Exercice 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Correction :

1. En utilisant la formule qui donne le terme général d'une suite arithmétique dont on connaît le premier terme et la raison on a :

$$u_n = -3 + \frac{3n}{2} \tag{1}$$
$$= \frac{3n-6}{2} \tag{2}$$

2. On a directement que la limite de (u_n) est $+\infty$.
3. À l'aide de l'expression que l'on vient de trouver, on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3k-6}{2} \tag{3}$$
$$= \frac{3}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) - \frac{6n}{2} \tag{4}$$
$$= \frac{3}{2}\frac{(n-1)n}{2} - \frac{6n}{2} \tag{5}$$
$$= \frac{3n^2-15n}{4} \tag{6}$$

Exercice 2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = -4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Correction :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme -4 et de raison $\frac{3}{2}$.
   En utilisant la formule qui donne le terme général d'une suite géométrique dont on connait le premier terme et la raison, on a : $u_n = -4(\frac{3}{2})^n$.
2. La raison est strictement supérieure à 1, donc la suite tend vers l'infini, elle est à valeurs négatives, donc $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = -\infty$.
3. En appliquant la formule qui donne la somme des n premiers termes d'une suite

géométrique dont on connait le premier terme et la raison, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -4\frac{1-(\frac{3}{2})^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

$$= 8(1-(\frac{3}{2})^{n+1}) \tag{9}$$

Exercice 3. Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^n + n^2}{3^n + 5}$.
2. $u_n = \dfrac{10^n + n^{10}}{10^{3n} - n^{1000}}$.
3. $u_n = \dfrac{2n^{\frac{3}{2}} + 2^n}{n^{\frac{5}{2}} + 4^n}$.

Correction :

1. On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
   En divisant le numérateur et le dénominateur par 3^n, on obtient : $u_n = \frac{(\frac{2}{3})^n + \frac{n^2}{3^n}}{1+\frac{5}{3^n}}$.
   Examinons à présent les différents termes de cette expression :
   $(\frac{2}{3})^n$ tend vers 0, puisque c'est une suite géométrique de raison positive et inférieure à 1.
   $\frac{n^2}{3^n}$ est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ et tend vers 0 par croissances comparées.
   $\frac{5}{3^n}$ tend vers 0.
   On en déduit, avec les règles usuelles (on dit souvent par les théorèmes généraux) :
   $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 0$.
2. En divisant le numérateur et le dénominateur par 10^n, on obtient :
   $u_n = \frac{1+\frac{n^{10}}{10^n}}{\frac{10^{3n}}{10^n} - \frac{n^{1000}}{10^n}}$
   $\frac{n^{10}}{10^n}$ et $\frac{n^{1000}}{10^n}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.
   En effet, ce sont des formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ mais les numérateurs tendent vers l'infini avec une
   croissance polynômiale et les dénominateurs tendent vers l'infini avec une croissance exponentielle.
   $\frac{10^{3n}}{10^n} = 10^{2n}$.
   On en déduit que le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini, donc :
   $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 0$.
3. On a encore une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
   En divisant le numérateur et le dénominateur par 4^n, on obtient :
   $u_n = \frac{\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{4^n} + \frac{2^n}{4^n}}{\frac{n^{\frac{5}{2}}}{4^n} + 1}$.
   Par croissances comparées, $\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4^n}$ et $\frac{n^{\frac{5}{2}}}{4^n}$ tendent vers 0.
   $\frac{2^n}{4^n} = (\frac{1}{2})^n$ qui tend vers 0 quand $n$tend vers l'infini.
   On en déduit que le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1, donc :
   $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 0$.

Exercice 4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4}$.

1. (a) Démontrer que la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{-4\}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$
est croissante sur $]-1;\ +\infty[$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (d) À l'aide du théorème du point fixe déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$
   (a) Montrer qu'il s'agit d'une suite arithmétique.
   (b) En déduire, pour tout $\mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

1. (a) Démontrer que la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{-4\}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$
est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, en déduire qu'elle est convergente.
   (c) Déterminer les points fixes de la fonction f, c'est à dire les nombres réels x tels que $f(x) = x$.
   (d) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers un point fixe de f, déterminer $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n$.
2. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.
   (a) Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
   (b) En déduire $\underset{n\to+\infty}{Lim} v_n$, puis $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n$.

Correction :

1. (a) Calculons la dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = \frac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2} \tag{10}$$
$$= \frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2} \tag{11}$$
$$= \frac{10}{(x+4)^2} \tag{12}$$
La dérivée de la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R} - \{-4\}$ donc la fonction f est strictement croissante sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R} - \{-4\}$,

donc sur $\mathbb{R}^+$.
On vérifie par une récurrence immédiate que la suite est à valeurs positives.
Déterminons maintenant u_1. $u_0 = 0$ donc $u_1 = \frac{1}{2}$. On a donc $u_1 > u_0$.
On va démontrer par récurrence que la suite est croissante, la récurrence est donc initialisée.
Supposons que pour un entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$. La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a : $f(u_{n+1}) > f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} > u_{n+1}$.
On a donc démontré par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(b) La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et $\underset{x\to+\infty}{Lim} f(x) = 3$.
On en déduit que $f(u_n) \in [\frac{1}{2}, 3[$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc elle est convergente.

(c) Le nombre réel x est un point fixe de la fonction f si $f(x) = x$ ce qui est équivalent à $\frac{3x+2}{x+4} = x$
qui équivaut à : $x(x+4) = 3x+2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.
1 est racine évidente et le produit des racines est égal à -2, donc les points fixes de f sont 1 et -2.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives, donc elle ne peut pas tendre vers -2,
ce qui entraîne $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 1$.

(d) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers un point fixe de f, déterminer $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n$.

2. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à valeurs positives, $u_n + 2$ ne s'annule pas, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie
pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} && (13)\\
& && (14)\\
&= \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} && (15)\\
& && (16)\\
&= \frac{3u_n + 2 - u_n - 4}{3n_n + 2 + 2u_n + 8} && (17)\\
& && (18)\\
&= \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} && (19)\\
& && (20)\\
&= \frac{2}{5}\frac{u_n - 1}{u_n + 2} && (21)\\
& && (22)\\
&= \frac{2}{5} v_n && (23)
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$ est de raison $\frac{2}{5}$.

(b) La raison de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $]0,1[$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Pour déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on va exprimer u_n en fonction de v_n.

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2v_n - 1 \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \tag{26}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc elle est, au moins à partir d'un certain rang, différente de 1.
On a donc :
$u_n = \frac{-2v_n-1}{v_n-1}$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc d'après les règles de calcul sur les limites : $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 1$.

Exercice 6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Établir que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que si la suite (u_n) a pour limite un réel l, alors l vérifie la relation $l = l + e^{-l}$.
3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Correction :

1. Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$.
   Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n et la suite (u_n) est croissante.
2. Si la suite (u_n) a pour limite un réel l, alors, par théorème du point fixe, l vérifie la relation $l = l + e^{-l}$.
   Ce qui équivaut à $0 = e^{-l}$, équation qui n'a pas de solution car la fonction exponentielle ne s'annule jamais.
3. On déduit de la question précédente que la suite (u_n) ne peut converger vers une limite finie.
   Comme elle est strictement croissante on a nécessairement $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = +\infty$