Intégration numérique

La méthode des rectangles

le calcul numérique d'une intégrale consiste à approcher l'aire contenue entre la courbe et l'axe des x par des formes géométriques simples dont l'aire est facilement calculable. Par exemple, la figure 1 montre que l'on peut approcher $\int_a^b f(x)dx$ par la somme des aires des rectangles grisés. Pour celà il suffit de

- découper l'intervalle $[a, b]$ en une série de segments

$$[a_1, a_2], \quad [a_2, a_3] \ldots [a_n, a_{n+1}] \quad \text{avec} \quad a = a_1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = b,$$

- calculer l'aire $\mathcal{A}_k$ de chaque rectangle grisé correspondant au segment $[a_k, a_{k+1}]$,

$$\mathcal{A}_k \approx \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$$

- faire la somme des aires

$$S = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \approx \int_a^b f(x)dx$$

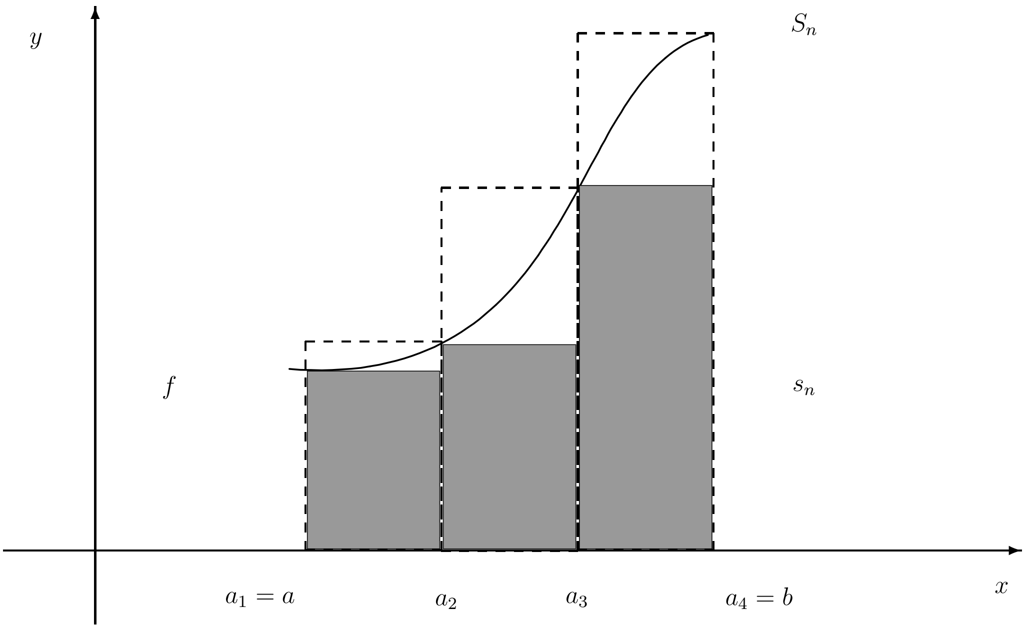

Figure 1: la méthode des rectangles

Si le nombre de rectangles n est très grand et si la fonction est croissante la valeur S est alors légèrement inférieure à $\int_a^b f(x)dx$. Pour avoir une valeur approchée par excès on aurait pu approcher l'intégrale par les rectangles en pointillés sur la figure 1.

Exercice 1

1. Montrer que si l'on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur alors les points a_k sont donnés par
$$a_k = a + (b - a) \times \frac{(k-1)}{n}$$
2. Montrer que l'aire du $k^{ième}$ rectangle est
$$\mathcal{A}_k = \frac{b-a}{n} f(a_k) \approx \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$$
3. en déduire un algorithme qui à partir des variables (f, a, b, n) renvoie la valeur $S = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$.
4. Coder cet algorithme sous forme d'une fonction *Scilab* $\mathtt{S} = \mathtt{rect}(\mathtt{f}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{n})$.
5. Soient $f(x) = x^3$ et $g(x) = \cos(x)$ calculer les valeurs **exactes** de $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$ et comparer à la valeur calculée par `rect` pour $n = 10, 100$ et 1000. On pourra écrire les résultats dans le tableau ci-dessous.
6. Vérifier que l'erreur commise par la méthode des rectangles est majorée par la formule :
$\left|\mathtt{rect}(f, a, b, n) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$ où $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq M_1$.
7. Commenter les valeurs du tableau à partir du résultat précédent.

fonction	$f(x) = x^3$	$g(x) = \cos(x)$
valeur exacte		
rectangles n=10		
trapèzes n=10		
Simpson n=10		
rectangles n=100		
trapèzes n=100		
Simpson n=100		
rectangles n=1000		
trapèzes n=1000		
Simpson n=1000		

La méthode des trapèzes

Pour tenter de réduire l'erreur commise par la méthode des rectangles nous allons utiliser une figure géométrique qui soit plus proche de la courbe de f : des trapèzes. En effet sur la figure 2 on remarque que l'aire des trapèzes en pointillés est bien plus proche de $\int_a^b f(x)dx$ que l'aire des rectangles de la figure 1.

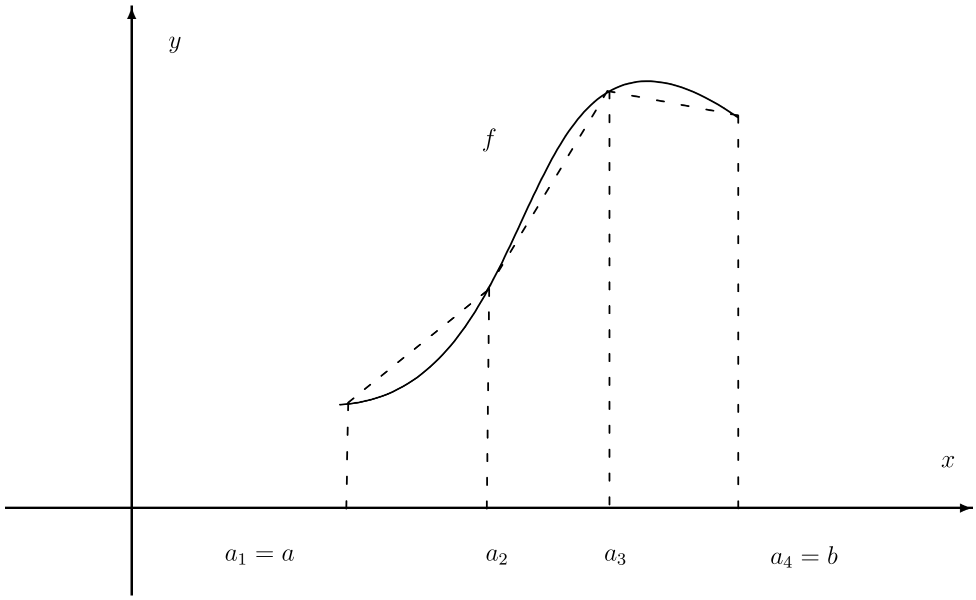

Figure 2: la méthode des trapèzes

<u>Exercice</u> 2

1. On prend le même découpage de l'intervalle $[a, b]$ que dans la méthode des rectangles : $a_k = a + (b - a) \times \frac{(k-1)}{n}$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_k$ du $k^{ième}$ trapèze en fonction de $a, b, n, f(a_k), f(a_{k+1})$.
2. En déduire un nouvel algorithme qui à partir des variables (f, a, b, n) renvoie la valeur $S = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$.
3. Coder cet algorithme en *Scilab* sous forme d'une fonction `S=trap(f,a,b,n)`.
4. Soient $f(x) = x^3$ et $g(x) = \cos(x)$ comparer les valeur de $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$ calculée par `trap` pour $n = 10, 100$ et 1000 à celles obtenues dans l'exercice précédent.
5. Si on suppose que $\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq M_2$ alors

$$|\texttt{trap}(f, a, b, n) - \int_a^b f(x)dx| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

   Est-ce compatible avec vos essais? En quoi est-ce meilleur que la méthode des rectangles?

La méthode de Simpson

Dans les deux premières méthodes (*i.e.* rectangles et trapèzes) on a en fait remplacé le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ par $\int_a^b \tilde{f}(x)dx$ ou $\tilde{f}$ est une fonction plus simple à intégrer que f mais quand même assez proche de f :

- $\tilde{f}$ est constante par morceaux dans le cas de la méthode des rectangles,
- $\tilde{f}$ est affine par morceaux dans le cas de la méthode des trapèzes,

les "morceaux" étant dans chaque cas les intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ (on garde la même définition que dans les paragraphes précédents pour les points a_k). La méthode de Simpson consiste, sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, à remplacer f par une fonction polynôme de degré 2 $\tilde{f}(x) = Ax^2 + Bx + C$ de telles sorte que :

$$\tilde{f}(a_k) = f(a_k), \quad \tilde{f}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) = f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right), \quad \tilde{f}(a_{k+1}) = f(a_{k+1}).$$

Les coefficients A, B, C, pour chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, s'obtiennent en résolvant le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_k^2 & A & + & a_k & B & + & C & = & f(a_k) \\ \left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)^2 & A & + & \frac{a_k+a_{k+1}}{2} & B & + & C & = & f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) \\ a_{k+1}^2 & A & + & a_{k+1} & B & + & C & = & f(a_{k+1}) \end{array}\right.$$

et l'aire de chaque partie à sommer est donnée par la formule :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \approx \mathcal{A}_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{f}(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left(f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1})\right)$$

<u>Exercice</u> 3

1. Écrire une fonction *Scilab* `S= Simpson(f,a,b,n)` qui renvoie la valeur apporchée de $\int_a^b f(t)dt$ obtenue par la méthode de Simpson.

2. Pour une fonction 4 fois dérivable si on note $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} |f''''(x)|$ on a
$$\left|S - \int_a^b f(x)dx\right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$
est-ce plus intéressant que l'erreur commise avec les méthodes des rectangles ou des trapèzes? tester avec les fonctions $f(x) = x^3$ et $g(x) = \cos(x)$ et avec $n = 10, 100, 1000$ pour comparer.

3. En utilisant la fonction $h_1(x) = 1/x$ trouver une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-8} près. À l'inverse à partir de quel n obtient-on une valeur approchée de π à 10^{-8} près en utilisant la fonction $h_2(x) = \sqrt{4 - x^2}$? D'où vient le problème?