

A. Assimiler la notion de Proposition

Exercice 1

Lesquels de ces énoncés sont des propositions ?

1. Le soleil est constitué de jus d'orange.
2. $y + 2 > y$
3. Faites la roue.
4. Si vous n'êtes pas une femme, alors vous êtes un homme.
5. 5 est un nombre pair.

B. Construire et utiliser les tables de vérité

Exercice 2

Construire les tables de vérité des propositions suivantes :

1. $(\neg P) \vee Q$
2. $P \wedge \neg Q$
3. $P \Rightarrow Q$
4. $(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg Q)$
5. $(\neg P) \Rightarrow ((\neg Q) \vee R)$

Exercice 3

Démontrer les tautologies suivantes à l'aide d'une table de vérité.

Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
2. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
3. $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P.$
4. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
5. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
6. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
7. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

C. Faire la négation d'une formule ou d'un énoncé

Exercice 4

Soient A, B, C trois propositions. Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation. On pourra utiliser que $A \Leftrightarrow B$ équivaut à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. $A \wedge (\neg B)$ | 6. $\neg(A \vee B) \Rightarrow C$ |
| 2. $A \vee (\neg B)$ | 7. $(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C$ |
| 3. $A \vee (B \wedge C)$ | 8. $A \Leftrightarrow B$ |
| 4. $A \wedge (B \vee C)$ | 9. $(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg C)$ |
| 5. $A \Rightarrow (\neg B)$ | 10. $(A \vee (\neg B)) \Rightarrow (\neg C)$ |

Exercice 5

Donner la négation des phrases suivantes :

1. "Si j'ai une moyenne au S1 supérieure à 10 et au-dessus de 8 dans les deux UE, alors je valide le semestre 1."
2. "Si tu es étudiant.e à Lannion et que tu as les cheveux longs alors tu gagneras au loto ou tu prendras ta retraite avant 50 ans."

. Approfondissement

Exercice 6

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont toujours vraies ? *On raisonnera sans table de vérité, en essayant de comprendre le sens de la proposition.*

1. $P \Rightarrow (P \vee Q)$.
2. $P \Rightarrow (P \wedge Q)$.
3. $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R))$.

Exercice 7

On introduit un nouveau connecteur logique, noté $|$ et appelé *barre de Scheffer*, dont l'interprétation est donnée par la table suivante.

| P | Q | $P Q$ |
|---|---|---------|
| F | F | V |
| F | V | V |
| V | F | V |
| V | V | F |

Montrer que tous les connecteurs standards peuvent être éliminés au profit de la barre de Scheffer. En d'autres termes, pour chacun des énoncés suivants, donnez un énoncé équivalent dans lequel le seul connecteur logique qui apparaît est $|$:

$$\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q.$$