Exercice 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la donnée de $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

1. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives.
2. Etudiez les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
3. Vérifiez que $u_1 < u_0$ puis démontrer par récurrence, en utilisant le sens de variation de f, que la suite est décroissante.

Correction :

1. La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = 5$. Supposons la propriété vraie pour un entier naturel n. $u_n \geq 0$ entraîne $u_n + 1 \geq 0$ et $u_n + 2 \geq 0$ ce qui entraîne $\dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} = un + 1 \geq 0$. On a donc démontré par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
2. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
   Pour étudier les variations de la fonction f, calculons sa dérivée.
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} && (1) \\ &= \frac{1}{(x+2)^2} && (2) \end{aligned}$$
   La fonction f est donc strictement croissante sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition qui est $\mathbb{R} - \{-2\}$, donc en particulier sur $\mathbb{R}^+$.
3. Par hypothèse $u_0 = 5$
   $u_1 = \frac{5+1}{5+2} = \frac{6}{7} < 5$, donc on a bien $u_1 < u_0$.
   Supposons que pour un entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
   D'après la question 1., u_{n+1} et u_n appartiennent à $\mathbb{R}^+$ et d'après la question 2.,
   la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui entraîne :
   $f(u_{n+1}) < f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$.
   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} < u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la donnée de $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})$.

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.
   Étudier les variations de la fonction f.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, +\infty]$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \quad (3)\\ f'(x) =& \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x^2}) \quad (4)\\ =& \frac{1}{2}(\frac{x^2-1}{x^2}) \quad (5) \end{aligned}$$

   La fonction f' est strictement positive sur l'intervalle $]1, +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
   On a par ailleurs $f(1) = 1$ et $\underset{x\to+\infty}{Lim} f(x) = +\infty$.
2. Commençons par initialiser la récurrence : $u_0 = 2$, donc $u_0 \in]1, +\infty[$.
   Supposons que pour un entier naturel n, $u_n \in [1, +\infty[$.
   D'après le tableau de variation de la fonction f, $x \in]1, +\infty[$ entraîne $f(x) \in]1, +\infty[$.
   On en déduit que $u_n \in]1, +\infty[$ entraîne $f(u_n) \in]1, +\infty[$.
   Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, on a démontré $u_n \in]1, +\infty[$ entraîne $u_{n+1} \in]1, +\infty[$, donc, par récurrence, $u_n \in [1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Calculons d'abord u_1.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) \quad (6)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \quad (7)\\ &= \frac{5}{4} \quad \text{qui est strictement inférieur à 2.} \quad (8) \end{aligned}$$

   La récurrence est donc initialisée : $u_1 < u_0$.
   Supposons que pour un entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
   La fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, u_n et u_{n+1} appartiennent à cet intervalle, donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ ce qui est équivalent à $u_{n+2} < u_{n+1}$.
   On a donc démontré par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in \,]0,1[$ par $f(x) = x(1-x)$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = x(1-x)$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Plus précisément, démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{4}.$$
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Correction :

1. Commençons par calculer la fonction dérivée de la fonction f :
   $f(x) = x(1-x) = x - x^2$.
   $f'(x) = 1 - 2x$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$ si $x \in]0,\frac{1}{2}[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]\frac{1}{2},1[$.
   On en déduit le tableau de variation de f qui montre que :
   $\forall x \in]0,1[$, $0 < f(x) \leq \frac{1}{4}$.
   On va démontrer par récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$.
   $u_0 \in]0,1[$ par hypothèse, donc $u_1 = f(u_0) \in]0,\frac{1}{4}]$.
   La récurrence est initialisée.
   Supposons $u_n \in]0,\frac{1}{4}]$.
   L'intervalle $]0,\frac{1}{4}]$ est contenu dans l'intervalle $]0,1[$, donc, toujours d'après le tableau de variation
   de f, $f(u_n) \in]0,\frac{1}{4}]$.
   $f(u_n) = u_n(1-u_n) = u_{n+1}$ donc la propriété est héréditaire.
   On a donc démontré par récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,\frac{1}{4}]$ ce qui est équivalent à l'encadrement demandé.
2. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n(1-u_n) && (9)\\ &= u_n - u_n^2 && (10) \end{aligned}$$
   On en déduit que $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$ qui est un nombre réel strictement négatif.
   Donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite est strictement décroisssante.

Exercice 4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Démontrer que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Correction :

1. Démontrons la propriété par récurrence. Par hypothèse, $u_0 \in \mathbb{R}^{*+}$, la récurrence est initialisée.
   Supposons que pour un entier naturel n, $u_n \in \mathbb{R}^{*+}$.
   $e^{-u_n} \in \mathbb{R}^{*+}$, puisque la fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, donc $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \in \mathbb{R}^{*+}$.
2. Puisque u_n n'est jamais nul, on peut faire le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$.
   D'après ce qui précède, $-u_n < 0$, donc $e^{-u_n} < 1$.
   On en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et puisque $u_n > 0$, on obtient en multipliant l'inégalité par
   u_n : $u_{n+1} < u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.
3. On a déjà vu que $u_n > 0$.
   De plus la suite est décroissante, donc $u_n < u_1$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.