Exercice 1 Soit X une v.a. suivant une loi normale centrée réduite, $X \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$, calculez en utilisant la table :

1. $\mathbb{P}(X \geq 0)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. $\mathbb{P}(X \leq -1,56)$.
4. $\mathbb{P}(X > 1,62)$
5. $\mathbb{P}(X > 1,31)$.
6. $\mathbb{P}(1,5 \leq X \leq 2)$.
7. $\mathbb{P}(-1,7 \leq X \leq -1)$
8. $\mathbb{P}(-1,5 \leq X \leq 2)$.

Exercice 2 Soit X une v.a. suivant une loi normale centrée réduite, $X \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$, déterminer grâce à la table x_0 tel que

1. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,5$
2. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,68$
3. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,95$
4. $\mathbb{P}(-x_0 \leq x \leq x_0) = 0,997$

Exercice 3 Soit X une v.a.r. suivant une loi $\mathcal{N}(2, 3^2)$, $(X \sim \mathcal{N}(2, 3^2))$. Calculer

1. $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 3)$.

Exercice 4 Le temps nécéssaire aux étudiants pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale, de moyenne 90 minutes et d'écart type 15 minutes.

1. Quelle est la proportion des étudiants qui terminent l'épreuve en moins de 2 heures.
2. Quelle devrait être la durée de l'épreuve si l'on souhaite 90% des étudiants puissent la terminer.

Exercice 5 La note obtenue par des étudiants à un examen est une v.a.r. normale $X \sim \mathcal{N}(7, 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10, et la note en dessous de laquelle se trouvent 10 % des étudiants.
2. Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Z = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50 % et 7 ?
   <u>Indication :</u> calculer $\mathbb{E}(Z)$ *et* $Var(Z)$ *en fonction de* $\mathbb{E}(X)$ *et* $Var(X)$.

Exercice 6 L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Cette durée de vie suit une loi normale d'écart type $\sigma = 300$

1. Quel est le nombre de lampes hors d'usage au bout de 700h ? de 1500h ? de 3000h ?
2. Au bout de combien d'heures 5% sont hors d'usage ?
3. D'autres ampoules ont une durée de vie qui suit une loi $\mathcal{N}(1100, 400)$. Quelles ampoules faut-il choisir si l'on veut :
   i) Que la durée de vie moyenne soit maximale.
   ii) Que la durée pendant laquelle 95% des ampoules fonctionnent soit maximale.

Exercice 7 Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a.r X. La mediane de X est la valeur m telle que $F_X(m) = \frac{1}{2}$, on a alors $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X > m) = \frac{1}{2}$. Trouver m dans chacun des cas suivants

1. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$.
2. X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Solution 1.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{x} \mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt \end{aligned}$$

on distingue alors les cas :
i) $x \in]-\infty, a[$ dans ce cas $F_X(x) = 0$
ii) $x \in [a, b]$ dans ce cas

$$F_X(x) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

iii) enfin $x \in]b, +\infty[$, $F_X(x) = 1$.
on voit donc qu'il faut chercher m dans $[a, b]$, on veut

$$F_X(m) = \frac{m-a}{b-a} = 1/2$$

d'où

$$m = \frac{b+a}{2}$$

2. Il suffit de centrer et réduire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq m) &= \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{m-\mu}{\sigma}) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq \frac{m-\mu}{\sigma})\end{aligned}$$

Z étant la v.a. centrée réduite, on cherche donc $x_1 = \frac{m-\mu}{\sigma}$ tel que $\mathbb{P}(Z \leq x_1) = 1/2$, la table donne $x_1 = 0$ et donc $m = \mu$ (c'etait prévisible, il suffit de regarder le garphique d'une densité de loi normale !).

3. on avait trouve (Cf fiche 3) la fonction de répartition pour une distribution exponentielle

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

d'où

$$F_X(m) = 1/2 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda m} = 1/2$$

soit $m = \dfrac{ln2}{\lambda}$

Exercice 8 Soit X une v.a.r. de fonction de répartition

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin^2(\pi x/2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour que $X < 1/4$.

Solution 1. La densité de probabilité de X est la dérivée de la fonction de répartition, d'où

$$f_X(x) = (F_X)' = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\pi \sin(\pi x/2)\cos(\pi x/2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.
$$\mathbb{P}(X < 1/4) = F_X(1/4) = \sin^2(\pi/8)$$

Exercice 9 Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F_X. Soient a et b deux constantes quelconques, déterminer les fonctions de répartition des v.a.r. suivantes

$$Y = X + b, \quad Z = a.X \quad \text{et} \quad W = a.X + b$$

Solution On supposera $a \neq 0$ car sinon il n'y a rien à faire pour Z et W.

$$Y \leq x \Leftrightarrow X + b \leq x \Leftrightarrow X \leq x - b$$

d'où

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x - b) = F_X(x - b)$$

de même $Z \leq x \Leftrightarrow X \leq x/a$ d'où

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x/a) = F_X(x/a)$$

et enfin, comme $W \leq x \Leftrightarrow a.X + b \leq x \Leftrightarrow X \leq (x - b)/a$ on a

$$F_W(x) = \mathbb{P}(W \leq x) = \mathbb{P}(X \leq (x - b)/a) = F_X((x - b)/a)$$

Exercice 10 Soit X une v.a.r. de densité f_X. Soient a et b deux constantes quelconques, déterminer les densités des v.a.r. suivantes

$$Y = X + b, \quad Z = a.X \quad \text{et} \quad W = a.X + b$$

Solution On supposera $a \neq 0$ car sinon il n'y a rien à faire pour Z et W. Grâce à l'exercice précédent on connait les fonctions de répartitions de ces v.a.r., il suffit donc de les dériver pour obtenir les densités associés :

$$f_Y(x) = (F_{X+b}(x)) = (F_X(x - b))' = f_X(x - b)$$

de même

$$f_Z(x) = (F_{aX}(x))' = (F_X(x/a))' = 1/a f_X(x/a)$$

et enfin

$$f_W(x) = (F_{aX+b}(x))' = (F_X((x - b)/a))' = 1/a f_X((x - b)/a)$$