

Exercice ► Calculs en utilisant la table

Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) telle que

$$X \sim \mathcal{N}(9, 2^2)$$

1. Calculer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite,

$$\mathbb{P}(X \leq 11), \mathbb{P}(X \geq 5), \mathbb{P}(5 \leq X \leq 9) \text{ et } \mathbb{P}(7 \leq X \leq 15)$$

2. Déterminer λ et α tels-que

$$\mathbb{P}(X \leq 7) = \lambda \text{ et } \mathbb{P}(X \leq \alpha) = 0.2$$

Solution :

1. On centre et on réduit, puis on utilise la table (Z désignera la v.a.r suivant une loi normale centrée réduite)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 11) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-9}{2} \leq \frac{11-9}{2}\right) & \mathbb{P}(X \geq 5) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-9}{2} \geq \frac{5-9}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 1) & &= \mathbb{P}(Z \geq -2) \\ &= 0.8413 & &= \mathbb{P}(Z \leq 2) \\ & & &= 0.9772 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(5 \leq X \leq 9) &= \mathbb{P}\left(\frac{5-9}{2} \leq \frac{X-9}{2} \leq \frac{9-9}{2}\right) & \mathbb{P}(7 \leq X \leq 15) &= \mathbb{P}\left(\frac{7-9}{2} \leq \frac{X-9}{2} \leq \frac{15-9}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 0) & &= \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 3) \\ &= \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2) & &= F_Z(3) - F_Z(-1) \\ &= 0.9772 - 0.5 & &= F_Z(3) - (1 - F_Z(1)) \\ & & &= 0.9987 + 0.8413 - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 7) = \lambda &\implies \mathbb{P}\left(\frac{X-9}{2} \leq \frac{7-9}{2}\right) = \lambda \\ &\implies \mathbb{P}(Z \leq -1) = \lambda \\ &\implies 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1) = \lambda \\ &\implies \lambda = 1 - 0.8413 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 0.2 \implies \mathbb{P}\left(\frac{X - 9}{2} \leq \frac{\alpha - 9}{2}\right) = 0.2$$

$$\implies \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\alpha - 9}{2}\right) = 0.2$$

$$\implies \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{\alpha - 9}{2}\right) = 0.8$$

$$\implies -\frac{\alpha - 9}{2} = 0.84$$

$$\implies \alpha = 2 \times 0.84 + 9$$