Introduction au calcul des probabilités Partie I

Adib Rahmouni

3 septembre 2020

Plan

- Motivations.
- Rappels.
- Variables aléatoires.
  - Variables aléatoires discrètes et continues.
  - Lois de probabilités.
- Valeurs moyennes.
- Lois limites.
  - Loi des grands nombres.
  - Théorème central-limite.
- Test du χ^2, échantillonage.

Motivations

- Génétique : chaines de Markov cachée.
- Informatique : reconnaissance de forme.
- Economie : mathématiques financières. . .
- Mécanique quantique.

Dans la vie quotidienne :

- Prévisions météo.
- Diagnostic médical
- risque nucléaire, etc. . .

Théorie des Probabilités

Espace d'évènements : Univers

ensemble des possibles ou **univers** (fini ou pas)

$\omega \in \Omega$ issues ou évènements élémentaires.

Quelques exemples d'expériences aléatoires (EA)

Lancer d'une pièce, $\Omega = \{F, P\}$, $card(\Omega) = 2$.

Lancer d'un dé jusqu'à l'obtention d'un 6 : $\Omega = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ ensemble infini dénombrable.

Choisir un nombre au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0, 1]$ infini non dénombrable.

Théorie des Probabilités

événement ensemble des issues de l'expérience qui vérifent une propriété donnée.
C'est donc une partie A de Ω, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples :
EA1 On obtient "face" : A = {F}.
EA2 On obtient le premier 6 entre le troisième coup et le septième coup (inclus)
EA3 On choisit un nombre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, $A =]\frac{1}{2}, 1]$.

Théorie des Probabilités

A et B sont dit incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. On appellera tribu sur Ω toute famille F de parties de Ω telle que

i) $\Omega \in \mathcal{F}$ (Ω est appelé l'évènement certain)

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (stabilité de F pour la complémentation)

iii) $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. Stabilité de F pour la réunion.

Théorie des Probabilités

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est alors appelé espace d'événements.
Cet espace n'est evidemment pas unique :

- **Algèbre la plus simple**
  $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$.
- **Algèbre de Bernoulli**
  $\mathcal{F} = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$, où A désigne un évènement $(A \subset \Omega)$.
- **Algèbre complète**
  Dans ce cas $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Théorie des Probabilités

Suivant le choix de la tribu on aura un modèle probabiliste plus ou moins rafiné.
permettra de décrire de manière plus ou moins judicieuse l'expérience aléatoire.
Ω est fini ou infini on choisit généralement l'algèbre complète.
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne forme pas une tribu : on considère l'ensemble des intersections et réunions dénombrables d'intervalles de $\mathbb{R}$: ensemble des Boréliens..

Probabilité

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace d'évènement, on appelle* **probabilité** *sur cet espace toute application* $\mathbb{P}$ *définie sur* $\mathcal{F}$ *vérifiant :*

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *la probabilité de l'évènement certain est 1 (normalisation)*

ii) $\forall A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

iii) Pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *vérifiant* $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ *on a*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Probabilité

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est alors appelé *espace probabilisé*.
Propriétés.

i) $\mathbb{P}$ est une fonction croissante, i.e. pour tout couple d'évènements (A,B) tel que A implique B, on a $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

en particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

ii)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

Probabilité

iii) Formule de Poincaré

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$
$$+ \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Probabilité

Si $\Omega = \bigcup_{i \in I} (\omega_i)$, $I \subset \mathbb{N}$ est fini ou dénombrable, il suffit de connaitre la probabilité des évènements élémentaires ω_i,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{j \in J} (\omega_j)) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(\omega_j)$$

Si $\Omega = \omega_1, \ldots \omega_N$ est fini on obtient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{1 \leq i \leq N} \omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\omega_i) = 1.$$

Probabilité

Si l'on suppose les ω_i équiprobables

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{N}$$

Pour tout évènement $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{\omega_i\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{n}{N}$$

Probabilité

on retrouve ainsi une définition classique mais particulière et intuitive de la probabilité :
Lorsque les issues d'une EA sont en nombre fini et équiprobables, la probabilité d'un évènement associé à cette épreuve est le rapport du nombre de cas "favorables" au nombre de cas possibles.
Limitations : Ω infini.
Si Ω est infini on ne peut pas avoir équiprobabilité.

Probabilité

Exemples :
EA1 : lancé d'une pièce,
$\Omega = \{P, F\}$, on peut choisir $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
Si la pièce n'est pas truquée notre probabilité est entièrement définie par

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1,\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \ \text{ et } \ \mathbb{P}(\{F\} = \mathbb{P}\{P\} = \frac{1}{2}$$

Probabilité

EA2 : lancé d'un dé jusqu'à l'obtention d'un 6.
On a $\Omega = \mathbb{N}$ et on choisit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
On définit alors la probabilité $\mathbb{P}$ sur les singletons par :

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6}$$

la probabilité de faire 1,2,3,4 ou 5 aux (i-1) premiers coups est alors $\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$ et $\frac{1}{6}$ la probabilité de faire 6 au ième coup.
vérifier (exercice) que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Probabilité

EA3 : choisir "uniformément" un nombre entre 0 et 1.
Dans ce cas $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des Boréliens de $[0, 1]$.
On définit alors $\mathbb{P}$ par

$$\mathbb{P}([a, b]) = \mathbb{P}(]a, b]) = \mathbb{P}([a, b[) = \mathbb{P}(]a, b[) = b - a$$

on peut noter qu'on a lors $\forall a \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$. On dit que c'est un événement presque impossible.

Variables aléatoires

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *deux espaces d'événements. On appelle variable aléatoire de l'espace d'événements vers* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *une application*

$$X : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

telle que

$$\forall A' \in \mathcal{F}, \;\; X^{-1}(A') \in \mathcal{F}$$

où $X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A'\}$.

Variables aléatoires

On sera souvent amené à considérer des cas où $\Omega' \subset \mathbb{R}$, par exemple $(\Omega', \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$
La variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ est alors appelée variable aléatoire réelle (v.a.r.).
On a la caractérisation suivante d'une v.a.r. (admis)

Proposition

Une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{F})$ si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}.$$

Variables aléatoires

Remarques

• *Si l'ensemble des images* $X(\Omega)$ *est dénombrable, la variable aléatoire est dite discrète. Si* $X(\Omega)$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, X *est dite continue.*

• *Si* Ω *est dénombrable, alors sur l'espace d'événements* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *toute application* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

• *Si* $\Omega' = \mathbb{Z}$ *alors la variable aléatoire est dite entière (positive si* $\Omega' = \mathbb{N}$*).*

• *Si* $\Omega' = \mathbb{R}^n$ *la variable aléatoire est dite vectorielle ou vecteur aléatoire (formé de n variables aléatoires*

Variables aléatoires

1. *Variable aléatoire indicatrice.*
   Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement.
   La fonction indicatrice $\mathbb{I}_A$ de A définie sur Ω est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Cette variable aléatoire est dite indicatrice ou variable de Bernoulli.
2. *Variable aléatoire certaine.*
   Toute application constante $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définit une variable aléatoire dite certaine.

Variables aléatoires

1. *Somme des valeurs de dés.*
On s'intéresse à la somme des points lors du lancé de deux dés équilibrés. On peut donc associer à cette épreuve (lancé de deux dés) l'application suivante définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & w_{ij} = (i, j) \longrightarrow X(w_{ij}) = i + j \end{aligned}$$

On peut vérifier aisément que cette application est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Propriétés des v.a.r.

Soit X et Y deux v.a.r. sur le **même** espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$

- $S = X + Y$ et $P = XY$ sont deux variables aléatoires sur le même espace.
- Si X est une variable aléatoire réelle, alors αX, $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi une variable aléatoire réelle.
- L'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Fonction de répartition .

Définition

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'application

$$F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) \end{array}$$

est appellée fonction de répartition (ou fonction cumulative) de X. On a $\mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\})$, et que l'on écrira, par abus de notation, $\mathbb{P}(X \leq x)$.

Fonction de répartition .

Proposition

Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fonction de répartition F_X associée à X vérifie

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. F_X *est croissante :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
4. F_X *est continue à droite.*

Fonction de répartition .

F_X permet de calculer la probabilité d'un intervalle quelconque. En effet, sil'on souhaite calculer $\mathbb{P}([a, b[)$ il suffit d'écrire

$$]-\infty, a[\cup[a, b[=]-\infty, b[$$

d'où

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$
$$\mathbb{P}(X \geq c) = 1 - F_X(c)$$

Propriétés

Proposition

Soit X une v.a.r. sur$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors F_X vérifie

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
3. *F_X est croissante :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
4. *F_X est continue à droite.*

Propriétés

Démonstration

1. $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

v.a.r. discrètes

Définition

Une v.a.r. X est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$
Dans ce cas la fonction

$$p : \begin{array}{l} I \longrightarrow [0,1] \\ i \mapsto p_i \end{array}$$

où $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ est appelée fonction de masse de la v.a.r. X.

v.a.r. discrètes

Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, par convention

$$p_i = 0, \ \forall i \in \mathbb{N} - I.$$

Proposition

Si X est une v.a.r. discrète dont les valeurs sont $\{x_i, \ x_i \in Nn\}$, alors sa fonction de répartition F_X est constante par morceaux, ayant pour points de discontinuités $\{x_i, \ i \in \mathbb{N}\}$.

v.a.r. discrètes

Démonstration

On suppose que les x_i peuvent être rangées dans l'ordre croissant $x_0 < x_1 < x_2 \dots$. Alors on a

$$\begin{array}{llcl}
x < x_0 & \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \\
x \in [x_0, x_1 & \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = x_0) = p_0 \\
x \in [x1, x2[& \Rightarrow F_X(x) & = & \mathbb{P}(X = x_0 \text{ ou } x_1) \\
 & & = & \mathbb{P}(\{X = x_0\} \cup \{X = x_1\}) = p_0 + p_1 \\
\vdots & & & \\
x \in [x_k, x_{k+1} & \Rightarrow F_X(x) & = & \sum_{i=0}^{k} p_i
\end{array}$$

v.a.r. continues

Définition

Une v.a.r. X est dite absolument continue s'il existe une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f_X, telle que la fonction de répartition F_X de la v.a.r. X admette la représentation intégrale suivante :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Ceci est équivalent à dire que F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_X. La fonction f_X est appelée densité de X. On parle aussi de v.a.r. à densité pour désigner une v.a.r. absolument continue.

v.a.r. continues

on omettra le terme “absolument” : on parlera plus simplement de v.a.r continues.

1. Généralement f est continue “presque sûrement” sur $\mathbb{R}$
2. Ainsi on a “presque sûrement” (on dit aussi “presque partout”)
$$F'_X(x) = f(x)$$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

v.a.r. continues

1. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X < b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned} \qquad (1)$$

v.a.r. continues

Proposition

Toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\,x = 1$$

est la densité d'un v.a.r continue.

Remarques importantes

Lorsque la v.a.r est absolument continue on a $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ (pour le voir il suffit d'utiliser (1) : une v.a.r. continue ne "charge" pas les points.

v.a.r. continues

Plus généralement, pour une variable aléatoire continue la probabilité pour qu'elle prenne un ensemble dénombrable de valeurs quelconques est toujours nulle.
Il n'y a pas unicité de la densité de probabilité pour une fonction de répartition F_X donnée. Il suffit de changer la valeur de la densité en un nombre fini (ou dénombrable) de points (en vertu de la remarque précédente).

Loi d'une v.a.r.

Proposition

Soient X une variable aléatoire de l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\Omega', \mathcal{F}')$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
L'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}' & \longrightarrow & [0,1] \\ A' & \longmapsto & \mathbb{P}(X^{-1}(A')) \end{array} \qquad (2)$$

définit une probabilité sur l'espace d'événements $(\Omega', \mathcal{F}')$. Cette probabilité est appelée loi de la variable aléatoire X.

v.a.r. continues

on a ainsi "transporté" la probabilité définie sur Ω vers Ω'
On peut montrer que $\mathbb{P}_X$ vérifie bien les conditions pour être une probabilité.

v.a.r. continues

Caractérisation de $\mathbb{P}_X$

Soit X une v.a.r. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit A un Borélien de $\mathbb{R}$.

- Si X est une v.a.r discrète, alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_j)\, \mathbb{I}_A(x_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \mathbb{I}_A(x_j)$$

où $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction caractéristque de A.

v.a.r. continues

- Si X est une v.a.r continue, alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(t)\,d\,t = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A f_X(t)\,d\,t.$$

On voit ainsi que la connaissance de la fonction de masse pour une v.a.r. discrète.
la fonction de densité dans le cas d'une v.a.r. continue suffit à définir $\mathbb{P}_X$

Exemples

Exercice

On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X.
   On séparera les cas $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ et $x \geq 1$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a, les valeurs de x telles que $\mathbb{P}(X > x) = a$.

Exemples

Exercice

Soit X une v.a. qui suit une loi de densité f_X donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{\alpha}{t} & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f_X soit une densité de probabilité (dans toute la suite α sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.

Principales lois de probabilité

Lois discrètes finies

- **Loi de Bernoulli :** $\mathcal{B}(1,p)$ $\;p\in]0,1[$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p (on note $X\sim\mathcal{B}(1,p)$ si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$ avec $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$.
Cette loi modélise l'issue d'une expérience en ne s'intéressant qu'au "succès" ou à l' "échec" de l'expérience.

Principales lois de probabilité

Lois discrètes finies

- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0,1[$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p) (on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si elle est à valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$ avec

$$\forall i = 0,\ldots,n \;\; \mathbb{P}(X=i) = C_n^i p_i (1-p)^{n-i}$$

Cette loi modélise une succession de “succès” et d”’échecs”, p étant la probabilité du succès.

Principales lois de probabilité

Lois discrètes finies

- **Loi uniforme sur** $\{1, \ldots, N\}$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$ (on note $X \sim \mathcal{U}_N$) si elle est à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ avec

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\} \;\; \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}$$

Cette loi modélise l'issue d'une expérience où les résultats sont équiprobables.

Principales lois de probabilité

V.A.R. "infinies dénombrables"

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$ La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi géométrique de paramètre p (on note $X \sim \mathcal{G}(p)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = i) = p(1-p)^{i-1}$$

. Cette loi modélise une série d' "échecs" suivie du premier "succès".

Principales lois de probabilité

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0$
on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda))$ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

C'est l'une des lois discrètes les plus utilisées en modélisation, en particulier pour les files d'attente, elle régit par exemple le nombre d'accidents, les déchets de fabrication, les appels téléphoniques à un standard... Cette loi est aussi appelée loi des événements rares.

Principales lois de probabilité

Variables aléatoires continues

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$) si elle est à valeurs dans $[a, b]$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$$

Principales lois de probabilité

Sa fonction de répartition

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b \end{cases} \tag{3}$$

Principales lois de probabilité

Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) (on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette loi est parfois appelée loi de Laplace-Gauss.

Principales lois de probabilité

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi de Cauchy si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

Principales lois de probabilité

Loi Gamma, $\Gamma(a, b), \quad a > 0, \quad b > 0$
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi Gamma de paramètres (a, b) (on note $X \sim \Gamma(a, b)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a t^{a-1} e^{-bt} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

où

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du, \quad \forall a > 0.$$

Principales lois de probabilité

La fonction Γ prolonge la fonction factorielle sur l'ensemble des réels au sens où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n! \; \text{ et } \; \forall a > 0, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

. De plus, on a

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt(\pi)$$

Valeurs moyennes

Définition

Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si X est une v.a.r. discrète, on appelle espérence de X et on note $\mathbb{E}(X)$, la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités de réalisation
autrement dit, lorsque cette quantité existe,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i\mathbb{P}(X = i)$$

Valeurs moyennes

Définition

De même, si X est une v.a.r. continue de densité f_X, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$, lorsqu'elle existe, la quantité

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Attention, cette quantité peut ne pas exister.

Valeurs moyennes

Soit la v.a. continue de densité

$$f_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sa moyenne est alors donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$$

Valeurs moyennes

Propriétes de l'espérance

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$
- Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- $\mathbb{E}(a) = a$

Attention $\mathbb{E}(a)$ existe.

Valeurs moyennes

Généralisation.

Définition

Soit X une v.a.r. et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. L'espérance de $g(X)$ est définie par (lorsqu'elle existe)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} g(i).\mathbb{P}(X = i) && \text{Si } X \text{ v.a. discrète} \\
\mathbb{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f_X(x)dx && \text{Si } X \text{ v.a. continue}
\end{aligned}$$

Variance

Mesure "l'éparpillement" ou la "dispersion" de X autour de la moyenne

Définition

Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
La variance de la v.a.r. X est définie, lorsque cette quantité existe, par

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

ou encore, en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}(X)$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Variance

Propriétés

$$
\begin{array}{ll}
Var(X) & \text{n'existe pas toujours} \\
Var(X) \geq 0 & \\
Var(X+\lambda) & = Var(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
Var(\lambda X) & = \lambda^2 Var(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
X \text{ v.a. constante} & \Leftrightarrow Var(X) = 0
\end{array}
$$

Variance

Définition

Soit X une v.a.r. telle que $Var(X)$ existe. L'écart-type de X est défini par

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Mesure aussi "l'éparpillement" ou la "dispersion" de X autour de la moyenne.
On l'utilise plus souvent que la variance.

Exemples

Loi $\mathcal{B}(1, p)$: Espérance p ; Variance $p(1-p)$
Loi $\mathcal{B}(n, p)$: Espérance np ; Variance $np(1-p)$
Loi $\mathcal{P}(\lambda)$: Espérance λ ; Variance λ
Loi $\mathcal{U}([a, b])$: Espérance $\dfrac{a+b}{2}$; Variance $\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi $\mathcal{E}(\lambda)$: Espérance $\dfrac{1}{\lambda}$; Variance $\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$: Espérance m ; Variance σ^2

v.a.r centrée réduite

Corollaire

Si X est une v.a.r. pour laquelle $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$ existent, alors la v.a.r. Y définie par

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$$

est appelé v.a.r. centrée réduite associée à la v.a.r X. Elle vérifie

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \quad et \quad Var(Y) = 1$$

v.a.r Loi Normale

Réduction d'une loi Normale $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Il suffit de poser

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

On a alors

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

. La fonction de répartition $F_Z = \Phi$ de Z est donnée par les tables.
Comment en déduire celle de X ?

v.a.r Loi Normale

Il suffit d'ecrire :

$$
\begin{aligned}
F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a-m}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{a-m}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

v.a.r Loi Normale

De la même manière

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

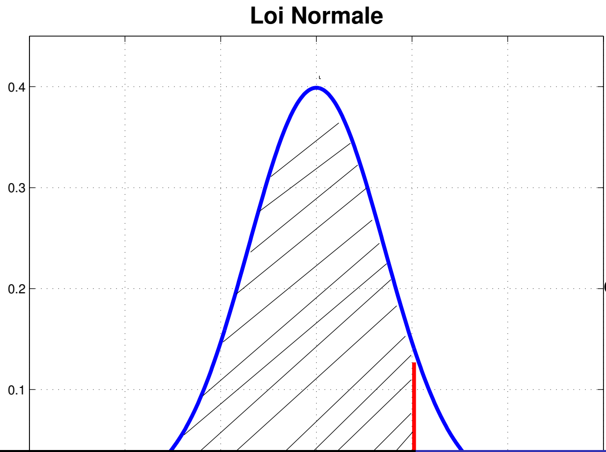
Exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\sigma = 2$.
on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} \leq \frac{1-1}{2}) \\ &= \mathbb{P}(\frac{X-1}{2} \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 0) \\ &= \Phi(0) = 0.5 \quad \text{Cf tables}\end{aligned}$$

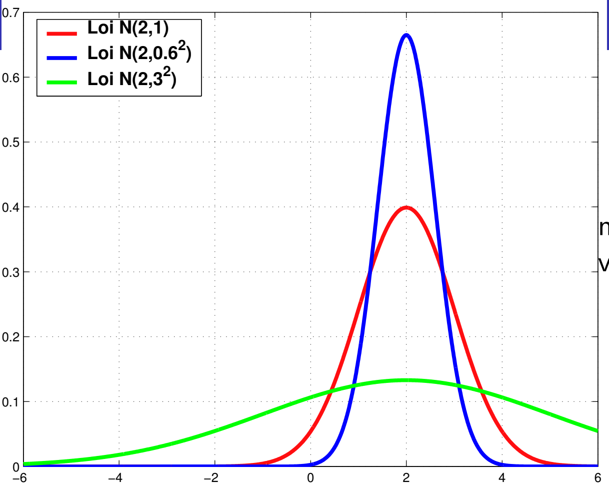
On peut calculer de la même manière $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

v.a.r Loi Normale



Densité d'une v.a. de loi normale.

Lo



même espérance, diverses variances.

Couple de v.a.r

Définition

Soit X_1, X_2 deux v.a.r. définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle couple aléatoire, l'application définie par

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{aligned} \tag{4}$$

On note $X = (X_1, X_2)$.

Couple de v.a.r

Définition

On appelle fonction de répartition du couple de v.a.r. $X = (X_1, X_2)$ *l'application*

$$\begin{aligned} F_X : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \longmapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \end{aligned} \tag{5}$$

avec $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\})$

Couple de v.a.r

Définition

Le couple de v.a.r. $X = (X_1, X_2)$ *est dit discret s'il est à valeurs dans un sous ensemble fini ou dénombrable de* $\mathbb{R}^2$

Le couple de v.a.r. $X = (X_1, X_2)$ *est dit absolument continue s'il admet une représentation intégrale dans* $\mathbb{R}^2$

Couple de v.a.r

Définition

On appelle espérance du couple aléatoire $X = (X_1, X_2)$ *l'élément de* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1, X_2) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))$$

Si $\mathbb{E}(X_1)$ *et* $\mathbb{E}(X_2))$ *existent il en sera de même pour* $\mathbb{E}(X)$.

Couple de v.a.r

Définition

Soit $X = (X_1, X_2)$ *un couple de v.a.r, si* $\mathbb{E}(X_1)$ *et* $\mathbb{E}(X_2))$ *existent, on appelle covariance du couple aléatoire* $X = (X_1, X_2)$ *le réel*

$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1.X_2) - \mathbb{E}(X_1).\mathbb{E}(X_2))$$

notons que $Cov(X_1, X_1) = Var(X_1)$

Couple de v.a.r

Définition

Deux v.a.r. X et Y sont dites indépendantes si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x).\mathbb{P}(Y \leq y) \tag{6}$$

Théorème

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$$

Couple de v.a.r

Définition

On appelle coefficient de corrélation de deux v.a.r. X et Y le réel défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}$$

où $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{Cov(X, X)}$.
Ce taux mesure le degré de "dépendance" de deux v.a.r.

Théorèmes limites

On s'intérèsse à un évènement E de probabilité inconnue $\mathbb{P}(E)$.
On veut une estimation de $\mathbb{P}(E)$.
Si l'on répète N fois l'expérience obtient t'on "en moyenne" une approximation de $\mathbb{P}(E)$?
Que se passe t'il lorsque N tend vers l'infini ?

Exemple

Nous avons un dé truqué et nous voulons savoir quelles sont les nouvelles proba.

Théorèmes limites

Loi faible des grands Nombres

Théorème

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. de même loi, de même espérance m, de même variance σ^2 et indépendantes (mutuellement). Alors la v.a.r. $\bar{X}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers m. On écrira

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

Convergence en probabilité : pour n grand $\bar{X}_n$ est **probablement** très proche de m

Théorèmes limites

Loi faible des grands Nombres

Cette loi confirme notre intuition : une fréquence tend à se stabiliser lors d'épreuves répétées.

On peut le vérifier expérimentalement.

Plus précisément : lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'un évènement est "proche" de sa probabilité.

C'est cette "convergence en probabilité" qui explique par exemple comment retrouver, en sondant un échantillon, la structure d'une population.

Théorèmes limites

Loi forte des grands Nombres

Théorème

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. de même loi, de même espérance m et indépendantes. Alors la v.a.r. $\bar{X}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *converge* **presque sûrement** *vers m. On écrira*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} m$$

Convergence en p.s. : pour n grand $\bar{X}_n$ est "presque partout" très proche de m

Théorèmes limites

Loi forte ou Loi faible ?

Ces deux lois nous assurent que $\bar{X}_n$ tend vers m lorsque n tend vers l'infini.

La loi faible nous assure que pour n assez grand $\bar{X}_n$ est assez proche de m mais elle n'exclut pas que pour des valeurs p plus grandes que n, $\bar{X}_n$ s'éloigne de m.

En effet il se peut que pour certaines valeurs (dont la probabilité collective est très faible) $\bar{X}_n$ s'éloigne de m.

La loi forte exclut cette éventualité.

Théorèmes limites

Théorème Central Limite : de la limite centrale

Théorème

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$*, n v.a.r. indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance* σ^2 *alors la v.a.r.* $S_n \sum_{i=0}^{n} X_i$ *vérifie*

$$\frac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow Y \quad avec \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

c'est à dire que la v.a.r. $\frac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}}$ suit pour n grand une loi normale centrée réduite.

Théorèmes limites

C'est le théorème le plus important en probabilité.
Les v.a.r. X_i suivent **une** lois quelconque (la même pour toutes les v.a.r.).
Ce théorème permet de donner des approximations pour le calcul des probabilités d'évènement faisant intervenir une somme de v.a.r.
Il explique aussi pourquoi beaucoup de phénomènes aléatoires naturels admettent des distributions normales.

Théorèmes limites

Proposition

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n v.a.r. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. La v.a.r. $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. et S_n "tend" vers une loi normale de paramètres $(np, \sqrt{np(1-p)})$ lorsque n tend vers l'infini.

En pratique en approche une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale de paramètres dès que $np \approx 20$

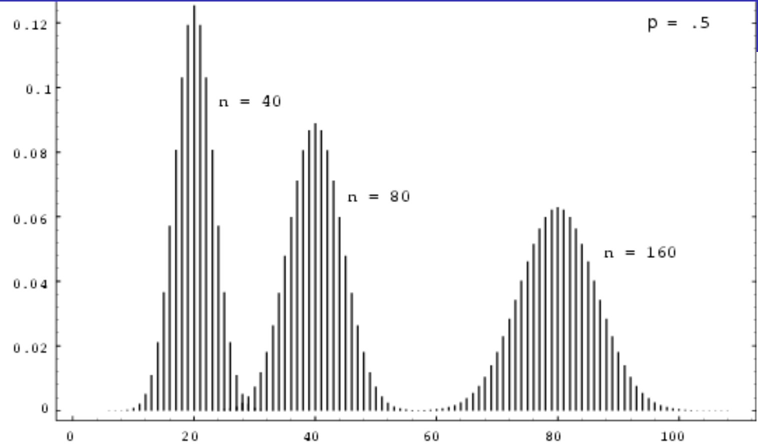
Théorèmes limites

Proposition

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n v.a.r. indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ. La v.a.r. $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ et S_n "tend" vers une loi normale de paramètres $(n\lambda, \sqrt{n\lambda}$ lorsque n tend vers l'infini.

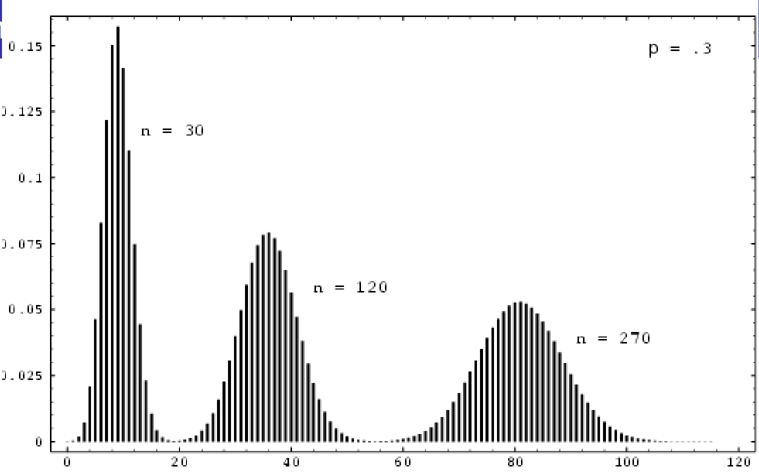
En pratique en approche une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale dès que $np \approx 20$

Th



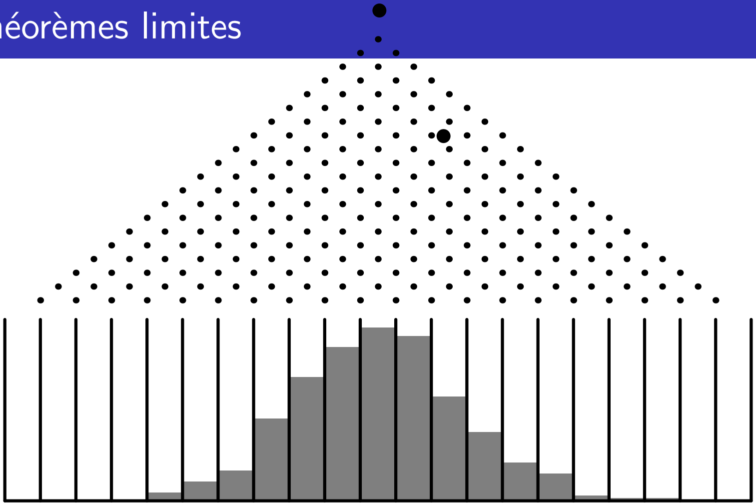
tendance normale de la loi binomiale.

Th



tendance normale de la loi binomiale.

Théorèmes limites



Statistiques

Problème : évaluer une quantité α déterministe à partir d'un échantillon.

L'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille à déterminer pour satisfaire une exigence de "fiabilité", on parlera de **Niveau ou seuil de confiance**

Problème dit d'estimation ponctuelle.

Statistiques

Définition

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de V.A. indépendantes admettant une moyenne μ et un écart type σ on note $\bar{X}$ la **moyenne empirique** *de l'échantillon*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} nX_i$$

Statistiques

Définition

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de V.A. indépendantes admettant une moyenne μ et un écart type σ on note S^2 la **variance empirique** *de l'échantillon*

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1} n(X_i - \bar{X})^2$$

Moyenne et variance empirique sont des v.a.

Statistiques

Si n est grand, d'après le théorème central-limite

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

En pratique σ est **inconnu** on le **remplace** par S, d'où

$$\mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}])$$

Statistiques

et donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}]) \\ = \quad & \mathbb{P}(|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S}| \leq t) \\ \approx \quad & 2\Phi(t) \end{aligned}$$

où

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t exp(-x^2/2)$$

Statistiques

En pratique
On choisit un **niveau ou seuil de confiance** α (en général $\alpha = 0.95$ ou $\alpha = 0.99$.
On estime grâce à la table ou par un calcul approché t_α, par exemple $t_{0.95} \approx 1.96$.
On peut alors affirmer

$$\mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}]) \approx \alpha$$

Statistiques

L'intervalle

$$[\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

est appelé intervalle de confiance pour μ au seuil (niveau) de confiance α
la v.a. $\bar{X}$ est dite estimateur de μ

Statistiques

Test d'hypothèse : on veut tester une hypothèse, par exemple équiprobabilité des lancés d'un dé.
Si X est une v.a. de moyenne μ on veut savoir si $\mu = \mu_0$ (appelée hypothèse nulle).
L'outil mathématique nous aide à prendre la décision : rejeter l'hypothèse ou pas.
Si on rejette l'hypothèse on a lhypothèse alternative, ici $\mu \neq \mu_0$.

Statistiques

Deux erreurs possible :
1/ On rejette l'hypothèse alors qu'elle est vraie : erreur de première espèce dont la probabilité est appelée risque de première espèce (noté α).
2/ On accepte l'hypothèse alors qu'elle est fausse : erreur de deuxième espèce dont la probabilité est appelée risque de deuxième espèce (noté β, $1-\beta$ est appelé puissance du test).
On souhaite bien sûr minimiser les deux risques, souvent dans la pratique minimiser l'un entraine une augmentation de l'autre.

Statistiques

D'après l'intervalle de confiance vu précédemment

$$\mathbb{P}(\mu \in [\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}]) \approx \alpha$$

d'où

$$\mathbb{P}(\mu \in [\mu_0 - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \mu_0 + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}])$$

représente (si on accepte l'hypothèse) le risque de première espèce $1 - \alpha$.

Applications

La note obtenue par des étudiants à un examen est une v.a.r. normale $X \sim \mathcal{N}(7, 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10, et la note en dessous de laquelle se trouvent 10 % des étudiants.

Applications

On cherche $\mathbb{P}(X \geq 10)$, il suffit de centrer et réduire pour se ramener à une v.a. normale centrée réduite (on la notera dans cet exercice Y)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 10) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-7}{3} \geq \frac{10-7}{3}\right) \\
&= \mathbb{P}(Y \geq 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) \\
&= 1 - F_Y(1)
\end{aligned}$$

On consulte la table

environ 16% des étudiants ont plus de 10.

Applications

on a donc $\mathbb{P}(Y \leq \frac{x_0 - 7}{3}) = 0.1$, en consultant la table on trouve (on cherche plutot x_1 tel que $\mathbb{P}(Y \leq \frac{x_1}{)} = 0.9$, on aura alors $\frac{x_0 - 7}{3} = -x_1$, vous pouvez vous en convaincre sur le graphique de la loi normale)

$$\frac{x_0 - 7}{3} = -1.28$$

on en déduit alors x_0.

Applications

Applications

Soit p la proportion de la population favorable à un candidat.
On souhaite grâce à un sondage avoir une estimation de p.
On intéroge un échantillon de n personnes et on prend comme approximation de p le nombre $\tilde{p}$ de personnes favorables à ce candidat dans l'échantillon.
Déterminer, grâce au théorème de la limite centrée, la taille de l'échantillon pour que $\tilde{p}$ approche p à 10^{-2} prés avec une probabilité de 0,95.

Applications

On souhaite, à taille d'échantillon fixée, trouver la précision obtenue. calculer

1. la précision ϵ sachant que l'échantillon est de taille $n = 1000$ et pour un seuil de confiance de $0,95$ (autrement dit qu'elle est la précision obtenue dans 95% des cas si l'échantillon est de taille $n = 1000$).
2. la précision ϵ sachant que l'échantillon est de taille $n = 1000$ et pour un seuil de confiance de $0,99$

Applications

On a lancé (Weldon) un dé 315 672 fois et tiré 106 602 fois l'une des faces 5 ou 6.

1. Calculer les fréquences théorique et observée d'apparition des faces 5 ou 6.
2. Calculer la fluctuation (différence entre les fréquences observée et théorique)
3. Quelle loi représente cette expérience aléatoire.
4. En utilisant le théorème central-limite, montrer que l'hypothèse d'un dé équilibré est à rejeter

Statistiques

test du χ^2 (imaginé par Pearson)

But : déterminer si une v.a. X suit une loi particulière.

On souhaite donc tester l'hypothèse :

H : X suit une loi $\mathcal{L}$.

On calcule les effectifs n_i extraits de notre échantillons de taille n d'après le théorème central limite n_i/n tend vers p_i (probabilité théorique), plus précisément :

$$T = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2$$

C'est cette "tendance" qui nous fournira le test.