Exercice 1 On lance une pièce parfaitement équilibrée 100 fois.
On s'intérèsse alors au nombre de "Pile". Si S_{100} désigne la v.a. de cette expérience aléatoire, calculer grâce au théorème de la limite centrée :

1. $\mathbb{P}(S_{100} \leq 45)$
2. $\mathbb{P}(45 \leq S_{100} \leq 55)$
3. $\mathbb{P}(S_{100} > 63)$
4. $\mathbb{P}(S_{100} < 57)$

Exercice 2 On lance 420 fois un dé. Quelle est la probabilité que la somme des lancés soit entre 1400 et 1550.

Exercice 3 Un QCM de mathématiques est composé de 48 questions, les réponses proposées à chaque question sont "vrai" ou "faux". L'étudiant A répond correctement à chaque question avec une probabilité de 3/4, un autre étudiant, B, se contente de répondre au hasard.
Sachant qu'il faut obtenir 30 bonnes réponses pour réussir cet examen, calculer les probabilités de succés des étudiants A et B.

Exercice 4 Soit p la proportion de la population favorable à l'adoption d'un texte de loi (donc $1 - p$ la proportion de personnes hostile à ce texte).
On souhaite grâce à un sondage avoir une estimation de p, pour cela on intéroge un échantillon de n personnes et on prend comme approximation de p le nombre $\tilde{p}$ de personnes favorables à ce texte dans l'échantillon.
Déterminer, grâce au théorème de la limite centrée, la taille de l'échantillon pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2} prés avec une probabilité de 0,95.
Indication et Rappel On s'intérèsse à la somme de n v.a. de Bernoulli de paramètre p. C'est donc une v.a. de loi binomiale et de paramètres n, p.

Exercice 5 Suite à l'annulation d'un concert, un guichet procède à certaines heures au remboursement des places. Le prix moyen d'une place est de 10 euros avec un écart type de 5 euros.
Quelle est la probabilité pour qu'à une heure donnée, le guichet, disposant de 1000 euros, puisse rembourser les 120 personnes qui s'y présentent ?
Indication La v.a. X représentant le montant à rembourser est la somme de 120 v.a. supposées indépendantes.

Solution Soit X_i la v.a. représentant le montant à rembourser pour la *ième* personne et X la v.a. représentant le montant total à rembourser. On a On connait la moyenne et l'écart type de X_i : $\mathbb{E}(X_i) = 10$ et $\sigma_{X_i} = 5$; de plus

$$X = \sum_{i=1}^{120} X_i$$

Le guichet ne disposant que de 1000 euros, on cherche donc

$$\mathbb{P}(X \leq 1000) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{120} X_i \leq 1000)$$

or d'après le théorème central-limite

$$\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120.10}{5\sqrt{120}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 1000) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{120} X_i \leq 1000) \\
&= \mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120.10}{5\sqrt{120}} \leq \frac{1000 - 120.10}{5\sqrt{120}}) \\
& \quad \text{il suffit alors de consulter la table} \\
&= \mathbb{P}(Z \leq -0.0068) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.0068) \approx F_Z(0.007) \\
&\approx 0.498 \ \text{(une approximation suffit i.e. 0.5}
\end{aligned}$$

Exercice 6 Le département d'informatique de l'IUT de Lannion souhaite avoir 118 étudiants de première année mais ne peut acceuillir plus de 140 étudiants. On suppose que chaque postulant retenu s'inscrit effectivement avec une probabilité de 0.6 et que l'on peut modéliser ce phénomène aléatoire avec une v.a. de Bernoulli.
Si le département retient 170 candidatures, quelle est la probabilité d'avoir trop d'étudiants.
Même question si le département retient 200 candidatures.

Solution La v.a. de Bernoulli X_i représentant l'inscription effective ou non (2 choix possibles) a pour paramètre $p = 0.6$, X_i prend la valeur 1 si le $i^{ème}$ étudiant (postulant retenu) s'inscrit effectivement et 0 sinon. La v.a. X représentant le nombre total d'étudiants effectivement inscrits est donc donnée par

$$X = \sum_{i=1}^{170} X_i$$

on cherche

$$\mathbb{P}(X > 140)$$

Il suffit d'appliquer la proposition 1 (Cf rappels), c'est possible car $n.p = 170 * 0.6 \geq 20$:

$$X \sim \mathcal{N}(170 * 0.6, \sqrt{170 * 0.6 * (1 - 0.6)}) \;\; i.e. \;\; X \sim \mathcal{N}(102; 6.39)$$

d'où (on centre et on réduit)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 140) &= \mathbb{P}(\frac{X - 102}{6.39} > \frac{140 - 102}{6.39}) \\ &= \mathbb{P}(Z > 5.95) \\ &= 1 - F_Z(5.95) \\ & \quad \text{on peut consulter la table} \\ &\approx 0.0000\ldots \end{aligned}$$

Donc dans ce cas pas de problèmes, la probabilité de dépasser notre capacité d'acceuil est quasi nulle.
On refait exactement le même raisonnement pour $n = 200$.

Exercice 7 Sur 53680 familles de lapins ayant 8 petits (soit 429440 petits en tout), il y a 221023 mâles et 208417 femelles. On souhaite savoir si le nombre de mâles est significativement plus élevé que celui des femelles.

1. Si l'on suppose que les chances sont égales d'avoir un mâle ou une femelle, quelle loi suit la v.a. "le ième petit est un mâle"
2. Grâce au théorème de la limite centrée, déterminer x_0 tel que la v.a. S représentant le nombre de mâles vérifie

$$\mathbb{P}(214720 - x_0 \leq S \leq 214720 + x_0) \geq 0,95$$

3. Conclure

Solution 1. Soit X_i la v.a. "le ième petit est un mâle". C'est une v.a. de Bernoulli (2 choix possibles c'est un mâle ou pas) de paramètre $p = 0.5$ car on suppose que les chances sont égales d'avoir un mâle ou une femelle ; X_i vaut 1 si le ième petit est un mâle et 0 sinon.

2. le nombre de mâles est représenté par la v.a. S telle que

$$S = \sum_{i=1} 429440 X_i$$

D'après la proposition 1

$S \sim \mathcal{N}(429440 * 0.5, \sqrt{429440 * 0.5 * 0.5})$ *i.e.* $S \sim \mathcal{N}(214720; 327,66)$

d'où (on centre et on réduit)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(214720 - x_0 \leq S \leq 214720 + x_0) &= \mathbb{P}(-\frac{x_0}{327.66} \leq \frac{S - 214720}{327.66} \leq \frac{x_0}{327.66}) \\
&= \mathbb{P}(-\frac{x_0}{327.66} \leq Z \leq \frac{x_0}{327.66}) \\
&= F_Z(\tfrac{x_0}{327.66}) - F_Z(-\tfrac{x_0}{327.66}) \\
&= 2F_Z(\tfrac{x_0}{327.66}) - 1
\end{aligned}$$

on cherche donc x_0 tel que

$$\begin{aligned}
2F_Z(\frac{x_0}{327.66}) - 1 = 0.95 &\Rightarrow F_Z(\frac{x_0}{327.66}) = 0.975 \\
&\Rightarrow \frac{x_0}{327.66} = 1.96 \\
&\Rightarrow x_0 = 642,21
\end{aligned}$$

3. Dans la question précédente on a montré que (on remplace x_0 par sa valeur, on prend la partie entière car on s'intérèsse au nombre de petits)

$$\mathbb{P}(214720 - 642 \leq S \leq 214720 + 642) \geq 0,95$$

soit

$$\mathbb{P}(214078 \leq S \leq 215362) \geq 0,95$$

autrement dit, si l'on suppose l'équiprobabilité (autant de chances d'avoir un mâle qu'une femelle) on a plus de 95% de chances pour que le nombre de mâles soit compris entre 214078 et 215362. Comme ce n'est pas le cas (nbr de mâles est de 221023), cela signifie que notre hypothèse (autant de chances d'avoir un mâle qu'une femelle) est à rejeter.
Ce genre de tests s'appellent tests d'hypothèses. Ils consistent à faire une hypothèse puis à vérifier si cela donne des résultats cohérents avec les observations.