DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

ANDRES FELIPE PRIETO

Código: 764212271

Grupo: 601

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

FACULTAD DE INGENIERIA, PROGRAMA DE INGENIERIA INDUSTRIAL

SEDE SOACHA

CUNDINAMARCA, COLOMBIA

2015

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

ANDRES FELIPE PRIETO ALARCON

Código: 764212271

Grupo:401

Trabajo de investigación de la distribución de Poisson, la distribución exponencial y la distribución normal

Ing. Carlos Alfonso Gómez García

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

FACULTAD DE INGENIERIA, PROGRAMA DE INGENIERIA INDUSTRIAL

SEDE SOACHA

CUNDINAMARCA, COLOMBIA

2015

TABLA DE CONTENIDO

MARCO TEORICO

Las variables aleatorias son definidas a través de características cuantificables por conteo o por medición para experimentos aleatorios, dicho en otras palabras son variables ya que el valor o resultado cambia de una variable a otra y son aleatorias debido a que su comportamiento es impredecible, en la caracterización de un fenómeno o proceso natural se establecen los posibles valores que puede asumir la variable y sus respectivas ocurrencias , el resultado de establecer los valores que puede asumir la variable genera un nuevo espacio muestral numérico de un experimento aleatorio, es decir el rango o recorrido espacial y la asignación de la ocurrencia a los respectivos valores se efectúa haciendo uso de funciones de la probabilidad las cuales describen el comportamiento de cada resultado de un rango espacial en términos de probabilidad. Las variables aleatorias están categorizadas de acuerdo a su rango espacial, para variables cuyo rango espacial está definido por un numero finito o infinito de valores se le denominan variables discretas y para variables cuyo rango espacial está definido por un número infinito de valores dentro de un intervalo dado se le denominan variables continuas,

TIPO DE VARIABLE ALEATORIA	AXIOMAS PROBABILISTICOS		
	Axioma de positividad	**Axioma de certidumbre**	**Axioma de adición**
VARIABLES DISCRETAS			
$\boldsymbol{R_x = \{x_1, x_{2,} x_{3\ldots} x_n\}}$	$\boldsymbol{0 \leq p(x) \leq 1}$	$\boldsymbol{\sum_{R_x} p(x) = 1}$	$\boldsymbol{(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_1}^{x_2} p(x)}$
VARIABLES CONTINUAS			
$\boldsymbol{R_x = \{X_{(s)} = x \ / \ x_1 \leq X \leq x_2\}}$	$\boldsymbol{0 \leq f(x) \leq 1}$	$\boldsymbol{\int_{R_x} f(x) dx = 1}$	$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx}$

Parámetros de la distribución de una variable aleatoria discreta y continua

Para describir el comportamiento de una variable para efectos prácticos se usan tres parámetros los dos primeros son la media y la varianza que son los cálculos mas importantes para caracterizar la variable aleatoria, el tercer parámetro es la desviación estándar pero este parámetro solo se puede calcular aplicando la raíz a la varianza, es decir que esta debe estar previamente calculada.

TIPO DE VARIABLE ALEATORIA	PARAMETROS		
	Media	**Varianza**	**Desviación estándar**
VARIABLES DISCRETAS	$\boldsymbol{\mu = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)x_i}$	$\boldsymbol{\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)(x_i - \mu)^2}$	$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)(x_i - \mu)^2}}$
VARIABLES CONTINUAS}	$\boldsymbol{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx}$	$\boldsymbol{\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx}$	$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx}}$

Distribuciones discretas

Distribución de Poisson

Esta distribución fue desarrollada por el matemático francés Simeon Poisson (1781-1840), la distribución de Poisson determina la probabilidad de ocurrencia de un resultado en e el tiempo o en el espacio, esto es medir la probabilidad de ocurrencia de un evento sobre un intervalo de tiempo o espacio definido.

Características

1. Los eventos se producen aleatoriamente en un intervalo de tiempo o región y no en un número definido de repeticiones, en donde el numero de resultados que ocurren en dicho intervalo o región dado es independiente del numero de resultados que ocurren en cualquier otro intervalo de tiempo o región del espacio disjunto.
2. La frecuencia de ocurrencia de un evento es tan baja con relación a la frecuencia de no ocurrencia que se considera como *sucesos raros y* para la probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región, y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo de tiempo o región.
3. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo de tiempo corto que caiga en tal región pequeña es insignificante.

   La probabilidad de ocurrencia es constante par

   Su aproximación a la binomial sucede cuando p es muy cercano a cero , o n superior a 30. $(p < 0.1,\ n > 30)$,

Función de probabilidad

$$\boldsymbol{f(x) = P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}}$$
$$\boldsymbol{si \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n}$$
$$\boldsymbol{= 0 \qquad en\ otro\ caso}$$

Función de probabilidad acumulada

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{0}^{x} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}}$$
$$\boldsymbol{= 0 \qquad en\ otro\ caso}$$

Donde

$\boldsymbol{X} =$ Número de éxitos en la unidad de tiempo o de espacio considerado
$\boldsymbol{\mu = E(x) = \sigma_x^2} =$ Media aritmética de la variable
$\boldsymbol{e} = 2.71828$ Constante (base de los logaritmos naturales)

$$\boldsymbol{E(x) = \mu}$$
$$\boldsymbol{Var(x) = \mu}$$

Distribuciones continuas

Distribución exponencial

Una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ tiene una distribucion exponencial y se conoce como una variable aleatoria exponencial,

Características

1. Se utiliza para modelar tiempos de espera hasta la ocurrencia de un cierto evento de interés, se utiliza con frecuencia para modelar tiempos de funcionamiento (tiempo de vida), es decir el tiempo que transcurra antes de que ocurra un fallo, aparte de la modelación de tiempo entre eventos también se puede modelar distancia entre eventos, volumen entre eventos entre otros.
2. Para un evento que ocurre al azar varias veces a lo largo del tiempo, los tiempo de inter ocurrencia son independientes uno del otro y todos tienen una distribución exp (λ)
   Sea $Nt = numero\ eventos\ que\ ocurre\ en\ (0, t)$
   Entonces $Nt \sim Poisson\ \ (\lambda a)$
   Relación entre la distribución exponencial y la distribución de Poisson

La diferencia de la distribución de Poisson a la distribución exponencial, está dada para el caso de la distribución de Poisson, esta describe las tasas de llegadas (de personas, llamadas telefónicas, entre otros) dentro de algún periodo dado, dicho en otras palabras mide el numero de ocurrencias sobre algún intervalo del tiempo espacio, mientras que la distribución exponencial estima el lapso entre tales arribos, es decir mide el lapso de tiempo entre tales ocurrencias

Propiedad de pérdida de memoria

$$\boldsymbol{P(X > s + t \,/\, X > t) = P(X > s)} \qquad \forall\, \boldsymbol{s, t} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\boldsymbol{P[(X > s + t) \cap (X > t)]}}{\boldsymbol{P(X > t)}} = \boldsymbol{P(X > s)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)}$$

$\boldsymbol{Demostracion}$

$$\boldsymbol{e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda(s)}e^{-\lambda(t)}}$$

Si la variable aleatoria X representa el tiempo de espera, entonces la probabilidad de que el tiempo de espera sea mayor a s + t dado que el tiempo de espera ha sido mayor a t es decir se han esperado t unidades de tiempo y se pide la probabilidad de que el tiempo de espera sea por lo menos s unidades adicionales de tiempo, esta probabilidad coincide con la probabilidad de que originalmente haya que esperar s unidades de tiempo, de esta forma el tiempo de t unidades que ha esperado queda olvidado como si el tiempo de espera comenzara de cero

.

Función de densidad	**Función de distribución**
$\boldsymbol{f(x) = P(X) = \mu\, e^{-\mu x}} \quad \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{\mu} > 0$	$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\mu x}}\ \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{\mu} > 0$

Donde

t= lapso de tiempo
$\boldsymbol{\mu}$ =Promedio de ocurrencia
$\boldsymbol{e}$ = 2.71828 Constante (base de los logaritmos naturales)

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\mu}}$$

$$\boldsymbol{Var(X) = \frac{1}{\mu^2}}$$

Distribución de Normal

La distribución normal fue desarrollada en 1733 por el matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754) la curva que genero las variables aleatorias De Moivre la llamo curva exponencial con forma de campana, esta fue demostrada en 1809 por el científico alemán Karl Friedrick Gauss (1777-1855) como resultado la curva con forma de campana fue denominada campana o curva Gaussiana .

Propiedades de la distribución normal[1]

1. El área total que encierra la curva y el eje X es igual a 1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
2. Es simétrica con respecto al eje vertical $X = \mu$, ya que $f(x)$ sólo depende de x Mediante la expresión $(x-\mu)^2$.
$$f[(x+\mu)] = f[-(x-\mu)]$$
3. La densidad es simétrica alrededor de μ
El valor máximo de f ocurre en $x = \mu$.
$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$
4. $f(x) \geq 0$ para todo x
5. Tiene al eje X como una asíntota horizontal, ya que
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$
6. Tiene puntos de inflexión $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$, por tanto, es cóncava hacia abajo en el intervalo $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$, y cóncava hacia arriba en cualquier otra parte.

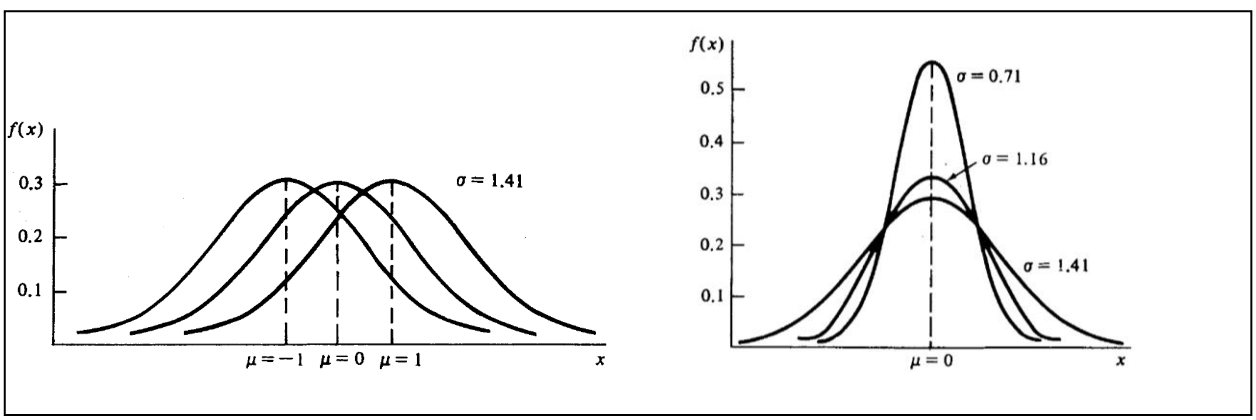


Figura 1 Grafica de la función de densidad normal para diferentes valores de μ y σ [2]

[1] CORDOVA, M. Estadística Descriptiva e inferencial: aplicaciones 5 ed. , Perú, editorial MOSHERA S.R.L , 2003 , 290p.

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad para\ -\infty < x < \infty$$
$$= 0 \qquad en\ otro\ caso$$

Función de distribución

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde

$\boldsymbol{X} =$ Variable aleatoria distribuida normalmente
$\boldsymbol{\mu_x} =$ Media aritmética de la variable
$\boldsymbol{\sigma_x^2} =$ Varianza de la variable
$\boldsymbol{e} =$ 2.71828 constante (base de los logaritmos naturales)
$\boldsymbol{\pi} =$ 3.1416 constante

$$E(X) = \mu_x$$

$$Var(X) = \sigma_x^2$$

Distribución de Normal estándar

Para los valores de la función acumulativa de la distribución normal a diferencia de otras distribuciones a la distribución normal no es posible tal aplicación debido a que para las variables continuas existen infinitos valores de μ yσ , tabulando. Las probabilidades acumuladas para una única distribución, con valores de μ yσ específicos, y mediante el procedimiento de tipificación se puede transformar cualquier variable normal en esta variable estándar o patrón.las tablas de la función acumulada $\Phi(z)$, proporciona los valores de integración entre $-\infty$ y un dado valor de Z. La variable normal estándar , unitaria o tipificada es aquella cuya función tiene como parámetro $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, dicha variable se identifica como Z

Tipificación de una variable normal

Cada Z es el numero de desviaciones estándar separado de la media

Función de densidad de la variable Z

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$= 0 \qquad en\ otro\ caso$$

[2] CANAVOS, G. Probabilidad y estadística Aplicaciones y métodos 1 ed., México: Mc GRAE-HILL Interamericana de México S.A. 1988 , 132p.

Se representa como $Z \sim N(0,1)$, la variable Z se distribuye normalmente con media $\mu_z = 0$ y $\sigma_z = 1$

Transformación de X en Z

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \xrightarrow{Z = \frac{x-\mu}{\sigma}} \qquad f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$\mu \neq 0 \; ; \; \sigma \neq 1$ $\qquad$ $\mu = 0 \; ; \sigma = 1$

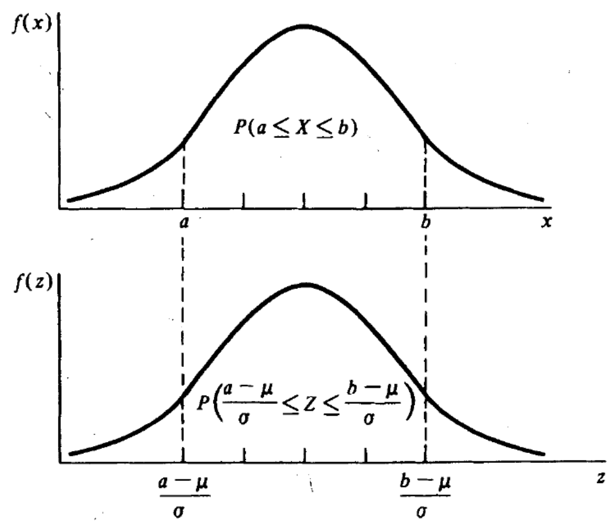
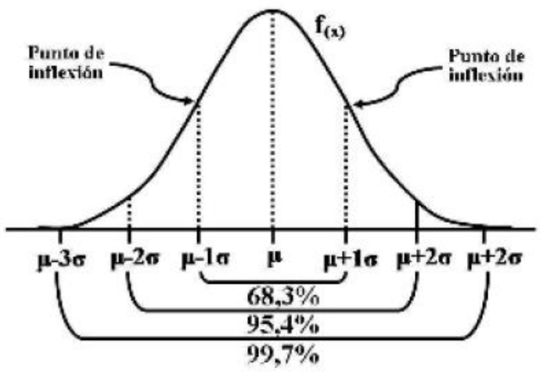


Figura 2 Correspondencia entre las probabilidades de X y de Z[3]

[3] CANAVOS, G. Probabilidad y estadística Aplicaciones y métodos 1 ed., México: Mc GRAE-HILL Interamericana de México S.A. 1988 , 137p.

Regla empírica de la normal

la regla empírica de la normal que es una norma de distribución normal o distribución Gaussiana, esta regla dice que teniendo un conjunto de datos que se distribuye como una distribución normal los porcentajes de los datos son



1ª **Desviación estándar alrededor de la media:** 68,3 % de los datos

2ª **Desviación estándar alrededor de la media:** 95,4 % de los datos

3ª **Desviación estándar alrededor de la media:** 99,7 % de los datos

Figura 3 .Regla empírica de la normal [4]

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Modelos probabilísticos discretos

Modelo Poisson

1. Un corredor de bolsa llama a sus 20 más importantes clientes cada mañana. Si la probabilidad de que efectúe una transacción como resultado de dichas llamadas es de uno a tres, ¿cuáles son las posibilidades de que maneje 10 o más transacciones?
   $\mu = \lambda t$
   $\mu = (1/3)20$=6,6667 clientes
   $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$
   $$P(X \geq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = 0.1374$$
   La probabilidad de que maneje 10 o más transacciones es de 13,7% a partir de la media de 7 clientes

2. Un estudio de un inventario determina que, en promedio, el numero de veces al día que se solicita un articulo especifico en un almacén es 5. .Cual es la probabilidad de que en un día determinado este articulo se pida

[4] Astrometría: (2011) Consultado [8 de May. Del 2015] Disponible en< http://www.oac.uncor.edu/documentos/materias/clases.pdf >.

a) más de 5 veces?

μ=5 pedidos

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

$$P(X \geq 6) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = 0.384$$

b) ninguna vez?

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}5^{0}}{0!} = 0.0067$$

3. A un conmutador de la oficina principal de la compañía llegan llamadas a un promedio de dos por minuto y se sabe que tiene distribución Poisson. Si el operador esta distraído por un minuto, cual es la probabilidad de que el número de llamadas no respondidas sea:

a) ¿Cero?

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = 0.1353$$

b) ¿Por lo menos una?

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.8647$

c) ¿Entre 3 y 5, inclusive?

$$P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = 03068$$

4. Un proceso de fabricación utilizado para hacer artefactos plásticos Incas presenta una tasa de defectos de 5 por cada 100 unidades se envían a los distribuidores en lotes de 200, Si la probabilidad de que más de 3 salgan defectuosos supera al 30%, usted planea vender en su lugar, camisetas Grateful Dead. ¿Cuál articulo agregará usted al inventario?

$P(X > 3) > 0.30$

$P(X \geq 4) > 0.30$

$$1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} > 0.30$$

$0{,}9897 > 0.30$

Agregaría las camisetas Grateful Dead.al inventario ya que la proporción de defectos para los artefactos plásticos presentan un incremento del 98,97% cuando son más de 3 defectos.

5. Usted compra partes para bicicleta de un proveedor en Toledo que tiene 3 defectos por cada 100 partes. Usted esta en el mercado para comprar 150 partes pero no aceptara una probabilidad de más del 50% de que mas de dos partes sean defectuosas ¿Usted le compraría a dicho proveedor?

$$P(X > 2) > 0.50$$

$$P(X \geq 3) > 0.50$$

$$1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} > 0.50$$

$$0{,}9389 > 0.50$$

Claramente no compraría a dicho proveedor ya que supera el 50% respecto a si salen más de dos partes defectuosas

Modelos probabilísticos continuos

Modelo exponencial

1. Los aviones llegan al pequeño aeropuerto en Puerto Vallarta, México a una proporción de dos por hora tomará una hora reparar una rampa utilizada para desembarcar pasajeros.
   ¿Cuál es la probabilidad de que un avión llegue mientras que la rampa esta en reparación?
   $P(X \leq 1) = 1 - e^{-(2)(1)} = 0{,}8647$
   La probabilidad de que un avión llegue mientras que la rampa esta en reparación es de un 86,5%
2. El computador principal de la universidad queda fuera de línea tres veces por semana. El profesor Mundane debe completar un proyecto esta semana que requiere del computador.
   ¿Cuál es la probabilidad de que el computador este fuera de línea toda la semana?
   $P(X \leq 1) = 1 - e^{-(3)(1)} = 0{,}9502$

¿Cuál es la probabilidad de que el computador este fuera de línea por cualquier periodo de dos semanas?

$P(X \leq 2) = 1 - e^{-(3)(2)} = 0{,}9975$

3. Durante un día de trabajo típico de 8 horas. Los computadores utilizados para vigilar la etapa de enfriamiento en la producción de neumáticos para autos señala que la temperatura no se mantiene de forma apropiada en 30 oportunidades. El Sr Radial, director ejecutivo de la compañía, está por hacer una inspección de la planta durante 30 minutos.

   ¿Cuál es la probabilidad de que este allí cuando se active la señal del computador?

   $P(X \leq 30) = 1 - e^{-\left(\frac{30}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{,}84664$

4. Ejemplo 7.21[5] :El tiempo durante el cual cierta marca de batería trabaja en forma efectiva hasta que falle (tiempo de falla) se distribuye según el modelo exponencial con un tiempo promedio de fallas igual a 360 días.

   Sea $X =$ el tiempo que trabaja la batería hasta que falle. El tiempo promedio de falla es de 360 días. Entonces, $X \sim$exp $(\mu = 1/360)$ su función de densidad es:

   $f(x) = \dfrac{1}{360} e^{-x/360} \qquad 0 \leq x < \infty$

a) ¿Qué probabilidad hay que el tiempo de falla sea mayor que 400 días?. Esta Probabilidad es conocida también como confiabilidad de la batería.

   $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = e^{-\beta x} \qquad 0 \leq x \leq \infty$

   $P(X > 400) = e^{-400/360} = 0.329$

b) Si una de estas baterías ha trabajado ya 400 días, ¿qué probabilidad hay que trabaje más de 200 días más?.

   $P(X > 400 + 200 \ / \ X > 360) = P(X > 200) = e^{-\frac{200}{360}} = 0.574$

c) Si se están usando 5 de tales baterías calcular la probabilidad de que más de dos de ellas continúen trabajando después de 360 días.

   La probabilidad de que una batería trabaje más de 360 días es:

   $P = P(X > 360) = e^{-360/360} = e^{-1} = 0.368$

   Sea $Y =$ numero de baterias de 5 que siguen trabajando despues de 360 dias

   $Y \sim B(5, p)$,y

   $$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} C_x^5 (0.368)^x (0.632)^{5-x} = 0.26376$$

[5] CORDOVA, M. Estadística Descriptiva e inferencial :aplicaciones 5 ed. , Perú, editorial MOSHERA S.R.L , 2003 , 304p.

Modelo normal

1. Los paquetes de cereal Cheerios de General Mills vienen en cajas de 36 onzas que tienen una desviación estándar de 1.9 onzas. Se piensa que los pesos están distribuidos normalmente. Si se selecciona una caja aleatoriamente, cual es la probabilidad de que la caja pese.

a) ¿Menos de 34.8 onzas ?

$$P(X < 34.8) = P\left(Z < \frac{34.8 - 36}{1.9}\right) = P(Z < -0.63) = 0.26435$$

b) ¿Más de 34.8 onzas?

$$P(X > 34.8) = P\left(Z > \frac{34.8 - 36}{1.9}\right) = P(Z > 0.63) = (0.5 + 0.23565)$$
$$= 0.73565$$

c) ¿Entre 34.3 onzas y 38.9 onzas?

$$P(34.3 \leq X < 38.9) = P\left(\frac{34.3 - 36}{1.9} \leq Z < \frac{38.9 - 36}{1.9}\right)$$
$$= P(-0.89 \leq Z < 1.53) = (0.31327 + 0.43699) = 0.75026$$

d) ¿Entre 39.5 onzas y 41 onzas?

$$P(39.5 \leq X < 41.1) = P\left(\frac{39.5 - 36}{1.9} \leq Z < \frac{41.1 - 36}{1.9}\right) = P(1.84 \leq Z < 2.68)$$
$$= (0.31327 + 0.43699) = 0.75026$$

2. Como ingeniero constructor usted compra bolsa de cemento de un promedio de 50 libras, con una desviación estándar de 5.2 libras. Desde que usted tuvo el accidente escalando una montaña, el médico le dijo que no levantara nada que pesara más de 60 libras. ¿Debería usted carga una bolsa?

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60 - 50}{5.2}\right) = P(Z > 1.92) = (0.5 - 0.47257) = 0.02743$$

Si podría cargar una bolsa ya que hay una probabilidad de 2.7% que es pequeña de que pueda levantar más de 60 libras

3. Se publica que los frenos de los nuevos autos de la marca Lambourginis duran un promedio de 35.000 millas con una desviación estándar de 1,114 millas. Cual es la probabilidad de que los frenos del auto que usted acaba de comprar le duren:

a) ¿Más de 35,000 millas?

$$P(X > 35{,}000\,) = P\left(Z > \frac{35{,}000\ - 35{,}000}{1{,}114}\right) = P(Z > 0) = (0.5 + 0) = 0.5$$

b) ¿Menos de 33,900 millas?

$$P(X < 33{,}900) = P\left(Z < \frac{33{,}900 - 35{,}000}{1{,}114}\right) = P(Z < -0.99) = 0.16109$$

c) ¿Menos de 37,500 millas?

$$P(X < 37{,}500) = P\left(Z < \frac{37{,}500 - 35{,}000}{1{,}114}\right) = P(Z < 2.24) = 0.98745$$

d) ¿Entre 35,200 y 36,900 millas?

$$P(35{,}200 \leq X < 36{,}900) = P\left(\frac{35{,}200 - 35{,}000}{1{,}114} \leq Z < \frac{36{,}900 - 35{,}000}{1{,}114}\right)$$

$$= P(0.18 \leq Z < 1.71) = (0.45637 - 0.07142) = 0.38495$$

4. Los sobrecostos por actualización de computadores en su empresa tiene un promedio de US$23,500, con una desviación estándar de US$9,400, Como director ejecutivo de la División de Investigación, usted no desea arriesgarse a mas de 34% de probabilidad que el sobrecosto en una actualización propuesta recientemente exceda de US$25,000 ¿Debería ejecutar la actualización ?

$$P(X > 25{,}000\ \ ) = P\left(Z > \frac{25{,}000\ - 23{,}500}{9{,}400}\right) = P(Z > 0.16) = (0.5 - 0.06356)$$

$$= 0.43644$$

No la ejecutaría ya que hay un 43,6% de sobrecostos

5. El promedio de los salarios en los bancos comerciales en Hilinois es de US$22,87 por hora, con una desviación estándar de US$5,87, Cual debe ser su salario por hora si desea ganar:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a) ¿Más que el 80% de todos los empleados?

$$0.84 = \frac{X - 22.87}{5.87} = 27.80$$

=US$27.80

b) ¿Más que el 30% de todos los empleados?

$$-0.52 = \frac{X - 22.87}{5.87} = 19.82$$

=US$19.82

c) ¿Menos que el 20% de todos los empleados?

$$0.84 = \frac{X - 22.87}{5.87} = 27.80$$

=US$27.80

d) ¿Más que el 50% de todos los empleados?

$$0 = \frac{X - 22.87}{5.87} = 22.87$$

=US$22.87

6. Los empleados en Coopers-Price and Lybrand trabajan un promedio de 55.8 horas por semana, con una desviación estándar de 9.8 horas. Los ascensos son más probables para los empleados que están dentro del 10% de los que pasan más tiempo trabajando. ¿Cuánto debe trabajar usted para mejorar sus oportunidades de ascenso?

$$1.28 = \frac{X - 55.8}{9.8} = 40.344$$

Debería trabajar 40.344 horas o más por semana para que mejoren las oportunidades de ascenso.

7. Los registros muestran que 45% de todos los automóviles producidos por Ford Motor Company contiene partes de Japón ¿Cuál es la probabilidad de que los próximos 200 carros, 115 contengan partes japonesas?

$$P(X = x) = \binom{n}{x} P^X (1 - P)^{n-x}$$

$$n = 200$$

$$x = 115$$

$$p = 0.45$$

$$P(X = 115) = \binom{200}{115} (0.45)^{115} (0.55)^{200-115} = ?$$

Aproximación a la distribución normal

$$\mu = np$$

$$\mu = (200)(0.45) = 90$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

$$\sigma = \sqrt{(200)(0.45)(0.55)} = 7.036$$

$$P(114.5 \le X < 115.5)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{115{,}5 - 90}{7.036} = 3.62$$

$$Z = \frac{114{,}5 - 90}{7.036} = 3.48$$

$$P(114.5 \le X < 115.5) = (0.49985 - 0.49975) = 0.0001$$

REFERENCIAS

- Astrometría: (2011) Consultado [8 de May. Del 2015] Disponible en< http://www.oac.uncor.edu/documentos/materias/clases.pdf >.

- CANAVOS, G. Probabilidad y estadística Aplicaciones y métodos 1 ed., México: Mc GRAE-HILL Interamericana de México S.A. 1988 , p.

- CORDOVA, M. Estadística Descriptiva e inferencial: aplicaciones 5 ed. , Perú, editorial MOSHERA S.R.L , 2003 ,p.

- MONTGOMERY, D y HINES, W. Probabilidad y estadística para ingeniería y administración 3 ed. México: editorial continental S.A.1993 , p.

- WEBSTER, A. Estadística aplicada a los negocios y la economía 3 ed. Santafé de Bogotá: McGRAW-HILL Interamericana S.A ,2000 , p.

ANEXO

Distribución de Poisson

Desarrollo de la distribución de Poisson a partir de la Binomial

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots . n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!} \left[\frac{\lambda}{n}\right]^x \left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right] \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

Al dejar que $n \to \infty$ y $p \to 0$ de manera tal que $np = \lambda$ permanezca fijo, los términos $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{x-1}{n}\right)$ todos se aproximan a 1 como lo hace $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$ Sabemos ahora que $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$ cuando $n \to \infty$ por consiguiente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Donde λ es el número de ocurrencia del evento de interés en una unidad de espacio (o tiempo) para cualquier otro valor del espacio (o tiempo) la función de probabilidad será:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda a}(\lambda t)^x}{x!}$$

Donde t es un factor de proporcionalidad que permite calcular el número de ocurrencias del éxito en un tiempo o espacio dado diferente a la unidad, se hace $\lambda t = \mu$ y la función de probabilidad para modelo Poisson

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

Con μ es el numero promedio de ocurrencia en un espacio o tiempo dado y x el numero de veces que ocurre el éxito en ese mismo espacio o tiempo.

Distribución exponencial

Desarrollo de la distribución exponencial a partir de la gamma

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(\mu x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mu e^{-\mu x}}$$

Cuando $\boldsymbol{\alpha = 1}$ se obtiene la distribución exponencial

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(\mu x)^{1-1}}{\Gamma(1)}\mu e^{-\mu x}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \mu e^{-\mu x}}$$

Desarrollo de la distribución exponencial a partir de la poisson

Para los postulados de Poisson , fijamos el tiempo en algún valor $\boldsymbol{t}$***,*** y desarrollamos la distribución del numero de ocurrencias es el intervalo$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t})$ indicamos esta variable como $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{P(X) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots}$$

$$\boldsymbol{= 0 \qquad\qquad en\ otro\ caso}$$

Consideremos a hora a $\boldsymbol{P(0)}$,que es la probabilidad de ninguna ocurrencia en $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t})$ esta dada por

$$\boldsymbol{P(0) = e^{-\lambda t}}$$

Recuérdese que en principio fijamos el tiempo en ***t.*** Otra interpretación de *p(0)* = es ***e- I'*** es que ésta es la probabilidad de que el tiempo para la primera ocurrencia sea mayor que ***t.*** AI considerar este tiempo como una variable aleatoria ***t,*** al considerar este tiempo se tiene

$$\boldsymbol{P(0) = P(T > t) = e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0}$$

Por consiguiente si dejamos que ahora que el tiempo varié y consideramos la aleatoriedad $\boldsymbol{T}$ como el tiempo para la ocurrencia, entonces

$$\boldsymbol{F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0}$$

Y, puesto que $\boldsymbol{f(t) = F'(t)}$ vemos que la densidad es

$$\boldsymbol{\frac{\partial y}{\partial t} = 1 - e^{-\lambda t}}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}}$$

Demostración de la fusión de distribución a partir de la función de densidad

$$f(x) = \int_0^x \mu\, e^{-\mu x}\, dx$$

$$= \mu \int_0^x e^{-\mu x}\, dx$$

$$= \mu\left(-\frac{e^{-\mu x}}{\mu} + \frac{1}{\mu}\right)$$

$$= 1 - e^{-\mu x}$$

Distribución normal y normal estándar

a) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right)$$

$$= P(X \leq \mu + \sigma z)$$

$$= F_X(\mu + \sigma z)$$

Se deriva usando la regla de la cadena

$$F_Z(z) = F_X(\mu + \sigma z)\sigma$$

$$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-((\mu+\sigma z)-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

b) $Z \sim N(0,1) \Rightarrow X = \mu \pm \sigma \sim N(\mu, \sigma^2))$

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$= P(\mu + \sigma z \leq x)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= F_z\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Cambio de variable $u = \frac{y-\mu}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sigma} dy$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sigma} dy$$

Entonces

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$