachant A est définie par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Dans le cas où $\mathbb{P}(A) = 0$, on pose $\mathbb{P}_A(B) = 0$.

- L'application $\mathbb{P}_A$ définie précédemment est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$; elle est appelée probabilité conditionnelle sachant A.
- Soient $A, B \in \mathcal{F}$. On a
  1. $\mathbb{P}_A(B^c) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
  2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)$

2.2 Probabilités des causes

Probabilités des causes : théorème de Bayes

Définition *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, on dit que la famille $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ constitue un système complet d'événements (relatif à cet espace) si cette famille forme une parttition de Ω, c'est à dire si :*

1. $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\},\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Théorème *Soit $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ un système complet d'événement de Ω. On a*

1. $\forall B \in \mathcal{F}\quad \mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$ *Formule des probabilités totales.*
2. $\forall B \in \mathcal{F}\quad \mathbb{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$ *Formule de Bayes*

2.3 Indépendance

Dire que l'événement A est indépendant de B revient à dire que la réalisation de B ne modifie pas $\mathbb{P}(A)$, c'est à dire qu'elle n'apporte aucune informations sur l'éventuelle réalisation de A.

Définition *Soit $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. On dit que A est indépendant de B si*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

On peut déjà remarquer que si A est indépendant B alors B l'est de A (i.e. les deux événements sont indépendants). En effet, on a

$$\mathbb{P}(A).\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

On peut aussi adopter comme définition

$$\text{A et B indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

cette "définition" met en évidence que l'indépendance est une relation d'équivalence.

Proposition *Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour A et B^c, pour A^c et B et pour A^c et B^c*

La démonstration est laissée en exercice.

Remarques 1 *Si A et B sont deux événements indépendants, alors en remarquant que $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_{B^c}(A) = \mathbb{P}(A)$ on a*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_{B^c}(A).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_i,\ i \in \{1,\ldots,n\}$ n événements.

Définition *Les événements $A_i,\ i \in \{1,\ldots,n\}$ sont dits indépendants deux à deux $(0 < \mathbb{P}(A_i) < 1)$*

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}\ i \neq j,\quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j)$$

Cette notion d'indépendance deux à deux n'est pas très utile car elle ne signifie pas que ces événements sont indépendants. On a donc besoin d'une notion plus forte

Définition *Les événements $A_i,\ i \in \{1,\ldots,n\}$ sont dits mutuellement indépendants si $\forall k = 1\ldots n,\ \forall (i_1,\ldots,\imath_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq i_n$ on a*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k})$$

Pour trois événements A, B et C l'indépendance mutuelle se traduit par $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$.

3 Variables aléatoires

3.1 Définitions et propriétés

Définition *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces d'événements. On appelle variable aléatoire de l'espace d'événements vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ une application*

$$X : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

telle que

$$\forall A' \in \mathcal{F}, \ \ X^{-1}(A') \in \mathcal{F}$$

où $X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A'\}$.

On sera souvent amené à considérer des cas où $\Omega' \subset \mathbb{R}$, par exemple $(\Omega', \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$
La variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ est alors appelée variable aléatoire réelle (v.a.r.).
On a la caractérisation suivante d'une v.a.r. (admis)

Proposition *Une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{F})$ si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}.$$

Remarques 2
- *Si l'ensemble des images $X(\Omega)$ est dénombrable, la variable aléatoire est dite discrète. Si $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, X est dite continue.*
- *Si Ω est dénombrable, alors sur l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*
- *Si $\Omega' = \mathbb{Z}$ alors la variable aléatoire est dite entière (positive si $\Omega' = \mathbb{N}$).*
- *Si $\Omega' = \mathbb{R}^n$ la variable aléatoire est dite vectorielle ou vecteur aléatoire (formé de n variables aléatoires réelles).*

1. *Variable aléatoire indicatrice.*
   Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement.
   La fonction indicatrice $\mathbb{I}_A$ de A définie sur Ω est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Cette variable aléatoire est dite indicatrice ou variable de Bernoulli.
2. *Variable aléatoire certaine.*
   Toute application constante $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définit une variable aléatoire dite certaine.

1. *Somme des valeurs de dés.*
   On s'intéresse à la somme des points lors du lancé de deux dés équilibrés. On peut donc associer à cette épreuve (lancé de deux dés) l'application suivante définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$

$$\begin{array}{rl} X : & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & w_{ij} = (i,j) \longrightarrow X(w_{ij}) = i+j \end{array}$$

   On peut vérifier aisément que cette application est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Soit X et Y seux v.a.r. sur le **même** espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$

- $S = X + Y$ et $P = XY$ sont deux variables aléatoires sur le même espace.
- Si X est une variable aléatoire réelle, alors $\alpha X, \ \alpha \in \mathbb{R}$ est aussi une variable aléatoire réelle.
- L'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

3.2 Fonction de répartition

Définition *Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'application*

$$\begin{array}{rl} F_X : & \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ & x \longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) \end{array}$$

est appellée fonction de répartition (ou fonction cumulative) de X.
On a $\mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\})$, et que l'on écrira, par abus de notation, $\mathbb{P}(X \leq x)$.

Proposition *Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fonction de répartition F_X associée à X vérifie*

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. *F_X est croissante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$*
4. *F_X est continue à droite.*

F_X permet de calculer la probabilité d'un intervalle quelconque. En effet, sil'on souhaite calculer $\mathbb{P}([a,b[)$ il suffit d'écrire

$$]-\infty, a[\cup[a,b[=]-\infty, b[$$

d'où

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$
$$\mathbb{P}(X \geq c) = 1 - F_X(c)$$

3.3 Propriétés

Proposition *Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors F_X vérifie*

1. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
3. *F_X est croissante :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
4. *F_X est continue à droite.*

Démonstration

1. $\lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

3.4 V.A.R. discrètes

Définition *Une v.a.r. X est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$*
Dans ce cas la fonction

$$p: \begin{array}{l} I \longrightarrow [0,1] \\ i \mapsto p_i \end{array}$$

où $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ est appelée fonction de masse de la v.a.r. X.

3.5 Quelques résultats

Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, par convention

$$p_i = 0,\ \forall i \in \mathbb{N} - I.$$

Proposition *Si X est une v.a.r. discrète dont les valeurs sont $\{x_i,\ x_i \in Nn\}$, alors sa fonction de répartition F_X est constante par morceaux, ayant pour points de discontinuités $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.*

Démonstration
On suppose que les x_i peuvent être rangées dans l'ordre croissant $x_0 < x_1 < x_2 \ldots$. Alors on a

$$\begin{array}{llcl}
x < x_0 & \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \\
x \in [x_0, x_1 & \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = x_0) \\
 & & = & p_0 \\
x \in [x1, x2[& \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X = x_0 \,\mathrm{ou}\, x_1) \\
 & & = & \mathbb{P}(\{X = x_0\} \cup \{X = x_1\}) \\
 & & = & p_0 + p_1 \\
\vdots & & & \\
x \in [x_k, x_{k+1} & \Rightarrow F_X(x) & = & \sum_{i=0}^{k} p_i
\end{array}$$

3.6 V.A.R. continues

Définition *Une v.a.r. X est dite absolument continue s'il existe une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f_X, telle que la fonction de répartition F_X de la v.a.r. X admette la représentation intégrale suivante :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Ceci est équivalent à dire que F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_X. La fonction f_X est appelée densité de X. On parle aussi de v.a.r. à densité pour désigner une v.a.r. absolument continue.

3.7 Propriétés

on omettra le terme “absolument” : on parlera plus simplement de v.a.r continues.

1. Généralement f est continue “presque sûrement” sur $\mathbb{R}$
2. Ainsi on a “presque sûrement” (on dit aussi “presque partout”)

$$F'_X(x) = f(x)$$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\,x = 1$

1. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X < b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f(x)d\,x \end{aligned} \tag{1}$$

Proposition *Toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\,x = 1$$

est la densité d'un v.a.r continue.

Remarques importantes
Lorsque la v.a.r est absolument continue on a $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ (pour le voir il suffit d'utiliser (1) : une v.a.r. continue ne “charge” pas les points.

Plus généralement, pour une variable aléatoire continue la probabilité pour qu'elle prenne un ensemble dénombrable de valeurs quelconques est toujours nulle. Il n'y a pas unicité de la densité de probabilité pour une fonction de répartition F_X donnée. Il suffit de changer la valeur de la densité en un nombre fini (ou dénombrable) de points (en vertu de la remarque précédente).

3.8 Loi d 'une V.A.R.

Proposition *Soient X une variable aléatoire de l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*
L'application

$$\begin{array}{rl} \mathbb{P}_X: & \mathcal{F}' \longrightarrow [0,1] \\ & A' \longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A')) \end{array} \qquad (2)$$

définit une probabilité sur l'espace d'événements $(\Omega', \mathcal{F}')$. Cette probabilité est appelée loi de la variable aléatoire X.

on a ainsi "transporté" la probabilité définie sur Ω vers Ω'
On peut montrer que $\mathbb{P}_X$ vérifie bien les conditions pour être une probabilité. **Caractérisation de $\mathbb{P}_X$**
Soit X une v.a.r. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit A un Borélien de $\mathbb{R}$.

- Si X est une v.a.r discrète, alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_j)\, \mathbb{I}_A(x_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \mathbb{I}_A(x_j)$$

  où $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction caractéristque de A.

- Si X est une v.a.r continue, alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(t)\, d\, t = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A f_X(t)\, d\, t.$$

On voit ainsi que la connaissance de la fonction de masse pour une v.a.r. discrète ou la fonction de densité dans le cas d'une v.a.r. continue suffit à définir $\mathbb{P}_X$

Exercice récapitulatif
Soit X une v.a. qui suit une loi de densité f_X donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{\alpha}{t} & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f_X soit une densité de probabilité (dans toute la suite α sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$ et σ_X.

Solution

1. f_X est une densité de probabilité ssi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$$

   or on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt &= \int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{2} f_X(t)dt \\ &+ \int_{2}^{+\infty} f_X(t)dt \\ &= 0 + \int_1^2 \frac{\alpha}{t} dt + 0 \\ &= \alpha\, [ln(t)]_1^2 = \alpha ln(2) \end{aligned}$$

   il faut donc choisir $\alpha = \frac{1}{ln(2)}$.

2. La fonction de répartition est donnée par

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

   d'où en séparant les cas

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_1^x f_X(t) & \text{si } x \in]1, 2] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_1^2 f_X(t) & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

   soit en remplaçant f_X par sa valeur

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in]-\infty, 1] \\ \dfrac{1}{ln(2)}\, [ln(t)]_1^x = \dfrac{ln(x)}{ln(2)} & \text{si } \; x \in]1, 2] \\ 1 & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 2) &= F_X(2) = 1. \\ \mathbb{P}(X \geq -1) &= 1 - \mathbb{P}(X < -1) \\ &= 1 - F_X(-1) = 1 \\ \mathbb{P}(-1 \leq X < 1) &= F_X(1) - F_X(-1) = 0 \end{aligned}$$