Trucos, Teoremas y Definiciones

Según el Gran Cornejo

Contents

Propiedades del campo de los Números Reales

Suma

- **CS0** $\forall a, b \in \mathbb{R} \implies a + b \in \mathbb{R}$ **Cerradura de la suma**
- **CS1** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \implies a + (b + c) = (a + b) + c$ **Asociatividad de la suma**
- **CS2** $\exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{R}$ **Existencia del Neutro Aditivo**
- **CS3** $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : a + b = b + a = 0$ **Existencia del Inverso Aditivo**
- **CS4** $\forall a, b \in \mathbb{R} \implies a + b = b + a$ **Conmutatividad de la Suma**

Producto

- **CP0** $\forall a, b \in \mathbb{R} \implies ab \in \mathbb{R}$ **Cerradura del producto**
- **CP1** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \implies a(bc) = (ab)c$ **Asociatividad del producto**
- **CP2** $\exists 1 \in \mathbb{R} : ma = am = a$ **Existencia del Neutro Multiplicativo**
- **CP3** $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \exists b \in \mathbb{R} : ab = ba = 1$ **Existencia del Inverso Multiplicativo**
- **CP4** $\forall a, b \in \mathbb{R} \implies ab = ba$ **Conmutatividad del Producto**

Distributividad

- **CDi** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \implies a(b + c) = ab + ac$ **Distributividad del producto por la izquierda**
- **CDd** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \implies (a + b)c = ac + bc$ **Distributividad del producto por la derecha**

Desigualdad

Transitividad de la Desigualdad

- **DES1** $a < b \wedge b < c \therefore a < c$
- **DES1** $a \leq b \wedge b \leq c \therefore a \leq c$

Preservación de la Suma

- **DES2** $a < b \implies a + c < b + c$

- **DES2** $a \leq b \implies a + c \leq b + c$

Preservación de la Resta

- **DES3** $a < b \implies a - c < b - c$
- **DES3** $a \leq b \implies a - c \leq b - c$

Preservación del Producto Positivo

- **DES4** $a < b \wedge c > 0 \implies ac < bc$
- **DES4** $a \leq b \wedge c > 0 \implies ac \leq bc$

Reversión del Producto Negativo

- **DES5** $a < b \wedge c < 0 \implies ac > bc$
- **DES5** $a \leq b \wedge c < 0 \implies ac \geq bc$

Recíprocos positivos

Si $a, b > 0 \implies$

- **DES6** $a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- **DES6** $a \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Recíprocos negativos

Si $a, b < 0, \implies$

- **DES7** $a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- **DES7** $a \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Suma de Desigualdades

- **DES8** $a < b \wedge a < d \implies a + c < b + d$
- **DES8** $a \leq b \wedge a \leq d \implies a + c \leq b + d$

Desigualdad de cocientes

Si $a, b, c, d > 0 \implies$

- **DES9** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$

- **DES9** $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc$

Cuadrado de positivos

Si $a, b > 0 \implies$

- **DES10** $a < b \iff a^2 < b^2$
- **DES10** $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

Cuadrado de negativos

Si $a, b < 0 \implies$

- **DES11** $a < b \iff a^2 > b^2$
- **DES11** $a \leq b \iff a^2 \geq b^2$

Raíz

Si $a, b > 0 \implies$

- **DES12** $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$
- **DES12** $a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Valor Absoluto

- **VA0** $|a| = 0 \iff a = 0$
- **VA1** $|a| \geq 0$
- **VA2** $|ab| = |a||b|$
- **VA3** $|-a| = |a|$
- **VA3** $|a - b| = |b - a|$
- **VA4** $|\frac{a}{b}| + \frac{|a|}{|b|}$
- **VA5** $|a + b| \leq |a| + |b|$ **Desigualdad del Triángulo**
- **VA6** $|a| < b \iff -b < a < b$
- **VA6** $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
- **VA7** $a < |b| \iff a < b \vee a < -b$
- **VA7** $a \leq |b| \iff a \leq b \vee a \leq -b$
- **VA8** $|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b$
- **VA9** $\sqrt{a^2} = |a|$
- **VA10** $a^2 < b^2 \iff |a| < |b|$
- **VA11** $a^2 < b^2 \iff \sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$

Límites

Definición de Límite por la Izquierda

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que L es límite de $f(x)$ cuando x tiende a b por la izquierda sí y sólo sí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in Dom(f)$$
$$0 < b - x < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Y se denota como

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

Definición de Límite por la Derecha

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que L es límite de $f(x)$ cuando x tiende a b por la derecha sí y sólo sí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in Dom(f)$$
$$0 < x - b < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Y se denota como

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L$$

Definición de Límite/Límite Bilateral

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que L es límite de $f(x)$ cuando x tiende a b sí y sólo sí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in Dom(f)$$
$$|x - b| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Y se denota como

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

Teorema del Límite Bilateral

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to b} f(x)$ existe $\iff$

1) $\lim_{x \to b^-} f(x)$ y $\lim_{x \to b^+} f(x)$ existen

2) $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x)$
Por lo tanto,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x)$$

Teorema Invisible (Propiedades básicas de límites)

Límites por la izquierda

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x \to c^-} g(x) = L_2$$

Entonces,

Suma de límites

$$\lim_{x \to c^-} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 = \lim_{x \to c^-} f(x) + \lim_{x \to c^-} g(x)$$

Resta de límites

$$\lim_{x \to c^-} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2 = \lim_{x \to c^-} f(x) - \lim_{x \to c^-} g(x)$$

Producto de límites

$$\lim_{x \to c^-} (f(x) * g(x)) = L_1 * L_2 = \lim_{x \to c^-} f(x) * \lim_{x \to c^-} g(x)$$

División de límites

$$g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x \to c^-} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim_{x \to c^-} f(x)}{\lim_{x \to c^-} g(x)}$$

Multiplicación por constante

$$d \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to c^-} (df(x)) = dL_1 = d(\lim_{x \to c^-} f(x))$$

Límites por la derecha

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x\to c^+} g(x) = L_2$$

Entonces,

Suma de límites

$$\lim_{x\to c^+}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2 = \lim_{x\to c^+} f(x) + \lim_{x\to c^+} g(x)$$

Resta de límites

$$\lim_{x\to c^+}(f(x)-g(x)) = L_1 - L_2 = \lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^+} g(x)$$

Producto de límites

$$\lim_{x\to c^+}(f(x)*g(x)) = L_1 * L_2 = \lim_{x\to c^+} f(x) * \lim_{x\to c^+} g(x)$$

División de límites

$$g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x\to c^+}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim_{x\to c^+} f(x)}{\lim_{x\to c^+} g(x)}$$

Multiplicación por constante

$$d \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to c^+}(df(x)) = dL_1 = d(\lim_{x\to c^+} f(x))$$

Límites bilaterales

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x\to c} g(x) = L_2$$

Entonces,

Suma de límites

$$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

Resta de límites

$$\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2 = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

Producto de límites

$$\lim_{x \to c}(f(x) * g(x)) = L_1 * L_2 = \lim_{x \to c} f(x) * \lim_{x \to c} g(x)$$

División de límites

$$g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x \to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

Multiplicación por constante

$$d \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to c}(df(x)) = dL_1 = d(\lim_{x \to c} f(x))$$

Los Límites más conocidos

Constante

$$\lim_{x \to a}(c) = c$$

Polinomio

Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 \implies \lim_{x \to b} f(x)$ siempre existe y, además

$$\lim_{x \to b} f(x) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0$$

Raíz n-ésima

Si $f(x) = \sqrt[n]{x}$ entonces,

- Si $b \geq 0$ y n es par
$$\lim_{x \to b} f(x) = \sqrt[n]{b}$$
- Si n es impar, $\forall b \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x \to b} f(x) = \sqrt[n]{b}$$

Elevación a la n potencia

Si $f(x) = x^n$, con $n, b \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to b} f(x) = b^n$$

Seno de x - $\sin(x)$

$$\lim_{x \to b} \sin(x) = \sin(b)$$

Coseno de x - $\cos(x)$

$$\lim_{x \to b} \cos(x) = \cos(b)$$

Tangente de x - $\tan(x)$

$$\forall b \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\lim_{x \to b} \tan(x) = \tan(b)$$

Nota

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Co-tangente de x - $\cot(x)$

$$\forall b \in \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\lim_{x \to b} \cot(x) = \cot(b)$$

Secante de x - $\sec(x)$

$$\forall b \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\lim_{x \to b} \sec(x) = \sec(b)$$

Cosecante de x - $\csc(x)$

$$\forall b \in \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\lim_{x \to b} \csc(x) = \csc(b)$$

Logaritmo natural - $\ln(x)$

$$\forall b \in (0, \infty)$$
$$\lim_{x \to b} \ln(x) = \ln(b)$$

Logaritmo base a - $\log_a(x)$

$$\forall a, b \in (0, \infty)$$
$$\lim_{x \to b} \log_a(x) = \log_a(b)$$

Elevación a la x potencia

$$\forall b \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to b} 2^x = 2^b$$

Límite Estrella ★

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Nota El teorema anterior también es válido para límites izquierdos y derechos.

Teorema del Sandwich

Sean $f(x), g(x)$ y $h(x)$ funciones definidas en un intérvalo I, excepto quizá en $c \in I$,tales que se cumple

$$\forall x \in I$$
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

y

$$\lim_{x \to c} f(x) = L = \lim_{x \to c} h(x)$$

Entonces,

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Definición de límite al infinito

Sea $f(x)$ una función. Se dice que $L \in R$ es límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x \in Dom(f)$$
$$x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Y se denota como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Definición de límite al menos infinito

Sea $f(x)$ una función. Se dice que $L \in R$ es límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M < 0 : \forall x \in Dom(f)$$
$$x < M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Y se denota como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Definición de Asíntota horizontal

Se dice que la recta $y = L \in \mathbb{R}$ (constante) es asíntota horizontal de la función $f(x)$ sí y sólo si ocurre al menos uno de los siguientes casos:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Límite común al infinito/menos infinito

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$