Principales Lois et Valeures Moyennes

Sommaire

1 Principales lois de probabilité

Lois discrètes finies

1.1 Loi de Bernoulli

- **Loi de Bernoulli :** $\mathcal{B}(1,p)$ $p \in]0,1[$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p (on note $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$ avec $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$.
Cette loi modélise l'issue d'une expérience en ne s'intéressant qu'au “succès” ou à l' “échec” de l'expérience.

1.2 Loi binomiale

- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0,1[$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p) (on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si elle est à valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$ avec

$$\forall i = 0,\ldots,n \;\; \mathbb{P}(X=i) = C_n^i p_i (1-p)^{n-i}$$

Cette loi modélise une succession de “succès” et d”'échecs”, p étant la probabilité du succès.

1.3 Loi Uniforme

- **Loi uniforme sur** $\{1,\ldots,N\}$

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$ (on note $X \sim \mathcal{U}_N$) si elle est à valeurs dans $\{1,\ldots,N\}$ avec

$$\forall k \in \{1,\ldots,N\} \;\; \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{N}$$

Cette loi modélise l'issue d'une expérience où les résultats sont équiprobables.

1.4 Loi Géométrique

V.A.R. “infinies dénombrables”
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$ La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi géométrique de paramètre p (on note $X \sim \mathcal{G}(p)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \;\; \mathbb{P}(X=i) = p(1-p)^{i-1}$$

. Cette loi modélise une série d' “échecs” suivie du premier “succès”.

1.5 Loi de Poisson

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0$
on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

C'est l'une des lois discrètes les plus utilisées en modélisation, en particulier pour les files d'attente, elle régit par exemple le nombre d'accidents, les déchets de fabrication, les appels téléphoniques à un standard… Cette loi est aussi appelée loi des événements rares.

1.6 Loi Uniforme continue

Variables aléatoires continues
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$) si elle est à valeurs dans $[a, b]$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$$

Sa fonction de répartition

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b \end{cases} \tag{1}$$

1.7 Loi Normale

Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2), \quad m \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0$
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) (on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette loi est parfois appelée loi de Laplace-Gauss.

La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi de Cauchy si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

1.8 Loi Gamma

Loi Gamma, $\Gamma(a, b), \quad a > 0, \quad b > 0$
La v.a.r. X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suit une loi Gamma de paramètres (a, b) (on note $X \sim \Gamma(a, b)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a t^{a-1} e^{-bt} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

où

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du, \quad \forall a > 0.$$

La fonction Γ prolonge la fonction factorielle sur l'ensemble des réels au sens où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n! \text{ et } \forall a > 0, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

. De plus, on a

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{(}\pi)$$

2 Valeurs moyennes

2.1 Espérence

Définition *Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
Si X est une v.a.r. discrète, on appelle espérence de X et on note $\mathbb{E}(X)$, la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités de réalisation
autrement dit, lorsque cette quantité existe,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i\mathbb{P}(X = i)$$

Définition *De même, si X est une v.a.r. continue de densité f_X, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$, lorsqu'elle existe, la quantité*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Attention, cette quantité peut ne pas exister.

Soit la v.a. continue de densité

$$f_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sa moyenne est alors donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$$

Propriétes de l'espérance

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

- $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$

- Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

- $\mathbb{E}(a) = a$

Attention $\mathbb{E}(a)$ existe.

Généralisation.

Définition *Soit X une v.a.r. et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. L'espérance de $g(X)$ est définie par (lorsqu'elle existe)*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} g(i).\mathbb{P}(X = i) && \textit{Si } X \textit{ v.a. discrète} \\ \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f_X(x)dx && \textit{Si } X \textit{ v.a. continue} \end{aligned}$$

2.2 Variance

Mesure "l'éparpillement" ou la "dispersion" de X autour de la moyenne

Définition *Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
La variance de la v.a.r. X est définie, lorsque cette quantité existe, par

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

ou encore, en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}(X)$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Propriétés

$$\begin{array}{ll} Var(X) & \text{n'existe pas toujours} \\ Var(X) \geq 0 & \\ Var(X + \lambda) & = Var(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ Var(\lambda X) & = \lambda^2 Var(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ X \text{ v.a. constante} & \Leftrightarrow Var(X) = 0 \end{array}$$

Définition *Soit X une v.a.r. telle que Var(X) existe. L'écart-type de X est défini par*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Mesure aussi "l'éparpillement" ou la "dispersion" de X autour de la moyenne.
On l'utilise plus souvent que la variance. Loi $\mathcal{B}(1, p)$: Espérance p ; Variance $p(1 - p)$
Loi $\mathcal{B}(n, p)$: Espérance np ; Variance $np(1 - p)$
Loi $\mathcal{P}(\lambda)$: Espérance λ ; Variance λ
Loi $\mathcal{U}([a, b])$: Espérance $\frac{a+b}{2}$; Variance $\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi $\mathcal{E}(\lambda)$: Espérance $\frac{1}{\lambda}$; Variance $\frac{1}{\lambda^2}$
Loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$: Espérance m ; Variance σ^2

Corollaire *Si X est une v.a.r. pour laquelle $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$ existent, alors la v.a.r. Y définie par*

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$$

est appelé v.a.r. centrée réduite associée à la v.a.r X. Elle vérifie

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \quad \textit{et} \quad Var(Y) = 1$$

Réduction d'une loi Normale $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Il suffit de poser

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

On a alors

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

. La fonction de répartition $F_Z = \Phi$ de Z est donnée par les tables. Comment en déduire celle de X ?

Il suffit d'ecrire :

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{a - m}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{a - m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

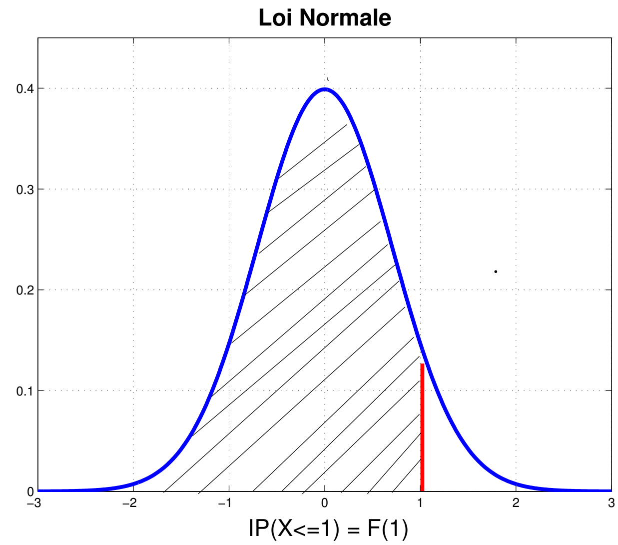
De la même manière

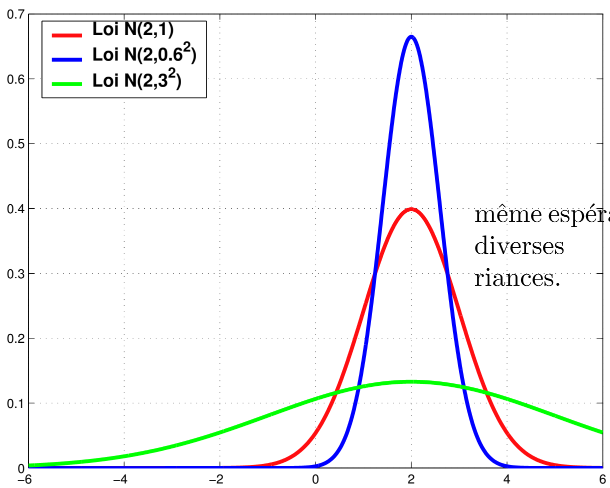
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a - m}{\sigma} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{b - m}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a - m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\sigma = 2$.
on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(\frac{X - 1}{2} \leq \frac{1 - 1}{2}) \\ &= \mathbb{P}(\frac{X - 1}{2} \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 0) \\ &= \Phi(0) = 0.5 \ \text{ Cf tables} \end{aligned}$$

On peut calculer de la même manière $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.





même espérance, diverses variances.

Exercice récapitulatif
Variable aléatoire exponentielle.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ssi elle admet comme densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Écrire la fonction de répartition de X.

Solution

1.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \\ &= \lambda \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(on peut aussi l'intégrer en remarquant qu'elle s'ecrit $u'\ e^u$) f_X est donc bien une densité de probabilité.

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx \end{aligned}$$

On intègre par parties en posant

$u = -x \quad v' = -\lambda e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned} &= \left[x\, e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx \\ &= 0 + \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

même type de calcul pour la variance en utilisant la formule de Koenig, on trouve

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$