On rapelle la définition de la matrice d'adjacence assocoée à un graphe : Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n, avec $V = \{v_1 \dots v_n\}$.
On appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice $A_G = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ecrire deux méthodes **list_to_mat** et **mat_to_list** permettant de passer de la représentation d'un graphe par des listes d'adjacence à la matrice d'adjacence et réciproquement. On supposera les sommets numérotés (ou ordonnés).

Définition 1. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté d'ordre n, sa fermeture (ou clôture) transitive est le graphe $G^* = (V, E^*)$ formé des mêmes sommets et tel que :

$$\text{un arc } uv \in E^* \iff \text{il existe un chemin de } u \text{ à } v$$

La fermeture transitive répond à une qestion importante à propos de G : pour deux sommets donnés de G existe t-il un chemin les reliant.
Pour déterminer la fermeture transitive, on peut utiliser l'algorithme de Floyd-Roy-Warshall ou, pour une meilleure efficacité, la version légèrement modifiée présentée ci-dessous.
Pour $i, j, k = 1, 2 \dots, n$, On définit $T_k(i, j) = 1$ s'il existe un chemin du sommet i au sommet j où tous les sommets intermédiaires sont dans $\{1 \dots k\}$ et $T_k(i, j) = 0$ sinon.
Ainsi pour l'arc ij :

$$ij \in E^* \iff T_k(i, j) = 1$$

On peut définir $T_k(i, j)$ par récurrence comme suit :

$$T_0(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } ij \notin E \\ 1 & \text{si } i = j \text{ ou } ij \in E \end{cases}$$

et pour $k > 0$:

$$T_k(i, j) = T_{k-1}(i, j) \vee (T_{k-1}(i, k) \wedge T_{k-1}(k, j))$$

On construit ainsi une matrice booléenne, T, telle que $T[i, j] = 1$ si et seulement si il existe un chemin de i à j.

Algorithme 1 : Variante de l'algorithme de Floyd-Roy-Warshall pour la fermeture transitive

Données : Un graphe orienté $G = (V, E)$ d'ordre $n > 0$ et sans boucles. Les sommets sont numérotés de 1 à $n = |V|$, i.e. $V = \{1, 2, \dots, n\}$.
Résultat : Une matrice booléenne T telle que $T[i, j] = 1$ si et seulement si il existe un chemin de i à j, 0 sinon.

$n \leftarrow |V|$;
$T \leftarrow$ matrice d'adjacence de T ;
pour $k \leftarrow 1, 2, \dots n$ **faire**
    pour $i \leftarrow 1, 2, \dots n$ **faire**
        pour $j \leftarrow 1, 2, \dots n$ **faire**
            $T(i, j) = T(i, j) \vee (T(i, k) \wedge T(k, j))$
        fin
    fin
fin
retourner T

Mettre en oeuvre l'algorithme de Floyd-Roy-Warshall modifié et le tester sur vos graphes précédents.