DÉFINITION 1 *Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La variance de la v.a.r. X est définie, lorsque cette quantité existe, par*

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

ou encore, en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}(X)$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

On peut alors vérifier que

$$\begin{array}{lcll} Var(X) \geq 0 & & & \\ Var(X+\lambda) & = & Var(X) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ Var(\lambda X) & = & \lambda^2 Var(X) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercice 1 La note obtenue par des étudiants à un examen est une v.a.r. normale $X \sim \mathcal{N}(7, 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10, et la note en dessous de laquelle se trouvent 10 % des étudiants.
2. Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Z = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50 % et 7 ? *(Indication : calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$).*

Solution 1. On cherche $\mathbb{P}(X \geq 10)$, il suffit de centrer et réduire pour se ramener à une v.a. normale centrée réduite (on la notera dans cet exercice Y)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 10) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-7}{3} \geq \frac{10-7}{3}\right) \\ &= \mathbb{P}(Y \geq 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) \\ &= 1 - F_Y(1) \\ &\quad \text{On consulte la table} \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

environ 16% des étudiants ont plus de 10.

On cherche maintenant x_0 tel que $\mathbb{P}(X \leq x_0) = 0.1$, on centre et on réduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x_0) &= \mathbb{P}(\frac{X-7}{3} \leq \frac{x_0-7}{3}) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq \frac{x_0-7}{3}) \end{aligned} \quad (1)$$

on a donc $\mathbb{P}(Y \leq \frac{x_0-7}{3}) = 0.1$, en consultant la table on trouve (on cherche plutot x_1 tel que $\mathbb{P}(Y \leq \frac{x_1}{)} = 0.9$, on aura alors $\frac{x_0-7}{3} = -x_1$, vous pouvez vous en convaincre sur le graphique de la loi normale)

$$\frac{x_0-7}{3} = -1.28$$

on en déduit alors x_0.

2. calculons d'abord $\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$. Compte tenu des propriétés de l'espérance et de la variance

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b = 7a + b$$

de même

$$Var(Z) = Var(aX+b) = a^2Var(X) = 9a \quad \text{d'où} \quad \sigma_Z = |a|\sigma_X = 3a$$

On veut $\mathbb{P}(Z \geq 10) = 0.5$ et $\mathbb{P}(Z \leq 7) = 0.1$, soit (on centre et réduit)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \geq 10) = 0.5 &\Rightarrow \mathbb{P}(Y \geq \tfrac{10-7a-b}{3a}) = 0.5 \\ &\Rightarrow \frac{10-7a-b}{3a} = 0 \ \text{(Cf tables)} \\ &\Rightarrow 7a + b = 10 \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq 7) = 0.1 &\Rightarrow \mathbb{P}(Y \leq \tfrac{7-7a-b}{3a}) = 0.1 \\ &\Rightarrow \tfrac{7-7a-b}{3a} = -1,28 \ \text{(Cf question 1)} \\ &\Rightarrow 3,16a + b = 7 \end{aligned}$$

On résout alors le système

$$\begin{cases} 7a + b &= 10 \\ 3,16a + b &= 7 \end{cases}$$

et on trouve a et b.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans les nombres naturels. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Solution Cette v.a. est discrète, son espérance est donnée par

$$Ee(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n).$$

que l'on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} Ee(X) & = & \mathbb{P}(X = 1) \\ & + & \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 2) \\ & + & \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 3) \\ & \vdots & \\ & + & \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = k) + \ldots \text{(k fois)} \\ & \vdots & \end{array}$$

la première colonne du terme de droite correspond alors à $\mathbb{P}(X \geq 1)$, la deuxième à $\mathbb{P}(X \geq 2)$ etc ...d'où le résultat annoncé.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \\ \dfrac{\alpha}{2x} - 1 & \text{si } x \in]-2, -1] \\ 1 & \text{si } x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α et la densité de probabilité f_X de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
3. Soit $\beta \in \mathbb{R}_+$, déterminer l'ensemble des valeurs de β pour lesquelles $\mathbb{P}(-\beta \leq X \leq \beta) = \beta$.

Exercice 4 Variable aléatoire normale (gaussienne). On dit que la variable aléatoire réelle X suit une loi normale $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si elle admet la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

1. On admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Vérifier que $f_X(x)$ est une densité.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Solution 1.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

on pose alors

$$y = \frac{(x-m)}{\sigma}$$

d'où $dy = 1/\sigma dx$, en faisant donc ce changement d'inconnue (y aussi varie de $-\infty$ à $+\infty$), l'intégrale précédente devient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\sigma dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy\\ &= 1 \text{ (d'après l'indication).}\end{aligned}$$

2. Pour calculer l'espérance de X il faut calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

il suffit alors d'écrire cette intégrale sous la forme $u' e^u$ dont une primitive est e^u :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{(m-x)}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\right.\\ &+ \left.\frac{m}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\right]dx\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma^2\left[\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}\\ &+ \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx\\ &= 0 + m\end{aligned}$$

3. le calcul de la variance se fait en utilisant une intégration par parties (on pourra utiliser la formule de Koenig, et reproduire une démonstration semblable à la précédente), on trouve

$$Var(X) = \sigma_X^2$$

Exercice 5 Variable aléatoire uniforme sur [a, b].
On dit que la variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme sur $[a, b]$) ($X \sim \mathcal{U}([a, b])$) si elle est à valeurs dans $[a, b]$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Solution D'abord f_X est bien une densité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1$$

1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt \\ &= \int_a^b t\frac{1}{b-a}dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\frac{1}{b-a}.\mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \int_a^b t^2\frac{1}{b-a}dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Exercice 6 Variable aléatoire de Cauchy.
La v.a.r. X suit une loi de Cauchy si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec pour densité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

Montrer que X n'admet pas d' espérance mathématique.

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{t}{\pi(1+t^2)}dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}dt
\end{aligned}$$

or

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{2\pi}\left[ln(1+t^2)\right]_0^{+\infty} = \infty$$

donc X n'admet pas d'espérance mathématique.

Exercice 7 Variable aléatoire exponentielle.
On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ssi elle admet comme densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Écrire la fonction de répartition de X.

Solution 1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(on peut aussi l'intégrer en remarquant qu'elle s'ecrit $u'\ e^u$) f_X est donc bien une densité de probabilité.

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx
\end{aligned}$$

On intègre par parties en posant

$u = -x \quad v' = -\lambda e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned}
&= \left[x\, e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx \\
&= 0 + \left[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

même type de calcul pour la variance en utilisant la formule de Koenig, on trouve

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$