Calcul intégral

IUT de Lannion

Préambule

Tracer la représentation graphique C d'une fonction f positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.

- On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.
  Hachurer $G(x)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites verticales d'abscisses x et a.
- Soit $h > 0$, on note $G(x+h)$ l'aire du domaine délimité par la droite verticale d'abscisse $x+h$ ainsi que les axes et la courbe G.
  À quoi correspond $G(x+h) - G(x)$? Déterminer un encadrement de cet aire.
- Établir alors que $f(x) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x+h)$.
- Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ?
- Que peut-on en conclure ?
- On dit que G est une primitive de f et on note $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Préambule

Tracer la représentation graphique C d'une fonction f positive et croissante sur l'intervalle $[a;b]$. On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.

- On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.
  Hachurer $G(x)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites verticales d'abscisses x et a.
- Soit $h > 0$, on note $G(x+h)$ l'aire du domaine délimité par la droite verticale d'abscisse $x+h$ ainsi que les axes et la courbe G.
  À quoi correspond $G(x+h) - G(x)$? Déterminer un encadrement de cet aire.
- Établir alors que $f(x) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x+h)$.
- Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ?
- Que peut-on en conclure ?
- On dit que G est une primitive de f et on note $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Préambule

Tracer la représentation graphique C d'une fonction f positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.

- On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.
  Hachurer $G(x)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites verticales d'abscisses x et a.
- Soit $h > 0$, on note $G(x+h)$ l'aire du domaine délimité par la droite verticale d'abscisse $x+h$ ainsi que les axes et la courbe G.
  À quoi correspond $G(x+h) - G(x)$? Déterminer un encadrement de cet aire.
- Établir alors que $f(x) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x+h)$.
- Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ?
- Que peut-on en conclure ?
- On dit que G est une primitive de f et on note $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Préambule

Tracer la représentation graphique C d'une fonction f positive et croissante sur l'intervalle $[a;b]$. On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.

- On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.
  Hachurer $G(x)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites verticales d'abscisses x et a.
- Soit $h > 0$, on note $G(x+h)$ l'aire du domaine délimité par la droite verticale d'abscisse $x+h$ ainsi que les axes et la courbe G.
  À quoi correspond $G(x+h) - G(x)$? Déterminer un encadrement de cet aire.
- Établir alors que $f(x) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x+h)$.
- Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ?
- Que peut-on en conclure ?
- On dit que G est une primitive de f et on note $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Préambule

Tracer la représentation graphique C d'une fonction f positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.

- On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.
  Hachurer $G(x)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites verticales d'abscisses x et a.
- Soit $h > 0$, on note $G(x+h)$ l'aire du domaine délimité par la droite verticale d'abscisse $x+h$ ainsi que les axes et la courbe G.
  À quoi correspond $G(x+h) - G(x)$? Déterminer un encadrement de cet aire.
- Établir alors que $f(x) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x+h)$.
- Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ?
- Que peut-on en conclure ?
- On dit que G est une primitive de f et on note $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Préambule

Tracer la représentation graphique C d'une fonction f positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.

- On pose x un réel quelconque tel que $a < x < b$.
  Hachurer $G(x)$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites verticales d'abscisses x et a.
- Soit $h > 0$, on note $G(x+h)$ l'aire du domaine délimité par la droite verticale d'abscisse $x+h$ ainsi que les axes et la courbe G.
  À quoi correspond $G(x+h) - G(x)$? Déterminer un encadrement de cet aire.
- Établir alors que $f(x) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x+h)$.
- Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 ?
- Que peut-on en conclure ?
- On dit que G est une primitive de f et on note $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Aires et primitives

Définition 1.1

On appelle primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I de dérivée f :

$$F'(x) = f(x)$$

Exercice

Montrer que si F et G sont deux primitives de f alors $F = G + k$ où k est une constante.

$\int_a^x f(t)dt$ est **la primitive de** f qui s'annule pour $x = a$.

Intégrale d'une fonction continue

Proposition 1.2

On a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ *où* F *est une primitive quelconque de* f *sur* $[a;b]$.
On lit « intégrale de a *à* b *de* $f(t)dt$ *»*
On écrit aussi $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Conséquence :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Intégrale d'une fonction continue

Si f est une fonction **positive** l'intégrale de f entre a et b est l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = a$ et $x = b$, c'est un réel positif.

Proposition 1.3

L'intégrale d'une fonction positive sur $[a; b]$ *avec* $a < b$ *est un réel positif.*

Calcul d'intégrales à l'aide des primitives usuelles

Pour calculer une primitive, on utlise le tableau des primitives usuelles et certaines transformations comme par exemple :

- Pour les fonctions trigonométriques, on linéarise.
- Pour les fonctions rationnelles, on décompose en éléments simples.

Exemples

- Calculer $\displaystyle\int 3x^2 - 2xdx.$
- Calculer $\displaystyle\int \sin 2x - \cos xdx.$
- Calculer $\displaystyle\int x\exp(x^2) - 3xdx.$
- Calculer $\displaystyle\int \frac{5t-1}{t^2-1}\,dt.$
- Calculer $\displaystyle\int 2\cos^2 t\ dt.$

Linéarité

Proposition 2.1

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et α, β deux réels. Alors on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} 2(t^3 - t + 1)\ dt$.

Inégalités

Proposition 2.2

Conservation de l'ordre :
Si $f \leq g$ *sur* $[a;b]$, *alors* $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Exemples

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,dt$.

- Établir que si $0 \leq t \leq 2$, on a : $t \leq \sqrt{1+t^2} \leq 1+t$.
- En déduire un encadrement de I.

Relation de Chasles

Proposition 2.3

On a :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

Remarque : Cette relation permet d'étendre la définition de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux.

Conséquence : On a les propriétés suivantes

- Si f est une fonction paire, continue sur $[-a; a]$, alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si f est une fonction impaire, continue sur $[-a; a]$, alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Exemple

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x$.

Valeur moyenne

Définition 2.4

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$.
On appelle **valeur moyenne** *de f sur l'intervalle $[a; b]$ le nombre :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Exercice

Calculer la valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Intégrale et valeur absolue

Proposition 2.5

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On a l'inégalité suivante :

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exemple

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\int_0^1 \cos t\, e^{-t}\, dt \leq \frac{e-1}{e}$