Soluciones a ejercicios seleccionados de sucesiones (Práctica 3)

38. En cada caso, determinar si la sucesión converge o diverge y en caso de ser convergente hallar el límite:

ii. $a_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Sabemos que $0 \leq a_n$ ya que $n \in \mathbb{N}$. Además $n \leq 2^n$, entonces $0 \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, y la sucesión $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge a 0. Aplicando el teorema de intercalación para sucesiones resulta la sucesión a_n convergente y su límite es 0.

ix. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

Observemos que $(-1)^n = 1$ si n es par y $(-1)^n = (-1)$ si n es impar. Luego, consideramos dos "subsucesiones" de $\{a_n\}$ formadas respectivamente por los términos pares y los impares de ésta. Formalmente, definimos $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tales que $b_n = a_{2n}$ y $c_n = a_{2n-1}$.

Entonces

$$b_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{1+(-1)^{2n}}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{2}{2} = \frac{1}{2n} + 1$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} + 1 = 1.$$

Es decir que la sucesión $\{b_n\}$ converge a 1.

Por otro lado,

$$c_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1+(-1)^{2n-1}}{2} = \frac{-1}{2n-1} + \frac{0}{2} = \frac{1}{2n}$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Es decir que la sucesión c_n converge a 0.

Como $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ convergen a límites distintos, no puede existir $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Por lo tanto a_n es una sucesión oscilante.

x. $a_n = n^{(-1)^n}$.

Nuevamente, como en el ejercicio anterior, consideramos sucesiones $b_n = a_{2n}$ y $c_n = a_{2n-1}$. Entonces $b_n = (2n)^{(-1)^{2n}} = 2n$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, es decir que la sucesión b_n diverge a $+\infty$.

Por otro lado, $b_n = (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} = (2n-1)^{-1} = \frac{1}{2n-1}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, es decir que la sucesión c_n converge a 0.

Como b_n diverge y c_n converge, no puede existir el límite de la sucesión a_n. Por lo tanto a_n es una sucesión oscilante.

Nota: No es cierto que cuando en la sucesión a_n aparezca un término de la forma $(-1)^n$, la sucesión a_n es oscilante, como veremos en el siguiente ejercicio. Es importante primero analizar el límite de la sucesión original.

xvi. $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$.

En este caso es sencillo calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \underset{CLL}{=} \lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{(-1)^n}{n} = 2.$$

Luego la sucesión a_n converge a 2.

39. Sabiendo que $\{a_n\}$ converge, que $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{a_n}$, hallar el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Que la sucesión a_n sea convergente, es equivalente a decir que existe y es finito $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. La idea será aplicar límite a ambos lados de la igualdad $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{a_n}$ y obtener una ecuación de la cuál despejar el valor de L. Para esto, veamos que existe el límite de $\frac{1}{a_n}$.

Observemos que $a_n > 0$, luego $\frac{1}{a_n} > 0$ y resulta $a_{n+1} > 3$, entonces L>0. Por álgebra de límites $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$.

Ahora aplicando límite a ambos lados de la igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{a_n} \\
L &= 3 + \frac{1}{L} \\
L - 3 &= \frac{1}{L} \\
(L-3)L &= 1 \\
L^2 - 3L - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Aplicando resolvente a la ecuación de segundo grado, obtenemos dos soluciones $L = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. Como $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$, debe ser $L = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

40. Probar que las siguientes sucesiones son monótonas y acotadas y hallar su límite:

Por definición, una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si $a_{n+1} > a_n$ para todo n; o, equivalentemente, si $a_{n+1} - a_n > 0$. Análogamente para sucesiones decrecientes. Es decir que para los ejercicios que siguen, analizaremos el signo de $a_{n+1} - a_n$.

-a- $a_n = \frac{2n-1}{3n+3}$

Entonces $a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+3} = \frac{2n+2-1}{3n+3+3} = \frac{2n+1}{3n+6}$.

Y calculamos $a_{n+1} - a_n$,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+1}{3n+6} - \frac{2n-1}{3n+3} = \frac{(2n+1)(3n+3) - (2n-1)(3n+6)}{(3n+6)(3n+3)} \\
&= \frac{(6n^2+6n+3n+3) - (6n^2+12n-3n-6)}{(3n+6)(3n+3)} \\
&= \frac{(6n^2+9n+3) - (6n^2+9n-6)}{(3n+6)(3n+3)} \\
&= \frac{6n^2-6n^2+9n-9n+3+6}{(3n+6)(3n+3)} \\
&= \frac{9}{(3n+6)(3n+3)}
\end{aligned}$$

Los factores en el denominador $(3n+6)$ y $(3n+3)$ son positivos y $9 > 0$, entonces $a_{n+1} - a_n > 0$

Por lo tanto la sucesión a_n es creciente

-c- $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}\ n \geq 1$.

En este caso, probaremos que $a_{n+1} - a_n > 0$ por inducción.

Para $n = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1 + a_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y resulta $a_2 - a_1 > 0$.

Supongamos ahora que $a_n - a_{n-1} > 0$ y analicemos $a_{n+1} - a_n$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sqrt{1+a_n} - \sqrt{1+a_{n-1}} \\
&= \sqrt{1+a_n} - \sqrt{1+a_{n-1}} \frac{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} \\
&= \frac{(\sqrt{1+a_n} - \sqrt{1+a_{n-1}})(\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}})}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} \\
&= \frac{\sqrt{1+a_n}^2 - \sqrt{1+a_{n-1}}^2}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} \\
&= \frac{(1+a_n) - (1+a_{n-1})}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} \\
&= \frac{1+a_n - 1 - a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} \\
&= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}}
\end{aligned}$$

El denominador es positivo, pues es suma de raíces y estás son positivas, y el denominador es positivo por hipótesis de inducción. Es decir que $a_{n+1} - a_n > 0$.

Por lo tanto la sucesión a_n es creciente.