Apuntes Cálculo Dif. e Int. II

Héctor G. T. Torres

Contents

Recordar

Def de Función acotada

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es una **función acotada** si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \wedge N < 0 \in \mathbb{R}$$
$$\wedge N < f(x) < M \forall x \in A$$

Notación de Sumas (Notación Sigma)

Def Notación Sigma

La suma de n términos $a_1, a_2, ..., a_n$ se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

donde i es el índice de la suma, a_i es el i-ésimo término, el límite inferior de la suma es 1 y el límite superior es n.

Teo Propiedades de la suma

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

Teo Fórmulas importantes

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Integrales

Def de Partición

Sea $[a, b]$ un intervalo. Una **partición** de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $P = t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_n = b$ donde $t_0 = a < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n = b$

Def Suma por arriba y abajo

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$. Definimos la **Suma por arriba** de f con respecto a P como

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

y la **Suma por debajo** como

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

donde

$$M_i = \sup\{f(x)|x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$
$$m_i = \inf\{f(x)|x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

Teo

Sea P una partición de $[a, b]$ y Q una partición de $[a, b]$ con más puntos que P.

$$\implies \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$$

Def Función integrable

Se dice que una función f es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\inf\{\overline{S}(f, P)\} = \sup\{\underline{S}(f, P)\}$$

donde P es una partición de $[a, b]$.

En este caso, a dicho número en común se le denota como

$$\int_a^b f(x)dx$$

Teo Continuidad

Si f es contínua en $[a, b] \implies f$ es integrable en $[a, b]$.

Teo Discontinuidades finitas

Si f es contínua en $[a.b]$ excepto en una cantidad finita de puntos (discontinuidades finitas) entonces f es integrable en $[a, b]$.

Sumas de Riemann

Def Partición regular

Una partición de $[a, b]$ es **regular** si todos los subintervalos generados por la partición miden lo mismo. En ese caso, lo que mide cada intervalo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Def Sumas de Riemann

Sea f acotada en $[a, b]$. Una **Suma de Riemann** de f en $[a, b]$ es

$$\mathrm{SR} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

donde c_i es cualquier número en $[t_{i-1}, t_i]$.

Teo Sumas de Riemann e Integrales

Si f es contínua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Obs En una partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Extremo derecho de cada subintervalo: $c_i = a + i\Delta x$
Extremo izquierdo de cada subintervalo: $c_i = a + (i-1)\Delta x$

Área bajo la curva

Def Área bajo la curva

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y $f(x) \geq 0 \implies$ que el área entre el eje x, la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $x = b$ se define como

$$\text{área}(\mathbb{R}) = \int_a^b f(x)dx$$

Corolario

Si $f(x) \leq 0$, definimos el área bajo el eje x, sobre la gráfica de f y entre las rectoas $x = a$ y $x = b$ como

$$\text{área} = -\int_a^b f(x)dx$$

Teo Igualdad de funciones integrables

Si f es contínua en $[a, b]$ y es una función definida en $[a, b]$t.q.$f(x) = g(x)$ excepto en un punto

$$\implies \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Propiedades de la Integral

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
6. f es integrable en $[a, b]$ y en $[b, c] \iff f$ es integrabe en $[a, c]$ y además

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Teo T. F. C. Parte 1

Sea f contínua en $[a, b]$. Entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es contínua en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ y además

$$F'(x) = f(x)$$
$$\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = f(x)$$

Teo T. F. C. Parte 2

Si una función es contínua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde

$$F(x)' = f(x)$$
$$\forall x \in [a, b]$$

Def Integral Indefinida (antiderivada)

Una función F es una **antiderivada** de f en un intérvalo I si

$$F'(x) = f(x)$$
$$\forall x \in I$$

Teo Igualdad de antiderivadas

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es otra antiderivada de $f \iff G(x) = F(x) + c$

Lista de antiderivadas

1. $\int 0dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
4. $\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$
5. $\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + c$
6. $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + c$
7. $\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc(x) + c$

Cotas

Teo

Sea f contínua en $[a, b]$ t.q. $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \iff m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Corolario

Sea $f(x) \geq 0$ y contínua en $[a, b]$. Entonces, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Corolario

Sean f y g funciones contínuas t.q. $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ entonces, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Teo Teorema del Valor Medio para Integrales

Si f es contínua en el intervalo cerrado $[a, b] \implies$ existe un número $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Composición de Funciones en Integrales

En general,

$$F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

Teo Regla de Leibinz

Sea f contínua en $[a, b]$ y $g(x), h(x)$ funciones derivables de $x \in [a, b]$. Entonces,

$$\frac{dx}{d} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

Diferenciales

Def

Se denota al **diferencial** de x como $dx = \Delta x$ y al **diferencial** de y como $dy = f'(x)dx$.

Reglas para diferenciales

Sean $u = f(x), v = g(x)$ funciones diferenciables de $x(\therefore du = f(x)dx, dv = g(x)dx)$.
Entonces,

1. $d(u+v) = du + dv$
2. $d(uv) = du(v) + u(dv)$
3. $d(\frac{v}{u}) = \frac{du(v)-u(dv)}{v^2}$

Integración por substitución (cambio de variable)

Recordar

$$u = g(x) \implies du = g'(x)$$

Teo Integración y u y du

Si $u = g(s)$ es una función derivable de x cuyo rango es un intervalo I, y f es contínua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Logaritmo Natural

Def

Definimos a la función **logaritmo natural** de x, denotada como $\ln(x)$, como

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \forall x > 0$$

Observación I

Por definición, $\text{Dom}(\ln(x)) = (0, \infty)$

Observación II

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$$
$$\therefore \ln(1) = 0$$

Observación III

$$\text{Si } x > 1 \implies ln(x) > 0$$

Observación IV

$$\text{Si } 0 < x < 1 \implies \ln(x) < 0$$

Teo Derivación de $\ln(x)$

$ln(x)$ es contínua y derivable en $(0, \infty)$, y además,

$$\frac{d}{dx}(ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Observación

Usando la regla de la cadena

$$(\ln(u(x)))' = \frac{1}{u(x)} * u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Teo Propiedades de Logaritmos

1. Si $x, y > 0$ entonces $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. Si $n \in \mathbb{Q} \wedge x > 0$ entonces $\ln(x^n) = n\ln(x)$
3. Si $x, y > 0$ entonces $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $\text{Dom}(\ln(x)) = (0, \infty)$
5. $\text{Im}(\ln(x)) = (-\infty, \infty)$
6. $ln(x)$ es creciente en todo su dominio
7. La gráfica de $\ln(x)$ es cóncava en todo su dominio

Def Número e

El número e denota al número real que complue $\ln(e) = 1$

Observación

$$\begin{aligned} &\ln(e) = 1 \\ \implies &\int_1^e dt = 1 \end{aligned}$$

Derivación Logarítmica

Teo

Si $u(x)$ es una función derivable de x, entonces $f(x) = \ln(|u(x)|)$ tiene derivada

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}, \forall x \text{ t.q. } |u(x)| \neq 0$$

Ejemplo

Supongamos que quiero derivar

$$f(x) = \frac{(x^2+1)^5 \sin(3x)}{\sqrt{(1-x)}}$$

$$\implies \ln(f(x)) = \ln(\frac{(x^2+1)^5 \sin(3x)}{\sqrt{(1-x)}})$$

$$\implies \ln(f(x)) = 5\ln(x^2+1) + \ln(\sin(3x)) - \frac{1}{2}\ln(1-x) \text{ Por propiedades de logaritmos}$$

$$\implies \ln'(f(x)) = [5\ln(x^2+1) + \ln(\sin(3x)) - \frac{1}{2}\ln(1-x)]'$$

$$\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = 5\frac{2x}{x^2+1} + \frac{cos(3x)}{\sin(3x)}3 - \frac{1}{2}\frac{-1}{1-x}$$

$$\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{10x}{x^2+1} + 3\cot(3x) + \frac{1}{2-2x}$$

$$\implies f'(x) = f(x)[\frac{10x}{x^2+1} + 3\cot(3x) + \frac{1}{2-2x}]$$

$$\implies f'(x) = (\frac{(x^2+1)^5 \sin(3x)}{\sqrt{(1-x)}})(\frac{10x}{x^2+1} + 3\cot(3x) + \frac{1}{2-2x})$$