

Apuntes Cálculo Dif. e Int. II

Héctor G. T. Torres

Contents

| | |
|---|----------|
| Recordar | 1 |
| Def de Función acotada | 1 |
| Notación de Sumas (Notación Sigma) | 1 |
| Def Notación Sigma | 1 |
| Teo Propiedades de la suma | 1 |
| Teo Fórmulas importantes | 1 |
| Integrales | 1 |
| Def de Partición | 1 |
| Def Suma por arriba y abajo | 2 |
| Teo | 2 |
| Def Función integrable | 2 |
| Teo Continuidad | 2 |
| Teo Discontinuidades finitas | 2 |
| Sumas de Riemann | 3 |
| Def Partición regular | 3 |
| Def Sumas de Riemann | 3 |
| Teo Sumas de Riemann e Integrales | 3 |
| Área bajo la curva | 3 |
| Def Área bajo la curva | 3 |
| Corolario | 3 |
| Teo Igualdad de funciones integrables | 4 |
| Propiedades de la Integral | 4 |
| Teorema Fundamental del Cálculo | 4 |
| Teo T. F. C. Parte 1 | 4 |
| Teo T. F. C. Parte 2 | 4 |
| Def Integral Indefinida (antiderivada) | 5 |
| Teo Igualdad de antiderivadas | 5 |
| Lista de antiderivadas | 5 |
| Cotas | 5 |
| Teo | 5 |
| Corolario | 5 |
| Corolario | 5 |
| Teo Teorema del Valor Medio para Integrales | 5 |
| Composición de Funciones en Integrales | 6 |
| Teo Regla de Leibinz | 6 |

| | |
|-------------------------------------|----------|
| Diferenciales | 6 |
| Def | 6 |
| Reglas para diferenciales | 6 |

Recordar

Def de Función acotada

Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función acotada** si

$$\begin{aligned} \exists M \in \mathbb{R}^+ \wedge N < 0 \in \mathbb{R} \\ \wedge N < f(x) < M \forall x \in A \end{aligned}$$

Notación de Sumas (Notación Sigma)

Def Notación Sigma

La suma de n términos a_1, a_2, \dots, a_n se escribe

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

donde i es el índice de la suma, a_i es el i -ésimo término, el límite inferior de la suma es 1 y el límite superior es n .

Teo Propiedades de la suma

1. $\sum_{i=1}^n c = nc$
2. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
3. $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

Teo Fórmulas importantes

1. $\sum_{i=1}^n c = nc$
2. $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Integrales

Def de Partición

Sea $[a, b]$ un intervalo. Una **partición** de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $P = t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b$ donde $t_0 = a < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = b$

Def Suma por arriba y abajo

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$. Definimos la **Suma por arriba** de f con respecto a P como

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

y la **Suma por debajo** como

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

donde

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$
$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

Teo

Sea P una partición de $[a, b]$ y Q una partición de $[a, b]$ con más puntos que P .

$$\implies \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$$

Def Función integrable

Se dice que una función f es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\inf\{\overline{S}(f, P)\} = \sup\{\underline{S}(f, P)\}$$

donde P es una partición de $[a, b]$.

En este caso, a dicho número en común se le denota como

$$\int_a^b f(x)dx$$

Teo Continuidad

Si f es continua en $[a, b] \implies f$ es integrable en $[a, b]$.

Teo Discontinuidades finitas

Si f es continua en $[a, b]$ excepto en una cantidad finita de puntos (discontinuidades finitas) entonces f es integrable en $[a, b]$.

Sumas de Riemann

Def Partición regular

Una partición de $[a, b]$ es **regular** si todos los subintervalos generados por la partición miden lo mismo. En ese caso, lo que mide cada intervalo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Def Sumas de Riemann

Sea f acotada en $[a, b]$. Una **Suma de Riemann** de f en $[a, b]$ es

$$SR = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

donde c_i es cualquier número en $[t_{i-1}, t_i]$.

Teo Sumas de Riemann e Integrales

Si f es continua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Obs En una partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Extremo derecho de cada subintervalo: $c_i = a + i\Delta x$

Extremo izquierdo de cada subintervalo: $c_i = a + (i-1)\Delta x$

Área bajo la curva

Def Área bajo la curva

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $f(x) \geq 0 \implies$ que el área entre el eje x , la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $x = b$ se define como

$$\text{área}(\mathbb{R}) = \int_a^b f(x) dx$$

Corolario

Si $f(x) \leq 0$, definimos el área bajo el eje x , sobre la gráfica de f y entre las rectas $x = a$ y $x = b$ como

$$\text{área} = - \int_a^b f(x) dx$$

Teo Igualdad de funciones integrables

Si f es continua en $[a, b]$ y es una función definida en $[a, b]$ t.q. $f(x) = g(x)$ excepto en un punto

$$\implies \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Propiedades de la Integral

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
6. f es integrable en $[a, b]$ y en $[b, c] \iff f$ es integrable en $[a, c]$ y además

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Teo T. F. C. Parte 1

Sea f continua en $[a, b]$. Entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ y además

$$F'(x) = f(x)$$
$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x)$$

Teo T. F. C. Parte 2

Si una función es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde

$$F(x)' = f(x)$$
$$\forall x \in [a, b]$$

Def Integral Indefinida (antiderivada)

Una función F es una **antiderivada** de f en un intervalo I si

$$F'(x) = f(x) \\ \forall x \in I$$

Teo Igualdad de antiderivadas

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I , entonces G es otra antiderivada de $f \iff G(x) = F(x) + c$

Lista de antiderivadas

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
4. $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$
5. $\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + c$
6. $\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c$
7. $\int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + c$

Cotas

Teo

Sea f continua en $[a, b]$ t.q. $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \iff m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Corolario

Sea $f(x) \geq 0$ y continua en $[a, b]$. Entonces, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Corolario

Sean f y g funciones continuas t.q. $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ entonces, $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Teo Teorema del Valor Medio para Integrales

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b] \implies$ existe un número $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Composición de Funciones en Integrales

En general,

$$F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

Teo Regla de Leibinz

Sea f continua en $[a, b]$ y $g(x), h(x)$ funciones derivables de $x \in [a, b]$. Entonces,

$$\frac{dx}{d} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

Diferenciales

Def

Se denota al **diferencial** de x como $dx = \Delta x$ y al **diferencial** de y como $dy = f'(x)dx$.

Reglas para diferenciales

Sean $u = f(x), v = g(x)$ funciones diferenciables de x ($\therefore du = f(x)dx, dv = g(x)dx$).

Entonces,

1. $d(u + v) = du + dv$
2. $d(uv) = du(v) + u(dv)$
3. $d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{du(v) - u(dv)}{v^2}$