Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{n^2-n+1}{2n^2+n+2}$
2. $\underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{cos(n)}{n}$
3. $\underset{n\to+\infty}{Lim} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
4. $\underset{n\to+\infty}{Lim} \frac{e^{n+1}}{n}$
5. $\underset{n\to+\infty}{Lim} ln(n)+cos(n)$

Correction : Déterminer les limites suivantes :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, on a donc affaire à une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
   On met n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur.
   On obtient :

$$u_n = \frac{n^2-n+1}{2n^2+n+1} \tag{1}$$
$$= \frac{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \tag{2}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \tag{3}$$

   Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 2 donc : $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = \frac{1}{2}$
2. La suite $(cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a un comportement difficile à étudier, mais elle est bornée, puisque :
   $\forall n \in \mathbb{N}, |cos(n)| \leq 1$
   On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{|cos(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$.
   On applique alors le théorème d'encadrement :
   La suite constante égale à 0 et la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, donc :
   $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 0$.
3. Puisque $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, on a donc une forme
   indéterminée $+\infty-\infty$.
   On multiplie (et on divise) par l'expression conjuguée :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$
$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$
$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \tag{8}$$
$$\tag{9}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \tag{10}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc : $\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = 0$.

4. On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, mais le numérateur tend vers l'infini avec une croissance exponentielle et le dénominateur tend vers l'infini avec une croissance polynômiale, donc par croissances comparées, la suite tend vers $+\infty$.
5. On n'a pas une forme indéterminée classique, on retrouve la suite $(cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on va encadrer. $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq cos(n) \leq 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, ln(n)-1 \leq u_n \leq ln(n)+1$. Les deux suites extrêmes tendent vers $+\infty$, en fait la suite minorante suffit pour conclure
$\underset{n\to+\infty}{Lim} u_n = +\infty$ avec une extension aux limites infinies du théorème d'encadrement.

Exercice 2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_{2n} = 0$, $u_{2n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ ne converge pas.

Correction : Démontrons pour commencer que la suite ne tend pas vers 0.
L'intervalle de centre 0 défini par $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ ne contient aucun terme d'indice impair de la suite, donc il ne peut pas contenir tous les termes de la suite sauf un nombre fini, donc la suite ne converge pas vers 0.
Soit maintenant L un nombre réel non nul.
Il existe un intervalle de centre L qui ne contient pas 0 (par exemple, si $L > 0$, l'intervalle $]\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}[$)

Cet intervalle ne contient aucun terme d'indice pair de la suite, donc il ne peut pas contenir tous
les termes de la suite sauf un nombre fini. La suite ne peut donc pas converger vers un nombre réel
non nul, comme elle ne converge pas vers 0 non plus, elle est divergente.

Exercice 3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1. Quel est le plus petit terme de cette somme ? Quel est le plus grand terme ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction : Soit k un nombre entier naturel compris entre 1 et n.
On a :
$\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$, ce qui donne :
$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.
On peut donc minorer chaque terme de la somme $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ par $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ et le majorer par $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
Il y a n termes dans la somme, on obtient donc :
$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.
Cherchons maintenant les limites de deux suites encadrantes :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \text{ qui tend vers 1.} \tag{12}$$

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^4}{n!}, \forall n \geq 1$.

1. Démontrer que $\forall x \geq 5$, $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.
2. Déduisez-en que la suite (u_n) a pour limite zéro.