Méthodes de Monte Carlo

Il est souvent difficile (sinon impossible) de déterminer analytiquement l'intégrale d'une fonction compliquée (et donc l'aire d'une surface).
Dans certains cas des méthodes probabilistes permettent d'obtenir de bons résultats. Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes probabilistes très répandues (leur nom provient bien de la ville du même nom célèbre pour ses casinos).
Nous allons mettre en œuvre une telle méthode pour approcher π puis pour le calcul d'une intégrale. La justification mathématique de cette approche sera vue en cours.
On considère un carré de coté unité dans lequel on inscrit un quart de cercle.
On tire aléatoirement les coordonnées d'un point (x, y) avec $0 \leq x, y \leq 1$.

1. Quelle est la probabilité pour que ce point soit à l'intérieur du quart de cercle.
2. Faire "help rand" sous scilab pour vérifier que les nombres (pseudo) aléatoires sont générés entre 0 et 1.
3. En utilisant la commande "rand" sous scilab, écrire une fonction scilab ayant comme paramètre d'entrée le nombre n de nombres aléatoires et qui renvoie une approximation de pi (rappel : le carré de la distance d'un point (x, y) à l'origine est $x^2 + y^2$).
4. Lancer la fonction pour n grand, que remarquez-vous.
5. Adapter le programme précédent pour calculer l'intégrale d'une fonction entre 0 et 1. On se limitera à la fonction exp. Tracer l'erreur en fonction de n (nombres de points aléatoires)
6. Généralisation : calculer l'intégrale d'une fonction entre a et b. On peut remarquer qu'en faisant le changement de variable $x = a + (b - a)t$ on se ramène au cas précédent (t varie alors entre 0 et 1).