

Définition 1. Soient deux entiers a et b avec b strictement positif. Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est déterminer l'unique couple d'entiers (q, r) tel que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

q est appelé le quotient de a par b et r le reste de la division de a par b .

Exercice 1. On donne $3782 = 251 \times 15 + 17$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3782 par 251.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3782 par 15.

Définition 2. Si m est le reste dans la division euclidienne de a par b , alors on note $a \equiv m \pmod{b}$ ou $a \equiv m \pmod{[b]}$. On dit que a est **congru à m modulo b** .

Exemple 1. $145 = 13 \times 11 + 2$ donc $145 \equiv 2[13]$.

Exercice 2. Compléter les égalités suivantes :

1. $86 \equiv \dots [8]$.
2. $25 \equiv \dots [8]$.
3. $111 \equiv \dots [8]$.

Proposition 1. Soient quatre entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors

1. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
2. $ac \equiv bd \pmod{n}$.
3. $ka \equiv kb \pmod{n}$.
4. $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a^p \equiv b^p \pmod{n}$.

Exercice 3. On considère deux entiers a et b tels que $a \equiv 2 \pmod{9}$ et $b \equiv 5 \pmod{9}$. Démontrer que $25a + 8b \equiv 0 \pmod{9}$.

Exercice 4. Montrer que $35^{228} + 84^{501} \equiv 0 \pmod{17}$, puis que $2305^{2019} + 1106^{2019} \equiv 0 \pmod{9}$.

Définition 3. Étant donné deux entiers a et b dont l'un au moins des deux est non nul, l'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément, que l'on appelle **plus grand commun diviseur** à a et b et que l'on note $\text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 5. Déterminer les diviseurs de 48 et 27. En déduire leur pgcd .

Définition 4. On dit que les entiers a et b sont **premiers entre eux** si, et seulement si,

$$\text{pgcd}(a, b) = 1.$$

Définition 5. – On dit que $p \in \mathbb{N}^*$ est un **nombre premier** si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs dans \mathbb{N} : 1 et lui-même.

– Un nombre qui n'est pas premier est dit **composé**.

Exercice 6. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 50.