1. Représentation d'un nombre entier naturel

Le cours n°1 a rappelé la signification de l'écriture des nombres entiers naturels (positifs ou nuls). la suite de chiffres $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$ (écriture indo-arabe) doit être interprétée en tant que le nombre

$N = (a_n.10^n) + (a_{n-1}.10^{n-1}) + (a_{n-2}.10^{n-2}) + ... + (a_1.10^1) + (a_0.10^0)$

C'est ce qu'on appelle l'écriture polynomiale de N, qui permet de calculer sa valeur.

Par exemple, la suite « `59218` » est interprétée comme

$$\begin{aligned} N &= 5 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 5 \times 10000 + 9 \times 1000 + 2 \times 100 + 1 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 50000 + 9000 + 200 + 10 + 8 \\ &= 59218 \end{aligned}$$

Ce procédé est tellement naturel qu'on n'en a plus conscience. Il faut pourtant bien distinguer la valeur intrinsèque d'un nombre de son écriture. Par exemple, ceci : « $*****$ » représente le nombre cinq, de même que ceci : « 5 », mais on peut aussi l'écrire « 101 », en base 2.

Le cours a montré d'autres notations pour les nombres, anciennes, moins pratiques. La notation des romains ne permet pas la décomposition directe en puissances de 10. On ne peut pas douter que les romains arrivaient à comparer deux nombres, mais sûrement moins facilement qu'avec l'écriture indo-arabe. Lequel de ces deux nombres est le plus grand, DCCLXXXVI avec CDXXXVII ? Maintenant, comparez 786 avec 437 (ce sont les traductions des mêmes nombres).

L'écriture d'un nombre, sous forme de chiffres associés à des puissances de 10, permet de faire des opérations arithmétiques très facilement. Par exemple les additions sont faites chiffre par chiffre, en reportant la retenue vers la gauche, quel que soit le nombre de chiffres.

Ce système peut être employé avec une base $B \geq 2$ quelconque. Les chiffres doivent être tous compris entre 0 et $B - 1$. Le nombre se décompose de cette manière :

$N = (a_n.B^n) + (a_{n-1}.B^{n-1}) + (a_{n-2}.B^{n-2}) + ... + (a_2.B^2) + (a_1.B^1) + (a_0.B^0)$

Cette décomposition est unique si on considère qu'il n'y a aucun $a_i = 0$ tel que $i > n$ et $a_n > 0$. Les termes B^i sont appelés les poids du nombre N. Les poids sont rangés de *fort* à *faible*. a^n est le chiffre de poids fort, a_0 est le chiffre de poids faible.

Pour indiquer dans quelle base est écrit un nombre, quand ce n'est pas la base 10, on l'écrit $(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0)_B$

a. Voici des nombres écrits en base 7. Écrivez le polynôme de base 7, puis détaillez le calcul pour arriver à la valeur (écrite en base 10) — comme ci-dessus pour 59215. Les puissances de 7 sont : 1, 7, 49 et 343.
   i. $(531)_7$
   ii. $(2406)_7$
   iii. $(472)_7$

En fait, vous n'avez que deux nombres à traiter. Pourquoi ?

Lorsque la base est supérieure à 10, on est obligé d'utiliser des chiffres spéciaux : des lettres majuscules, A valant 10, B valant 11, etc.

b. Écrivez la valeur de tous les chiffres spéciaux de la base 16.
c. Est-ce qu'on pourrait écrire un nombre en base 16 avec des chiffres de la base 10, sans utiliser les chiffres spéciaux ? Pourrait-on écrire le nombre $(D4C9)_{16}$ comme ceci $(134129)_{16}$? Oui éventuellement, si on rajoute un signe pour séparer les chiffres : $(13|4|12|9)_{16}$, mais avez-vous déjà vu des nombres écrits comme ça... Non, les chiffres sont collés sans rien entre. Et donc si le nombre était $(D1C9)_{16}$, est-ce qu'on pourrait l'écrire sans les chiffres spéciaux ?
d. Voici des nombres écrits en base 16. Écrivez le polynôme de base 16, puis détaillez le calcul pour arriver à la valeur (écrite en base 10). Les puissances de 16 sont : 1, 16, 256, 4096.
   i. $(531)_{16}$
   ii. $(2AD)_{16}$
   iii. $(B0F)_{16}$
e. Parmi ces triplets de nombres écrits en base 16, lequel est le plus grand ? Comparez-les seulement sur le début de leur décomposition polynomiale, sans calculer quoi que ce soit.
   i. $(A5172)_{16}$, $(62592)_{16}$, $(B580F)_{16}$
   ii. $(5B417)_{16}$, $(D4C9)_{16}$, $(5703D)_{16}$
   iii. $(7E634)_{16}$, $(7E6AA)_{16}$, $(7E6A9)_{16}$
   iv. $(779A4)_{16}$, $(F31EC)_{16}$, $(18AD16)_{16}$

Il est absolument essentiel de tenir compte du rang de chaque chiffre, ce qu'on appelle le poids. Les poids forts sont à gauche, les poids faibles à droite. Quand on compare des nombres ayant un nombre de chiffres différents, il faut combler le plus court par des zéros à gauche. Il suffit ensuite de comparer le poids fort des nombres, puis en cas d'égalité descendre vers les poids faibles.

f. Comblez ces nombres pour qu'ils aient tous 6 chiffres.
   a. $(531)_{16}$
   b. $(D532E)_{16}$
   c. $(E016)_{16}$

Ok, c'était trop facile. Tant mieux.

2. Changement de base d'un entier

Les exercices précédents ont montré comment obtenir la valeur numérique intrinsèque d'un nombre (celle qu'on représenterait avec des petits pois, des moutons, etc.). Cette valeur est exprimée en base 10, parce que c'est la plus naturelle pour nous.

Mais réfléchissons-y : on obtient la valeur en base 10 parce qu'on écrit tout depuis le début en base 10, quand on calcule le polynôme. Relisez l'exercice 1.a. Tout le polynôme est écrit implicitement en base 10. Par exemple $7^3 = 343$, c'est écrit en base 10. Et donc quand on fait les calculs, puissances, multiplications et additions, on obtient le résultat en base 10.

La base 10 sera donc la base pivot pour passer d'une base B à une base B'. On passera de B à 10, puis de 10 à B', parce qu'on sait calculer en base 10, et que les calculatrices aussi. Mais la valeur intrinsèque de tous les nombres pourrait être écrite dans n'importe quelle base.

3. De la base 10 vers une base B'

Soit N écrit $(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0)_{10}$, comment l'obtenir écrit $(a'_n a'_{n-1} a'_{n-2} ... a'_1 a'_0)_{B'}$.

Le cours n°1 donne l'algorithme : diviser N par B' (division euclidienne), le reste donne le chiffre de poids faible. On recommence à diviser avec le quotient, tant que le quotient est non-nul.

Il est intéressant/amusant de voir l'algorithme fonctionner sur la base $B' = 10$.

a. Convertissez le nombre 4208 écrit en base 10 vers la base 10 (oui, la même), en utilisant l'algorithme. Forcément, ça sera 4208, mais observez ce qui se passe, y compris avec le zéro.
b. Voici un exercice complet :
   i. Convertissez le nombre $(353)_{10}$ vers la base 5. Forcément, le nombre obtenu ne vous parlera pas. Il est en base 5.
   ii. Écrivez le polynôme du nombre obtenu, puis calculez sa valeur. Vous devez retrouver 353. Les puissances de 5 sont : $1, 5, 25, 125$.
c. Convertissez 43 en base 2. Les puissances de 2 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 32.
d. Convertissez 43 en base 16. Les puissances de 16 utiles sont : 1, 16.

4. De la base 2 vers la base 16 et inversement

Les chiffres d'un nombre en base 2 sont appelés *bits* (à ne pas confondre avec *byte* qui signifie *octet*, groupe de 8 bits).

Les chiffres de la base 16 sont appelés chiffres *hexadécimaux* : 0...9, A, B, C, D, E, F.

Il est très facile de convertir un nombre de la base 2 à la base 16 et inversement. Il y a un lien très fort entre ces deux bases. On va le mettre en évidence.

a. Complétez le tableau suivant

base 10	base 2	base 16
0	0000	0
1	0001	1
...	...	...
14	1110	E
15	1111	F

b. Si c'est possible sur votre poste, ouvrez un shell Python et tapez ces deux instructions :

```python
for i in range(256):
    print(f"{i:3d}  {i:08b}  {i:02X}")
```

Elles affichent les 256 premiers entiers naturels en base 10, 2 et 16, la continuation du tableau précédent.

On peut constater des régularités. Prenez par exemple le nombre 75. Il s'écrit `01001011` en base 2 et `4B` en base 16. Remarquez que `4` de la base 16 s'écrit `0100` en base 2 et `B` s'écrit `1011`. C'est à dire que le nombre en base 2 est le collage de la traduction en base 2 des chiffres hexadécimaux. Par exemple, le nombre `A5` en base 16 s'écrit en collant `A` écrit en base 2 sur 4 bits : `1010`, et `5` sur 4 bits : `0101`, donc `1010 0101`. Attention à bien écrire par quadruplets de 4 bits.

c. Écrivez les nombres suivants en base 2 (ne pas convertir en base 10) :
   i. $(D6)_{16}$

ii. $(C37)_{16}$
iii. $(1F28)_{16}$

La conversion de la base 2 vers la base 16 est à peine plus compliquée. Il faut grouper les bits 4 par 4 en commençant *par la droite* et en rajoutant les zéros nécessaires. Et ensuite traduire chaque groupe de 4 bits en hexadécimal.

d. Écrivez les nombres suivants en base 16 (ne pas convertir en base 10) :
   i. $(111001111010)_2$
   ii. $(1011111100)_2$
   iii. $(11000111010110011)_2$

La justification de ces non-calculs réside dans le fait qu'on peut factoriser 4 par 4 les termes de l'écriture polynomiale, car $2^4 = 16^1$:

$$\begin{array}{rlll} N = & ... + & a_7.2^7 + a_6.2^6 + a_5.2^5 + a_4.2^4 & + \quad a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \\ = & ... + & (a_7.2^3 + a_6.2^2 + a_5.2^1 + a_4.2^0).2^4 & + \quad (a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0) \\ = & ... + & A_1.16^1 & + \quad A_0.16^0 \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= a_7.2^3 + a_6.2^2 + a_5.2^1 + a_4.2^0 \\ A_0 &= a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \end{aligned}$$

Les A_i sont la décomposition polynomiale d'un nombre de 4 chiffres binaires, qu'on peut écrire avec un (seul) chiffre de la base 16.